

**FİBONACCİ VE PELL DİZİLERİNİN
ÖZELLİKLERİ**

Pelin YAMAN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**EYLÜL 2006
ANKARA**

Pelin YAMAN tarafından hazırlanan FİBONACCI VE PELL DİZİLERİNİN ÖZELLİKLERİ adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım

Prof. Dr. Dursun TAŞCI
Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği Matematik Anabilim Dalında Yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Ali Bülent EKİN

Üye : Prof. Dr. Dursun TAŞCI

Üye : Doç. Dr. Ahmet ARIKAN

Üye : Doç Dr. Derya KESKİN TÜTÜNCÜ

Üye : Yrd. Doç Dr. Ercan ALTINIŞIK

Tarih : 11 / 09 / 2006

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Pelin YAMAN

FİBONACCİ VE PELL DİZİLERİNİN ÖZELLİKLERİ
(Yüksek Lisans Tezi)

Pelin YAMAN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Eylül 2006

ÖZET

Bu çalışmada elemanları Fibonacci ve Pell sayılarından oluşan bazı matrisleri teşkil ederek bu matrislerin çeşitli özelliklerini inceledik. Bu matrisleri kullanarak Pell ve Fibonacci sayıları için bazı özelliklere ulaşıldı. Özellikle lamda fonksiyonu ve karakteristik denklemler yardımıyla bazı formüller elde edildi.

Bilim Kodu : 204.1.025
Anahtar Kelimeler : Pell dizileri, Fibonacci dizileri
Sayfa Adedi : 44
Tez Yöneticisi : Prof. Dr. Dursun TAŞCI

FEATURES OF FIBONACCI AND PELL SERIES
(M. Sc Thesis)

Pelin YAMAN

GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE
September 2006

ABSTRACT

In this study, we have observed some properties of matrix which contains fibonacci and pell numbers. And then we got some properties of pell and fibonacci numbers by using these matrixs. Especially, we also got some formulas by using lamda function and characteristic equations.

Science Code : 204.1.025
Key Words : Pell sequences, Fibonacci sequences
Page Number : 44
Advisor : Prof. Dr. Dursun TAŞCI

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli katkılarıyla beni yönlendiren hocam Prof. Dr. Dursun TAŞÇI'ya;

Hayatımın her döneminde olduğu gibi tez çalışmam sırasında da desteklerini benden esirgemeyen aileme teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ	viii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR	x
1. GİRİŞ	1
2. GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ MATRİSLERİNİN BAZI ÖZELLİKLERİ	11
2.1. Fibonacci ve Pell Dizilerinin Matris Üreteçleri	11
2.2. Lamda Fonksiyonu	14
2.3. Karakteristik Denklemler	19
3. PELL MATRİSLERİNİN BAZI ÖZELLİKLERİ	29
3.1. Pell Matrislerinde Lamda Fonksiyonu	32
4. SONUÇ VE ÖNERİLER	42
KAYNAKLAR	43
ÖZGEÇMİŞ	44

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 1.1. Fibonacci dizisinin ilk yirmi terimi	2

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 1.1. Fibonacci sayıları ve altın oran.....	4

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
F_n	n. ci Fibonacci Sayısı
P_n	n. ci Pell Sayısı
G_n	Genelleştirilmiş n. ci Fibonacci Sayısı
$\{F_n\}$	Fibonacci Dizisi
$\{P_n\}$	Pell Dizisi
$\{U_n\}$	Genel Dizisi
$M_n(F)$	Elemanları F cisminde olan bütün kare matrislerin kümesi
$\det A$	A matrisinin determinanı
$I(M)$	M matrisine bağlı I fonksiyonu

1. GİRİŞ

Bu bölümde Fibonacci ve Pell sayıları için bazı ön bilgiler vereceğiz.

Fibonacci Sayıları

Başlangıç şartları $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olmak üzere,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad n \geq 2$$

şeklinde tanımlanan rekürans bağıntılarından elde edilen sayılara Fibonacci sayıları denir. Bu rekürans bağıntısının ürettiği tamsayılar dizisine Fibonacci dizisi denir ve $\{F_n\}$ ile gösterilir. Burada F_n , n-inci Fibonacci sayısını gösterir.

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} = 0$ ve karakteristik denklem $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ olmak üzere karakteristik denklemin kökleri,

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

dir.

O halde fark denkleminde dizinin genel terimi,

$$F_n = A_1 \left[\frac{(1 + \sqrt{5})}{2} \right]^n + A_2 \left[\frac{(1 - \sqrt{5})}{2} \right]^n$$

biçimindedir. Şimdi A_1 ve A_2 yi bulalım.

$n = 1$ için,

$$F_1 = A_1 \left[\frac{(1 + \sqrt{5})}{2} \right] + A_2 \left[\frac{(1 - \sqrt{5})}{2} \right]$$

$n = 2$ için,

$$F_2 = A_1 \left[\frac{(1 + \sqrt{5})}{2} \right]^2 + A_2 \left[\frac{(1 - \sqrt{5})}{2} \right]^2$$

denklem sisteminin ortak çözümüyle,

$$A_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right) \quad \text{ve} \quad A_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

elde edilir.

Dolayısıyla Fibonacci dizisinin genel terimi

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \right]$$

dir.

Çizelge 1.1. Fibonacci dizisinin ilk yirmi terimi

n	F(n)	$\frac{F(n+1)}{F(n)}$	n	F(n)	$\frac{F(n+1)}{F(n)}$
1	1		11	89	1,618182
2	1	1	12	144	1,617977
3	2	2	13	233	1,618056
4	3	1,5	14	377	1,618026
5	5	1,666667	15	610	1,618037
6	8	1,6	16	987	1,618033
7	13	1,625	17	1597	1,618034
8	21	1,615385	18	2584	1,618034
9	34	1,619048	19	4181	1,618034
10	55	1,617647	20	6765	1,618034

Genelleştirilmiş Fibonacci dizilerinde de görüldüğü gibi $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ ve $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ olan Fibonacci dizisinin bir terimi öncekine bölündüğünde altın oran denilen $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,61803398\dots$ sayısına yakınsadığı görülmektedir. Fibonacci dizisinde başlangıç değerlerini 1 ve ϕ olarak aldığımızda Fibonacci dizisi

$$1, \phi, 1 + \phi, 1 + 2\phi, 2 + 3\phi, \dots$$

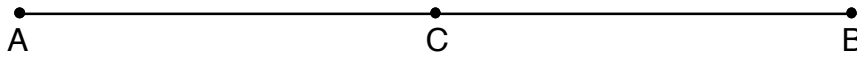
olur.

$$\phi^2 = \phi + 1 \text{ bağıntısıyla}$$

$$1, \phi, \phi^2, \phi^3, \phi^4, \dots$$

biçiminde yazılabilir. Bu Fibonacci dizisine ortak çarpanı ϕ olan bir geometrik dizidir. Bu diziye Altın dizi adı verilir.

Herhangi bir doğru parçasının $\frac{[AB]}{[AC]} = \frac{[AC]}{[CB]}$ orantısına uygun olarak C noktası tarafından bölelim.



O halde

$$[AB] = [AC] + [CB] \text{ olduğundan}$$

$$\begin{aligned} \frac{[AC] + [CB]}{[AC]} &= \frac{[AC]}{[CB]} \\ 1 + \frac{1}{\left(\frac{[AC]}{[CB]}\right)} &= \frac{[AC]}{[CB]} \end{aligned}$$

ve denklemin kökleri

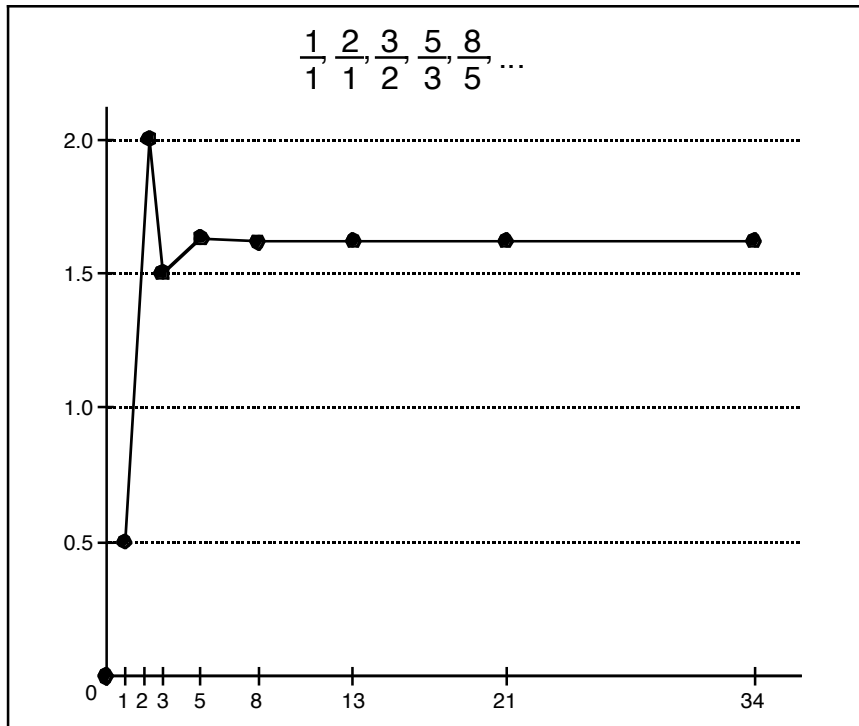
$$\frac{[AC]}{[CB]} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{[AC]}{[CB]} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

bulunur.

Uzunluk söz konusu olduğundan kök olarak $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ yi alabiliriz.

$\frac{[AC]}{[CB]} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ sayısına Altın Oran denir.



Şekil 1.1. Fibonacci sayıları ve altın oran

Fibonacci dizileri ile Pell dizilerinin birçok özelliği ortaktır. İkisininde başlangıç değerleri aynıdır.

Farklı olan tekrarlama bağıntılarıdır.

Pell Sayıları

Başlangıç değerleri $P_0 = 0$ ve $P_1 = 1$ olmak üzere,

$$P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1} \quad n \geq 1$$

şeklinde tanımlanan rekürans bağıntılarından elde edilen sayılara Pell sayıları denir.

Bu rekürans bağıntısının ürettiği tamsayılar dizisine Pell dizisi denir ve $\{P_n\}$ ile gösterilir. Burada P_n , n-inci Pell sayısını gösterir.

Bu bağıntıdan hareket ederek

$$P_{-1} = 1, \quad P_{-2} = -2, \dots, \quad P_{-n} = (-1)^{n+1} P_n$$

elde edilir.

Bu dizinin karakteristik denklemi

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \text{ olup,}$$

bu denkleminin kökleri

$$\alpha = \frac{(2 + \sqrt{8})}{2}$$

$$\beta = \frac{(2 - \sqrt{8})}{2}$$

dir.

Pell sayılarının Binet gösterimi ise

$$P_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

$$P_n = \frac{(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$$

olduğu ispatlanır.

Şimdi bazı bilinen sonuçlardan bahsedeceğiz.

Fibonacci ve Pell sayılarını aşağıdaki gibi genelleştirebiliriz.

Genelleştirilmiş $\{U_n\}$ dizisinin her terimi

$$U_n = BU_{n-1} - CU_{n-2} \quad U_0 = 0, \quad U_1 = 1 \quad n \geq 2 \text{ için}$$

bağıntısıyla tanımlansın.

Burada B ve C;

$$B^2 - 4C \neq 0$$

olacak şekilde sıfırdan farklı tamsayılardır.

Genelleştirilmiş $\{U_n\}$ dizisini karakteristik denklemi

$$x^2 - Bx + C = 0 \text{ 'dir.}$$

Bu denklemin kökleri α ve β ise

$$\alpha = \frac{1}{2}(B + \sqrt{D})$$

$$\beta = \frac{1}{2}(B - \sqrt{D})$$

dir. Buradan

$$\alpha + \beta = B$$

$$\alpha\beta = \frac{1}{4}(B^2 - D) = C$$

$$\alpha - \beta = \sqrt{D}$$

olduğunu kolayca görürüz.

Buradan

$\{U_n\}$ dizisinin Binet formülü

$$U_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

şeklindedir.

Böylece ilk birkaç terim

$$U_1 = 1$$

$$U_2 = B$$

$$U_3 = B^2 - C$$

bulunur.

Eğer $B = 1$, $C = -1$ alınırsa

$$U_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$$

$$\beta = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$$

olup

$$U_1 = 1$$

$$U_2 = 1$$

$$U_3 = 2 \dots$$

olur ve genel olarak $U_n = F_n$ 'dir.

Böylece Fibonacci dizisine dönüşür.

Eğer $B = 2$, $C = -1$ alınırsa

$$U_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{8})$$

$$\beta = \frac{1}{2}(2 - \sqrt{8})$$

olup

$$U_1 = 1$$

$$U_2 = 2$$

$$U_3 = 5$$

olur ve genel olarak $U_n = P_n$ 'dir.

Buradan Pell dizisini dönüşür.

Fibonacci Matrisi

A kare matrisi elemanları tamsayılardan oluşan bir Fibonacci matrisi

$\Leftrightarrow$ a) A^n , $n = 1, 2, \dots$ kare matrisinin elemanları negatif, pozitif veya sıfır Fibonacci sayılarından oluşur.

b) A^n indirgenemezdir. (Eğer B matrisi bir block diagonal matris haline getirilemiyorsa B matrisi indirgenemezdir.).

c) $\{A^n \mid n \geq 1\}$, $\forall_i$ ve bazı n'ler için $F_i \in A^n$.

Eğer A matrisi 1, -1, 0 elemanlarından oluşuyorsa temel Fibonacci matrisi olarak adlandırılır.

Pell Matrisi

Eğer B kare matrisi aşağıdaki şartları sağlarsa B'ye Pell matrisi denir.

B kare matrisinin elemanları pozitif veya negatif Pell sayıları ve sıfırdan oluşur.

$\{B \mid \forall_i \text{ ve bazı } n\text{'ler için } P_i \in B\}$

1.1. Tanım

V , F cismi üzerinde n -boyutlu bir vektör uzayı olsun.

Herbir $V \rightarrow V$ lineer dönüşümüne $A \in M_n(F)$ matrisi karşılık gelir.

Herbir $A: V \rightarrow V$ lineer dönüşümünde herbir $\alpha \neq 0$ vektörüne $A(\alpha) = \lambda\alpha$ şekilde bir tek λ karakteristik değeri karşılık gelir.

$\alpha \neq 0$ ve α $n \times 1$ sütun vektörü

I , $n \times n$ birim matris olmak üzere

$$(A - \lambda I)\alpha = 0$$

şeklinde yazabiliriz.

Bu denklem n bilinmeyenli, n denklemden oluşan bir homojen lineer denklem sisteminin aşıkâr olmayan çözümünün olması için katsayılar matrisinin tekil olması gerekir.

$$\det(A - \lambda I) = |A - \lambda I| = 0$$

ise çözüm mevcuttur.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\det(A - \lambda I)$ sonucunda λ 'ya bağılı n 'inci dereceden bir polinom elde edilir.

Bu polinoma A matrisinin karakteristik polinomu denir.

$\det(A - \lambda I) = 0$ denkleminde A matrisinin karakteristik denklemi ve bu denklemin kökleri A matrisinin karakteristik değerleridir.

2. GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ MATRİSLERİNİN BAZI ÖZELLİKLERİ

2.1. Fibonacci ve Pell Dizilerinin Matris Üreteçleri

Genelleştirilmiş $\{W_n\}$ dizisi

$$W_{n+2} = aW_{n+1} + W_n \quad W_0 = 0, \quad W_1 = 1 \quad (2.1)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Bu dizide $a = 1$ için Fibonacci dizisi $a = 2$ için Pell dizisi elde edilir.

Şimdi 2×2 tipinde bir A matrisini

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlayalım.

O halde aşağıdaki teoremi verebiliriz.

2.1. Teorem

A matrisi Eş. 2.2. ile verilsin. O halde

$$A^n = \begin{bmatrix} W_{n+1} & W_n \\ W_n & W_{n-1} \end{bmatrix}$$

İspat

İspatı n üzerinden tümevarımla yapalım.

Eğer $n = 1$ ise,

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_2 & W_1 \\ W_1 & W_0 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

Şimdi iddianın $n - 1$ için doğru olduğunu kabul edelim.

Buradan

$$A^{n-1} = \begin{bmatrix} W_n & W_{n-1} \\ W_{n-1} & W_{n-2} \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

O halde n için iddianın doğru olduğunu gösterelim.

Matris çarpımından

$$\begin{aligned} A.A^{n-1} &= \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_n & W_{n-1} \\ W_{n-1} & W_{n-2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} aW_n + W_{n-1} & aW_{n-1} + W_{n-2} \\ W_n & W_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} W_{n+1} & W_n \\ W_n & W_{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olur ve ispat tamamlanır.

A^n matrisi ile ilgili yapacağımız işlemlerde n 'i alt indis olarak kullanacağız.

Başlangıç değerleri

$$H_0 = q \text{ ve } H_1 = p \quad (2.3)$$

olan ve her terimi

$$H_n = sH_{n-1} + rH_{n-2} \text{ rekürans bağıntısıyla} \quad (2.4)$$

tanımlanan Horadam dizisinde $q = 0$, $p = 1$, $r = 1$, $s = 1$ alınırsa Fibonacci sayıları elde edilir [1, 2, 3].

Elemanları genelleştirilmiş Fibonacci sayısı olan bir matrise genelleştirilmiş Fibonacci matrisi denir [4].

Genelleştirilmiş Fibonacci matrislerinin lamda fonksiyonları ve karakteristik denklemleri incelenerek bazı özdeşlikler elde edilebilir. [5, 6, 7].

Eğer,

$$C = \begin{bmatrix} p+q & p \\ p & q \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

ise, $d = p^2 - pq - p^2$ olmak üzere $|C| = -d$ olur. O zaman C^n matrisi için düzgün bir ifade elde edilemez [1, 8].

2.2. Teorem

C matrisi Eş. 2.5 ile verilsin. O halde

$$C_n = \begin{bmatrix} H_{n+1} & H_n \\ H_n & H_{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

ve

$$|C_n| = (-1)^n d \text{ dir.} \quad (2.7)$$

İspat

İspatı n üzerine tümevarımla yapalım.

Eğer $n = 1$ ise

$$|C_1| = \begin{vmatrix} H_2 & H_1 \\ H_1 & H_0 \end{vmatrix} = H_2 H_0 - H_1^2 = (-1)^1 d$$

olup böylece istenilen görülür.

İfadenin n için doğru olduğunu kabul edelim, böylece

$$|C_n| = \begin{vmatrix} H_{n+1} & H_n \\ H_n & H_{n-1} \end{vmatrix} = H_{n+1}H_{n-1} - H_n^2 = (-1)^n d$$

olur.

Buna göre ifadenin $n + 1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$|C_{n+1}| = \begin{vmatrix} H_{n+2} & H_{n+1} \\ H_{n+1} & H_n \end{vmatrix} = H_{n+2}H_n - H_{n+1}^2$$

$$H_{n+1} + H_n = H_{n+2}$$

$$H_n + H_{n-1} = H_{n+1} \text{ eşitliklerinden}$$

$$|C_{n+1}| = (H_{n+1} + H_n)H_n - H_{n+1}^2$$

$$|C_{n+1}| = H_{n+1}H_n + H_nH_n - H_{n+1}^2$$

$$|C_{n+1}| = H_{n+1}(H_n - H_{n+1})H_nH_n$$

$$|C_{n+1}| = -H_{n+1}H_{n-1} + H_nH_n$$

$$|C_{n+1}| = -(H_{n+1}H_{n-1} + H_n^2) \\ = (-1)^{n+1}d$$

olur ve ispat tamamlanır.

Böylece Eş. 2.5'de tanımlanan C matrisi $n = 1$ için C_n 'in özel bir hali olur. Karakteristik denklemlerin kuvvetlerini indekslere çevirerek, elde edilen bazı özdeşliklerde bu yaklaşımı kullanacağız.

2.2. Lamda Fonksiyonu

Herhangi M matrisi için lamda fonksiyonu nasıl tanımlanır. Bunu yazalım.

$$\lambda(M) = |a_{ij} + 1| - |a_{ij}| \quad (2.8)$$

şeklinde tanımlanır, [5].

Eş. 2.6'da tanımlanan C_n Fibonacci matrisi için, gerekli düzenlemeler yapılırsa, aşağıdaki sonucu elde ederiz.

2.3. Teorem

C matrisi Eş. 2.6 ile verilsin. O halde C matrisi için λ fonksiyonu

$$\begin{aligned}\lambda(C_n) &= \begin{vmatrix} H_{n+1} + 1 & H_n + 1 \\ H_n + 1 & H_{n-1} + 1 \end{vmatrix} - |C_n| \\ &= H_{n-3}\end{aligned}\tag{2.9}$$

eşitliği sağlanır.

İspat

İspatı n üzerine tümevarımla yapalım.

$n = 1$ için λ da fonksiyonunu gösterelim.

$$\begin{aligned}\lambda(C_1) &= \begin{vmatrix} H_2 + 1 & H_1 + 1 \\ H_1 + 1 & H_0 + 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} H_2 & H_1 \\ H_1 & H_0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -1 = H_{-2} \text{ eşitliği sağlanır.}\end{aligned}$$

$n - 1$ için doğru olduğunu kabul edelim.

$$\begin{aligned}\lambda(C_{n-1}) &= \begin{vmatrix} H_n + 1 & H_{n-1} + 1 \\ H_{n-1} + 1 & H_{n-2} + 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} H_n & H_{n-1} \\ H_{n-1} & H_{n-2} \end{vmatrix} \\ &= H_{n-2} \text{ olur.}\end{aligned}$$

n için doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\lambda(C_n) &= \begin{vmatrix} H_{n+1} + 1 & H_n + 1 \\ H_n + 1 & H_{n-1} + 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} H_{n+1} & H_n \\ H_n & H_{n-1} \end{vmatrix} \\
&= H_{n+1} + H_{n-1} - 2H_n \\
&= H_{n+1} - H_n + H_{n-1} - H_n \\
&= H_{n-1} - H_{n-2} \\
&= H_{n-3}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. İspat tamamlanmış olur.

$$|a_{ij} + k| = |a_{ij}| + k\lambda(M) \quad [5]. \quad (2.10)$$

2.4. Teorem

C_n Fibonacci matrisi için,

$$\begin{vmatrix} H_{n+1} + k & H_n + k \\ H_n + k & H_{n-1} + k \end{vmatrix} = |C_n| + k\lambda(C_n) \quad (2.11)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

İspatı tümevarımla gösterelim. k 'nın farklı değerleri için sağlandığı kolayca görülür.

$k = 1$ için doğruluğu Eş. 2.9'dan görülür.

$k - 1$ için doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$\begin{vmatrix} H_{n+1} + k - 1 & H_n + k - 1 \\ H_n + k - 1 & H_{n-1} + k - 1 \end{vmatrix} = |C_n| + (k - 1)H_{n-3}$$

olsun.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} H_{n+1} + k & H_n + k \\ H_n + k & H_{n-1} + k \end{vmatrix} &= (H_{n+1} + H_{n-1} + H_n^2) + k(H_{n-1} + H_{n+1} - 2H_n) \\
&= |C_n| + kH_{n-3} \\
\begin{vmatrix} H_{n+1} + k & H_n + k \\ H_n + k & H_{n-1} + k \end{vmatrix} &= |C_n| + k\lambda(C_n)
\end{aligned}$$

eşitliği ispatlanmış olur.

3×3 tipinde bir matris için, ilgili lamda fonksiyonu kolay bulunabilir, [5].

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{bmatrix} \text{ matrisi için}$$

$$\lambda(M) = \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & e & f \\ 1 & h & j \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 & c \\ d & 1 & f \\ g & 1 & j \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ d & e & 1 \\ g & h & 1 \end{vmatrix} \quad (2.12)$$

olarak tanımlanır.

2.5. Teorem

$$E = \begin{bmatrix} H_{2p} & H_{2p+1} & H_m \\ H_{2p+1} & H_{2p+2} & H_m \\ H_{2p+2} & H_{2p+3} & H_m \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Genelleştirilmiş Fibonacci matrisi olsun. O halde

$$|E + H_{m-1}| = dH_{m+1} \quad (d = p^2 - pq - p^2 \text{ Eş.2.5) dir.}$$

İspat

Genelleştirilmiş Fibonacci matrisi E'nin determinantını gözönüne alalım.

$$\begin{aligned}
|E| &= H_m \left[H_{2p+1} H_{2p+3} - H_{2p+2}^2 - H_{2p} H_{2p+3} + H_{2p+1} H_{2p+2} + H_{2p} H_{2p+2} - H_{2p-1}^2 \right] \\
&= H_m \left[H_{2p+1} H_{2p+2} - H_{2p} H_{2p+3} \right] \\
&= (-1)^{2(p+1)} d H_m \\
&= d H_m
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Eş 2.12'yi kullanarak

$$\begin{aligned}
\lambda(E) &= \begin{vmatrix} 1 & H_{2p+1} & H_m \\ 1 & H_{2p+2} & H_m \\ 1 & H_{2p+3} & H_m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} H_{2p} & 1 & H_m \\ H_{2p+1} & 1 & H_m \\ H_{2p+2} & 1 & H_m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} H_{2p} & H_{2p+1} & 1 \\ H_{2p+1} & H_{2p+2} & 1 \\ H_{2p+2} & H_{2p+3} & 1 \end{vmatrix} \\
&= d
\end{aligned} \tag{2.15}$$

bulunur.

Eğer Eş. 2.10'da $k = H_{m-1}$ alırsak

$$\begin{aligned}
|E + H_{m-1}| &= |E| + H_{m-1} \lambda(E) \text{ olur.} \\
|E + H_{m-1}| &= d H_m + d H_{m-1} \\
&= d H_{m+1}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Benzer şekilde Eş. 2.10'da $k = H_n$ koyarsak

$$\begin{aligned}
|C_n + H_n| &= \begin{vmatrix} H_{n+1} + H_n & 2H_n \\ 2H_n & H_{n-1} + H_n \end{vmatrix} \\
&= |C_n| + H_n \lambda(C_n)
\end{aligned} \tag{2.17}$$

olur. Buradan da

$$4H_n^2 = H_{n+2} H_{n+1} - H_n H_{n-3} + (-1)^{n+1} d \tag{2.18}$$

olduğu çıkar.

Genelleştirilmiş Fibonacci matrisleri ve lamda fonksiyonu kullanarak, genelleştirilmiş $\{H_n\}$ Fibonacci dizileri için bazı özdeşlikler elde edebiliriz.

2.3. Karakteristik Denklemler

$$w_n = \begin{bmatrix} H_{n-1}^2 & H_{n-1}H_n & H_n^2 \\ 2H_{n-1}H_n & H_{n+1}^2 - H_{n-1}H_n & 2H_nH_{n+1} \\ H_n^2 & H_nH_{n+1} & H_{n+1}^2 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

olmak üzere, genelleştirilmiş W_n Fibonacci matrisinin $n = 1$ için gerekli hesaplamalar yapılırsa,

$$w_1 = \begin{bmatrix} q^2 & pq & p^2 \\ 2pq & (p+q)^2 - pq & 2p(p+q) \\ p^2 & p(p+q) & (p+q)^2 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir ve bu matris için

$$|w_1| = -d^3 \text{ olur.} \quad (2.20)$$

Cayley-Hamilton Teoreminden yararlanarak, w matrisi

$$|w - \lambda I| = \lambda^3 - h\lambda^2 - dh\lambda + d^3 = 0$$

denklemini

$$h = 2p^2 + 3pq + 3q^2$$

olmak üzere

$$w^3 - hw^2 - dhw + d^3I = 0 \quad (2.21)$$

denklemini sağlar.

Buradan Eş. 2.21'de

$$w^{n+3} - hw^{n+2} - dhw^{n+1} + d^3w^n = 0 \quad (2.22)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} H_{n+3}^2 - 2H_{n+2}^2 - 2H_{n+1}^2 + H_n^2 &= 0 \\ H_{n+3}H_{n+4} - 2H_{n+2}H_{n+3} - 2H_{n+1}H_{n+2} + H_nH_{n+1} &= 0 \\ H_{n+4}^2 - H_{n+2}H_{n+3} - 2H_{n+3}^2 - 2H_{n+1}H_{n+2} - 2H_{n+2}^2 \\ + 2H_nH_{n+1} + H_{n+1}^2 - H_{n-1}H_n &= 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

bağıntılarından

$$w_{n+3} - 2w_{n+2} - 2w_{n+1} + w_n = 0 \quad (2.24)$$

rekürans bağıntısını sağlayan w_{n+3} , w_{n+2} ve w_{n+1} matrislerini oluşturabiliriz; buradaki rekürans bağıntısı, Eş. 2.22 denkleminde, $p = 1$, $q = 0$, $h = 2$, $d = 1$ konularak bildiğimiz Fibonacci dizisi olan özel hâle bir benzerlikle uyarlanmış-tır.

2.6. Teorem

$\{H_n\}$ Fibonacci dizisi için

$$\sum_{i=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{i} H_{2n-i+1}^2 = 5^n [H_{2n+1}] \quad (2.25)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Eş. 2.24'de $n = 0$ için ifadeyi yeniden yazalım.

$$W_3 - 2W_2 - 2W_1 + W_0 = 0$$

eşitliği bulunur. Buradan

$$W_3 + 3W_2 + 3W_1 + W_0 = 5W_2 + 5W_1 = 5(W_2 + W_1)$$

şeklinde yazılabilir ki genel olarak

$$\begin{aligned} & \binom{2n+1}{0} W_{2n+1} + \binom{2n+1}{1} W_{2n} + \dots + \binom{2n+1}{2n+1} W_0 \\ &= 5^n (W_{n+1} + W_n) \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Birinci satırdaki ve üçüncü sütundaki elemanları birbiriyle eşitlemek suretiyle,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{i} H_{2n-i+1}^2 &= 5^n [H_{n+1}^2 + H_n^2] \\ &= 5^n [H_{2n+1}] \end{aligned}$$

sonucunu buluruz, [1].

Genelleştirilmiş $\{H_n\}$ Fibonacci dizisi için, [7]

$$J_n = \begin{bmatrix} H_{2n+2} & H_{2n} \\ -H_{2n} & -H_{2n-2} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

şeklinde genelleştirilmiş Fibonacci matrisi tanımlansın.

2.7. Teorem

$\{H_n\}$ Fibonacci dizisi için,

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} H_{2k} = 5^n H_{2n} \quad (2.27)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Eş. 2.26'da $n = 1$ için ifadeyi yazalım.

$$J = J_1 = \begin{bmatrix} 3p + 2q & p + q \\ -p - q & -q \end{bmatrix}$$

matrisini elde ederiz.

J matrisi kendi karakteristik denklemini sağlayacağından

$$J^2 - (3p + q)J + dJ = 0 \quad (2.28)$$

olur. Buradan

$$(J + H_2 I)^2 = H_5 J + H_0 H_4 I$$

ve

$$J^m (J + H_2 I)^{2n} = J^m (H_5 J + H_0 H_4 I)^n$$

bulunur.

J^m ile her iki tarafı çarparsak

$$J^m (J + H_2 I)^{2n} = J^m (H_5 J + H_0 H_4 I)^n$$

olur.

Eş. 2.28'den

$$J_2 - 3J_1 + J_0 = 0 \quad (2.29)$$

yazarız.

$$J_2 + 2J_1 + J_0 = 5J_1$$

eşitliği bulunur.

Genel olarak, J matrisinin

$$\binom{2n}{0}J_{2n} + \binom{2n}{1}J_{2n-1} + \dots + \binom{2n}{2n}J_0 = 5^n J_n$$

eşitliğini sağladığı gösterilebilir, yani

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} H_{2k} = 5^n H_{2n}$$

elde edilir.

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ matrisini gözönüne alalım, [7].} \quad (2.30)$$

2.1. Sonuç

$\{H_n\}$ Fibonacci dizisi için,

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} H_{2k+1} = 5^n H_{2n+1} \quad (2.31)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Eş. 2.30'da gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$J_n S = \begin{bmatrix} H_{2n+3} & H_{2n+1} \\ -H_{2n+1} & -H_{2n-1} \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Teorem 2.7'den

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} J_k S = 5^n J_n S$$

toplamını elde ederiz. Buradan 1. satır ve 2. sütundaki elemanları eşitleyerek

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} H_{2k+1} = 5^n H_{2n+1}$$

sonucunu buluruz.

2.8. Teorem

$\{H_n\}$ Fibonacci dizisi için,

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} H_{2k} = 5^n [H_{2n+2} + H_n] \quad (2.32)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Yine J matrisini kullanarak

$$J_3 + 3J_2 + 3J_1 + J_0 = 5(J_2 + J_1)$$

eşitliğini elde ederiz.

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n+1}{k} J_k = 5^n [J_{n+1} + J_n]$$

şeklinde genelleştirebiliriz. 1. satır ve 2. sütundaki elemanları eşitleyerek

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n+1}{k} H_{2k} = 5^n [H_{2n+2} + H_n]$$

sonucunu elde ederiz.

Yine

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} H_{k+1} = 5^n [H_{2n+3} + H_{2n+1}]$$

olur.

2.9. Teorem

$\{H_n\}$ Fibonacci dizisi için,

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} H_{2k} = H_{2n} \quad (2.33)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Eş. 2.29'u $J_2 - 2J_1 + J_0 = J_1$ şeklinde yeniden yazabileceğimizden, genel olarak

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} J_k = J_n$$

olur.

Daha önce de olduğu gibi 1. satır ve 2. sütundaki elemanları eşitleyerek

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} H_{2k} = H_{2n}$$

toplamını elde ederiz.

Benzer biçimde,

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} J_k S = J_n S$$

toplamından

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} H_{2k+1} = H_{2n+1} \quad (2.34)$$

sonucu bulunur.

Eş. 2.34'de olduğu gibi,

$$\begin{aligned} G_n S_0 &= \begin{bmatrix} H_{4n+4} & H_{4n} \\ -H_{4n} & -H_{4n-4} \end{bmatrix}, S_0 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \\ G_n S_1 &= \begin{bmatrix} H_{4n+5} & H_{4n+1} \\ -H_{4n+1} & -H_{4n-3} \end{bmatrix}, S_1 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \\ G_n S_2 &= \begin{bmatrix} H_{4n+6} & H_{4n+2} \\ -H_{4n+2} & -H_{4n-2} \end{bmatrix}, S_2 = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ G_n S_3 &= \begin{bmatrix} H_{4n+7} & H_{4n+3} \\ -H_{4n+3} & -H_{4n-1} \end{bmatrix}, S_3 = \begin{bmatrix} 13 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.35)$$

dersek

$$G_n = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} H_{4n+4} & H_{4n} \\ -H_{4n} & -H_{4n-4} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

olur.

Eş. 2.36'nın $n = 1$ için özel bir sonucu olarak, G matrisini elde ederiz, o da kendi karakteristik denklemini, yani $|G - \lambda I| = 0$ denklemini sağlayacağından,

$$G^2 - (7p + 4q)G + dI = 0 \quad (2.37)$$

elde edilir.

$$G_2 - 7G_1 + G_0 = 0 \quad (2.38)$$

matris eşitliğini kolayca doğrulayabiliriz. Buradan hareketle genel olarak,

$$\sum_{j=0}^{2n} (-1)^j \binom{2n}{j} G_j = 5^n G_n \quad (2.39)$$

bulunur.

Sağdan, yardımcı matris S_S ($S = 0, 1, 2, 3$) ile çarparak ve 1. satır ve 2. sütundaki elemanları eşitleyerek,

$$\sum_{j=0}^{2n} (-1)^j \binom{2n}{j} H_{4j+S} = 5^n H_{4n+S} \quad (2.40)$$

sonucunu elde ederiz.

Buradan,

$$G_3 - 3G_2 + 3G_1 - G_0 = 5(G_2 - G_1) \quad (2.41)$$

matris eşitliğini,

$$\sum_{j=0}^{2n+1} (-1)^{j+1} \binom{2n+1}{j} G_j = 5^n [G_{n+1} - G_n] \quad (2.42)$$

şeklinde bulabiliriz.

Bu eşitlik S_S matrisi ile sağdan çarpılırsa,

$$\sum_{j=0}^{2n+1} (-1)^{j+1} \binom{2n+1}{j} H_{4j+S} = 5^n [H_{4(n+1)+S} - H_{4n+S}] \quad (2.43)$$

Yine, Eş. 2.38 denklemi,

$$G_2 + 2G_1 + G_0 = 3^2 G_1 \quad (2.44)$$

denklemine denktir, bu

$$\sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} G_j = 3^{2n} G_n \quad (2.45)$$

şeklinde elde edilir.

Sağdan S_s ile çarparak

$$\sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} H_{4j+s} = 3^{2n} H_{4n+s} \quad (2.46)$$

eşitliğini elde ederiz.

Benzer şekilde,

$$G_3 + 3G_2 + 3G_1 + G_0 = 3^2 (G_2 + G_1) \quad (2.47)$$

matris eşitliği,

$$\sum_{j=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{j} G_j = 3^{2n} [G_{n+1} + G_n] \quad (2.48)$$

biçiminde genelleştirilebilir ki, bu son eşitliği sağdan S_s ile çarparak, son özdeşliğimiz olan,

$$\sum_{j=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{j} H_{4n+s} = 3^{2n} [H_{4(n+1)+s} - H_{4n+s}] \quad (2.49)$$

özdeşliğini elde ederiz.

3. PELL MATRİSLERİNİN BAZI ÖZELLİKLERİ

Pell matrislerini kullanarak, Fibonacci dizilerinde sağlanan bazı özellikleri Pell dizileri için sağlanıp sağlanmadığını inceleyeceğiz.

Pell sayıları, $n \geq 1$ için

$$\text{ve } P_1 = 1, P_2 = 2 \text{ olmak üzere } P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n \quad (3.1)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır.

Pell sayılarının karakteristik denklemi,

$$y^2 = 2y + 1$$

dir. Bu eşitliğin köklerini $\gamma = 1 + \sqrt{2}$ ve $\gamma' = 1 - \sqrt{2}$ olup Pell sayıları için Binet formülü

$$P_n = \frac{\gamma^n - \gamma'^n}{\gamma - \gamma'} \quad (3.2)$$

şeklindedir.

Pell sayılarıyla oluşturduğumuz matriste $P_0 = q$ ve $P_1 = p$ olarak Eş. 3.1'de tanımlanan $\{P_n\}$ Pell dizisiyle ilgili bazı özellikler inceleyeceğiz.

Tüm elemanları birer pell sayısı olan bir matrise Pell matrisi denir.

Pell dizisinin özelliklerini, Pell matrislerinin lamda fonksiyonlarından ve karakteristik denkleminde yararlanarak elde edeceğiz.

Başlangıç değerlerini $P_0 = q$ ve $P_1 = p$ olarak Pell sayılarından oluşan matrisi ifade edersek;

$$B = \begin{bmatrix} 2p + q & p \\ p & q \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

matrisini seçersek ve $|B| = (2p + q)q - p^2 = 2pq + q^2 - p^2$ $|B| = q^2 + 2pq - p^2$ ve $d_1 = p^2 - 2pq - q^2$ olmak üzere $|B| = -d_1$ olur. Buradan özdeşlikleri göstermek Fibonacci Matrislerinde olduğu gibi kolay değildir.

Şimdi 2×2 tipinde B_n matrisini

$$B_n = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

şeklinde tanımlayalım.

3.1. Teorem

B_n matrisi Eş. 3.5 ile verilsin. O halde $|B_n| = (-1)^n d_1$ dir. (3.6)

İspat

İspatı n üzerine tümevarımla yapalım.

$n = 1$ için;

$$B_1 = \begin{bmatrix} P_2 & P_1 \\ P_1 & P_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad |B_1| = -1 = (-1)^1 d_1$$

olup $n = 1$ için ispat sağlanır.

$n = 2$ için;

$$B_2 = \begin{bmatrix} P_3 & P_2 \\ P_2 & P_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad |B_2| = 1 = (-1)^2 d_1$$

olup $n = 2$ için eşitlik sağlanır.

$n - 1$ için eşitliğin doğru olduğunu kabul edelim.

$$B_{n-1} = \begin{bmatrix} P_n & P_{n-1} \\ P_{n-1} & P_{n-2} \end{bmatrix} \quad |B_{n-1}| = P_n P_{n-2} - P_{n-1} P_{n-1} \\ = (-1)^{n-1} d_1$$

olsun. O halde n için ifadenin doğru olup olmadığını araştıralım.

$$B_n = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix} \quad |B_n| = P_{n+1} P_{n-1} - P_n P_n \\ = (2P_n + P_{n-1}) P_{n-1} - P_n P_n \\ = 2P_n P_{n-1} + P_{n-1} P_{n-1} - P_n P_n \\ = 2P_n P_{n-1} + P_{n-1} P_{n-1} - P_n (2P_{n-1} + P_{n-2}) \\ = P_{n-1} P_{n-1} + P_n P_n - 2 \\ = (-1)(-1)^{n-1} d_1 \\ = (-1)^n d_1 \quad (3.7)$$

olur ve ispat tamamlanır.

Böylece Eş. 3.5'de tanımladığımız B_n matrisi $n = 1$ için $P_0 = q = 0$ ve $P_1 = p = 1$ özel bir hal alır.

B_n matrisinin determinanı ile ilgili eşitlik bulmuş oluruz. Çeşitli karakteristik denklemleri kullanarak oluşturduğumuz özdeşlikler için buradaki matrisleri ve eşitliklerini kullanacağız.

Lamda fonksiyonunu kullanarak Pell matrisleriyle ilgili elde edeceğimiz özelliklere bakalım.

3.1. Pell Matrisleri İçin Lamda Fonksiyonu

M matrisine bağlı lamda fonksiyonunun $(\lambda(M))$ tanımını kabul edelim. Yani a_{ij} , M 'nin i - j 'inci elemanı ise

O zaman

$$\lambda(M) = |a_{ij} + 1| - |a_{ij}| \quad (3.8)$$

dir [5].

Böylece Eş. 3.5’de tanımlanan B_n Pell matrisi için lamda fonksiyonunu ifade edersek,

$$\lambda(B_n) = \begin{vmatrix} P_{n+1} + 1 & P_n + 1 \\ P_n + 1 & P_{n-1} + 1 \end{vmatrix} - |B_n| \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \lambda(B_n) &= \begin{vmatrix} P_{n+1} + 1 & P_n + 1 \\ P_n + 1 & P_{n-1} + 1 \end{vmatrix} - |B_n| \\ &= 2P_{n-1} \end{aligned} \quad (3.10)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

İspatı n üzerine tümevarımla yapalım.

$n = 1$ için lamda fonksiyonu gösterelim.

$$\begin{aligned} B_1 &= \begin{bmatrix} P_2 & P_1 \\ P_1 & P_0 \end{bmatrix} \text{ için } \lambda(B_1) = \begin{vmatrix} P_2 + 1 & P_1 + 1 \\ P_1 + 1 & P_0 + 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} P_2 & P_1 \\ P_1 & P_0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-1) - (-1) = 0 = 2P_0 \\ B_2 &= \begin{bmatrix} P_3 & P_2 \\ P_2 & P_1 \end{bmatrix} \text{ için } \lambda(B_2) = \begin{vmatrix} P_3 + 1 & P_2 + 1 \\ P_2 + 1 & P_1 + 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} P_3 & P_2 \\ P_2 & P_1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3 - 1 = 2 = 2P_1 \end{aligned}$$

$n - 1$ için doğru olduğunu kabul edelim.

$$B_{n-1} = \begin{bmatrix} P_n & P_{n-1} \\ P_{n-1} & P_{n-2} \end{bmatrix} \quad \lambda(B_{n-1}) = \begin{vmatrix} P_n + 1 & P_{n-1} + 1 \\ P_{n-1} + 1 & P_{n-2} + 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} P_n & P_{n-1} \\ P_{n-1} & P_{n-2} \end{vmatrix} \\ = 2P_{n-2}$$

olsun.

n için doğru olduğunu gösterelim.

$$B_n = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix} \quad \lambda(B_n) = \begin{vmatrix} P_{n+1} + 1 & P_n + 1 \\ P_n + 1 & P_{n-1} + 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{vmatrix} \\ = P_{n+1}P_{n-1} + P_{n+1} + P_{n-1} + 1 - P_nP_n - 2P_n - 1 \\ - P_{n-1} + P_nP_n \\ = P_{n+1} + P_{n-1} - 2P_n \\ \{P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1}\} \quad = 2P_n + P_{n-1} + P_{n-1} - 2P_n \\ = 2P_{n-1}$$

$\lambda(B_n) = 2P_{n-1}$ olduğu bulunur.

Sonuç olarak Eş. 3.9'dan

$$|a_{ij} + k| = |a_{ij}| + k\lambda(M) \quad (3.11)$$

eşitliğini yazabiliriz [5].

3.3. Teorem

B_n Pell matrisi için,

$$\begin{vmatrix} P_{n+1} + k & P_n + k \\ P_n + k & P_{n-1} + k \end{vmatrix} = |B_n| + k\lambda(B_n) \quad (3.12)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

İspatı tümevarımla gösterelim. k 'nın farklı değerleri için sağlandığı kolayca görülür.

$k = 1$ için doğruluğu Eş. 3.9'dan sağlanır.

$$\begin{vmatrix} P_{n+1} + 1 & P_n + 1 \\ P_n + 1 & P_{n-1} + 1 \end{vmatrix} = |B_n| + \lambda(B_n) \quad (3.13)$$

$k - 1$ için doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$\begin{vmatrix} P_{n+1} + k - 1 & P_n + k - 1 \\ P_n + k - 1 & P_{n-1} + k - 1 \end{vmatrix} = |B_n| + (k - 1)\lambda(B_n) \text{ dir.}$$

k için doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} |B_n + k| - |B_n| &= \begin{vmatrix} P_{n+1} + k & P_n + k \\ P_n + k & P_{n-1} + k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{vmatrix} \\ &= P_{n+1}P_{n-1} + k(P_{n+1} + P_{n-1}) + k^2 - P_n^2 - 2kP_n - k^2 \\ &\quad - P_{n-1}P_{n-1} + P_nP_n \\ &= k(P_{n+1} + P_{n-1} - 2P_n) \\ &= k\lambda(B_n) \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} P_{n+1}P_{n-1} + P_n &= 2P_n + P_{n-1} + P_{n-1} - 2P_n \\ &= 2P_{n-1} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Eş. 3.13 ve Eş. 3.14'den

$$|B_n + k| - |B_n| = k\lambda(B_n) = 2kP_{n-1} \quad (3.16)$$

eşitliğini bulmuş oluyoruz.

n 'e farklı değerler vererekte eşitliğin sağlandığını görebiliriz.

$n = 1$ ve $k = 1$ ise

$$\begin{aligned} |B_1 + 1| - |B_1| &= \begin{vmatrix} P_2 + 1 & P_1 + 1 \\ P_1 + 1 & P_0 + 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} P_2 & P_1 \\ P_1 & P_0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 - (-1) = 0 \end{aligned}$$

$$|B_1 + 1| - |B_1| = 2P_0$$

$$\begin{aligned} \lambda(B_1) &= \begin{vmatrix} 1 & P_1 \\ 1 & P_0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} P_2 & 1 \\ P_1 & 1 \end{vmatrix} = P_0 - P_1 + P_2 - P_1 \\ &= P_0 - P_1 + 2P_1 + P_0 - P_1 \\ &= 2P_0 \end{aligned}$$

$$|B_1 + 1| - |B_1| = 1\lambda(B_1) \quad (3.17)$$

$n = 2$ ise

$$\begin{aligned} |B_2 + 1| - |B_2| &= \begin{vmatrix} P_3 + 1 & P_2 + 1 \\ P_2 + 1 & P_1 + 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} P_3 & P_2 \\ P_2 & P_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$|B_2 + 1| - |B_2| = 2P_1$$

$$\begin{aligned} \lambda(B_2) &= \begin{vmatrix} 1 & P_2 \\ 1 & P_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} P_3 & 1 \\ P_2 & 1 \end{vmatrix} = P_1 - P_2 + P_3 - P_2 \\ &= 2P_2 + P_1 + P_1 - 2P_2 \\ &= 2P_2 \end{aligned}$$

$$|B_2 + 1| - |B_2| = \lambda(B_2)$$

$n - 1$ için doğru olduğunu kabul edelim.

$$|B_{n-1} + 1| - |B_{n-1}| = \lambda(B_{n-1})$$

olsun.

Eş. 3.13'den

$$|B_n + 1| - |B_n| = \lambda(B_n) \text{ dir.}$$

k için sağlandığını gösterelim.

n = 1 için;

$$\begin{aligned} |B_1 + k| - |B_1| &= \begin{vmatrix} P_2 + k & P_1 + k \\ P_1 + k & P_0 + k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} P_2 & P_1 \\ P_1 & P_0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 + k & 1 + k \\ 1 + k & k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 2k + k^2 - 1 - k^2 - 2k + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$|B_{n-1} + k| - |B_{n-1}| = k\lambda(B_{n-1}) \text{ olduğunu kabul edelim.}$$

$$|B_n + k| - |B_n| = k\lambda(B_n) \text{ eşitliği Eş. 3.16'dan görülür.}$$

3×3'lük matris için, ilgili lamda fonksiyonu uygulanarak, daha rahat bulunabilir, yani

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{bmatrix} \text{ matrisi için}$$

$$\lambda(M) = \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & e & f \\ 1 & h & j \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 & c \\ d & 1 & f \\ g & 1 & j \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ d & e & 1 \\ g & h & 1 \end{vmatrix} \quad (3.18)$$

Genelleştirilmiş

$$E = \begin{bmatrix} H_{2p} & H_{2p+1} & H_m \\ H_{2p+1} & H_{2p+2} & H_m \\ H_{2p+2} & H_{2p+3} & H_m \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Fibonacci matrisini gözönüne alalım; [1].

$$\begin{aligned}
|E| &= H_m \left[H_{2p+1} H_{2p+3} - H_{2p+2}^2 - H_{2p} H_{2p+3} \right. \\
&\quad \left. H_{2p} H_{2p+2} - H_{2p+1}^2 \right] \\
&= H_m \left[H_{2p+1} H_{2p+2} - H_{2p} H_{2p+3} \right] \\
&= (-1)^{2(p+1)} d H_m \\
&= d H_m
\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
\lambda(E) &= \begin{vmatrix} 1 & H_{2p+1} & H_m \\ 1 & H_{2p+2} & H_m \\ 1 & H_{2p+3} & H_m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} H_{2p} & 1 & H_m \\ H_{2p+1} & 1 & H_m \\ H_{2p+2} & 1 & H_m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} H_{2p} & H_{2p+1} & 1 \\ H_{2p+1} & H_{2p+2} & 1 \\ H_{2p+2} & H_{2p+3} & 1 \end{vmatrix} \\
&= H_m (H_{2p+2} + H_{2p+2} + H_{2p+1} - H_{2p+2} - H_{2p+3} - H_{2p+1}) \\
&= H_m (H_{2p} + H_{2p+1} + H_{2p+2} - H_{2p+2} - H_{2p-1} - H_{2p}) \\
&= H_m (H_{2p} - H_{2p+2} + H_{2p+1} H_{2p+2} + H_{2p+2} H_{2p+1} - H_{2p+2} H_{2p+2} \\
&\quad - H_{2p+2} H_{2p} - H_{2p+1} H_{2p+1}) \\
&= (-1)^{2(p+1)} d [8].
\end{aligned} \tag{3.21}$$

3.4. Teorem

$$F = \begin{bmatrix} P_{2n} & P_{2n+1} & P_m \\ P_{2n+1} & P_{2n+2} & P_m \\ P_{2n+2} & P_{2n+3} & P_m \end{bmatrix} \text{ Pell matrisi olmak üzere}$$

$$\begin{aligned}
|F + P_{m-1}| &= (P_{m+1} + P_{m-1}) d_1 \quad (d_1 = p^2 - 2pq - q^2 \text{ Eş.3.4}) \\
\left| F + \frac{P_{m-1}}{2} \right| &= (P_{m+1}) d_1
\end{aligned} \tag{3.22}$$

eşitliği sağlanır.

İspat

F Pell matrisinin determinantını alalım.

$$|F| = P_m (P_{2n+2} P_{2n+1} - P_{2n} P_{2n+3})$$

$$= (-1)^{2n+2} 2d_1 P_m \quad (3.23)$$

Eş. 3.10'da $k = P_{m-1}$ alırsak

$$\begin{aligned} |F + P_{m-1}| &= |F| + P_{m-1} \lambda(F) \\ &= 2d_1 P_m + 2d_1 P_{m-1} \\ &= (2P_m + 2P_{m-1})d_1 \\ &= (P_{m+1} + P_{m-1})d_1 \end{aligned}$$

Yine

$$\begin{aligned} \left| F + \frac{P_{m-1}}{2} \right| &= |F| + \frac{P_{m-1}}{2} \lambda(F) \\ &= 2d_1 P_m + 2d_1 \frac{P_{m-1}}{2} \\ &= (2P_m + P_{m-1})d_1 \\ &= (P_{m+1})d_1 \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanmış olur.

Eş. 3.5 ve Eş. 3.10'dan $k = P_n$

$$|B_n + P_n| = |B_n| + P_n \lambda(B_n) \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} |B_n + P_n| &= \left| \frac{P_{n+1} + P_n}{2P_n} \frac{2P_n}{P_{n-1} + P_n} \right| = (-1)^n d + 2P_n P_{n-1} \\ &= P_{n+1} P_{n-1} + P_n P_{n-1} - P_n P_{n+1} + P_n P_n - 4P_n^2 = (-1)^n d + 2P_n P_{n-1} \\ &= P_{n-1} P_{n+1} + P_n P_{n+1} - P_n P_{n-1} + 3P_n^2 = (-1)^n d \\ &= P_{n-1} (P_{n+1} + P_n) + P_n P_{n+1} - 3P_n^2 \\ &= P_{n-1} (P_n + P_{n-1}) + P_n P_{n+1} - 3P_n^2 \\ &= P_{n-1}^2 + P_{n-1} P_n + P_n P_{n+1} - 3P_n^2 \\ &\quad P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1} \text{ eşitliğinden} \\ &= 2P_{n-1} P_n + P_{n-1}^2 - P_n^2 = (-1)^n d \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned}
|B_n + P_n| &= \begin{vmatrix} P_{n+1} + P_n & 2P_n \\ 2P_n & P_{n-1} + P_n \end{vmatrix} \\
&= |B_n| + P_n \lambda(B_n)
\end{aligned}$$

Eş. 3.10 ve Eş. 3.6'dan

$$= (-1)^n d + 2P_n P_{n-1}$$

eşitliği bulunur.

$\{P_n\}$ Pell dizisi için, birkaç özdeşlik bulabiliriz.

$$F_n = \begin{bmatrix} P_{2n+2} & P_{2n} \\ -P_{2n} & -P_{2n-2} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

şeklinde tanımlanan Pell matrisini ele alalım.

3.5. Teorem

$\{P_n\}$ Pell dizisi için

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} P_{2k} = 8^n P_{2n} \quad (3.27)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$\{P_n\}$ Pell dizisi

$$F_n = \begin{bmatrix} P_{2n+2} & P_{2n} \\ -P_{2n} & -P_{2n-2} \end{bmatrix} \text{ matrisinde } n = 1 \text{ için}$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} P_4 & P_2 \\ -P_2 & -P_0 \end{bmatrix} \text{ matrisini elde ederiz.}$$

F kendi karakteristik denklemini sağladığından

$$\begin{aligned} F^2 - F(P_4 - P_0) + P_2^2 - P_0 P_4 &= 0 \\ F^2 - F(4P_2 + 4P_1) + P_2^2 - P_0 P_4 &= 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} 4P_1^2 - P_2^2 + P_4 P_0 &= 4P_1^2 + (2P_3 + P_2)P_0 - P_2^2 \\ &= 4P_1^2 - P_2^2 + (4P_2 + 2P_1 + P_2)P_0 \\ &= 4P_1^2 - P_2^2 + (5P_2 + 2P_1)(P_2 - 2P_1) \\ &= 4P_1^2 - P_2^2 + 5P_2^2 - 10P_1 P_2 + 2P_1 P_2 - 4P_1^2 \\ &= 4P_2^2 - 8P_1 P_2 \\ &= 4P_2 (P_2 - 2P_1) \\ &= 4P_2 P_0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Eş. 3.24 ve Eş. 3.25'den

$$(F - 2P_1 I)^2 = 4P_2 F + 4P_2 P_0 I$$

dır. Böylece

$$F^m (F - 2P_1 I)^{2n} = F^m (4P_2 F + 4P_2 P_0 I)^n$$

ve

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-2P_1)^{2n-k} F^{k+m} = F^m (4P_2 F + 4P_2 P_0 I)^n$$

eşitlikleri elde edilir.

Eş. 3.22'den

$$F_2 = 6F_1 - F_0$$

matris eşitliğinden

$$F_2 + 2F_1 + F_0 = 8F_1$$

elde edilir.

$$\binom{2n}{0}F_0 + \binom{2n}{1}F_1 + \dots + \binom{2n}{2n-1}F_{2n-1} + \binom{2n}{2n}F_{2n} = 8^n F_n$$

eşitliğini F matrisinin sağladığı gösterilir.

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} F_k = 8^n F_n$$

Yine 1. satır ve 2. sütundaki elemanları eşitleyerek

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} P_{2k} = 8^n P_{2n} \text{ elde edilir.}$$

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, Fibonacci sayılarından yola çıkarak Fibonacci dizisinin bazı özelliklerini elde ettik. Fibonacci dizilerinin bu özelliklerini kullanarak Pell dizisinde de benzer özelliklerin sağlanıp sağlanmadığına baktık. Lamda fonksiyonunu kullanarak Pell dizilerine ait yeni eşitliklere ulaştık.

Fibonacci dizilerinin farklı özelliklerini kullanarak Pell dizilerinde yeni eşitliklere ulaşabiliriz.

KAYNAKLAR

1. Horadam, A. F., "Generalized Fibonacci Sequence", **Amer. Math. Monthly**, 68(5) : 455-459 (1961).
2. Vajda, S., "Fibonacci & Lucas Numbers, and the Golden Section", **Halsted Press**, New York, 9-51 (1989).
3. Dunlap, Richard A., "The Golden Ratio and Fibonacci Numbers", **World Scientific**, Singapore, 1-13 (1997)
4. Dazheng, L., "Fibonacci Matrices", **The Fibonacci Quarterly**, 37(1) : 14-20 (1999).
5. Hoggatt, V. E. and Bicknell, Marjorie, "Fibonacci Matrices and Lambda Functions", **The Fibonacci Quarterly**, 1(2) : 47-52 (1963).
6. Hoggatt, V. E. and Bicknell, Marjorie, "Some New Fibonacci Identities", **The Fibonacci Quarterly**, 2(1) : 29-32 (1964).
7. Hoggatt, V. E. and Bicknell, Marjorie, "A Matrix Generation of Fibonacci Identities for F_{2nk} ", **The Fibonacci Quarterly**, 1(2) : 47-52 (1963).
8. Walton, J. E. and Horadam, A. F., "Some Properties of certain Generalized Fibonacci Matrices", **The Fibonacci Quarterly**, 9(3) : 264 - 276 (1971).
9. Gantmacher, F. R., "The Theory Matrices", **Chelsea Publishing Company**, United States of America, 95-116 (1959).
10. Taşcı, Dursun, "Lineer Cebir", **Sel-Ün Vakfı Yayınları**, Konya, 84-212 (1999).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : YAMAN, Pelin
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 04.03.1980 Samsun
Medeni hali : Bekar
Telefon : 0 (312) 250 25 98
e-mail : pelin_98@hotmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek Lisans	Gazi Üniversitesi Orta Öğretim Alan Öğretmenliği Tezsiz Yüksek Lisans	2004
Lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik Bölümü	2002
Lise	Batıkent Süper Lisesi	1998

Yabancı Dil

İngilizce

Bilgisayar

Word, Excel, Windows, C++ Plus

Hobiler

Bilgisayar, Satranç, Tenis