

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



**FİBONACCİ SAYILARININ
REGÜLER MATRİSİ KULLANILARAK
TANIMLANMIŞ YENİ BİR BK-UZAYI**

Yakup BAYANCUK

Yüksek Lisans Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

TEMMUZ, 2021

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK Anabilim Dalı
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi**

Yüksek Lisans Tezi

**FİBONACCİ SAYILARININ REGÜLER MATRİSİ
KULLANILARAK TANIMLANMIŞ YENİ BİR
BK-UZAYI**

**Tez Yazarı
Yakup BAYANCUK**

**Danışman
Prof. Dr. Çiğdem BEKTAŞ**

**TEMMUZ, 2021
ELAZIĞ**

T.C.

**FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Başlığı: Fibonacci Sayılarının Regüler Matrisi Kullanılarak Tanımlanmış Yeni Bir BK-Uzayı

Yazarı: Yakup BAYANCUK

İlk Teslim Tarihi: 11.6.2021

Savunma Tarihi: 26.7.2021

TEZ ONAYI

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına göre hazırlanan bu tez aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından değerlendirilmiş ve akademik dinleyicilere açık yapılan savunma sonucunda OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

İmza

Danışman: Prof. Dr. Çiğdem BEKTAŞ

Onayladım

Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi

Başkan: Prof. Dr. Hıfıslı ALTINOK

Onayladım

Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Gülcan ATICI TURAN

Onayladım

Munzur Üniversitesi, Tunceli MYO

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunun/...../20..... tarihli toplantısında tescillenmiştir.

İmza

Doç. Dr. Kürşat Esat ALYAMAÇ
Enstitü Müdürü

ÖN SÖZ

ℓ_∞ , c , c_0 ve ℓ_p ile sırasıyla bütün sınırlı, yakınsak, sıfır dizilerinin ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere p –mutlak yakınsak serilerinin uzayını göstereceğiz. Ayrıca cs ve bs ile sırasıyla yakınsak ve sınırlı seri teşkil eden uzayları $cs = \{x = (x_k) \in w: (\sum_{k=0}^n x_k)_{n=0}^\infty \in \mathbb{C}\}$ ve $bs = \{x = (x_k) \in w: (\sum_{k=0}^n x_k)_{n=0}^\infty \in \ell_\infty\}$ şeklinde göstereceğiz. ℓ_p ($1 \leq p < \infty$) ve ℓ_∞ uzayı, sırasıyla $\|x\|_{\ell_p} = (\sum_{k=0}^\infty |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}$ ve $\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$ normu ile birlikte BK-uzaylarıdır.

X ve Y dizi uzayları için $S(X, Y)$ cümlesini $S(X, Y) = \{z = (z_k): xz = (x_k z_k) \in Y \text{ her } x \in X\}$ şeklinde tanımlayalım. $S(X, Y) = \{z = (z_k): xz = (x_k z_k) \in Y \text{ her } x \in X\}$ ile bir X dizi uzayının X^α, X^β ve X^γ şeklinde gösterilen α, β ve γ dualleri

$$X^\alpha = S(X, \ell_1), \quad X^\beta = S(X, cs) \text{ ve } X^\gamma = S(X, bs)$$

şeklinde gösterilir.

Fibonacci sayıları $f_0 = 0$ ve $f_1 = 1$ olmak üzere $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}; n \geq 2$ şeklinde tekrar eden lineer denklemler ile tanımlanan $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ sayı dizisidir. Fibonacci sayılarının bazı özellikleri aşağıdaki gibidir:

Her $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k=0}^n f_k^2 = f_n f_{n+1}$, $\sum_{k=0}^n f_k = f_{n+2} - 1$ ve $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{f_k}$ yakınsaktır. Debnath ve Saha [10]

$$f_{nk} = \begin{cases} \frac{f_k}{f_{n+2} - 1}, & (1 \leq k \leq n) \\ 0, & \text{aksi durumda} \end{cases}$$

olacak şekilde yeni bir $F = (f_{nk})_{n,k=1}^\infty$ Fibonacci matrisi tanımladılar. Bu üçgensel bir matristir. $k \leq n$ için $f_{nn} \neq 0$ ve $k > n$ için ($n = 1, 2, 3, \dots$), $f_{nk} = 0$ dır. Ayrıca bir regüler matristir. Aynı zamanda $F_x = \{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ olmak üzere aşağıdaki dizi uzaylarını gösterdiler.

$$X(F) = \{x = (x_k) \in w: F_x \in X\}, X = \{c, c_0, \ell_\infty\}$$

Bu uzayların bazı temel topolojilerini ve cebirsel özelliklerini çalıştılar. $c(F)$, $c_0(F)$ ve $\ell_\infty(F)$ uzayları $\|x\|_{X(F)} = \|F_x\|_X = \sup_n |f_n(x)|$ ile verilen normla BK-uzaylarıdır. Burada $X \in \{c, c_0, \ell_\infty\}$ dır.

Ercan ve Bektaş [11] Fibonacci sayılarının regüler matrisi kullanılarak, $0 < p < \infty$ olmak üzere $\ell_p(F)$ dizi uzayını tanımladılar. Schauder bazı, α –, β – ve γ –dualleri gibi topolojik özelliklerini ve düzgün konveks, kesin konveks ve süper-refleksive gibi geometrik özelliklerini verdiler. Ayrıca $\ell_p(F)$ uzayından klasik dizi uzaylarına bazı matris sınıflarını da karakterize ettiler.

Bu çalışmayı hazırlamamda bana destek olan ve her safhasında yardımını esirgemeyen tez danışmanım değerli hocam Prof. Dr. Çiğdem BEKTAŞ’a, tezin düzenlenmesinde bana yardım eden arkadaşım Dr.Öğr.Üyesi Mehmet ELALDI’ya ve tez çalışmam boyunca beni yalnız bırakmayan eşime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Yakup BAYANCUK

Elazığ, 2021

İÇİNDEKİLER

ÖN SÖZ.....	iv
İÇİNDEKİLER.....	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	2
3. FİBONACCİ SAYILARI YARDIMIYLA TANIMLANMIŞ DİZİ UZAYLARI VE BAZI KAPSAMA BAĞINTILARI.....	11
4. $\ell_p(F)$ DİZİ UZAYI VE BAZI ÖZELLİKLERİ.....	17
5. $\ell_p(F)$ UZAYININ α-, β - VE γ - DUALLERİ	23
6. $\ell_p(F)$ UZAYI ÜZERİNDEKİ MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ.....	27
7. $\ell_p(F)$ UZAYININ BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ	29
8. SONUÇ	30
KAYNAKLAR.....	31
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

Fibonacci Sayılarının Regüler Matrisi Kullanılarak Tanımlanmış Yeni Bir BK-Uzayı

Yakup BAYANCUK

Yüksek Lisans Tezi

FIRAT ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Temmuz 2021, Sayfa: viii+32

Bu çalışma da öncelikle tez boyunca kullanacağımız temel tanım ve teoremlerden bahsettik. Fibonacci sayıları yardımıyla tanımlanmış bazı dizi uzayları ve bunlarla ilgili kapsama bağıntılarını verdik. Daha sonra $\ell_p(F)$ dizi uzayı tanıtıldı. Bu uzayın BK-uzayı olduğu gösterildi. $\ell_p(F)$ dizi uzayının bazı özellikleri incelendi. Ayrıca $\ell_p(F)$ uzayının α -, β - ve γ - dualleri hesaplandı. $\ell_p(F)$ uzayı üzerindeki matris dönüşümleri ve bu uzayın bazı geometrik özellikleri incelendi.

Anahtar Kelimeler: Dizi uzaylarında matris dönüşümleri, α -, β - ve γ - dualleri, geometrik özellikler

ABSTRACT

A New BK-Space Derived By Using Regüler Matrix of Fibonacci Numbers Yakup BAYANCUK

Master's Thesis

FIRAT UNIVERSITY
Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics
Analysis and Function Theory
July 2021, Pages : viii+32

In this study, we first talked about the basic definitions and theorems that we will use throughout the thesis. We have given some sequence spaces defined with the help of Fibonacci numbers and their coverage relations. Then the array space $\ell_p(F)$ was introduced. This space has been shown to be BK-space. Some properties of the $\ell_p(F)$ sequence space are investigated. In addition, α -, β - and γ -duals of $\ell_p(F)$ space were calculated. Matrix transformations on $\ell_p(F)$ space and some geometric properties of this space are examined.

Keywords: Matrix transformations in sequence spaces, α -, β - and γ -duals, geometric properties

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
w	: Reel ya da kompleks terimli tüm diziler uzayı
ℓ_∞	: Sınırlı diziler uzayı
c	: Yakınsak dizilerin uzayı
c_0	: Sıfıra yakınsak dizilerin uzayı
ℓ_p	: p-mutlak yakınsak dizilerin uzayı
cs	: Yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı
bs	: Sınırlı seri teşkil eden dizilerin uzayı
FK	: Fréchet Koordinat Uzayı
BK	: Banach Koordinat Uzayı
$\hat{c}$	: Hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı
$\hat{c}_0$	: Sıfıra hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı
φ	: Altın oran

1. GİRİŞ

Fibonacci sayıları matematikte oldukça önemlidir. Bu sayıların yine matematikte başka bir çok önemli kavram olan altın oranla ilişkisi vardır. Fibonacci sayıları ile ilgili bir çok matematikçi çalışmalar yapmıştır. Bu yazarlar yeni Fibonacci matrisi, dizi uzaylarını ve bu uzayların temel topolojilerini ve cebirsel özelliklerini çalıştılar. Fibonacci sayıları yardımıyla tanımlanmış dizi uzayları ile ilgili pek çok çalışma Kalman ve Mena [19], Candan [22], Kara ve Demiriz [27], Talebi ve Dehghan [28] v.s. tarafından yapıldı. Son olarak Debnath ve Saha [10] yeni bir Fibonacci matrisi alarak bazı yeni dizi uzayları tanımladılar ve bu uzayların BK-uzayları olduğunu gösterdiler. Aynı zamanda bu uzaylar arasındaki kapsama bağıntılarını, bazı topolojik ve cebirsel özelliklerini incelediler.

Bir X dizi uzayına eğer X bir Banach uzayı ve her $k \in \mathbb{N}$ için $\tau_k: X \rightarrow \mathbb{C}$, $\tau_k(x) = x_k$ sürekli ise bir BK-uzayı denir. Burada $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismini gösterebiliriz. ve $\mathbb{N} = \{0,1,2, \dots\}$ dir.

X, Y herhangi iki dizi uzayı ve $n, k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $A = (a_{nk})$, a_{nk} reel sayıların sonsuz bir matrisi olsun. Bu taktirde her $n \in \mathbb{N}$ için $(Ax)_n = \sum_k a_{nk} x_k$ olmak üzere her $x = (x_k) \in X$ dizisi için $Ax = \{(Ax)_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi Y de ise A , X den Y ye bir matris dönüşümü tanımlar. $(X:Y)$ ile $A: X \rightarrow Y$ olacak şekilde bütün A matrislerinin sınıfını göstereceğiz.

Debnath ve Saha [10] da

$$f_{nk} = \begin{cases} \frac{f_k}{f_{n+2} - 1}, & (1 \leq k \leq n) \\ 0, & \text{aksi durumda} \end{cases}$$

olacak şekilde yeni bir $F = (f_{nk})_{n,k=1}^{\infty}$ Fibonacci matrisi tanımladılar. Bu üçgensel bir matristir. $k \leq n$ için $f_{nn} \neq 0$ ve $k > n$ için $(n = 1,2,3, \dots)$, $f_{nk} = 0$ dir. Ayrıca bir regüler matristir. Aynı zamanda $F_x = \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ olmak üzere aşağıdaki dizi uzaylarını gösterdiler.

$$c(F) = \{x = (x_k) \in w: F_x \in c\}$$

$$c_0(F) = \{x = (x_k) \in w: F_x \in c_0\}$$

$$\ell_{\infty}(F) = \{x = (x_k) \in w: F_x \in \ell_{\infty}\}$$

Bu uzayların bazı temel topolojilerini ve cebirsel özelliklerini çalıştılar. $c(F)$, $c_0(F)$ ve $\ell_{\infty}(F)$ uzaylarının $\|x\|_{X(F)} = \|F_x\|_X = \sup_n |f_n(x)|$ ile verilen normla BK-uzaylarıdır. Burada $X \in \{c, c_0, \ell_{\infty}\}$ dir.

Bu yazarların çalıştığı Fibonacci sayılarının regüler matrisini kullanarak yeni bir BK-uzayı üzerine çalışacağız.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1: X boş olmayan bir cümle ve K reel veya kompleks sayılar cismi olsun.

$$+: X \times X \rightarrow X \text{ ve } \cdot: K \times X \rightarrow X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlarsa X cümlesine K cismi üzerinde bir vektör(lineer) uzayı adı verilir. $\forall x, y, z \in X$ ve $\forall a, b \in K$ için

$$V1) x + y = y + x$$

$$V2) (x + y) + z = x + (y + z)$$

$$V3) \forall x \in X \text{ için } x + \theta = x \text{ eşitliğini sağlayan bir tek } \theta \in X \text{ vardır.}$$

$$V4) \forall x \in X \text{ için } x + (-x) = \theta \text{ eşitliğini sağlayan bir tek } -x \in X \text{ vardır.}$$

$$V5) 1 \cdot x = x$$

$$V6) a(x + y) = ax + ay$$

$$V7) (a + b)x = ax + bx$$

$$V8) a(bx) = (ab)x$$

dir. Bu uzayın elemanlarına da vektör veya nokta adı verilir. $K = \mathbb{R}$ alınırsa X e bir reel vektör uzayı $K = \mathbb{C}$ alınırsa X e bir kompleks vektör uzayı adı verilir [1].

Tanım 2.2: X bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $M \subset X$ olmak üzere;

$\forall x, y \in M$ ve $\forall c \in K$ için; $x + y \in M$, $c \cdot x \in M$ oluyorsa X in bir M alt cümlesine alt vektör uzayı denir [1].

Tanım 2.3: X boş olmayan bir cümle olsun. $\forall x, y, z \in X$ için;

$$M1) d(x, y) \geq 0$$

$$M2) d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$M3) d(x, y) = d(y, x)$$

$$M4) d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

özelliklerine sahip $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna metrik ve (X, d) ikilisine de metrik uzay denir. $M1, M3$ ve $M4$ şartlarını sağlayan d fonksiyonuna bir yarı metrik, (X, d) ikilisine de yarı metrik uzay denir [1].

Tanım 2.4: X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlarsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir. $\forall x, y \in X$ ve $\forall a \in K$ için;

$$N1) \|x\| \geq 0$$

$$N2) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$N3) \|ax\| = |a|\|x\|$$

$$N4) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

dir. Eğer N2) yerine N2*) $x = \theta \Rightarrow \|x\| = 0$ şartı alınırsa yarınorm elde edilir [1].

Tanım 2.5 : K bir cisim ve X bir vektör uzayı olmak üzere $\langle ., . \rangle : X \times X \rightarrow K$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa $\langle ., . \rangle$ dönüşümüne X üzerinde bir iç çarpım ve $(X, \langle ., . \rangle)$ ikilisine de bir iç çarpım uzayı denir. Her $x, y, z \in X$ ve α skaleri için

$$i. \langle x, x \rangle \geq 0 \text{ ve } \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta,$$

$$ii. \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \text{ (kompleks eşlenik),}$$

$$iii. \langle \alpha x, y \rangle = \langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$$

$$iv. \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \text{ dir.}$$

X üzerinde tanımlanan bir iç çarpım, X üzerinde

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2} \quad (2.1)$$

ile verilen bir norm tanımlar. Buna göre, iç çarpım uzayları birer normlu uzaylardır [3].

Tanım 2.6: Bir $(X, \langle ., . \rangle)$ iç çarpım uzayı (2.1) normuna göre tam ise bu iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir [3].

Teorem 2.7 (Paralel kenar kanunu): Herhangi bir iç çarpım uzayında

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

eşitliği sağlanır [3].

Tanım 2.8: Tanım cümlesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar cümlesi olan fonksiyona dizi denir. Diziler değer cümlelerine göre çeşitli isimler alırlar. Eğer dizinin değer cümlesi $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesi ise diziye reel terimli dizi, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cümlesi ise diziye rasyonel terimli dizi adı verilir [4].

Tanım 2.9: $\varepsilon > 0$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun.

$$K = \{x : |x - a| < \varepsilon, x \in \mathbb{R}\}$$

kümesine a nın ε -komşuluğu denir [4].

Tanım 2.10: $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_n)$, X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall m, n > n_0$ iken $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisine Cauchy dizisi denir [5].

Tanım 2.11: $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_n)$, X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall n > n_0$ iken $\|x_n - x\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisi x' e yakınsaktır denir ve $\lim_n x_n = x$ veya $x_n \rightarrow x$ şeklinde yazılır [5].

Tanım 2.12: $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında her Cauchy dizisi bu uzayın bir noktasına yakınsıyorsa bu normlu uzaya tam normlu uzay veya Banach uzayı denir [6].

Teorem 2.13: Bir X Banach uzayının bir Y alt uzayının tam olması için gerek ve yeter şart, Y uzayının X uzayında kapalı olmasıdır.

Tanım 2.14: (X, d) metrik uzay ve $M \subset X$ olsun. M 'nin noktası olabilen ya da olmayan bir $x_0 \in X$ alalım. Eğer x_0 'ın her bir komşuluğu x_0 'dan farklı en az bir $y \in M$ noktası içeriyorsa x_0 noktasına M 'nin yığılma noktası denir. “ x_0 'ın bir komşuluğu” ifadesi ile X in x_0 'ın en az bir ε –komşuluğunu içeren herhangi bir alt cümlesini anlatmak istiyoruz.

Tanım 2.15: (X, d) metrik uzay ve $M \subset X$ olsun. M 'nin noktalarıyla, M 'nin yığılma noktalarından oluşan cümleye M 'nin kapanışı denir ve $\bar{M}$ ile gösterilir.

Teorem 2.16: M 'nin kapalı olması için gerek ve yeter şart $\bar{M} = M$ olmasıdır.

Teorem 2.17: (X, d) bir metrik uzay $M \subset X$ ve $\bar{M}$, M cümlesinin kapanışını gösterebilir. $x \in \bar{M}$ olması için gerek ve yeter şart, $x_n \rightarrow x$ olacak şekilde M cümlesinde bir (x_n) dizisinin mevcut olmasıdır.

Tanım 2.18: w , bütün $x = (x_n)$ dizilerinin uzayıdır. Bu uzayda metrik;

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$$

şeklindedir.

Tanım 2.19: w ' nin herhangi bir alt vektör uzayına bir dizi uzayı denir [7].

Tanım 2.20: A ve B iki küme olsun. A dan B ye olan bir f bağıntısı

- i) $\forall x \in A$ için $(x, y) \in f$ olacak şekilde $\exists y \in B$ bulunabilir
- ii) $(x, y) \in f$ ve $(x, z) \in f$ ise $y = z$ dir.

şartlarını sağlıyorsa A dan B ye bir fonksiyondur [4].

Tanım 2.21: $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ise f fonksiyonu a noktasında süreklidir [4].

Tanım 2.22: $A, B \subset \mathbb{R}$ ve $f: A \rightarrow B$ olmak üzere $\forall x \in A$ için $|f(x)| \leq K$ olacak şekilde bir K pozitif reel sayısı varsa f fonksiyonuna sınırlıdır denir [4].

Tanım 2.23: Terimleri reel ya da karmaşık sayılardan oluşan ve terimlerinin salt değerlerinin toplamı yakınsak olan $x = (x_n)$ dizilerinin oluşturduğu kümeye l_1 uzayı denir [7].

$$l_1 = \left\{ x = (x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \right\}$$

Tanım 2.24: Terimleri reel ya da karmaşık sayılardan oluşan ve terimlerinin salt değerlerinin karelerinin toplamı yakınsak olan bütün dizilerin oluşturduğu uzaya l_2 uzayı denir [7].

$$l_2 = \left\{ x = (x_n) : \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right) < \infty \right\}$$

Tanım 2.25: ℓ_{∞} , $x = (x_n)$ bütün sınırlı diziler uzayı olmak üzere; sınırlı diziler uzayının matematiksel ifadesi, $\ell_{\infty} = \{x = (x_n) : \sup_n |x_n| < \infty\}$ şeklindedir. Ayrıca ℓ_{∞} dizi uzayı $d(x, y) = \sup_n |x_n - y_n|$ metriği ile birlikte bir metrik uzaydır [7].

Tanım 2.26: $p = (p_n)$ pozitif sayıların sınırlı bir dizisi olsun, $\ell(p) = \{x = (x_n) : \sum |x_n|^{p_n} < \infty\}$ şeklinde tanımlanır. Bu durumda $0 < p_n \leq \sup p_n = H < \infty$ iken, $\ell(p)$ üzerinde bir doğal metrik; $d(x, y) = (\sum |x_n - y_n|^{p_n})^{\frac{1}{M}}$, $M = \max(1, H)$ dir [7].

Tanım 2.27: ℓ_p ile $1 \leq p < \infty$ olmak üzere p -mutlak yakınsak serilerinin uzayını göstereceğiz [7].

Tanım 2.28: c uzayı, yakınsak diziler uzayıdır. Yakınsak diziler uzayının matematiksel ifadesi, $c = \{x = (x_n) \in w : \exists \ell \in \mathbb{C} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - \ell|^{P_n} = 0\}$ şeklindedir. Ayrıca c dizi uzayı $d(x, y) = \sup_n |x_n - y_n|$ metriği ile birlikte bir metrik uzaydır [7].

Tanım 2.29: c_0 uzayı, sıfır dizileri uzayıdır. $c_0 = \{x = (x_n) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|^{P_n} = 0\}$ ayrıca $d(x, y) = \sup_n |x_n - y_n|$ metriği ile birlikte bir metrik uzaydır [7].

Teorem 2.30: ℓ_∞, c ve c_0 uzayları; $\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ normu ile ve $\ell_p (p \geq 1)$ uzayı, $\|x\|_p = (\sum_n |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ normu ile Banach uzaylarıdır.

Tanım 2.31: X bir lineer topolojik dizi uzayı ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\tau_n: X \rightarrow \mathbb{C}, \tau_n(x) = x_n$$

dizisi sürekli ise K -uzayı denir. Eğer X Banach uzayı ise X uzayına BK -uzayı denir [2].

Tanım 2.32: X lineer bir metrik uzay ve d , X üzerinde bir metrik olsun. Bu taktirde eğer cebirsel işlemler X üzerinde sürekli ise X 'e bir lineer uzay denir. Bir lineer X metrik uzayının cebirsel işlemlerinin sürekliliği aşağıdaki gibi tanımlanır:

Eğer $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$ ve $\lambda_n \rightarrow \lambda$, $(n \rightarrow \infty)$ iken olacak şekilde (x_n) ve (y_n) X 'te iki dizi ve (λ_n) bir skaler dizi ise, bu taktirde $x_n + y_n \rightarrow x + y$ ve $\lambda_n \cdot x_n \rightarrow \lambda \cdot x$, $(n \rightarrow \infty)$ dir. Bu demektir ki $d(x_n, x) \rightarrow 0$, $d(y_n, y) \rightarrow 0$ ve $\lambda_n \rightarrow \lambda$ $(n \rightarrow \infty)$ iken $d(x_n + y_n, x + y) \rightarrow 0$ ve $d(\lambda_n \cdot x_n, \lambda \cdot x) \rightarrow 0$, $(n \rightarrow \infty)$ dır. Bir tam lineer metrik uzayına FK -uzayı (Fréchet Koordinat Uzayı) denir [2].

Tanım 2.33: X bir FK -uzayı olsun. Ayrıca X uzayının metriği normlanabiliyorsa bu uzaya BK -uzayı (Banach Koordinat Uzayı) denir [2].

Teorem 2.34: ℓ_∞, c ve c_0 uzayları $\|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$ normu ile birlikte BK -uzaylarıdır.

İspat: Gerçekten ℓ_∞, c ve c_0 dizi uzaylarının yukarıda verilen norma göre birer Banach uzayı olduklarını biliyoruz. Şimdi bu uzayların sürekli koordinat dönüşümlerine sahip olduklarını gösterelim.

$X \in \{c, c_0, \ell_\infty\}$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|\tau_n(x)| = |x_n| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| = \|x\|_\infty < \infty$$

olup her $n \in \mathbb{N}$ için τ_n koordinat dönüşümleri süreklidir. Bundan dolayı ℓ_∞, c ve c_0 dizi uzayları birer BK-uzaydırlar [7].

Tanım 2.35: cs ile yakınsak seri teşkil eden uzayı $cs = \{x = (x_k) \in w: (\sum_{k=0}^n x_k)_{n=0}^\infty \in c\}$ şeklinde göstereceğiz.

Tanım 2.36: bs ile sınırlı seri teşkil eden uzayı $bs = \{x = (x_k) \in w: (\sum_{k=0}^n x_k)_{n=0}^\infty \in \ell_\infty\}$ şeklinde göstereceğiz.

Tanım 2.37: X ve Y dizi uzayları için $S(X, Y)$ cümlesini

$$S(X, Y) = \{z = (z_k): xz = (x_k \cdot z_k) \in Y, \forall x \in X\} \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlayalım. (2.2) notasyonu ile bir X dizi uzayının X^α, X^β ve X^γ şeklinde gösterilen α, β ve γ dualleri

$$X^\alpha = S(X, \ell_1), \quad X^\beta = S(X, cs) \text{ ve } X^\gamma = S(X, bs)$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.38: Normlu bir X uzayına; $x, y \in X$ için $\|x\| = 1, \|y\| = 1$ ve $\|x - y\| \geq \varepsilon$ iken $\left\| \frac{1}{2}(x + y) \right\| \leq 1 - \delta$ olacak şekilde herhangi bir $\varepsilon \in (0, 2]$ için $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ mevcut ise düzgün konveks denir [8].

Tanım 2.39: Normlu bir E uzayına $\forall x, y \in E$ için $x \neq y, \|x\| = \|y\| = 1$ iken $\forall \lambda \in (0, 1)$ için $\|\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y\| < 1$ ise kesin konveks denir [9].

Tanım 2.40: Düzgün konveks olmayan ya da düzgün kare olmayan bir Banach uzayına izomorfik olan Banach uzayına süper-refleksive(süper-dönüşlü) denir [12].

Tanım 2.41: $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $x = (x_k) \in l_p, y = (y_k) \in l_q$ alalım. Bu takdirde

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} |y_k|^q \right)^{1/q}$$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizliğe Hölder Eşitsizliği denir [1].

Tanım 2.42: X, K cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$ olsun. $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$ elamanları $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ 'in lineer kombinasyonu olarak adlandırılır. $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olmak üzere $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ olarak yazılan elemanlar kümesinin lineer skaleri veya A 'nın tüm lineer kombinasyonlarıdır. Yine X 'in sonlu sayıda bir A alt kümesi $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$ ve $\lambda_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$ için oluyorsa A 'ya lineer bağımsız bir küme denir. Lineer bağımsız değilse lineer bağımlı olarak adlandırılır [13].

Tanım 2.43: X ve Y, K cismi üzerinde iki vektör uzayı olsun. Bir $f: X \rightarrow Y$ dönüşümü her $x, y \in X$ ve $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ için $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$ şartını sağlarsa bu dönüşüm bir lineer dönüşüm (lineer transformation veya homomorfizma) olarak adlandırılır. Eğer f dönüşümü birebir ve örten ise f dönüşümüne izomorfizm, X ve Y vektör uzaylarına izomorfik uzaylar denir ve $X \cong Y$ şeklinde gösterilir [13].

Tanım 2.44: X uzayından Y uzayına f izomorfizmi uzaklıkları da koruyorsa f 'ye X 'den Y 'ye bir izometri, X ve Y 'ye de izometrik olarak izomorfik uzaylar denir [13].

Tanım 2.45: Bir T lineer operatörü, aşağıdaki özellikleri gerçekleyen bir operatördür:

- i. T 'nin $D(T)$ tanım bölgesi bir vektör uzay olup, $R(T)$ değer bölgesi, aynı cisim üzerinde bir vektör uzaydır.
- ii. Her $x, y \in D(T)$ ve α skaleri için,

$$T(x + y) = Tx + Ty$$

$$T(\alpha x) = \alpha Tx$$

dir [7].

Tanım 2.46: $L: \ell_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ lineer olsun. Eğer

- i. $x = (x_n)$ olmak üzere her n için $x_n \geq 0$ ise $L(x) \geq 0$
- ii. $e = (1, 1, \dots)$ için $L(e) = 1$
- iii. $(\varphi x)_n = x_{n+1}$ olmak üzere $L[(\varphi x)_n] = L(x)$ veya $L(x_{n+1}) = L(x_n)$

şartları sağlanıyorsa L 'ye bir Banach limiti denir [14].

Bütün Banach limitleri eşit olan diziye hemen hemen yakınsak dizi denir. Hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı $\hat{c}$, sıfıra hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı da $\hat{c}_0$ ile gösterilir ve $x = (x_k)$ dizisi s değerine hemen hemen yakınsak ise; $\hat{c} - \lim x_k = s$ yazılır.

Tanım 2.47: Sınırlı bir x dizisinin hemen hemen yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_p \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^p x_{n+i} = s \text{ (} n'ye \text{ göre düzgün olarak)}$$

olmasıdır [14].

Tanım 2.48: Hemen hemen tüm null (hemen hemen sıfıra yakınsayan) dizi uzayları ve hemen hemen tüm yakınsak dizi uzayları sırasıyla $\hat{c}_0$ ve $\hat{c}$ olmak üzere;

$$\hat{c}_0 = \left\{ x = (x_k) \in \ell_\infty : \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \frac{x_{n+k}}{m+1} = 0, n'e \text{ düzgün olarak} \right\}$$

$$\hat{c} = \left\{ x = (x_k) \in \ell_\infty : \exists \alpha \in \mathbb{R} \ni \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \frac{x_{n+k}}{m+1} = \alpha, n'edüzgün olarak \right\}$$

şeklinde tanımlanırlar. Ayrıca $\hat{c}$ uzayı $\|x\|_{\hat{c}} = \sup_{m,n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{j=0}^m \frac{x_{n+j}}{m+1} \right|$ normuyla bir Banach uzayıdır [15].

Tanım 2.49: Bir lineer X metrik uzayında $(b_n)_{n=0}^\infty$ dizisine, her bir $x \in X$ için $x = \sum_{n=0}^\infty \lambda_n \cdot b_n$ olacak şekilde bir tek (λ_n) skaler dizisi varsa bir Schauder bazı denir [1].

Tanım 2.50: $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için $a_{nk} \in \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) olmak üzere $A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris olsun. Eğer $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için $k > n$ olduğunda $a_{nk} = 0$ ve $a_{nn} \neq 0$ ise $A = (a_{nk})$ matrisine üçgen matris denir [2].

Tanım 2.51: $x = (x_k) \in w$ herhangi bir dizi ve $A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris olsun. Eğer

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (Ax)_k$$

ise $A = (a_{nk})$ matrisine regüler matris denir [16].

Tanım 2.52: X, Y herhangi iki dizi uzayı ve $n, k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $A = (a_{nk})$ reel sayıların sonsuz bir matrisi olsun. Bu taktirde her $n \in \mathbb{N}$ için

$$(Ax)_n = \sum_k a_{nk} x_k \quad (2.3)$$

olmak üzere her $x = (x_k) \in X$ dizisi için $Ax = \{(Ax)_n\}_{n=0}^\infty$ dizisi Y de ise A , X den Y ye bir matris dönüşümü tanımlar [16].

Tanım 2.53: $(X: Y)$ ile $A: X \rightarrow Y$ olacak şekilde bütün A matrislerinin sınıfını göstereceğiz.

Teorem 2.54: $A \in (X:Y)$ olması için gerek ve yeter şart (2.3)'ün sağ tarafındaki seri her bir $n \in \mathbb{N}$ ve her bir $x \in X$ için yakınsak ve her $x \in X$ için $Ax \in Y$ olmasıdır.

Tanım 2.55: w 'nin herhangi bir X alt kümesi için

$$X_A = \{x \in w: Ax \in X\}$$

kümesine X 'te A 'nın matris bölgesi denir.

Tanım 2.56: Bütün boş olmayan $\mathbb{N}$ 'nin sonlu alt kümelerinin koleksiyonunu F ile göstereceğiz.

Lemma 2.57(Toeplitz Teoremi): $A = (a_{nk})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki üç şartın sağlanmasıdır.

- i. $\forall n = 1, 2, 3 \dots$ için $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \leq M$ eşitsizliği sağlanacak şekilde $M > 0$ vardır,
- ii. $\forall k = 1, 2, 3 \dots$ için $\lim a_{nk} = 0$ dır,
- iii. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$

dir [2].

Tanım 2.58: (p_k) pozitif ve $P_n = \sum_{k=1}^n p_k$ olmak üzere

$$R^p = (r_{nk}^p)$$

şeklinde tanımlanan $R^p = (r_{nk}^p)$ Riesz matrisi bir Toeplitz matrisidir. Burada $n \rightarrow \infty$ iken $P_n \rightarrow \infty$ dır [6].

Lemma 2.59: Sonsuz bir $A = (a_{nk})$ matrisi hemen hemen yakınsayan her diziyi hemen hemen yakınsak bir diziye dönüştürmesi için gerek ve yeter şart

- i. $\|A\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |a_{nk}| < \infty$
- ii. $\hat{c} - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k a_{nk} = \alpha$
- iii. $\hat{c} - \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = \alpha_k \quad (\forall k \in \mathbb{N})$
- iv. $\lim_{q \rightarrow \infty} \sum_k \frac{1}{q+1} \left| \sum_{i=0}^q (a_{n+i, k-1} - \alpha_{k-1} + \alpha_k - a_{n+i, k}) \right| = 0$ (n 'e düzgün olarak)

koşullarının sağlanmasıdır [18].

Lemma 2.60: $A = (a_{nk}) \in (\hat{c}: \ell_{\infty})$ olması için gerek ve yeter şart $\|A\| < \infty$ olmasıdır [6].

3. FİBONACCİ SAYILARI YARDIMIYLA TANIMLANMIŞ DİZİ UZAYLARI VE BAZI KAPSAMA BAĞINTILARI

Tanım 3.1: Fibonacci sayıları $f_0 = 0$ ve $f_1 = 1$ olmak üzere $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}; n \geq 2$ şeklinde tekrar eden lineer denklemler ile tanımlanan $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ sayı dizisidir.

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ ve } \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

olmak üzere n -inci Fibonacci sayısı,

$$f_n = \frac{\varphi^n - \beta^n}{\varphi - \beta}$$

şeklinde bir formülle ifade edilmekte ve bu formüle Binet formülü denilmektedir. Binet' in formülünden hareketle,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \varphi$$

olduğu kolayca görülmektedir. Buradaki φ sayısı “Altın Oran” olarak isimlendirilmektedir.

Fibonacci sayılarının bazı özellikleri $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$\sum_{k=0}^n f_k^2 = f_n \cdot f_{n+1},$$

$$\sum_{k=0}^n f_k = f_{n+2} - 1,$$

$$\sum_{k=0}^n f_{2k+1} = f_{2n+2},$$

$$\sum_{k=0}^n f_{2k} = f_{2n+1} - 1 \text{ ve}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{f_k} \text{ yakınsak}$$

$$f_{n-1} \cdot f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^{n+1} \text{ tüm } n \geq 1 \text{ için (Cassini Formula)}$$

şeklinde verilebilir [19, 20].

Tanım 3.2: Fibonacci matrisi;

$$f_{nk} = \begin{cases} \frac{f_k}{f_{n+2}-1}, & (1 \leq k \leq n) \\ 0, & \text{aksi durumda} \end{cases}$$

olmak üzere $F = (f_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$ şeklindedir. Buda

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

dir. F matrisinin üçgensel matris olduğu görünüyor. Yani $k \leq n$ için $f_{nn} \neq 0$ ve $k > n$ için $(n = 1, 2, 3, \dots)$, $f_{nk} = 0$ dir ve ayrıca Lemma 2.57'ye göre bir regüler matristir.

Tanım 3.3:

$$Fx = \{F_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \text{ ve } F_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{nk}x_k = \frac{1}{f_{n+2}-1} \sum_{k=1}^n f_{nk}x_k, (n \in \mathbb{N})$$

olmak üzere aşağıdaki dizi uzaylarını tanımlayabiliriz [10].

$$c(F) = \{x = (x_k) \in w : F_x \in c\}$$

$$c_0(F) = \{x = (x_k) \in w : F_x \in c_0\}$$

$$\ell_{\infty}(F) = \{x = (x_k) \in w : F_x \in \ell_{\infty}\}$$

Tanım 3.4: Fibonacci matrisi kullanılarak oluşturulan $\ell_p(\hat{F})$ uzayı

$$\ell_p(\hat{F}) = \{x \in w : \hat{F}x \in \ell_p\}, (1 \leq p \leq \infty)$$

şeklindedir. Burada $\hat{F} = (\hat{f}_{nk}), (f_n)$ Fibonacci dizisiyle oluşturulmuş çift band matrisidir ve

$$\hat{f}_{nk} = \begin{cases} -\frac{f_{n+1}}{f_n}, & k = n-1 \\ \frac{f_n}{f_{n+1}}, & k = n \\ 0, & 0 \leq k < n-1 \text{ veya } k > n \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{N}$$

şeklindedir [21].

Tanım 3.5: $\hat{F}(r, s) = (\hat{f}_{nk}(r, s))$ Fibonacci matrisi r, s sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$\hat{f}_{nk}(r, s) = \begin{cases} s \frac{f_{n+1}}{f_n} & , \quad k = n - 1 \\ r \frac{f_n}{f_{n+1}} & , \quad k = n \\ 0 & , \quad 0 \leq k < n - 1 \text{ veya } k > n \end{cases} \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanmıştır. (3.1) kullanılarak $\hat{c}^{f(r,s)}$ dizi uzayının $\hat{c}$ uzayındaki dönüşümü $\hat{F}(r, s)$ dönüşümü

$$\hat{c}^{f(r,s)} = \left\{ x = (x_k) \in \ell_\infty : \exists \alpha \in \mathbb{R} \ni \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^m \frac{y_{n+j}}{m+1} = \alpha, n' \text{ de düzgün olarak} \right\}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Burada $y = y_n$ dizisi bir $x = x_n$ dizisinin $\hat{F}(r, s)$ dönüşümüdür ve

$$y_n = \hat{F}(r, s)_n(x) = \begin{cases} rx_0 & , \quad n = 0 \\ r \frac{f_n}{f_{n+1}} x_n + s \frac{f_{n+1}}{f_n} x_{n-1} & , \quad n \geq 1 \end{cases} \quad (3.2)$$

şeklinde. Burada açıkça görüleceği gibi $\hat{c}^{f(r,s)}$ uzayı $\hat{c}^{f(r,s)} = \hat{c}_{\hat{F}(r,s)}$ şeklinde de yazılabilir.

Eğer $\alpha = 0$ ise $\hat{c}^{f(r,s)}$ uzayı $\hat{c}_0^{f(r,s)}$ şeklinde gösterilecektir. Burada $\hat{F}(r, s)$ matrisi $r = 1$ ve $s = -1$ durumunda $\hat{F}$ matrisine indirgenebilir [22, 23].

Teorem 3.6: $c(F)$, $c_0(F)$ ve $\ell_\infty(F)$ uzayları

$$\|x\|_{X(F)} = \|Fx\|_X = \sup_n |F_n(x)|$$

ile verilen normla BK-uzaylarıdır. Burada $X \in \{c, c_0, \ell_\infty\}$ dir [2].

Uyarı 3.7: $c(F)$, $c_0(F)$ ve $\ell_\infty(F)$ mutlak değer özelliğini sağlamadığı rahatlıkla görülebilir. Yani $|x| = (|x_k|)$ olmak üzere en az bir $x \in \{c(F), c_0(F), \ell_\infty(F)\}$ için $\|x\|_{X(F)} \neq \||x|\|_{X(F)}$ dir. Buradan $c(F)$, $c_0(F)$ ve $\ell_\infty(F)$ BK-uzaylarının mutlak değer özelliğini sağlamadığı görülür.

Teorem 3.8: $c(F)$, $c_0(F)$ ve $\ell_\infty(F)$ dizi uzayları sırasıyla c , c_0 ve ℓ_∞ uzaylarına izomorfturlar. Yani $c(F) \cong c$, $c_0(F) \cong c_0$ ve $\ell_\infty(F) \cong \ell_\infty$ dur.

İspat: X ; c , c_0 ve ℓ_∞ dan herhangi biriyle ve $X(F)$ sırasıyla $c(F)$, $c_0(F)$ ve $\ell_\infty(F)$ uzaylarından biri ile tanımlıdır. F matrisi üçgensel olduğundan tersi de bir üçgensel matristir ve bu bir tektir. Böylece $L_F: X(F) \rightarrow X$ lineer operatörü bütün $x \in X(F)$ için $L_F(x) = F(x)$ olacak şekilde tanımlıdır. Buradan $X(F) \cong X$ elde edilir [2].

Teorem 3.9: $c_0(F) \subset c(F) \subset \ell_\infty(F)$ dir.

İspat: Her $k \in \mathbb{N}$ için $x_k = 1$ ve $x = x_k$ dizisi için her $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $F_n(x) = \frac{1}{f_{n+2}-1} \sum_{k=1}^n f_k = 1$ elde edilir. Bu da bize $Fx \in c$ ve $Fx \notin c_0$ olduğunu gösterir. Yine buradan $x \in c(F)$ ve $x \notin c_0(F)$ dir. Bundan dolayı $c_0(F) \subset c(F)$ kesin sağlanır.

$x = (x_k)$ dizisi; $x_k = \frac{(-1)^k(f_{k+2}+f_{k+1}-1)}{f_k}$, $k \in \mathbb{N}$ şeklinde tanımlansın. Buna göre her $n \in \mathbb{N}$ için $F_n(x) = \frac{1}{f_{n+2}-1} \sum_{k=1}^n f_k x_k = (-1)^n$ dir. Buda bize $Fx \in \ell_\infty$ ve $Fx \notin c$ olduğunu gösterir. Buradan $x \in \ell_\infty(F)$ ve $x \notin c(F)$ olur. Dolayısıyla $c(F) \subset \ell_\infty(F)$ kesin sağlanır. $c_0(F) \subset c(F) \subset \ell_\infty(F)$ açıktır.

Teorem 3.10: $c_0 \subset c_0(F)$, $c \subset c(F)$ ve $\ell_\infty \subset \ell_\infty(F)$ dir.

İspat: F bir regüler matris olduğundan $c_0 \subset c_0(F)$ ve $c \subset c(F)$ dir. Şimdi $x = (x_k) \in \ell_\infty$ olsun. Her $k \in \mathbb{N}$ için $|x_k| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ vardır. Buradan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|F_n(x)| \leq \frac{1}{f_{n+2}-1} \sum_{k=1}^n f_k |x_k| \leq \frac{M}{f_{n+2}-1} \sum_{k=1}^n f_k = M$$

dir. Bu da bize $Fx \in \ell_\infty$ yani $x \in \ell_\infty(F)$ olduğunu gösterir. Böylece $\ell_\infty \subset \ell_\infty(F)$ olduğu gösterilmiş olur.

Örnek 3.11: $x = (x_k) = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$ dizisini düşündüğümüzde her $n \in \mathbb{N}$ için

$$F_n(x) = \frac{1}{f_{n+2}-1} \sum_{k=1}^n f_k x_k = \frac{1}{f_{n+2}-1} (f_1 + f_3 + \dots + f_n)$$

elde ederiz. Bu yakınsaktır. Bu da bize $Fx \in c$ fakat $x \notin c$ olduğunu gösterir. Böylece $x \in c(F)$ dir. Bundan dolayı $c \subset c(F)$ olduğu görülür. Benzer şekilde diğerleri de gösterilebilir.

Teorem 3.12: $\hat{c}_0^{f(r,s)}$ ve $\hat{c}^{f(r,s)}$ uzayları sırasıyla $\hat{c}_0$ ve $\hat{c}$ uzaylarını kapsar.

İspat: $\hat{F}(r, s)$ matrisi Lemma 2.59'un şartlarını sağladığı için $(\hat{c}_0; \hat{c})$ sınıfındadır. O halde $x \in \hat{c}_0$ veya $x \in \hat{c}$ ise $\hat{F}(r, s)x \in \hat{c}_0$ veya $\hat{F}(r, s)x \in \hat{c}$ olur ki bu da $\hat{c}_0 \subset \hat{c}_0^{f(r,s)}$ ve $\hat{c} \subset \hat{c}^{f(r,s)}$ olduğunu gösterir. Şimdi de her $n \in \mathbb{N}$ için $(k_n) = \left(\frac{(-s)^n f^2(n+1)}{r^{n+1}} \right)$ dizisini alalım. Eğer $\lambda \in \{\hat{c}_0, \hat{c}\}$ ise $\hat{F}(r, s)(k_n) = (1, 0, 0, \dots, 0, \dots) = e^0 \in \lambda$ olur ki $(k_n) \in \lambda_{\hat{F}(r,s)} \setminus \lambda$ sonucuna varılır. Böylece $\hat{c}_0 \subset \hat{c}_0^{f(r,s)}$ ve $\hat{c} \subset \hat{c}^{f(r,s)}$ olduğu ispatlanır.

Teorem 3.13: Eğer $|s/r| < 1/4$ ise $\hat{c}_0^{f(r,s)} \subset \ell_\infty$ ve $\hat{c}^{f(r,s)} \subset \ell_\infty$ kapsama bağıntıları sağlanır.

İspat: $\hat{c}^{f(r,s)} \subset \ell_\infty$ olduğunu ispatlamak için $|s/r| < 1/4$ olduğunu kabul edelim ve herhangi bir $x \in \hat{c}^{f(r,s)}$ alalım. O halde $y = \hat{F}(r,s)x \in \hat{c} \subset \ell_\infty$ olur. $\hat{F}^{-1}(r,s)$ ters matrisi Lemma 2.60'ın şartlarını sağlar ve

$$\|A\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |f_{nk}^{-1}(r,s)| \leq \frac{1}{\inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{rf_n}{f_{n+1}}} \sum_k \left(\frac{\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{sf_{n+2}}{f_{n+1}}}{\inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{rf_n}{f_{n+1}}} \right)^k \leq \frac{2}{r} \sum_k \left(\frac{4s}{r} \right)^k < \infty$$

olur ki bu da $(\hat{c}; \ell_\infty)$ sınıfının şartlarını sağlar. Böylece $x = \hat{F}^{-1}(r,s)y \in \ell_\infty$ dur ve $\hat{c}^{f(r,s)} \subset \ell_\infty$ bağıntısı sağlanır. Şimdi $|s/r| \geq 1/4$ alalım. $u = (u_k)$ (0'lar 100 tane, 1'ler 10 tane blok olarak artan şekilde) sınırlı dizisini $u = (0, \dots, 0, \dots, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1, \dots)$ şeklinde verelim [24]. $\hat{F}(r,s)u$ dizisi hemen hemen yakınsak olmadığından $u \in \ell_\infty \setminus \hat{c}^{f(r,s)}$ olur. Böylece $\hat{c}^{f(r,s)} \subset \ell_\infty$ kapsama bağıntısının geçerli olduğu gösterilmiş olur. Yine benzer şekilde $\hat{c}_0^{f(r,s)} \subset \ell_\infty$ olduğu gösterilebilir.

Teorem 3.14: $\hat{c}^{f(r,s)}$ uzayı ile $\hat{c}$ uzayı lineer izomorfiktir yani; $\hat{c}^{f(r,s)} \cong \hat{c}$ 'dır.

İspat: Teoremi ispatlamadan önce, $\hat{c}^{f(r,s)}$ uzayından $\hat{c}$ uzayına bir L dönüşümünün varlığına ihtiyaç duyuyoruz. Bu sebepten L dönüşümünü (3.2) notasyonu yardımı ile $\hat{c}^{f(r,s)}$ uzayından $\hat{c}$ 'ye dönüşümü $x \rightarrow y = Lx = \hat{F}(r,s)x$ şeklinde olsun. L 'nin lineer ve birebir olduğu açıktır. L dönüşümünün örten olduğunu göstermek için öncelikle keyfî bir $y = (y_k) \in \hat{c}$ alalım ve bu diziyi $\hat{F}^{-1}(r,s)$ ters matrisinde yerine yazdığımızda her $k \in \mathbb{N}$ için;

$$x_k = \{\hat{F}^{-1}(r,s)y\}_k = \sum_{j=0}^k \frac{1}{r} \left(\frac{-s}{r} \right)^{k-j} \frac{f_{k+1}^2}{f_j f_{j+1}} y_j$$

dizisini elde ederiz. O halde (x_k) dizisini (3.2)'de yazdığımızda her $k \in \mathbb{N}$ için

$$r \frac{f_k}{f_{k+1}} x_k + s \frac{f_{k+1}}{f_k} x_{k-1} = r \frac{f_k}{f_{k+1}} \sum_{j=0}^k \frac{1}{r} \left(\frac{-s}{r} \right)^{k-j} \frac{f_{k+1}^2}{f_j f_{j+1}} y_j + s \frac{f_{k+1}}{f_k} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{r} \left(\frac{-s}{r} \right)^{k-j-1} \frac{f_k^2}{f_j f_{j+1}} y_j = y_k$$

olur. Sonuç olarak

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^m \frac{r \frac{f_{k+j}}{f_{k+1+j}} x_{k+j} + s \frac{f_{k+1+j}}{f_{k+j}} x_{k-1+j}}{m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^m y_{k+j} = \hat{c} - \lim y_k$$

elde edilir ki bu da $x = (x_k) \in \hat{c}^{f(r,s)}$ olduğunu gösterir. Yani L örtendir. Sonuç olarak L lineer, birebir ve örten olduğundan $\hat{c}^{f(r,s)}$ ve $\hat{c}$ uzayları lineer olarak izomorfiktir ve bu da ispatı tamamlar.

Not 3.15: Bir μ lineer metrik dizi uzayının μ_A alt matrisinin bir bazının olması için gerek ve yeter şart μ 'nün bir baza sahip olmasıdır [25].

Lemma 3.16: $\hat{c}$ Banach uzayının Schauder bazı yoktur [26].

Sonuç 3.17: $\hat{c}^{f(r,s)}$ uzayının Schauder bazı yoktur.

İspat : Banach uzayının Schauder bazı olmadığından ve not dikkate alındığında $\hat{c}^{f(r,s)}$ uzayının Schauder bazı yoktur.

4. $\ell_p(F)$ DİZİ UZAYI VE BAZI ÖZELLİKLERİ

Son zamanlarda Fibonacci sayılarıyla ilgili pek çok yazar çalışmıştır. Kara $\ell_p(\hat{F})$ uzayını verdi [21]. Ayrıca Candan $c_0(\hat{F}(r, s))$ ve $c(\hat{F}(r, s))$ uzaylarını çalıştı [22]. Kara ve Demiriz $c_0(\hat{F}, p)$, $c(\hat{F}, p)$ ve $\ell_\infty(\hat{F}, p)$ uzaylarını [27], Talebi ve Dehghan $F_{w,p}$ ($1 \leq p < \infty$) uzaylarını gösterdiler [28]. Debnath ve Saha [10]

$$f_{nk} = \begin{cases} \frac{f_k}{f_{n+2} - 1}, & (1 \leq k \leq n) \\ 0, & \text{aksi durumda} \end{cases} \quad (4.1)$$

olacak şekilde yeni bir $F = (f_{nk})_{n,k=0}^\infty$ Fibonacci matrisi tanımladılar. Bu üçgensel bir matristir. $k \leq n$ için $f_{nn} \neq 0$ ve $k > n$ için ($n = 1, 2, 3, \dots$), $f_{nk} = 0$ dır. ve ayrıca bir regüler matristir. Onlar aynı zamanda $F_x = \{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ olmak üzere aşağıdaki dizi uzaylarını gösterdiler.

$$c(F) = \{x = (x_k) \in w : F_x \in c\}$$

$$c_0(F) = \{x = (x_k) \in w : F_x \in c_0\}$$

$$\ell_\infty(F) = \{x = (x_k) \in w : F_x \in \ell_\infty\}$$

Onlar bu uzayların bazı temel topolojilerini ve cebirsel özelliklerini çalıştılar. Onlar $c(F)$, $c_0(F)$ ve $\ell_\infty(F)$ uzaylarının

$$\|x\|_{X(F)} = \|F_x\|_X = \sup_n |f_n(x)| \quad (4.2)$$

ile verilen normla BK-uzayları olduklarını gösterdiler. Burada $X = \{c, c_0, \ell_\infty\}$ dur. Onlar aynı zamanda bu uzaylar için bazı kapsama bağıntılarını verdiler.

Şimdi, F dönüşümleri ℓ_p uzayında olacak şekilde bütün dizilerin cümlesi olarak $\ell_p(F)$ dizi uzayını aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$\ell_p(F) = \{x = (x_k) \in w : F_x \in \ell_p\}, \quad 0 < p < \infty$$

Burada

$$F_x = \{f_n(x)\}_{n=0}^\infty \text{ ve } f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f_{k+1}}{f_{n+3} - 1} x_k, \quad (n \in \mathbb{N})$$

dir. Çalışmamızda $p \rightarrow \infty$ iken, [17]'ye göre ℓ_∞ uzayını kastediyoruz. Şimdi $y = (y_k)$ dizisini her $k \in \mathbb{N}$ için, bir $x = (x_k)$ dizisinin F dönüşümü kullanılarak aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$y_k = \sum_{k=0}^n \frac{f_{k+1}}{f_{n+3} - 1} x_k \quad (4.3)$$

Teorem 4.1: $\ell_p(F)$ koordinatsal toplama ve skaler çarpma işlemleriyle lineer uzaydır. Ve

(i) $\ell_p(F)$ uzayı p -normu $\|x\|_{\ell_p(F)} = \|F_x\|_{\ell_p}$ ile birlikte

$$\|x\|_{\ell_p(F)} = \sum_n |f_n(x)|^p ; (0 < p < 1) \quad (4.4)$$

tam p -normlu uzaydır.

(ii) $\ell_p(F), \|x\|_{\ell_p(F)} = (\sum_n |f_n(x)|^p)^{\frac{1}{p}} ; (1 \leq p < \infty)$ (4.5)

ve

$$\|x\|_{\ell_\infty(F)} = \sup_n |f_n(x)| \quad (4.6)$$

normları ile birlikte BK-uzaylarıdır.

İspat: (i) Bu rutin bir doğrulamadır. (ii) ℓ_p 'nin her zamanki normu olan bir BK-uzayına sahibiz ve F matrisi üçgenseldir. Bu nedenle, $\ell_p(F)$ Wilansky'nin 4.3.12 Teoreminden BK-uzayıdır. ([2,p.63])

Teorem 4.2: $\ell_p(F)$ uzayı $p = 2$ hariç $1 \leq p < \infty$ için bir iç çarpım uzayı değildir ve dolayısıyla Hilbert uzayı değildir.

İspat: x ve y dizilerini $x = (x_k) = (1, 1, -1, 0, \dots)$ ve $y = (y_k) = (1, -3, 1, 0, 0, \dots)$ şeklinde tanımlayalım. Ayrıca $(Fx)_n = (1, 1, 0, 0, \dots)$ ve $(Fy)_n = (1, -1, 0, 0, \dots)$ ifadelerine sahibiz. Böylece

$$\|x + y\|_{\ell_p(F)}^2 + \|x - y\|_{\ell_p(F)}^2 = 8 \neq 4 \left(2^{\frac{2}{p}} \right) = \left(\|x\|_{\ell_p(F)}^2 + \|y\|_{\ell_p(F)}^2 \right), \quad (p \neq 2)$$

dir.

Bu nedenle $p \neq 2$ iken $\ell_p(F)$ uzayının normu paralelkenar eşitliğini sağlamaz. Bu da bu normun bir iç çarpımdan elde edilemeyeceği anlamına gelir. Bu ispatı tamamlar.

Sonuç 4.3: $\ell_\infty(F)$ bir Hilbert uzayı değildir.

Sonuç 4.4: $\ell_p(F)$, $0 < p \leq \infty$ olmak üzere bir Frechet uzayıdır.

İspat: $\ell_p(F)$ ve $\ell_\infty(F)$ lineer uzaylardır ve cebirsel işlemlerin bu uzaylar üzerinde sürekli olduğunu kolayca ispatlayabiliriz. Ayrıca $\ell_p(F)$ ve $\ell_\infty(F)$ 'nin tamlığını Teorem 4.1'den biliyoruz. Dolayısıyla bunlar Frechet uzaylarıdır.

Sonuç 4.5: Mutlak değer özelliği $0 < p \leq \infty$ olmak üzere $\ell_p(F)$ uzayında sağlanmaz.

İspat: $1 \leq p < \infty$ için $\ell_p(F)$ üzerindeki normu kullanarak, $\ell_p(F)$ 'nin aşağıdaki eşitsizlikten dolayı mutlak değer özelliğinin olmadığını söyleyebiliriz.

$$\|x\|_{\ell_p(F)} = \left(\sum_n \left| \sum_{k=0}^n \frac{f_{k+1}}{f_{n+3}-1} x_k \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \neq \left(\sum_n \left| \sum_{k=0}^n \frac{f_{k+1}}{f_{n+3}-1} |x_k| \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \| |x| \|_{\ell_p(F)}$$

burada $|x| = (|x_k|)$ dir. Dolayısıyla benzer şekilde $0 < p < 1$ ve $p = \infty$ için (4.4) ve (4.2) ile verilen normlar kullanılarak ispatlanabilir.

Teorem 4.6: $\ell_p(F)$ uzayı ℓ_p uzayına izometrik olarak izomorfiktir. Yani $0 < p \leq \infty$ için $\ell_p(F) \cong \ell_p$ dir.

İspat: Teoremi ispatlamak için $0 < p \leq \infty$ için $\ell_p(F)$ uzayı ile ℓ_p uzayı arasında doğrusal bir eşlemenin varlığını gösterebiliriz. $\ell_p(F)$ uzayından ℓ_p uzayına $x \rightarrow y = Tx$ olacak şekilde (4.3) notasyonu ile verilen T dönüşümünü düşünelim. Burada her $x \in \ell_p(F)$ için $Tx = y = Fx \in \ell_p$ olduğundan T 'nin doğrusallığı açıktır. $Tx = 0$ olduğunda $x = 0$ olması önemsizdir. Bu nedenle T birebirdir.

Ayrıca, $y = (y_k) \in \ell_p$ verilsin ve $x = (x_k)$ dizisini şu şekilde tanımlayalım:

$$x_k = \sum_{j=k-1}^k (-1)^{k-j} \frac{f_{j+3}-1}{f_{k+1}} y_j; \quad (k \in \mathbb{N}). \quad (4.7)$$

(4.7) notasyonunu kullanarak, $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f_{k+1}}{f_{n+3}-1} x_k \\ &= \frac{1}{f_{n+3}-1} \sum_{k=0}^n [(f_{k+3}-1)y_k - (f_{k+2}-1)y_{k-1}] \\ &= y \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu, $y \in \ell_p$ anlamına gelir. Buradan $y = Fx \in \ell_p$ elde ederiz. Böylece $x \in \ell_p(F)$ ve $Tx = y$ olduğunu anlıyoruz. Dolayısıyla T örtendir. Herhangi bir $x \in \ell_p(F)$ için, Teorem 4.1'deki (4.4)-(4.6)'ya göre

$$\|Tx\|_{\ell_p} = \|y\|_{\ell_p(F)} = \|Fx\|_{\ell_p} = \|x\|_{\ell_p(F)}$$

bu da T 'nin p -norm olduğunu ve sırasıyla $0 < p < 1$ ve $1 \leq p \leq \infty$ durumlarında normu koruduğunu gösterir. Dolayısıyla, T izometridir. Sonuç olarak $\ell_p(F)$ ve ℓ_p uzayları $0 < p \leq \infty$ için izometrik olarak izomorfiktir. Bu ispatı tamamlar.

Lemma 4.7: $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ Fibonacci sayılarının dizisi olsun. Bu takdirde

$$\sup_k \left(f_{k+1} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{f_{n+3} - 1} \right) < \infty$$

dir.

Teorem 4.8: $\ell_p \subset \ell_p(F)$ kapsaması $1 \leq p \leq \infty$ için sağlanır.

İspat: Önce $p = 1$ için teoremi ispatlayabiliriz. $x = (x_k) \in \ell_1$ olsun.

$$\begin{aligned} \|x\|_{\ell_1(F)} &= \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{f_{n+3}} \sum_{k=0}^n f_{k+1} |x_k| \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} |x_k| f_{k+1} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{f_{n+3}} \\ &\leq A \sum_{k=0}^{\infty} |x_k| \\ &= A \|x\|_{\ell_1} < \infty. \end{aligned}$$

Dolayısıyla, $x \in \ell_1(F)$ ve $\ell_1 \subset \ell_1(F)$ olur.

Şimdi $1 < p < \infty$ ve $x = (x_k) \in \ell_p$ olsun. Hölder eşitsizliğinden her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} |f_n(x)|^p &\leq \left[\sum_{k=0}^n \frac{f_{k+1}}{f_{n+3} - 1} |x_k| \right]^p \\ &\leq \left[\sum_{k=0}^n \frac{f_{k+1}}{f_{n+3} - 1} |x_k|^p \right] \left[\sum_{k=0}^n \frac{f_{k+1}}{f_{n+3} - 1} \right]^{p-1} \\ &= \frac{1}{f_{n+3} - 1} \sum_{k=0}^n f_{k+1} |x_k|^p. \end{aligned}$$

Ayrıca

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|^p &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{f_{n+3} - 1} \sum_{k=0}^n f_{k+1} |x_k|^p \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p f_{k+1} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{f_{n+3} - 1} \end{aligned}$$

ve

$$\|x\|_{\ell_p(F)}^p \leq A \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p = A \|x\|_{\ell_p}^p < \infty$$

dir. Burada Lemma 4.7'den $A = \sup_k \left(f_{k+1} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{f_{n+3}-1} \right) < \infty$ dur. Bu $x \in \ell_p(F)$ anlamına gelir. Bu nedenle $1 < p < \infty$ iken $\ell_p \subset \ell_p(F)$ kapsaması sağlanır.

$p = \infty$ ve $x = (x_k) \in \ell_{\infty}$ olsun. Her $k \in \mathbb{N}$ için $|x_k| \leq A$ olacak şekilde en az bir $A > 0$ vardır. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &\leq \frac{1}{f_{n+3}-1} \sum_{k=0}^n f_{k+1} |x_k| \\ &\leq \frac{A}{f_{n+3}-1} \sum_{k=0}^n f_{k+1} = A. \end{aligned}$$

Bunun anlamı $f_n(x) \in \ell_{\infty}$ dur. Bu nedenle, $\ell_{\infty} \subset \ell_{\infty}(F)$ kapsaması sağlanır.

Teorem 4.9: $\ell_p(F) \subset \ell_p$ kapsaması $1 \leq p \leq \infty$ için sağlanır.

İspat: [16]'da Sonuç 4.7 ve [29]'da Sonuç 4.19'dan elde edilebilir.

Teorem 4.10: $0 < p < \infty$ olmak üzere $\ell_p(F) \subset c_0(F) \subset c(F) \subset \ell_{\infty}(F)$ kesin olarak sağlanır.

İspat: [10]'dan $c_0(F) \subset c(F) \subset \ell_{\infty}(F)$ kapsamasına sahibiz. $x = (x_k) \in \ell_p(F)$ olsun. Ayrıca, $f_n(x) \in \ell_p$ olduğunu biliyoruz ve bu $f_n(x) \in c_0$ anlamına gelir. Dolayısıyla $x \in c_0(F)$ iken $\ell_p(F) \subset c_0(F)$ kapsaması geçerlidir. Şimdi $0 < p < \infty$ iken, her $k \in \mathbb{N}$ için $x_k = 1/(1+k)^{1/p}$ şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini düşünelim.

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= \frac{1}{f_{n+3}-1} \sum_{k=0}^n \frac{f_{k+1}}{(1+k)^{1/p}} \\ &\geq \frac{(1+n)^{-1/p}}{f_{n+3}-1} \sum_{k=0}^n f_{k+1} \\ &= \frac{1}{(1+n)^{1/p}} \end{aligned}$$

dir.

Dolayısıyla, $Fx \notin \ell_p$ ve $x \notin \ell_p(F)$. Buradan $x \in c_0(F)$ ancak $x \notin \ell_p(F)$. Bu nedenle $0 < p < \infty$ için $\ell_p(F) \subset c_0(F)$ kapsaması geçerlidir.

Teorem 4.11: Eğer $0 < p < s < \infty$ ise bu taktirde $\ell_p(F) \subset \ell_s(F)$ kesin sağlanır.

İspat: $0 < p < s < \infty$ olsun. $\ell_p(F) \subset \ell_s(F)$ sağlanması $\ell_p \subset \ell_s$ sağlanması ile mümkündür. O zaman, $x = (x_k) \in \ell_s(F)$ ancak $x = (x_k) \notin \ell_p(F)$ olduğunu göstermeliyiz. $y = (y_k)$ dizisini x dizisi cinsinden şu şekilde tanımlayalım. Her $k \in \mathbb{N}$ için;

$$y_k = \frac{x_k(f_{k+3} - 1) - x_{k-1}(f_{k+2} - 1)}{f_{k+1}}.$$

O halde, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} f_n(y) &= \frac{1}{f_{n+3} - 1} \sum_{k=0}^n f_{k+1} y_k \\ &= \frac{1}{f_{n+3} - 1} \sum_{k=0}^n x_k(f_{k+3} - 1) - x_{k-1}(f_{k+2} - 1) \\ &= x_n \end{aligned}$$

dir. Bu $f_n(y) = x$ ve dolayısıyla $Fy \in \ell_s \setminus \ell_p$ olduğu anlamına gelir. Böylece, $y = (y_k) \in \ell_s(F)$ ancak $y = (y_k) \notin \ell_p(F)$. Bu nedenle $\ell_p(F) \subset \ell_s(F)$ dir.

Teorem 4.1 ve Teorem 4.6'dan aşağıdaki sonucu elde ettik.

Teorem 4.12: $1 \leq p < \infty$ olsun ve her $k \in \mathbb{N}$ için $b^{(k)} \in \ell_p(F)$ dizisi, $n \in \mathbb{N}$ için

$$(b^{(k)})_n = \begin{cases} \frac{1 - f_{k+3}}{f_{n+1}} & k = n - 1 \\ \frac{f_{n+3} - 1}{f_{n+1}} & k = n \\ 0 & 0 \leq k < n - 1 \text{ veya } k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu taktirde $(b^{(k)})_{k=0}^{\infty}$ dizisi $\ell_p(F)$ için bazdır ve her $x \in \ell_p(F)$ için

$$x = \sum_k f_k(x) b^k$$

şeklinde bir tek gösterime sahiptir.

Sonuç 4.13: $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\ell_p(F)$ ayrılabilir uzaydır.

5. $\ell_p(F)$ UZAYININ α -, β - VE γ - DUALLERİ

Teoremleri kanıtlamak için aşağıdaki lemmalarla başlayalım [30].

Lemma 5.1: $A \in (\ell_p: \ell_1)$ ancak ve ancak

(i) $1 < p \leq \infty$ için

$$\sup_{F \in \mathcal{F}} \sum_k \left| \sum_{n \in F} a_{nk} \right|^q < \infty. \quad (5.1)$$

(ii) $p = 1$ için

$$\sup_k \sum_n |a_{nk}| < \infty. \quad (5.2)$$

Lemma 5.2: $A \in (\ell_p: c)$ ancak ve ancak

(i) $1 < p < \infty$ için

$$\lim_n a_{nk}, \text{ her } k \in \mathbb{N}, \quad (5.3)$$

$$\sup_n \sum_k |a_{nk}|^q < \infty. \quad (5.4)$$

(ii) $p = 1$ için

$$\lim_n a_{nk}, \text{ her } k \in \mathbb{N} \\ \sup_{n,k} |a_{nk}| < \infty. \quad (5.5)$$

(iii) $p = \infty$ için

$$\lim_n a_{nk}, \text{ her } k \in \mathbb{N}, \\ \sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty, \quad (5.6)$$

$$\lim_n \sum_k |a_{nk} - \lim_n a_{nk}| = 0. \quad (5.7)$$

Lemma 5.3: $A \in (\ell_p: \ell_\infty)$ ancak ve ancak

(i) $1 < p \leq \infty$ için (5.4) sağlanır.

(ii) $p = 1$ için (5.5) sağlanır.

Teorem 5.4:

$$d_1^q = \left\{ a = (a_k) \in w: \sup_{F \in \mathcal{F}} \sum_k \left| \sum_{n \in F} t_{nk} \right|^q < \infty \right\},$$

$$d_2 = \left\{ a = (a_k) \in w : \sup_k \left| \frac{f_{k+3} - 1}{f_{k+1}} a_k \right| < \infty \right\}.$$

cümlelerini tanımlayalım. Bu taktirde, $\{\ell_1(F)\}^\alpha = d_2$ ve $1 < p \leq \infty$ olmak üzere $\{\ell_p(F)\}^\alpha = d_1^q$ dir.

İspat: $a = (a_k) \in w$ ve $1 < p \leq \infty$ olsun. (4.7) ve (4.3) ü kullanarak ; her $n \in \mathbb{N}$ için

$$a_n x_n = \sum_{k=n-1}^n (-1)^{n-k} \frac{f_{k+3} - 1}{f_{n+1}} a_n y_k = T_n(y) \quad (5.8)$$

elde ediyoruz. Burada $T = (t_{nk})$ matrisi her $n, k \in \mathbb{N}$ için şu şekilde tanımlanır:

$$t_{nk} = \begin{cases} (-1)^{n-k} \frac{f_{k+3} - 1}{f_{n+1}} a_n & n-1 \leq k \leq n \\ 0 & k < n-1 \text{ veya } k > n. \end{cases}$$

Böylece, (5.8) ile $x = (x_k) \in \ell_p(F)$ olduğunda $ax = (a_n x_n) \in \ell_1$ olduğunu ancak ve ancak $y = (y_k) \in \ell_p$ olduğunda $Ty \in \ell_1$ iken gözlemliyoruz. Bu, $a = (a_k) \in \{\ell_p(F)\}^\alpha$ ancak ve ancak $T \in (\ell_p; \ell_1)$ olduğu anlamına gelir. Bu nedenle Lemma 5.1'de A yerine T yazarak $a \in \{\ell_p(F)\}^\alpha$ ancak ve ancak

$$\sup_{F \in \mathcal{F}} \sum_k \left| \sum_{n \in F} t_{nk} \right|^q < \infty$$

elde ederiz.

$p = 1$ olsun. (5.8)'den, $a = (a_{nk}) \in \{\ell_1(F)\}^\alpha$ ancak ve ancak $B \in (\ell_1; \ell_1)$ ile eşdeğer olan

$$\sup_k \sum_n |t_{nk}| < \infty \quad (5.9)$$

ifade (5.2)'den yazılabilir. Ayrıca her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_n |t_{nk}| = \sum_{n=k}^{k+1} \left| \frac{f_{k+3} - 1}{f_{n+1}} a_n \right|.$$

Bu nedenle,

$$\sup_k \sum_n |t_{nk}| < \infty$$

ancak ve ancak

$$\sup_k \left| \frac{f_{k+3} - 1}{f_{k+1}} a_k \right| < \infty.$$

Bu da $\{\ell_1(F)\}^\alpha = d_2$ anlamına gelir.

Teorem 5.5: Her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\hat{\Delta} \left(\frac{a_k}{f_{k+1}} \right) (f_{k+1} - 1) = \left(\frac{a_k}{f_{k+1}} - \frac{a_{k+1}}{f_{k+2}} \right) (f_{k+3} - 1)$$

olmak üzere

$$d_3^q = \left\{ a = (a_k) \in w : \sum_k \left| \hat{\Delta} \left(\frac{a_k}{f_{k+1}} \right) (f_{k+3} - 1) \right|^q < \infty \right\},$$

$$d_4 = \left\{ a = (a_k) \in w : \lim_k \frac{f_{k+3} - 1}{f_{k+1}} a_k = 0 \right\}$$

şeklinde d_3^q ve d_4 tanımlayalım. Bu taktirde $\{\ell_1(F)\}^\beta = d_2$, $\{\ell_\infty(F)\}^\beta = d_3^1 \cap d_4$ ve

$1 < p < \infty$ olmak üzere $\{\ell_p(F)\}^\beta = d_2 \cap d_3^q$ dur.

İspat: $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k x_k &= \sum_{k=0}^n \left[\sum_{j=k-1}^k (-1)^{k-j} \frac{f_{j+3} - 1}{f_{k+1}} y_j \right] a_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \hat{\Delta} \left(\frac{a_k}{f_{k+1}} \right) (f_{k+3} - 1) y_k + \frac{f_{n+3} - 1}{f_{n+1}} a_n y_n = C_n(y) \end{aligned} \quad (5.10)$$

denklemini düşünelim. Burada $C = (c_{nk})$, $n, k \in \mathbb{N}$ için şu şekilde tanımlanan matristir

$$c_{nk} = \begin{cases} \hat{\Delta} \left(\frac{a_k}{f_{k+1}} \right) (f_{k+3} - 1) & k < n \\ \frac{f_{n+3} - 1}{f_{n+1}} a_n & k = n \\ 0 & k > n. \end{cases}$$

O zaman C matrisinin sütunlarının c uzayında olduğu açıktır, çünkü her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_n c_{nk} = \hat{\Delta} \left(\frac{a_k}{f_{k+1}} \right) (f_{k+3} - 1). \quad (5.11)$$

Böylece Lemma (5.2) ile (5.10)'dan, $x = (x_k) \in \ell_p(F)$ olduğunda $ax = (a_k x_k) \in cs$ olduğunu ancak ve ancak $Cy \in c$ ve $y = (y_k) \in \ell_p$ olduğunda çıkarıyoruz. Bu bize $1 \leq p \leq \infty$ iken

$a = (a_k) \in \{\ell_p(F)\}^\beta$ ancak ve ancak $C \in (\ell_p : c)$ sonucunu verir.

Şimdi sadece $1 < p < \infty$ durumunu verelim. (5.4)'ten

$$\sum_k \left| \hat{\Delta} \left(\frac{a_k}{f_{k+1}} \right) (f_{k+3} - 1) \right|^q < \infty$$

ve

$$\sup_n \left| \frac{f_{n+3} - 1}{f_{n+1}} a_n \right| < \infty \quad (5.12)$$

ifadelerini yazabiliriz. Bu bizi, $1 < p < \infty$ için $\{\ell_p(F)\}^\beta = d_2 \cap d_3$ sonucuna götürür.

Benzer şekilde $p = 1$ için (5.5) ve $p = \infty$ için (5.6), (5.11), (5.7)'de $\{\ell_1(F)\}^\beta = d_2$ ve $\{\ell_\infty(F)\}^\beta = d_3^1 \cap d_4$ ispatlanabilir.

Teorem 5.6: $1 < p \leq \infty$ olmak üzere $\{\ell_1(F)\}^\gamma = d_2$ ve $\{\ell_p(F)\}^\gamma = d_2 \cap d_3^q$ dur.

İspat: Lemma 5.3 kullanılarak Teorem 5.5'de verilene benzer şekilde ispatlanabilir.



6. $\ell_p(F)$ UZAYI ÜZERİNDEKİ MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

Bu kısımda $1 \leq p \leq \infty$ ve $X; \ell_\infty, c, c_0$ uzaylarından herhangi biri olmak üzere $(\ell_p(F), X)$ sınıflarını karakterize edeceğiz. Notasyonda kolaylık için her $k, n \in \mathbb{N}$ için

$$\hat{a}_{nk} = \left(\frac{a_{nk}}{f_{k+1}} - \frac{a_{n,k+1}}{f_{k+2}} \right) (f_{k+3} - 1)$$

yazarız. Ayrıca $x, y \in w$ olmak üzere $y = Fx$ bağıntısı ile gösterelim. Bu taktirde (5.10)'dan

$$\sum_{k=0}^m a_{nk} x_k = \sum_{k=0}^{m-1} \hat{a}_{nk} y_k + \frac{f_{m+3} - 1}{f_{m+1}} a_{nm} y_m; \quad (n, m \in \mathbb{N}). \quad (6.1)$$

elde ederiz. Şimdi aşağıdaki şartları göz önüne alalım:

$$\text{her } n \in \mathbb{N} \text{ için } \left(\frac{f_{k+3} - 1}{f_{k+1}} a_{nk} \right)_{k=0}^{\infty} \in \ell_\infty \quad (6.2)$$

$$\sup_{n,k} |\hat{a}_{nk}| < \infty, \quad (6.3)$$

$$\sup_n \sum_k |\hat{a}_{nk}|^q < \infty, \quad (6.4)$$

$$\text{her } n \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_k \frac{f_{k+3} - 1}{f_{k+1}} a_{nk} = 0, \quad (6.5)$$

$$\sup_n \sum_k |\hat{a}_{nk}| < \infty, \quad (6.6)$$

$$\text{her } k \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_n \hat{a}_{nk} = \alpha_k, \quad (6.7)$$

$$\text{her } k \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_n \sum_k |\hat{a}_{nk} - \alpha_k| = 0, \quad (6.8)$$

$$\lim_n \sum_k |\hat{a}_{nk}| = 0, \quad (6.9)$$

$$\text{her } k \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_n \hat{a}_{nk} = 0. \quad (6.10)$$

Teorem 5.5'i ve [30]'da verilen sonuçları birleştirerek (6.1)'ide kullanarak aşağıdaki sonuçları elde ettik.

Teorem 6.1:

- (i) $A \in (\ell_1(F): \ell_\infty)$ ancak ve ancak her $n \in \mathbb{N}$ için (6.2) ve (6.3) sağlanır.
- (ii) $1 < p < \infty$ olmak üzere, $A \in (\ell_p(F): \ell_\infty)$ ancak ve ancak (6.2) ve (6.3) sağlanır.
- (iii) $A \in (\ell_\infty(F): \ell_\infty)$ ancak ve ancak (6.5) ve (6.6) sağlanır.

Teorem 6.2:

- (i) $A \in (\ell_1(F):c)$ ancak ve ancak (6.2),(6.3) ve her $k \in \mathbb{N}$ için (6.7) sağlanır.
- (ii) $1 < p < \infty$ olmak üzere, $A \in (\ell_p(F):c)$ ancak ve ancak (6.2),(6.4) ve (6.7) sağlanır.
- (iii) $A \in (\ell_\infty(F):c)$ ancak ve ancak (6.5)-(6.8) sağlanır.

Teorem 6.3:

- (i) $A \in (\ell_1(F):c_0)$ ancak ve ancak (6.2),(6.3) ve her $k \in \mathbb{N}$ için (6.10) sağlanır.
- (ii) $1 < p < \infty$ olmak üzere, $A \in (\ell_p(F):c_0)$ ancak ve ancak (6.2),(6.4) ve (6.10) sağlanır.
- (iii) $A \in (\ell_\infty(F):c_0)$ ancak ve ancak (6.5) ve (6.9) sağlanır.



7. $\ell_p(F)$ UZAYININ BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

Teorem 7.1: $\ell_1(F)$ ve $\ell_\infty(F)$ düzgün konveks değildir. Hatta bu uzaylar kesin konveks de değildir.

İspat: $x = (x_n) = (1, -1, 0, 0, \dots)$ ve $y = (y_n) = (0, -2, 1, 0, 0, \dots)$ olduğunu düşünelim. $x, y \in \ell_1(F)$ olduğu açıktır ve $\|x\|_{\ell_1(F)} = 1 = \|y\|_{\ell_1(F)}$, $\|x - y\|_{\ell_1(F)} = 2 > \varepsilon$. Bununla birlikte, $\left\|\frac{1}{2}(x + y)\right\|_{\ell_1(F)} = 1$ 'dir. Bu nedenle $\ell_1(F)$ düzgün konveks ve kesin konveks değildir. Benzer şekilde, $x = (1, 1, 0, 0, \dots)$ ve $y = (-1, 2, 0, 0, \dots)$ alırsak, $\ell_\infty(F)$ 'nin düzgün konveks ve kesin konveks olmadığını görürüz.

Teorem 7.2: $\ell_2(F)$ düzgün konvektir.

İspat: $x, y \in \ell_2(F)$ olsun. $\ell_2(F)$ Hilbert uzayı olduğundan,

$$\left\|\frac{1}{2}(x + y)\right\|_{\ell_2(F)}^2 + \left\|\frac{1}{2}(x - y)\right\|_{\ell_2(F)}^2 = \frac{1}{2}(\|x\|_{\ell_2(F)}^2 + \|y\|_{\ell_2(F)}^2)$$

eşitliği sağlanır.

Eğer $\|x\|_{\ell_2(F)}^2 \leq 1$, $\|y\|_{\ell_2(F)}^2 \leq 1$ ve $\|x - y\|_{\ell_2(F)} > \varepsilon$ iken ε sayısı yeterince küçük seçilirse

$$\delta = 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}$$

olduğunda

$$\left\|\frac{1}{2}(x + y)\right\|_{\ell_2(F)}^2 < 1 - \frac{\varepsilon^2}{4} = (1 - \delta)^2$$

olduğunu görürüz.

Bu nedenle, $\ell_2(F)$ uzayının düzgün konveks olduğunu elde ederiz. ([9,p.9]) ile aşağıdaki sonucu da elde ettik.

Sonuç 7.3: $\ell_2(F)$ kesin konveks ve yansılmalı uzaydır.

Teorem 7.4: $\ell_p(F)$, $1 < p < \infty$ olmak üzere süper-refleksive (süper dönüşlü) uzaydır.

İspat: Teorem 4.6'ya göre $\ell_p(F)$ 'nin ℓ_p 'ye izomorfik olduğunu ve [31]'den düzgün konveks olduğunu biliyoruz. Böylece Tanım 3.1'den istenen sonucu elde ederiz.

8. SONUÇ

Bu çalışmada Fibonacci sayıları yardımıyla tanımlanmış bazı dizi uzayları ve bunlarla ilgili bazı kapsama bağıntıları verildi. $\ell_p(F)$ dizi uzayı tanımlanıp bazı özellikleri incelendi. $\ell_p(F)$ uzayının α -, β - ve γ -dualleri, bu uzay üzerindeki matris dönüşümleri incelenmiştir.



KAYNAKLAR

- [1] Kreyszig E.;1978. Introductory functional analysis with applications. John Willey, New York-London-Sydney.
- [2] Wilansky A. Summability through functional analysis. North-Holland mathematics studies. Vol. 85. Amsterdam: Elsevier; 1984.
- [3] Çakar, Ö. 2007. Fonksiyonel Analize Giriş 1. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Döner sermaye İşletmesi Yayınları, Ankara.
- [4] M. Balcı, Matematik analiz I. Ertem Basın Yayın Dağıtım Ltd. Şti. Ankara, (1999).
- [5] Jain, P. K.; Ahmad, K., 1993. Metric spaces, Narosa Publishing House, New Delhi, INDIA.
- [6] Basar F., 2011. Summability theory and Its applications, bentham science publishers, Istanbul.
- [7] Maddox I.J, 1970. Elements Of Functional Analysis. Cambridge University Press, Cambridge, 246p, London.
- [8] Kesavan S. Functional analysis. New Delhi: Hindustan; 2009.
- [9] Chidume C. Geometric properties of Banach spaces and nonlinear iterations. Lecture notes in mathematics. Vol. 1965. London: Springer Verlag; 2009.
- [10] Debnath S, Saha S. Some newly defined sequence spaces using regular matrix of Fibonacci numbers. AKU J. Sci. Eng. 2014;14:1-3.
- [11] Ercan S., A.Bektaş Ç. Some topological and geometric properties of a new BK-space derived by using regular matrix of Fibonacci numbers. LINEAR AND MULTILINEAR ALGEBRA, 2017 VOL.65, NO. 5, 909-921.
- [12] James CR. Super reflexive spaces with bases. Pasific J. Math. 1972;41:409-419.
- [13] B. Choudhary , Nadarsan S. (1989). Functional analysis with applications, New Delhi India.
- [14] G.G. Lorentz (1948). A contribution to the theory of divergent sequences, Acta. Math., 80, 167-190.
- [15] Boos J. (2000). Classical and modern methods in summability. Oxford University Press Inc, Newyork.
- [16] Mursaleen M, Noman KA. On the spaces of λ -convergent and bounded sequences. Thai J. Math. 2010;8:311-329.
- [17] Mursaleen M, Noman KA. On some new sequence spaces of non-absolute type related to the spaces ℓ_p II. Math. Commun. 2011;16:383-398.
- [18] Duran JP. (1972). Infinite matrices and almost convergence. Mathematische Zeitschrift, 128, 75-83.
- [19] Kalman D, Mena R. The Fibonacci numbers-exposed. Math. Mag. 2003;76:167-181.
- [20] Koshy T. (2001). Fibonacci and Lucas numbers with applications. Wiley.
- [21] Kara EE. (2013). Some topological and geometrical properties of new Banach sequence spaces. J. Inequal. Appl., 38, 15.
- [22] Candan M. (2015). A new approach on the spaces of generalized Fibonacci difference null and convergent sequences. Mathematica Aeterna, 5, 191-210.
- [23] Candan M. , Kara EE. (2015). A study on topological and geometrical characteristics of new Banach sequence spaces. Under communacition. 67-84.

- [24] HI. Miller, C. (2001). On almost convergent and statistically convergent subsequences. Acta. Math. Hung. 93, 135-151.
- [25] Jarrah AM. , Malkowsky E. (1990). BK spaces, bases and linear operators. Ren. Circ. Mat. Palermo II., 52 , 177-191.
- [26] Başar F. , Kirişçi M. (2011). Almost convergence and generalized difference matrix. Computers ve Mathematics with Applications, 61, 602- 611.
- [27] Kara EE, Demiriz S. Some new paranormed difference sequence spaces derived by Fibonacci numbers. Miskolc Math. Notes. 2015;16:907-923.
- [28] Talebi G, Dehghan MA. Approximation of upper bound for matrix operators on the Fibonacci weighted sequence spaces. Linear Multilinear Algebra. 2015;64:196-207. doi:10.1080/03081087.2015.1031074.
- [29] Mursaleen M, Noman KA. On some new sequence spaces of non-absolute type related to the spaces ℓ_p and ℓ_∞ I. Filomat. 2011;25:33-51.
- [30] Stieglitz M, Tietz H. Matrix transformationen von Folgenraumen eine Ergebnisübersicht. Math. Z. 1977;154:1-16.
- [31] Diestel J. Geometry of Banach spaces-selected topics. Lecture notes in mathematics. Vol. 485. Berlin: Springer-Verlag; 1976.