

**T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**FİBONACCİ VE LUCAS SAYI DİZİLERİNİN BAZI
ÖZEL ALT DİZİLERİ VE UYGULAMALARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Alpaslan KARGIN

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK
Enstitü Bilim Dalı : UYGULAMALI MATEMATİK
Tez Danışmanı : Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR

Mart 2019

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**FİBONACCİ VE LUCAS SAYI DİZİLERİNİN BAZI
ÖZEL ALT DİZİLERİ VE UYGULAMALARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Alpaslan KARGIN

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Enstitü Bilim Dalı : UYGULAMALI MATEMATİK

Bu tez 20.03.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

**Prof. Dr.
Refik KESKİN**

Jüri Başkanı

**Prof. Dr.
Halim ÖZDEMİR**

Üye

**Dr. Öğr. Üyesi
Sibel Kılıçarslan CANSU**

Üye

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.



Alpaslan KARGIN

20.03.2019

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, her konuda bilgi ve desteğini almaktan çekinmediğim, araştırmanın planlanmasından yazılmasına kadar tüm aşamalarında yardımlarını esirgemeyen, teşvik eden, aynı titizlikte beni yönlendiren değerli danışman hocam Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR'e teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans tez çalışması boyunca yardımlarını esirgemeyen Arş. Gör. Dr. Emre KİŞİ'ye teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitimim süresince yanımda olan eşime ve aileme sonsuz sevgi ve minnettarlığımı belirtmek isterim.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	i
İÇİNDEKİLER.....	ii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	iv
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	v
TABLolar LİSTESİ.....	vi
ÖZET.....	vii
SUMMARY.....	viii
BÖLÜM 1.	
GİRİŞ.....	1
1.1. Fibonacci, Lucas ve Kriptoloji.....	1
BÖLÜM 2.	
TEMEL KAVRAMLAR.....	4
BÖLÜM 3.	
TEK VE ÇİFT FİBONACCİ, LUCAS VE GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ SAYI DİZİLERİ.....	11
3.1. Tek ve Çift İndisli Fibonacci Sayı Dizileri.....	11
3.2. Tek ve Çift İndisli Lucas Sayı Dizileri.....	14
3.3. Tek ve Çift İndisli Genelleştirilmiş Fibonacci Sayı Dizileri.....	17
BÖLÜM 4.	
UYGULAMALAR.....	27
4.1. Kriptoloji Üzerine Örnek Kurgular.....	27

BÖLÜM 5.

TARTIŞMA VE SONUÇ..... 36

KAYNAKÇA..... 38



SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

F	: Fibonacci Sayıları
$F_{\mathcal{C}}$	: Çift indisli Fibonacci Sayıları
F_T	: Tek indisli Fibonacci Sayıları
G	: Genelleştirilmiş Fibonacci Sayıları
$G_{\mathcal{C}}$	: Çift indisli Genelleştirilmiş Fibonacci Sayıları
G_T	: Tek indisli Genelleştirilmiş Fibonacci Sayıları
L	: Lucas Sayıları
$L_{\mathcal{C}}$	: Çift indisli Lucas Sayıları
L_T	: Tek indisli Lucas Sayıları

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 4.1. kod_kütüphanesi.dat dosya içeriği.....	29
---	----



TABLolar LİSTESİ

Tablo 4.1.	Harf ve noktalama işaretlerinin sayısal karşılığı.....	28
Tablo 4.2.	Uygulama Örnek 1.....	29
Tablo 4.3.	Uygulama Örnek 2.....	31
Tablo 4.4.	Uygulama Örnek 2 Toplam.....	31
Tablo 4.5.	Tek indisli Fibonacci sayıları için sembol karşılıkları.....	32
Tablo 4.6.	Çift indisli Fibonacci sayıları için sembol karşılıkları.....	33
Tablo 4.7.	Uygulama Örnek 3 sesli harfler.....	33
Tablo 4.8.	Uygulama Örnek 3 sessiz harfler	33
Tablo 4.9.	Tek indisli Genelleştirilmiş Fibonacci sayıları için sembol karşılıkları.....	34
Tablo 4.10.	Çift indisli Genelleştirilmiş Fibonacci sayıları için sembol karşılıkları.....	35
Tablo 4.11.	Uygulama örnek 4 sesli harfler.....	35
Tablo 4.12.	Uygulama örnek 4 sessiz harfler	35

ÖZET

Anahtar Kelimeler: Fibonacci, Lucas, Genelleştirilmiş Fibonacci Sayıları, Süper-artan dizi, Kriptoloji

Çalışmada, öncelikle Fibonacci, Lucas ve Genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizileri ile ilgili bazı temel özellikler özetlenmiştir. Sonra bu sayı dizilerinin tek ve çift indisli tüm farklı sonlu alt kümelerindeki sayıların toplamalarının da farklı oldukları ayrı ayrı ispatlanmıştır. Ayrıca, bu alt kümelerin bir süper-artan dizi olduğu gösterilmiştir. Son olarak elde edilen bu temel özelliğin kriptolojide kullanılabilirliğini açıklamak adına bazı kurgusal örnekler verilmiştir.

SOME SPECIAL SUBGROUPS AND APPLICATIONS OF FIBONACCI AND LUCAS NUMBER SEQUENCES

SUMMARY

Anahtar Kelimeler: Fibonacci Numbers, Lucas Numbers, Generalized Fibonacci Numbers, Cryptology

In this study, Fibonacci, Lucas and Generalized Fibonacci numbers and some related basic properties are summarized. Then, it is proved seperately that sums of all numbers in all finite and different subsets consisting of odd or even indexed elements of these sequences are also different. In addition, some fictional examples are given to explain the usability of this basic feature in cryptography.

BÖLÜM I. GİRİŞ

1.1. Fibonacci, Lucas ve Kriptoloji

Leonardo Fibonacci: 12.-13. yüzyıllarda yaşamış İtalyan matematikçidir. Pisa şehrinde doğan Leonardo çocukluğunu Cezayir’de geçirmiştir. İlk matematik bilgilerini Müslüman eğitimcilerden almış olup küçük yaşta Arap sayı sistemini öğrenmiştir. Ülkesindeki kullanılan roma sayı sisteminin kabalığı yanında Arap sayı sisteminin mükemmelliğini gören Fibonacci 1201’de “Liber Abaci” isimli kitabını yazmıştır. Bu kitap Arap sayı sisteminin batı Avrupa’ya girmesinde büyük rol oynamıştır. Bu kitapta bulunan tavşan problemi, ortaçağ matematiğine büyük katkılarda bulunan Fibonacci’nin 600 yıl sonra 19. yüzyılın başlarından günümüze meşhur hale gelmesine sebep olmuştur [1].

Édouard Lucas: Fransız sayı kuramcı Édouard Lucas, Fibonacci’nin adını *Liber Abaci*’deki problemde görülen diziye vermiştir. François Édouard Anatole Lucas ya da bilinen adıyla Édouard Lucas, 1842 yılında Fransa’nın Amiens şehrinde dünyaya geldi. 1861 yılında Fransa’nın o dönem en prestijli yüksek öğrenim kurumu olan École Normale’de eğitime başladı. 1872 yılında, Lycée of Moulins’de matematik alanında profesör oldu [2].

Kriptografi: Finansal, kişisel ve iş hayatındaki bilgilerin paylaşımında güvenliğin sağlanması açısından kiminle haberleşildiğinin bilinmesi, gönderilen bilginin karşı tarafa doğru olarak iletilmesi ve bilgi transferi sırasında bilgilerin başkaları tarafından izlenememesi gerekmektedir. Bu gereksinimleri yerine getirebilmek amacıyla iletişimde anahtarlama yöntemleri kullanılmaya ve geliştirilmeye başlanmıştır. Anahtarlama yöntemleri gönderilen ve alınan verinin değişik şifreleme

algoritmaları kullanılarak gönderici tarafından şifrelenmesi ve alıcı tarafından şifrelenmiş verinin, şifresinin kırılması temeli üzerine kurulmuştur. Bu şekilde ağ üzerinde gönderilen verinin oluşan tehditlerden korunması sağlanmaktadır. Tüm bu ihtiyaçlara dayalı olarak gizli bilim anlamına gelen kriptoloji bilim dalı ortaya çıkmıştır. Kriptoloji; kriptografi ve kriptanaliz bilim dallarına verilen genel addır. 1970'lere kadar bu bilim gerçekten halktan gizli tutulan, devletin çeşitli birimleri arasında gizli haberleşmeyi sağlayan bir teknik olarak ele alınmaktaydı. Kriptografi şifreleme problemlerinde kullanılan matematiksel yöntemlerin bütünü olup “gizli, saklı yazım” anlamına gelmektedir. Kriptanaliz ise “gizli, saklı yazım” olanı çözmek demektir [3].

1.2. Çalışmanın Kapsamı

Bu çalışmada, Fibonacci, Lucas ve Genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizileri ile ilgili tanımlar verilmiş ve bu sayıların sağladığı özellikler incelenmiştir. Ayrıca, bu sayı kümelerinin bazı alt kümeleri üzerinde çalışılmış ve yeni özellikler tanımlanmıştır. Daha sonra yeni özelliklerin ispatları verilmiş ve bu özelliklerin kriptoloji üzerinde uygulamalarına örnekler verilmiştir. Bu uygulamalar hazırlanırken Merkle-Hellman Kripto Sistemi [4] örnek alınmıştır. Alt toplamaları eşit olmayan süper dizilerin tanımlanması ve dizi elemanlarının bir karaktere eşlenmesi ile oluşturulan metinlerin sayısal değerlerine karşılık gelen toplamına şifrelendiği bir sistem olan Merkle-Hellman Kripto Sistemi, bu çalışmada tek veya çift indisli Fibonacci, Lucas ve Genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizileri üzerine kurgulanmıştır. Bu yapılırken elde edilen tek çift indisli sayılardan oluşan alt kümelerdeki elemanların toplamalarının teklik özelliği kullanılmıştır. Bu özelliğin kriptolojide alternatif bir sistematik kurgulama yöntemi verdiği düşünülmektedir.

Bu çalışmada tek ve çift indisli Fibonacci, Lucas ve Genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizileri ele alındı ve sonlu alt kümelerinin elemanlarının toplamının tekliği ile ilgili sonuçlar ortaya koyuldu. Bununla birlikte bu alt kümelerin birer süper-artan dizi

oldukları gösterildi. Ayrıca bu sonuçlardan yararlanarak simetrik bir şifreleme yöntemi geliştirildi.



BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde temel kavramlar ve bazı temel özellikler özetlenmektedir. Çalışma içerisinde $\mathbb{N}$ ile doğal sayılar kümesi (pozitif tam sayılar) gösterilecektir. Yani $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ olarak alınacaktır.

Tanım 2.1. $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ olmak üzere her $n \geq 1$ tamsayısı için $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ şeklinde tanımlanan bağıntılardan elde edilen sayılara *Fibonacci sayıları* denir [5,6].

Bu bağıntının ürettiği tamsayılar dizisine Fibonacci dizisi denir. Bu çalışmada Fibonacci dizisinin elemanlarından oluşan küme F ile gösterilecektir.

Tanım 2.2. $\{F_{2n-1} \mid n \in \mathbb{N}\} = \{F_1, F_3, F_5, \dots, F_{2k-1}, \dots\}$ kümesine *tek indisli Fibonacci sayılar kümesi* diyeceğiz ve bu kümeyi F_T ile göstereceğiz.

Tanım 2.3. $\{F_{2n} \mid n \in \mathbb{N}\} = \{F_2, F_4, F_6, \dots, F_{2k}, \dots\}$ kümesine *çift indisli Fibonacci sayıları kümesi* diyeceğiz ve bu kümeyi $F_{\mathcal{C}}$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.4. Her $n \in \mathbb{N}$ için, $P(n)$ bir önerme olsun ve aşağıdaki iki şart sağlansın:

- (i) $P(1)$ doğru olsun.
- (ii) Her $k \in \mathbb{N}^+$ için $P(k)$ doğru iken $P(k + 1)$ de doğru olsun.

Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $P(n)$ doğrudur [7].

Yardımcı Teorem 2.5.

$n \geq 1$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\sum_{i=1}^n F_{2i} = F_{2n+1} - 1$ dir [5].

İspat: $n \geq 2$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $F_n = F_{n+1} - F_{n-1}$ dir. Buradan,

$$F_2 = F_3 - F_1$$

$$F_4 = F_5 - F_3$$

$$F_6 = F_7 - F_5$$

.

.

.

$$F_{2n} = F_{2n+1} - F_{2n-1}$$

Taraf tarafa toplama işlemi yapılırsa,

$$F_2 + F_4 + F_6 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1} - F_1 \text{ veya}$$

$$\sum_{i=1}^n F_{2i} = F_{2n+1} - 1$$

Elde edilir. ■

Yardımcı Teorem 2.6.

$n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{i=1}^n F_{2i-1} = F_{2n}$ dir [5].

İspat: $F_0 = 0$, $F_1 = F_2 = 1$ ve $n \geq 1$ için $F_n = F_{n+1} - F_{n-1}$ dir. Dolayısıyla

$$F_1 = F_2 - F_0$$

$$F_3 = F_4 - F_2$$

$$F_5 = F_6 - F_4$$

...

$$F_{2n-1} = F_{2n} - F_{2n-2}$$

yazılabilir. Taraf tarafa toplanırsa, $F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n} - F_0$ veya $\sum_{i=1}^n F_{2i-1} = F_{2n}$ elde edilir. ■

Tanım 2.7. $L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ olmak üzere her $n \geq 1$ için $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$ şeklinde tanımlanan bağıntılardan elde edilen sayılara *Lucas sayıları* denir [5,6].

Bu bağıntının ürettiği tamsayılar dizisine Lucas dizisi denir. Bu çalışmada Lucas dizisinin elemanlarından oluşan küme L ile gösterilecektir.

Tanım 2.8. $\{L_{2n-1} \mid n \in \mathbb{N}\} = \{L_1, L_3, L_5, \dots, L_{2k-1}, \dots\}$ kümesine *tek indisli Lucas sayıları* kümesi diyeceğiz ve bu kümeyi L_T ile göstereceğiz.

Tanım 2.9. $\{L_{2n} \mid n \in \mathbb{N}\} = \{L_2, L_4, L_6, \dots, L_{2k}, \dots\}$ kümesine *çift indisli Lucas sayıları* kümesi diyeceğiz ve bu kümeyi L_C ile göstereceğiz.

Yardımcı Teorem 2.10.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{i=1}^n L_{2i} = L_{2n+1} - 1$ dir [5].

İspat: Her $n \geq 2$ tamsayısı için $L_n = L_{n+1} - L_{n-1}$ dir. Buradan,

$$L_2 = L_3 - L_1$$

$$L_4 = L_5 - L_3$$

$$L_6 = L_7 - L_5$$

.

.

.

$$L_{2n} = L_{2n+1} - L_{2n-1}$$

yazılabilir. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$L_2 + L_4 + L_6 + \cdots + L_{2n} = L_{2n+1} - L_1 \text{ veya } \sum_{i=1}^n L_{2i} = L_{2n+1} - 1$$

elde edilir. ■

Yardımcı Teorem 2.11.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{i=1}^n L_{2i-1} = L_{2n} - 2$ dir [5].

İspat: $L_1 = 1, L_2 = 3$ ve her $n \geq 2$ için $L_n = L_{n+1} - L_{n-1}$ dir. Buradan,

$$L_3 = L_4 - L_2$$

$$L_5 = L_6 - L_4$$

.

.

.

$$L_{2n-1} = L_{2n} - L_{2n-2}$$

olur. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$L_3 + L_5 + \cdots + L_{2n-1} = L_{2n} - L_2$ olur. Eşitliğin her iki tarafına L_1 eklenirse

$L_1 + L_3 + L_5 + \cdots + L_{2n-1} = L_{2n} - L_2 + L_1$ olur. Buradan, $\sum_{i=1}^n L_{2i-1} = L_{2n} - 2$ elde edilir. ■

Tanım 2.12. $G_1 = a, G_2 = b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) ve $n \geq 1$ tamsayı olmak üzere $G_{n+2} = G_{n+1} + G_n$ şeklinde tanımlanan sayılara *Genelleştirilmiş Fibonacci Sayıları* adı verilir [5,6].

Bu çalışmada Genelleştirilmiş Fibonacci Sayılarından oluşan küme G ile gösterilecektir.

$G = \{a, b, (a + b), (a + 2b), (2a + 3b), (3a + 5b), (5a + 8b), \dots\}$ elde edilir.

Tanım 2.13. $\{G_{2n-1} \mid n \in \mathbb{N}\} = \{G_1, G_3, G_5, \dots, G_{2k-1}, \dots\}$ kümesine *tek indisli Genelleştirilmiş Fibonacci sayılar kümesi* denir ve bu küme G_T ile gösterilir; böylece elde edilenin $G_T = \{a, (a+b), (2a+3b), (5a+8b), \dots\}$ olduğu görülür.

Tanım 2.14. $\{G_{2n} \mid n \in \mathbb{N}\} = \{G_2, G_4, G_6, \dots, G_{2k}, \dots\}$ kümesine *çift indisli Genelleştirilmiş Fibonacci sayıları kümesi* denir ve bu küme $G_Ç$ ile gösterilir; böylece elde edilenin $G_Ç = \{b, (a+2b), (3a+5b), (8a+13b), \dots\}$ olduğu görülür.

Yardımcı Teorem 2.15.

Her $n \geq 3$ doğal sayısı için $G_n = aF_{n-2} + bF_{n-1}$ dir [5].

İspat: $G_3 = a + b = aF_1 + bF_2$ olup iddia $n = 3$ için doğrudur. Çünkü $F_1 = F_2 = 1$ dir. Şimdi iddianın $k \geq 3$ için doğruluğunu kabul edelim. Gösterilmesi gereken, iddia $k + 1$ için de doğrudur.

$3 \leq i \leq k$ olan her i tamsayısı için $G_i = aF_{i-2} + bF_{i-1}$ dir. Sonra,

$$\begin{aligned} G_{k+1} &= G_k + G_{k-1} \\ &= (aF_{k-2} + bF_{k-1}) + (aF_{k-3} + bF_{k-2}) \\ &= a(F_{k-2} + F_{k-3}) + b(F_{k-1} + F_{k-2}) = aF_{k-1} + bF_k \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan iddia $k + 1$ için de doğrudur. Böylece tümevarım ilkesine göre her $n \geq 3$ için $G_n = aF_{n-2} + bF_{n-1}$ olduğu görülür. ■

Yardımcı Teorem 2.16.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{i=1}^n G_{k+i} = G_{n+k+2} - G_{k+2}$ dir [5].

$$\begin{aligned}
 \text{\textit{İspat:}} \quad \sum_{i=1}^n G_{k+i} &= a \sum_{i=1}^n F_{k+i-2} + b \sum_{i=1}^n F_{k+i-1} \\
 &= a(F_{n+k} - F_k) + b(F_{n+k+1} - F_{k+1}) \quad (\text{Yardımcı Teorem 2.15}) \\
 &= (aF_{n+k} + bF_{n+k+1}) - (aF_k + bF_{k+1}) \\
 &= G_{n+k+2} - G_{k+2}
 \end{aligned}$$

elde edilir. İspat tamamlanır. $k = 0$ seçilirse; Her $n \geq 1$ tamsayısı için

$$\sum_{i=1}^n G_i = G_{n+2} - G_2 \text{ veya } \sum_{i=1}^n G_i = G_{n+2} - b \text{ elde edilir. } \blacksquare$$

Yardımcı Teorem 2.17.

Her $n \geq 3$ doğal sayısı için $\sum_{i=1}^n G_{2i-1} = G_{2n} + a - b$ dir [5].

İspat: $G_1 = a$, $G_2 = b$ ve her $n \geq 2$ doğal sayısı için $G_n = G_{n+1} - G_{n-1}$ dir.

Buradan

$$G_3 = G_4 - G_2$$

$$G_5 = G_6 - G_4$$

.

.

.

$G_{2n-1} = G_{2n} - G_{2n-2}$ elde edilir. Taraf tarafa toplama işlemi yapılırsa

$G_3 + G_5 + \dots + G_{2n-1} = G_4 - G_2 + G_6 - G_4 + \dots + G_{2n} - G_{2n-2}$ Eşitliğin her iki tarafına G_1 eklenirse $G_1 + G_3 + G_5 + \dots + G_{2n-1} = G_{2n} - G_2 + G_1$ veya $G_1 = a$ ve $G_2 = b$ olduğundan, $\sum_{i=1}^n G_{2i-1} = G_{2n} + a - b$ elde edilir. ■

Yardımcı Teorem 2.18.

Her $n \geq 3$ doğal sayısı için $\sum_{i=1}^n G_{2i} = G_{2n+1} - a$ dir [5].

İspat: $G_1 = a$, $G_2 = b$ ve her $n \geq 3$ için $G_n = G_{n+1} - G_{n-1}$ dir. Buradan,

$$G_2 = G_3 - G_1$$

$$G_4 = G_5 - G_3$$

.

.

.

$$G_{2n} = G_{2n+1} - G_{2n-1}$$

olur. Eşitlikler taraf tarafa toplanırsa $G_2 + G_4 + \dots + G_{2n} = G_{2n+1} - G_1$ olur.

Buradan, $\sum_{i=1}^n G_{2i} = G_{2n+1} - a$ elde edilir. ■

Tanım 2.19. Her $i \in \{2, 3, \dots, n\}$ için $b_i > \sum_{j=1}^{i-1} b_j$ özelliğini sağlayan $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ dizisine bir süper-artan dizi denir [8].

BÖLÜM 3. TEK ve ÇİFT FİBONACCİ, LUCAS VE GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ SAYI DİZİLERİ

Bu bölümde tek veya çift indisli Fibonacci, Lucas ve Genelleştirilmiş Fibonacci sayı kümelerinin (dizilerinin) her birisi için, sonlu elemanlı her hangi iki alt kümesinin elemanlarının toplamının farklı olduğuna dair ikişer temel özellik, sırasıyla olmak üzere ayrı kısımlarda verilecektir. Ayrıca tek veya çift indisli Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin birer süper-artan dizi oldukları da sırasıyla ayrı kısımlarda verilecektir.

3.1. Tek veya Çift İndisli Fibonacci Sayı Dizileri

Teorem 3.1. $A \neq B$ ve $A, B \subset F_T$ olmak üzere herhangi sonlu elemanlı boş kümeden farklı iki alt küme olsun. Bu durumda daima $\sum_{F_i \in A} F_i \neq \sum_{F_j \in B} F_j$ dır.

İspat: $A \cap B = \emptyset$ kabul etmek genelliği bozmaz. Çünkü $A \cap B \neq \emptyset$ ise, $A \cap B$ deki sonlu tane elemanın toplamı eşitliğin her iki yanından sadeleştirilebilir.

$F_k = \max\{F_i \mid F_i \in (A \cup B)\}$ olsun. Bu durumda bir $n \in \mathbb{N}$ için $k = 2n + 1$ dir.

Buradan da $F_k \in A \cup B$ ve $A \cap B = \emptyset$ olduğundan ya $F_k \in A$ ya da $F_k \in B$ dir.

$F_k \in A$ ise, $B \subset \{F_1, F_3, \dots, F_{2n-1}\}$ olduğundan,

$$\sum_{F_i \in B} F_i \leq \sum_{i=1}^n F_{2i-1} \quad (3.1)$$

olduğu görülür. (3.1) ve Yardımcı Teorem 2.6. dan dolayı

$$\sum_{F_i \in B} F_i \leq \sum_{i=1}^n F_{2i-1} = F_{2n} < F_{2n+1} = F_k \quad (3.2)$$

elde edilir. $F_k \in A$ olduğundan

$$F_k \leq \sum_{F_j \in A} F_j \quad (3.3)$$

olur. (3.2) ve (3.3) birlikte düşünüldüğünde $\sum_{F_i \in B} F_i < \sum_{F_j \in A} F_j$ olduğu görülür.

$F_k \in B$ ise, benzer şekilde ilerleyerek $\sum_{F_i \in A} F_i < \sum_{F_j \in B} F_j$ elde edilir. Dolayısıyla,

$A, B \subset F_T$ için $A \neq B$ ise $\sum_{F_i \in A} F_i \neq \sum_{F_j \in B} F_j$ olduğu görülür. ■

Teorem 3.2. $A \subset F_T$ olsun. Bu durumda A bir süper-artan dizidir.

İspat: $F_{2k+1} \in A$ olsun.

$\sum_{F_i \in A, F_i < F_{2k+1}} F_i \leq \sum_{i=1}^k F_{2i-1} = F_{2k} < F_{2k+1}$ olduğundan dolayı A bir süper-artan dizidir. ■

Sonuç 3.3. F_T süper-artan bir dizidir.

Teorem 3.4. $A \neq B$ ve $A, B \subset F_{\mathbb{C}}$ olmak üzere herhangi sonlu elemanlı, boştan farklı iki alt küme olsun. Bu durumda $\sum_{F_i \in A} F_i \neq \sum_{F_j \in B} F_j$ olur.

İspat: $A \cap B = \emptyset$ kabul etmek genelliği bozmaz. Çünkü $A \cap B \neq \emptyset$ ise, $A \cap B$ deki sonlu tane elemanın toplamları eşitliğin her iki yanından sadeleştirilebilir.

$F_k = \max\{F_i \mid F_i \in (A \cup B)\}$ olsun. Bu durumda bir $n \in \mathbb{N}$ için $k = 2n + 2$ dir.

Buradan da $F_k \in A \cup B$ ve $A \cap B = \emptyset$ olduğundan ya $F_k \in A$ ya da $F_k \in B$ dir.

$F_k \in A$ ise, $B \subset \{F_2, F_4, \dots, F_{2n}\}$ olduğundan

$$\sum_{F_i \in B} F_i \leq \sum_{i=1}^n F_{2i} \quad (3.4)$$

olduğu görülür. (3.4) ve Yardımcı Teorem 2.5. den dolayı

$$\sum_{F_i \in B} F_i \leq \sum_{i=1}^n F_{2i} = F_{2n+1} - 1 < F_{2n+2} = F_k \quad (3.5)$$

elde edilir. $F_k \in A$ olduğundan

$$F_k \leq \sum_{F_j \in A} F_j \quad (3.6)$$

olur. (3.5) ve (3.6) birlikte düşünüldüğünde $\sum_{F_i \in B} F_i < \sum_{F_j \in A} F_j$ olduğu görülür.

$F_k \in B$ ise, benzer şekilde ilerleyerek $\sum_{F_i \in A} F_i < \sum_{F_j \in B} F_j$ elde edilir. Dolayısıyla,

$A, B \subset F_\mathbb{C}$ için $A \neq B$ ise $\sum_{F_i \in A} F_i \neq \sum_{F_j \in B} F_j$ olduğu görülür. ■

Teorem 3.5. $A \subset F_\mathbb{C}$ olsun. Bu durumda A bir süper-artan dizidir.

İspat: $F_{2k+2} \in A$ olsun. $\sum_{F_i \in A, F_i < F_{2k+2}} F_i \leq \sum_{i=1}^k F_{2i} = F_{2k+1} - 1 < F_{2k+2}$ olduğundan dolayı A bir süper-artan dizidir. ■

Sonuç 3.6. $F_{\mathbb{C}}$ süper-artan bir dizidir.

3.2. Tek veya Çift İndisli Lucas Sayı Dizileri

Teorem 3.7. $A \neq B$ ve $A, B \subset L_T$ olmak üzere herhangi sonlu elemanlı, boştan farklı iki alt küme olsun. Bu durumda $\sum_{L_i \in A} L_i \neq \sum_{L_j \in B} L_j$ olur.

İspat: $A \cap B = \emptyset$ kabul etmek genelliği bozmaz. Çünkü $A \cap B \neq \emptyset$ ise, $A \cap B$ deki sonlu tane elemanın toplamları eşitliğin her iki yanından sadeleştirilebilir.

$L_k = \max\{L_i \mid L_i \in (A \cup B)\}$ olsun. Bu durumda bir $n \in \mathbb{N}$ için $k = 2n + 1$ dir.

Buradan da $L_k \in A \cup B$ ve $A \cap B = \emptyset$ olduğundan ya $L_k \in A$ ya da $L_k \in B$ dir.

$L_k \in A$ olsun. Buradan $B \subset \{L_1, L_3, \dots, L_{2n-1}\}$ olduğundan dolayı

$$\sum_{L_i \in B} L_i \leq \sum_{i=1}^n L_{2i-1} \quad (3.7)$$

olduğu görülür. (3.7) ve Yardımcı Teorem 2.11 den dolayı

$$\sum_{L_i \in B} L_i \leq \sum_{i=1}^n L_{2i-1} = L_{2n} - 2 < L_{2n} < L_{2n+1} = L_k \quad (3.8)$$

elde edilir. $L_k \in A$ olduğundan

$$L_k \leq \sum_{L_j \in A} L_j \quad (3.9)$$

olur. (3.8) ve (3.9) birlikte düşünüldüğünde $\sum_{L_i \in B} L_i < \sum_{L_j \in A} L_j$ olduğu görülür.

$L_k \in B$ ise, benzer şekilde ilerleyerek $\sum_{L_i \in A} L_i < \sum_{L_j \in B} L_j$ elde edilir. Dolayısıyla,

$A, B \subset L_T$ ve $A \neq B$ ise $\sum_{L_i \in A} L_i \neq \sum_{L_j \in B} L_j$ olduğu görülür. ■

Teorem 3.8. $A \subset L_T$ olsun. Bu durumda A bir süper-artan dizidir.

İspat: $L_{2k+1} \in A$ olsun. $\sum_{L_i \in A, L_i < L_{2k+1}} L_i \leq \sum_{i=1}^k L_{2i-1} = L_{2k} - 2 < L_{2k+1}$ olduğundan dolayı A bir süper-artan dizidir. ■

Sonuç 3.9. L_T süper-artan bir dizidir.

Teorem 3.10. $A \neq B$ ve $A, B \subset L_{\mathbb{C}}$ olmak üzere herhangi sonlu elemanlı, boştan farklı iki alt küme olsun. Bu durumda $\sum_{L_i \in A} L_i \neq \sum_{L_j \in B} L_j$ olur.

İspat: $A \cap B = \emptyset$ kabul etmek genelliği bozmaz. Çünkü $A \cap B \neq \emptyset$ ise, $A \cap B$ deki sonlu tane elemanın toplamları eşitliğin her iki yanından sadeleştirilebilir.

$L_k = \max\{L_i \mid L_i \in (A \cup B)\}$ olsun. Bu durumda bir $n \in \mathbb{N}$ için $k = 2n + 2$ dir.

Buradan da $L_k \in A \cup B$ ve $A \cap B = \emptyset$ olduğundan ya $L_k \in A$ ya da $L_k \in B$ dir.

$L_k \in A$ olsun. Buradan $B \subset \{L_2, L_4, \dots, L_{2n}\}$ olduğundan dolayı

$$\sum_{L_i \in B} L_i \leq \sum_{i=1}^n L_{2i} \tag{3.10}$$

olduğu görülür. (3.10) ve Yardımcı Teorem 2.10 dan dolayı

$$\sum_{L_i \in B} L_i \leq \sum_{i=1}^n L_{2i} = L_{2n+1} - 1 < L_{2n+1} < L_{2n+2} = L_k \tag{3.11}$$

elde edilir. $L_k \in A$ olduğundan

$$L_k \leq \sum_{L_j \in A} L_j \quad (3.12)$$

olur. (3.11) ve (3.12) birlikte düşünüldüğünde $\sum_{L_i \in B} L_i < \sum_{L_j \in A} L_j$ olduğu görülür.

$L_k \in B$ ise, benzer şekilde ilerleyerek $\sum_{L_i \in A} L_i < \sum_{L_j \in B} L_j$ elde edilir. Dolayısıyla,

$A, B \subset L_\zeta$ ve $A \neq B$ ise $\sum_{L_i \in A} L_i \neq \sum_{L_j \in B} L_j$ olduğu görülür. ■

Teorem 3.11. $A \subset L_\zeta$ olsun. Bu durumda A bir süper-artan dizidir.

İspat: $L_{2k+2} \in A$ olsun. $\sum_{L_i \in A, L_i < L_{2k+2}} L_i \leq \sum_{i=1}^k L_{2i} = L_{2k+1} - 1 < L_{2k+2}$ olduğundan dolayı A bir süper-artan dizidir. ■

Sonuç 3.12. L_ζ süper-artan bir dizidir.

3.3 Tek veya Çift İndisli Genelleştirilmiş Fibonacci Sayı Dizileri

Bu kısımda önceki kısımlarda elde edilen sonuçlara benzer sonuçlar ortaya konulacaktır. Kısım boyunca $a, b \in \mathbb{R}$ keyfi fakat sabit olmak üzere $G_1 = a$, $G_2 = b$ alınacaktır.

$a = b$ olması durumunda $n \geq 3$ için $G_n = aF_{n-2} + aF_{n-1} = a(F_{n-2} + F_{n-1}) = aF_n$ olur. Dolayısıyla bu durumda tek ve çift Genelleştirilmiş Fibonacci sayıları için elde edilecek sonuçlar Fibonacci sayılar kümesinde elde edilen sonuçlara denk olur. Bu nedenle kısım boyunca $a \neq b$ kabul edilecektir.

Bundan başka $a = 0$ veya $b = 0$ olması durumunda $\{G_n\}$ Genelleştirilmiş Fibonacci Sayıları dizisi sırasıyla $\{b.F_{n+1}\}$ veya $\{a.F_{n+2}\}$ dizilerine dönüşecektir. Dolayısıyla buradan itibaren $a \cdot b \neq 0$ kabul edilecektir.

Aşağıda verilecek teoremden $a \cdot b > 0$ dır.

Teorem 3.13. $A \neq B$ ve $A, B \subset G_T$ olmak üzere herhangi sonlu elemanlı iki küme olsun. Bu durumda $\sum_{G_i \in A} G_i \neq \sum_{G_j \in B} G_j$ olur.

İspat: $A \cap B = \emptyset$ kabul etmek genelliği bozmaz. Çünkü, $A \cap B \neq \emptyset$ ise $A \cap B$ deki sonlu tane elemanın toplamı eşitliğin her iki yanından sadeleştirilebilir. Bu nedenle Genelleştirilmiş Fibonacci Sayılarının tanımından hareketle a ve b skalerlerinin olası tüm durumları incelenerek ispatlar yapılacaktır. Bu durumlar;

1.Durum $0 < a < b$

2.Durum $0 < b < a$

3.Durum $b < a < 0$

4.Durum $a < b < 0$

şeklinde listelenebilir. Durumları irdilemeden önce aşağıdakileri belirtelim.

$G_k = \max \{ G_i \mid G_i \in (A \cup B) \}$ olsun. Bu durumda bir $n \in \mathbb{N}$ için $k = 2n + 1$ dir.

Buradan da, $G_k \in A \cup B$ ve $A \cap B = \emptyset$ olduğundan, ya $G_k \in A$ ya da $G_k \in B$ olduğu görülür.

$G_k \in A$ ise, $B \subset \{G_1, G_3, \dots, G_{2n-1}\}$ olduğundan,

$$\sum_{G_i \in B} G_i \leq \sum_{i=1}^n G_{2i-1} \quad (3.13)$$

elde edilir. (3.13) ve Yardımcı Teorem 2.17 den dolayı

$$\sum_{G_i \in B} G_i \leq \sum_{i=1}^n G_{2i-1} = G_{2n} + a - b \quad (3.14)$$

elde edilir. Şimdi her bir durumu ayrı ayrı ele alalım.

1.Durum: $0 < a < b$: $a < b$ olduğundan $G_{2n} + a - b < G_{2n}$ olur. Böylece ifade (3.14) de dikkate alınırsa,

$$\sum_{G_i \in B} G_i \leq \sum_{i=1}^n G_{2i-1} = G_{2n} + a - b < G_{2n} < G_{2n+1} = G_k \quad (3.15)$$

bulunur.

$G_k \in A$ olduğundan

$$G_k \leq \sum_{G_j \in A} G_j \quad (3.16)$$

dir. (3.15) ve (3.16) birlikte düşünüldüğünde $\sum_{G_i \in B} G_i < \sum_{G_j \in A} G_j$ olduğu görülür. $G_k \in B$ ise, benzer şekilde ilerlenerek $\sum_{G_i \in A} G_i < \sum_{G_j \in B} G_j$ elde edilir. Dolayısıyla $A, B \subset G_T$ ve $A \neq B$ ise, $\sum_{G_i \in A} G_i \neq \sum_{G_j \in B} G_j$ olur.

2.Durum: $0 < b < a$: Öncelikle,

$$G_{2n} = a.F_{2n-2} + b.F_{2n-1} = a.F_{2n-2} + b.(F_{2n-3} + F_{2n-2}) \text{ (Yardımcı Teorem 2.15)}$$

$$G_{2n} = a.F_{2n-2} + b.F_{2n-3} + b.F_{2n-2}$$

$$G_{2n} = (a + b).F_{2n-2} + b.F_{2n-3} \quad (3.17)$$

ve

$$G_{2n+1} = a.F_{2n-1} + b.F_{2n} = a.F_{2n-1} + b.(F_{2n-2} + F_{2n-1})$$

$$G_{2n+1} = a.F_{2n-1} + b.F_{2n-2} + b.F_{2n-1}$$

$$G_{2n+1} = (a + b).F_{2n-1} + b.F_{2n-2} \quad (3.18)$$

dir. $G_{2n} + a - b < G_{2n+1}$ göstermek istediğimiz ifade buydu. Aksini kabul edelim. Yani, $G_{2n} + a - b - G_{2n+1} \geq 0$ olsun.

$$G_{2n} - G_{2n+1} \geq b - a \quad (3.17) \text{ ve } (3.18) \text{ eşitlikleri yerlerine yazılır ise}$$

$$(a + b).F_{2n-2} + b.F_{2n-3} - ((a + b).F_{2n-1} + b.F_{2n-2}) \geq b - a \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
& (a+b).F_{2n-2} + b.F_{2n-3} - (a+b).F_{2n-1} - b.F_{2n-2} \geq b-a \Rightarrow \\
& a.F_{2n-2} + b.F_{2n-3} - (a+b).F_{2n-1} \geq b-a \Rightarrow \\
& a.F_{2n-2} + b.F_{2n-3} - (a+b).(F_{2n-3} + F_{2n-2}) \geq b-a \Rightarrow \\
& a.F_{2n-2} + b.F_{2n-3} - (a+b).F_{2n-3} - (a+b)F_{2n-2} \geq b-a \Rightarrow \\
& (a-a-b).F_{2n-2} + (b-a-b).F_{2n-3} \geq b-a \Rightarrow \\
& -b.F_{2n-2} - a.F_{2n-3} \geq b-a \Rightarrow \\
& -b.F_{2n-2} - a.F_{2n-3} - b + a \geq 0 \Rightarrow \\
& b.(-F_{2n-2} - 1) + a.(-F_{2n-3} + 1) \geq 0 \tag{3.19}
\end{aligned}$$

olur.

Öte yandan, $n \geq 2$ ise $F_{2n-2} > 0$ ve $F_{2n-3} \geq 1$ olduğundan dolayı $-F_{2n-2} - 1 < 0$ ve $-F_{2n-3} + 1 \leq 0$ olur. Buradan, $n \geq 2$ için $b.(-F_{2n-2} - 1) + a.(-F_{2n-3} + 1) < 0$ bulunur. Bu ise (3.19) ile çelişir. O halde varsayım yanlıştır. İddia doğrudur. Böylece,

$$\sum_{G_i \in B} G_i \leq \sum_{i=1}^n G_{2i-1} = G_{2n} + a - b < G_{2n+1} = G_k \tag{3.20}$$

ve $G_k \in A$ olup

$$G_k \leq \sum_{G_j \in A} G_j \tag{3.21}$$

olur. (3.20) ve (3.21) birlikte düşünüldüğünde, $\sum_{G_i \in B} G_i < \sum_{G_j \in A} G_j$ olduğu görülür. $G_k \in B$ ise, benzer şekilde ilerlenerek $\sum_{G_i \in A} G_i < \sum_{G_j \in B} G_j$ elde edilir. Dolayısıyla,

$A, B \subset G_T$ ve $A \neq B$ ise, $\sum_{G_i \in A} G_i \neq \sum_{G_j \in B} G_j$ olur.

3.Durum: $b < a < 0$ için Genelleştirilmiş Fibonacci sayıları sürekli azalan negatif değerli bir özellik sergileyeceklerdir.

Ayrıca $G_k = \min\{G_i \mid G_i \in (A \cup B)\}$ ve $k = 2n + 1$ için $G_k \in A$ olsun. Her şeyden önce $B \subset \{G_1, G_3, \dots, G_{2n-1}\}$ olduğundan dolayı

$$\sum_{G_i \in B} G_i \geq \sum_{i=1}^n G_{2i-1} \quad (3.22)$$

olduğu görülür. (3.22) ve Yardımcı Teorem 2.17 den dolayı

$$\sum_{G_i \in B} G_i \geq \sum_{i=1}^n G_{2i-1} = G_{2n} + a - b \quad (3.23)$$

olur.

$b < a < 0$ olduğundan dolayı $a - b > 0$ ve buradan $G_{2n} + a - b > G_{2n}$ bulunur. Böylece (3.23) dikkate alınarak,

$$\sum_{G_i \in B} G_i \geq \sum_{i=1}^n G_{2i-1} = G_{2n} + a - b > G_{2n} > G_{2n+1} = G_k \quad (3.24)$$

elde edilir. $G_k \in A$ ve $\{G_k\}$ negatif elemanlı azalan dizi olduğundan

$$G_k \geq \sum_{G_j \in A} G_j \quad (3.25)$$

bulunur. (3.24) ve (3.25) birlikte düşünülürse $\sum_{G_i \in B} G_i > \sum_{G_j \in A} G_j$ olduğu görülür. $G_k \in B$ ise benzer şekilde ilerlenerek $\sum_{G_i \in A} G_i > \sum_{G_j \in B} G_j$ elde edilir. Dolayısıyla, $A, B \subset G_T$ için $A \neq B$ ise $\sum_{G_i \in A} G_i \neq \sum_{G_j \in B} G_j$ olur.

4.Durum: $a < b < 0$: Genelleştirilmiş Fibonacci sayıları azalan negatif değerli bir özellik sergileyeceklerdir.

Ayrıca $G_k = \min\{ G_i \mid G_i \in (A \cup B) \}$ olsun. Bu durumda bir $n \in \mathbb{N}$ için $k = 2n + 1$ dir. Dolayısıyla da $G_k \in A \cup B$ ve $A \cap B = \emptyset$ olduğundan ya $G_k \in A$ ya da $G_k \in B$ dir. $G_k \in A$ olsun.

Her şeyden önce $B \subset \{G_1, G_3, \dots, G_{2n-1}\}$ ve $\{G_k\}$ negatif elemanlı azalan dizi olduğundan ve Yardımcı Teorem 2.16 dan dolayı

$$\sum_{G_i \in B} G_i \geq \sum_{i=1}^n G_{2i-1} = G_{2n} + a - b$$

olur. $a < b < 0$ olduğundan $a - b < 0$ olur.

$$\begin{aligned} G_{2n} &= a.F_{2n-2} + b.F_{2n-1} \\ &= a.F_{2n-2} + b.(F_{2n-3} + F_{2n-2}) \text{ (Yardımcı Teorem 2.15)} \\ &= a.F_{2n-2} + b.F_{2n-3} + b.F_{2n-2} \\ &= (a + b).F_{2n-2} + b.F_{2n-3} \end{aligned} \tag{3.26}$$

ve

$$\begin{aligned}
G_{2n+1} &= a.F_{2n-1} + b.F_{2n} \\
&= a.F_{2n-1} + b.(F_{2n-2} + F_{2n-1}) \\
&= a.F_{2n-1} + b.F_{2n-2} + b.F_{2n-1} \\
&= (a+b).F_{2n-1} + b.F_{2n-2}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

dır. $G_{2n} + a - b > G_{2n+1}$ göstermek istediğimiz ifade buydu. Aksini kabul edelim.

Yani, $G_{2n} + a - b - G_{2n+1} \leq 0$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned}
G_{2n} - G_{2n+1} &\leq b - a \quad (3.26) \text{ ve } (3.27) \text{ eşitlikleri burada yerlerine yazılır ise,} \\
(a+b).F_{2n-2} + b.F_{2n-3} - ((a+b).F_{2n-1} + b.F_{2n-2}) &\leq b - a \Rightarrow \\
(a+b).F_{2n-2} + b.F_{2n-3} - (a+b).F_{2n-1} - b.F_{2n-2} &\leq b - a \Rightarrow \\
a.F_{2n-2} + b.F_{2n-3} - (a+b).F_{2n-1} &\leq b - a \Rightarrow \\
a.F_{2n-2} + b.F_{2n-3} - (a+b).(F_{2n-3} + F_{2n-2}) &\leq b - a \Rightarrow \\
a.F_{2n-2} + b.F_{2n-3} - (a+b).F_{2n-3} - (a+b)F_{2n-2} &\leq b - a \Rightarrow \\
(a-a-b).F_{2n-2} + (b-a-b).F_{2n-3} &\leq b - a \Rightarrow \\
-b.F_{2n-2} - a.F_{2n-3} &\leq b - a \Rightarrow \\
-b.F_{2n-2} - a.F_{2n-3} - b + a &\leq 0 \Rightarrow \\
b.(-F_{2n-2} - 1) + a.(-F_{2n-3} + 1) &\leq 0
\end{aligned} \tag{3.28}$$

olur. Öte yandan, $n \geq 3$, $F_{2n-2} > 0$ ve $F_{2n-3} > 1$ olduğu için, $-F_{2n-2} - 1 < 0$ ve

$-F_{2n-3} + 1 < 0$ buradan $a < 0$ ve $b < 0$ olduğundan $b.(-F_{2n-2} - 1) > 0$ ve $a.(-F_{2n-3} + 1) > 0$ olur.

$b. (-F_{2n-2} - 1) + a. (-F_{2n-3} + 1) > 0$ bulunur. Bu ise (3.28) ile çelişir. O halde varsayım yanlıştır. Yani, $G_{2n} + a - b > G_{2n+1}$ dir. Böylece,

$$\sum_{G_i \in B} G_i \geq \sum_{i=1}^n G_{2i-1} = G_{2n} + a - b > G_{2n+1} = G_k \quad (3.29)$$

ve $G_k \in A$ olup $\{G_k\}$ negatif elemanlı azalan dizi olduğundan

$$G_k \geq \sum_{G_j \in A} G_j \quad (3.30)$$

olur. (3.29) ve (3.30) birlikte düşünüldüğünde $\sum_{G_i \in B} G_i > \sum_{G_j \in A} G_j$ olduğu görülür.

$G_k \in B$ ise benzer şekilde ilerlenerek $\sum_{G_i \in A} G_i > \sum_{G_j \in B} G_j$ elde edilir. Dolayısıyla,

$A, B \subset G_T$ için $A \neq B$ ise $\sum_{G_i \in A} G_i \neq \sum_{G_j \in B} G_j$ olduğu görülür. ■

Teorem 3.14. $A \neq B$ ve $A, B \subset G_{\mathbb{C}}$ olmak üzere herhangi sonlu elemanlı iki alt küme olsun. Bu durumda, daima $\sum_{G_i \in A} G_i \neq \sum_{G_j \in B} G_j$ olur.

İspat: $A \cap B = \emptyset$ kabul etmek genelliği bozmaz. Çünkü, $A \cap B \neq \emptyset$ ise $A \cap B$ deki sonlu tane elemanın toplamı eşitliğin her iki yanından sadeleştirilebilir. Bu nedenle Genelleştirilmiş Fibonacci sayıları a ve b skalerlerine göre belirlendiğinden, irdeleme onlara göre ele alınmalıdır. İki ayrı durum için irdeleme yeterli olacaktır:

1. Durum $a > 0$ ve $b \in \mathbb{R}$.

2. Durum $a < 0$ ve $b \in \mathbb{R}$.

1.Durum: $a > 0$ ve $b \in \mathbb{R}$:

$G_k = \max\{ G_i \mid G_i \in (A \cup B) \}$ olsun. Bu durumda bir $n \in \mathbb{N}$ için $k = 2n$ dir. Buradan da $G_k \in A \cup B$ ve $A \cap B = \emptyset$ olduğundan ya $G_k \in A$ ya da $G_k \in B$ dir. . $G_k \in A$ olsun. Her şeyden önce $B \subset \{G_2, G_4, \dots, G_{2n}\}$ olduğundan

$$\sum_{G_i \in B} G_i \leq \sum_{i=1}^n G_{2i} \quad (3.31)$$

olduğu görülür. (3.31), Yardımcı Teorem 2.18 ve $a > 0$ olduğu dikkate alınırsa

$$\sum_{G_i \in B} G_i \leq \sum_{i=1}^n G_{2i} = G_{2n+1} - a < G_{2n+1} < G_{2n+2} = G_k \quad (3.32)$$

olur. $G_k \in A$ olduğundan

$$G_k \leq \sum_{G_j \in A} G_j \quad (3.33)$$

dir. (3.32) ve (3.33) birleştirildiğinde $\sum_{G_i \in B} G_i < \sum_{G_j \in A} G_j$ olduğu görülür. $G_k \in B$ ise benzer şekilde ilerlenerek $\sum_{G_i \in A} G_i < \sum_{G_j \in B} G_j$ elde edilir. Dolayısıyla, $A, B \subset G_\mathbb{C}$ ve $A \neq B$ ise, $\sum_{G_i \in A} G_i \neq \sum_{G_j \in B} G_j$ olur.

2.Durum: $a < 0$ ve $b \in \mathbb{R}$:

$G_k = \min\{ G_i \mid G_i \in (A \cup B) \}$ olsun. bir $n \in \mathbb{N}$ için $k = 2n$ dir. Böylece $G_k \in A \cup B$ ve $A \cap B = \emptyset$ olduğundan ya $G_k \in A$ ya da $G_k \in B$ dir. $G_k \in A$ olsun. Her şeyden önce $B \subset \{G_2, G_4, \dots, G_{2n}\}$ olduğundan

$$\sum_{G_i \in B} G_i \geq \sum_{i=1}^n G_{2i} \quad (3.34)$$

elde edilir. (3.34), Yardımcı Teorem 2.18 ve $a < 0$ olduğu dikkate alınırsa

$$\sum_{G_i \in B} G_i \geq \sum_{i=1}^n G_{2i} = G_{2n+1} - a > G_{2n+1} > G_{2n+2} = G_k \quad (3.35)$$

olur. $G_k \in A$ olduğundan

$$G_k \geq \sum_{G_j \in A} G_j \quad (3.36)$$

dir. (3.35) ve (3.36) birleştirildiğinde $\sum_{G_i \in B} G_i > \sum_{G_j \in A} G_j$ olduğu görülür. $G_k \in B$ ise benzer şekilde ilerlenerek $\sum_{G_i \in A} G_i < \sum_{G_j \in B} G_j$ elde edilir. Dolayısıyla, $A, B \subset G_\zeta$ için $A \neq B$ ise $\sum_{G_i \in A} G_i \neq \sum_{G_j \in B} G_j$ olur. Böylece ispat tamamlanır. ■

BÖLÜM 4. UYGULAMALAR

Kriptoloji uygulamalarında temel amaç tekil sonuçlar yakalayabilmektir. Merkle ve Hellman'ın geliştirdiği şifreleme sistemleri de bu temel kural üzerine kurulmuştur. Fibonacci sayıları ve şifreleme sistemleri araştırılmış ve Fibonacci sayıları Fibonacci Q Matrisi ve ilişkili R Matrisi kullanıldığı şifreleme yöntemlerinin olduğu görülmüştür [9]. Ayrıca Fibonacci sayı dizileri kriptoloji biliminde ve kodlama teorilerinde de kullanıldığı tespit edilmiştir [10-14].

Bölüm 3'ün sergilediği özellikleri dikkate alarak şifreleme yöntemleri kurgulanabilir. Bu özellikler şifreleme ile ilgili farklı kurguları sunabilme avantajları sağlayacaktır.

Fibonacci, Lucas veya Genelleştirilmiş Fibonacci sayı kümeleri üzerinde ortaya koyduğumuz Teorem 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 ve 3.6 özellikleri bize bu kümelerin alt küme toplamlarının tekilliğini göstermiştir. Buradan hareketle küme elemanlarının sembollere karşılık olarak atanması ve bir veri grubunun bu karşılıklar vasıtasıyla sayısal bir değere çevrilmesi ile yapılabilecek şifreleme kurguları tasarlanmıştır.

Bu kurgularda;

- Tek indisli Fibonacci sayıları kümesi
- Tek veya Çift indisli Fibonacci sayıları kümesi
- Tek veya Çift indisli Genelleştirilmiş Fibonacci sayıları kümeleri

ile ilgili Bölüm 3'te gösterilen özellikler kullanılarak, elde edilen özelliklerin uygulamaya dönük amaçlarını açıklamak için iki farklı kurgu ve ilgili örnekler sunulmuştur.

4.1. Kriptoloji Üzerine Örnek Kurgular

Kurgu 1: Bu kurgumuzda tüm harfler, boşluk karakteri ve bazı noktalama işaretleri ele alınarak Tek İndisli Fibonacci Sayıları ile eşleştirilmiştir. Böylece her bir sembolün bir sayısal karşılığı oluşturulmuştur.

Tablo 4.1. Harf ve noktalama işaretlerinin sayısal karşılıkları

Sembol	F_T	Sayısal Değer	Sembol	F_T	Sayısal Değer
A	F_1	1	O	F_{35}	9.227.465
B	F_3	2	Ö	F_{37}	24.157.817
C	F_5	5	P	F_{39}	63.245.986
Ç	F_7	13	R	F_{41}	165.580.141
D	F_9	34	S	F_{43}	433.494.437
E	F_{11}	89	Ş	F_{45}	1.134.903.170
F	F_{13}	233	T	F_{47}	2.971.215.073
G	F_{15}	610	U	F_{49}	7.778.742.049
Ğ	F_{17}	1.597	Ü	F_{51}	20.365.011.074
H	F_{19}	4.181	V	F_{53}	53.316.291.173
I	F_{21}	10.946	Y	F_{55}	139.583.862.445
İ	F_{23}	28.657	Z	F_{57}	365.435.296.162
J	F_{25}	75.025		F_{59}	956.722.026.041
K	F_{27}	196.418	.	F_{61}	2.504.730.781.961
L	F_{29}	514.2295	,	F_{63}	6.557.470.319.842
M	F_{31}	1.346.269	?	F_{65}	17.167.680.177.565
N	F_{33}	3.524.578			

Uygulama için Tablo 4.1.'de ki tüm harf ve karakterlere karşılık gelen sayılar kümesinin tüm alt kümeleri oluşturulur. Bu alt kümelerin elemanlarının sayısal değerlerinin toplamı ve bu toplamı oluşturan sayıların listesinden oluşan bir kod_kutuphanesi.dat isimli bir kütüphane oluşturulur. Oluşturulan kütüphanenin birkaç satırı örnek olarak Şekil 4.1.'de verilmektedir.

Şekil 4.1. kod_kutuphanesi.dat

3;1,2	A,B	
6;1,5	A,C	
.		
368406511324;89,2971215073,365435296162	E,T,Z	
.		
166.930.683; 1,2,89,4.181,1.346.269,165.580.141	A,B,E,H,M,R	
.		
140.183.133.442;1,196.418,165.580.141,433.494.437,139.583.862.445	A,K,R,S,Y	
.		

Uygulama Örnek 1: Bir metni şifrelemek için Tek İndisli Fibonacci Sayılarından ve bu sayıların yukarıda belirttiğimiz toplamsal özelliklerinden faydalanacağız. Teorem 3.4’de belirtildiği gibi bu kümenin elemanlarından oluşturulacak iki farklı alt kümenin elemanlarının toplamı birbirine eşit olamaz. Yani bu toplamsal sonuçlar tekildir. Bu dikkate alınarak şifrelemeği hedeflediğimiz her bir kelime için tekil bir kod oluşturacağız. Burada bir kelime içinde yer alan bir harf birden fazla yer alsa dahi toplama yalnız bir defa eklenecektir. Açıklamak amacıyla MERHABA kelimesini ele alalım. Bu kelimenin sayısal değeri bulunurken A, B, E, H, M, R harflerinin sayısal karşılıkları bir defa alınacaktır. “A” harfinden iki tane olmasına rağmen toplama bir kez katılacaktır. Bu toplam tekil olduğu için karşı taraf toplam sonucunu aldığında bu toplama hangi sayıların dolayısıyla hangi harflerin sayısal değerlerinin toplamıyla ulaşıldığını bilecektir. Burada karşılaşılabilecek sorun, gelen harflerin sıralaması ve birden fazla tekrar eden harfler varsa bunların hangileri olduğu ve kaç defa olduğudur. Bu meselenin halli için toplamın yanında, birde sıralamayı içeren bir kod gönderilecektir. Şöyle ki, kelimeyi içeren harfler alfabetik sıraya göre Tablo 4.2.’de ki gibi sıralanacak ve numaralandırılacaktır.

Tablo 4.2. Uygulama Örnek 1

A	B	E	H	M	R
1	2	3	4	5	6

Yukarıdaki açıklamalara göre, Tablo 4.2. için sıralama kodu şöyle olacaktır: 5364121 ve Toplam Değeri ise: $1+2+89+4.181+1.346.269+165.580.141=166.930.683$ olacaktır. Mesajı oluşturan kullanıcı karşı tarafa 166930683,5364121 diye bir kod gönderecek. Karşı tarafın gelen kodu çözümlemesi için iki yol bulunmaktadır.

Birinci yol gelen toplama en yakın ve toplamdan küçük değere sahip ilk karakter alınır. Bu karakterin değeri toplamdan çıkarılır ve elde edilen yeni sayıya ilk işlem tekrar uygulanır. En sonunda elde edilen sayı bir karakterin gerçek değerine denk geldiği anda çözümleme bitecektir.

Bu örnek için şöyle bir işlem sırası olacaktır: 166930683 sayısına en yakın sayı 165580141 ve karşılık gelen “R” harfidir. Buradan, $166930683-165580141=1350542$ elde edilecektir. 1350542 sayısına en yakın sayı 1346269 ve karşılık gelen “M” harfidir. $1350542-1346269=4273$ elde edilir. 4273 e en yakın sayı 4181 ve karşılık gelen “H” harfi. $4273-4181=92$. 92 ye en yakın sayı 89 ve karşılık gelen harf “E”. $92-89=3$ ’e en yakın sayı 2 ve karşılık gelen harf “B”. $3-2=1$ “A” harfi elde edilir. Böylece çözümleme biter.

İkinci yol ise karşı tarafta var olacak bir çözümleyici program daha önceden oluşturulmuş kütüphaneye bakarak öncelikle 166930683 sayısını çözümleyecek. Bu çözümlemenin sonucunda, bu sayının “1”, “2”, “89”, “4.181”, “1.346.269”, “165.580.141” sayılarının toplamıyla elde edildiğini tespit edecek. Bu sayıların harf karşılığını tablodan aldığında ise A,B,E,H,M,R harflerine ulaşacak. Sonra 5364121sıralama kodunu kullanarak bu harfleri sayısal değerlerinin oluşturduğu sıralamaya göre MERHABA kelimesine dönüştürecek.

Burada örnek olarak tek bir kelime alınmıştır, istenirse bir cümle için de yukarıda anlatılan işlemler yapılabilir. Bu durumda şifrelemenin daha gizemli olacağı fakat

çözümlemesinin de ona göre uzun olacağı aşikardır. Bu söylenilen her iki yol içinde geçerlidir.

Uygulama Örnek 2: SAKARYA kelimesini şifrelemek için Tek İndisli Fibonacci Sayılarından ve bu sayıların yukarıda belirttiğimiz toplam özelliklerinden faydalanacağız. Teorem 3.4’de belirtildiği gibi bu kümeden oluşturulacak iki alt kümenin elemanlarının toplamı birbirine eşit olamaz yani bu toplam sonucu tekildir. Biz de şifrelemeyi hedeflediğimiz her bir kelime için tekil bir kod oluşturacağız. Burada bir kelime içinde yer alan harf birden fazla dahi olsa toplama yalnız bir defa eklenecektir. Yani SAKARYA kelimesinin sayısal değeri bulunurken A,K,R,S,Y harflerinin sayısal karşılıkları bir defa alınacaktır. A harfinden üç tane olmasına rağmen toplama bir kez katılacaktır. Bu toplam tekil olduğu için karşı taraf toplam sonucunu aldığı anda bu toplama hangi sayıların dolayısıyla hangi harflerin sayısal değerlerinin toplamıyla ulaşıldığını bilecektir. Burada karşılaşılabilecek sorun gelen harflerin sıralaması ve birden fazla tekrar eden harfler varsa bunların hangileri olduğu ve kaç defa olduğudur. Bu meselenin halli için toplamın yanında birde sıralamayı içeren bir kod gönderilecektir. Şöyle ki kelimeyi içeren harfler küçükten büyüğe doğru Tablo 4.3.’de ki gibi sıralanacak ve numaralandırılacaktır.

Tablo 4.3. Uygulama Örnek 2

A	K	R	S	Y
1	2	3	4	5

Toplam Değeri:

Tablo 4.4. Uygulama Örnek 2 Toplam

A	K	R	S	Y
1	196.418	165.580.141	433.494.437	139.583.862.445

$$1 + 196.418 + 165.580.141 + 433.494.437 + 139.583.862.445 = 140.183.133.442$$

Sıralama Kodu: 4121351

Gönderim Kodu: 140183133442,4121351

Kurgu 2: Daha küçük sayısal değerlere ulaşmak istiyorsak harf tablomuzu ikiye ayırabiliriz. Sesli harfler ve noktalama işaretleri için Tek İndisli Fibonacci Sayıları, sessiz harfler için Çift İndisli Fibonacci Sayılarından faydalanabiliriz. Bu durumda elde edeceğimiz karakter sayısal değer eşleştirmeleri Tablo 4.5. ve Tablo 4.6.'de gösterilmiştir.

Tablo 4.5. Tek İndisli Fibonacci Sayıları için sembol karşılıkları

Sembol	F_T	Sayısal Değer
A	F_1	2
E	F_3	5
I	F_5	13
İ	F_7	34
O	F_9	89
Ö	F_{11}	233
U	F_{13}	610
Ü	F_{15}	1.597
	F_{17}	4.181
.	F_{19}	10.946
,	F_{21}	28.657
?	F_{23}	75.025

Tablo 4.6. Çift İndisli Fibonacci Sayıları için sembol karşılıkları

Sembol	$F_{\text{Ç}}$	Sayısal Değer	Sembol	$F_{\text{Ç}}$	Sayısal Değer
B	F_2	1	M	F_{24}	46.368
C	F_4	3	N	F_{26}	121.393
Ç	F_6	8	P	F_{28}	317.811
D	F_8	21	R	F_{30}	832.040
F	F_{10}	55	S	F_{32}	2.178.309
G	F_{12}	144	Ş	F_{34}	5.702.887
Ğ	F_{14}	377	T	F_{36}	14.930.352
H	F_{16}	987	V	F_{38}	39.088.169
J	F_{18}	2.584	Y	F_{40}	102.334.155
K	F_{20}	6.765	Z	F_{42}	267.914.296
L	F_{22}	17.711			

Uygulama Örnek 3: FİBONACCİ kelimesi için

Tablo 4.7. Uygulama örnek 3 sesli harfler

İ	O	A	Toplam
34	89	2	125

Tablo 4.8. Uygulama örnek 3 sessiz harfler

F	B	N	C	Toplam
55	1	121.393	3	121.452

Karşı tarafa gönderilecek kod satırı şöyle olacaktır: 125,121.452,541672334

Karşı taraf gelen sayıyı üç kısma ayıracak. 1.kısım: 125=89+34+2 yani “O-İ-A” harfleri. 2.kısım: 121452=121393+55+3+1 yani “N-F-C-B” bu harflerin sayısal değerlerini küçükten büyüğe doğru sıraladığında 1=B, 2=A, 3=C, 4=İ, 5=F, 6=O, 7=N harflerine ulaşacak ve kodun 3.kısımına göre sıralama yaptığında FİBONACCİ kelimesine ulaşmış olacaktır.

Kurgu 3: Fibonacci sayılarının veya Lucas sayılarının popülerliğini bir tehdit olarak algılayabiliriz. Bu durumda Genelleştirilmiş Fibonacci Sayılar üzerinden tanımlanan özellikleri kullanarak yepyeni sayı kümeleri oluşturabiliriz. Sesli harfler ve noktalama işaretleri için Tek İndisli Genelleştirilmiş Fibonacci Sayıları, sessiz harfler için Çift İndisli Genelleştirilmiş Fibonacci Sayılarından faydalanabiliriz.

Yapmamız gereken Genelleştirilmiş Fibonacci Sayı dizisi oluşturmak için başlangıç değerlerimiz olan G_1 ve G_2 değerlerini seçmek olacaktır. Bu değerler daha sonra göndereceğimiz kod için anahtar değer vazifesi görecektir. *Kurgu 3* için bu değerleri $G_1 = 4$ ve $G_2 = 3$ olarak belirleyelim. Böylece Tablo 4.9. ve Tablo 4.10. elde edilmiş olur.

Tablo 4.9. Tek İndisli Genelleştirilmiş Fibonacci Sayıları için sembol karşılıkları

Sembol	G_T	Sayısal Değer
A	G_3	7
E	G_5	17
I	G_7	44
İ	G_9	115
O	G_{11}	301
Ö	G_{13}	788
U	G_{15}	2.063
Ü	G_{17}	5.401
	G_{19}	14.140
.	G_{21}	37.019
,	G_{23}	96.917
?	G_{25}	253.732

Tablo 4.10 Çift İndisli Genelleştirilmiş Fibonacci Sayıları için sembol karşılıkları

Sembol	G_{ζ}	Sayısal Değer	Sembol	G_{ζ}	Sayısal Değer
B	G_2	3	M	G_{24}	156.815
C	G_4	10	N	G_{26}	410.547
Ç	G_6	27	P	G_{28}	1.074.826
D	G_8	71	R	G_{30}	2.813.931
F	G_{10}	186	S	G_{32}	7.366.967
G	G_{12}	487	Ş	G_{34}	19.286.970
Ğ	G_{14}	1.275	T	G_{36}	50.493.943
H	G_{16}	3.338	V	G_{38}	132.194.859
J	G_{18}	8.739	Y	G_{40}	346.090.634
K	G_{20}	22.879	Z	G_{42}	906.077.043
L	G_{22}	59.898			

Uygulama Örnek 4: FİBONACCİ kelimesi için

Tablo 4.11. Uygulama örnek 4 sesli harfler

İ	O	A	Toplam
115	301	7	423

Tablo 4.12. Uygulama örnek 4 sessiz harfler

F	B	N	C	Toplam
186	3	410.547	10	410.746

Karşı tarafa gönderilecek kod satırı şöyle olacaktır: 4,3;423;410.746;642571334

Karşı taraf gelen kodu 4 kısma ayıracak. 1.kısım: Oluşturulacak dizi için anahtar görevi görecek olan ilk iki sayı. Bunlar 4 ve 3 dür. Dizinin elemanları oluşturulduktan sonra Teorem 3.5 ve Teorem 3.6’da yer verildiği gibi dizinin sürekli artan veya sürekli azalan özelliği göstermeye başladığı terimden itibaren harf kodlaması oluşturulur. 2.kısım 423 ise bu dizinin tek indisli terimlerinin sayısal toplamından oluştuğu yani sesli harf veya noktalama işareti içerdiği bilinir. Sayı çözümlendiğinde $423=301+115+7$ yani “O-İ-A” harfleri. 3.kısım: 410.746 ise bu

dizinin çift indisli terimlerinin sayısal toplamından oluştuğu yani sessiz harf içerdiği bilinir. Sayı çözümlendiğinde $410.746=410.547+186+10+3$ yani “N-F-C-B” bu harflerin sayısal değerlerini küçükten büyüğe doğru sıraladığında 1=A, 2=B, 3=C, 4=İ, 5=O, 6=F, 7=N harflerine ulaşacak ve kodun 3.kısımına göre sıralama yaptığında FİBONACCİ kelimesine ulaşmış olacaktır.



BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Fibonacci, Lucas ve Genelleştirilmiş Fibonacci Sayıları üzerine yapmış olduğumuz bu çalışmada bu sayı dizisi elemanlarının tek veya çift indisli olma durumları üzerine bazı sonuçlar elde edilmiş ve ispatlarına yer verilmiştir. Gerçekte mod 2 ye göre indisler incelenmiştir. Bir başka çalışmada mod 3, mod 4'e göre dizi elemanları sınıflandırılıp üzerlerinde çalışmalar yapılabilir.

Kriptoloji uygulamaları yapılırken karakter kümeleri Tek İndisli Fibonacci, Çift İndisli Fibonacci, tek indisli Lucas, çift indisli Lucas sayı dizilerinin tamamı kullanılarak 4 ayrı gruba bölünerek daha küçük sayısal değerlerden oluşan bir şifreleme yapılabilir.

Genelleştirilmiş Fibonacci sayıları kullanılarak çok daha fazla sayı dizisi elde edilerek bu sayı dizilerinin ilk iki karakterleri başlangıç referans değeri olarak kodla birlikte gönderilerek her seferinde farklı sayısal değerlerden oluşan şifreleme sistemleri oluşturulabilir.

Genelleştirilmiş Fibonacci sayıları kullanılarak oluşturulan şifreleme metodunun güvenilirliği ve kırılmalara karşı direnci bu tezin konusu olmamakla birlikte, bu konu üzerine güvenilirlik çalışması yapılabilir.

Karakterlerin bulundukları sıraya göre farklı sayısal değerler alabileceği sistemler üzerine çalışılarak gönderilen kodun son kısmına ihtiyacı kaldırarak kurgular üzerine

alışılabilir. Bu gerçekleştirilirse veri sıkıştırma sistemlerinde kullanılabilircek bir alt yapı elde edilmiş olur.



KAYNAKÇA

- [1] Güleç, H., 2007, Fibonacci dizileri ve fibonacci matrislerinin determinantları, normları üzerine bir çalışma. Yüksek Lisans Tezi. Selçuk Ü., Konya.
- [2] Smith, D., 2007, Lucas's Theorem: Great Theorem, Miami University.
- [3] Hassanpour, A., 2015. Asal Sayıların Şifreleme Teorisindeki Uygulamaları. Yüksek Lisans Tezi. Atatürk Üniversitesi. Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum, Türkiye, 85.
- [4] Merkle-Hellman kriptosistemi – <https://tr.wikipedia.org>, Erişim Tarihi: 20.11.2018.
- [5] Koshy, T., 2001, Fibonacci and Lucas numbers with applications, John Wiley & Sons, New York-Toronto.
- [6] Vajda, S., 1989, Fibonacci and Lucas Numbers and the Golden Section: Theory and Applications, Courier Corporation.
- [7] Brannan, D.A., 2006, A First Course in Mathematical Analysis, Cambridge University Press.
- [8] Mollin, R.A., 2007, An Introduction to Cryptography, Chapman&Hall/CRC, Boca Raton .
- [9] Uçar, S., Taş, N., Özgür, N.Y., A new cryptography model via Fibonacci and Lucas numbers, arXiv: 1709.10355 [cs.CR].
- [10] N Taş, S Uçar, N.Y. Özgür, Ö.Ö. Kaymak, 2018, A new coding/decoding algorithm using Fibonacci numbers, Discrete Mathematics, Algorithms and Applications 10 (02)
- [11] M. Basu, B. Prasad, The generalized relations among the code elements for Fibonacci coding theory, Chaos Solitons Fractals 41 (2009), no. 5, 2517–2525
- [12] S. Prajapat, A. Jain, R. S. Thakur, A Novel Approach For Information Security With Automatic Variable Key Using Fibonacci Q-Matrix, IJCCT 3 (2012), no. 3, 54–57.
- [13] A. Stakhov, V. Massingue, A. Sluchnikov, Introduction into Fibonacci Coding and Cryptography, Osnova, Kharkov (1999).

- [14] A. P. Stakhov, Fibonacci matrices, a generalization of the Cassini formula and a new coding theory, *Chaos Solitons Fractals* 30 (2006), no. 1, 56–66.



ÖZGEÇMİŞ

Alpaslan Kargın, 07.02.1976'da Bingöl'de doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini İzmir'de tamamladı. 1992 yılında Suphi Koyuncuoğlu Lisesi'nden mezun oldu. 1996 yılında Ankara Üniversitesi Çankırı MYO Bilgisayar Programcılığı, 1996 yılında başladığı Abant İzzet Baysal Üniversitesi Matematik Bölümü'nü 2001 yılında bitirdi. 2016 yılında Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümü'nde yüksek lisans eğitimine başladı. 2005-2014 yılları arasında özel sektörde Matematik Öğretmeni olarak çalıştı. Halen Milli Eğitim Bakanlığı'nda öğretmen olarak görev yapmaktadır. Evli ve iki çocuk babasıdır.