

**T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Yüksek Lisans Tezi

**FIBONACCI VE LUCAS SAYILARINDA
BÖLÜNEBİLME**

Esra EKİN

**Tez Danışmanı
Dr. Öğr. Üyesi Funda TAŞDEMİR**

Yozgat 2018

**T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Yüksek Lisans Tezi

**FIBONACCI VE LUCAS SAYILARINDA
BÖLÜNEBİLME**

Esra EKİN

**Tez Danışmanı
Dr. Öğr. Üyesi Funda TAŞDEMİR**

Yozgat 2018

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAYI

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı Tezli Yüksek Lisans/Doktora Programı 701113150011 numaralı öğrencisi Esra EKİN'in hazırladığı “**Fibonacci ve Lucas Sayılarında Bölünebilme**” başlıklı tezi ile ilgili tez savunma sınavı, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri gereğince 09/05/2018 Çarşamba günü saat 11:00'de yapılmış, tezin onayına oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile karar verilmiştir.

Başkan : Dr. Öğr. Üyesi Emin AYGÜN

Jüri Üyesi : Dr. Öğr. Üyesi Funda TAŞDEMİR (Danışman)
(Danışman)

Jüri Üyesi : Dr. Öğr. Üyesi Mehmet EKİCİ

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun ...18./...5./20...18 tarih ve 20. sayılı kararı ile onaylanmıştır.

18.5.2018



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR.....	v
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL BİLGİLER.....	3
2.1. Fibonacci ve Lucas Sayıları	3
2.2. Bölünebilme ve Özellikleri	6
3. FIBONACCI VE LUCAS SAYILARIYLA İLGİLİ TEMEL ÖZDEŞLİKLER	10
4. FIBONACCI VE LUCAS SAYILARINDA BÖLÜNEBİLME	24
4.1. Bölünebilme Özellikleri	24
5. FIBONACCI VE LUCAS KONGRÜANSLAR	36
5.1. Fibonacci ve Lucas Sayılarının Kongrüans Özellikleri.....	36
5.2. Tam Kare Olan Lucas Sayıları	40
5.3. Fibonacci ve Lucas Kongrüansların Bazı Uygulamaları.....	42
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	52
KAYNAKLAR.....	53
ÖZGEÇMİŞ	55

FIBONACCI VE LUCAS SAYILARINDA BÖLÜNEBİLME

Esra EKİN

Bozok Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

2018; Sayfa: 55

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Funda TAŞDEMİR

ÖZET

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, yapılan çalışma ile ilgili literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölümde, Fibonacci ve Lucas sayıları tanıtılmış, tam sayılarda bölünebilme ile ilgili temel bilgiler yer almıştır. Üçüncü bölümde, Fibonacci ve Lucas sayılarıyla ilgili temel özdeşlikler ispatlanmıştır. Dördüncü bölümde, Fibonacci sayılarında bölünebilme özellikleri detaylı olarak incelenmiş, benzer özelliklerin Lucas sayıları için de sağlanıp sağlanmadığı gösterilmiştir. Beşinci bölümde ise Fibonacci ve Lucas kongrüanslar ve bazı uygulamaları verilmiştir. Son olarak elde edilen sonuçlar özetlenmiş ve bazı öneriler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Fibonacci sayıları, Lucas sayıları, Bölünebilme özellikleri, Kongrüanslar.

DIVISIBILITY OF FIBONACCI AND LUCAS NUMBERS

Esra EKİN

**Bozok University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master of Science Thesis**

2018; Page: 55

Thesis Supervisor: Asst. Prof. Dr. Funda TAŞDEMİR

ABSTRACT

This thesis consists of six sections. In the first section, the literature knowledge about the study has been given. In the second section, Fibonacci and Lucas numbers have been introduced and basic knowledges about the divisibility of numbers have been included. In the third section, basic identities related with Fibonacci and Lucas numbers have been proved. Divisibility properties of Fibonacci numbers have been examined detailed and it has been shown that whether similar properties are provided or not for Lucas numbers in the fourth section. In the fifth section, Fibonacci and Lucas congruences and their applications have been given. Lastly, the results obtained have been summarized and the some suggestions provided.

Keywords: Fibonacci numbers, Lucas numbers, Properties of divisibility, Congruences.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamı gerçekleştirmede, değerli bilgilerini ve zamanını benimle paylaşan, kendisine her zaman rahatlıkla danışabildiğim bana kıymetli zamanını ayırıp sabırla ve büyük bir ilgiyle bana faydalı olabilmek için elinden gelenden fazlasını sunan ve desteğini esirgemeyen danışmanım sayın Dr. Öğr. Üyesi Funda TAŞDEMİR'e saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Teşekkürlerin az kalacağı lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca desteğini benden esirgemeyen, hep yanımda olan değerli eşim Ali EKİN'e ve bana 4 yıllık üniversite hayatım boyunca emeği geçen Akın Osman ATAGÜN hocama ve tüm hocalarıma kazandırdıkları her şey için ve beni gelecekte söz sahibi yapacak bilgilerle donattıkları için hepsine teker teker teşekkürlerimi sunuyorum. Kayseri'den gelip beni dinleyen, değerli bilgilerini paylaşan Dr. Öğr. Üyesi Emin AYGÜN hocama ve yine beni dinleyen ve desteğini her zaman hissettiğim çok değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Mehmet EKİCİ 'ye teşekkürlerimi sunuyorum. Son olarak beni bu günlere sevgi ve saygı kelimelerinin anlamlarını bilecek şekilde yetiştirerek getiren ve benden hiçbir zaman desteğini esirgemeyen bu hayattaki en büyük şansım olan aileme sonsuz teşekkürler.

1. GİRİŞ

Fibonacci ve Lucas sayı dizileri, tamsayı dizilerinin iki parlak yıldızını oluşturmaktadır. Bu diziler yüzyıllar boyunca gerek amatör, gerekse profesyonel matematikçilerinin ilgisini çekmiştir. Doğada umulmadık biçimlerde ve birbirinden tamamen bağımsız alanlarda karşımıza çıkmalarıyla da halen üzerlerine aynı ilgiyi toplamayı sürdürmektedirler.

Leonardo Fibonacci Ortaçağ Avrupa'sının önde gelen matematikçilerinden biri idi. Fibonacci, 1170 yılı civarında Pisa şehrinde, zengin bir tüccar ailesi olan Bonacci ailesinin çocuğu olarak dünyaya gelmiştir ("Fibonacci" ismi Bonacci'lerin oğlu anlamına gelen "Filius Bonacci" isminin kısaltılmasıdır).

Fibonacci 30'lu yaşlarda önde gelen eseri olan Liber Abacci (Abaküs Kitabı) adlı kitabını yayınlamıştır. Kitap temel cebir ve aritmetik bilgilerini içermekte olup, Hint-Arap sayı sistemini ve aritmetik algoritmalarını Avrupa'ya tanıtan kitap olarak bilinmektedir.

Fibonacci, Liber Abacci adlı kitabında tavşan çiftliği olan bir arkadaşıyla ilgili olduğunu iddia ettiği bir soru sorar. Bu probleme göre arkadaşının çiftliğindeki tavşanlar doğdukları ilk iki ay yavru yapamazlar. Üçüncü aydan itibaren her çift tavşan her ay bir çift yavru yapar. Tavşanların ölmedikleri kabul edilecek olursa, herhangi n. ayda çiftlikte toplam kaç çift tavşan vardır? Buna göre belli bir aydaki çift sayısı önceki iki ayın toplamına eşittir. O halde tavşan çifti sayıları aylara göre bir yıl içinde 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 olacaktır.

Fibonacci'nin kendisi bu sayı dizisi üzerinde bir çalışma yapmamıştır. Hatta bu sayı dizisi üzerinde 19 uncu yüzyılın başlarına kadar ciddi bir araştırma yapılmadığı da belirtilmektedir.

Fransız matematikçi Edward Lucas, başlangıç şartlarını değiştirerek Fibonacci dizisine benzer bir sayı dizisi elde etmiştir. Günümüze de süregelen araştırmalar, bu iki sayı dizisi arasında ilginç bağıntıların olduğunu kanıtlamıştır. Bu özellikleri birçok çalışmada bulabiliriz. Bu sayılar bazen doğada ve bilimsel alanlarda

görülmektedir. Örneğin, 123 sağ sarmalı ve 76 sol sarmalı olan Lucas ayçiçekleri olduğu bilinmektedir.

Bölünebilme konusu, sayılar teorisinin temel konulardan biridir. Fibonacci ve Lucas sayıları gibi özel sayı dizilerinde bölünebilme ve özelliklerinin incelenmesi ilgi çekici bir konu olmuştur. Bu konuda literatürde geniş çalışmalara yer verilmiştir.

Bu çalışmaların bir kısmı Barik [1], Toy [2], Ferns [3], Carlitz [4], Freeman [5], Dudley [6], Hoggatt[7], Keskin[8-9] olarak gösterilebilir. Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili bir birçok kitap da yazılmıştır [10-12].

Bölünebilme ile yakından ilişkili bir kavram olan kongrüans kavramı bir tam sayının sıfırdan farklı bir sayı ile bölümünden elde edilen kalan üzerinde yapılan aritmetiktir. Bu anlamda bölünebilmeden ayrı düşünülemezdir. Gauss tarafından ilk kez ortaya atıldığından bu yana gelişimini sürdürmektedir [13-17].

Bu tez çalışmasında, literatürde önemli yer tutan bölünebilme ve kongrüans olma kavramları, Fibonacci sayıları ile birlikte düşünerek ilginç sonuçlar elde edilmiştir.

2. TEMEL BİLGİLER

2.1. Fibonacci ve Lucas Sayıları

Fibonacci sayıları matematikte ve farklı alanlarda ilgi çeken konular arasında gelmektedir. Bunun nedeni Fibonacci sayılarının ilginç sonuçlara sahip olmasıdır. Fibonacci sayıları ilk kez Leonardo de Fibonacci tarafından keşfedildi. Fibonacci sayılarından oluşan Fibonacci serisi, tavşanlarla ilgili bir problemin çözümünden elde edilmiştir. Tavşan problemi şu şekildedir:

Biri erkek diğeri dişi yeni doğmuş iki tavşan olsun.

- Her çiftin olgunlaşması bir ay sürsün.
- Her çift ikinci aydan itibaren her ay erkek-dişi bir çift üretsün.
- Bütün tavşanlar ölümsüz olsun.

Bu şartlar altında bir yılda üretilen tavşan sayısı hesaplanmak istensin. Varsayalım ki tavşanların ilk çiftleri 1 Ocak'ta doğsun. Olgunlaşmaları bir ay süreceğinden bu nedenle 1 Şubat'ta hala 1 çift olur. 1 Mart'ta iki aylıklar ve yeni bir çift ürettiler. Böylece toplam 2 çift oldu. Bu şekilde ilerleyerek, Nisan ayında 3 çift, Mayıs ayında 5 çift olacak şekilde devam eder. Buradaki 1, 1, 2, 3, 5, 8 ... sayıları Fibonacci sayılarıdır. Etkileyici bir özelliği vardır: İlk ikisi hariç herhangi bir Fibonacci sayısı, kendinden önceki iki Fibonacci sayısının toplamıdır Böylece, n . Fibonacci sayısı F_n aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$F_1 = 1$$

$$F_2 = 1$$

.

.

.

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 3$$

Adını Lucas'dan alan, Fibonacci sayılarıyla yakın ilişkili olan Lucas sayıları 1, 3, 4, 7, 11 ... dir. n . Lucas sayısı L_n aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$L_1 = 1,$$

$$L_2 = 3,$$

.

.

.

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \quad n \geq 3$$

Fibonacci sayıları ve Altın Oran uygulamaları modern bilimde büyük bir ilgi oluşturmaktadır. F_n ile gösterilen Fibonacci sayıları 0, 1, 1, 2, 3, 5 ... dizisinin terimleri olup, $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ değerlerinden başlayarak, her bir terim kendinden önceki iki terimin toplamıdır. Diğer taraftan, modern araştırmalarda, özellikle yüksek enerjili parçacıklar fiziği veya teorik fizikte, ardışık iki Fibonacci sayısının oranı, Altın Oran veya Altın Kesit olarak geçen $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 'ye yakınsar [1].

Tanım 2.1.1. (Fibonacci ve Lucas Sayıları)

$F_0 = 0, F_1 = 1, n \geq 2$ için $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ yineleme bağıntısı ile tanımlanan tamsayılar dizisindeki sayılara Fibonacci sayıları denir. $L_0 = 2, L_1 = 1, n \geq 2$ için $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ yineleme bağıntısı ile tanımlanan tamsayılar dizisindeki sayılara Lucas sayıları denir.

Tanım 2.1.2. (Altın Oran ve Altın Dikdörtgen)

Altın Oran, yaklaşık 1.61803398874989 değerine sahip olan irrasyonel bir matematik sabitidir ve ϕ ile gösterilir. İki nicelik a ve b için

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \phi$$

ise bunlar Altın Orana sahiptirler denir.

$$\frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a} = 1 + \frac{1}{\phi}$$

$$1 + \frac{1}{\phi} = \phi$$

$$\phi^2 = \phi + 1$$

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0$$

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\phi = 1.61803398874989$$

$$\phi \simeq 1.618.$$

Uzun kenarının, kısa kenarına oranı Altın Oranı veren dikdörtgene ise Altın Dikdörtgen denir.

Teorem 2.1.3.

Ardışık iki Fibonacci sayısının oranı, Altın Orana yakınsar, yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$$

dir.

İspat:

$n = 1, 2, 3, \dots$ için $r_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ olsun. Bu durumda,

$$r_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{r_{n-1}}$$

dir. $n \rightarrow \infty$ için, yukarıdaki denklemin limiti alındığında,

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

yani

$$x^2 = 1 + x$$

buradan

$$x^2 - x - 1 = 0$$

olup

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi$$

bulunur. Böylece,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$$

elde edilir.

2.2. Bölünebilme ve Özellikleri

Bu bölümde, sayılar teorisindeki temel konuları ile ilgili bazı tanımlar ve sonuçlar verilecektir [1]. Bu anlamda, bundan sonraki bölümlerdeki çalışmalarda temel teşkil edecektir.

Tanım 2.2.1. (Bölme Algoritması)

a ve b herhangi iki tam sayı ve $b > 0$ olsun. Bu durumda, $a = bq + r$, $0 \leq r < b$ olacak biçimde bir tek q, r tam sayı çifti vardır. Buradaki q sayısına, a 'nın b ile bölünmesinden elde edilen bölüm, r sayısına da a 'nın b ile bölünmesinden elde edilen kalan denir.

Tanım 2.2.2. (Bölünebilme)

$a = dc$ olacak şekilde bir c tamsayısı varsa, a tamsayısına $d \neq 0$ tam sayısı ile bölünebilirdir denir.

Tanım 2.2.3. (En Büyük Ortak Bölen)

a ve b her ikisi birden sıfır olmayan iki tamsayı olmak üzere,

1) $d \mid a$ ve $d \mid b$,

2) $c \mid a$ ve $c \mid b$ ise $c \mid d$,

şartlarını sağlayan pozitif d tamsayısına a ile b nin en büyük ortak böleni denir ve (a, b) ile gösterilir.

Tanım 2.2.4. (Aralarında Asal)

a ve b her ikisi birden sıfır olmayan iki tamsayı olmak üzere, $(a, b) = 1$ ise bu sayılara aralarında asal denir.

Tanım 2.2.5. (Euclid Algoritması)

Euclid algoritması verilen iki tamsayının en büyük ortak bölenini bulmak için uygulanan bir yöntemdir. Bölme algoritmasının tekrarlı uygulanmasıdır. a ve b en büyük ortak böleni bulunmak istenen iki tamsayı olsun. $(a, b) = (|a|, |b|)$ olduğundan, a ve b nin pozitif tamsayı olduğunu varsaymak yeterlidir. Bu durumda, $a > b > 0$ 'dır. Bölme algoritmasından $0 \leq r_1 < b$, iken $a = bq_1 + r_1$ 'dir. $r_1 = 0$ ise $b \mid a$ ve $(a, b) = b$ 'dir. $r_1 \neq 0$ ise, bölme algoritmasından $b = r_1q_2 + r_2$, ve burada $0 \leq r_2 < r_1$ 'dir. Eğer $r_2 = 0$ ise işlem durdurulur. $r_2 \neq 0$ ise bölme algoritmasından $r_1 = r_2q_3 + r_3$, ve burada $0 \leq r_3 < r_2$ 'dir. Bu şekilde kalan sıfır olana kadar devam edilir. $r_1, r_2, r_3, \dots$ tam sayıların azalan bir dizisini oluşturduğundan bu durum bir yerde son bulur. $r - 1 < b$ olduğundan bu dizi en fazla b tane negatif olmayan tamsayı içerir. Kabul edelim ki, $r_{n+1} = 0$ ve r_n sıfırdan farklı son kalan olsun. Bu durumda aşağıdaki durum vardır.

$$a = bq_1 + r_1, \quad 0 < r_1 < b$$

$$b = r_1 q_2 + r_2, \quad 0 < r_2 < r_1$$

$$r_1 = r_2 q_3 + r_3, \quad 0 < r_3 < r_2$$

$$r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n, \quad 0 < r_n < r_{n-1}$$

.

.

.

$$r_{n-1} = r_n q_{n+1} + 0$$

Buradan $(a, b) = r_n$ 'dir.

Teorem 2.2.6.

a, b, c tamsayıları için

1. $a \mid b$ ve $c \mid d$ ise, $ac \mid bd$ dir.
2. $a \mid b$ ve $b \mid c$ ise, $a \mid c$ dir.
3. $a \mid b$ ve $a \mid c$ ise, keyfi x ve y tamsayıları için $a \mid (bx + cy)$ dir.

İspat:

1. $a \mid b$ ve $c \mid d$ ise, $b = ra$ ve $d = sc$ olacak şekilde $r, s \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan $bd = ra.sc = rs.ac \Rightarrow ac \mid bd$ dir.
2. $a \mid b$ ve $b \mid c$ ise $b = ra$ ve $c = sb$ olacak şekilde $r, s \in \mathbb{Z}$ vardır. Böylece, $c = sb = sra \Rightarrow a \mid c$ dir.
3. $a \mid b$ ve $a \mid c$ ise $b = ar$ ve $c = as$ olmak üzere $r, s \in \mathbb{Z}$ vardır. Ancak x ve y ne seçilirse seçilsin $bx + cy = arx + asy = a(rx + sy)$ dir. $rx + sy$ bir tamsayısı olduğundan $a \mid (bx + cy)$ dir.

Teorem 2.2.7.

$a, b, q, r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ olsun.

$$a = b \cdot q + r$$

ise

$$(a, b) = (b, a - q \cdot b) = (b, r)$$

dir.

Teorem 2.2.8. (Aritmetiğin Temel Teoremi)

Herhangi bir pozitif tam sayı ya asaldir veya asalların çarpımı şeklinde çarpanların sıra değişikliği hariç tek türlü yazılır.

Tanım 2.2.9. (Kongrüanslar)

m , sabit pozitif bir tam sayı olsun. a ve b iki tamsayı olmak üzere, $a - b$, m ile bölünebilir ise a ve b ye m modülüne göre kongrüenttir denir ve $a \equiv b \pmod{m}$ ile gösterilir.

Kongrüansın bazı özellikleri:

1. $a \equiv a \pmod{m}$ dir.
2. $a \equiv b \pmod{m}$ ise $b \equiv a \pmod{m}$ dir.
3. $a \equiv b \pmod{m}$ ve $b \equiv c \pmod{m}$ ise $a \equiv c \pmod{m}$ dir.
4. $a \equiv b \pmod{m}$ ise, herhangi bir c tam sayısı için
5. $ac \equiv bc \pmod{m}$ ise $a \equiv b \pmod{\frac{m}{(m,c)}}$ dir.

3. FIBONACCI VE LUCAS SAYILARIYLA İLGİLİ TEMEL ÖZDEŞLİKLER

Bu bölümde, Fibonacci ve Lucas sayılarının bazı temel özdeşlikleri verilecektir.

Özdeşlik 3.1.

$n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\sum_{i=1}^n F_i^2 = F_n F_{n+1}$$

dir [2].

İspat:

n üzerinden tümevarım yöntemi ile ispatlayacak olursak, $n = 1$ için;

$$\sum_{i=1}^1 F_i^2 = F_1^2 = 1.1 = F_1 F_2$$

olup sağlanır. Özdeşlik $n = k$ için doğru yani

$$\sum_{i=1}^k F_i^2 = F_k F_{k+1}$$

olsun. Şimdi $n = k + 1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} F_i^2 &= \sum_{i=1}^k F_i^2 + F_{k+1}^2 \\ &= F_k F_{k+1} + F_{k+1}^2 \\ &= F_{k+1} (F_k + F_{k+1}) \\ &= F_{k+1} F_{k+2} \end{aligned}$$

olur ve ispat tamamlanır.

Özdeşlik 3.2. $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$$

dir [2].

İspat:

$$\begin{aligned} & F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2 \\ &= (F_{n-1} + F_n)F_{n-1} - F_n^2 \\ &= F_{n-1}^2 + F_n(F_{n-1} - F_n) \\ &= F_{n-1}^2 - F_n \cdot F_{n-2} \\ &= -(F_n \cdot F_{n-2} - F_{n-1}^2) \\ &= (-1)^2(F_{n-1} \cdot F_{n-3} - F_{n-2}^2) \\ &= (-1)^3(F_{n-2} \cdot F_{n-4} - F_{n-3}^2) \\ &= (-1)^n(F_1 \cdot F_{-1} - F_0^2) \\ &= (-1)^n \end{aligned}$$

Özdeşlik 3.3. $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\sum_{i=1}^n F_i = F_{n+2} - 1$$

dir [2].

İspat:

$$F_1 = F_3 - F_2$$

$$F_2 = F_4 - F_3$$

.

.

.

$$F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$$

$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$$

olur ve eşitlikleri taraf tarafa toplayarak;

$$\sum_{i=1}^n F_i = F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1$$

elde edilir.

Özdeşlik 3.4. $n, m \in \mathbb{Z}^+$ için

$$F_{m+n} = F_{m-1} F_n + F_m F_{n+1}$$

dir [2].

İspat:

Tümevarım yöntemi ile ispatlarsak $n = 1$ için;

$$F_{m+1} = F_{m-1} F_1 + F_m F_{1+1} = F_{m-1} + F_m$$

olur ve doğrudur. $n = k$ ve $n = k - 1$ için özdeşlik doğru olsun.

$$F_{m+k} = F_{m-1} F_k + F_m F_{k+1}$$

$$F_{m+(k-1)} = F_{m-1} F_{k-1} + F_m F_k$$

taraf tarafa toplarsak;

$$F_{m+k} + F_{m+(k-1)} = F_{m-1} (F_{k-1} + F_k) + F_m (F_k + F_{k+1})$$

$$F_{m+k+1} = F_{m-1} F_{k+1} + F_m F_{k+2}$$

olur ve $n = k + 1$ için özdeşlik doğrudur. Buradan ispat tamamlanır.

Özdeşlik 3.5. $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$$

dir [2].

İspat:

Tümevarım yöntemi ile, $n = 1$ ve $n = 2$ için;

$$L_1 = F_0 + F_2 \text{ ve } L_2 = F_1 + F_3$$

olur ve doğrudur. $n = k$ ve $n = k + 1$ için özdeşlik doğru olsun.

$$L_k = F_{k-1} + F_{k+1}$$

$$L_{k+1} = F_k + F_{k+2}$$

taraf tarafa toplarsak;

$$L_{k+2} = F_{k+1} + F_{k+3}$$

elde edilip ispat tamamlanır.

Özdeşlik 3.6. $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$F_{2n} = F_n L_n$$

dir [2].

İspat:

Özdeşlik 3.4 ve Özdeşlik 3.5 kullanılarak;

$$F_{2n} = F_{n+n} = F_{n-1} F_n + F_n F_{n+1} = F_n (F_{n-1} + F_{n+1}) = F_n L_n$$

elde edilir.

Özdeşlik 3.7. $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$$

dir [2].

İspat:

Özdeşlik 3.4 ($F_{m+n} = F_{m-1} F_n + F_m F_{n+1}$) ile

$$F_{2n+1} = F_{(n+1)+n} = F_n F_n + F_{n+1} F_{n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2$$

elde edilir.

Özdeşlik 3.8. $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$L_{n+1} L_{n-1} - L_n^2 = 5(-1)^{n-1}$$

dir [2].

İspat:

Tümevarım yöntemi ile, $n = 1$ için;

$$L_2 L_0 - L_1^2 = 3 \cdot 2 - 1^2 = 5 = 5(-1)^0$$

olup doğrudur. $n = k$ için doğru olsun.

$$L_{k+1} L_{k-1} - L_k^2 = 5(-1)^{k-1}$$

$n = k + 1$ için özdeşliğin doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} L_{k+2} L_k - L_{k+1}^2 &= (L_{k+1} + L_k)(L_{k+1} - L_{k-1}) - L_{k+1}^2 \\ &= L_{k+1}^2 - L_{k+1} L_{k-1} + L_k L_{k+1} - L_k L_{k-1} - L_{k+1}^2 \\ &= -L_{k+1} L_{k-1} - L_k (L_{k+1} - L_{k-1}) \\ &= -L_{k+1} L_{k-1} + L_k^2 \end{aligned}$$

$$= -(L_{k+1} L_{k-1} - L_k^2$$

$$= -5(-1)^{k-1}$$

$$= 5(-1)^k$$

olur.

Özdeşlik 3.9. $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\sum_{i=0}^n L_i = L_{n+2} - 3$$

dir [2].

İspat:

$$L_1 = L_3 - L_2$$

$$L_2 = L_4 - L_3$$

.

.

.

$$L_{n-1} = L_{n+1} - L_n$$

$$L_n = L_{n+2} - L_{n+1}$$

toplarsak;

$$\sum_{i=0}^n L_i = L_{n+2} - L_2 = L_{n+2} - 3$$

olup ispat tamamlanır.

Özdeşlik 3.10. $n, m \in \mathbb{Z}^+$ için

$$F_n F_m + F_{n+1} F_{m+1} = F_{m+n+1}$$

dir [2].

İspat:

Özdeşlik 3.4 ($F_{m+n} = F_{m-1} F_n + F_m F_{n+1}$) ile,

$$F_{m+n+1} = F_{(n+1)+m} = F_n F_m + F_{n+1} F_{m+1}$$

elde edilir.

Özdeşlik 3.11. $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$5F_n = L_{n-1} + L_{n+1}$$

dir [2].

İspat:

Özdeşlik 3.5 ($L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$) ve $L_{n-1} = F_{n-2} + F_n$ ve $L_{n+1} = F_n + F_{n+2}$ taraf tarafa toplanırsa;

$$L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n$$

olup ispat tamamlanır.

Özdeşlik 3.12. $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$F_{n+2} - F_{n-2} = L_n$$

dir [2].

İspat:

$$F_{n+2} - F_{n-2} = F_n + F_{n+1} - F_{n-2} = F_{n-1} + F_{n-2} + F_{n+1} - F_{n-2} = L_n$$

elde edilir.

Özdeşlik 3.13. $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$F_n + L_n = 2F_{n+1}$$

dir [2].

İspat:

$$F_n + L_n = F_n + F_{n-1} + F_{n+1} = 2F_{n+1}$$

Özdeşlik 3.14. $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$F_{n+1}^2 - F_n^2 = F_{n+2}F_{n-1}$$

dir [2].

İspat:

$$F_{n+1}^2 - F_n^2 = (F_{n+1} + F_n)(F_{n+1} - F_n) = F_{n+2}F_{n-1}$$

Özdeşlik 3.15. $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$F_{n+1}L_{n+1} - F_nL_n = F_{2n+1}$$

dir [2].

İspat:

Özdeşlik 3.6. $(F_{2n} = F_n L_n)$ 'dan

$$F_{n+1}L_{n+1} - F_nL_n = F_{2n+2} - F_{2n} = F_{2n+1}$$

elde edilir.

Özdeşlik 3.16. $n \geq m \geq 1$ için;

$$F_n = F_{n-m+1}F_m + F_{n-m}F_{m-1}$$

dir [2].

İspat:

Özdeşlik 3.4'ten,

$$F_n = F_{(n-m+1)+(m-1)} = F_{n-m+1}F_m + F_{n-m}F_{m-1}$$

elde edilir.

Özdeşlik 3.17.

$n \in \mathbb{Z}^+$ için, $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere,

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad \text{ve} \quad L_n = \alpha^n + \beta^n$$

dır. Bu eşitliklere F_n ve L_n için Binet Formülleri denir [2].

İspat:

Tümevarım metodu ile, $n = 1$ için, $F_1 = 1$ doğrudur. $n = k - 1$ ve $n = k - 2$ için doğru olsun.

$$\begin{aligned} F_{k-1} + F_{k-2} &= \frac{\alpha^{k-1} - \beta^{k-1} + \alpha^{k-2} - \beta^{k-2}}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{[\alpha^k(\alpha^{-1} + \alpha^{-2}) - \beta^k(\beta^{-1} + \beta^{-2})]}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta} \\ &= F_k \end{aligned}$$

Benzer şekilde, $n = 1$ için, $L_1 = 1$ olduğundan doğrudur. $n = k - 1$ ve $n = k - 2$ için eşitlik doğru olsun.

$$L_{k-1} + L_{k-2} = \alpha^{k-1} + \beta^{k-1} + \alpha^{k-2} + \beta^{k-2}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha^k(\alpha^{-1} + \alpha^{-2}) + \beta^k(\beta^{-1} + \beta^{-2}) \\
&= \alpha^k + \beta^k \\
&= L_k
\end{aligned}$$

ölür ve ispat tamamlanır.

Özdeşlik 3.18. $n, m \in \mathbb{Z}^+$ için

$$F_{m+n} = L_n F_m + (-1)^{n+1} F_{m-n}$$

dir [2].

İspat:

$$\begin{aligned}
&L_n F_m + (-1)^{n+1} F_{m-n} \\
&= (\alpha^n + \beta^n) \left(\frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta} \right) + (-1)^{n+1} \left(\frac{\alpha^{m-n} - \beta^{m-n}}{\alpha - \beta} \right) \\
&= \frac{\alpha^{n+m} - \alpha^n \beta^m + \alpha^m \beta^n - \beta^{n+m} + (-1)^{n+1} \alpha^{m-n} - (-1)^{n+1} \beta^{m-n}}{\alpha - \beta} \\
&= \frac{\alpha^{n+m} - (-1)^n \beta^{m-n} + (-1)^n \alpha^{m-n} - \beta^{n+m} - (-1)^n \alpha^{m-n} + (-1)^n \beta^{m-n}}{\alpha - \beta} \\
&= \frac{\alpha^{m+n} - \beta^{m+n}}{\alpha - \beta} \\
&= F_{m+n}
\end{aligned}$$

Özdeşlik 3.19. $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$L_{2n} + 2(-1)^n = L_n^2$$

dir [2].

İspat:

$$\begin{aligned} L_{2n} + 2(-1)^n &= \alpha^{2n} + \beta^{2n} + 2(\alpha\beta)^n \\ &= (\alpha^n + \beta^n)^2 \\ &= L_n^2 \end{aligned}$$

Özdeşlik 3.20.

$$F_{m+n-2} F_{m+r-1} - F_{m+n-1} F_{m+r-2} = (-1)^{m+r-2} F_{n-r}$$

dir [2].

İspat:

$$m + n - 1 = a \quad \text{ve} \quad m + r - 1 = b$$

alalım.

$$\begin{aligned} &(-1)^{m+r-2} F_{n-r} \\ &= (-1)^{b-1} F_{a-b} \\ &= (-1)^{b-1} [F_{a-1} F_{-b} + F_a F_{-(b-1)}] \\ &= (-1)^{b-1} [F_{a-1} (-1)^{b+1} F_b + F_a (-1)^b F_{b-1}] \\ &= F_{a-1} F_b (-1)^{2b} + F_a F_{b-1} (-1)^{2b-1} \\ &= F_{a-1} F_b - F_a F_{b-1} \\ &= F_{m+n-2} F_{m+r-1} - F_{m+n-1} F_{m+r-2} \end{aligned}$$

Özdeşlik 3.21. $n, m \in \mathbb{Z}^+$ için

$$L_{n+m} + (-1)^m L_{n-m} = L_m L_n$$

dir [2].

İspat:

$$\begin{aligned} L_{n+m} - L_m L_n &= \alpha^{n+m} + \beta^{n+m} - (\alpha^m + \beta^m)(\alpha^n + \beta^n) \\ &= -(\alpha^m \beta^n + \alpha^n \beta^m) \\ &= -\alpha^m \beta^m (\alpha^{n-m} + \beta^{n-m}) \\ &= -(-1)^m L_{n-m} \end{aligned}$$

elde edilir.

Özdeşlik 3.22. $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$5F_n^2 - L_n^2 = 4(-1)^{n+1}$$

dir [2].

İspat:

$$\begin{aligned} 5F_n^2 - L_n^2 &= 5\left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}\right)^2 - (\alpha^n + \beta^n)^2 \\ &= (\alpha^n + \beta^n + \alpha^n - \beta^n)(\alpha^n - \beta^n - \alpha^n - \beta^n) \\ &= -4(\alpha\beta)^n \\ &= 4(-1)^{n+1} \end{aligned}$$

Özdeşlik 3.23. $n, m \in \mathbb{Z}^+$ için

$$F_{m+n} + F_{m-n} = \begin{cases} F_n L_m, & n \text{ tek} \\ F_m L_n, & n \text{ çift} \end{cases}$$

ve

$$F_{m+n} - F_{m-n} = \begin{cases} F_m L_n, & n \text{ tek} \\ F_n L_m, & n \text{ çift} \end{cases}$$

dir [2].

İspat:

$$F_{m+n} = F_{m-1} F_n + F_m F_{n+1}$$

ve

$$F_{m+(-n)} = F_{m-1} F_{-n} + F_m F_{-(n-1)}$$

eşitlikleri taraf tarafa toplandığında ve çıkarıldığında

$$F_{m+n} + F_{m-n} = F_{m-1} (F_n + (-1)^{n+1} F_n) + F_m (F_{n+1} + (-1)^n F_{n-1})$$

n , tek ise;

$$F_{m+n} + F_{m-n} = 2F_{m-1} F_n + F_m F_n = F_n (F_{m-1} + F_{m-1} + F_m) = F_n L_m$$

n , çift ise;

$$F_{m+n} + F_{m-n} = F_m (F_{n+1} + F_{n-1}) = F_m L_n$$

olur.

$$F_{m+n} - F_{m-n} = F_{m-1} (F_n - (-1)^{n+1} F_n) + F_m (F_{n+1} - (-1)^n F_{n-1})$$

n , tek ise;

$$F_{m+n} - F_{m-n} = F_m (F_{n+1} + F_{n-1}) = F_m L_n$$

n , çift ise;

$$F_{m+n} - F_{m-n} = 2F_{m-1} F_n + F_m F_n = F_n (F_{m-1} + F_{m-1} + F_m) = F_n L_m$$

bulunur.

Özdeşlik 3.24. $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$2F_{m+n} = F_m L_n + F_n L_m$$

dir.

Özdeşlik 3.25. $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} \cdot F_n \text{ ve } L_{-n} = (-1)^n L_n$$

dir.

Özdeşlik 3.26. $m, k \in \mathbb{Z}^+$ için

$$L_{m+k} = L_m F_{k-1} + F_k L_{m+1}$$

dir.

Özdeşlik 3.27. $m, k \in \mathbb{Z}^+$ için

$$5F_{m+k} = L_m L_{k-1} + L_k L_{m-1}$$

dir.

Özdeşlik 3.28 $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$2L_{m+n} = L_m L_n + 5 F_m F_n$$

dir [3].

4. FIBONACCI VE LUCAS SAYILARINDA BÖLÜNEBİLME

Bu bölümde Fibonacci ve Lucas sayılarının bölünebilme özellikleri verilecektir. Bu bölüm için temel kaynak olarak Koshy [10] alınmıştır.

4.1. Bölünebilme Özellikleri

Fibonacci sayıları için $F_n \mid F_{2n}$ olduğu Özdeşlik 3.6'da ispatlanmıştı. Bu kısımda, bu ifadenin genelleştirilmesi bulunmaya çalışılacaktır. İlk olarak, $i \mid j$ iken $F_i \mid F_j$ olduğunu gösteren aşağıdaki teoremi verelim

Teorem 4.1.1.

$$F_m \mid F_{mn}$$

dir [10].

İspat

Tümevarım yönteminden ispatlamak istersek, $n = 1$ için ifade doğrudur. Varsayalım ki bütün $k \geq 1$ tam sayıları için doğru olsun. O zaman, $1 \leq i \leq k$ olacak şekilde, her i için $F_m \mid F_{mi}$ olsun. Böylece, $F_m \mid F_{m(k+1)}$ olduğunu göstermeliyiz. Özdeşlik 3.4'ten ($F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}$)'den;

$$F_{m(k+1)} = F_{mk+m} = F_{mk-1}F_m + F_{mk}F_{m+1}$$

olur. Tümevarım hipotezinden $F_m \mid F_{mk}$ olduğu için, $F_m \mid F_{m(k+1)}$ bulunur. Böylece her $n \geq 1$ için doğrudur.

Örnek 4.1.2.

$F_{14} = 377$ ve $F_{28} = 317811$ olmak üzere $14 \mid 28$ olup aynı zamanda $377 \mid 317811$ 'dir.

Sonuç 4.1.3.

m . Fibonacci sayısı F_m ile bölünebilirdir [10].

Örnek 4.1.4.

Dördüncü Fibonacci sayısı, $F_4 = 3$ ile bölünebilirdir. Yine, $F_4, F_8, F_{12}, \dots$ Fibonacci sayıları da 4 ile bölünebilirdir. Benzer şekilde, $F_7, F_{14}, F_{21}, \dots$ sayıları da $F_7 = 13$ ile bölünebilirdir.

Sonuç 4.1.5.

Ardışık iki Fibonacci sayısı aralarında asaldır [10].

İspat:

F_n ve F_{n-1} sayılarına bölme algoritması uygulanırsa

$$F_n = 1.F_{n-1} + F_{n-2}$$

$$F_{n-1} = 1.F_{n-2} + F_{n-3}$$

.

.

.

$$F_4 = 1.F_3 + F_2$$

$$F_3 = 2.F_2 + 0$$

olup $\forall n \geq 3$ için $(F_n, F_{n-1}) = 1$ bulunur.

Teorem 4.1.6. $m, n \in \mathbb{Z}^+$

$$F_m \mid F_n \text{ ise } m \mid n$$

dir [10].

İspat:

Bölme algoritmasından $0 \leq r < m$ için $n = qm + r$ dir. $F_m \mid F_n$ olsun. Bu durumda, Özdeşlik 3.16 ($n \geq m \geq 1$ için $F_n = F_{n-m+1} F_m + F_{n-m} F_{m-1}$) dan;

$$F_m \mid F_{n-m}F_{m-1}$$

olur. Ancak, Sonuç 4.1.5. den $(F_m, F_{m-1}) = 1$ olduğu için $F_m \mid F_{n-m}$ bulunur. Benzer şekilde $F_m \mid F_{n-2m}$ dir. Böyle devam ettiğimizde $F_m \mid F_{n-qm}$ ve dolayısıyla $F_m \mid F_r$ olur. Bu durum $r = 0$ olması ile mümkündür Böylece, $n = qm$ yani $m \mid n$ bulunur.

Sonuç 4.1.7.

$F_m \mid F_n$ olması için gerek ve yeter şart $m \mid n$ olmasıdır [10].

İspat:

Teorem 4.1.1 ve Teorem 4.1.6'dan açıktır.

Lemma 4.1.8.

$$(F_{qn-1}, F_n) = 1$$

dir [10].

İspat:

$(F_{qn-1}, F_n) = d$ olsun. Buradan, $d \mid F_{qn-1}$ ve $d \mid F_n$ dir. Teorem 4.1.1'den $F_n \mid F_{qn}$ olup $d \mid F_{qn}$ dir. Bu durumda, $d \mid F_{qn-1}$ ve $d \mid F_{qn}$ olur. Sonuç 4.1.5'ten $(F_{qn-1}, F_{qn}) = 1$ olduğundan $d \mid 1$ yani $d = 1$ dir. Böylece $(F_{qn-1}, F_n) = 1$ bulunur.

Lemma 4.1.9.

$m = qn + r$ olsun. Bu durumda,

$$(F_m, F_n) = (F_n, F_r)$$

dir [10].

İspat:

Özdeşlik 3.4 ve Lemma 4.1.8 kullanılarak,

$$\begin{aligned}(F_m, F_n) &= (F_{qn+r}, F_n) \\&= (F_{qn-1}F_r + F_{qn}F_{r+1}, F_n) \\&= (F_{qn-1}F_r, F_n) \\&= (F_r, F_n)\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 4.1.10. $m, n \in \mathbb{Z}^+$

$$(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$$

dir [10].

İspat:

$m \geq n$ olmak üzere m ve n ye bölme algoritması uygulanırsa,

$$m = q_0 n + r_1, \quad 0 \leq r_1 < n$$

$$n = q_1 r_1 + r_2, \quad 0 \leq r_2 < r_1$$

$$r_1 = q_2 r_2 + r_3, \quad 0 \leq r_3 < r_2$$

.

.

$$r_{n-2} = q_{n-1} r_{n-1} + r_n, \quad 0 \leq r_n < r_{n-1}$$

$$r_{n-1} = q_n r_n + 0$$

Lemma 4.1.9'dan,

$$(F_m, F_n) = (F_n, F_{r_1}) = (F_{r_1}, F_{r_2}) = \dots = (F_{r_{n-1}}, F_{r_n})$$

olur. $r_n | r_{n-1}$ olduğundan Teorem 4.1.1'den $F_{r_n} | F_{r_{n-1}}$ dir. Bu durumda, $(F_{r_{n-1}}, F_{r_n}) = F_{r_n}$ olup, buradan $(F_m, F_n) = F_{r_n}$ olur. Bölme algoritmasından, $r_n = (m, n)$ olduğundan

$$(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$$

bulunur.

Örnek 4.1.11.

$$(F_8, F_{12}) = (21, 144) = 3 = F_4 = F_{(8,12)} \text{ dir.}$$

Sonuç 4.1.12. $m, n \in \mathbb{Z}^+$

$(m, n) = 1$ ise bu durumda $F_m F_n | F_{mn}$ 'dir [10].

İspat:

Teorem 4.1.1'den $F_m | F_{mn}$ ve $F_n | F_{mn}$ dir. Buradan $[F_m, F_n] | F_{mn}$ dir. Diğer taraftan Teorem 4.1.10'dan $(F_m, F_n) = F_{(m,n)} = F_1 = 1$ olduğundan $[F_m, F_n] = F_m F_n$ olur. Böylece $F_m F_n | F_{mn}$ bulunur..

Örnek 4.1.13.

$F_3 = 2$, $F_8 = 21$ ve $F_{24} = 46368$ olmak üzere $(3, 8) = 1$ olup $2.21 | 46368$ yani $F_3 F_8 | F_{24}$ dir.

Sonuç 4.1.14. $m, k \in \mathbb{Z}^+$

$$(F_{km}, F_{k(m-1)}) = F_{(km, k(m-1))} = F_k$$

dır [10].

Teorem 4.1.15.

$m \geq 2$ olmak üzere, $L_m \mid F_n$ olması için gerek ve yeter koşul $2m \mid n$ olmasıdır [4].

Örnek 4.1.16.

$10 \mid 20$ için $L_5 \mid F_{20}$, yani $11 \mid 6765$ olur.

Teorem 4.1.17.

$m \geq 2$ ve $k \geq 1$ olmak üzere, $L_m \mid L_n$ olması için gerek ve yeter şart $n = (2k - 1)m$ olmasıdır [4].

Lemma 4.1.18.

$n \geq 2$ için, $F_{2n-1} = F_{n+1}L_{n+2} - L_nL_{n+1}$ 'dir [10].

Teorem 4.1.19.

1.

$a : b = L_n : L_{n+1}$ ise $n \geq 2$ için

$$(a + b)F_{n+1} = [a, b] + (a, b)F_{2n-1}$$

dir [10].

2.

$a : b = F_{n-2} : F_{n-1}$ ise $n \geq 3$ için

$$(a + b)F_{n+1} = [a, b] + (a, b)F_{2n-1}$$

dir [10].

İspat:

1.

$a : b = L_n : L_{n+1}$ olsun. $(L_n, L_{n+1}) = 1$ olup bazı pozitif k tam sayıları için, $a = kL_n$, $b = kL_{n+1}$, $(a, b) = k$, $[a, b] = L_n L_{n+1}k$ 'dir. O halde Lemma 4.1.18'den

$$(a + b)F_{n+1} = (L_n + L_{n+1})kF_{n+1}$$

$$\begin{aligned}
&= F_{n+1} L_{n+2} k \\
&= (F_{2n-1} + L_n L_{n+1})k \\
&= [a, b] + (a, b) F_{2n-1}
\end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır.

2.

Varsayalım ki, $a : b = F_{n-2} : F_{n-1}$ olsun. O halde bazı pozitif k tam sayıları için,

$$a = kF_{n-2}, b = kF_{n-1}, (a, b) = k$$

ve

$$[a, b] = F_{n-1} F_{n-2} k$$

dır. O halde

$$F_{2n-1} = F_n F_{n+1} - F_{n-2} F_{n-1}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
(a + b)F_{n+1} &= (F_{n-2} + F_{n-1})kF_{n+1} \\
&= F_n F_{n+1} k \\
&= (F_{2n-1} + F_{n-1} F_{n-2})k
\end{aligned}$$

olur ve buradan eşitlik

$$(a + b)F_{n+1} = (a, b)F_{2n-1} + [a, b]$$

dir.

Örnek 4.1.20.

$n = 7$ olsun. $F_{n+1} = F_8 = 21$ ve $F_{2n-1} = F_{13} = 233$ olmak üzere,

$a : b = L_n : L_{n+1} = L_7 : L_8 = 29 : 47$, $a = 145$ ve $b = 235$ alalım.

Bu taktirde

$$\begin{aligned}[a, b] + (a, b)F_{2n-1} &= [145, 235] + (145, 235).233 \\ &= 6815 + 5.233 \\ &= 7980 \\ &= (145 + 235).21 \\ &= (a + b)F_{n+1}\end{aligned}$$

Üstelik,

$a : b = F_{n-2} : F_{n-1} = F_5 : F_6 = 5 : 8$, $a = 60$ ve $b = 96$ alalım.

O zaman $[a, b] + (a, b)F_{2n-1} = [60, 96] + 12.233 = 3276 = (60 + 96).21 = (a + b)F_{n+1}$ olur.

Teorem 4.1.21. [6]

1. $F_{4n} + 1 = F_{2n-1} L_{2n+1}$
2. $F_{4n} - 1 = F_{2n+1} L_{2n-1}$
3. $F_{4n+1} + 1 = F_{2n+1} L_{2n}$
4. $F_{4n+1} - 1 = F_{2n} L_{2n+1}$
5. $F_{4n+2} + 1 = F_{2n+2} L_{2n}$
6. $F_{4n+2} - 1 = F_{2n} L_{2n+2}$
7. $F_{4n+3} + 1 = F_{2n+1} L_{2n+2}$
8. $F_{4n+3} - 1 = F_{2n+2} L_{2n+1}$

İspat:

İspat yaparken Özdeşlik 3.23'ü kullanacağız.

Yani

$$F_{m+n} + F_{m-n} = \begin{cases} F_n L_m, & n \text{ tek} \\ F_m L_n, & n \text{ çift} \end{cases}$$

ve

$$F_{m+n} - F_{m-n} = \begin{cases} F_m L_n, & n \text{ tek} \\ F_n L_m, & n \text{ çift} \end{cases}$$

dir.

2.

$$F_{4n} - 1 = F_{2n+1} L_{2n-1}$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} F_{4n} - 1 &= F_{4n} - F_2 = F_{(2n+1)+(2n-1)} - F_{(2n+1)-(2n-1)} \\ &= F_{2n+1} L_{2n-1} \end{aligned}$$

4.

$$F_{4n+1} - 1 = F_{2n} L_{2n+1}$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} F_{4n+1} - 1 &= F_{4n+1} - F_1 = F_{(2n+1)+2n} - F_{(2n+1)-2n} \\ &= F_{2n} L_{2n+1} \end{aligned}$$

7.

$$F_{4n+3} + 1 = F_{2n+1} L_{2n+2}$$

olduğunu gösterelim.

$$F_{4n+3} + 1 = F_{4n+3} + F_1 = F_{(2n+2)+(2n+1)} + F_{(2n+2)-(2n+1)}$$

$$= F_{2n+1} L_{2n+2}$$

olur.

Sonuç 4.1.22. [7]

$$1. (F_{4n+1} + 1, F_{4n+2} + 1) = L_{2n}$$

$$2. (F_{4n+1} + 1, F_{4n+3} + 1) = F_{2n+1}$$

$$3. (F_{4n+1} - 1, F_{4n+2} - 1) = F_{2n}$$

$$4. (F_{4n+1} - 1, F_{4n+3} - 1) = L_{2n+1}$$

$$5. (F_{4n-1} - 1, F_{4n+1} - 1) = F_{2n}$$

$$6. (F_{4n-1} + 1, F_{4n+1} + 1) = L_{2n}$$

$$7. (F_{4n+3} + 1, F_{4n} - 1) = F_{2n+1}$$

$$8. (F_{4n+3} + 1, F_{4n+2} - 1) = F_{2n}$$

$$9. (F_{4n+4} - 1, F_{4n+3} - 1) = L_{2n+1}$$

İspat: İspatı yaparken Teorem 4.1.21'den yararlanacağız.

4)

$$(F_{4n+1} - 1, F_{4n+3} - 1) = (F_{2n} L_{2n+1}, F_{2n+2} L_{2n+1})$$

$$= L_{2n+1} (F_{2n}, F_{2n+2})$$

$$= L_{2n+1} \cdot 1$$

$$= L_{2n+1}$$

7).

$$\begin{aligned}
(F_{4n+3} + 1, F_{4n} - 1) &= (F_{2n+1} L_{2n+2}, F_{2n+1} L_{2n-1}) \\
&= F_{2n+1} (L_{2n+2}, L_{2n-1}) \\
&= F_{2n+1} . 1 \\
&= F_{2n+1}
\end{aligned}$$

olur.

Sonuç 4.1.23.

$n \geq 4$ ise $F_n + 1$ bileşik sayı $n \geq 7$ ise $F_n - 1$ bileşik sayıdır [10].

İspat:

$n = 1$ için, $F_{4n} + 1 = 4$ olup bileşik bir sayıdır. $n \geq 2$ için Teorem 3.1.18'den

$$F_{4n+1} + 1, F_{4n+2} + 1, F_{4n+3} + 1$$

aşkar olmayan çarpanlara sahiptir. Böylece $n \geq 4$ için $F_n + 1$ bir bileşik sayıdır. Aynı şekilde $n \geq 7$ için $F_n - 1$ bir bileşik sayıdır.

Bundan sonraki kısımda, Fibonacci sayıları için geçerli olan özelliklerin Lucas sayıları için de sağlanıp sağlanmadığı gösterilecektir.

Teorem 4.1.24. $n \in \mathbb{Z}^+$

$$(L_n, L_{n-1}) = 1$$

dir [10].

İspat:

$$L_n = 1.L_{n-1} + L_{n-2}$$

$$L_{n-1} = 1.L_{n-2} + L_{n-3}$$

.

$$L_4 = 1.L_3 + L_2$$

$$L_3 = 1.L_2 + L_1$$

$$L_2 = 3.L_1 + 0$$

Buradan;

$$(L_n, L_{n-1}) = 1$$

elde edilir.

Sonuç 4.1.25.

Teorem 4.1.1 Lucas sayıları için doğru değildir. Yani $L_m \nmid L_{mn}$ dir. Gerçekten, $6 \mid 12$ fakat $L_6 = 18$ ve $L_{12} = 322$ olduğundan $L_6 \nmid L_{12}$ dir.

Sonuç 4.1.26.

Teorem 4.1.10 Lucas sayıları için doğru değildir. Yani $(L_m, L_n) \neq L_{(m,n)}$ dir. Gerçekten, $(L_4, L_8) = (7, 47) = 1$ fakat $L_{(4,8)} = L_4 = 7$ dir.

Sonuç 4.1.27.

Teorem 4.1.12 Lucas sayıları için doğru değildir. Yani, $(m, n) = 1$ ise $L_m L_n \nmid L_{mn}$ dir. Gerçekten, $m = 2$ $n = 13$ için $L_2 L_{13} = 3.521$ fakat $L_{mn} = L_{2.13} = L_{26} = 271443$ olup $L_2 L_{13} \nmid L_{26}$ dir.

Sonuç 4.1.28.

Benzer şekilde $[L_m, L_n] \neq L_{[m,n]}$ dir. Gerçekten, $m = 4$, $n = 9$ için. $[L_4, L_9] = [7, 76] = 7.76 = 532$ iken $L_{[4,9]} = L_{36} = 33385282$ olup $532 \neq 33385282$ dir.

5.FIBONACCI VE LUCAS KONGRÜANSLAR

5.1. Fibonacci ve Lucas Sayılarının Kongrüans Özellikleri

Bu bölümde Fibonacci ve Lucas sayılarının kongrüans özellikleri incelenecektir. Bu bölümde kaynak olarak Koshy [10] kullanılmıştır.

Fibonacci sayıları için bölünebilme özelliklerinde görüldüğü gibi $F_m \mid F_n$ olması için gerek ve yeter şart $m \mid n$ olmasıdır. Yani başka bir deyişle $F_n \equiv 0 \pmod{F_m}$ olması için gerek ve yeter şart $n \equiv 0 \pmod{m}$ olmasıdır.

Özel olarak

$$F_n \equiv 0 \pmod{F_5} \Leftrightarrow n \equiv 0 \pmod{5}$$

dır. Yani

$$F_n \equiv 0 \pmod{5} \Leftrightarrow n \equiv 0 \pmod{5}$$

dır. Böylece F_0 dan başlayarak her beşinci Fibonacci sayısı 5 ile bölünebilirdir. Üstelik

$F_3 \mid F_n$ olması için gerek ve yeter şart $3 \mid n$ olmasıdır. Ya da

$$F_n \equiv 0 \pmod{2} \Leftrightarrow n \equiv 0 \pmod{3}$$

dir. Böylece F_0 ile başlayarak her üçüncü Fibonacci sayısı 2 ile bölünebilirdir. Sonuç olarak;

$$F_n \equiv 0 \pmod{5} \Leftrightarrow n \equiv 0 \pmod{5}$$

ve

$$F_n \equiv 0 \pmod{2} \Leftrightarrow n \equiv 0 \pmod{3}$$

Böylece,

$$F_n \equiv 0 \pmod{10} \Leftrightarrow n \equiv 0 \pmod{15}$$

olur.

Diğer bir deyişle F_0 dan başlayarak her on beşinci Fibonacci sayısı 10'un katıdır ve tersine eğer bir Fibonacci sayısı 10'un katı ise o Fibonacci sayısının indisi 15 ile bölünebilirdir. Örneğin; $F_{15} = 610$, $F_{30} = 832040$, $F_{45} = 1134903170$, ... 10 ile tam bölünebilirdir. Merak edilen bir soru da 10 ile bölünebilen Lucas sayıları var mıdır sorusudur. Bunu cevaplamadan önce 5 ile bölünebilen Lucas sayılarının olup olmadığına bakalım. Bazı n tamsayıları için $L_n \equiv 0(mod 5)$ olsun. Bu durumda Binet formülü ve binom teoremi kullanılarak,

$$\begin{aligned} 2^n L_n &= 2^n \cdot (\alpha^n + \beta^n) \\ &= 2^n \cdot \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right) \\ &= (1 + \sqrt{5})^n + (1 - \sqrt{5})^n \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (\sqrt{5})^i + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-\sqrt{5})^i \\ &= 2 \cdot \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} (\sqrt{5})^{2j} \\ &= 2 \cdot (1 + 5m) \quad (m \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Buradan,

$$2^n L_n = 2 \cdot (1 + 5m)$$

olup

$$2^{n-1} L_n = 1 + 5m$$

bulunur. $L_n \equiv 0(mod 5)$ olduğundan bu eşitlik $1 \equiv 0(mod 5)$ olmasını gerektirir ki bu bir çelişkidir. Böylece hiçbir Lucas sayısı 5 ile bölünemez. Dolayısıyla hiçbir Lucas sayısı 10'a tam bölünemez.

Şimdi Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili kongrüans özelliklerini veren aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 5.1.1. [10] $m, n, k \in \mathbb{Z}^+$

$$1. L_n \equiv 0(mod 2) \Leftrightarrow n \equiv 0(mod 3)$$

$$2. L_n \equiv 0(mod 3) \Leftrightarrow n \equiv 2(mod 4)$$

$$3. n \equiv 0(mod 2) \text{ ve } n \not\equiv 0(mod 3) \text{ ise } L_n \equiv 3(mod 4) \text{ dir.}$$

$$4. k \equiv 0(mod 2) \text{ ve } k \not\equiv 0(mod 3) \text{ olmak üzere } L_{n+2k} \equiv -L_n(mod L_k) \text{ dir.}$$

$$5. k \equiv 0(mod 2) \text{ ve } k \not\equiv 0(mod 3) \text{ olmak üzere } F_{n+2k} \equiv -F_n(mod L_k) \text{ dir.}$$

$$6. L_{n+12} \equiv L_n(mod 8)$$

İspat:

(1) $L_n \equiv 0(mod 2)$ olsun. Özdeşlik 3.22'den $5F_n^2 \equiv L_n^2 - 4 \cdot (-1)^n$ olduğundan

$$5F_n^2 \equiv 0(mod 2)$$

olur. Kongrüans özelliklerinden,

$$F_n^2 \equiv 0(mod \frac{2}{(5,2)})$$

$$F_n^2 \equiv 0(mod 2)$$

$$F_n \equiv 0(mod 2)$$

$$F_n \equiv 0(mod F_3)$$

bulunur. Buradan

$$n \equiv 0(mod 3)$$

olur. Diğer taraftan, $n \equiv 0(mod 3)$ olsun. Buradan

$$F_n \equiv 0 \pmod{F_3}$$

$$F_n \equiv 0 \pmod{2}$$

$$F_n^2 \equiv 0 \pmod{2}$$

$$5F_n^2 \equiv 0 \pmod{2}$$

$$L_n^2 - 4 \cdot (-1)^n \equiv 0 \pmod{2}$$

$$L_n^2 \equiv 0 \pmod{2}$$

$$L_n \equiv 0 \pmod{2}$$

olup (1) in ispat tamamlanır.

(5) Özdeşlik 3.24'ten $2F_{m+n} = F_m L_n + F_n L_m$ ve $L_{2k} = L_k^2 + 2(-1)^{k-1}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} 2F_{n+2k} &= F_n L_{2k} + F_{2k} L_n \\ &= F_n (L_k^2 + 2(-1)^{k-1}) + F_{2k} L_n \\ &= F_n L_k^2 + 2F_n (-1)^{k-1} + F_{2k} L_n \\ &= 2F_n (-1)^{k-1} + F_{2k} L_n \pmod{L_k} \\ &= -2F_n + F_k L_k L_n \pmod{L_k} \\ &= -2F_n \pmod{L_k} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece,

$$F_{n+2k} = -F_n \pmod{\frac{L_k}{(2, L_k)}}$$

(1) den $k \not\equiv 0 \pmod{3}$ olduğundan L_k 'lar tektir. Dolayısıyla $(2, L_k) = 1$ 'dır.

Böylece

$$F_{n+2k} = -F_n \pmod{L_k}$$

bulunur.

(6) Ferns[3] den $2L_{m+n} = 5F_mF_n + L_nL_m$ olduğundan,

$$\begin{aligned} 2L_{n+12} &= 5F_nF_{12} + L_nL_{12} \\ &= 5.144.F_n + 322.L_n \\ L_{n+12} &= 5.72.F_n + 161.L_n \\ &= 360.F_n + 161.L_n \\ &= 0 + L_n \equiv L_n \pmod{8} \end{aligned}$$

Örnek 5.1.2. $n = 15$ ve $k = 8$ olsun. Açık olarak, k çift fakat 3 ile bölünemezdir. $L_k = L_8 = 47$ olduğundan,

$$F_{n+2k} = F_{31} = 1346269 \equiv 1 \pmod{47}$$

ve

$$-F_{15} = -610 \equiv 1 \pmod{47}$$

olup

$$F_{31} \equiv -F_{15} \pmod{47}$$

bulunur.

5.2. Tam Kare Olan Lucas Sayıları

Tam kare olan Lucas sayıları var mıdır? Biliyoruz ki $L_1 = 1$ ve $L_3 = 4$ tam karedir. Bunlardan başka var mıdır? Aslında Londra Üniversitesinden J.H.E Cohn tam kare olan başka Lucas sayısının olmadığını kabul etmiştir. İspatını da aşağıdaki formüllere dayandırmıştır.

$$L_{2n} = L_n^2 + 2.(-1)^{n-1}$$

Eğer $k \equiv 0 \pmod{2}$ ve $k \not\equiv 0 \pmod{3}$ ise $L_k \equiv 0 \pmod{4}$

Eğer $k \equiv 0 \pmod{2}$ ve $k \not\equiv 0 \pmod{3}$ ise $L_{n+2k} \equiv -L_n \pmod{L_k}$

Teorem 5.2.1.[10]

Tam kare olan Lucas sayıları yalnızca 1 ve 4 ‘tür.

İspat:

Kabul edelim ki L_n , $n \in \mathbb{Z}^+$ için tam kare olsun. Yani $L_n = x^2$ olsun. n çift ise $n = 2r$ ‘dir. Bu durumda $L_{2n} = L_n^2 + 2.(-1)^{n-1}$ ‘dan $L_n = L_{2r} = L_r^2 \pm 2$,’dir. L_r^2 bir tam kare olduğundan $L_r^2 \pm 2$ tam kare olamaz. Bu da çelişkidir. n tek ve $n \equiv 1 \pmod{4}$ olsun. Eğer $n = 1$ ise $L_n = 1$ tam karedir. $n > 1$ olsun. Bu durumda, $i \geq 0$ ve k , 3 ile bölünemeyen çift tam sayı olmak üzere $n = 1 + 2.3^i k$ yazılabilir. Böylece Teorem 5.1.1 (4)’ten, $L_n = -L_1 \equiv -1 \pmod{L_k}$ ‘dır ve Teorem 5.1.1’den $-1 \pmod{L_k}$ ‘nın bir kuadratik kalanı olduğundan L_n tam kare olamaz. Diğer taraftan $n \equiv 3 \pmod{4}$ olsun. Eğer $n = 3$ ise $L_n = L_3 = 4$ tam karedir. $n \neq 3$ olsun. $i \geq 0$ ve k , 3 ile bölünemeyen pozitif çift tam sayı olmak üzere $n = 3 + 2.3^i k$ ‘dır. Teorem 5.1.1’den $L_n = -L_3 \equiv -4 \pmod{L_k}$ ‘dır. Sonuç olarak -4 tam kare olamaz.

Böylece Lucas sayılarından tam kare olanlar yalnızca 1 ve 4’tür. 1964’te Cohn tarafından bulunan aşağıdaki teoremden Lucas sayılarının $2x^2$ formunda olduğunu göstermiştir. Kanıtı aşağıdaki formüller yardımıyla yapılır.

$$L_n \equiv 0 \pmod{2} \Leftrightarrow n \equiv 0 \pmod{3}$$

$$L_n \equiv 0 \pmod{3} \Leftrightarrow n \equiv 2 \pmod{4}$$

$$F_{-n} \equiv (-1)^{n-1} F_n$$

$$L_{-n} \equiv (-1)^n L_n$$

$$L_{n+12} \equiv L_n \pmod{8}$$

Teorem 5.2.2. [10]

x ve n bir tam sayı ve $L_n = 2x^2$ olsun. Bu durumda $n = 0$ veya $n = \pm 6$ ‘dır.

İspat:

$x^2 \equiv 0,1,4 \pmod{8}$ olduğundan $L_n = 2x^2 \equiv 0$ veya $2 \pmod{8}$ olur. L_n çift olduğundan Teorem 5.1.1'den $n \equiv 0 \pmod{3}$ 'dir. Buradan $3|n$ 'dir. Kabul edelim ki n tek olsun. Bu durumda $0 \leq r < 12$ için $n = 12q + r$ 'dir. n tek ve 3'ün bir katı olduğundan $r = 3$ veya 9 'dir. Böylece $n = 12q + 3$ veya $12q + 9$ olur. Böylece Teorem 5.1.1(6)'dan $n = 12q + 3$ ise;

$$L_n \equiv L_{12q+3} \equiv L_3 \equiv 4 \pmod{8}.$$

dir. $L_n \equiv 0$ veya $2 \pmod{8}$ olduğundan bu bir çelişkidir. Eğer $n \equiv 12q + 9$ ise bu durumda $L_n = L_{12q+9} = L_9 \equiv 4 \pmod{8}$ olduğundan bu bir çelişkidir. Bu yüzden n tek olamaz. n çift olsun. Yani $n = 8t, 8t \pm 2$ veya $8t + 4$ formundadır. Eğer $n = 8t$ veya $n = 8t + 4$ olursa, $n \equiv 0 \pmod{4}$ 'dir. Eğer $n = 0$ ise $L_n = L_0 = 2 = 2 \cdot 1^2$ istenilen formdadır. Diğer bir taraftan $n \neq 0$ ise $n = 0 + 2 \cdot 3^i \cdot k$ şeklindedir. Buradan $2L_n = -2 \cdot L_0 \equiv -4 \pmod{L_k}$ 'dir. Böylece $2L_n$ tam kare ifade değildir. Sonuç olarak $L_n = 2x^2$ formunda olamaz.

Eğer $n = 8t - 2$ ise; $n = -2 \equiv 6 \pmod{8}$ olur. Eğer $n = 6$ ise $L_6 = 2 \cdot 3^2$ şeklindedir. Diğer bir taraftan eğer $n \neq 6$ ise, $n = 6 + 2 \cdot 3^i \cdot k$ formundadır. Burada $4|k$ ve $3 \nmid k$ 'dir. Buradan $2L_n \equiv -2L_6 \equiv -36 \pmod{L_k}$ 'dir. Teorem 5.1.1'den $-36, (L_k)$ 'nin göre kuadratik kalanı değildir. $L_n, 2x^2$ formunda yazılamaz. Son olarak eğer $n \equiv 2 \pmod{8}$ ise Özdeşlik 3.25 'den $L_{-n} = (-1)^n L_n$ dir. Buradan $-n \equiv 6 \pmod{8}$ olur. Bu da gösterir ki $-n = 6$ yani $n = -6$ olur. $L_n = 2x^2$ formunda ise $n = 0$ veya $n = \pm 6$ 'dır.

5.3.Fibonacci ve Lucas Kongrüansların Bazı Uygulamaları

Burada iki tane yardımcı sonuç verip bilinen iki teoremi bu sonuçlar yardımıyla farklı şekilde ispatlayacağız. Ardından yine bu sonuçlar yardımıyla Fibonacci ve Lucas sayılarının bölünebilme özelliklerini inceleyeceğiz. Bu bölümde kaynak olarak Keskin [9] kullanılmıştır.

Sonuç 5.3.1.

$n \in \mathbb{N}$ ve $m, k \in \mathbb{Z}$,

$$L_{2mn+k} = (-1)^{(m+1)n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^{(m+1)j} L_m^j L_{mj+k}$$

ve

$$F_{2mn+k} = (-1)^{(m+1)n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^{(m+1)j} L_m^j F_{mj+k}$$

dır [9].

Sonuç 5.3.2. [9]

$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve $m, k \in \mathbb{Z}$,

$$L_{2mn+k} \equiv (-1)^{(m+1)n} L_k \pmod{L_m}$$

ve

$$F_{2mn+k} \equiv (-1)^{(m+1)n} F_k \pmod{L_m}$$

dır [9].

Sonuç 5.3.3.

$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve $m, k \in \mathbb{Z}$,

$$L_{2mn+k} \equiv (-1)^{mn} L_k \pmod{F_m}$$

ve

$$F_{2mn+k} \equiv (-1)^{mn} F_k \pmod{F_m}$$

dır [9].

Teorem 5.3.4. [9]

$m, n \in \mathbb{N}$ ve $m \geq 2$ olsun. Bu durumda $L_m \mid L_n$ olması için gerek ve yeter şart $m \mid n$ ve $\frac{n}{m}$ 'nin bir tek tamsayı olmasıdır.

İspat:

$L_m \mid L_n$ ve $0 \leq k < m$ için $n = mq + k$ olsun. Eğer q çift tamsayı ise bazı t tamsayılar için $q = 2t$ olsun. Böylece Sonuç 5.3.2'den; $L_n = L_{2mt+k} \equiv (-1)^{(m+1)t} L_k(\text{mod } L_m)$ olur. $L_m \mid L_n$ olduğundan $0 \leq k < m$ veya $L_n \equiv -L_k(L_m)$ olduğundan $L_m \mid L_k$ olur. Fakat bu yanlıştır. Çünkü biliyoruz ki $k < m$ olduğundan $L_k < L_m$ olur. Böylece q tek tam sayı olmalıdır. Yani $t \in \mathbb{Z}$ için $q = 2t + 1$ olur. Sonuç 5.3.2'den;

$$L_n = L_{2mt+m+k} \equiv (-1)^{(m+1)t} L_{m+k}(\text{mod } L_m)$$

olup $L_m \mid L_n$ olduğundan $L_n \equiv L_{m+k}(L_m)$ veya $L_n \equiv -L_{m+k}(L_m)$ olduğundan $L_m \mid L_{m+k}$ olur. Şimdi $k > 0$ olduğunu varsayalım. Eğer Özdeşlik 3.26 ($L_{m+k} = L_m F_{k-1} + F_k L_{m+1}$)'yı kullanırsak

$$L_m \mid F_k L_{m+1}$$

elde ederiz. Teorem 4.1.24'ten $(L_m, L_{m+1}) = 1$ olduğundan

$$L_m \mid F_k$$

olur. Fakat $k < m$ iken $F_k \leq F_m < L_m$ olduğu için bu durum imkansızdır. Bu kabulümüzle çelişiyor. Böylece $k = 0$ elde ederiz. O halde $n = mq$ ve q tek tamsayıdır. Tersine bazı $t \in \mathbb{Z}$ için $m \mid n$ ve $n = m(2t + 1)$ olsun. Sonuç 5.3.2.'den

$$L_n = L_{2mt+m} \equiv (-1)^{(m+1)t} L_m(\text{mod } L_m)$$

elde edilir. Böylece kolaylıkla görülür ki $L_m \mid L_n$ dir.

Teorem 5.3.5. [9]

$m, n \in \mathbb{N}$ ve $m \geq 2$ olsun. $L_m \mid F_n$ olması için gerek ve yeter şart $m \mid n$ ve $\frac{n}{m}$ çift tam sayı olmasıdır.

İspat:

Varsayalım ki $L_m \mid F_n$ $m \geq 2$ ve $0 \leq k < m$ için $n = mq + k$ olsun. q tek tamsayı ise bazı $t \in \mathbb{Z}$ için $q = 2t + 1$ 'dir. Böylece Sonuç 5.3.2'den;

$$F_n = F_{2mt+m+k} \equiv (-1)^{(m+1)t} F_{m+1}(\text{mod } L_m)$$

'dir. Buradan $L_m \mid F_{m+k}$ 'dır. $L_m \mid F_{m+k}$ olduğundan $L_m \mid 5 F_{m+k}$ olur Özdeşlik 3.27'den

$$5F_{m+k} = L_m L_{k-1} + L_k L_{m-1}$$

'den

$$L_m \mid L_k L_{m-1}$$

elde ederiz. $(L_m, L_{m-1}) = 1$ olduğundan $L_m \mid L_k$ ve dolayısıyla $L_m \leq L_k$ 'dır. $k < m$ olduğundan $L_k < L_m$ olduğundan bu bir çelişkidir. Dolayısıyla q bir çift tamsayıdır. Böylece bazı $t \in \mathbb{Z}$ için $q = 2t$ alabiliriz. Sonuç 5.3.2'den,

$$F_n = F_{2mt+k} \equiv (-1)^{(m+1)t} F_k(\text{mod } L_m)$$

olur.

$L_m \mid F_n$ olduğundan $L_m \mid F_k$ olur. Fakat $k < m$ olduğundan $F_k \leq F_m < L_m$ olduğu için imkansızdır. O halde $k = 0$ 'dır. Böylece $n = mq$ ve q bir çift tamsayıdır. Tersî durumda bazı $t \in \mathbb{Z}$ için $m \mid n$ ve $n = 2mt$ olsun. Sonuç 5.3.2'den,

$$F_n = F_{2mt} \equiv (-1)^{(m+1)t} F_0(\text{mod } L_m)$$

olur. Dolayısıyla $L_m \mid F_n$ 'dir.

Teorem 5.3.6. [9]

$m, n \in \mathbb{N}$ ve $m \geq 3$ olsun $F_m \mid F_n$ olması için gerek ve yeter şart $m \mid n$ olmasıdır.

İspat:

Öncelikle $F_m \mid F_n$ fakat $m \nmid n$ olsun. Bu durumda $0 < r < m$ için $n = mq + r$ 'dır. Varsayalım ki q bir çift tamsayı olsun. O halde bazı $t \in \mathbb{Z}$ için $q = 2t$ 'dir. Sonuç 5.3.3'den; $F_n = F_{2mt+r} \equiv (-1)^{mt} F_r(\text{mod} F_m)$ 'dır. $F_m \mid F_n$ olduğundan ise $F_m \mid F_r$ olur ama bu bir çelişkidir. Çünkü $0 < r < m$ ve $m \geq 3$ $F_r < F_m$ 'dır. Bu durumda q tek tamsayı ise $t \in \mathbb{Z}$ için $q = 2t + 1$ 'dir. Sonuç 5.3.3'den $F_n = F_{2mt+m+r} \equiv (-1)^{mt} F_{m+r}(\text{mod} F_m)$ olur. $F_m \mid F_n$ olduğundan $F_m \mid F_{m+r}$ olur. Özdeşlik 3.4'ten $F_m \mid F_{m+1} F_r$ 'dır. $(F_m, F_{m+1}) = 1$ olduğundan $F_m \mid F_r$ olur. Bu durumda $m \geq 3$ ve $r < m$ için $F_r < F_m$ durumu ile çelişir. Dolayısıyla $r = 0$ ve $n = mq$ olur. Böylece $m \mid n$ bulunur. Tersine $m \mid n$ olsun. Bazı $q \in \mathbb{N}$ için $n = mq$ olur. [9] dan

$$F_{mq} = \sum_{j=0}^q \binom{q}{j} F_m^j F_{m-1}^{q-j} F_j$$

olur. O zaman $F_m \mid F_n$ olur. İspat tamamlanır.

Birçok yazar tarafından cx^2 biçimindeki Fibonacci ve Lucas sayıları araştırılmıştır. Chon [13] $c = 1, 2$ için $F_n = cx^2$ ve $L_n = cx^2$ 'yi çözmüştür. [15]'de Robbins, px^2 formundaki Fibonacci sayılarını incelemiştir. Robbins, $p \equiv 3(\text{mod} 4)$ veya $p < 1000$ olacak şekilde tüm tam sayılar için $F_n = px^2$ denklemini çözmüştür. Daha sonra Robbins [14] cx^2 formundaki Fibonacci sayılarını ele almıştır. Yazar $c \leq 1000$ bileşik değeri için $F_n = cx^2$ nin tüm çözümlerini elde etmiştir. Bundan sonra [16] 'deki aynı yazar p bir tek asal ve $p < 1000$ için $L_n = px^2$ 'yi çözmüştür. Dahası Zhou [17] $L_n = px^2$ formundaki Lucas sayılarıyla ilgilenmiştir. Burada p bir asal sayı ve $1000 < p < 60000$ 'dır. Bundan sonraki kısımda, [9] dan c bir Lucas sayısı veya iki Lucas sayısının çarpımı olmak üzere cx^2 şeklindeki Lucas sayıları incelenmiştir. $m > 1$ ve $k \geq 1$ için $L_{2^k t} L_m x^2$ formunda bir L_n Lucas sayısının olmadığını ispatlanmıştır. Ayrıca m ve r , 1'den büyük pozitif tamsayılar olduğunda $L_n = L_m L_r$ nin imkansız olduğu ispatlanmıştır. Son olarak $m \geq 2$ ve $L_n = L_m x^2$ ise

bu durumda $n = m$ olduğu kanıtlanmıştır. Şimdi bundan sonraki kısımda gerekli olacak Lucas sayılarıyla ilgili bazı özdeşlikler verelim. $n \in \mathbb{Z}$ için,

$$\begin{aligned} L_{2n} &= L_n^2 - 2(-1)^n \\ L_{3n} &= L_n(L_n^2 - 3(-1)^n) \end{aligned}$$

dir.

Teorem 5.3.7. [9]

$r \geq 1$, $m > 1$ ve r bir tek tamsayı olsun. $L_n = L_{2r}L_mx^2$ olacak şekilde L_n Lucas sayısı yoktur.

İspat:

$L_n = L_{2r}L_mx^2$ ve r nin tek tamsayı olduğunu varsayalım. Bu durumda, $L_{2r} \mid L_n$ ve $L_m \mid L_n$ dir. Bu Teorem 5.3.4'ten bazı tek k tam sayıları için $n = 2rk$ ve bazı tek t tamsayıları için $n = mt$ dir. Böylece $2 \mid n$ olur. $n = mt$ ve t tek tamsayı olduğundan $2 \mid m$ bulunur. $2 \mid n$ ve $n/2$ bir tek tamsayı olduğundan $s = 2, 6, 10$ ve $q \geq 0$ olmak üzere $n = 12q + s$ yazılır. Böylece Sonuç 5.3.3'ten

$$L_n = L_{2.6q+s} \equiv L_s \pmod{8}$$

olur.

$s \in \{2, 6, 10\}$ olduğundan $L_n \equiv 2, 3 \pmod{8}$ dir. Benzer şekilde görülür ki $L_m \equiv 2, 3 \pmod{8}$ dir. r tek olduğundan görülür ki

$$L_{2r} \equiv \begin{cases} 3 \pmod{8}, & \text{eğer } 3 \nmid r \\ 2 \pmod{8}, & \text{eğer } 3 \mid r \end{cases}$$

‘dir. $3 \nmid r$ olduğunu varsayalım. O zaman $L_n = L_{2r}L_mx^2 \equiv 3L_mx^2 \pmod{8}$ olur. Ayrıca $3x^2 \equiv 0, 3, 4 \pmod{8}$ ve $L_m \equiv 2, 3 \pmod{8}$ dir. Buradan açıktır ki $3L_mx^2 \equiv 0, 1, 4, 6 \pmod{8}$ olduğunu gösterir. Ancak bu durum $L_n \equiv 2, 3 \pmod{8}$ ile çelişmektedir. Şimdi kabul edelim ki $3 \mid r$ olsun. Bu durumda $L_n = L_{2r}L_mx^2 \equiv 2L_mx^2 \pmod{8}$ dir. $2x^2 \equiv 0, 2 \pmod{8}$ ve $L_m \equiv 2, 3 \pmod{8}$ olduğundan görülür ki $L_n \equiv 0, 4, 6 \pmod{8}$ ki bu $L_n \equiv 2, 3 \pmod{8}$ ile çelişir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 5.3.8. [9]

$k \geq 2$ olsun. Her t tek tamsayısı için $L_{2^k t} \equiv 2, 7 \pmod{8}$ dir.

İspat:

t 'nin tek tamsayı olduğunu varsayalım. O zaman $t \equiv \mp 1, \mp 3, \mp 5 \pmod{12}$ dir. Dahası tümevarım ile $k \geq 2$ için $2^k \equiv \mp 4 \pmod{12}$ olduğu gösterebilir. Böylece $2^k t \equiv 0, \mp 4 \pmod{12}$ elde edilir. Dolayısıyla $q \geq 0$ için $2^k t = 12q$ veya $2^k t = 12q \pm 4$ yazabiliriz. Sonuç 5.3.3'ten

$$L_{2^k t} = L_{12q} = L_{2.6q} \equiv L_0 \pmod{F_6}$$

veya

$$L_{2^k t} = L_{12q \mp 4} = L_{2.6q \mp 4} \equiv L_{\mp 4} \pmod{F_6} \text{ olur.}$$

Böylece $L_{2^k t} \equiv 2, 7 \pmod{8}$ elde edilir.

Şimdi Teorem 5.3.7'yi aşağıdaki gibi genelleştirebiliriz.

Teorem 5.3.9. [9]

$k \geq 2$, $m > 1$ ve $t \geq 1$ olacak şekilde t bir tek tamsayı olsun. $L_n = L_{2^k t} L_m x^2$ şeklinde L_n Lucas sayısı yoktur.

İspat:

$L_n = L_{2^k t} L_m x^2$ ve t nin tek tamsayı olduğunu varsayalım. $L_{2^k t} \mid L_n$ ve $L_m \mid L_n$ olduğundan Teorem 5.3.4'ten $n = 2^k t l$ ve $n = m u$ olacak şekilde iki tek tamsayı l ve u vardır. Böylece $n = 2^k t l = m u$ ve t, l ve u tek tamsayılar olduğundan s tek tamsayısı için $m = 2^k s$ vardır. Burada $k \geq 2$ olduğundan $4 \mid m$ ve $4 \mid n$ 'dir. Buradan $r = 0, 4, 8$ ile $n = 12q + r$ elde edilir. Sonuç 5.3.3'ten $L_n = L_{2.6q+r} \equiv L_r \pmod{8}$ olur. $r \in \{0, 4, 8\}$ olduğundan $L_n \equiv 2, 7 \pmod{8}$ olur. Benzer şekilde görülebilir ki $L_m \equiv 2, 7 \pmod{8}$ 'dir. Öte yandan Teorem 5.3.8'den $L_{2^k t} \equiv 2, 7 \pmod{8}$ 'dir. Öncelikle $L_{2^k t} \equiv 2 \pmod{8}$ olsun. Bu durumda, $L_n = L_{2^k t} L_m x^2 \equiv 2 L_m x^2 \pmod{8}$

dir. $2x^2 \equiv 0, 2(mod 8)$ ve $L_m \equiv 2, 7(mod 8)$ olup $L_{2k_t}L_mx^2 \equiv 0, 4, 6(mod 8)$ elde edilir. Dolayısıyla $L_n \equiv 0, 4, 6(mod 8)$ olduğundan $L_n \equiv 2, 7(mod 8)$ ile çelişir. Şimdi $L_{2k_t} \equiv 7(mod 8)$ olsun. Buradan $L_n = L_{2k_t}L_mx^2 \equiv 7L_mx^2(mod 8)$ elde ederiz. $7x^2 \equiv 0, 4, 7(mod 8)$ ve $L_m \equiv 2, 7(mod 8)$ olduğundan $L_{2k_t}L_mx^2 \equiv 0, 1, 4, 6(mod 8)$ yani $L_n \equiv 0, 1, 4, 6(mod 8)$ 'dir. $L_n \equiv 2, 7(mod 8)$ olduğundan bu bir çelişkidir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 5.3.10. [9]

Eğer $m > 1, r > 1$ ve m ve r tek tamsayılar ise bu durumda $L_n = L_mL_r$ olacak şekilde L_n Lucas sayısı yoktur.

İspat:

$L_n = L_mL_r$ olsun. $L_m \mid L_n$ ve $L_r \mid L_n$ olduğundan Teorem 5.3.4'ten $t > 1$ ve $k > 1$ olmak üzere $n = mt$ ve $n = rk$ olacak şekilde t ve k tek tamsayıları vardır. $u \geq 1$ için $t = 4u \mp 1$ olur. Bu nedenle $n = mt = m(4u \mp 1) = 2.2um \mp m$ 'dir. Sonuç 5.3.2'den

$$L_n = L_{2.2um \mp m} \equiv (-1)^u L_{\mp m}(mod L_{2m})$$

dır. Yani

$$L_n \equiv \mp L_m(mod L_{2m})$$

dir. Buradan

$$L_rL_m \equiv \mp L_m(mod L_{2m})$$

dır. Benzer şekilde görülebilir ki

$$L_mL_r \equiv \mp L_r(mod L_{2r})$$

dır. Eğer $3 \mid r$ ve $3 \mid m$ ise $8 \mid L_n$ dir fakat böyle olması imkansızdır. Bu nedenle $3 \nmid r$ veya $3 \nmid m$ 'dir. İlk olarak, $3 \nmid m$ ve $3 \nmid r$ olduğunu varsayalım. $3 \nmid m$ olduğundan görülür ki $(L_m, L_{2m}) = 1$ dir. Buradan

$$L_r \equiv \mp 1 \pmod{L_{2m}}$$

dır. Benzer şekilde görülür ki $3 \nmid r$ olduğundan

$$L_m \equiv \mp 1 \pmod{L_{2r}}$$

dır. Böylece ikisinden sırasıyla $L_{2m} \mid L_r \mp 1$ ve $L_{2r} \mid L_m \mp 1$ elde edilir. Buradan;

$$L_{2m} \leq L_r \mp 1 \leq L_r + 1 \text{ ve } L_{2r} \leq L_m \mp 1 \leq L_m + 1$$

dır. Böylece,

$$L_{2m} + L_{2r} \leq L_m + L_r + 2$$

dir. Buradan

$$L_m^2 + L_r^2 + 2 \leq L_m + L_r$$

olup bu durum imkansızdır. Şimdi de varsayalım ki $3 \nmid r$ ve $3 \mid m$ olsun. $3 \mid m$ olduğundan $(L_m, L_{2m}) = 2$ dir. Bu nedenle $(\frac{L_m}{2}, \frac{L_{2m}}{2}) = 1$ ve $L_r L_m \equiv \mp L_m \pmod{L_{2m}}$ den

$$\frac{L_m}{2} L_r \equiv \mp \frac{L_m}{2} \pmod{\frac{L_{2m}}{2}}$$

yani

$$L_r \equiv \mp 1 \pmod{\frac{L_{2m}}{2}}$$

olur. Buradan

$$L_{2r} \leq L_m + 1$$

ve

$$L_{2m} \leq 2L_r + 2$$

dir. Buradan son iki eşitlikten

$$L_{2r} + L_{2m} \leq L_m + 2L_r + 3$$

bulunur. Böylece $L_{2n} = L_n^2 - 2(-1)^n$ den

$$L_r^2 - 2L_r + L_m^2 - L_m \leq -1$$

Yani buradan

$$L_r(L_r - 2) + L_m(L_m - 1) \leq -1$$

olup bu bir çelişkidir. Buradan ispat tamamlanır.



6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında sayılar teorisinin temel konularından bölünebilme konusu Fibonacci ve Lucas sayıları üzerinden detaylı olarak incelenmiştir. Özel sayı dizilerinden olan Fibonacci ve Lucas sayıları her konuda olduğu gibi bölünebilme ve özellikleri konusunda da ilginç sonuçlara sahiptir. Bölünebilmeden ayrı düşünülemeyen kongrüanslık kavramı da yine bu tezde incelenmiştir. Gerek bölünebilme gerek kongrüans konusunda halen çalışmalar sürmektedir. Bu anlamda, yeni bölünebilme özellikleri ve kongrüans bağıntıları bulup literatüre katkı sağlanabilecektir. Bu tezde Fibonacci ve Lucas sayılarının sahip olduğu bölünebilme ve kongrüans özellikleri incelenmiş, ancak Pell sayıları, Pell Lucas sayıları... gibi farklı sayı dizilerinde de yapılabilecek benzer çalışmalar ilginç sonuçları beraberinde getirecektir.

KAYNAKLAR

- [1] Barik, B., Lucas Sequence, Its Properties and Generalization, Master of Science Thesis, National Institute of Technology Rourkela, 2013.
- [2] Toy, M., Fibonacci ve Lucas Sayılarının Bölünebilme Özellikleri, Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi, 2009.
- [3] Ferns, H. H., Problem B-104, The Fibonacci Quarterly, 5:3, 292, 1970.
- [4] Carlitz, A. Note on Fibonacci Numbers, The Fibonacci Quarterly, 1:2, 15-28, 1964.
- [5] Freeman, G. F., On Ratios of Fibonacci and Lucas Numbers, The Fibonacci Quarterly, 5:1, 99-106, 1967.
- [6] Dudley, T., Greatest Common Divisors in Altered Fibonacci Sequences, The Fibonacci Quarterly, 9.1, 89-91, 1971.
- [7] Hoggatt, B., Problem H-183, The Fibonacci Quarterly, 9: 4, 389, 288- 289, 1971.
- [8] Keskin, R. ve Demirtürk, B., Fibonacci and Lucas Congruences and Their Applications, Acta Mathematica Sinica, English Series, 27, 725-736, 2011.
- [9] Keskin, R., Demirtürk, B. Some New Fibonacci and Lucas Identities by Matrix Methods, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41, 379–387, 2009.
- [10] Koshy, T., Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, John Wiley & Sons, Inc, 2001.
- [11] Vajda, S., Fibonacci & Lucas numbers, and the Golden Section: Theory and Applications, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.
- [12] Graham, R. L., Knuth D. E. ve Patashnik O., Concrete Mathematics, Massachusetts Addison Wesley, 1994.
- [13] Cohn, J. H. E., Square Fibonacci Numbers, etc., Fibonacci Quarterly, 2, 109-113, 1964.
- [14] Robbins, N., Fibonacci Numbers of the Form px^2 , where p is Prime, Fibonacci Quarterly, 21, 266–271, 1983.
- [15] Robbins, N., Fibonacci Numbers of the Form cx^2 , where $1 \leq c \leq 1000$, Fibonacci Quarterly, 28, 306–315, 1990.

[16] Robbins, N.: Lucas Numbers of the Form px^2 , where p is Prime, Inter. J. Math. Math. Sci., 14, 697–703, 1991.

[17] Zhou, C., A General Conclusion on Lucas Numbers of the Form px^2 , where p is prime, Fibonacci Quarterly, 37, 39–45, 1999.



ÖZGEÇMİŞ

Aslen Rize/Çayelili olan ve 1992 yılında Samsun ilinin Ondokuzmayıs ilçesinde dünyaya gelen Esra EKİN, ilköğretim ve lise öğrenimini sırasıyla Fevzi Çakmak İlköğretim Okulu ve Kızılırmak Lisesinde tamamlamıştır. 2010 yılında kazandığı Bozok Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü 2015 yılında bitirmiştir. 2016 yılında Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başlamıştır.

2014 yılından bu yana çeşitli kurumlarda matematik öğretmenliği yapmıştır. Şu anda ise özel bir kurumda iş hayatına devam etmektedir.

İletişim Bilgileri

Adres: Aşağı Nohutlu Mahallesi Öğretmen Vehbi Ulusoy Caddesi Elit Stüdyo

66100 YOZGAT

Telefon: (543) 856 88 04

E-posta: eessrrauyar@gmail.com