

**FİBONACCİ VE PELL SAYILARI İLE TAMSAYILARIN
ZECKENDORF GÖSTERİMLERİ**

GÜL KARADENİZ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HAZİRAN 2006
ANKARA**

Gül KARADENİZ tarafından hazırlanan FİBONACCİ VE PELL SAYILARI İLE
TAMSAYILARIN ZECKENDORF GÖSTERİMLERİ adlı bu tezin Yüksek
Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

.....

Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans tezi
olarak kabul edilmiştir.

Başkan : _____

Üye : _____

Üye : _____

Üye : _____

Üye : _____

Tarih :/...../.....

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına
uygundur.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

GÜL KARADENİZ

**FİBONACCİ VE PELL SAYILARI İLE TAMSAYILARIN
ZECKENDORF GÖSTERİMLERİ
(Yüksek Lisans Tezi)**

Gül KARADENİZ

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Haziran 2006**

ÖZET

Bu çalışmada, Fibonacci sayıları için tanımlanmış Zeckendorf teoreminin, uygun değişiklikler yapılarak Pell sayıları için de uygulanabileceği gösterildi. Ayrıca tamsayıların bazı koşullar altında Fibonacci ve Pell sayılarının toplamı biçiminde tek türlü yazılabileceği gösterildi. Tamsayıların bu gösterimini kolaylaştırmak için, Fibonacci sayıları için Z algoritması, Pell sayılar içinse ZP ve Greedy algoritması kullanıldı.

**Bilim kodu : 204.1.025
Anahtar kelimeler : Fibonacci sayıları, Pell sayıları
Sayfa adedi : 71
Tez Yöneticisi : Prof. Dr. Dursun TAŞCI**

**ZECKENDORF REPRESENTATIONS OF INTEGERS BY
FIBONACCI AND PELL NUMBERS**

(M.Sc. Thesis)

Gül KARADENİZ

**GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

June 2006

ABSTRACT

In this article, it is revealed that Zeckendorf's Theorem which is defined for Fibonacci numbers, can be applied for Pell numbers by making suitable adjustments. Furthermore, it has been indicated that under some circumstances, integers can be written uniquely as a sum of the Fibonacci and Pell numbers. To ease the notation of integers, Z algorithm is used for Fibonacci numbers, ZP algorithm and Greedy algorithm is used for Pell numbers.

Science Code : 204.1.025
Key words : Fibonacci numbers, Pell numbers
Page number : 71
Advisor : Prof. Dr. Dursun TAŞCI

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren hocam Prof. Dr. Dursun TAŞCI'ya, doğduğum günden itibaren sonsuz sevgi ve şevkatlerini hiçbir zaman eksik etmeyen, beni bugünlere getiren, maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen anneme, babama ve her zaman moral kaynağım olan canım kardeşime yürek dolusu teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, bu çalışmanın oluşmasında katkısı bulunan herkese, yetişmemde emeği geçen öğretmenlerime ve destekleriyle beni yalnız bırakmayan arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR.....	v
İÇİNDEKİLER	vii
1. GİRİŞ	1
2. FİBONACCİ SAYILARI İLE TAMSAYILARIN ZECKENDORF GÖSTERİMLERİ.....	10
2.1. Pozitif İndisli Fibonacci Sayıları ile Pozitif Tamsayıların Zeckendorf Gösterimleri.....	10
2.2. Negatif İndisli Fibonacci Sayıları İle Tamsayıların Zeckendorf Gösterimleri.....	13
2.3. Z Algoritması	20
3. PELL SAYILARI İLE TAMSAYILARIN ZECKENDORF GÖSTERİMLERİ.....	38
3.1. Pozitif İndisli Pell Sayıları İle Pozitif Tamsayıların Zeckendorf Gösterimleri.....	45
3.2. Greedy Algoritması.....	50
3.3. Negatif İndisli Pell Sayıları İle Tamsayıların Zeckendorf Gösterimleri.....	53
3.4. Zeckendorf-Pell Algoritması (ZP Algoritması).....	64
4. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	68
KAYNAKLAR	69
ÖZGEÇMİŞ.....	71

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 1.1. Fibonacci sayıları	5
Çizelge 1.2. Pell sayıları	9
Çizelge 2.1. Pozitif tamsayıların pozitif indisli Fibonacci sayıları ile Zeckendorf gösterimleri.....	12
Çizelge 3.1. Tamsayıların negatif indisli Pell sayıları ile Zeckendorf gösterimleri.....	67

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

$\{ F_n \}$

$\{ P_n \}$

$\{ Q_n \}$

Açıklama

Fibonacci Dizileri

Pell Dizileri

Pell-Lucas Dizileri

Kısaltmalar

ZP

Açıklama

Zeckendorf-Pell algoritması

1. GİRİŞ

Her bir pozitif tamsayı, birbirinden farklı ve ardışık olmayan Fibonacci sayılarının toplamı olarak tek türlü yazılabilir. Bu yazılışa pozitif tamsayıların Zeckendorf gösterimi denir [1].

N bir pozitif tamsayı ve $\{u_n\}$ de $n \geq 1$ için $u_n = F_{n+1}$ biçiminde tanımlı bir dizi olmak üzere Zeckendorf gösterimi aşağıdaki gibidir [2,3].

$$N = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \cdot u_i$$

$$\alpha_i = 0 \text{ veya } 1 \quad \text{ve} \quad \alpha_i \cdot \alpha_{i+1} = 0 \quad (i \geq 1) \quad (1.1)$$

Dolayısıyla; her N pozitif tamsayısı, elemanları 0 ya da 1 olan $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots\}$ şeklinde bir dizi ile temsil edilebilir. Burada dizinin α_i elemanının 0 ya da 1 oluşu,

$u_i = F_{i+1}$ olduğundan; $(i+1)$. Fibonacci sayısının, N nin Zeckendorf gösteriminde var olup olmadığını gösterir.

Eş. 1.1 deki koşul; $\{u_n\}$ dizisinin indisleri arasındaki farkın en az 2 olmasını sağlar. Bu ise $\{u_n\}$ dizisinin iki elemanının toplamının; başka bir Fibonacci sayısı ile gösterilmesini engeller.

Şimdi Fibonacci ve Pell sayılarına ait bazı ön bilgiler verelim.

1.1. Tanım [4,5]

$F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ başlangıç koşullarına sahip ve $n \geq 1$ için

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad (1.2)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{F_n\}$ dizisine Fibonacci dizisi ve F_n sayısına n .Fibonacci sayısı adı verilir.

1.1. Teorem [4,6]

$\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ ve $\beta = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$ olmak üzere n .Fibonacci sayısı

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad (1.3)$$

biçiminde yazılabilir.

İspat

İspatı tümevarımla yapalım. $k=1$ için doğru olduğu

$$F_1 = \frac{\alpha^1 - \beta^1}{\alpha - \beta} = 1$$

eşitliğinden görülür.

$1 \leq k \leq n$ için eşitliğin doğru olduğunu kabul edelim ve $k=n+1$ için eşitliğin gerçekleştiğini gösterelim. Yani,

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= F_n + F_{n-1} \\ &= \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right) + \left(\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{(\alpha^n + \alpha^{n-1}) - (\beta^n + \beta^{n-1})}{(\alpha - \beta)} \quad (1.4)$$

yazarız. Diğer taraftan $\alpha^2 = \alpha + 1$ ve $\beta^2 = \beta + 1$ olduğundan buradan;

$$\alpha^{n+1} = \alpha^n + \alpha^{n-1} \quad (1.5)$$

ve

$$\beta^{n+1} = \beta^n + \beta^{n-1} \quad (1.6)$$

bulunur.

Eş. 1.5 ve Eş. 1.6, Eş. 1.4 de yerine yazılırsa

$$F_{n+1} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Bu algoritmada α ve β , Eş. 1.1 deki indirgeme bağıntısıyla ilişkili olan $x^2 - x - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleridir.

$$\alpha + \beta = 1, \alpha - \beta = \sqrt{5} \text{ ve } \alpha \cdot \beta = -1$$

olduğu açıkça görülür.

Eş. 1.2 kullanılarak,

$$F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$$

eşitliği elde edilir. Bu son ifadede n yerine sıfır ve negatif tamsayılar seçilerek elde edilen $\{ F_n \}$ dizisine negatif indisli Fibonacci dizisi denir.

Böylece

$$F_{-1} = F_1 - F_0 = 1, \quad F_{-2} = F_0 - F_{-1} = -1, \dots$$

bu şekilde devam edilerek negatif indisli Fibonacci sayıları elde edilir [4].

1.1. Sonuç [4,6]

Her n pozitif tamsayısı için

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} \cdot F_n \quad (1.7)$$

dir.

İspat

Eş. 1.3 ü kullanarak

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \text{ yazarız.}$$

Buradan

$$\begin{aligned} F_{-n} &= \frac{\alpha^{-n} - \beta^{-n}}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{(\alpha^{-1})^n - (\beta^{-1})^n}{\alpha - \beta} \end{aligned}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n - \left(\frac{1}{\beta}\right)^n}{\alpha - \beta} \quad (1.8)$$

ifadesine ulaşılır.

$\frac{1}{\alpha} = -\beta$ ve $\frac{1}{\beta} = -\alpha$ olduğunda, bu değerleri Eş. 1.8 de yerlerine yazarsak,

$$F_{-n} = \frac{(-\beta)^n - (-\alpha)^n}{\alpha - \beta}$$

$$= \frac{(-1)^n \beta^n - (-1)^n \alpha^n}{\alpha - \beta}$$

$$= (-1)^n \frac{(\beta^n - \alpha^n)}{\alpha - \beta}$$

$$= (-1)^{n+1} \frac{(\alpha^n - \beta^n)}{\alpha - \beta}$$

$$= (-1)^{n+1} \cdot F_n$$

bulunur. ■

Eş. 1.2 ve Eş. 1.7 den F_n Fibonacci sayılarına ait aşağıdaki tabloyu elde ederiz.

Çizelge 1.1. Fibonacci sayıları

n	...	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	...
F_n	...	-8	5	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	5	8	...

1.2. Tanım [7,8]

$P_0=0$ ve $P_1=1$ başlangıç koşullarına sahip ve $n \geq 1$ için

$$P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1} \quad (1.9)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{P_n\}$ dizisine Pell dizisi ve P_n sayısına da n .Pell sayısı adı verilir.

1.2. Teorem [8]

$\alpha = 1 + \sqrt{2}$ ve $\beta = 1 - \sqrt{2}$ olmak üzere n .Pell sayısı

$$P_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad (1.10)$$

biçiminde yazılabilir.

İspat

İspatı tümevarımla yapalım. $n=1$ için doğru olduğu

$$P_1 = \frac{\alpha^1 - \beta^1}{\alpha - \beta} = 1$$

eşitliğinden görülür.

$1 \leq k \leq n$ için iddiamız doğru olsun. $k=n+1$ için Eş. 1.9 dan

$$P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right) + \left(\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \right) \\
&= \frac{(2\alpha^n + \alpha^{n-1}) - (2\beta^n + \beta^{n-1})}{(\alpha - \beta)} \quad (1.11)
\end{aligned}$$

yazarız. Diğer taraftan $\alpha^2 = 2\alpha + 1$ ve $\beta^2 = 2\beta + 1$ olduğundan buradan;

$$\alpha^{n+1} = 2\alpha^n + \alpha^{n-1} \quad (1.12)$$

ve

$$\beta^{n+1} = 2\beta^n + \beta^{n-1} \quad (1.13)$$

bulunur.

Eş. 1.12 ve Eş. 1.13, Eş. 1.11 de yerine yazılırsa

$$P_{n+1} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \text{ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. } \blacksquare$$

Burada α ve β , Eş. 1.9 daki indirgeme bağıntısı ile ilişkili olan $x^2 - 2x - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleridir.

$$\alpha + \beta = 2, \quad \alpha - \beta = 2\sqrt{2} \text{ ve } \alpha\beta = -1$$

olduğu açıkça görülür.

Eş. 1.9 kullanılarak,

$$P_{n-1} = P_{n+1} - 2P_n$$

eşitliği elde edilir. Bu son ifadede n yerine sıfır ve negatif tamsayılar seçilerek elde edilen $\{P_n\}$ dizisine negatif indisli Pell dizisi denir [7].

Böylece

$$P_{-1} = P_1 - 2P_0 = 1, \quad P_{-2} = P_0 - 2P_{-1} = -2, \dots$$

bu şekilde devam edilerek negatif indisli Pell sayıları elde edilir.

1.2. Sonuç [7]

Her n pozitif tamsayısı için

$$P_{-n} = (-1)^{n+1} \cdot P_n \tag{1.14}$$

dir.

İspat

Eş. 1.10 u kullanarak

$$P_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

yazarız.

Buradan

$$\begin{aligned}
P_{-n} &= \frac{\alpha^{-n} - \beta^{-n}}{\alpha - \beta} \\
&= \frac{(\alpha^{-1})^n - (\beta^{-1})^n}{\alpha - \beta} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n - \left(\frac{1}{\beta}\right)^n}{\alpha - \beta}
\end{aligned} \tag{1.15}$$

ifadesine ulaşılır.

$\frac{1}{\alpha} = -\beta$ ve $\frac{1}{\beta} = -\alpha$ olduğunda, bu değerleri Eş. 1.15 de yerlerine yazarsak,

$$\begin{aligned}
P_{-n} &= \frac{(-\beta)^n - (-\alpha)^n}{\alpha - \beta} \\
&= \frac{(-1)^n \beta^n - (-1)^n \alpha^n}{\alpha - \beta} \\
&= (-1)^n \frac{(\beta^n - \alpha^n)}{\alpha - \beta} \\
&= (-1)^{n+1} \frac{(\alpha^n - \beta^n)}{\alpha - \beta} \\
&= (-1)^{n+1} \cdot P_n
\end{aligned}$$

bulunur. ■

Eş. 1.9 ve Eş. 1.14 den P_n Pell sayılarına ait aşağıdaki tabloyu elde ederiz.

Çizelge 1.2. Pell sayıları

n	...-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	...
P_n	...-70	29	-12	5	-2	1	0	1	2	5	12	29	70	...

2. FİBONACCİ SAYILARI İLE TAMSAYILARIN ZECKENDORF GÖSTERİMLERİ

Bu bölümde tamsayıların Zeckendorf gösteriminin ardışık olmayan F_n Fibonacci sayıları kullanılarak elde edilebileceğini göstereceğiz.

Tamsayıların F_n Fibonacci sayıları ile Zeckendorf gösterimlerini iki bölümde inceleyeceğiz.

2.1. Pozitif İndisli Fibonacci Sayıları ile Pozitif Tamsayıların Zeckendorf Gösterimleri

Bu bölümde her pozitif tamsayının ardışık olmayan pozitif indisli Fibonacci sayılarının toplamı olarak yazılabileceğini göstereceğiz.

2.1. Teorem [4,9] (Zeckendorf Teoremi)

Her N pozitif tamsayısı birbirinden farklı pozitif indisli Fibonacci sayılarının toplamı biçiminde gösterilebilir. Bu gösterim tek türlü belirlidir. Açıkça

$$i) k_{i+1} \leq k_i - 2 \quad (i=1,2,\dots,r-1) \quad (2.1)$$

$$ii) k_r \geq 2 \quad (2.2)$$

olmak üzere her bir N pozitif tamsayısı $N = F_{k_1} + F_{k_2} + \dots + F_{k_r}$ biçiminde yazılabilir.

İspat

N tamsayısının kendisi bir Fibonacci sayısı ise ispat açıktır. Teoremin F_n den küçük veya eşit tüm tamsayılar için doğru olduğunu varsayalım ve $F_{n+1} > N > F_n$ olduğunu varsayalım.

$$N = F_n + (N - F_n); \quad N - F_n < F_n$$

olur ki varsayımımızdan $N - F_n$ in Eş. 2.1 ve Eş. 2.2 şartlarına uyacak biçimde ifade edilebileceği görülür. Dolayısıyla her pozitif tamsayının, pozitif indisli Fibonacci sayılarının toplamı olarak gösterilebileceği ispatlanmış olur. ■

Her pozitif tamsayıyı ardışık olmayan pozitif indisli Fibonacci sayılarının toplamı biçiminde ifade etmemizi kolaylaştırmak için verilen herhangi bir pozitif N tamsayısından küçük olan en büyük indisli F_i Fibonacci sayısını N den çıkartıp ve bu işlemi sıfıra ulaşınca kadar devam ettirirsek; N pozitif tamsayısının pozitif indisli Fibonacci sayılarının toplamı olarak ifade etmiş oluruz [10].

Şimdi Fibonacci sayıları için bir örnek verelim.

Örnek

N = 25 olsun.

$$\begin{aligned} 25 &= F_8 + (25 - 21) \\ &= F_8 + F_4 + (4 - 3) \\ &= F_8 + F_4 + F_2 \end{aligned}$$

Çizelge 2.1. de 1 den 55'e kadar olan tamsayıların Fibonacci sayıları ile Zeckendorf gösterimi verilmiştir.

2.2. Negatif İndisli Fibonacci Sayıları İle Tamsayıların Zeckendorf Gösterimleri

Bu bölümde; sadece pozitif tamsayıların değil, negatif tamsayıların da yani tüm tamsayıların $i \leq 0$ olmak üzere ardışık olmayan negatif indisli F_i Fibonacci sayılarının toplamı biçiminde tek türlü gösterilebileceğini ortaya konulacak ve bu gösterimi sağlamak için bir algoritma oluşturulacaktır.

Bu algoritmayı oluştururken aşağıda verilen ön teoremlerden yararlanacağız.

2.1. Ön Teorem [11]

$n > 0, k > 0$ olmak üzere

$$-F_{-2k} \leq n < F_{-2k-1} - 1 \text{ ise}$$

$0 < \ell < k$ koşulunu sağlayan bazı ℓ tamsayıları için;

$$-F_{-2k+2\ell-1} \leq n - F_{-2k-1} < -F_{-2k+2\ell+1} < 0 \quad (2.3)$$

dır.

İspat

$$-F_{-2k} \leq n < F_{-2k-1} - 1 \quad (2.4)$$

olsun.

Eş. 2.4 ün her tarafını -1 ile çarpıp daha sonra da F_{-2k-1} eklersek;

$$1 < F_{-2k-1} - n \leq F_{-2k-1} + F_{-2k} \quad (2.5)$$

elde edilir.

Eş. 1.2 ve Eş. 1.7 kullanılarak

$$F_{-2k-1} + F_{-2k} = F_{2k+1} - F_{2k} = F_{2k-1} \quad (2.6)$$

yazılabilir.

Eş. 2.6, Eş. 2.5 de yerine konulursa

$$1 < F_{-2k-1} - n \leq F_{2k-1} \quad (2.7)$$

bulunur.

Her $p > 1$ tamsayısı için

$$0 < F_{2m-3} < p \leq F_{2m-1} \quad (m \geq 2) \quad (2.8)$$

Eğer $p = F_{-2k-1} - n$ alınırsa; $m + \ell = k + 1$ olacak şekilde; $\ell > 0$ tamsayıları vardır ve; $m = k - \ell + 1$ alınıp, p ve m değerleri Eş. 2.8 de yerine konulursa;

$$0 < F_{2k-2\ell-1} < F_{-2k-1} - n \leq F_{2k-2\ell+1} \quad (2.9)$$

olur.

Eş. 2.9 un her tarafını -1 ile çarparsak;

$$-F_{2k-2\ell+1} \leq n - F_{-2k-1} < -F_{2k-2\ell-1} < 0 \quad (2.10)$$

bulunur.

Eş. 2.10 için Eş. 1.7 kullanılarak

$$-F_{-2k+2\ell-1} \leq n - F_{-2k-1} < -F_{-2k+2\ell+1} < 0$$

bulunur. ■

2.2. Ön Teorem [11]

$n > 0$ ve $k > 0$ olmak üzere

$$F_{-2k+1} < n \leq -F_{-2k} \text{ ise}$$

$0 < \ell < k$ koşulunu sağlayan bazı ℓ tamsayıları için

$$0 \leq -F_{-2k+2\ell+2} < n - F_{-2k+1} \leq -F_{-2k+2\ell} \quad (2.11)$$

dir.

İspat

$$F_{-2k+1} < n \leq -F_{-2k} \quad (2.12)$$

olsun.

Eş. 2.12 nin her tarafına $-F_{-2k+1}$ eklersek ;

$$0 < n - F_{-2k+1} \leq -F_{-2k} - F_{-2k+1} \quad (2.13)$$

elde edilir.

Eş. 1.2 ve Eş. 1.7 den

$$-F_{-2k} - F_{-2k+1} = F_{2k} - F_{2k-1} = F_{2k-2} \quad (2.14)$$

yazabiliriz.

Eş. 2.14 ü, Eş. 2.13 de yerine yazarsak

$$0 < n - F_{-2k+1} \leq F_{2k-2} \quad (2.15)$$

bulunur.

Her pozitif p tamsayısı için

$$0 \leq F_{2m-4} < p \leq F_{2m-2} \quad (m \geq 2) \quad (2.16)$$

dir.

Eğer; $p = n - F_{-2k+1}$ alınırsa; $m + \ell = k + 1$ olacak şekilde $0 < \ell < k$ koşuluna uygun ℓ pozitif tamsayıları vardır.

$m = k - \ell + 1$ alınıp p ve m değerleri Eş. 2.16 da yerine konulursa;

$$0 \leq F_{2k-2\ell-2} < n - F_{-2k+1} \leq F_{2k-2\ell} \quad (2.17)$$

olur.

Eş. 2.17 için Eş. 1.7 yi kullanarak

$$0 \leq -F_{-2k+2\ell+2} < n - F_{-2k+1} \leq -F_{-2k+2\ell} \quad (2.18)$$

elde ederiz. ■

2.3. Ön Teorem [11]

$n < 0$, $k > 0$ olmak üzere

$$1 + F_{-2k} < n \leq -F_{-2k+1} \text{ ise}$$

$0 < \ell < k$ olacak şekilde bazı ℓ tamsayıları için;

$$0 \leq -F_{-2k+2\ell+2} < n - F_{-2k} \leq -F_{-2k+2\ell}$$

dir.

İspat

$$1 + F_{-2k} < n \leq -F_{-2k+1} \tag{2.19}$$

olsun.

Eş. 2.19 un her tarafına $-F_{-2k}$ eklersek;

$$1 < n - F_{-2k} \leq -F_{-2k+1} - F_{-2k} \tag{2.20}$$

elde edilir.

Eş. 1.2 ve Eş. 1.7 den

$$-F_{-2k+1} - F_{-2k} = -F_{2k-1} + F_{2k} = F_{2k} - F_{2k-1} = F_{2k-2} \tag{2.21}$$

yazabiliriz.

Eş. 2.21, Eş. 2.20 de yerine konulursa

$$1 < n - F_{-2k} \leq F_{2k-2}$$

bulunur.

Her pozitif p tamsayısı için

$$0 \leq F_{2m-4} < p \leq F_{2m-2} \quad (m \geq 2) \quad (2.22)$$

dir.

Eğer $p = n - F_{-2k}$ alınırsa; $m + \ell = k + 1$ olacak şekilde $0 < \ell < k$ koşuluna uygun ℓ pozitif tamsayıları vardır;

$m = k - \ell + 1$ alınıp p ve m değerleri Eş. 2.22 de yerlerine yazılırsa;

$$0 \leq F_{2k-2\ell-2} < n - F_{-2k} \leq F_{2k-2\ell} \quad (2.23)$$

Eş. 1.7, Eş. 2.23 de kullanılarak

$$0 \leq -F_{-2k+2\ell+2} < n - F_{-2k} \leq -F_{-2k+2\ell}$$

elde edilir. ■

2.4. Ön Teorem [11]

$n < 0$, $k > 0$ olmak üzere

$$-F_{-2k-1} \leq n < F_{-2k} - 1 \text{ ise}$$

$0 < \ell < k$ koşulunu sağlayan bazı ℓ tamsayıları için;

$$-F_{-2k+2\ell-1} \leq n - F_{-2k} < -F_{-2k+2\ell+1} < 0$$

dır.

İspat

$$-F_{-2k-1} \leq n < F_{-2k} - 1 \quad (2.24)$$

olsun.

Eş. 2.24 ün her tarafını -1 ile çarpıp daha sonra F_{-2k} eklersek;

$$1 < F_{-2k} - n \leq F_{-2k} + F_{-2k-1} \quad (2.25)$$

elde edilir.

Eş. 1.2 ve Eş. 1.7 kullanılarak

$$F_{-2k} + F_{-2k-1} = F_{2k+1} - F_{2k} = F_{2k-1} \quad (2.26)$$

yazabiliriz.

Eş. 2.26 yı Eş. 2.25 de yerine koyarsak

$$1 < F_{-2k} - n \leq F_{2k-1}$$

bulunur.

Her $p > 1$ tamsayısı için

$$0 < F_{2m-3} < p \leq F_{2m-1} \quad (2.27)$$

dir.

Eğer $p = F_{-2k}$ -n alınırsa; $m + \ell = k + 1$ olacak şekilde $0 < \ell < k$ koşuluna uyan ℓ pozitif tamsayıları vardır.

$m = k - \ell + 1$ alınıp p ve m değerleri Eş. 2.27 de yerlerine yazılırsa;

$$0 < F_{2k-2\ell-1} < F_{-2k} - n \leq F_{2k-2\ell+1} \quad (2.28)$$

olur.

Eş. 2.28 in her tarafı -1 ile çarpılır ve Eş. 1.7, Eş. 2.28 de kullanılırsa

$$-F_{-2k+2\ell-1} \leq n - F_{-2k} < -F_{-2k+2\ell+1} < 0$$

elde edilir. ■

2.3. Z Algoritması [11]

Bu algoritma; herhangi bir tamsayının Fibonacci Sayılarının toplamı olarak yazılabileceğini ifade eder.

1) Eğer $n = F_{-i}$ ise ; n tamsayısı Fibonacci sayısına eşit olduğundan bir şey yapılmasına gerek yoktur.

2) $n > 0$, $k > 0$ ve $F_{2k} < n < F_{2k+1}$ veya buna denk olarak $-F_{-2k} < n < F_{-2k-1}$ ise;

$n = F_{-2k-1} + (n - F_{-2k-1})$ yazılır ve $n - F_{-2k-1}$ için bu algoritma uygulanır.

3) $n > 0$, $k > 0$ için $F_{2k-1} < n < F_{2k}$ veya buna denk olarak $F_{-2k+1} < n < F_{-2k}$ ise;
 $n = F_{-2k+1} + (n - F_{-2k+1})$ yazılır ve $n - F_{-2k+1}$ için algoritma uygulanır.

4) $n < 0$ ve $k > 0$ için $F_{2k-1} < -n < F_{2k}$ veya buna denk olarak $F_{-2k} < n < -F_{-2k+1}$ ise;
 $n = F_{-2k} + (n - F_{-2k})$ yazılır ve $n - F_{-2k}$ için algoritma uygulanır.

5) $n < 0$ ve $k > 0$ için $F_{2k} < -n < F_{2k+1}$ veya buna denk olarak $-F_{-2k-1} < n < -F_{-2k}$ ise;
 $n = F_{-2k} + (n - F_{-2k})$ yazılır ve $n - F_{-2k}$ için algoritma uygulanır.

Bu algoritma $n - F_{-i_1} - F_{-i_2} - \dots - F_{-i_m} = F_{-i_{m+1}}$ olduğunda sona erer.

2.5. Ön Teorem [11]

Z algoritması, sıfırdan farklı her n tamsayısının $i \leq 0$ ve herhangi iki i indisi arasındaki fark 2 den büyük veya eşit olmak üzere, F_i Fibonacci sayılarının toplamı olarak yazılabileceğini ortaya çıkarır.

İspat

Sıfırdan farklı bir n tamsayısı alalım ve her j indisi için $n \neq F_{-j}$ olsun.

1) n sayısına Z algoritmasının ikinci adımını uyguladığımızda, her j indisi için $n - F_{-2k-1} \neq F_{-j}$ ise Ön Teorem 2.1 i kullanarak

$$-F_{-2k+2\ell-1} < n - F_{-2k-1} < -F_{-2k+2\ell+1} < 0 \quad (\ell > 0) \quad (2.29)$$

yazılır.

$n - F_{-2k-1} < 0$ olduğundan Eş. 2.29. için Z algoritmasının 4. veya 5.adımı uygulanır. İki durum söz konusudur:

$$F_{-2k+2\ell} < n - F_{-2k-1} < -F_{-2k+2\ell+1} \quad (2.30)$$

$$-F_{-2k+2\ell-1} < n - F_{-2k-1} < F_{-2k+2\ell} \quad (2.31)$$

Eş. 2.30 için Z algoritmasının 4.adımı uygulanır, Eş. 2.31 için de Z algoritmasının 5.adımı uygulanırsa, iki durum için de

$$n - F_{-2k-1} - F_{-2k+2\ell}$$

ifadesine ulaşılır.

2) n sayısına Z algoritmasının 3.adımını uyguladığımızda, her j indisi için $n - F_{-2k+1} \neq F_{-j}$ ise Ön Teorem 2.2 yi kullanarak

$$0 < -F_{-2k+2\ell+2} < n - F_{-2k+1} < -F_{-2k+2\ell} \quad (\ell > 0) \quad (2.32)$$

$n - F_{-2k+1} > 0$ olduğundan Eş. 2.32 için Z algoritmasının 2. veya 3. adımı uygulanır. İki durum söz konusudur.

$$-F_{-2k+2\ell+2} < n - F_{-2k+1} < F_{-2k+2\ell+1} \quad (2.33)$$

$$F_{-2k+2\ell+1} < n - F_{-2k+1} < -F_{-2k+2\ell} \quad (2.34)$$

Eş. 2.33 için Z algoritmasının 2.adımı uygulanır ve Eş. 2.34 için de algoritmanın 3.adımı uygulanırsa, her iki durum için de

$$n - F_{-2k+1} - F_{-2k+2\ell+1}$$

ifadesine ulaşılır.

3) n sayısına Z algoritmasının 4.adımı uyguladığımızda her j indisi için $n - F_{-2k} \neq F_{-j}$ ise Ön Teorem 2.3 kullanılarak;

$$0 \leq -F_{-2k+2\ell+2} < n - F_{-2k} < -F_{-2k+2\ell}, \quad (\ell > 0) \quad (2.35)$$

yazılır.

$n - F_{-2k} > 0$ olduğundan; Eş. 2.35 için algoritmanın 2. veya 3.maddesi uygulanır. İki durum söz konusu olur:

$$-F_{-2k+2\ell+2} < n - F_{-2k} < F_{-2k+2\ell+1} \quad (2.36)$$

$$F_{-2k+2\ell+1} < n - F_{-2k} < -F_{-2k+2\ell} \quad (2.37)$$

Eş. 2.36 için algoritmanın 2.adımı ve Eş. 2.37 için algoritmanın 3.adımı uygulanırsa her iki durum için de

$$n - F_{-2k} - F_{-2k+2\ell+1}$$

ifadesine ulaşılır.

4) n sayısına Z algoritmasının 5.adımı uygularsak, her j indisi için $n - F_{-2k} \neq F_{-j}$ ise Ön Teorem 2.4 ü kullanarak;

$$-F_{-2k+2\ell-1} < n - F_{-2k} < -F_{-2k+2\ell+1} < 0 \quad (\ell > 0) \quad (2.38)$$

elde edilir.

$n - F_{-2k} < 0$ olduğundan; Eş. 2.38 için algoritmanın 4. veya 5.adımı uygulanır.

İki durum söz konusu olur:

$$F_{-2k+2\ell} < n - F_{-2k} < -F_{-2k+2\ell+1} \quad (2.39)$$

$$-F_{-2k+2\ell-1} < n - F_{-2k} < F_{-2k+2\ell} \quad (2.40)$$

Eş. 2.39 için algoritmanın 4.adımı ve Eş. 2.40 için de 5.adımı uygulanırsa, her iki durum için de

$$n - F_{-2k} - F_{-2k+2\ell}$$

ifadesine ulaşılır.

Böylece algoritma bir defa uygulandığında $n - F_{-i}$ ($i > 0$) ifadesine ulaşılırken, ikinci defa uygulandığında $n - F_{-i} - F_{-i+p}$ ifadesine ulaşılır.

Burada $p \geq 2$ ve $-i+p < 0$ dır.

Algoritmanın sonraki kısımlarında da benzer uygulamalar yapıldığında; indisleri arasındaki fark en az 2 olan Fibonacci sayıları elde edilmiş olur. ■

2.6. Ön Teorem [11]

F_n , n. Fibonacci sayısını göstermek üzere

$$\sum_{i=1}^k F_{-2i} = 1 - F_{-2k-1} \quad (2.41)$$

dir.

İspat

İspatı tümevarımla yapalım. $k=1$ için doğru olduğu,

$$F_{-2} = 1 - F_{-3} = -1$$

eşitliğinden görülür.

k için doğru olduğunu kabul edelim. Yani,

$$\sum_{i=1}^k F_{-2i} = 1 - F_{-2k-1}$$

olsun.

Şimdi de Eş. 2.41 in $k+1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$\sum_{i=1}^{k+1} F_{-2i} = F_{-2} + F_{-4} + \dots + F_{-2k} + F_{-2k-2}$$

$$= \sum_{i=1}^k F_{-2i} + F_{-2k-2}$$

$$= 1 - F_{-2k-1} + F_{-2k-2}$$

$$= 1 - F_{2k+1} - F_{2k+2}$$

$$= 1 - (F_{2k+2} + F_{2k+1})$$

$$= 1 - F_{2k+3}$$

$$= 1 - F_{-2k-3}$$

bulunur. ■

2.7. Ön Teorem [11]

F_n , n. Fibonacci sayısını göstermek üzere

$$\sum_{i=1}^k F_{-2i+1} = -F_{-2k} \quad (2.42)$$

dır.

İspat

İspatı tümevarımla yapalım. $k=1$ için doğru olduğu,

$$F_{-1} = -F_{-2} = 1$$

eşitliğinden görülür.

Eş. 2.42 nin k için doğru olduğunu kabul edelim.

$$\sum_{i=1}^k F_{-2i+1} = -F_{-2k}$$

olsun.

Şimdi de Eş. 2.42 nin $k+1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$\sum_{i=1}^{k+1} F_{-2i+1} = F_{-1} + F_{-3} + \dots + F_{-2k+1} + F_{-2(k+1)+1}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^k F_{-2i+1} + F_{-2k-1} \\
&= -F_{-2k} + F_{-2k-1} \\
&= F_{2k} + F_{2k+1} \\
&= F_{2k+2} \\
&= -F_{-2k-2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ispatı tamamlar. ■

2.8. Ön Teorem [11]

F_n , n. Fibonacci sayısını göstermek üzere,

$$\sum_{i=1}^k F_{-i} = 1 - F_{-k+1} \quad (2.43)$$

dir.

İspat

İspatı tümevarımla yapalım. $k=1$ için doğru olduğu,

$$F_{-1} = 1 - F_0 = 1$$

eşitliğinden görülür.

Eş. 2.43 ün k için doğru olduğunu kabul edelim. Yani,

$$\sum_{i=1}^k F_{-i} = 1 - F_{-k+1}$$

olsun.

Şimdi de Eş. 2.43 ün $k+1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} F_{-i} &= F_{-1} + F_{-2} + \dots + F_{-k} + F_{-k-1} \\ &= \sum_{i=1}^k F_{-i} + F_{-k-1} \\ &= 1 - F_{-k+1} + F_{-k-1}\end{aligned}$$

elde edilir.

k nın tek ve çift olmasına göre 2 durum söz konusudur.

1.Durum : k tek ise

$-k+1$ ve $-k-1$ indisleri çift olacağından Eş. 1.7 den ve Eş. 1.2 den

$$1 - F_{-k+1} + F_{-k-1} = 1 + F_{k-1} - F_{k+1}$$

$$= 1 - (F_{k+1} - F_{k-1})$$

$$= 1 - F_k$$

$$= 1 - F_{-k}$$

yazılır.

2.Durum : k çift ise;

$-k+1$ ve $-k-1$ indisleri tek sayı olacağından Eş. 1.7 ve Eş. 1.2 den

$$1 - F_{-k+1} + F_{-k-1} = 1 - F_{k-1} + F_{k+1}$$

$$= 1 + F_{k+1} - F_{k-1}$$

$$= 1 + F_k$$

$$= 1 - F_{-k}$$

bulunur.

Her iki durumda da

$$\sum_{i=1}^{k+1} F_{-i} = 1 - F_{-k}$$

elde edilir ki bu ispatı tamamlar. ■

2.2. Teorem [11]

$i_1 > i_2 > \dots > i_h > 0$ ve $0 < j < h$ için; $i_j - i_{j+1} \geq 2$ olmak üzere

i) i_1 tek ise

$$-F_{-i_1+1} < \sum_{k=1}^h F_{-i_k} \leq -F_{-i_1-1} \quad (2.44)$$

ii) i_1 çift ise

$$-F_{-i_1-1} < \sum_{k=1}^h F_{-i_k} \leq -F_{-i_1+1} \quad (2.45)$$

dır.

İspat

i) Eğer i_1 tek ise Ön Teorem 2.5 ve Ön Teorem 2.6 dan yararlanarak;

$$F_{-i_1} + F_{-i_1+3} + F_{-i_1+5} + \dots + F_{-2} \leq \sum_{k=1}^h F_{-i_k} \leq F_{-i_1} + F_{-i_1+2} + \dots + F_{-1}$$

$$F_{-i_1} + \sum_{k=1}^{\frac{(i_1-3)}{2}} F_{-2k} \leq \sum_{k=1}^h F_{-i_k} \leq \sum_{k=1}^{\frac{(i_1+1)}{2}} F_{-2k+1}$$

$$F_{-i_1} + 1 - F_{-i_1+2} \leq \sum_{k=1}^h F_{-i_k} \leq -F_{-i_1-1}$$

$$1 + F_{i_1} - F_{i_1-2} \leq \sum_{k=1}^h F_{-i_k} \leq -F_{-i_1-1}$$

$$1 + F_{i_1-1} = 1 - F_{-i_1+1} \leq \sum_{k=1}^h F_{-i_k} \leq -F_{-i_1-1}$$

$$-F_{-i_1+1} < \sum_{k=1}^h F_{-i_k} \leq -F_{-i_1-1}$$

bulunur.

ii) Eğer i_1 çift ise Ön Teorem 2.5 ve Ön Teorem 2.6 dan yararlanılarak

$$F_{-i_1} + F_{-i_1+2} + \dots + F_{-2} \leq \sum_{k=1}^h F_{-i_k} \leq F_{-i_1} + F_{-i_1+3} + \dots + F_{-3} + F_{-1}$$

$$\sum_{k=1}^{\frac{i_1}{2}} F_{-2k} \leq \sum_{k=1}^h F_{-i_k} \leq F_{-i_1} + \sum_{k=1}^{\frac{(i_1-2)}{2}} F_{-2k+1}$$

$$1 - F_{-i_1-1} \leq \sum_{k=1}^h F_{-i_k} \leq -F_{-i_1} - F_{-i_1+2}$$

$$F_{-i_1-1} < \sum_{k=1}^h F_{-i_k} \leq -F_{-i_1+1}$$

bulunur. ■

2.3. Teorem [11,12]

Z algoritması her n tamsayısının $i \leq 0$ olmak üzere birbirinden farklı F_i Fibonacci sayılarının toplamı olarak gösteriminin tek türlü belirli olduğunu ifade eder.

İspat

Eğer $n=0$ ise $n=F_0$ olur.

$n \neq 0$ ise Ön Teorem 2.5 den yararlanarak n tamsayısı aşağıdaki formda yazılabilir.

$$n = \sum_{k=1}^h F_{-i_k} \quad (i_k \geq i_{k+1} + 2) \quad (2.46)$$

Eğer bu gösterim tek türlü belirli olmasaydı

$$n = \sum_{k=1}^m F_{-j_k} \quad (j_k \geq j_{k+1} + 2) \quad (m < h) \quad (2.47)$$

olacak şekilde n tamsayısının yukarıdaki gibi bir gösterimi daha olurdu.

$-i_p$ ve $-j_p$ birbirinden farklı olan ilk indisler olsun ve $i_p > j_p$ olduğunu kabul edelim. Buradan

$$n - F_{-i_1} - F_{-i_2} - \dots - F_{-i_{(p-1)}} = \sum_{k=p}^h F_{-i_k} = \sum_{k=p}^m F_{-j_k} \quad (2.48)$$

olur.

1) i_p ve j_p tek ise Eş. 2.44 kullanılarak

$$\sum_{k=p}^h F_{-i_k} > -F_{-i_p+1} \text{ ve } -F_{-j_p-1} \geq \sum_{k=p}^m F_{-j_k}$$

yazılır.

Eş. 2.48 den

$$-F_{-j_p-1} \geq \sum_{k=p}^m F_{-j_k} > -F_{-i_p+1} \quad (2.49)$$

bulunur.

Eş. 2. 49 dan

$$-F_{-j_p-1} > -F_{-i_p+1} \quad (2.50)$$

elde edilir.

$$i_p - 2 \geq j_p \quad (2.51)$$

olduğundan;

Eş. 2.51 in her tarafı eksi ile çarpıp -1 eklersek

$$-i_p + 1 \leq -j_p - 1 \quad (2.52)$$

elde edilir.

i_p ve j_p tek olduklarından; $-i_p + 1$ ve $-j_p - 1$ çifttir ve Eş. 2.52 den

$$F_{-i_p+1} \leq F_{-j_p-1} \quad (2.53)$$

olur.

Eş. 2.53 ün her tarafı -1 ile çarpılırsa

$$-F_{-i_p+1} \geq -F_{-j_p-1} \quad (2.54)$$

elde edilir ki bu Eş. 2.50 ile çelişir.

2) i_p tek ve j_p çift ise Eş. 2.44 ve Eş. 2.45 den

$$-F_{-i_p+1} < \sum_{k=p}^h F_{-i_k} \leq -F_{-i_p-1} \quad (2.55)$$

$$F_{i_p-1} < \sum_{k=p}^h F_{-i_k} \leq F_{i_p+1} \quad (2.56)$$

$$-F_{-j_p-1} < \sum_{k=p}^m F_{-j_k} \leq -F_{-j_p+1} \quad (2.57)$$

$$-F_{j_p+1} < \sum_{k=p}^m F_{-j_k} \leq -F_{j_p-1} \quad (2.58)$$

Eş. 2.55 ve Eş. 2.56 dan

$$\sum_{k=p}^h F_{-i_k} > 0 \quad (2.59)$$

olduğu görülür.

Eş. 2.57 ve Eş. 2.58 den

$$\sum_{k=p}^m F_{-j_k} < 0 \quad (2.60)$$

elde edilir ki Eş. 2.59 ve Eş. 2.60, Eş. 2.48 ile çelişir.

3) i_p çift ve j_p tek ise Eş. 2.44 ve Eş. 2.45 kullanılarak aynı yöntemle

$\sum_{k=p}^h F_{-i_k}$ toplamının negatif ve $\sum_{k=p}^m F_{-j_k}$ toplamının pozitif olduğu görülür.

Bu ise Eş. 2.48 ile çelişir.

4) i_p ve j_p nin her ikisi de çift ise Eş. 2.45 kullanılarak

$$\sum_{k=p}^h F_{-i_k} \leq -F_{-i_p+1} \quad (2.61)$$

ve

$$-F_{-j_p-1} < \sum_{k=p}^m F_{-j_k} \quad (2.62)$$

yazılır.

Eş. 2.61 ve Eş. 2.62 kullanılarak, Eş. 2.48 den

$$-F_{-j_p-1} < \sum_{k=p}^m F_{-j_k} \leq -F_{-i_p+1} \quad (2.63)$$

bulunur.

Eş. 2.63 den

$$-F_{-j_p-1} < -F_{-i_p+1} \quad (2.64)$$

elde edilir.

i_p ve j_p çift olduğundan $-i_p+1$ ve $-j_p-1$ tektir.

Eş. 2.52 den

$$F_{-i_p+1} \geq F_{-j_p-1} \quad (2.65)$$

ve

Eş. 2.65 den

$$-F_{-i_p+1} \leq -F_{-j_p-1} \quad (2.66)$$

elde edilir.

Ancak Eş. 2.66 ve Eş. 2.64 birbiriyle çelişir.

Öyleyse $1 \leq k \leq m$ koşulunu sağlayan k indisleri için

$$i_k = j_k$$

olmalıdır.

$m < h$ olduğunu varsaydığımızdan ve

$$n = \sum_{k=1}^m F_{-j_k} = \sum_{k=1}^h F_{-i_k}$$

kabulümüz gereği

$$\sum_{k=m+1}^h F_{-i_k} = 0$$

olmalıdır.

$h > m+1$ ise ve eğer i_{m+1} tek ise Eş. 2.44 den

$$-F_{-i_{m+1}+1} < \sum_{k=m+1}^h F_{-i_k} = 0$$

bulunur ki bu imkansızdır.

Eğer i_{m+1} çift ise Eş. 2.45 den

$$\sum_{k=m+1}^h F_{-i_k} = 0 \leq -F_{-i_{m+1}+1}$$

bulunur ki bu imkansızdır.

$h=m+1$ olsaydı;

$F_{-i_h}=0$ olurdu ki bu da $i_h > 0$ olmasıyla çelişir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Örnek

$$\begin{aligned}
 792 &= F_{-15} + (792 - F_{-15}) \\
 &= F_{-15} + (792 - 610) \\
 &= F_{-15} + 182 \\
 &= F_{-15} + F_{-13} + (182 - F_{-13}) \\
 &= F_{-15} + F_{-13} + (182 - 233) \\
 &= F_{-15} + F_{-13} + (-51) \\
 &= F_{-15} + F_{-13} + F_{-10} + (-51 - F_{-10}) \\
 &= F_{-15} + F_{-13} + F_{-10} + (-51 + 55) \\
 &= F_{-15} + F_{-13} + F_{-10} + 4 \\
 &= F_{-15} + F_{-13} + F_{-10} + F_{-5} + (4 - F_{-5}) \\
 &= F_{-15} + F_{-13} + F_{-10} + F_{-5} + (4 - 5) \\
 &= F_{-15} + F_{-13} + F_{-10} + F_{-5} + F_{-2}
 \end{aligned}$$

Özetle; bu bölümde pozitif veya negatif her tamsayının $i \leq 0$ olmak üzere ardışık olmayan F_i Fibonacci sayılarının toplamı olarak tek türlü ifade edilebileceği gösterilmiş olur.

3. PELL SAYILARI İLE TAMSAYILARIN ZECKENDORF GÖSTERİMLERİ

Bu bölümde tamsayıların Zeckendorf gösterimlerinin Pell sayıları kullanılarak ifade edilebileceğini göstereceğiz. Ayrıca Fibonacci Sayıları için Eş.1.1 de verilen koşulun Pell sayılarının indirgeme bağıntısındaki P_n in katsayısından dolayı değişikliğe uğrayacağını göreceğiz.

3.1. Ön Teorem [7]

P_n , n. Pell sayısını göstermek üzere

$$\sum_{i=1}^k P_{-2i} = \frac{1 - P_{-2k-1}}{2} \quad (3.1)$$

dir.

İspat

İspatı tümevarımla yapalım. $k=1$ için Eş. 3.1 in doğru olduğu

$$P_{-2} = \frac{1 - P_{-3}}{2} = -2$$

eşitliğinden görülür.

k için Eş. 3.1 in doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$\sum_{i=1}^k P_{-2i} = \frac{1 - P_{-2k-1}}{2}$$

olsun.

Şimdi de Eş. 3.1 in $k+1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{k+1} P_{-2i} &= P_{-2} + P_{-4} + \dots + P_{-2k} + P_{-2(k+1)} \\
 &= \sum_{i=1}^k P_{-2i} + P_{-2k-2} \\
 &= \frac{1 - P_{-2k-1}}{2} + P_{-2k-2} \\
 &= \frac{1 - P_{-2k-1} + 2P_{-2k-2}}{2}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

olur.

Eş. 1.13 kullanılarak

$$P_{-2k-1} = P_{2k+1} \text{ ve } P_{2k-2} = -P_{2k+2} \tag{3.3}$$

olduğu görülür.

Eş. 3.3, Eş. 3.2 de yerine yazılırsa, Eş. 1.8 ve Eş. 1.13 kullanılarak

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{k+1} P_{-2i} &= \frac{1 - P_{2k+1} - 2P_{2k+2}}{2} \\
 &= \frac{1 - (2P_{2k+1} + 2P_{2k+2})}{2} \\
 &= \frac{1 - P_{2k+3}}{2} \\
 \sum_{i=1}^{k+1} P_{-2i} &= \frac{1 - P_{-2k-3}}{2}
 \end{aligned}$$

bulunur. Bu ispatı tamamlar. ■

3.2. Ön Teorem [7]

P_n , n. Pell sayısını göstermek üzere

$$\sum_{i=1}^k P_{-2i+1} = \frac{-P_{-2k}}{2} \quad (3.4)$$

dır.

İspat

İspatı tümevarımla yapalım. $k=1$ için Eş. 3.4 ün doğru olduğu

$$P_{-1} = \frac{-P_{-2}}{2} = 1$$

eşitliğinden görülür.

k için Eş. 3.4 ün doğru olduğunu kabul edelim. Yani,

$$\sum_{i=1}^k P_{-2i+1} = \frac{-P_{-2k}}{2}$$

olsun.

Şimdi de Eş. 3.4 ün $k+1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} P_{-2i+1} &= P_{-1} + P_{-3} + \dots + P_{-2k+1} + P_{-2(k+1)+1} \\ &= \sum_{i=1}^k P_{-2i+1} + P_{-2k-1} \\ &= \frac{-P_{-2k}}{2} + P_{-2k-1} \end{aligned}$$

$$= \frac{-P_{-2k} + 2P_{-2k-1}}{2} \quad (3.5)$$

yazılır.

Eş. 1.13 kullanılarak

$$P_{-2k} = -P_{2k} \quad \text{ve} \quad P_{-2k-1} = P_{2k+1} \quad (3.6)$$

olduğu görülür.

Eş. 3.6, Eş. 3.5 de yerine yazılıp, Eş. 1.8 ve Eş. 1.13 kullanılarak

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} P_{-2i+1} &= \frac{P_{2k} + 2P_{2k+1}}{2} \\ &= \frac{P_{2k+2}}{2} \\ &= \frac{-P_{-2k-2}}{2} \end{aligned}$$

bulunur. Bu ispatı tamamlar. ■

3.3. Ön Teorem [7]

P_n , n. Pell sayısını göstermek üzere,

$$\sum_{i=1}^k P_{-i} = \frac{1 - P_{-k} - P_{-k-1}}{2} \quad (3.7)$$

dir.

İspat

İspatı tümevarımla yapalım. $k=1$ için Eş. 3.7 nin doğru olduğu

$$P_{-1} = \frac{1 - P_{-1} - P_{-2}}{2} = 1$$

eşitliğinden görülür.

k için Eş. 3.7 nin doğru olduğunu kabul edelim. Yani,

$$\sum_{i=1}^k P_{-i} = \frac{1 - P_{-k} - P_{-k-1}}{2}$$

olsun.

Şimdi de Eş. 3.7 nin $k+1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} P_{-i} &= P_{-1} + P_{-2} + P_{-3} + \dots + P_{-k} + P_{-(k+1)} \\ &= \sum_{i=1}^k P_{-i} + P_{-k-1} \\ &= \frac{1 - P_{-k} - P_{-k-1}}{2} + P_{-k-1} \\ &= \frac{1 - P_{-k} + P_{-k-1}}{2} \end{aligned} \tag{3.8}$$

elde edilir.

k nin tek veya çift olmasına göre iki durum söz konusudur:

1.Durum: k tek ise

Eş. 1.13 kullanılarak

$$P_{-k} = P_k \quad \text{ve} \quad P_{-k-1} = -P_{k+1} \quad (3.9)$$

olduğu görülür.

Eş. 3.9 , Eş. 3.6 de yerine yazılırsa, Eş. 1.8 ve Eş. 1.13 kullanılarak

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} P_{-i} &= \frac{1 - P_k - P_{k+1}}{2} \\ &= \frac{1 - (P_k + P_{k+1})}{2} \\ &= \frac{1 - (P_{k+2} - P_{k+1})}{2} \\ &= \frac{1 - P_{-k-2} - P_{-k-1}}{2} \end{aligned}$$

bulunur.

2.Durum : k çift ise

Eş. 1.13 kullanılarak

$$P_{-k} = -P_k \quad \text{ve} \quad P_{-k-1} = P_{k+1} \quad (3.10)$$

olduğu görülür.

Eş. 3.10, Eş. 3.9 da yerine yazılıp, Eş. 1.8 ve Eş. 1.13 kullanılarak

$$\sum_{i=1}^{k+1} P_{-i} = \frac{1 + P_k + P_{k+1}}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} P_{-i} = \frac{1 + (P_{k+2} - P_{k+1})}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} P_{-i} = \frac{1 - P_{-k-2} - P_{-k-1}}{2}$$

bulunur. Bu ispatı tamamlar. ■

Şimdi de, pozitif çift indisli, pozitif tek indisli ve pozitif indisli ve Pell sayılarının toplamını ifade eden ön teoremleri verelim. Bunların ispatları negatif indisli Pell sayıları için yaptığımız ispatlara benzer biçimde tümevarımla yapılabilir.

3.4. Ön Teorem [7]

P_n , n. Pell sayısını göstermek üzere

$$\sum_{i=1}^k P_{2i} = \frac{P_{2k+1} - 1}{2} \quad (3.11)$$

dır.

3.5. Ön Teorem [7]

P_n , n. Pell sayısını göstermek üzere

$$\sum_{i=1}^k P_{2i-1} = \frac{P_{2k}}{2} \quad (3.12)$$

dır.

3.6. Ön Teorem [7]

P_n , n. Pell sayısını göstermek üzere

$$\sum_{i=1}^k P_i = \frac{P_{n+1} + P_n - 1}{2} \quad (3.13)$$

dır.

3.1. Pozitif İndisli Pell Sayıları İle Pozitif Tamsayıların Zeckendorf Gösterimleri

Bu kısımda her pozitif tamsayının $n > 0$ olmak üzere P_n Pell sayılarının toplamı biçiminde gösterilebileceğini, bu gösterimin tek olduğunu ifade edeceğiz ve pozitif tamsayıları, pozitif indisli Pell sayılarının toplamı biçiminde ifade etmemizi kolaylaştıracak olan “Greedy Algoritması” nı ifade edeceğiz.

3.1. Teorem (Teklik Teoremi) [7,13]

Herhangi bir pozitif N tamsayısı

$$\alpha_i = 0, 1 \text{ veya } 2 \text{ ve } \alpha_i = 2 \Rightarrow \alpha_{i-1} = 0 \quad (i \geq 1) \quad (3.14)$$

olmak üzere,

$$N = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \cdot P_i \quad (3.15)$$

biçiminde tek türlü yazılabilir.

İspat

N pozitif tamsayısı, Eş. 3.14 de verilen koşulu sağlasın ve N nin Eş. 3.15 deki formda iki farklı gösterimi olduğunu varsayalım.

$$N = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot P_i = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \cdot P_i \quad (3.16)$$

olsun.

k tamsayısı;

$$a_i \neq b_i \quad (3.17)$$

koşulunu sağlayan ilk i indisi olsun.

Bu durumda

$$\begin{cases} a_k = 2, & b_k = 0 \text{ veya } 1 \\ a_k = 1, & b_k = 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

durumları söz konusudur.

a_k ve b_k nın yer değiştirdiği durumda da,

$$\begin{cases} b_k = 2, & a_k = 0 \text{ veya } 1 \\ b_k = 1, & a_k = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

olabilir.

Eş. 3.18 ve Eş. 3.19 birbirine denktir.

1.Durum : $a_k = 2$ ise

Bu durumda Eş. 3.18 den görüldüğü üzere $b_k = 0$ veya 1 olur. Eş. 3.14 den $a_k = 2$ olduğunda $a_{k-1} = 0$ olmalıdır. Ve Eş. 3.17 den k tamsayısı a_i ve b_i katsayılarının birbirinden farklı olduğu ilk i indisi olduğunda açıkça k dan küçük olan tüm indisler için katsayılar birbirine eşit olur ki

$$a_{k-1} = b_{k-1} = 0$$

yazılır.

$a_k = 2$ olduğundan

$$\sum_{i=1}^k a_i \cdot P_i = a_1 P_1 + a_2 P_2 + \dots + a_k P_k$$

$$= a_1 P_1 + a_2 P_2 + \dots + 2P_k \geq 2P_k$$

Yani;

$$\sum_{i=1}^k a_i \cdot P_i \geq 2P_k \quad (3.20)$$

dır.

Fakat

$$\sum_{i=1}^k b_i \cdot P_i = \begin{cases} b_1 P_1 + b_2 P_2 + \dots + b_{k-2} P_{k-2} + b_{k-1} P_{k-1} & ; b_k = 0 \text{ ise} \\ b_1 P_1 + b_2 P_2 + \dots + b_{k-2} P_{k-2} + b_{k-1} P_{k-1} + P_k & ; b_k = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} <2(P_{k-1}+P_{k-3}+\dots+P_3+P_1) \quad ; \quad k \text{ çift} \\ <2(P_{k-1}+P_{k-3}+\dots+P_4+P_2) \quad ; \quad k \text{ tek} \end{aligned} \right\} \quad b_k=0 \text{ ise} \quad (3.21)$$

Eş. 3.21 için Ön Teorem 3.4 ve Ön Teorem 3.5 kullanılarak

$$\left. \begin{aligned} <2. \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} P_{2i-1} \quad ; \quad k \text{ çift ise,} \\ <2. \sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} P_{2i} \quad ; \quad k \text{ tek ise,} \end{aligned} \right\} \quad b_k=0 \text{ ise} \quad (3.22)$$

$$\left. \begin{aligned} < P_k \quad ; \quad k \text{ çift ise} \\ < P_k -1 \quad ; \quad k \text{ tek ise} \end{aligned} \right\} \quad b_k=0 \text{ ise} \quad (3.23)$$

bulunur.

Eş. 3.23 de, $b_k=0$ durumu için bulduğumuz değerlere P_k eklersek

$$\left. \begin{aligned} <2P_k \quad ; \quad k \text{ çift ise} \\ <2P_k -1 \quad ; \quad k \text{ tek ise} \end{aligned} \right\} \quad b_k=1 \text{ ise} \quad (3.24)$$

elde edilir. Bu durumda

Eş. 3.23 ve Eş. 3.24, Eş. 3.20 ile çelişir.

2.Durum : $a_k = 1$ ise

Bu durumda; Eş. 3.18 den $b_k = 0$ dır.

$a_k = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k a_i P_i &= a_1 P_1 + a_2 P_2 + \dots + a_k P_k \\ &= a_1 P_1 + a_2 P_2 + \dots + P_k \geq P_k \end{aligned}$$

Yani;

$$\sum_{i=1}^k a_i P_i \geq P_k \quad (3.25)$$

olur.

Fakat $b_k = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k b_i P_i &= b_1 P_1 + b_2 P_2 + \dots + b_{k-1} P_{k-1} \\ &\leq 2(P_{k-1} + P_{k-3} + \dots + P_3 + P_1) \quad ; \quad k \text{ çift ise;} \\ &\leq 2(P_{k-1} + P_{k-3} + \dots + P_4 + P_2) \quad ; \quad k \text{ tek ise;} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Eş. 3.26 için Ön Teorem 3.4 ve Ön Teorem 3.5 kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\leq 2 \cdot \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} P_{2i-1} \quad ; \quad k \text{ çift ise} \\
&\leq 2 \cdot \sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} P_{2i} \quad ; \quad k \text{ tek ise} \\
&\leq P_k \quad ; \quad k \text{ çift ise} \\
&\leq P_k - 1 \quad ; \quad k \text{ tek ise}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

bulunur. Bu durumda

Eş. 3.27 ile Eş. 3.25 çelişir.

Böylece; $a_i \neq b_i$ koşulunu sağlayan bir i indisinin olmadığı gösterilmiş olur.

Dolayısıyla; Eş. 3.14 koşulu altında Eş. 3.15 gösteriminin tek türlü belirli olduğu ispatlanmış olur.

Böylece; bu teorem $\alpha_i=0,1$ veya 2 ve $\alpha_i=2 \Rightarrow \alpha_{i-1}=0$ olacak şekilde; her pozitif N tamsayısı ile ilişkili olan bir $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots\}$ dizisinin var olduğunu gösterir.

Tamsayıların Pell sayıları ile gösterimindeki Eş. 3.14 koşulu, bu gösterimdeki herhangi iki Pell sayısının toplamının başka bir Pell sayısı ile ifade edilmemesini sağlar.

3.2. Greedy Algoritması [7,14]

Bu algoritmada önce verilen pozitif N tamsayısını aşmayan en büyük Pell sayısı N tamsayısından çıkartılır. Daha sonra sıfıra ulaşıncaya kadar aynı yöntem uygulanmaya devam edilir.

i tamsayısı N pozitif tamsayısından küçük olan en büyük Pell sayısının indisini göstermek üzere $N - P_i \geq 0$ ve $i=0$ ise $N=0$ olduğu açıktır.

Örnek [7]

$N=390$ olsun.

390 sayısını aşmayan en büyük Pell sayısı P_7 dir. ($P_7=169$)

Şimdi 390 sayısından P_7 yi çıkarıp bulduğumuz sonuç için de aynı yöntemi uygulayalım.

$$390 - P_7 = 221$$

Benzer biçimde 221 sayısını aşmayan en büyük Pell sayısı 221 sayısından çıkarılır ve sıfıra ulaşıncaya kadar bu işleme devam edilirse;

$$221 - P_7 = 52$$

$$52 - P_5 = 23$$

$$23 - P_4 = 11$$

$$11 - P_3 = 6$$

$$6 - P_3 = 1$$

$$1 - P_1 = 0$$

Böylece;

$$390 - 2P_7 - P_5 - P_4 - 2P_3 - P_1 = 0$$

olduğu bulunur. Buradan

$$390 = 2P_7 + P_5 + P_4 + 2P_3 + P_1$$

elde edilir.

Bu algoritma her N pozitif tamsayısını, pozitif Pell sayılarının toplamı olarak ifade etmemizde kolaylık sağlar.

Açıkça görülür ki; N pozitif tamsayısı için

$$\varepsilon_i = 0, 1 \text{ veya } 2 \text{ ve } \varepsilon_i = 2 \Rightarrow \varepsilon_{i-1} = 0 \text{ olmak üzere}$$

$$N - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \cdot P_i = 0 \quad (3.28)$$

şeklindeki gösterim geçerlidir [7, 15].

Bu gösterimin tek olmadığını varsayalım. Yani N pozitif tamsayısının;

$$N - \sum_{i=1}^m \delta_i \cdot P_i = 0 \quad (3.29)$$

$$\delta_i = 0, 1 \text{ veya } 2 \text{ ve } \delta_i = 2 \Rightarrow \delta_{i-1} = 0$$

koşulunu sağlayan başka bir gösteriminin olduğunu kabul edelim.

k tamsayısı $\varepsilon_i \neq \delta_i$ olacak biçimdeki ilk i indisi olsun. ($i \geq 1$)

Daha sonra $\sum_{i=1}^k \varepsilon_i \cdot P_i$ ve $\sum_{i=1}^k \delta_i \cdot P_i$ toplamalarını ele alalım.

Teorem 3.1. deki gibi $\varepsilon_i \neq \delta_i$ koşulunu sağlayan bir i indisi yoktur. Sonuç olarak $m=n$ dir. Dolayısıyla Eş. 3.28 deki gösterim tektir.

Daha öncede belirttiğimiz gibi $\varepsilon_i=2 \Rightarrow \varepsilon_{i-1}=0$ koşulu Pell sayılarının indirgeme bağıntısını göz önüne aldığımızda; P_i nin toplamda bulunmamasını önler [7,16].

Çünkü; $\varepsilon_i=2$ iken $\varepsilon_{i-1} \neq 0$ olsaydı; $\varepsilon_{i-1}=1$ veya 2 olurdu.

$$\varepsilon_{i-1}=1 \text{ için } \varepsilon_{i-1} P_{i-1} + \varepsilon_i P_i = P_{i-1} + 2P_i = P_{i+1} \quad (3.30)$$

$$\varepsilon_{i-1}=2 \text{ için } \varepsilon_{i-1} P_{i-1} + \varepsilon_i P_i = 2P_{i-1} + 2P_i = P_{i-1} + P_{i+1} \quad (3.31)$$

olurdu. Eş. 3.30 ve Eş. 3.31 den görüldüğü gibi P_i sayısı toplamda bulunmamış olur.

3.3. Negatif İndisli Pell Sayıları İle Tamsayıların Zeckendorf Gösterimleri

Bu kısımda; ikinci bölümde Fibonacci sayıları için kullandığımız yöntemleri uygulayarak pozitif veya negatif her tamsayının negatif indisli Pell sayılarının toplamı olarak tek türlü ifade edilebileceği gösterilecektir.

Ancak, Pell sayılarının indirgeme bağıntısındaki 2 katsayısının varlığı sebebiyle, önemli değişiklikler ortaya çıkacaktır.

Negatif veya pozitif tüm tamsayıların negatif indisli Pell sayılarının toplamı olarak ifade edilebileceğini gösterebilmek için ikinci bölümdeki gibi bir algoritma oluşturulacaktır.

3.2. Teorem [7]

$i_1 > i_2 > \dots > i_h > 0$ ve $0 < j < h$ için $i_j - i_{j+1} \geq 2$ olmak üzere

i) i_1 tek ise

$$-2 P_{-i_1+1} < 2 \sum_{k=1}^h P_{-i_k} \leq -P_{-i_1-1} \quad (3.32)$$

ii) i_1 çift ise

$$-P_{-i_1-1} < 2 \sum_{k=1}^h P_{-i_k} \leq -2 P_{-i_1+1} \quad (3.33)$$

dir.

İspat

i) i_1 tek ise, Ön Teorem 3.1 ve Ön Teorem 3.2 den yararlanarak

$$P_{-i_1} + 2(P_{-i_1+3} + \dots + P_{-2}) \leq 2 \sum_{k=1}^h P_{-i_k} \leq 2 P_{-i_1} + 2(P_{-i_1+2} + \dots + P_{-1})$$

$$P_{-i_1} + 2 \sum_{m=1}^{(i_1-3)/2} P_{-2m} \leq 2 \sum_{k=1}^h P_{-i_k} \leq 2 P_{-i_1} + 2 \sum_{m=1}^{(i_1-1)/2} P_{-2m+1}$$

$$P_{-i_1} + 1 - P_{-i_1+2} \leq 2 \sum_{k=1}^h P_{-i_k} \leq 2 P_{-i_1} - P_{-i_1+1}$$

$$1-2P_{-i_1+1} \leq 2 \sum_{k=1}^h P_{-i_k} \leq -P_{-i_1-1}$$

$$-2P_{-i_1+1} < 2 \sum_{k=1}^h P_{-i_k} \leq -P_{-i_1-1}$$

bulunur. ■

ii) i_1 çift ise Ön Teorem 3.1 ve Ön Teorem 3.2 den yararlanarak

$$2P_{-i_1} + 2(P_{-i_1+2} + \dots + P_{-2}) \leq 2 \sum_{k=1}^h P_{-i_k} \leq P_{-i_1} + 2(P_{-i_1+3} + \dots + P_{-1})$$

$$2P_{-i_1} + 2 \sum_{m=1}^{(i_1-2)/2} P_{-2m} \leq 2 \sum_{k=1}^h P_{-i_k} \leq P_{-i_1} + 2 \sum_{m=1}^{(i_1-2)/2} P_{-2m+1}$$

$$2P_{-i_1} + 1 - P_{-i_1+1} \leq 2 \sum_{k=1}^h P_{-i_k} \leq P_{-i_1} - P_{-i_1+2}$$

$$1 - P_{-i_1-1} \leq 2 \sum_{k=1}^h P_{-i_k} \leq -2P_{-i_1+1}$$

$$-P_{-i_1-1} < 2 \sum_{k=1}^h P_{-i_k} \leq -2P_{-i_1+1}$$

bulunur. ■

Örnek [7]

Eğer $i_1=7$ tek sayı ve $i_2=5$, $i_3=2$ olsun.

$$-2P_{-6} < 2(P_{-7} + P_{-5} + P_{-2}) \leq -P_{-8}$$

$$140 < 392 \leq 408$$

bulunur.

Eğer $i_1=6$ çift sayı ve $i_2=4$, $i_3=1$ olsun.

$$-P_{-7} < 2(P_{-6} + P_{-4} + P_{-1}) \leq -2P_{-5}$$

$$-169 < -162 \leq 58$$

bulunur.

3.7. Ön Teorem [7]

$n>0$, $k>0$ olmak üzere

$-P_{-2k} \leq n < P_{-2k-1} - 1$ ise ; $k > \ell \geq 0$ olacak şekildeki ℓ tamsayıları için

$$-P_{-2k+2\ell} - P_{-2k+2\ell-1} \leq n - P_{-2k-1} < -P_{-2k+2\ell+2} - P_{-2k+2\ell+1} < 0 \quad (3.34)$$

dır.

İspat

$$-P_{-2k} \leq n < P_{-2k-1} - 1 \quad (3.35)$$

olsun.

Eş. 3.35 in her tarafını -1 ile çarpıp daha sonra P_{-2k-1} eklersek;

$$1 < P_{-2k-1} - n \leq P_{-2k-1} + P_{-2k} \quad (3.36)$$

elde edilir.

Eş. 1.9 ve Eş. 1.14 kullanılarak

$$P_{-2k-1} + P_{-2k} = P_{2k+1} - P_{2k} \quad (3.37)$$

yazılabilir.

Eş. 3.37, Eş. 3.36 da yerine yazılırsa,

$$1 < P_{-2k-1} - n \leq P_{2k+1} - P_{2k} \quad (3.38)$$

bulunur.

p bir tamsayı ve $m \geq 2$ olmak üzere

$$0 < P_{2m-3} < p \leq P_{2m-1} \quad (p > 1)$$

$$0 \leq P_{2m-4} < p \leq P_{2m-2} \quad (p > 0)$$

dır.

Her $p > 1$ tamsayısı için

$$0 < P_{2m-3} - P_{2m-4} < p \leq P_{2m-1} - P_{2m-2} \quad (m \geq 2) \quad (3.39)$$

dir.

Eğer $p=P_{-2k-1}$ -n alınır; $m+\ell=k+1$ olmak üzere $k>\ell\geq 0$ koşuluna uyan ℓ tamsayıları vardır. $m=k-\ell+1$ alınıp p ve m değerleri Eş. 3.39 da yerlerine yazılırsa,

$$0 < P_{2k-2\ell-1} - P_{2k-2\ell-2} < P_{-2k-1} - n \leq P_{2k-2\ell+1} - P_{2k-2\ell} \quad (3.40)$$

elde edilir.

Eş. 3.40 in her tarafını -1 ile çarparsak,

$$P_{2k-2\ell} - P_{2k-2\ell+1} \leq n - P_{2k-1} < P_{2k-2\ell-2} - P_{2k-2\ell-1} < 0 \quad (3.41)$$

bulunur.

Eş. 3.41 için Eş. 1.14 kullanılarak

$$-P_{-2k+2\ell} - P_{-2k+2\ell-1} \leq n - P_{-2k-1} < -P_{-2k+2\ell+2} - P_{-2k+2\ell+1} < 0$$

bulunur. ■

3.8. Ön Teorem [7]

$n>0$, $k>0$ olmak üzere

$$P_{-2k+1} < n \leq -P_{-2k} \text{ ise;}$$

$k>\ell\geq 0$ olacak biçimdeki ℓ tamsayıları için

$$0 < -P_{-2k+2\ell+2} - P_{-2k+2\ell+3} \leq n - P_{-2k+1} \leq -P_{-2k+2\ell} - P_{-2k+2\ell+1} \quad (3.42)$$

dir.

İspat

$$P_{-2k+1} < n \leq -P_{-2k} \quad (3.43)$$

olsun.

Eş. 3.43 ün her tarafına $-P_{-2k+1}$ eklersek

$$0 < n - P_{-2k+1} \leq -P_{-2k} - P_{-2k+1} \quad (3.44)$$

elde edilir.

Eş. 1.9 ve Eş. 1.14 kullanılarak

$$-P_{-2k} - P_{-2k+1} = P_{2k} - P_{2k-1} \quad (3.45)$$

yazılabilir.

Eş. 3.45 i, Eş. 3.44 de yerine yazarsak

$$0 < n - P_{-2k+1} \leq P_{2k} - P_{2k-1} \quad (3.46)$$

bulunur.

Her $p > 0$ tamsayısı için,

$$0 < P_{2m-4} - P_{2m-5} \leq p \leq P_{2m-2} - P_{2m-3} \quad (m \geq 3) \quad (3.47)$$

yazılabilir.

Eğer $p = n - P_{-2k+1}$ alınırsa; $m + \ell = k + 1$ olacak şekilde $k > \ell \geq 0$ koşuluna uyan ℓ tamsayıları vardır. $m = k - \ell + 1$ alınıp p ve m değerleri Eş. 3.47 de yerlerine, yazılırsa,

$$0 < P_{2k-2\ell-2} - P_{2k-2\ell-3} \leq n - P_{-2k+1} \leq P_{2k-2\ell} - P_{2k-2\ell-1} \quad (3.48)$$

olur.

Eş. 3.48 için Eş. 1.14 kullanılarak

$$0 < -P_{-2k+2\ell+2} - P_{-2k+2\ell+3} \leq n - P_{-2k+1} \leq -P_{-2k+2\ell} - P_{-2k+2\ell+1}$$

bulunur. ■

3.9. Ön Teorem [7]

$n < 0$, $k > 0$ olmak üzere,

$P_{-2k} < n \leq -P_{-2k+1}$ ise $k > \ell \geq 0$ koşulunu sağlayan ℓ tamsayıları için

$$0 < -P_{-2k+2\ell+2} - P_{-2k+2\ell+3} \leq n - P_{-2k} \leq -P_{-2k+2\ell} - P_{-2k+2\ell+1} \quad (3.49)$$

dir.

İspat

$$P_{-2k} < n \leq -P_{-2k+1} \quad (3.50)$$

olsun.

Eş. 3.50 nin her tarafına $-P_{-2k}$ eklenirse

$$0 < n - P_{-2k} \leq -P_{-2k} - P_{-2k+1} \quad (3.51)$$

elde edilir.

Eş. 1.9 ve Eş. 1.14 kullanılarak,

$$-P_{-2k} - P_{-2k+1} = P_{2k} - P_{2k-1} \quad (3.52)$$

yazılabilir.

Eş. 3.52, Eş. 3.51 de yerlerine yazılırsa

$$0 < n - P_{-2k} \leq P_{2k} - P_{2k-1} \quad (3.53)$$

bulunur.

Her $p > 0$ tamsayısı için Eş. 3.47 geçerli idi.

Eğer $p = n - P_{-2k}$ alınırsa; $m + \ell = k + 1$ olmak üzere $k > \ell \geq 0$ koşuluna uyan ℓ tamsayıları vardır. $m = k - \ell + 1$ alınıp p ve m değerleri Eş. 3.47 de yerlerine yazılırsa,

$$0 < P_{2k-2\ell-2} - P_{2k-2\ell-3} \leq n - P_{-2k} \leq P_{2k-2\ell} - P_{2k-2\ell-1} \quad (3.54)$$

elde edilir.

Eş. 3.54 için Eş. 1.14 kullanılarak

$$0 < -P_{-2k+2\ell+2} - P_{-2k+2\ell+3} \leq n - P_{-2k} \leq -P_{-2k+2\ell} - P_{-2k+2\ell+1}$$

bulunur. ■

3.10. Ön Teorem [7]

$n < 0$, $k > 0$ olmak üzere

$-P_{-2k-1} \leq n < P_{-2k} - 1$ ise $k > \ell \geq 0$ koşuluna uyan ℓ tamsayıları için

$$-P_{-2k+2\ell} - P_{-2k+2\ell-1} \leq n - P_{-2k} < -P_{-2k+2\ell+2} - P_{-2k+2\ell+1} < 0 \quad (3.55)$$

dır.

İspat

$$-P_{-2k-1} \leq n < P_{-2k} - 1 \quad (3.56)$$

olsun.

Eş. 3.56'nın her tarafını -1 ile çarpıp daha sonra da P_{-2k} eklersek,

$$1 < P_{-2k} - n \leq P_{-2k-1} - P_{-2k} \quad (3.57)$$

elde edilir.

Eş. 1.9 ve Eş. 1.14 kullanılarak,

$$P_{-2k-1} + P_{-2k} = P_{2k+1} - P_{2k} \quad (3.58)$$

yazılabilir.

Eş. 3.58, Eş. 3.57 de yerine yazılırsa,

$$1 < P_{-2k} - n \leq P_{2k+1} - P_{2k} \quad (3.59)$$

bulunur.

Her $p > 1$ tamsayısı için, Eş. 3.39 geçerliydi.

Eğer $p = P_{-2k} - n$ alınırsa; $m + \ell = k + 1$ olmak üzere $k > \ell \geq 0$ koşuluna uyan ℓ tamsayıları vardır. $m = k - \ell + 1$ alınıp p ve m değerleri Eş. 3.39 da yerlerine yazılırsa;

$$0 < P_{2k-2\ell-1} - P_{2k-2\ell-2} < P_{-2k} - n \leq P_{2k-2\ell+1} - P_{2k-2\ell} \quad (3.60)$$

olur.

Eş. 3.60 ın her tarafını -1 ile çarparsak,

$$P_{2k-2\ell} - P_{2k-2\ell+1} \leq n - P_{-2k} < P_{2k-2\ell+2} - P_{2k-2\ell-1} < 0 \quad (3.61)$$

bulunur.

Eş. 3.61 için, Eş. 1.14 kullanılarak,

$$-P_{-2k+2\ell} - P_{-2k+2\ell-1} \leq n - P_{-2k} < -P_{-2k+2\ell-2} - P_{-2k+2\ell+1} < 0$$

elde edilir. ■

Ayrıca, Ön Teorem 3.7 de $n = P_{-2k-1} - 1$ alınırsa,

$$n - P_{-2k-1} = -1 = P_{-1} + P_{-2}$$

olur.

Ön Teorem 3.10 da $n = P_{-2k} - 1$ alınırsa,

$$n - P_{-2k} = 1 = P_{-1} + P_{-2}$$

olur.

3.4. Zeckendorf-Pell Algoritması (ZP Algoritması) [7]

ZP Algoritması; pozitif veya negatif her tamsayının negatif indisli Pell sayılarının toplamı olarak yazılabileceğini ifade eder.

İkinci bölümde Fibonacci sayıları için tanımladığımız Z algoritmasında olduğu gibi bu ZP algoritmasında da 5 durum söz konusudur.

Sembolik olarak bu durumları $x=1,2,3,4,5$ olmak üzere ZP_{x-1} ile gösterelim.

1) $x=1$ için ZP_0 olur. Bu durumda; $n=P_{-i}$ veya $n=2P_{-i}$ ise; herhangi bir işleme gerek yoktur.

2) $x=2$ için ZP_1 olur. (Ön Teorem 3.7 den yararlanılır.) Bu durumda; $n>0$ ($n \neq P_{-i}$ ve $n \neq 2P_{-i}$), $k>0$ olmak üzere

$$P_{2k} < n < P_{2k+1} \quad \text{veya} \quad \text{bu eşitsizliğe denk olarak} \quad -P_{-2k} < n < P_{-2k-1} \quad \text{ise}$$

$$n = P_{-2k-1} + (n - P_{-2k-1})$$

yazılır ve $n-P_{-2k-1}$ için bu algoritma uygulanır.

3) $x=3$ için ZP_2 elde edilir. (Ön Teorem 3.8 den yararlanılır.) Bu durumda;
 $n>0$ ($n \neq P_{-i}$ ve $n \neq 2P_{-i}$), $k>0$ olmak üzere

$P_{2k-1} < n < P_{2k}$ veya bu eşitsizliğe denk olarak $P_{-2k+1} < n < -P_{-2k}$ ise

$$n = P_{-2k+1} + (n - P_{-2k+1})$$

yazılır ve $n - P_{-2k+1}$ için bu algoritma uygulanır.

4) $x=4$ için ZP_3 elde edilir. (Ön Teorem 3.9 dan yararlanılır.) Bu durumda;
 $n<0$ ($n \neq P_{-i}$ ve $n \neq 2P_{-i}$), $k>0$ olmak üzere

$P_{2k-1} < -n < P_{2k}$ veya bu eşitsizliğe denk olarak $P_{-2k} < n < -P_{-2k+1}$ ise

$$n = P_{-2k} + (n - P_{-2k})$$

yazılır ve $n - P_{-2k}$ için algoritma uygulanır.

5) $x=5$ için ZP_4 elde edilir. (Ön Teorem 3.10 dan yararlanılır.) Bu
durumda; $n<0$ ($n \neq P_{-i}$ ve $n \neq 2P_{-i}$), $k>0$ olmak üzere

$P_{2k} < -n < P_{2k+1}$ veya bu eşitsizliğe denk olarak, $-P_{-2k-1} < n < P_{-2k}$ ise

$$n = P_{-2k} + (n - P_{-2k})$$

yazılır ve $n - P_{-2k}$ için algoritma uygulanır.

3.3. Teorem [2,7]

ZP Algoritması kullanılarak her N tamsayısının negatif indisli Pell sayıları ile aşağıdaki gibi tek türlü ifade edilebilir. Açıkça bu gösterim

$\alpha_i=0,1$ veya 2 ve $\alpha_i=2 \Rightarrow \alpha_{i+1}=0$ ($i>1$) olmak üzere

$$N = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \cdot P_{-i} \text{ biçimindedir.}$$

ZP Algoritmasının nasıl çalıştığını gösteren örnekler verelim.

Örnek [7]

1) $n = 792$ olsun.	ZP	Ön Teorem	k	ℓ
$792 = 985 + (-193)$	ZP_1	3.7	4	0
$= P_{-9} + (-408 + 215)$	ZP_3	3.9	4	0
$= P_{-9} + P_{-8} + (169 + 46)$	ZP_2	3.8	4	0
$= P_{-9} + P_{-8} + P_{-7} + (29 + 17)$	ZP_2	3.8	3	0
$= P_{-9} + P_{-8} + P_{-7} + P_{-5} + (29 + (-12))$	ZP_1	3.7	2	0
$= P_{-9} + P_{-8} + P_{-7} + 2P_{-5} + P_{-4}$	ZP_0	İşlem yapılmaz.		

2) $n = -792$ olsun.	ZP	Ön Teorem	k	ℓ
$-792 = -408 + (-384)$	ZP_4	3.10	4	0
$= P_{-8} + (-408 + 24)$	ZP_3	3.9	4	0
$= 2P_{-8} + (29 + (-5))$	ZP_1	3.7	2	0
$= 2P_{-8} + P_{-5} + (-12 + 7)$	ZP_3	3.9	2	
$= 2P_{-8} + P_{-5} + P_{-4} + (5 + 2)$	ZP_2	3.8	2	0
$= 2P_{-8} + P_{-5} + P_{-4} + P_{-3} + 2P_{-1}$	ZP_0	İşlem yapılmaz.		

Çizelge 3.1. Tamsayıların negatif indisli Pell sayıları ile Zeckendorf gösterimleri [3]

+	P_{-1}	P_{-2}	P_{-3}	P_{-4}	P_{-5}	-	P_{-1}	P_{-2}	P_{-3}	P_{-4}	P_{-5}	P_{-6}
1	1					-1	1	1				
2	2					-2		1				
3		1	1			-3	1	2				
4	1	1	1			-4		2				
5			1			-5	2		1	1		
6	1		1			-6	1		1	1		
7	2		1			-7			1	1		
8		1	2			-8	1	1	1	1		
9	1	1	2			-9		1	1	1		
10			2			-10	2			1		
11	1		2			-11	1			1		
12	2		2			-12				1		
13		2		1	1	-13	1	1		1		
14	1	2		1	1	-14		1		1		
15		1		1	1	-15	1	2		1		
16	1	1		1	1	-16		2		1		
17				1	1	-17	2		1	2		
18	1			1	1	-18	1		1	2		
19	2			1	1	-19			1	2		
20		1	1	1	1	-20	1	1	1	2		
21	1	1	1	1	1	-21		1	1	2		
22			1	1	1	-22	2			2		
23	1		1	1	1	-23	1			2		
24	2		1	1	1	-24				2		
25		2			1	-25	1	1		2		
26	1	2			1	-26		1		2		
27		1			1	-27	1	2		2		
28	1	1			1	-28		2		2		
29					1	-29	2		2		1	1
30	1				1	-30	1		2		1	1
31	2				1	-31			2		1	1
32		1	1		1	-32	1	1	2		1	1
33	1	1	1		1	-33		1	2		1	1
34			1		1	-34	2		1		1	1
35	1		1		1	-35	1		1		1	1
36	2		1		1	-36			1		1	1
37		1	2		1	-37	1	1	1		1	1
38	1	1	2		1	-38		1	1		1	1
39			2		1	-39	2				1	1
40	1		2		1	-40	1				1	1
41	2		2		1	-41					1	1
42		2		1	2	-42	1	1			1	1
43	1	2		1	2	-43		1			1	1
44		1		1	2	-44	1	2			1	1
45	1	1		1	2	-45		2			1	1
46				1	2	-46	2		1	1	1	1
47	1			1	2	-47	1		1	1	1	1
48	2			1	2	-48			1	1	1	1
49		1	1	1	2	-49	1	1	1	1	1	1
50	1	1	1	1	2	-50		1	1	1	1	1

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, tamsayıların bazı koşullar altında Fibonacci ve Pell sayılarının toplamı biçiminde tek türlü olarak yazılabileceğini ele aldık.

$Q_0=2$ ve $Q_1=2$ başlangıç değerleri için,

$$Q_{n+1}=2Q_n + Q_{n-1}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanan $\{ Q_n \}$ Pell-Lucas sayı dizisinin $n \leq 0$ için;

$$Q_{n-1} = -2Q_n + Q_{n+1}$$

eşitliği kullanılarak negatif indisli terimleri hesaplanabilir.

$\{ Q_n \}$ Pell-Lucas sayı dizisinin bütün elemanları çift sayılar olduğu için, tamsayıların Pell-Lucas sayıları kullanılarak Zeckendorf gösteriminden söz edemeyiz.

Fibonacci ve Pell sayı dizileri için yapılan bu çalışmanın başka sayı dizileri için de geçerli olup olmadığı araştırılabilir.

KAYNAKLAR

1. Zeckendorf, E., "Représentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas", **Bull.Soc.Royale Sci.Liège**, 41:179-182 (1972).
2. Hoggatt, V.E.Jr, "Generalized Zeckendorf Theorem", **The Fibonacci Quarterly**, 10(1):89-93 (1972).
3. Keller, T.J., "Generalizations of Zeckendorf's Theorem", **The Fibonacci Quarterly**, 10(1):95-102,111 (1972).
4. Vajda, S., "Fibonacci&Lucas Numbers, and the Golden Section", **Haisted Press**, New York, 9-113 (1989).
5. Sloane, N.J.A."A Handbook of Integer Sequences",**Academic Press**,1-10 (1973).
6. Brown, J.L.Jr. "A New Characterization of the Fibonacci Numbers", **The Fibonacci Quarterly**, 3(1):1-8 (1965).
7. Horadam, A.F., "Zeckendorf Representations of Positive and Negative Integers by Pell Numbers", **Applications of Fibonacci Numbers**, 5:305-316 (1993).
8. Carlitz, L.,Scoville, R. and Hoggatt, V.E.Jr., "Pellian Representations", **The Fibonacci Quarterly**, 10(5):449-488 (1972).
9. Lekkerkerker, C.G., "Voostelling van natuulijke getallen door een som getallen van Fibonacci", **Simon Stevin**, 29:190-195 (1951-52).
10. Daykin, D.E., "Representations of Natural Numbers as Sums of Generalized Fibonacci Numbers" , **J.Lond.Math.Soc.**, 35:143-160 (1960).
11. Bunder, M.W., "Zeckendorf Representations Using Negative Fibonacci Numbers", **The Fibonacci Quarterly**, 30(2):111-115 (1992).
12. Pihko, J., "On Fibonacci and Lucas Representations and a Theorem of Lekkerkerker ", **The Fibonacci Quarterly**, 26(3):256-261 (1988).
13. Brown, J.L.Jr., "Zeckendorf's Theorem and Some Appilactions", **The Fibonacci Quarterly**, 2(3):163-168 (1964).

14. Klarner, D.A, "Representation of N as a Sum of Distinct Elements from Special Sequences", ***The Fibonacci Quarterly***, 4(4):289-306 (1966).
15. Kimberling, C., "Zeckendorf Number Systems and Associated Partitions", ***The Fibonacci Quarterly***, 29(2):120-123 (1991).
16. Freitag, H. "On the Representations of $\{ F_{kn} / F_n \}$, $\{ F_{kn} / L_n \}$, $\{ L_{kn} / L_n \}$, and $\{ L_{kn} / F_n \}$ as Zeckendorf Sums", ***Applications of Fibonacci Numbers***, 3:107-114 (1990).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : KARADENİZ, Gül
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 13.02.1981 İstanbul
Medeni hali : Bekar
Telefon : 0 (312) 238 18 71
Faks : 0 (312) 232 04 48
e-mail : gulkaradeniz@gmail.com.

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	İstanbul Üniversitesi/Matematik Böl.	2004
Lise	Hasan Polatkan Süper Lisesi	1998

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2005-2006	Gazi Üniversitesi Atatürk M.Y.O	Öğr.Görevlisi
2005-2006	Gazi Üniversitesi T.E.F	Öğr.Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Satranç, Yüzme, Dans