

T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENTİTÜSÜ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

FİNANSAL MODELLEMEDE JUMP DİFÜZYON VE
PURE JUMP SÜREÇLERİ UYGULAMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AKBAR BARATI CHİYANEH

DANIŞMAN
DOÇ. DR. HAMİT MİRİTAGİOĞLU

AĞUSTOS 2024

BİTLİS

T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENTİTÜSÜ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

FİNANSAL MODELLEMEDE JUMP DİFÜZYON VE
PURE JUMP SÜREÇLERİ UYGULAMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AKBAR BARATI CHİYANEH

ORCID: 0000-0003-4401-5477

DANIŞMAN
DOÇ. DR. HAMİT MİRİTAGİOĞLU

AĞUSTOS 2024

BİTLİS

T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI
ETİK BEYANI

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisiyim. Hazırlamış olduğum “**FİNANSAL MODELLEMEDE JUMP DİFÜZYON VE PURE JUMP SÜREÇLERİ UYGULAMASI**” başlıklı tezde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi; tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu; tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi; kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı; bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim. 29/08/2024.

Akbar BARATI CHİYANEH

T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
TEZ YAZIM KILAVUZU UYGUNLUK BEYANI
“FİNANSAL MODELLEMEDE JUMP DİFÜZYON VE PURE JUMP
SÜREÇLERİ UYGULAMASI” başlıklı yüksek lisans tezi Bitlis Eren Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Tez Yazım Kılavuzuna uygun olarak hazırlanmıştır.
29/08/2024.

Tezi Hazırlayan

İmza

Akbar BARATI CHİYANEH

Danışman

İmza

Doç. Dr. Hamit MİRTAGİOĞLU

İstatistik Anabilim Dalı Başkanı

İmza

Doç. Dr. Hamit MİRTAGİOĞLU

T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
TEZ ONAY SAYFASI

Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü **İstatistik** Anabilim Dalı öğrencisi **Akbar BARATI CHİYANEH** tarafından hazırlanan “**FİNANSAL MODELLEMEDE JUMP DİFÜZYON VE PURE JUMP SÜREÇLERİ UYGULAMASI**” adlı Yüksek Lisans Tezi ile ilgili tez savunma sınavı, 29/08/2024 tarihinde yapılmış ve tezin oy birliği ile kabul edilmesine karar verilmiştir.

JÜRİ:

Danışman: Doç. Dr. Hamit MİRTAGİOĞLU
(Bitlis Eren Üniversitesi)

İMZA

.....

Üye: Doç. Dr. Yıldırım DEMİR
(Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi)

.....

Üye: Doç. Dr. Ayşe Metin KARAKAŞ
(Bitlis Eren Üniversitesi)

.....

Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yönetim Kurulunun tarih ve sayılı kararıyla jüri tarafından kabul edilmiş bu çalışmanın yüksek lisans / doktora tezi olarak kabulü onaylanmıştır.

....../...../2022

Doç. Dr. Mehmet Bakır ŞENGÜL

Enstitü Müdürü

T.C.
Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı
FİNANSAL MODELLEMEDE JUMP DİFÜZYON VE PURE JUMP
SÜREÇLERİ UYGULAMASI
Yüksek Lisans Tezi
Akbar BARATI CHİYANEH
Danışman: Doç. Dr. Hamit MİRTAGİOĞLU

Ağustos 2024

ÖZET

Bu tez, Lévy süreçlerinin varlık fiyatlandırma modellerine entegrasyonunu kapsamlı bir şekilde inceleyerek, finansal piyasaların gerçek karmaşıklıklarını, sıçramaları ve stokastik oynaklığı ele alıyor. Araştırma, teorik temellerle pratik uygulamalar arasındaki boşluğu doldurmayı hedefleyerek, finansal piyasaların modellenmesi ve anlaşılmasını geliştirmek için araştırmacılara ve uygulayıcılara çok yönlü bir araç seti sunuyor. Black-Scholes modelini başlangıç noktası olarak alarak, pazar dinamiklerinin daha doğru bir temsilini sağlamak amacıyla, sıçrama-difüzyon ve pure sıçrama Lévy süreçleri üzerinde duruluyor. Merton ve Kou sıçrama-difüzyon süreçleri ile Hiperbolik, Normal Ters Gaussian, Variance Gama ve CGMY gibi pure sıçrama modelleri, finansal varlık fiyatlandırma dinamiklerini zenginleştiren örnekler olarak ele alınıyor. Lévy süreçleri, Lévy ölçüsünün doğrusal dönüşümleri ve üstel eğilmesi yoluyla inşa edilerek, finansal piyasaların ampirik özelliklerini daha iyi yansıtmayı amaçlıyor. Ayrıca, tez, sıçrama süreçleri için stokastik hesaplamayı, özellikle Itô formülü çerçevesinde ele alarak, varlık fiyatlarının gelişimini daha iyi anlamayı hedefliyor.

Anahtar kelimeler: Lévy süreci, Jump-difüzyon süreci, Pure jump süreci, Stokastik analizi.

Republic of Türkiye
Bitlis Eren University Graduate School
Department of Statistics
APPLICATION OF JUMP-DIFFUSION AND PURE JUMP PROCESSES IN
FINANCIAL MODELING

Master's Thesis

Akbar BARATI CHIYANEH

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Hamit MIRTAGİOĞLU

August 2024

ABSTRACT

This thesis provides a comprehensive examination of the integration of Lévy processes into asset pricing models, addressing the real complexities, jumps, and stochastic volatility present in financial markets. The research aims to bridge the gap between theoretical foundations and practical applications, offering researchers and practitioners a versatile toolkit for improving the modeling and understanding of financial markets. Using the Black-Scholes model as a starting point, the focus is on providing a more accurate representation of market dynamics by emphasizing jump-diffusion and pure jump Lévy processes. The thesis explores examples such as the Merton and Kou jump-diffusion processes, as well as pure jump models like the Hyperbolic, Normal Inverse Gaussian, Variance Gamma, and CGMY models, all of which enrich the understanding of asset pricing dynamics. Lévy processes are constructed through the linear transformations and exponential tilting of Lévy measures, aiming to better reflect the empirical characteristics of financial markets. Additionally, the thesis examines stochastic calculus for jump processes, particularly within the framework of Itô's formula, to better quantify the evolution of asset prices.

Keywords: Lévy process, Jump-diffusion process, Pure jump process, Stochastic analysis.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez çalışmalarım sırasında, değerli danışmanım Doç. Dr. Hamit Mirtağioğlu'na sonsuz minnet ve şükranlarımı sunuyorum. Kendisi, bilimsel kavramları öğrenmem konusunda bana her zaman sabırla destek oldu ve beni yönlendirdi. Danışma toplantılarımızda, karmaşık fikirleri anlamam ve onları çalışmama entegre etmem için elinden gelen her türlü çabayı gösterdi. Tez yazım aşamasında da titizlikle inceleyerek, ifadelerimin açık ve anlaşılır olmasını sağladı. Onun bilimsel uzmanlığı ve deneyimi olmadan, bu çalışmayı tamamlayamayacağımı biliyorum. Ayrıca, saygın ailesi de bana manevi destek sağlayarak, bu zorlu süreçte bana güç verdi.

Bitlis Eren ve Fırat Üniversiteleri İstatistik Bölümü'ndeki değerli hocalarıma da çalışmalarım sırasında gösterdikleri özverili çabalar için teşekkür etmek isterim.

Bu değerli kişilerin özverili çabaları sayesinde, yüksek lisans tez çalışmamı başarıyla tamamladım. Onlara sonsuz minnetimi sunuyor, çalışmalarına gösterdikleri destek ve katkılardan dolayı derinden teşekkür ediyorum.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET.....	I
ABSTRACT	II
TEŞEKKÜR	III
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	IV
ÇİZELGELER DİZİNİ	VII
ŞEKİLLER DİZİNİ	VIII
SİMGELER DİZİNİ	X
KISALTMALAR DİZİNİ	XI
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL BİLGİLER	3
2.1. Black-Scholes Modelinin Eksiklikleri.....	4
2.2. Rastgele Süreçler	7
2.2.1. Filtrasyon.....	8
2.2.2. Rastgele zamanlar	9
2.2.3. Martingaller	9
2.3. Poisson Süreci ve Brownian Hareketi	11
2.3.1. Poisson dağılımı.....	11
2.3.2. Poisson süreci: Tanımı ve özellikleri	11
2.3.3. Telafi edilmiş Poisson süreçleri	13
2.3.4. Sayım Süreçleri	14
2.4. Rastgele Ölçümler	15
2.4.1. Poisson rastgele ölçümü	16
2.4.2. Telafi edilmiş Poissonun rastgele değişken ölçümü.....	18
2.4.3. Poisson rastgele ölçümü ile sıçrama süreçlerinin oluşturulması	18
2.4.4. İşaretli nokta süreçleri	19
2.4.5. Sonsuz değişim fonksiyonları	20
2.5. Lévy Süreçleri.....	21
2.5.1. Lévy süreçlerinin önemi.....	21
2.5.2. Lévy sürecinin tanımı	21
2.5.3. Sonsuz bölünebilirlik	22
2.5.4. Compound Poisson süreçleri	23
2.5.5. Compound Poisson süreçlerinin sıçrama ölçütleri.....	24
2.5.6. Sonsuz aktivite Lévy süreçleri	25

2.5.7.	Lévy süreçlerinin yörünge özellikleri.....	28
2.5.8.	Dağıtım özellikleri	30
2.5.9.	Kararlı dağıtımlar ve süreçler	31
2.5.10.	Lévy ve Martingale süreçleri	33
3.	MATERYAL VE YÖNTEM	34
3.1.	Sıçrama-Difüzyon Süreçleri.....	38
3.1.1.	Merton sıçrama-difüzyon süreci	39
3.1.2.	Kou modeli	40
3.2.	Pure Sıçrama Süreçleri	41
3.2.1.	Hiperbolik dağılımlar	43
3.2.2.	Normal ters Gauss süreci (NIG).....	47
3.2.3.	Varyans Gama süreci (VG)	50
3.2.4.	CGMY süreci	58
4.	BULGULAR VE TARTIŞMA	66
4.1.	Lévy Süreçleriyle Modelini Oluşturma	67
4.2.	Bilinen Türlerden Yeni Bir Lévy Süreci Oluşturma	68
4.2.1.	Doğrusal dönüşümler.....	68
4.2.2.	Bağlayıcı yapmak	70
4.2.3.	Lévy ölçüsünün Tilting ve iyi huylu (Tempering) özellikleri	72
4.3.	Difüzyon Sıçrama Tipi Modellerin Yapımı.....	73
4.4.	Genelleştirilmiş Bir Hiperbolik Model Oluşturma.....	73
4.5.	Brownian'ı Bağlayıcı Ederek Lévy Süreçlerinin İnşası.....	75
4.5.1.	Süreçleri bağlayıcı yapmak	76
4.5.2.	Değiştirilmiş Brownian hareketine dayalı modeller.....	78
4.6.	Kararlı ve İyi Huylu Bir Süreç Oluşturmak.....	79
4.7.	Yarım Martingale Dayalı Stokastik Analiz.....	83
4.8.	Riemann–Stieltjes İntegrali	83
4.9.	Stokastik İntegrale Giriş	85
4.10.	Alım-Satım Stratejisi ve Stokastik İntegral.....	88
4.10.1.	Basit tahmin edilebilir integral.....	88
4.10.2.	Yarı martingaleller	92
4.10.3.	Càdlàg süreci için integrand	95
4.10.4.	Brownian hareketine göre rastgele integraller	96
4.10.5.	Poisson rastgele değişkeni üzerinden rastgele integral	98
4.11.	İkinci Mertebeden Değişim	100
4.12.	Itô Formülü	103

5. SONUÇ VE ÖNERİLER	107
KAYNAKLAR	111
EKLER.....	116
Ek 1. Black-Scholes Modeli.....	116
Ek 2. Bağlayıcılar ve Bernestein Teoremi	117
Ek 3. Bessel Fonksiyonu ve Değiştirilmiş Bessel Fonksiyonu	120



ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1. Ana göstergelerle ilgili ortalama, deneysel standart sapma, çarpıklık ve belirginlik.....	6
Çizelge 3.1. Y parametresinin farklı değerleri için CGMY sürecinin özellikleri.....	61
Çizelge 4. 1. İki sıçrama-difüzyon ve sonsuz aktivite modellerin karşılaştırılması	67
Çizelge 4. 2. Lévy süreçlerini yapmanın üç yöntemi	68
Çizelge 4. 3. Gama bağımlayıcı ve ters Gauss bağlayıcı	77



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3. 1. SLM (NYSE) hisse fiyatının logaritmasının gelişimini 1993-1996 dönemi için gösterir ve aynı verimlilik ve volatiliteye sahip tipik bir Brownian hareket yörüngesi ile karşılaştırılması.....	35
Şekil 3. 2. SLM (NYSE) hisse fiyatının logaritmasının gelişimini Ocak-Mart 1993 dönemi için gösterir ve aynı volatiliteye sahip Black-Scholes modeli ile karşılaştırılması	36
Şekil 3. 3. SLM (NYSE) fiyat davranışını Şubat 1993 tarihine odaklanarak gösterir ve aynı volatiliteye sahip Black-Scholes modeli ile karşılaştırılması.....	36
Şekil 3. 4. SLM (NYSE) fiyat davranışını 11 Şubat 1993 tarihine odaklanarak gösterir ve aynı volatiliteye sahip Black-Scholes modeli ile karşılaştırılması	36
Şekil 3. 5. S&P 500 endeksinin (Haziran 1980'den 31 Aralık 2005'e kadar) ve yoğunluğu $N(0,1)$ olan normal günlük getirisinin histogramının karşılaştırılmasını gösterir. Bu karşılaştırma, uzun bir zirve ve daha belirgin bir kuyruk sergiler.	37
Şekil 3. 6. Solda: Gauss dağılımına sahip compound Poisson sürecinin örnek yörüngesi sıçrama değerleri için. Sağda: Merton sıçrama-difüzyon sürecinin örnek yörüngesi (Brownian hareketi + compound Poisson).....	40
Şekil 3. 7. Sol: Almanya'da Deutsche Bank getirileri için normal QQ grafiği. Sağ: Deutsche Bank getirileri için ampirik yoğunluk ile normal yoğunluk uyumsuzluğu. Normallikten sapma açıkça görülmektedir.	47
Şekil 3. 8. Deutsche Bank'ın getiri yoğunluğu - normal dağılıma göre hiperbolik dağılımın daha iyi olduğu görülmektedir.	47
Şekil 3. 9. Termal ters Gauss sürecinin örnek yörüngesi.....	50
Şekil 3. 10. Gama varyans sürecinin örnek yörüngesi.....	56
Şekil 3. 11. σ sürüklenme parametresinin farklı değerlerle gama varyans sürecinin Lévy ölçüsünü grafiyi. $\sigma = 0.2$ ve $\kappa = 0.1$ parametreleri sabittir.	57
Şekil 3. 12. Volatilité için farklı değerlerle gama varyans sürecinin Lévy ölçüsü. $\kappa = 0.1$ ve $\theta = 0$ parametreleri sabittir.	57
Şekil 3. 13. Takipçi varyansının farklı değerleri için gama varyans sürecinin Lévy ölçüsü. $\theta = 0$ ve $\sigma = 0.2$ parametreleri sabittir.....	58
Şekil 3. 14. CGMY modeline uydurulmuş SPX endeks verileri	63
Şekil 3. 15. C 'nin çeşitli değerlerle CGMY sürecinin Lévy yoğunluğu. Sabit parametreler: $G = 1, M = 1$ ve $Y = 0.9$	63

Şekil 3. 16. G ve M 'nin farklı değerlerle CGMY sürecinin Lévy yoğunluğu. Sabit parametreler: $C = 1$ ve $Y = 0.9$	64
Şekil 3. 17. Y 'nin çeşitli değerlerle CGMY sürecinin Lévy yoğunluğu. Sabit parametreler: $G = 1$, $M = 1$ ve $C = 0.5$	64
Şekil 3. 18. $Y = -1.5$ 'in farklı değerlerle CGMY sürecinin Lévy ölçüsü. $G = 1$, $M = 1$ ve $Y = 0.5$ parametreleri sabittir.	65
Şekil 4. 1. Yalnızca integral sıçramaların rastgele integral sıçramalara yol açtığını (2) rastgele integralin Càdlàg günlüğünün örnek bir yörüngeye sahip olduğunu gösterir	95
Şekil A. Ters Gauss sürecinin örnek yörüngesi	117
Şekil B. Gama sürecinin örnek yörüngesi	119



SİMGELER DİZİNİ

(Ω, F, P)	Olasılık uzayı
Ω	Örnek uzayı
F	Ω üzerinde σ –cisim
$P(A)$	A olayının olasılığı
$E[X]$	X rastgele değişkenin beklenti değeri
$(X_t)_{t \in [0, T]}$	Stokastik süreç
$(F_t)_{t \in [0, T]}$	Filtrasyon
$(M_t)_{t \in [0, T]}$	Martingale
$(N_t)_{t \geq 0}$	Poisson süreci
$(\tilde{N}_t)_{t \geq 0}$	Telafi edilmiş Poisson süreci
$(W_t)_{t \geq 0}$	Standart Brownian hareketi
M	Poisson rastgele ölçümü
$\tilde{M}$	Telafi edilmiş Poissonun rastgele ölçümü
$\varphi_t(\cdot)$	Lévy sürecinin karakteristik fonksiyonu
$\psi(\cdot)$	Lévy sürecinin karakteristik görünümü
J_X	Codelog sürecinin sıçrama ölçümü
(A, ν, γ)	Karakteristik üçlü veya Lévy üçlüsü

KISALTMALAR DİZİNİ

VG	Varyans Gama Süreci
NIG	Normal ters Gauss Süreci
CGMY	Carr-Geman-Madan-Yor Süreci



1. GİRİŞ

Finansta uygulanan Jump-Diffusion modelleri üzerine yapılan çalışma, 1976'da R.C. Merton'un getiris sürecinin üç bileşenden oluştuğunu öne sürdüğü makalesiyle başlamıştır: doğrusal bir sürüklenme, "normal" fiyat değişimini temsil eden bir Brownian hareketi ve beklenmedik yeni bilgilerin neden olduğu sıçramaları yollara ekleyen compound Poisson süreci. O zamandan beri, bu tür modellerin kullanımı gerçek piyasalar ve uygulamalı matematik ile nicel finans alanlarındaki teorik çalışmalarda artmıştır. Bu kullanım, pure difüzyon modellerinde olduğu gibi, fiyat değerlendirme teorisinden gelmiş ve ikinci aşamada portföylerin riskten korunma, çoğaltma ve risksiz arbitraj stratejilerine uygulanmaya başlanmıştır.

Bu arada, iyi bir soru şöyle olmalıdır: "Black-Scholes modeli ve türevleri gibi difüzyon modelleri bu kadar yaygın ve birçok durumda piyasa ile bu kadar uyumluysa, neden biri Jump-Diffusion modelini kullanmayı tercih eder?" Bu basit bir soru değildir ve otuz yıldan fazla bir çalışmanın ana fikirlerini burada birkaç satırda özetlemeye çalışacağız. Daha fazla bilgi için R. Cont ve P. Tankov'u [57] bakınız.

İlk nokta, fiyatlardaki büyük ve ani hareketlerdir. Difüzyon modelleri uzun vadeli varlık modelleri için iyi bir şekil sunsa da, örneğin bir aydan fazla gözlemler için, bir varlığın gün içi veya kısa vadeli hareketlerini modellemek çok zordur, burada varlık fiyatının sürekli olma özelliği şüpheli olabilir ve bunu simüle etmek için çok büyük bir volatilité gerektirir. Bu kısa dönemler için varlıklar, ampirik gözlemlerle karşılaştırıldığında, bu hareketlerin varlığa bağlı olarak kalibre edilebileceği genel bir özellik olduğu jump modelleri ile daha iyi modellenmiş gibi görünmektedir. Jump modelleri ayrıca yoğunlaşmış ani büyük kayıplara izin verir, böylece bir hisse yatırımı kaybetmenin en yaygın şekli olan büyük aşağı yönlü hareketler modellenenebilir.

Piyanın tamlığı da tartışılması gereken bir diğer konudur. Difüzyon modellerinde piyasa tamdır ve bu nedenle seçenekler risksiz bir şekilde korunabilir. Bölüm 5'te göreceğimiz gibi, Jump-Diffusion modelleri, risksiz bir ölçü oluşturmak için büyük sayıda değişken nedeniyle eksik piyasalara dayanır, bu nedenle seçenek ampirik gözlemlerden gördüğümüz gibi riskli bir yatırımdır. Bu, bazı stratejilerin tüm risklerden korunamayacağı anlamına gelir, ancak bazı türden korumalar hala mevcuttur. pure difüzyon yöntemlerinde, Delta, Vega, Theta korumaları gibi tüm koruma stratejileri,

portföydeki varlıklar, seçenekler ve risksiz yatırımların doğru seçimiyle sıfır artık riskine yol açar. Jump modellerinde koruma daha gerçekçidir çünkü bu, bir portföy stokastik optimizasyon problemi çözülerek yapılır ve bu nedenle risk olasılıksal olarak devam eder. Daha fazla bilgi için [58]'e bakınız.

Jump Modellerinin kullanımını haklı çıkarmak için temel prensipler bunlardır. Bu çalışmada, Brezilya Piyasasından dört aylık vadeye sahip iyi bilinen bir Avrupa Alım Opsiyonu seçerek ve bunu modellemek için iyi bir yöntem bulma umuduyla dört şekilde değerlendirerek Jump-Diffusion süreçlerinin kullanımına yönelik ampirik bir değerlendirme yapacağız. Bu çalışma, bu belirli Alım Opsiyonu üzerine odaklanmıştır ve aynı kökene sahip diğer varlıkların, yani yüksek likiditeye sahip bir opsiyonun fiyatını değerlendirmek için ilham kaynağı olarak kullanılabilir. Bu, Brezilya piyasasında en çok işlem gören ikinci varlıktır ve orta vadeli, üç ila altı ay arasında bir vadedir. Sonuç olarak, kısa vadeli ve uzun vadeli varlıkların parametrelerinin tahmininin farklı prosedürler izlediği dikkate alınmalıdır, çünkü modelin seçimlerinden çok etkilendiği bir gerçektir. Bu nedenle bu çalışma, parametrisasyonun eksiksiz bir çalışması olarak alınamaz ve Jump modelleri için tahmin ve sistem kalibrasyonu üzerine daha fazla bilgi için, özellikle “Çift Üstel Dağılımlı” Jump-Diffusion süreçlerine yönelik Maksimum Olabilirlik Tahmin tekniklerinin genel prosedürlerle kullanıldığı [59] çalışmalarına bakınız.

2. GENEL BİLGİLER

Finansal piyasaların dinamik yapısını anlamak ve modellemek, modern finans teorisinin en önemli zorluklarından biridir. Bu bağlamda, klasik yaklaşımların ötesine geçerek, piyasaların gerçek karmaşıklıklarını ve belirsizliklerini daha iyi yansıtacak yöntemler geliştirilmesi gerekmektedir. Bu bölümde, bu ihtiyacı karşılamak amacıyla Lévy süreçlerinin varlık fiyatlandırma modellerine entegrasyonunu derinlemesine incelemekte ve teorik bilgileri pratik uygulamalarla birleştirerek finansal modellemede yenilikçi bir perspektif sunmaktadır.

Opsiyon değerlemesi, finansal literatürde geniş bir konu olarak öne çıkmaktadır. Bu konu, Ficher Black ve Myren Scholes gibi tanınmış uzmanların ilgisini çekmiş ve opsiyon fiyatlama teorisi olarak bilinmektedir. 1973 yılında Black ve Scholes, belirli koşullar altında opsiyon fiyatını hesaplayan bir model geliştirmiştir. Bir opsiyon, bir alıcı ile bir satıcı arasında yapılan bir sözleşmedir, burada alıcı belirli bir fiyattan bir varlığı alma veya satma hakkını satın alır. Alıcı, opsiyonun fiyatı olan bir bahis ücreti öder. Satıcı ise alıcıya belirli bir fiyattan bir varlığı alma veya satma hakkı verir. Bir varlığın satın alınması için verilen seçeneğe “satın alma opsiyonu”, bir varlığın satılması için verilen seçeneğe ise “satış opsiyonu” denir. Avrupa opsiyonları sadece vade sonunda alım/satım hakkı verirken, Amerikan opsiyonları vade tarihine kadar her an kullanılabilir. Kullanım fiyatı veya üzerinde anlaşmaya varılan fiyat, sözleşmede belirtilen fiyattır ve alım satım opsiyonunun içerdiği varlık bu fiyat üzerinden alınıp satılabilir. Kullanım tarihi veya vade tarihi, opsiyonun kullanılabileceği son gündür. Uygulama fiyatını K ile ve hisse senedi veya dayanak varlığın fiyatını S ile gösteririz.

Bachelier, 1900 yılında ilk opsiyon fiyatlandırma modelini sundu. Hisse senedi fiyat dalgalanmalarını inceleyerek, hisse senedi fiyatlarının Brownian hareket teorisinin bazı matematiksel yönlerini elde etti. Merkezi limit teoremi ve piyasa etkilerinin hafızasız olması gerektiği anlayışından ilham alan Bachelier, emtia fiyatlarının bağımsız ve normal dağılıma sahip olması gerektiğini savundu ve stokları sürüklenmeli Brownian hareketi olarak modelledi. Ancak bu modelin kusurları da vardı, örneğin negatif fiyatları da içermekteydi. Samuelson'un uygun modelinden 65 yıl önce önerilen bu model, geometrik Brownian hareketinin kullanılmasına dayanıyordu. Ancak 8 yıl sonra Black ve Scholes, geometrik Brownian hareketine dayalı olarak Avrupa opsiyonlarının nasıl fiyatlandırılacağını gösterdi ve bu fiyatlandırma modeli Black-Scholes olarak bilinir.

Finans mühendisliği, finansal enstrümanların değerlemesi ve risk yönetimi gibi konuları ele alan bir disiplindir. 1980’lerde ve 1990’larda, Black-Scholes modeli bu alanda büyük bir etki yarattı. Bu model, opsiyonların fiyatlandırılması için kullanılan bir matematiksel formülasyon sunuyordu.

Black-Scholes modeli, birçok finansal kurum ve yatırımcı tarafından yaygın bir şekilde kullanıldı. Bu model, opsiyonların değerini hesaplamak için gerekli olan değişkenlerin yanı sıra, risk faktörlerini de dikkate alıyordu. Bu sayede, yatırımcılar opsiyonlarının değerini daha doğru bir şekilde belirleyebiliyor ve risklerini yönetebiliyorlardı. Ancak, Black-Scholes modelinin kullanımı bazı zorluklarla karşılaştı. Bu model, opsiyonların fiyatlarını hesaplamak için bazı varsayımlar yapmaktaydı. Örneğin, model, opsiyonun değerini belirlemek için sürekli bir getiri oranı varsayımı yapıyordu. Ancak, gerçek finansal piyasalarda getiri oranları sürekli değildir ve dalgalanmalar gösterebilir. Bu ve benzeri zorluklar, yeni finansal modellerin geliştirilmesine yol açtı. Finans mühendisleri, daha gerçekçi ve esnek modellerin kullanılmasını savunmaya başladılar. Bu yeni modeller, opsiyonların fiyatlandırılması ve risk yönetimi konularında daha güvenilir sonuçlar sunmaktaydı.

Sonuç olarak, Black-Scholes modeli finans mühendisliği alanında büyük bir etki yaratmış olsa da, bazı zorluklarla karşılaşmıştır. Bu zorluklar, yeni ve daha gelişmiş modellerin ortaya çıkmasına yol açmıştır. Finans mühendisliği, sürekli olarak gelişen bir alan olduğundan, gelecekte daha etkili ve doğru modellerin kullanılacağını söyleyebiliriz.

2.1. Black-Scholes Modelinin Eksiklikleri

Finansal zaman serilerinin istatistiksel özelliklerini yansıtan klasik Black-Scholes modelinin sınırlamaları, çalışmalar ve ampirik kanıtlarla desteklenmektedir. Bu durumda, iki önemli nokta ortaya çıkmaktadır. İlk olarak, tüm piyasalarda getirilerin logaritması normal dağılıma göre davranmaktadır. İkinci olarak ise oynaklık, bir hissenin oynaklığını ölçen standart bir parametre olan σ ile ifade edilen belirsizliği temsil etmektedir. Oynaklık, hisse senedi fiyat değişikliklerini kullanarak tahmin edilebilir veya zaman içinde rastgele değişebilen belirsizlik parametreleri ile ilişkilendirilebilir [28].

Bu bulgular, finansal piyasalardaki gerçeklikle klasik Black-Scholes modeli arasındaki uyumsuzluğu göstermektedir. Finansal zaman serilerinin istatistiksel özelliklerini tam olarak yansıtmayan bu model, getirilerin normal dağılıma uymadığını ve oynaklığın sabit olmadığını göz ardı etmektedir. Bu nedenle, daha gelişmiş ve esnek modellerin

kullanılması gerekmektedir. Bu modeller, piyasalardaki gerçekliği ve değişkenliği daha iyi yansıtacak şekilde tasarlanmalıdır. Bu şekilde, finansal risklerin daha doğru bir şekilde değerlendirilmesi ve yönetilmesi mümkün olacaktır.

Asimetri ve ekstra belirginlik

Bir değişkenin beklenen değeri μ_X veya $E[X]$ olarak tanımlanır. Bu değer, değişkenin tüm olası değerlerinin ağırlıklı ortalamasıdır. Varyans ise değişkenin beklenen değerine olan uzaklıklarının karelerinin beklenen değerinin hesaplanmasıyla bulunur. Matematiksel olarak, varyans şu şekilde ifade edilir:

$$Var[X] = E[(X - \mu_X)^2] \geq 0.$$

Varyansın sıfırdan büyük veya eşit olması beklenir, çünkü bir değişkenin varyansı negatif olamaz.

Çarpıklık, bir dağılımın asimetri derecesini ölçer. Bir değişkenin çarpıklığı, değişkenin beklenen değerine olan uzaklığının üçüncü dereceden momentine, varyansın ise üçüncü dereceden köküne bölünmesiyle hesaplanır. Matematiksel olarak, çarpıklık şu şekilde ifade edilir:

$$\frac{E[(X - \mu_X)^3]}{Var[X]^{3/2}}.$$

Simetrik bir dağılımda, çarpıklık sıfırdır. Bu, verilerin sağ ve sol kuyruklarının eşit uzunlukta olduğu anlamına gelir. Örneğin, normal dağılım simetrik bir dağılımdır ve çarpıklığı sıfırdır. Ancak, bir dağılımın sol kuyruğu sağ kuyruğundan daha uzunsa, çarpıklık negatif olarak kabul edilir. Tersine, sağ kuyruk sol kuyruğundan daha uzunsa, çarpıklık pozitif olarak kabul edilir.

Çizelge 2.1'deki çeşitli endekslerin günlük getirilerinin logaritmasına baktığımızda, önemli bir negatif çarpıklık gözlemleriz. Bu, verilerin sola çarpık olduğunu ve sağ kuyruğun sol kuyruğa göre daha uzun olduğunu gösterir.

Ortalama ve varyans gibi istatistiksel ölçümler, verilerin analizinde ve modellenmesinde önemli bir rol oynar. Bu ölçümler, verilerin dağılımını anlamak, trendleri belirlemek ve gelecekteki değerleri tahmin etmek için kullanılır.

Brownian hareketinin tanımına bir göz atmak, bizi bağımsız büyümeye sahip ve normalden daha genel bir dağılıma dayalı süreçler aramaya yönlendirir. Bu tür süreçlere Lévy süreci denir ve bu sürecin tanımı ve bazı önemli özellikleri bu bölümün ilerleyen

kısımlarında açıklanmaktadır. Fiyatlandırmada etkin olabilmek için, bu sonsuz bölünebilir dağılımların daha fazla çarpıklık ve belirginlik gösterebilmesi gerekmektedir. Son yıllarda, finansal veri modelleme için bu özellikleri içeren modeller tanıtıldı ve normal dağılım yerine daha karmaşık sonsuz bölünebilir dağılımlar kullanılmaya başlandı [51].

Çizelge 2. 1. Ana göstergelerle ilgili ortalama, deneysel standart sapma, çarpıklık ve belirginlik [60].

<i>Gösterge</i>	<i>Ortalama</i>	<i>Standart sapma</i>	<i>Çarpıklık</i>	<i>Basıklık</i>
S&P 500 (1970-2001)	0.0003	0.0099	-1.6663	43.36
S&P 500 (1997-1999)	0.0009	0.0119	-0.4409	6.94
Nasdaq-Composite	0.0015	0.0154	-0.5439	5.78
DAX	0.0012	0.0157	-0.4314	4.65
SMI	0.0009	0.0141	-0.3584	5.35
CAC-40	0.0013	0.0143	-0.2116	4.63

Varlık fiyatlarının modellenmesinde Lévy süreçlerinin kullanılması, Black-Scholes modeline göre aşağıdaki avantajlar nedeniyle daha fazla ilgi görmüştür:

1. Lévy-Itô ayrışımı, sonsuz aktivite yerine sonlu aktiviteye sahip olan büyük hisse senedi hareketlerinin doğal bir tanımını sunar.
2. Gerçeğe daha yakın ve güvenilir bazı modeller mevcuttur.
3. Bazı ampirik çalışmalar, “kalın kuyruk” varlığını ima eder. Çoğu Lévy süreci bu özelliğe sahipken, Brownian hareketi “normal kuyrukludur” [57].

Son yıllarda, modern olasılık teorisi finansal piyasalarda model oluşturma'nın doğal bir dil haline gelmiştir. Olasılık teorisi, rastgele süreçlerin oluşumunda temel bir rol oynamaktadır. Rastgele davranışlar nedeniyle olguları yöneten yasalar net olmadığı için, geleceği tahmin etmek ve doğru çalışma biçimini benimsemek, uzmanlar ve finans mühendisleri de dahil olmak üzere birçok uzmanın temel kaygısıdır. Lévy süreci, Paul Lévy tarafından 1930'lerde incelenen stokastik süreç ailesinin en önemli kategorilerinden biri olarak basıklıktır ve son on yıllarda finansal matematik dünyasında önemli bir rol oynamıştır. Geçtiğimiz yirmi yılda, Lévy'nin süreçleri özellikle seçeneklerin değerlendirilmesi ve fiyatlandırılmasında dikkate alınmış ve bu konuda birçok makale ve kitap yayımlanmıştır.

Lévy süreçleri, sıralı-difüzyon ve pure sıçrama süreçlerinin oluşturulması ve tanıtılması için temel oluşturur. Bu nedenle, bu bölümde, gelecekte ihtiyaç duyulacak olan yeni Lévy süreçlerini tanıtmak için kullanılan en önemli matematiksel araçların yanı sıra, Lévy süreçleri kavramlarını kısaca tanıtacağız.

Bu bölüm boyunca, (Ω, F, P) yapısının bir olasılık uzayı olduğunu kabul etmekteyiz. Ω , örnek uzayı temsil etmekte olup, F ise Ω üzerindeki bir sigma alanıdır. P ise F üzerinde tanımlanan bir olasılık ölçüsüdür. Bu varsayımlar, bu bölümde ele alınacak olan konuların temelini oluşturmaktadır. Bu nedenle, konuları anlamak ve uygulamak için bu yapıları iyi bir şekilde anlamak gerekmektedir.

2.2. Rastgele Süreçler

Stokastik süreçler, rastgele değişkenlerin zaman parametresi tarafından belirlendiği bir aileyi ifade eder, yani $(X_t)_{t \in [0, T]}$ şeklindeki bir aile. Zaman parametresi t , kesikli veya sürekli olabilir. Bu tezde, sürekli zamanlı stokastik süreçlere odaklanacağız. Stokastik süreçlerin her bir gerçekleştirilmesi, sürecin örnek yörünge olarak adlandırılan bir zaman fonksiyonunu tanımlar, yani $X(\omega): t \rightarrow X_t(\omega)$.

Tanım 2.1. Bir $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ fonksiyonu, “Càdlàg” olarak adlandırılır, eğer sol taraftan gelen limit ile sağ taraftan gelen limit sürekli ise ve her $t \in [0, T]$ için şunlar geçerli ise:

$$f(t-) = \lim_{s \rightarrow t, s < t} f(s), \quad f(t+) = \lim_{s \rightarrow t, s > t} f(s) \quad (2.1)$$

ve aynı zamanda $f(t) = f(t+)$ olsun.

Her sürekli fonksiyon Càdlàg bir fonksiyondur, ancak sürekli olmayan (süreksiz) Càdlàg fonksiyonları da mevcuttur. Eğer t , bir sürekli olmayanlık noktası ise, her Càdlàg fonksiyon sürekli olur, ancak sürekli olmayan (süreksiz) Càdlàg fonksiyonları da bulunur.

$$\Delta f(t) = f(t) - f(t-). \quad (2.2)$$

Fonksiyonun t noktasında ani bir değişiklik göstermesine, bu duruma f 'nin t noktasında sıçraması denir. Càdlàg bir fonksiyon olan f , kümelerinden birinde en fazla sürekli olmayan (süreksiz) olabilir, yani $\{t \in [0, t], f(t) \neq f(t-)\}$ kümesi bu durumu ifade edebilir [22]. Bir basamak fonksiyonu, T_0 gibi bazı noktalarda ani değişiklikler gösteren Càdlàg bir fonksiyon örneğidir. Bu fonksiyon, T_0 gibi noktalarda sıçrama gösterir ve bu noktalardaki değeri, sıçramadan sonraki değer olarak tanımlanır, yani $\Delta f(T_0) = 1$.

Belirli bir sürekli $g: [0, T] \rightarrow R$ fonksiyonu ve sabit f_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$) değerleri ile $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = T$ olmak üzere, $f(t)$ fonksiyonu şu şekilde tanımlanır:

$$f(t) = g(t) + \sum_{i=0}^{n-1} f_i 1_{[t_i, t_{i+1}[}(t), \quad (2.3)$$

Bu fonksiyon Càdlàg (sürekli artan limitli artıkları olan) bir fonksiyondur. $g(t)$, f 'nin sürekli bileşeni olarak kabul edilir ve sıçramalarda eklenir. f 'nin sıçramaları t_i ($i \geq 1$) için $\Delta f(t_i) = f_i - f_{i-1}$ olarak hesaplanır. Elbette, Càdlàg fonksiyonları sürekli ve sıçramalı kısımlar olarak net bir şekilde ayrılmayan fonksiyonlardır. Càdlàg fonksiyonları, sıçramalar içeren süreçlerin yörüngesini doğru bir şekilde modellemek için kullanılır.

Càdlàg veya Càglàd terimi yukarıdaki örnekte, t_i sıçrama anlarında sağ-sürekli bir fonksiyon olduğu için kullanılır, çünkü değeri sıçramadan sonraki değer olarak tanımlanır: $f(t_i) = f(t_i +)$. Eğer $f(t_i)$ sıçramadan önceki değeri temsil ediyorsa, yani $f(t_i) = f(t_i -)$, o zaman sağ limiti Càglàd olan bir sol sürekli fonksiyon elde edilir. Burada “sağ” ve “sol” terimleri zaman değişkenini yorumladığı için kullanılır, “sağ” zamanın daha sonraki bir anı ifade ederken “sol” zamanın daha önceki bir anı ifade ettiğini belirtir. Eğer bir sağ-sürekli fonksiyon t anında bir sıçrama içeriyorsa, $f(t)$ değeri t anından önceki yörüngenin gözlemleri tarafından tahmin edilemez hale gelir.

Sıçramalar, gözlemciler için gerçekleşme zamanı önceden tahmin edilemeyen rastgele olayları ifade eder. Diğer taraftan, örnekleme yörüngesi sol-sürekli olduğunda, yörünge boyunca t zamanına ulaşan bir gözlemci, t anındaki f değerini tahmin edebilir. Finansal modelleme metinlerinde sıçramalar, ani ve öngörülemez olayları temsil eder, bu nedenle sağ-süreklilik tercih edilen bir özelliktir. Yani, tahmin edilebilir değerlere sahip olmayan kesikli bir süreci modellemek istediğimizde, Càglàd sürecini kullanmak gerekebilir [16].

2.2.1. Filtrasyon

Zaman ilerledikçe, rastgele bir süreçten gelen bilgi miktarı geçmişe göre artar, bu nedenle olasılık uzayının yapısına (Ω, F, P) zamanla ilgili bazı gerekli araçları eklememiz gerekebilir. Bu kavram genellikle bir filtre ile açıklanır.

Tanım 2.2. Filtre veya bilgi akışı: Filtre veya bilgi akışı, (Ω, F, P) üzerinde her $t \geq s \geq 0$ için $F_s \subseteq F_t \subseteq F$ olacak şekilde $(F_t)_{t \in [0, T]}$, artan bir σ -alan ailesini temsil eder. Bu aile, t

zamanı boyunca bilgi düzeyini temsil eder ve zamanla artar. Bir olasılık uzayı, bir filtre ile donatıldığında, bu olasılık uzayına bir filtre ile donatılmış bir olasılık uzayı denir. Sezgisel bir

3. Uyarlanabilir Süreç: Her $t \in [0, T]$ için X_t değeri t bakış açısından, rastgele bir olayın olasılığı, zaman içinde daha fazla bilgi açığa çıktıkça değişecektir.

Tanım 2. zamanında ortaya çıkıyorsa ve X_t stokastik bir değişken ise, F_t tarafından ölçülebilirse, $(X_t)_{t \in [0, T]}$ bir stokastik süreç olarak kabul edilir. Aynı zamanda $(F_t)_{t \in [0, T]}$ bilgi yapısına uygun olarak uyarlanabilir olarak adlandırılabilir. Bu süreç aynı zamanda adaptif süreç olarak da adlandırılabilir.

2.2.2. Rastgele zamanlar

Bazı durumlarda, rastgele zamanlarda meydana gelen olaylarla karşılaşabiliriz. Rastgele bir zaman, belirli bir olayın gerçekleşeceği zamanı temsil eden pozitif bir rastgele değişken olan $T \geq 0$ 'dır. Bir filtre (F_t) verildiğinde, doğal bir soru, F_t 'deki bilginin $(\tau \leq t)$ olayının meydana gelip gelmediğini belirleyip belirlediğidir. Eğer cevap evet ise, τ rastgele zamanına uyarlanabilir rastgele zaman veya durma zamanı denir. Başka bir deyişle,

$$\forall t \geq 0, \{T \leq t\} \in F_t$$

olduğunda, T 'yi uyarlanabilir rastgele zaman olarak adlandırabiliriz.

Eğer T_1 ve T_2 rastgele zamanlarsa, o zaman $T_1 \wedge T_2 = \inf\{T_1, T_2\}$ ifadesiyle gösterilen ifade rastgele bir zamanı temsil eder. “Durdurma zamanı” terimi, τ , bir sürecin anlık hareketini durdurması gereken anları ifade etmek için kullanılır. τ bir durma zamanı ve $X = (X_t)$ uyarlanmış süreci verildiğini varsayalım. Yeni bir $X_{r \wedge t}$ süreci aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$X_{r \wedge t} = \begin{cases} X_t, & t < \tau \\ X_\tau, & t \geq \tau. \end{cases} \quad (2.4)$$

Bu ifade, belirli bir zaman t 'ye kadar X_t 'nin değerini ve $t \geq \tau$ durumunda X_τ 'nin değerini temsil eder.

2.2.3. Martingaller

(F_t) bir filtre ve (Ω, F, P) bir olasılık uzayı ile ele alalım.

Tanım 2.4. (Martingale) $X = (X_t)_{t \in [0, T]}$ bir Càdlàg süreç olsun ve bu süreç uyarlanabilir olsun. Her $t \in [0, T]$ için $E[|X_t|]$ sonlu olsun. Ayrıca,

$$\forall s > t, E[X_s | F_t] = X_t, \quad (2.5)$$

olacak şekilde olsun. Bu durumda X , bir martingale olarak adlandırılır. Başka bir deyişle, bir martingale'nin gelecekteki değeri için en iyi öngörü, şimdiki değeri ile aynıdır. (W_t) , Wiener süreci, martingale için yaygın bir örnektir.

Martingale, $[0, \infty)$ aralığında tanımlandığına dikkat edilmelidir, yani sonlu t değerleri için ve $t = \infty$ için geçerli değildir. Örnekleme özelliği, martingallerin temel bir özelliği olarak kabul edilir ve bu özellik, 3. koşulda t ve s yerine uyarlanabilir rastgele zamanların kullanılmasıyla elde edilir.

Önerme 2.1. $(M_t)_{t \in [0, T]}$ bir Martingale olsun ve T_1 ve T_2 , uyarlanabilir rastgele zamanlar olsun (yani durma zamanları). Öyle ki, neredeyse kesinlikle $T \geq T_2 \geq T_1 \geq 0$ olur ve aşağıdaki koşul sağlanır:

$$E[M_{T_2} | F_{T_1}] = M_{T_1}, \quad (2.6)$$

İspat: [44 ve 17]'ye bakınız.

Harmonik rastgele zamanda durdurulan martingale'nin hala bir martingale olduğuna dikkat edin [16].

Tanım 2.5. Bir Càdlàg süreç $X = (X_t)_{t \in [0, T]}$ için, her artan durma zamanlarının bir dizisi mevcutsa (yani T_n), ve bu dizinin neredeyse kesin olarak $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty$ olduğu kabul ediliyorsa, ayrıca $X_{r \wedge T_n} 1_{\{T_n > 0\}}$ ifadesinin n tüm değerleri için düzgün bir şekilde entegre edilebilen bir martingale ise, bu süreç yerel bir martingaledir [44]. Herhangi bir martingale, yerel bir martingale olarak kabul edilebilir, ancak martingale olmayan yerel martingaller de mevcut olabilir.

Tanım 2.6. Bir Càdlàg süreç olan $X = (X_t)_{t \in [0, T]}$, F_t tarafından uyarlanabiliyorsa ve $X_t = X_0 + M_t + A_t$ olacak şekilde ifade edilebiliyorsa (burada $M_0 = A_0 = 0$), o zaman X , yarı Martingale olarak kabul edilir. Bu tanımda M_t , bir yerel Martingale ve A_t ise sonlu değişimli bir süreçtir [32].

Tanım 2.7. Bir tahmin süreci, $[0, T] \times \Omega$ üzerindeki tüm sol-sürekli süreçler tarafından oluşturulan P , σ -alanına aittir. $X: [0, T] \times \Omega \rightarrow R^d$ görüntüsü, P 'ye göre ölçülebilen bir süreçtir ve buna tahmin süreci adı verilir [16].

2.3. Poisson Süreci ve Brownian Hareketi

Poisson süreci, daha karmaşık sıçrama süreçlerinin oluşturulmasında kullanılan, sürekli olmayan yörüngelere sahip stokastik süreçlerin temel bir örneğidir.

2.3.1. Poisson dağılımı

Bir tamsayı rastgele N değişkeni, λ parametresiyle belirlenmiş bir Poisson dağılımına sahipse, bu durumda herhangi bir n tamsayısı için

$$P(N = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}, \quad (2.7)$$

şeklinde ifade edilir. Poisson dağılımı, aşağıdaki iyi tanımlanmış moment üretici fonksiyona sahiptir:

$$M(u) = \exp(\lambda(e^u - 1)). \quad (2.8)$$

Önerme 2.2. Eğer $(\tau_i)_{i \geq 1}$, λ parametresi ile üstel bağımsız rastgele değişkenlerse, o zaman her $t > 0$ rastgele değişken için

$$N_t = \inf \left\{ n \geq 1, \sum_{i=1}^n \tau_i > t \right\} \quad (2.9)$$

λt parametrelili bir Poisson dağılımına sahiptir:

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(N_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}. \quad (2.10)$$

Poisson dağılımının ilginç bir özelliği, involüsyon altındaki kararlılığıdır. Y_1 ve Y_2 , sırasıyla λ_1 ve λ_2 parametrelerine sahip bağımsız Poisson değişkenleri ise, o zaman $Y_1 + Y_2$ toplamı, $\lambda_1 + \lambda_2$ parametreleriyle bir Poisson dağılımına sahiptir.

2.3.2. Poisson süreci: Tanımı ve özellikleri

Tanım 2.8. Poisson süreci, $(\tau_i)_{i \geq 1}$, λ parametresi ile üstel bağımsız rastgele değişkenler dizisi ve $T_n = \sum_{i=1}^n \tau_i$ olacak şekilde varsayalım. $(N_t, t \geq 0)$ süreci, aşağıdaki şekilde tanımlanan bir yoğunluğu λ olan bir Poisson süreci olarak adlandırılır:

$$N_t = \sum_{n \geq 1} 1_{t \geq T_n}. \quad (2.11)$$

Bu nedenle, Poisson süreci, $(T_n - T_{n-1})_{n \geq 1}$ üstel değişkenlerden oluşan bir i.i.d. (bağımsız ve aynı dağılımlı) dizi olarak tanımlanır. Bu süreç, 0 ile t arasında meydana gelen (T_n) rastgele zamanların sayısını sayar.

Önerme 2.3. $N = (N_t)_{t \geq 0}$ bir Poisson süreci olduğunu varsayalım. O zaman aşağıdaki özellikler geçerlidir:

1. Her $t > 0$ için, N_t neredeyse kesinlikle sonludur.
2. Her ω için, $t \rightarrow N_t(\omega)$ örnek yörüngesi 1 artışlarla sabit parçalıdır.
3. $t \rightarrow N_t(\omega)$ örnek yörüngesi, sol limiti olan sağ-sürekli (Càdlàg).
4. Her $t > 0$ için, 1 olasılıkla, $N_{t-} = N_t$.
5. (N_t) olasılıkta sürekli:

$$\forall t > 0, \quad N_s \xrightarrow[s \rightarrow t]{P} N_t. \quad (2.12)$$

6. Her $t > 0$ için, λt parametrelili bir Poisson dağılımına sahiptir:

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(N_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}. \quad (2.13)$$

7. N_t karakteristik fonksiyonu aşağıdaki bağlantıyla ifade edilir:

$$E[e^{iuN_t}] = \exp\{\lambda t(e^{iu} - 1)\}, \forall u \in \mathbb{R}. \quad (2.14)$$

8. (N_t) bağımsız artışlara sahiptir. Yani, her $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ için

$$N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}.$$

bağımsız rastgele değişkenlerdir.

9. N artışları durağandır, yani her $t > s$ için $N_t - N_s, N_{t-s}$ ile eşit dağılıma sahiptir.

10. (N_t) Markov özelliğine sahiptir, yani

$$\forall t > s, \quad E[f(N_t) | N_u, u \leq s] = E[f(N_t) | N_s].$$

İspat: Bu bölümde sadece 4. paragrafın ispatını sunacağız. Her $\omega \in \Omega$ için, $N_t(\omega)$ süreksizlik noktalar kümesi, $\{T_n(\omega), n \geq 1\}$ ile gösterilir. Ancak, t verilirse, o zaman $P(t \in \{T_n(\omega), n \geq 1\}) = 0$ olur. Bu nedenle, 1 olasılıkla, t süreksizlik noktası değildir, yani 1 olasılıkla, $N_{t-} = N_t$. Özelliklerin geri kalanının ispatını incelemek için [16, Bölüm 2]'ye bakınız.

Özellikler (2), (3) ve (4) bazı yönlerden çelişkili görünmektedir. Bir yandan, Poisson sürecinin her örnek yörüngesinin süreksiz olduğu 1 olasılıkla kanıtlanmıştır. Aslında, süreç sadece sıçramalarla değişir ve diğer yandan herhangi bir t noktasında örnek fonksiyonu, 1 olasılıkla sürekli. Bu, tüm sıçrama süreçleriyle uğraşırken önemlidir ve sürecin süreksizlik noktalarının sıfır boyutlu bir küme olmasından kaynaklanmaktadır.

Poisson sürecinin sağ-sürekliliği (Càdlàg özelliği) gerçekten bir özellik değildir. N_t 'yi öyle bir şekilde tanımladık ki, örneğin süreksizlik noktasında $N_t = N_{t+}$ ve Càdlàg'ın doğru sürekli versiyonunu seçtik. Poisson sürecinin diğer bir seçeneği sol-sürekli süreçtir ve

$$N'_t = \sum_{n \geq 0} 1_{t \geq \tau_n} \quad (2.15)$$

ile gösterilir.

N ve N' arasındaki fark, N' değerlerinin geleceğin yakınında tahmin edilebilir olmasıdır. Bu nedenle, $s < t$ için $s \rightarrow t$ ise o zaman $N'_t \rightarrow N_t$ olur, ama N değerleri tahmin edilemez. N sıçramaları, fiyat hareketlerinde sıçramalar başlatmak için ilk motivasyonumuzla ilgili olan ani olaylar olarak yorumlanır. Bu nedenle, her zaman Poisson sürecinin Càdlàg $(N_t)_{t \geq 0}$ versiyonunu kullanırız. Poisson sürecinin başka yararlı özellikleri vardır.

Önerme 2.4. Bağımsız Poisson süreçlerinin toplamı, yani $(N_t^1)_{t \geq 0}$ ve $(N_t^2)_{t \geq 0}$, λ_1 ve λ_2 parametrelili bağımsız Poisson süreçleriyse, o zaman $(N_t^1 + N_t^2)_{t \geq 0}$, $\lambda_1 + \lambda_2$ yoğunluğu olan bir Poisson sürecidir.

İspat: [44]'e bakınız.

2.3.3. Telafi edilmiş Poisson süreçleri

Poisson sürecinin merkezileştirilmiş versiyonunu aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\widetilde{N}_t = N_t - \lambda t. \quad (2.16)$$

$\widetilde{N}_t$ karakteristik fonksiyonu ise şu şekilde tanımlanır:

$$\Phi_{\widetilde{N}_t}(z) = \exp\{\lambda t(e^{iz} - 1 - iz)\}. \quad (2.17)$$

Poisson süreci gibi, $\widetilde{N}_t$ bağımsız artışlara sahiptir ve şu eşitlik geçerlidir:

$$E[N_t | N_s, s \leq t] = E[N_t - N_s + N_s | N_s]$$

$$E[N_t - N_s] + N_s = \lambda(t - s) + N_s,$$

Bundan dolayı, $(\widetilde{N}_t)$ bir Martingale'dir. Yani,

$$\forall t > s, E[\widetilde{N}_t | \widetilde{N}_s] = \widetilde{N}_s. \quad (2.18)$$

$(\widetilde{N}_t)_{t \geq 0}$, telafi edilmiş Poisson süreci olarak adlandırılır ve $(\lambda t)_{t \geq 0}$, telafi edici olarak bilinir. Telafi edici, telafi edilmiş Poisson süreci oluşturmak için çıkarılması gereken bir

değeri temsil eder. Telafi edilmiş Poisson süreci kesin bir değer taşımaz ve bu nedenle, Poisson sürecinden farklı olarak bir sayma süreci oluşturamayacaktır.

2.3.4. Sayım Süreçleri

$N_t, [0, t]$ aralığında gerçekleşen $\{T_n, n \geq 1\}$ rastgele zamanların sayısını hesaplayan bir Poisson sürecidir. T_n ise rastgele zamanların üstel rastgele değişkenlerin bağımsız ve aynı dağılımlı (iid) dizisinin kısmi toplamlarıdır. Genel olarak, $P(T_n \rightarrow \infty) = 1$ şartını sağlayan bağımsız artan bir dizi $\{T_n, n \geq 1\}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $(X_t)_{t \geq 0}$ bağımlı sayma süreci aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$X_t = \sum_{n \geq 1} 1_{t \geq T_n} = \# \{ n \geq 1, T_n \leq t \}. \quad (2.19)$$

$X_t, [0, t]$ aralığında gerçekleşen $\{T_n, n \geq 1\}$ rastgele zamanların sayısını belirler. $P(T_n \rightarrow \infty) = 1$ koşulu, X_t 'nin her $t \geq 0$ için iyi tanımlandığını (sonlu olduğunu) garanti eder. $(X_t)_{t \geq 0}$ Poisson süreci gibi, parçalı sabit yörüngelere sahip olan Càdlàg sürecidir ve bu, örnek yörüngelerin 1 boyutunda sıçramalara sahip olduğu anlamına gelir.

İlk olarak, i.i.d. üstel rastgele değişkenler dizisinin kısmi toplamları olarak göz önüne aldığımızda, X bir Poisson sürecidir.

Genel bir sayma süreci için, (T_n) rastgele zamanlar dizisi bağımsız bir dağılıma ve yapıya sahip olabilir. Aşağıdaki lemma, bağımsız büyümeye sahip olan tek bir sayma sürecinin Poisson süreci olduğunu göstermektedir.

Lemma 2.1. (X_t) , bağımsız artışlara ve stasyonere sahip bir sayma süreci olsun. Bu durumda, (X_t) bir Poisson sürecidir.

İspat: [16]'ya bakınız.

2.3.5. Brownian hareketi: Tanımı ve özellikleri

Tanım 2.9. Brownian hareketi, (Ω, F, P) olasılık uzayında $X = \{X_t, t \geq 0\}$ stokastik bir süreç ise ve aşağıdaki özelliklere sahipse, bu sürece standart Brownian hareketi denir:

1. Neredeyse her yerde $X_0 = 0$,
2. X bağımsız ve stasyonere artışlara sahiptir, yani, $X_{t+s} - X_t$, rastgele değişkenler için beklenen değeri 0 ve varyansı $s > 0$ olan bir normal dağılıma sahiptir, yani $X_{t+s} - X_t \sim N(0, s)$.

Standart Brownian hareketi $W = \{W_t, t \geq 0\}$ olarak gösterilir. Artışların bağımsız olma özelliği, Brownian hareketinin Markov olduğunu ifade eder ve ayrıca bu süreç, sürekli örnek yörüngelere sahip olan tek Lévy sürecidir.

Brownian hareketinin üç temel özelliği:

- 1. Martingale özelliği:** Brownian hareketi bir martingale süreçtir. Yani her $0 \leq s \leq t$ için

$$E[W_t|F_s] = E[W_t|W_s] = W_s,$$

ve ayrıca

$$E[W_t W_s] = \min\{t, s\}.$$

- 2. Yörünge özelliği:** Brownian hareketi sürekli yörüngelere sahiptir. W_t , t 'ye bağlı olarak sürekli bir fonksiyondur.

Brownian hareketinin yörüngeleri son derece düzensiz ve önceden tahmin edilemezdir. Örneğin, türevlenebilir değildir ve yörüngelerinde sonsuz değişimler bulunur, yani her aralıktaki değişimler sonsuzdur. Ayrıca,

$$P\left(\sup_{t \geq 0} W_t = +\infty \text{ \& \; } \inf_{t \geq 0} W_t = -\infty\right) = 1.$$

Bu, Brownian hareketinin dalgalanmalarının tüm pozitif ve negatif değerlerde sonsuz olduğunu ifade eder.

- 3. Kendine benzerlik özelliği:** $W = \{W_t, t \geq 0\}$ Brownian hareketi ise, her $c \neq 0$ için

$$\tilde{W} = \{\tilde{W}_t = cW_{t/c^2}, t \geq 0\},$$

aynı zamanda bir Brownian hareketidir [51].

2.4. Rastgele Ölçümler

$(N_t)_{t \geq 0}$, Poisson sayım sürecini ele alalım. Eğer $T_1, T_2, \dots$ bir N sıçrama zamanları dizisi ise, o zaman N_t , 0 ile t arasındaki sıçrama sayısını temsil eder ve $N_t - N_s$, $[s, t]$ aralığındaki sıçrama sayısını ifade eder.

Bu tür bir sayma süreci, $[0, \infty[$ aralığı üzerinde bir M ölçüsünü tanımlar. Herhangi bir $A \subset \mathbb{R}^+$ ölçülebilir kümesi için

$$M(\omega, A) = \# \{i \geq 1, T_i(\omega) \in A\} \quad (2.20)$$

olarak hesaplanır.

O halde $M(\omega, \cdot)$ pozitif bir ölçüdür ve tamsayı değerlerini alır. $M(A)$, her sınırlı A kümesi için olasılık değeri 1 ile sonludur.

$M(\omega, \cdot)$, ölçüsü ω 'ya bağlıdır, bu nedenle bir rastgele ölçüdür. Poisson sürecinin λ yoğunluğu, M rastgele ölçü değerlerinin ortalamasını temsil eder. Yani,

$$E[M(A)] = \lambda|A|.$$

Burada $|A|$, A 'nın Lebesgue ölçüsünü ifade eder.

Şimdi $(N_t)_{t \geq 0}$ Poisson sürecini M rastgele sıçrama ölçüsü kullanarak tanımlayacağız.

$$N_t(\omega) = M(\omega, [0, t]) = \int_{[0, t]} M(\omega, ds). \quad (2.21)$$

Poisson sürecinin özellikleri, M ölçü özelliklerine de aktarılabilir. Kesirli $[t_1, t'_1], \dots, [t_n, t'_n]$ aralıklar için, $M([t_k, t'_k])$, $[t_k, t'_k]$ aralığındaki Poisson sürecinin sıçrama sayılarıdır ve $\lambda(t'_k - t_k)$ parametrelili bir Poisson rastgele değişkenidir.

$[t_j, t'_j]$ ve $[t_k, t'_k]$, $(j \neq k)$ iki farklı aralık için $M([t_j, t'_j])$ ve $M([t_k, t'_k])$ rastgele değişkenler bağımsızdır.

Genel olarak, her ölçülebilir A kümesi için $M(A)$, $\lambda|A|$ parametresine sahip bir Poisson dağılımına sahiptir, yani $|A| = \int_A dx$, A 'nın Lebesgue ölçüsünü ifade eder.

Benzer bir şekilde, rastgele bir değişken bir $\widetilde{N}_s$ telafi edilmiş Poisson sürecine ilişkilendirilebilir:

$$\widetilde{M}(\omega, A) = M(\omega, A) - \int_A \lambda dt = M(\omega, A) - \lambda|A|. \quad (2.22)$$

$E[\widetilde{M}(A)] = 0$ ve $Var[\widetilde{M}(A)] = \lambda|A|$ olduğunu gözlemliyoruz. $\widetilde{M}$, M 'den farklı olarak tamsayı ve pozitif değildir. Daha ziyade, işaretlenmiş bir ölçüdür. Bir örnek olarak, $\widetilde{M}$, telafi edilmiş rastgele boyut ve ölçüdür ve $A \mapsto \lambda|A|$, M 'nin bir dengeleyicisidir [16].

2.4.1. Poisson rastgele ölçümü

Poisson rastgele ölçümünü tanımlamak için önce gerekli bazı kavramları açıklayacağız.

Tanım 2.10. Dirac ölçüsü, $(E, \mathcal{E})$ ölçülebilir bir uzayı temsil eder. $A \in \mathcal{E}$ olmak üzere, $x \in E$ noktasına karşılık gelen Dirac ölçüsü şu şekilde tanımlanır:

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Tanım 2.11. σ -sonlu ölçüsü, $E \subset \mathbb{R}^d$ ölçülebilir bir küme üzerinde E 'den Borel kümelerine $\mu(E_i) < \infty$ şeklinde bir ayırım yapılabilirse, μ ölçüsüne σ -sonlu denir.

Tanım 2.12. Radon ölçüsü, $\mathcal{B}, \mathbb{R}^d$ üzerinde σ -field Borel olduğunu varsayalım. Her $B \in \mathcal{B}$ kompakt ölçülebilir bir küme için, $\mu(B) < \infty$ olacak şekilde μ 'ya $(E, \mathcal{B})$ üzerinde Radon ölçüsü denir.

$M(\omega, A)$ ölçüsü, $A \subset \mathbb{R}^+$ için $E[M(A)] = \lambda|A|$ olacak şekilde rastgele sayım ölçüsünü belirler. $\mathbb{R}^+$ 'yı $E \subset \mathbb{R}^d$ ile değiştirerek ve Radon ölçümünü kullanarak, genel bir yapı ifade edilebilir.

Tanım 2.13. Yaygın bir ölçüm, $E \subset \mathbb{R}^d$ 'deki her noktaya sıfır değer atayan μ_0 ölçümüne denir ve şu şekilde tanımlanır:

$$\forall x \in E, \mu_0(\{x\}) = 0.$$

Lebesgue ölçümü, bir örnek olarak yaygın bir ölçüm olarak kabul edilir.

Tanım 2.14. Poisson rastgele ölçümü, (Ω, F, P) olasılık uzayı, $E \subset \mathbb{R}^d$ ve $\mu, (E, \mathcal{E})$ üzerinde Radon ölçümü (pozitif) olduğunu varsayalım. λ yoğunluk ölçüsü ile E üzerinde bir Poisson rastgele ölçümü M aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$M: \Omega \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$(\omega, A) \mapsto M(\omega, A)$$

Bu, tamsayı rastgele ölçüm değeridir, böyle ki $\omega \in \Omega$ için (nearly everywhere), $M(\omega, \cdot), E$ üzerinde tamsayı bir Radon ölçüsüdür. Her ölçülebilir sınırlı $A \subset E$ için, $\mu(A) < \infty$ tamsayı değerli bir rastgele değişkendir.

Her ölçülebilir $A \subset E$ için, $M(\cdot, A) = M(A)$, bir $\mu(A)$ parametrelili Poisson rastgele değişkenidir:

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(M(A) = k) = e^{-\mu(A)} \frac{(\mu(A))^k}{k!}. \quad (2.23)$$

$A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$ ölçülebilir ayrı kümeler için $M(A_1), \dots, M(A_n)$ bağımsızdır.

Aslında, E üzerindeki herhangi bir Poisson rastgele değişkeni, bir doğrulama noktaları dizisine bağlı olarak sayma değişkeni olarak ifade edilebilir. Her $A \in \mathcal{E}$ için $\{T_i(\omega), i \geq 1\}$ dizisi vardır, böyle ki $M(\omega, A) = \sum_{i \geq 1} 1_A(T_i(\omega))$ olsun. Bu nedenle $M, \{T_i\}_{i \geq 1}$ rastgele noktalarda bulunan Dirac nokta kütlelerinin toplamıdır, yani

$$M = \sum_{i \geq 1} \delta_{T_i(\omega)}.$$

2.4.2. Telafi edilmiş Poissonun rastgele değişken ölçümü

Telafi edilmiş Poisson ölçümü, $\tilde{M}$ yoğunluktan yoğunluğun çıkarılmasıyla elde edilir.

$$\tilde{M}(A) = M(A) - \mu(A) \quad (2.24)$$

Poisson ölçüsünün tanımından, ayrı kompakt kümeler $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$ için $\tilde{M}(A_1), \dots, \tilde{M}(A_n)$ değişkenlerinin bağımsız olduğu ve ortalama ile varyansın aşağıdaki gibi olduğu sonucuna varırız:

$$E[\tilde{M}(A_i)] = 0, \quad Var[\tilde{M}(A_i)] = \mu(A_i).$$

2.4.3. Poisson rastgele ölçümü ile sıçrama süreçlerinin oluşturulması

$M, E = [0, T] \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ uzayında bir Poisson ölçüsü olsun. Bu durumda, M 'yi, $(T_n, Y_n) \in E$ rastgele bir konfigürasyonuna karşılık gelen sayma noktalarının ölçüsü olarak gösterebiliriz, yani

$$M = \sum_{n \geq 1} \delta_{(T_n, Y_n)}$$

$$M(\omega, \cdot) = \sum_{n \geq 1} \delta_{(T_n(\omega), Y_n(\omega))}.$$

Sezgisel olarak, her $(T_n(\omega), Y_n(\omega)) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$ noktası, T_n anında meydana gelen bir gözleme karşılık gelir ve $Y_n(\omega)$ (sıfır olmayan) rastgele değişken ile tanımlanır.

Tanım 2.15. $(\Omega, F, (F_t)_{t \geq 0}, P)$ filtreli olasılık uzayı tarafından verildiğini varsayalım. $(F_n)_{n \geq 0}$, uyumlu rastgele zamanlar olsun. Y_n 'ler F_t -ölçülebilir ise, $M, E = [0, T] \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, F_t -uyumlu Poisson rastgele bir ölçüdür. Yani her ω için, $M(\omega, \cdot), E = [0, T] \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ üzerinde bir ölçüdür ve bu ölçüye göre integral kavramı tanımlanabilir hale gelir.

2.4.4. İşaretli nokta süreçleri

$[0, T] \times \mathbb{R}^d$ üzerindeki Poisson rastgele değişkeni $(T_n, Y_n)_{n \geq 1}$ rastgele bir dizisi için $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ noktalarından oluşan,

$$M(\omega, \cdot) = \sum_{n \geq 1} \delta_{(T_n(\omega), Y_n(\omega))} \quad (2.25)$$

sayma ölçüsü olarak tanımlanabilir.

$(T_n, Y_n) \in [0, T] \times E$ rastgele dizisi ele alalım. Burada $(T_n)_{n \geq 1}$, olayların meydana gelişini tanımlayan yapılandırılmış uyarlanmış rastgele zamanların bir dizisidir ve $Y_n \subseteq E \subseteq \mathbb{R}^d$, T_n 'de gözlemlenen değerdir. M sayım ölçüsü (2-25) ile tanımlanabilir. $[0, T] \times E$ üzerindeki değerin doğru rastgele ölçüsü ve $(T_n, Y_n) \in [0, T] \times E$ rastgele dizisine işaretli nokta süreci ve $(Y_n)_{n \geq 1}$ rastgele değişkenlere işaret denir.

Tanım 2.16. $(\Omega, F, (F_t)_{t \geq 0}, P)$ üzerindeki işaretli nokta süreci, $(T_n, Y_n)_{n \geq 1} \in [0, T] \times E, E \subset \mathbb{R}^d$ gibi bir dizidir. Bu dizi şu özelliklere sahiptir: $(T_n)_{n \geq 1}$ uyarlanabilir rastgele zamanların $(F_t)_{t \geq 0}$ filtre ile artan bir dizi olduğu ve $n \rightarrow \infty$ için $T_n \xrightarrow{a.s.} \infty$, bir dizidir. $(Y_n)_{n \geq 1}$ rastgele değişkenlerin dizisidir ve değerlerini $E \subset \mathbb{R}^d$ 'de alır. Y_n 'ler F_{T_n} -ölçülebilir.

Limit tanımı gereği, $T_n \rightarrow \infty$ koşulu, $[0, T]$ 'de meydana gelen olay sayısının neredeyse kesin olarak sonludur. Her $\omega \in \Omega$ için $M(\omega, \cdot)$, $[0, T] \times E$ üzerinde bir sayım ölçüsüdür. Eğer μ bir dağılım ölçüsüyse ve tüm $(t, y) \in E$ noktaları için $\mu(\{t, y\}) = 0$ olursa, o zaman, 1 olasılıkla her nokta en fazla bir kez oluşur, yani $\mu(\{t, y\}) = 0$ veya 1.

Her Poisson rastgele ölçümü $[0, T] \times \mathbb{R}$ üzerinde (2-25) gibi yazılabilir. Ancak, tüm Poisson rastgele değişkenleri için $(T_n)_{n \geq 1}$ dizisi tüm rastgele Poisson ölçülerine göre $T_n \rightarrow \infty$ koşulda zorunlu olarak geçerli değildir. Bu nedenle, $\mu([0, T] \times \mathbb{R}^d) < \infty$ dışında tüm Poisson rastgele değişkenleri işaretli nokta süreçlerle belirtilemez.

M , rastgele Poisson ölçüsünü $[0, \infty) \times E, E \subset \mathbb{R}^d$ üzerinde $\mu(dtdx) = v(dx)dt$ yoğunluk ölçüsü ile ele alıyoruz, burada μ, E üzerinde sonlu bir ölçüdür.

$f: [0, T] \times E \rightarrow \mathbb{R}^d$ fonksiyonu $[0, T] \times E$ üzerinde integrallenebilen

$$\int_{[0, T] \times E} |f(t, y)| \mu(dtdy) < \infty$$

olsun. M rastgele ölçüme göre integral

$$M(f) = \int_{[0,T] \times E} |f(t,y)| \mu(dt dy) = \sum_{n \geq 1} f(T_n, Y_n) \quad (2.26)$$

olarak ifade edilebilir. Aynı zamanda bir sıçrama süreci ile f 'den

$$X_t(f) = \int_{[0,T] \times \mathbb{R}^d / \{0\}} f(t,y) M(ds dy) = \sum_{\{n, T_n \in (0,T]\}} f(T_n, Y_n) \quad (2.27)$$

olarak tanımlanabilir. $\{X_t(f), t \in [0, T]\}$, M işaretli nokta süreç ile bir Càdlàg örnek yörüngesine sahip olan sıçramaları adaptif süreci açıklar. Bu sıçramalar $(T_n)_{n \geq 1}$ 'de gerçekleşir ve sıçrama değerleri $f(T_n, Y_n)$ 'ye eşittir. Bu nedenle, sıçrama süreçlerini oluşturmak için işaretli nokta süreçleri kullanılır.

Aksine, $X = \{X_t, t \in [0, T]\}$, $\mathbb{R}^d$ -değerinde bir Càdlàg süreçten başlayarak, J_X adı verilen rastgele bir ölçüyü $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ üzerinde aşağıdaki şekilde elde edebiliriz. X 'in sayılabilir sayıda sıçramaya sahip olduğu için, yani $\{t \in [0, T], \Delta X_t = X_t - X_{t-} \neq 0\}$ kümesi sayılabilir olduğu için, bu üyeleri $(T_n)_{n \geq 1}$ rastgele sıçrama zamanları olan bir dizi olarak düzenlenebilir. Burada, T_n , X sürecinin rastgele zamanlar süreçleridir. T_n zamanında, X süreci $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-} \in \mathbb{R}^d / \{0\}$ uzunluğu ile birlikte bir süreksizliğe sahiptir. $(T_n, Y_n)_{n \geq 1}$ süreci, $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ üzerindeki işaretli nokta süreç olarak tanımlanır ve X sürecinin sıçramalarıyla ilgili tüm bilgileri içerir. Şöyle tanımlandığını fark ediyoruz. Aslında, T_n 'ler sıçramaların zamanı ve Y_n 'ler ise onların sıçrama değerleridir.

Bu işaretli nokta sürece karşılık gelen rastgele ölçüyü J_X olarak adlandırırız ve buna X sürecinin sıçrama ölçüsü deriz. Bu ölçüyü aşağıdaki şekilde tanımlarız:

$$J_X(\omega, \cdot) = \sum_{n \geq 1} \delta_{(T_n(\omega), Y_n(\omega))} = \sum_{t \in [0, T]}^{\Delta X_t \neq 0} \delta(t, \Delta X_t). \quad (2.28)$$

Sezgisel olarak, ölçülebilir her $A \subset \mathbb{R}^d$ altkümesi için, $J_X([0, t] \times A)$ değeri 0 ve t aralığındaki X 'in sıçrama sayısına eşittir ve sıçrama değerleri A 'ya aittir. Bu nedenle, J_X sıçrama ölçüsü X sürecinin tüm süreksizlikleri (sıçramaları) hakkında bilgi verir.

2.4.5. Sonsuz değişim fonksiyonları

$p = \{a = t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1} = b\}$ 'nin $[a, b] \subset \mathbb{R}$ aralığında bir bölüntü olduğunu varsayalım. f fonksiyonunun p üzerindeki değişimini

$$Var_p(f) = \sum_{i=1}^n |f(t_{i+1}) - f(t_i)|$$

şeklinde tanımlıyoruz. $\sup_p Var_p(f)$, tüm bölüntüler sonlu ise, o zaman $f, [a, b]$ üzerinde sonlu bir değişim gösterir. Aksi takdirde değişim sonsuz olacaktır.

$f, \mathbb{R}$ veya $[0, \infty)$ üzerinde tanımlanmış bir fonksiyonsa, eğer herhangi bir kompakt aralıkta sonlu değişim gösteriyorsa, o zaman sonlu bir değişime sahiptir. Her azalmayan f fonksiyonu için sonlu bir değişim gösterir. Aksi takdirde, eğer f sonlu bir değişim gösteriyorsa, her zaman iki azalmayan fonksiyonun farkı olarak yazılabilir.

Örnek yörüngeleri 1 olasılıkla sonlu değişim gösteriyorsa, bir sürece sonlu değişim süreci denir. Aksi takdirde, süreç sonsuz değişim gösterir. Poisson süreci, sonlu değişim süreçlerine, ve Brownian hareketi ise sonsuz değişim süreçlerine bir örnektir [51].

2.5. Lévy Süreçleri

Lévy süreci adını Fransız matematikçi Paul Lévy'den almıştır. Bu süreçler, sürekli zamanlı stokastik süreçlerin örnekleridir ve sürekli zamanlı stokastik modeller oluşturmak için gerekli araçları sağlar. Son yıllarda, özellikle finans matematiğindeki teorik gelişmeler ve yeni uygulamaların gelişmesi nedeniyle, bu süreçlere olan ilgi artmıştır. Wiener süreci ve Poisson süreci, önceki bölümde tartışılan bu süreçlerin iki temel örneğidir. Bu bölümde, dağıtım özelliklerini ve örnek yörüngelerinin yapısını incelemek amacıyla Lévy süreçlerini ve bazı önemli araçları ele alacağız.

2.5.1. Lévy süreçlerinin önemi

Brownian hareketi, Poisson süreci ve benzeri süreçler gibi oldukça önemli ve yaygın stokastik süreç tipleri, Lévy süreçlerine örnek teşkil eder. Bu süreçler, aslında rastgele yürüyüşten sürekli zaman moduna genelleme yapılan süreçlerdir. Lévy süreçleri, rastgele değerli ve rastgele zamanlarda gerçekleşen rastgele sıramalarla sürekli yörüngeleri temsil eden en temel süreç sınıfından biridir. Lévy süreçleri, doğal olarak yarı martingaller gibi çeşitli süreçlere genişletilebilir ve stokastik integrasyon işlemlerinde kullanılırlar [51].

2.5.2. Lévy sürecinin tanımı

$(X_t)_{t \geq 0}$, (Ω, F, P) üzerinde Càdlàg rastgele bir $\mathbb{R}^d$ sürecine sahipse ve $X_0 = 0$ ise, bu sürece Lévy süreci denir. Bu sürecin aşağıdaki özelliklere sahip olması gerekir:

1. Bağımsız büyümeler: Her $t_0, t_1, \dots, t_n$ artan bir zaman dizisi için, $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_2}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ rastgele değişkenler bağımsızdır.
2. Durağan dağılımlar: $X_{t+h} - X_t$, t 'ye bağlı olmamalıdır.

3. Olasılıkta süreklilik: Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{h \rightarrow 0} P(|X_{t+h} - X_t| \geq \varepsilon) = 0$$

olmalıdır.

Üçüncü özellik, belirli bir t zamanı için bir sıçrama gözlemi olasılığının sıfır olduğunu gösterir, yani süreksizlikler rastgele zamanlarda meydana gelir.

2.5.3. Sonsuz bölünebilirlik

F olasılık dağılımına sahip bir $\mathbb{R}^d$ uzayı üzerinde her $n \geq 2$ tam sayısı için $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$, n rastgele ve bağımsız i.i.d. (bağımsız ve aynı dağılıma sahip) değişkenlerse, bu durumda $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$ 'in dağılımı F 'ye sonsuz bölünebilir denir.

Çünkü bağımsız ve aynı dağılıma sahip rastgele değişkenlerin toplamı, bu değişkenlerin dağılım konvolüsyonu olarak ifade edilir. Dolayısıyla, μ adı verilen bu Y_k 'ların dağılımı ise $F = \mu * \mu * \dots * \mu$ olarak ifade edilir. Sonsuz bölünebilir bir dağılım, her $n \geq 2$ tam sayısı için F olasılık dağılımının n 'inci konvolüsyon köküdür.

Önerme 2.5. Sonsuz bölünebilirlik ve Lévy süreçleri Bir Lévy süreci olan $(X_t)_{t \geq 0}$ varsa, her t için X_t 'nin dağılımı sonsuz bölünebilirdir. Aksine, eğer F sonsuz bölünebilir bir dağılıma sahipse, o zaman bir (X_t) Lévy süreci bulunabilir ve X_t dağılımı F ile verilecektir.

İspat: [50, altbölüm 6-11] kaynağına bakınız.

Yani, eğer (X_t) bir Lévy süreciyse, her $t > 0$ için X_t sonsuz bölünebilir bir dağılıma sahiptir. Bu koşul, X_t dağılımının seçimine kısıtlamalar getirir. Ayrık zamanlı rastgele yürüyüş evrimleri keyfi bir dağılıma sahip olabilirken, Lévy sürecinin artışlarının dağılımı sonsuz bölünebilir olmalıdır.

Sonsuz bölünebilirliğin ana örnekleri Gauss dağılımı, Gamma dağılımı, α -kararlı dağılım ve Poisson dağılımıdır. Bu dağılımlardan herhangi birine sahip olan rastgele değişken, i.i.d. rastgele değişkenlerin toplamına ayrıştırılabilir.

X_t Lévy sürecinin karakteristik fonksiyonunu

$$\Phi_t(z) \equiv \Phi_{X_t}(z) \equiv E[e^{izX_t}], \quad z \in \mathbb{R}^d.$$

olarak tanımlıyoruz. Her $t > s$ için

$$X_{t+s} = X_s + (X_{t+s} - X_s)$$

yazarak ve X_s 'in $X_{t+s} - X_s$ 'den bağımsız olduğundan $t \rightarrow \Phi_t(z)$ çarpma fonksiyonunu

$$\begin{aligned}\Phi_{t+s}(z) &= \Phi_{X_{t+s}}(z) = \Phi_{X_t}(z)\Phi_{X_{t+s}-X_t}(z) \\ &= \Phi_{X_s}(z)\Phi_{X_t}(z) = \Phi_s\Phi_{X_t}\end{aligned}$$

olarak elde ederiz. Olasılıktaki süreklilikten, $t \rightarrow \Phi_t(z)$, t 'ye bağlı sürekli bir fonksiyon olduğu sonucuna varıyoruz.

Buna göre ve çarpma özelliğini kullanarak, $t \rightarrow \Phi_t(z)$ 'nin üstel bir fonksiyon olduğu sonucuna varıyoruz.

Önerme 2.6. Bir Lévy sürecinin karakteristik fonksiyonu $(X_t)_{t \geq 0}$ 'ın $\mathbb{R}^d$ üzerinde bir Lévy süreci olduğunu varsayalım. $\psi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun ve X 'in üstel karakteristiği ile eşleştirilen ψ olarak adlandıralım, yani:

$$E[e^{izX_t}] = e^{it \cdot \psi(z)}, \quad z \in \mathbb{R}^d \quad (2.29)$$

olsun. Bu durumda bir fonksiyonun üstel karakteristiği tek ve sürekli dir.

İspat: [59]'a bakınız.

2.5.4. Compound Poisson süreçleri

Yoğunluğu λ olan compound Poisson süreci, ayrıca f yoğunlukla birlikte sıçrama değeri olan (X_t) gibi bir rastgele süreç olarak tanımlanır:

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \quad (2.30)$$

burada Y_i , sıçrama değerleri, f yoğunluk fonksiyonu ile i.i.d. şeklinde dağılan ve (X_t) sürecinin örnek yörüngeleri sabit parçalı Càdlàg fonksiyonlarıdır. Ayrıca, $(Y_i)_{i \geq 1}$ dizisi, λ yoğunluğuna sahip ve (N_t) Poisson sürecinin $(T_i)_{i \geq 1}$ sıçrama zamanları ile benzer bir dağılıma sahiptir. Bu sıçrama zamanları, λ parametresi ile bağımsız üstel rastgele değişkenlerin kısmi toplamı olarak ifade edilebilir. Poisson süreçleri compound Lévy süreçleridir ve yalnızca örnek yörüngeleri olan Lévy süreçleri parçalı sabittir. Compound Poisson süreci bu özelliklere sahiptir [16].

Önerme 2.7. $(X_t)_{t \geq 0}$ bir compound Poisson sürecidir, sadece ve sadece bir Lévy süreci ve bu sürecin örnek yörüngeleri sabit parçalı fonksiyonlardır.

İspat: [16, Bölüm 3]'e bakınız.

Önerme 2.8. Compound Poisson sürecinin karakteristik fonksiyonu $(X_t)_{t \geq 0}$ aşağıdaki gibidir:

$$E[e^{iu \cdot X_t}] = e^{t\lambda \int_{\mathbb{R}^d} (e^{iu \cdot x} - 1)f(dx)}, \quad \forall u \in \mathbb{R}^d \quad (2.31)$$

burada λ sıçrama yoğunluğu ve f sıçrama değerlerinin dağılımını temsil eder.

İspat: N_t 'ye göre koşullu beklentiye hesaplayarak ve f karakteristik fonksiyonunu $\hat{f}$ ile ifade ederek başlarız.

$$\begin{aligned} E[e^{iu \cdot X_t}] &= E[[e^{iu \cdot X_t}] | N_t] = E\left[\left(\hat{f}(u)\right)^{N_t}\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n \left(\hat{f}(u)\right)^n}{n!} = e^{t\lambda(\hat{f}(u)-1)} \\ &= e^{t\lambda \int_{\mathbb{R}^d} (e^{iu \cdot x} - 1)f(dx)}. \end{aligned}$$

bu nedenle, önerme 2.8, verilen karakteristik fonksiyonun doğru olduğunu gösterir.

2.5.5. Compound Poisson süreçlerinin sıçrama ölçütleri

Bölüm 2-4-2'ye göre, herhangi bir C  dl  g süreci, $\mathbb{R}^d$ 'de herhangi bir C  dl  g süreci ve özellikle herhangi bir $(X_t)_{t \geq 0}$ compound Poisson süreci için $\mathbb{R}^d \times [0, \infty[$ üzerinde X sıçramalarını tanımlamak için bir rastgele   l   

$$J_X(B) = \# \{(t, X_t - X_{t-}) \in B\} \quad (2.32)$$

olarak tanımlanabilir. Burada $B, B \subset [0, \infty[\times \mathbb{R}^d$ üzerinde istenen rastgele ölçülebilir bir kümedir. Her $A \subset \mathbb{R}^d$ ölçülebilir küme için, $J_X([t_1, t_2] \times A)$, $[t_1, t_2]$ aralığında X 'in sıçrama sayısını, sıçramanın A 'da olacak şekilde belirler.

Önerme 2.9. Compound Poisson sürecinin sıçrama   l   s   $(X_t)_{t \geq 0}$ yoğunluğ   λ olan Compound Poisson süreci ve f sıçrama değ  r dağılımıyla ilişkilidir. J_X sıçrama ölçüsü, $[0, \infty[\times \mathbb{R}^d$ üzerinde $\mu(dx \times dt) = \lambda f(dx)dt$ yoğunluğ  na sahip bir rastgele Poisson   l   m  d  r. **İspat:** [16, Bölüm 3]'e bakınız.

Tanım 2.17. L  vy   l   m   $(X_t)_{t \geq 0}$, $\mathbb{R}^d$ üzerinde bir L  vy süreci olduğ  nda, $\nu(A)$ a  ğıdaki gibi tanımlanır:

$$\nu(A) = E[\# \{t \in [0, 1]: \Delta X_t \neq 0, \Delta X_t \in A\}], \quad (2.33)$$

Burada $A, \mathbb{R}^d$ üzerindeki bir Lévy ölçüsüdür. $\nu(A)$, her zaman birim zaman aralığında sıçrama sayısının, değerlerinin A 'ya ait olma olasılığının beklenen değeridir.

Önerme 2.9, her compound Poisson sürecinin aşağıdaki gibi ifade edilebileceğini gerektirir:

$$X_t = \sum_{s \in [0, t]} \Delta X_s = \int_{[0, t] \times \mathbb{R}^d} x J_X(ds \times dx) \quad (2.34)$$

J_X yoğunluk ölçüsü $\nu(dx)dt$ olan bir Poisson rastgele değişkenidir. Bu, Lévy süreçleri için özel bir Lévy-Itô ayrışımı durumudur. Burada X sürecini sadece sıçramalarının toplamı olarak yeniden yazdık. Bir compound Poisson sürecinin $[0, t]$ aralığında neredeyse kesinlikle sonlu sayıda sıçramaya sahip olması nedeniyle, yukarıdaki formülde görünen rastgele integral sonlu bir toplamdır ve bu nedenle herhangi bir yakınsama sorunu yoktur.

Önerme 2.10. Poisson rastgele ölçümü için üstel formül M , Poisson rastgele ölçüsü ve λ yoğunluk ölçüsüne sahipse, daha sonra $\mu(B) < \infty$ koşuluyla her ölçülebilir B kümesi için ve $\int_B e^{f(x)} \mu(dx) < \infty$ koşuluyla tüm f fonksiyonları için

$$E \left[e^{\int_B f(x) M(dx)} \right] = e^{\int_B (e^{f(x)} - 1) \mu(dx)} \quad (2.35)$$

İspat: $\mu(B)$ üzerinde koşullandırılarak bu eşitlik elde edilir. Daha detaylı bir çalışma için [16]'ya bakınız. Bu ilişkiyi elde etmek için $e^{\int_B e^{f(x)} \mu(dx)}$ ve $\mu(B)$ 'nin olduğunu varsayımının gerekli olmadığını, ancak $\int_B |e^{f(x)} - 1| \mu(dx) < \infty$ olması yeterlidir.

Önerme 2.10, compound Poisson süreçleri ve Poisson rastgele değişkenleri arasında, ν 'nin sonlu olduğu $\nu(dx)dt$ formundaki yoğunluk ölçümleriyle birebir eşleme kurar. Aslında, $\nu, \mathbb{R}^d$ üzerinde sonlu bir ölçü ise ve $M, [0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ üzerinde $\nu(dx)dt$ yoğunluk ölçüsü ile bir Poisson rastgele ölçüsüdür, o zaman Önerme 1.10'u uygulayarak (2.34) denkleminin Lévy ölçüsü ν olan bir compound Poisson süreci olduğunu gösterebiliriz.

2.5.6. Sonsuz aktivite Lévy süreçleri

Önerme 2.11. Lévy-Itô ayrışımı, $(X_t)_{t \geq 0}, \mathbb{R}^d$ üzerindeki bir Lévy süreci ve ν Lévy ölçüsü ile ilgilidir. $\nu, \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ üzerinde bir Radon ölçüsüdür ve aşağıdaki koşulları sağlar:

1. $\int_{|x| \leq 1} |x|^2 \nu(dx) < \infty,$
2. $\int_{|x| \geq 1} \nu(dx) < \infty.$

X sıçrama ölçümü olarak gösterilen J_X , $[0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ üzerinde yoğunluk ölçüsü $\nu(dx)dt$ olan bir Poisson rastgele ölçüsüdür.

Ayrıca, γ vektörü ve d -boyutlu $(B_t)_{t \geq 0}$ Brownian hareketi, A Kovaryans matrisi ile ilgilidir, böylece aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$X_t = \gamma t + B_t + X_t^l + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \tilde{X}_t^\varepsilon. \quad (2.36)$$

Burada

$$X_t^l = \int_{|x| \geq 1, s \in [0, t]} x J_X(ds \times dx)$$

ve

$$\begin{aligned} \tilde{X}_t^\varepsilon &= \int_{0 \leq |x| < 1, s \in [0, t]} x \{J_X(ds \times dx) - \nu(dx)ds\} \\ &\equiv \int_{0 \leq |x| < 1, s \in [0, t]} x \tilde{J}_X(ds \times dx). \end{aligned}$$

Bu son durumdaki yakınsama, $[0, T]$ aralığında t 'ye göre düzgündür.

Lévy-Itô ayrışımı, her Lévy süreç için γ vektörü, pozitif tanımlı bir A matrisi ve dağılımı tanımlayan pozitif bir ölçüm ν 'nin olduğunu garanti eder. (A, ν, γ) üçlüsü, karakteristik üçlü veya üçlü X Lévy süreci olarak adlandırılır.

Yukarıdaki formülde, $\gamma t + B_t$ sürekli bir Lévy-Gaussian süreçtir ve herhangi bir sürekli Lévy-Gaussian süreci bu şekilde yazılabilir.

Bu tür süreçler iki parametre ile tanımlanır: γ sürüklenme ve A Brownian hareketinin kovaryans matrisi tarafından temsil edilir. Bu formülün diğer iki kısmı, X_t 'nin sıçramalara katkıda bulunan süresiz süreçleri temsil eder ve Lévy ν ölçüsü ile tanımlanır.

$\int_{|y| \geq 1} \nu(dy) < \infty$ koşulu, X 'in 1'den büyük bir norma sahip sınırlı sayıda sıçrama yapacağı anlamına gelir. Yani toplam

$$X_t^l = \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta X_s$$

neredeyse kesinlikle sonlu terime sahiptir ve X_t^l bir compound Poisson sürecidir. Önerme 2.10 sonucuna göre,

$$X_t^l = \int_{|x| \geq 1, s \in [0, t]} x J_X(ds \times dx)$$

formunu gösterir.

Benzer şekilde, ε ($\varepsilon > 0$) ile 1 aralığındaki sıçramaların toplamı için

$$X_t^\varepsilon = \sum_{0 \leq s \leq 1}^{\varepsilon \leq |\Delta X_s| < 1} \Delta X_s = \int_{\varepsilon \leq |s| \leq 1, s \in [0, t]} x J_X(ds \times dx) \quad (2.37)$$

olarak tanımlanan bu süreçler, mutlaka yakınsak olmayan sonsuz sayıda küçük sıçramaya sahip olabilir. Bu nedenle, yakınsama elde etmek için, yukarıdaki sıçrama integralinin telafi edilmiş bir formülünü kullanmamız gerekir.

$$\begin{aligned} \tilde{X}_t^\varepsilon &= \int_{0 \leq |x| < 1, s \in [0, t]} x \{J_X(ds \times dx) - v(dx)ds\} \\ &\equiv \int_{0 \leq |x| < 1, s \in [0, t]} x \tilde{J}_X(ds \times dx) \end{aligned} \quad (2.38)$$

bir martingaledir [16].

İspat: [16, Bölüm 3]'e bakınız.

Lévy-Itô ayrışımının önemli bir uygulaması, her Lévy sürecinin, sürüklenme ve sonsuz sayıda bağımsız compound Poisson sürecinin bir kombinasyonu olarak Brownian hareketi ile sürüklendiğini göstermesidir. Herhangi bir Lévy süreci, sıçrama-difüzyon süreci olarak ifade edilebilir, yani sürüklenme ve compound Poisson süreci ile Brownian hareketinin toplamı olarak keyfi bir dikkatle yaklaşılabilir. Lévy-Itô ayrışımı ilk olarak Lévy tarafından keşfedilmiş ve daha sonra Itô tarafından tamamlanmıştır, bu ayrışım Lévy sürecinin yörüngelerini doğrudan analiz kullanarak tanımlamıştır.

Teorem 2.1. Lévy-Khinchin gösterimi

$(X_t)_{t \geq 0}$, $\mathbb{R}^d$ üzerinde karakteristik üçlü (A, v, γ) ile tanımlanan bir Lévy süreci olsun. Bu durumda,

$$E[e^{izX_t}] = e^{it \cdot \psi(z)}, \quad z \in \mathbb{R}^d \quad (2.39)$$

şeklinde ifade edilir. Burada,

$$\psi(z) = -\frac{1}{2} z \cdot A z + i\gamma \cdot z + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{iz \cdot x} - 1 - iz \cdot x 1_{|x| \leq 1}) v(dx)$$

ve gerçek L vy süreci için Khinchin-L vy temsilinin değeri şu şekildedir:

$$E[e^{izX_t}] = e^{it.\psi(z)}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Burada,

$$\psi(z) = -\frac{1}{2}Az^2 + i\gamma z + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{izx} - 1 - izx1_{|x|\leq 1}) v(dx).$$

İspat: [3, Bölüm 1]'e bakınız.

Bu şekilde, herhangi bir sonsuz bölünebilir dağılım için karakteristik fonksiyon tanımlanabilir.

Teorem 2.2. Sonsuza bölünebilir dağılımların karakteristik fonksiyonu

F 'nin $\mathbb{R}^d$ üzerindeki sonsuz bölünebilir dağılımının karakteristik fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\Phi_F(z) = e^{\psi(z)}, \quad z \in \mathbb{R}^d.$$

Burada,

$$\psi(z) = -\frac{1}{2}z.Az + i\gamma.z + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{iz.x} - 1 - iz.x1_{|x|\leq 1}) v(dx)$$

A , $n \times n$ boyutlu pozitif simetrik matris, $\gamma \in \mathbb{R}^d$ ve v , $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ üzerinde pozitif Radon ölçüsüdür ve aşağıdaki ilişkilere tabidir:

$$\int_{|x|\leq 1} |x|^2 v(dx) < \infty, \quad \int_{|x|\geq 1} v(dx) < \infty.$$

v , F dağılımının L vy  l m d r.

İspat: [16, Bölüm 3]'e bakınız.

2.5.7. L vy süreçlerinin yörünge  zellikleri

1. **Sabit parçalı örnek yörüngeleri:**  nerme 2.7'de belirtildiği gibi, bir L vy sürecinin tüm örnek yörüngeleri, yalnızca bu süreç bir compound Poisson süreci ise parçalı sabitlerdir.
2. **Sonlu L vy değişim süreci:** Bir L vy süreci, eğer yörüngeleri neredeyse kesinlikle sonlu değişimin bir fonksiyonu ise, sonlu değişime sahiptir.

Önerme 2.12. L vy sonlu değişim sürecini ele alır. Eğer (A, v, γ)  l  karakteristikli L vy süreci sonlu değişime sahipse, aşağıdaki koşullar geçerli olur:

$$A = 0, \quad \int_{|x| \leq 1} |x| v d(x) < \infty \quad (2.40)$$

İspat: [16, Önerme 3.9]'a bakınız.

Bu nedenle, sonlu değişim durumunda, Lévy-Itô ayrışımı ve Lévy-Khinchin temsili daha basit bir şekilde açıklanır.

Sonuç 2.1. (Lévy-Itô ayrıştırması ve sonlu değişim modunda Lévy-Khinchin gösterimi)

$(X_t)_{t \geq 0}$, $\mathbb{R}^d$ üzerinde $(0, v, \gamma)$ üçlü karakteristik ile bir sonlu değişimli Lévy sürecidir. Bu durumda, X 'i, 0 ve t arasındaki sıçramaların toplamı ve doğrusal sürüklenme terimi olarak yazabiliriz. Yani,

$$X_t = bt + \int_{[0,t] \times \mathbb{R}^d} x J_X(ds \times dx) = bt + \sum_{s \in [0,t]}^{\Delta X_s \neq 0} \Delta X_s \quad (2.41)$$

olarak tanımlanır. Bu durumda X 'in karakteristik fonksiyonunu,

$$b = \int_{|x| \leq 1} x v d(x)$$

olmak üzere

$$E[e^{izX_t}] = e^{t\{ib \cdot z + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{iz \cdot x} - 1) v(dx)\}} \quad (2.42)$$

olarak yazabiliriz.

Artımlı Lévy süreçleri (Bağlayıcılar): $(X_t)_{t \geq 0}$, 1 olasılıkla azalmayan tek boyutlu Lévy sürecine artımlı Lévy süreci veya bağlayıcı denir. Bu süreçler, yeni Lévy süreçlerini oluşturmak için zamanın değişmesinde kullanılır ve Lévy'nin temel yapısı ile finansal modellerin oluşturulmasında çok önemli araçlardır.

Önerme 2.13. $(X_t)_{t \geq 0}$ 'ın $\mathbb{R}$ üzerinde bir Lévy süreci olduğunu varsayalım. Aşağıdaki koşullar denktir:

- i. Neredeyse kesinlikle $X_t \geq 0$ olan $t > 0$ vardır.
- ii. Her $t > 0$ için neredeyse kesinlikle $X_t \geq 0$.
- iii. (X_t) 'nin örnek yörüngeleri neredeyse kesinlikle azalmaz: $t \geq s \xRightarrow{a.s.} X_t \geq X_s$
- iv. (X_t) karasterektik üçlüsü, $A = 0$ 'da $v((-\infty, 0]) = 0$, $\int_0^\infty (x \wedge 1) v(dx) < \infty$ ve $b \geq 0$ dir, yani, (X_t) 'in bir difüzyon bileşeni yoktur, yalnızca pozitif sıçramalar ve pozitif sürüklemesi vardır.

Artımlı Lévy süreçleri (bağlayıcılar): $(X_t)_{t \geq 0}$, 1 olasılıkla azalmayan tek boyutlu Lévy sürecine artımlı Lévy süreci veya bağlayıcı olarak adlandırılır. Bu süreçler, zamanın değişmesinde kullanılarak yeni Lévy süreçleri oluşturmak ve finansal modellerin temel yapısını oluşturmak için önemli araçlar sunarlar.

Önerme 2.13. $(X_t)_{t \geq 0}$ 'nin $\mathbb{R}$ üzerinde bir Lévy süreci olduğunu varsayalım. Aşağıdaki koşullar eşittir:

1. Neredeyse kesinlikle, $t > 0$ için $X_t \geq 0$ 'dır.
2. Her $t > 0$ için neredeyse kesinlikle $X_t \geq 0$ 'dır.
3. (X_t) 'nin örnek yörüngeleri neredeyse kesinlikle azalmaz: $t \geq s$ ise : $t \geq s \xRightarrow{a.s.} X_t \geq X_s$ (hemen hemen kesin olarak).
4. (X_t) karakteristik üçlüsü şunları sağlar: $A = 0$ 'da $v((-\infty, 0]) = 0$, $\int_0^\infty (x \wedge 1)v(dx) < \infty$ ve $b \geq 0$ ve $b \geq 0$ 'dır. Yani, (X_t) 'nin bir difüzyon bileşeni yoktur; sadece pozitif sıçramalar ve pozitif sürüklemesi vardır.

2.5.8. Dağıtım özellikleri

Lévy sürecinin momentleri ve logaritmik momentleri

Lévy ölçüsü, Lévy süreçlerinin ve momentlerinin dağılımlarının kuyruklarının davranışını belirleyen bir unsurdur.

$(X_t)_{t \geq 0}$, $\mathbb{R}$ üzerinde (A, v, γ) üçlü karakteristikle bir Lévy süreci olarak kabul edilsin. X_t 'nin momentleri, karakteristik fonksiyonun türevlenmesi ile hesaplanabilir. Özellikle, X_t 'nin logaritmik momentleri, 0 noktasındaki üstel karakteristiğin türevlenmesi ile elde edilir.

$$c_1(X_t) = E[X_t] = t \left(\gamma + \int_{|x| \geq 1} v(dx) \right),$$

$$c_2(X_t) = Var X_t = t \left(A + \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 v(dx) \right),$$

ve her $n \geq 3$ için

$$c_n(X_t) = t \int_{-\infty}^{+\infty} x^n v(dx)$$

Bu, tüm bölünebilir dağılımların sonsuz bir şekilde verildiğini gösterir çünkü $c_4(X_t) > 0$ 'dır. Ayrıca, X_t 'nin logaritmik moment dağılımı doğrusal olarak t ile artar.

Özellikle, X_Δ 'nin çarpıklığı (Skewness) ve basıklığı (kurtosis) veya denk olarak $X_{t+\Delta} - X_t$ 'nin büyümeleri aşağıdaki ilişki ile ifade edilir:

$$s(X_\Delta) = \frac{c_3(X_\Delta)}{c_2(X_\Delta)^{3/2}} = \frac{s(X_1)}{\sqrt{\Delta}}, \quad \kappa(X_\Delta) = \frac{c_4(X_\Delta)}{c_2(X_\Delta)^2} = \frac{\kappa(X_1)}{\Delta}$$

Bu nedenle, Lévy sürecinin artışları veya denk olarak sonsuz bölünebilir dağılımların artışları gerilir, ancak basıklık (ve varsa çarpıklık) artma hesaplanırken zaman ölçeğinde azalır: çarpıklık oranı $(\Delta)^{1/2}$ 'ye düşer ve çarpıklığın azalma oranı (decay rate) $1/\Delta$ 'ya eşittir.

2.5.9. Kararlı dağıtımlar ve süreçler

Kararlı süreçlerin öneminin bir nedeni, Gauss dağılımlarına kıyasla kuyruklarının ağır olmalarıdır. Gauss dağılımlarında, kuyruklar ortalamadan uzaklaştıkça üstel olarak sifıra yaklaşır. Bu özellik, opsiyon fiyatlarının modellenmesinde dikkate alınır.

Brownian hareketinin önemli bir özelliği, kendi kendine benzer (self-similar) olmasıdır. W , $\mathbb{R}$ üzerinde Wiener süreci olsun. O zaman,

$$\left(\frac{W_{at}}{\sqrt{a}}\right)_{t \geq 0} = (W_t)_{t \geq 0}, \quad \forall a > 0$$

$B_t = \gamma t + W_t$ sürüklenme ile Brownian hareketini ele alırsak, bu özelliği aktarabiliriz:

$$\left(\frac{W_{at}}{\sqrt{a}}\right)_{t \geq 0} = (B_t + \sqrt{a\gamma}t)_{t \geq 0}, \quad \forall a > 0$$

Lévy sürecine kendi kendine benzer denir, eğer,

$$\forall a > 0, \exists b(a) > 0: \left(\frac{X_{at}}{b(a)}\right)_{t \geq 0} = (X_t)_{t \geq 0}.$$

Bundan dolayı X_t 'nin karakteristik fonksiyonu

$$\Phi_{X_t}(z) = E[e^{-t\psi(z)}],$$

olur ve bu özellik, karakteristik fonksiyonun aşağıdaki özelliğiyle eşdeğerdir:

$$\forall a > 0, \forall z, \exists b(a) > 0: \Phi_{X_t}(z)^a = \Phi_{X_t}(zb(a)).$$

Bu özelliğin geçerli olduğu dağılıma kesin kararlı dağılım denir ve ayrıca aşağıdaki tanımı yazabiliriz.

Tanım 2.18. $X_t \in \mathbb{R}$ üzerinde rastgele değişken bir kararlı dağılıma sahiptir. Bu durum, her $a > 0$ için $b(a) > 0$ ve $c(a) \in \mathbb{R}^d$ değerlerinin varlığı ile karakterizedir. Öyle ki,

$$\Phi_{X_t}(z)^a = \Phi_{X_t}(zb(a))e^{ic(a)z}, \quad \forall z \in \mathbb{R}^d \quad (2.43)$$

ve kesinlikle kararlı bir dağılıma sahipse

$$\Phi_{X_t}(z)^a = \Phi_{X_t}(zb(a)), \quad \forall z \in \mathbb{R}^d. \quad (2.44)$$

Her kararlı dağılım için, 0'dan büyük ve 2'ye kadar olan bir kararlı α sabiti vardır. Bu sabit, $b(a) = a^{1/\alpha}$ olacak şekilde (2.43)'ten türetilir [49, Sonuç 2.1.3]. Bu sabite “kararlılık indeksi” denir ve kararlı dağılımlar α indekslere α -kararlı dağılımlar denir. Yalnızca 2-kararlı dağılımlar, Gauss dağılımı olarak kabul edilir. Kendi kendine benzer bir Lévy süreci her zaman kesin kararlı bir dağılıma sahiptir. Bu nedenle bu tür süreçlere “kesin kararlı Lévy süreçleri” denir. α -kararlı Lévy süreci, $a > 0$ için

$$\forall a > 0, \exists b(a) > 0: \left(\frac{X_{at}}{a^{1/\alpha}} \right)_{t \geq 0} = (X_t)_{t \geq 0} \quad (2.45)$$

bağıntısını sağlar.

Kararlı Lévy süreci, bir kararlı dağılım ailesini tanımlar ve tam tersi, her kararlı dağılım sonsuzca bölünebilir ve belirli bir zamanda kararlı Lévy sürecinin dağılımı olarak görülebilir [50].

α –kararlı dağılımın olasılık yoğunluğu $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ ile gösterilir. Bu durumda, $\sigma > 0$ ölçek parametresi, $-1 < \beta < 1$ aralığında çarpıklık derecesini ve $\mu \in \mathbb{R}^d$ aktarım parametresini ifade eder. Bu olasılık yoğunluğu yalnızca aşağıdaki üç durumda geçerlidir:

- $S_2(\sigma, 0, \mu)$: Gauss dağılımı, yoğunluğu $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/4\sigma^2}$ şeklinde ifade edilir.
- $S_1(\sigma, 0, \mu)$: Cauchy dağılımı, yoğunluğu $\frac{\sigma}{\pi((x-\mu)^2 + \sigma^2)}$ biçimindedir.
- $S_{1/2}(\sigma, 1, \mu)$: Lévy dağılımı, yoğunluğu $\left(\frac{\sigma}{2\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{(x-\mu)^{3/2}} e^{-\sigma/(x-\mu)} \cdot 1_{x>\mu}$ şeklinde verilir.

İlk iki dağılımın ortalamaları komşuluklarında simetriktir, son dağılım ise (μ, ∞) üzerinde merkezlidir. Kararlı Lévy süreçlerinin ölçüsü,

$$v(dx) = \frac{c}{|x|^{d+\alpha}} dx$$

bağıntı ıyla gösterilir, burada $c > 0$ 'dir.

2.5.10. Lévy ve Martingale süreçleri

Martingaller, olasılık teorisi ve finansal matematikte önemli bir rol oynar. Lévy süreçlerinin bağımsız büyüme özelliği kullanılarak çeşitli martingaller oluşturulabilir.

Önerme 2.14: $(X_t)_{t \geq 0}$ bağımsız artışlara sahip reel değerli bir süreç olsun. Bu durumda:

1. Her $u \in \mathbb{R}$, için $\left(\frac{e^{iuX_t}}{E[e^{iuX_t}]} \right)_{t \geq 0}$ Martingaledir.
2. Bazı $u \in \mathbb{R}$ değerleri için ve her $t \geq 0$, eğer $E[e^{iuX_t}] < \infty$, ise, $\left(\frac{e^{iuX_t}}{E[e^{iuX_t}]} \right)_{t \geq 0}$ Martingaledir.
3. Her $t \geq 0$ için $E[X_t] < \infty$ ise, $M_t = X_t - E[X_t]$ Martingaledir (bağımsız artışlara sahip bir süreçtir).
4. Her $t \geq 0$ için $Var[X_t] < \infty$, ve M yukarıda tanımlandığı gibi bir Martingale ise, $(M_t)^2 - E[(M_t)^2]$ Martingaledir.

Eğer (X_t) , bir Lévy süreci ise, bu önermedeki tüm süreçlerin martingale olması için karşılık gelen momentlerin t değeri için sonlu olması yeterlidir.

İspat: [50, Teorem 3.25 ve 17-25]'e bakınız.

Notasyon: Fizikçiler α -kararlı Lévy süreçlerini “Lévy sıçramaları” olarak adlandırır. Lévy sıçramaları, Lévy süreçlerinin bir alt kategorisi olup kendi kendine benzer ve sonsuz varyans özelliğine sahiptir.

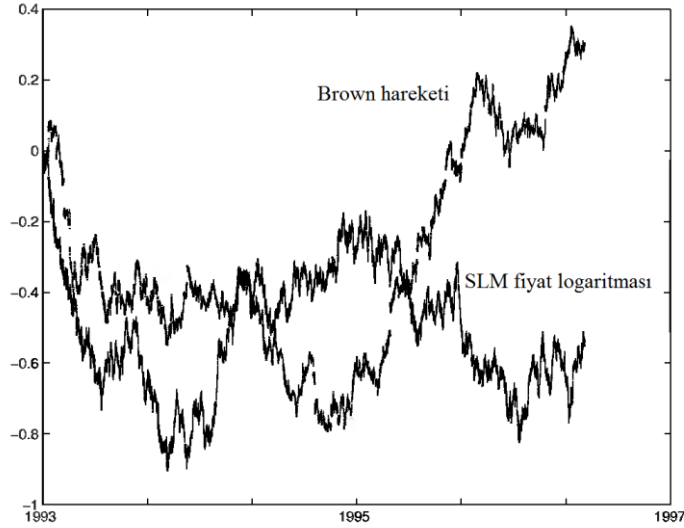
3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, finansal varlıkların fiyatlamasında kullanılan süreçlerin teorik temelleri ve modelleme yöntemleri ele alınacaktır. Öncelikle, sıçrama-difüzyon süreçleri ve bu bağlamda Merton sıçrama-difüzyon modeli ile Kou modeli incelenecek; ardından, saf sıçrama süreçlerine yönelik yaklaşımlar ve bu süreçlerin altında yatan hiperbolik dağılımlar, Normal Ters Gauss (NIG) süreci, Varyans Gama (VG) süreci ve CGMY süreci ayrıntılı olarak açıklanacaktır. Bu yöntemlerin her biri, finansal piyasalardaki karmaşıklıkları ve belirsizlikleri modellemek için kullanılan ileri düzey matematiksel araçları temsil etmekte olup, teorik çerçeveleri ile birlikte uygulamalı örnekler sunulacaktır.

Hisse senedi piyasaları, ilk kez 1531 yılında Belçika'nın Antwerp şehrinde faaliyete geçmiştir. Günümüzde dünya genelinde 150'den fazla borsa bulunmaktadır. Bu piyasalardaki hisse senedi fiyatlarının matematiksel modellenmesi, Antwerp'ten yüzyıllar sonra başlamış olmasına rağmen, bu alandaki ilk çabalar 1900 yılında Louis Bachelier tarafından matematiksel bir doktora tezi olarak gerçekleştirilmiştir. Bachelier, araştırmalarında Brownian hareketini kullanmış, ancak bu çalışma uzun yıllar boyunca fazla ilgi çekmemiştir. Sonunda, 1950'de bir istatistikçi olan L.J. Savage, Bachelier'in çalışmasını yeniden keşfetmiştir ve bu bilgiyi Samuelson'e (1915-2009) aktarmıştır. Samuelson daha sonra Bachelier'in modelini geliştirmiş ve hisse senedi fiyatlarını geometrik Brownian hareketine dayalı olarak modellenmiştir. Samuelson'ın 1965 yılında yayınlanan makalesinden sonra, 1973'te Fisher Black ve Myron Scholes ile aynı yıl Merton'un yayınladığı makaleler, hisse senedi fiyat modellemesi alanında bir devrim yaratmıştır. Bu makaleler, opsiyonların fiyatlandırılması için bir yöntem sunmuştur.

Varlık getirilerinin normal dağıldığı varsayımı, son yıllarda hisse senedi fiyatlarının matematiksel modellemesinde önemli bir rol oynamıştır. Dağılımların normal olduğu yörünge sürekliliği varsayımı, Samuelson, Black, Scholes ve Merton tarafından tanıtıldıktan sonra birçok makalede kullanılmıştır [43].

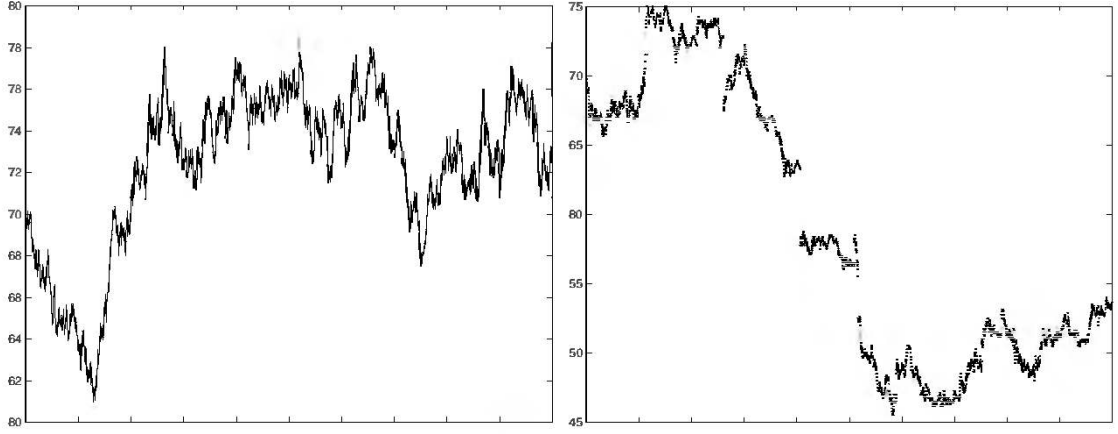
Fiyatlandırma ve fiyatların modellenmesi için kullanılan rastgele süreçlerin evreninde en önemli yıldız kuşkusuz Brownian hareketidir. Brownian hareketi ve finansal modelleme, başından beri ayrılmaz bir şekilde bağlantılıdır.



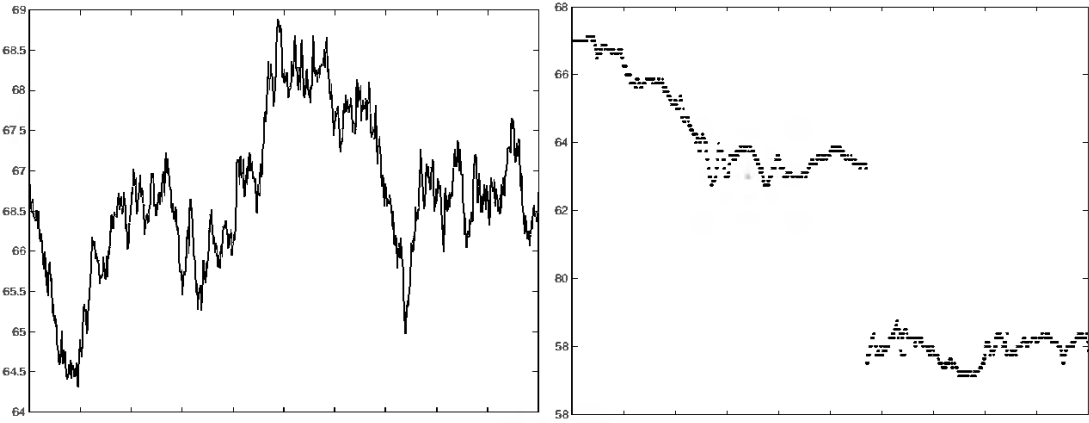
Şekil 3. 1. SLM (NYSE) hisse fiyatının logaritmasının gelişimini 1993-1996 dönemi için gösterir ve aynı verimlilik ve volatiliteye sahip tipik bir Brownian hareket yörüngesi ile karşılaştırılması.

Brownian hareketinin önemli bir özelliği, örnek yörüngelerinin sürekliliğidir. $t \rightarrow B_t$ yörüngesi zamanın sürekli bir fonksiyonudur. Ancak hisse senedi piyasası verilerine dayalı ampirik kanıtlar, Brownian hareketinin aksine, fiyat yörüngesinde süreksizlikler olarak görünen sıçramaların varlığını göstermiştir. Şekil 3.1, SLM hisse senedi fiyatında Brownian hareketinin aksine, fiyat yörüngesinde ani sıçramaların olduğu bir dönemi gösterir. Brownian hareketinin bir diğer önemli özelliği ölçekleme değişmezliğidir (Scale invariance). Brownian hareketinin özellikleri tüm zaman dilimlerinde aynıdır. Şekil 3.2, önceki diyagramın üç yıllık periyodunun ilk çeyreği için yakınlaştırılmış halini gösterir. Açıkça, Şekil 3.2'deki (solda) Brownian yörünge, Şekil 3.1'deki eğriye benzer, ancak Şekil 3.2'deki (sağda) hisse senedi fiyatının gelişimi, ölçekleme değişmezliğinin aksine sıçramalar daha görünür hale gelir. Fiyatların davranışına daha yakından bakıldığında, farklılıklar daha belirgin hale gelir. Şekil 3.2, SLM'nin Şubat 1993'teki bir aylık dönemdeki gelişimini, aynı zaman dilimindeki Brownian hareketi yörüngesiyle karşılaştırırken, Brownian yörüngeleri üç yıllık ve üç aylık dönemlerde benzer görünse de, bu süre zarfında gerçek piyasa fiyatlarının davranışı büyük aşağı yönlü sıçramalar içerirken, Brownian modeli sürekli davranışını sürdürür.

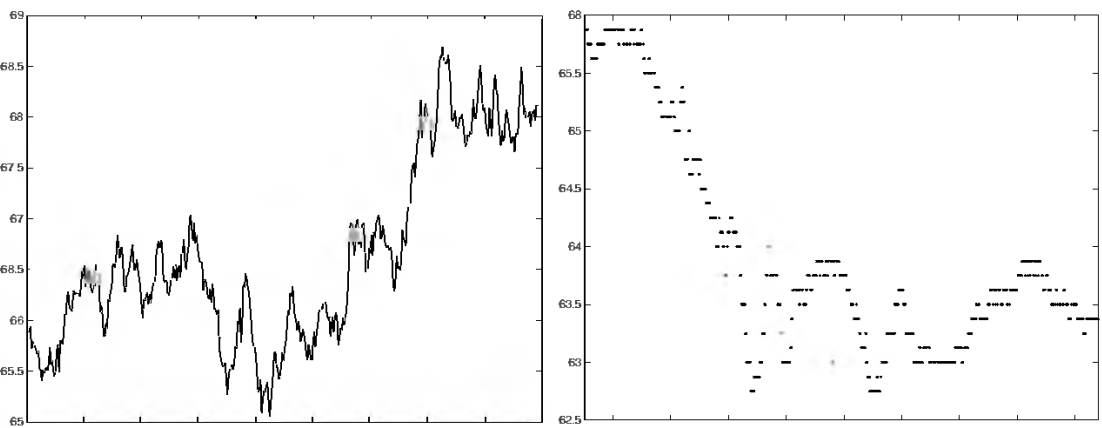
Son olarak, Şekil 3.4'teki günlük karşılaştırmaya dikkat edildiğinde, fiyat hareketinin sadece sıçramalarla olduğu, Brownian modelinin ise ufuk boyunca sürekli davranışını sürdürdüğü görülür. Bu nedenle gerçek verilere daha uyumlu olabilecek modellerin geliştirilmesi gerekliliği gündeme gelmiştir [16].



Şekil 3. 2. SLM (NYSE) hisse fiyatının logaritmasının gelişimini Ocak-Mart 1993 dönemi için gösterir ve aynı volatiliteye sahip Black-Scholes modeli ile karşılaştırılması.



Şekil 3. 3. SLM (NYSE) fiyat davranışını Şubat 1993 tarihine odaklanarak gösterir ve aynı volatiliteye sahip Black-Scholes modeli ile karşılaştırılması.



Şekil 3. 4. SLM (NYSE) fiyat davranışını 11 Şubat 1993 tarihine odaklanarak gösterir ve aynı volatiliteye sahip Black-Scholes modeli ile karşılaştırılması.

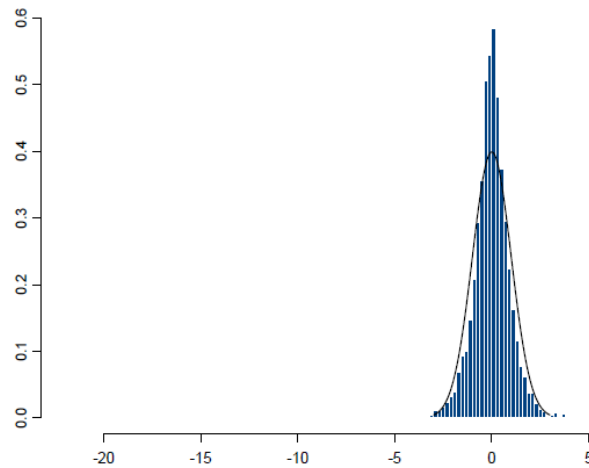
Mali modellemede, Lévy süreçlerini kullanmanın temel motivasyonu, varlık getirisi dağılımını daha iyi uydurmaktır. S&P 500 endeksinin günlük getirisini ele alalım.

Şekil 3.5’de maksimum ve minimum günlük normal getiri sırasıyla 7.9967 ve -21.1550 civarındadır.

Dikkat edin, Z standard normal dağılımı kullanıldığında, $P(Z < -21.1550) \cong 4 \times 10^{-107}$ olduğu için, bu olayın 15 trilyon yılda bir gerçekleşmesi gerektiği bir dünya yaşamı ile karşılaştırıldığında, 25 yıllık bir süreçte meydana geldiği gözlemleniyor. Açıkça, S&P 500 endeksinin normal günlük getirisi olan Şekil 3.5’teki histogram, daha uzun süreli zirveler ve iki belirgin asimetrik kuyruk göstermektedir. Uzatılmış dağılım, normal dağılıma göre daha fazla basıklığa sahiptir (3’e eşit bir basıklık).

Black-Scholes gibi finansal piyasaların getiri sürecinin klasik modeli log-normal difüzyon sürecini içerir. Bu süreçlerin getirilerinin logaritması normal bir dağılıma sahiptir. Ancak bazı durumlarda gerçek piyasalar bu ideal modelden sapmaktadır. Piyasa verilerinin, log-normal modelde bulunmayan bazı daha gerçekçi özellikleri dikkate alması gereklidir. Ampirik gözlemlere dayanarak, bu yeni özellikleri modellemek için Lévy süreci gibi sıçramalı en basit Markov modeli kullanılmıştır [27].

Hisse senedi piyasalarının getirilerinin logaritmasındaki sıçrama ve pure sıçrama süreçlerini tanıtır. Ayrıca, piyasa fiyatları sürecinde dağılımın daha uzun olduğu ve kuyrukların daha kalın olduğu gerçeği, normal dağılım modeline uymamaktadır. Bu yeni özelliklerin sınıflandırılması için Lévy süreci, yani sıçramalı en basit Markov modeli kullanılmıştır [27]. Bu bölümde, iki süreç kategorisi olan sıçrama-difüzyon süreçleri ve pure sıçrama süreçlerini tanıtıyoruz.



Şekil 3. 5. S&P 500 endeksinin (Haziran 1980’den 31 Aralık 2005’e kadar) ve yoğunluğu $N(0,1)$ olan normal günlük getirisinin histogramının karşılaştırılmasını gösterir. Bu karşılaştırma, uzun bir zirve ve daha belirgin bir kuyruk sergiler.

Sıçrama-difüzyon süreçleri, Brownian bileşenine ek olarak sıçrama süreksizliklerini içeren süreçlerdir. Bu süreçler ilk kez 1976 yılında Merton tarafından tanıtıldı. Daha sonra 2002 yılında difüzyon sıçrama süreçleri kategorisinde Kou modeli tanıtıldı. Bu süreç kategorisi, borsa modellemesinde ilk kez 1995 yılında kullanıldı.

Sıçrama-difüzyon süreçleri, her sonlu zaman aralığında sınırlı sayıda sıçrama üretirken, varlık fiyatlarının gözlemlenmesi, her sonlu aralıkta çok sayıda küçük sıçramanın varlığını gösterir. Böylece, her sonlu aralıkta sonsuz sıçramalara sahip başka bir fiyatlandırma literatürü dalı tanıtılmıştır. Genelleştirilmiş hiperbolik süreçler kategorisi, 1995 yılında Eberlin, Keller ve Prause tarafından tanıtıldı. Hiperbolik süreç (1995), normal ters Gauss süreci (1995) ve Gamma varyans süreci (1998), genelleştirilmiş hiperbolik süreçler olarak sınıflandırılır. CGMY Pure-sıçrama süreci, (2002) yılında Carr, Geman, Madden ve Yor tarafından tanıtıldı. Ampirik kanıtlar, genelleştirilmiş hiperbolik süreçlerin iki sınıfının ve CGMY sürecinin hisse senedi fiyatlandırması için Lévy süreçlerinden daha uygun olduğunu göstermektedir [15].

3.1. Sıçrama-Difüzyon Süreçleri

1975 yılında Merton tarafından ilk kez dikkat çekilen bir nokta, ampirik kanıtların sürekli örneklem yörüngeleri desteklemediğiydi. Merton, hisse senedi fiyatının sürekli bileşenini Wiener süreci olarak temsil edebilecek bir süreçle birlikte sıçrama bileşenini ifade etmek için Poisson sürecini tanımladı. Hisse senedi verilerinin giriş oranı, bir Poisson dağılımına sahip bir olayla ifade edildi. Bu olayların bağımsız ve düzgün dağıldığı varsayıldı.

Bu nedenle, sıçrama-difüzyon süreci, sıçrama süreci ile difüzyon sürecinin bir kombinasyonu olarak tanımlanır. Aslında, sıçrama-difüzyon süreci, bir Black-Scholes modeline sıçrama eklenmesiyle oluşur. Bu süreçler genellikle aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$X_t = \gamma t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i.$$

Burada ilk iki terim sürecin sürüklenme ve difüzyon bileşenlerini, üçüncü terim ise sıçrama-difüzyon sürecindeki bir süreksizliği (sıçramayı) temsil eder.

Tanım 3.1. Taramalı Lévy süreci (Interlacing Lévy processes)

Brownian hareketi ve compound Poisson sürecinin toplamı, iki bağımsız toplama sahip bir Lévy süreçleri ailesini tanımlar. Bu süreçlerin yörüngeleri zaman zaman

sıçramalarla ve rastgele zamanlarda $\|Y_i\|$ miktarını iç içe geçirerek sürekli bir hareketle karakterizedir. Bu tür süreçlere “taramalı” denir.

3.1.1. Merton sıçrama-difüzyon süreci

Brownian hareketi ve compound Poisson sürecini birleştirerek, sıçramalı difüzyon sürecinin en basit şekli oluşturulur. Bu süreç iki bölümden oluşur. Fiyatların normal gelişimi, rastgele zamanlarda sıçramaların gerçekleştiği difüzyon süreci tarafından belirlenir. Bu sıçramaların sayısı nadir ve büyük olaylar ve değişiklikler nedeniyle ortaya çıkar. Bu süreç, sıçramalar arasında rastgele bir gelişime sahiptir:

$$X_t = \gamma t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \quad (3.1)$$

Merton sıçrama-difüzyon süreci, taramalı Lévy süreçleri ailesinde bulunur ve sıçrama-difüzyon süreçleri kategorisinin en ünlü modelidir [53, 54].

Merton modelindeki X_t fiyat logaritma süreci, Gaussian dağılımı olan sıçramalara sahiptir. Yani, $Y_i \sim N(\mu, \delta^2)$. Merton modelindeki süreksizliklerin (sıçramaların) rastgele sayısı koşulu altında olasılık dağılımı şu şekilde ifade edilir:

$$P\{X_t \in A\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{X_t \in A \mid N_t = k\} P\{N_t = k\}$$

Sonuç olarak, X_t olasılık yoğunluğu şu şekilde ifade edilir:

$$p_t(x) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k \exp\left\{-\frac{(x - \gamma t - k\mu)^2}{2(\sigma^2 t + k\delta^2)}\right\}}{k! \sqrt{2\pi(\sigma^2 t + k\delta^2)}} \quad (3.2)$$

Drifti dikkate alınmadan Merton modeli 4 parametreden oluşur. Burada, σ difüzyon volatilitesi, λ sıçrama ölçüsünü, μ sıçrama değerinin ortalamasını ve δ sıçrama değerinin standart sapmasını ifade eder.

Merton modelinde Lévy yoğunluğu:

$$v(x) = \frac{1}{\delta \sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/4\delta^2}. \quad (3.3)$$

Lévy-Khinchin temsiline ve Merton modelindeki sonlu sıçrama sayısına göre Merton karakteristik fonksiyonu aşağıdaki gibi olur:

$$\psi(u) = -\frac{\sigma^2 u^2}{2} + i\gamma u + \lambda \left\{ e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2} + i\mu u} - 1 \right\}. \quad (3.4)$$

Bununla birlikte, karakteristik fonksiyondaki son terimin büyük sıçramalardan dolayı sonlu olduğunu göz önünde bulundurmalıyız.

Merton modelinin beklenen değeri:

$$E[X_t] = t(\gamma + \lambda\mu) \quad (3.5)$$

ve koşullu varyansı:

$$VarX_t = t(\sigma^2 + \lambda\delta^2 + \lambda\mu^2) \quad (3.6)$$

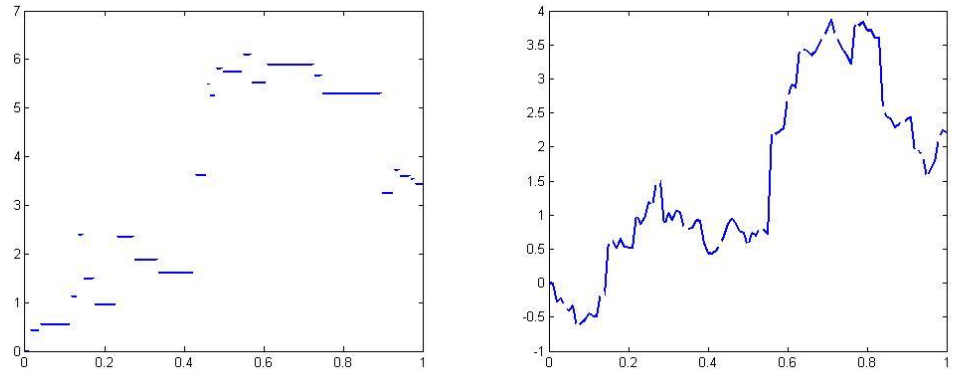
ayrıca aşağıdaki logaritmik momentleri de hesaplayabiliriz:

$$c_3 = t\lambda(3\delta^2\mu + \mu^3) \quad (3.7)$$

$$c_4 = t\lambda(3\delta^3 + 6\mu^2\delta^2 + \mu^4). \quad (3.8)$$

Merton olasılık yoğunluğundaki kuyruklar, Gauss modelinden daha ağırdır ve bu modelin tüm üstel momentleri sonludur [16, 41].

Şekil 3.6’da, sıçrama değerleri ve Merton sıçrama-difüzyon süreci için Gauss dağılımına sahip compound Poisson sürecinin örnek yörüngeleri gösterilmektedir.



Şekil 3. 6. Solda: Gauss dağılımına sahip compound Poisson sürecinin örnek yörüngesi sıçrama değerleri için. Sağda: Merton sıçrama-difüzyon sürecinin örnek yörüngesi (Brownian hareketi + compound Poisson).

Soldaki grafikte, Gauss dağılımına sahip compound Poisson sürecinin sıçrama değerlerine ait örnek yörünge görülmektedir.

3.1.2. Kou modeli

Kou sıçramalı difüzyon süreci 2002 yılında tanıtıldı. Bu modelde, Merton modeli ile benzer bir şekilde, varlık fiyatlarının logaritması, bir Brownian hareketi ve bir

compound Poisson sürecin toplamından oluşur. Sıçrama değerleri çift üstel bir dağılıma sahiptir. Bu modelin Merton modelinden farkı, momentlerinin daha kolay hesaplanabilir olmasıdır. Bu, çift üstel dağılıma sahip (asimetrik) bir belleğin olmamasından kaynaklanır. Sıçrama miktarı, aşağıdaki gibi asimetrik bir çift üstel dağılıma sahiptir:

$$f_Y(y) = p\lambda_+ e^{-\lambda_+ y} 1_{y>0} + q\lambda_- e^{-\lambda_- y} 1_{y<0}, \quad (3.9)$$

burada, λ_+ pozitif sıçrama değerlerinin dağılımı için bir parametre, λ_- negatif sıçrama değerlerinin dağılımı için bir parametre, $p, q \in [0,1]$ ise yukarı ve aşağı sıçrama olasılıklarını gösterirler. Kou modelinin 5 parametresi bulunmaktadır:

σ : Difüzyon volatilitesi

λ : Sıçrama ölçüsü

λ_+ : Pozitif sıçrama değeri için dağılım parametresi

λ_- : Negatif sıçrama değeri için dağılım parametresi

p ve q : Sıçrama değerlerinin yönünü ve olasılığını belirleyen parametreler.

Lévy modelindeki ölçü

$$v(x) = p\lambda\lambda_+ e^{-\lambda_+ x} 1_{x>0} + q\lambda\lambda_- e^{-\lambda_- x} 1_{x<0} \quad (3.10)$$

çift üstel dağılımın iki ilginç özelliği vardır. İlk olarak, sıçrama değerinin dağılımının genişletilmiş olmasıdır ve ikincisi, bu dağılımın benzersiz bir özelliği olan belleksiz (hafızasız) olmasıdır.

Bu özellikler, opsiyon fiyatlandırma gibi konularda analitik çözümler sunar. Kou modeli arbitraj izni vermez ve Ramezani ve Zeng tarafından 1999'da yürütülen deneylere dayanarak, çift üstel sıçrama difüzyon modelinin Merton sıçrama difüzyon modeline göre piyasa verilerine daha iyi uyarlanabildiği gösterilmiştir [36, 45].

3.2. Pure Sıçrama Süreçleri

Bu kesimde pure sıçrama süreçlerini ve sonsuz aktiviteli Lévy süreçlerini ele alacağız. Lévy süreçleri yalnızca sıçrama-difüzyon süreçleriyle sınırlı değildir, çünkü bazı Lévy süreçleri her aralıkta sonsuz sayıda sıçramaya sahiptir. Pure sıçrama süreçlerinde, çoğu sıçrama çok küçük değerlere sahiptir ve yalnızca sınırlı sayıda büyük sıçrama bulunur.

Pure sıçrama süreci ilk kez 1976'da Cox ve Ross tarafından tanıtıldı. İlk olarak sonlu aktiviteli bir pure sıçrama süreci incelenmiştir. Ancak sonraki çalışmalar, finansal piyasa

verileriyle daha uyumlu olan sonsuz aktiviteli süreçlere odaklanmıştır. Hisse senedi fiyat hareketlerini modellemede sıçrama bileşeninin önemi 1996'da Bakshi, Chen ve Carr tarafından vurgulanmıştır.

Ampirik kanıtlar, hisse senedi piyasalarında gözlemlenen fiyatların logaritmasının Lévy pure sıçrama süreçleri modelleri ile daha iyi uyum gösterdiğini göstermektedir. Bu nedenle bu kesimde, en yaygın olarak kullanılan pure sıçrama süreçlerini tanıtacağız ve finans matematiği içindeki büyük rolüne odaklanacağız. Bu modellerde, Brownian bileşenini ayrıca tanıtmaya gerek yoktur, çünkü sıçramaların yapısı hisse senedi fiyatının kısa zaman aralıklarındaki davranışını ifade eder.

Geman, 2001'de finansal varlık fiyatlandırma süreçlerinde bir sıçrama bileşeni olduğunda artık bir difüzyon bileşenine gerek olmadığını ileri sürdü. Sıçramalar, zaman zaman meydana gelen büyük hareketleri göstermek için gereklidir ve difüzyon bileşeni sürekli olarak meydana gelen küçük hareketleri ifade eder. Ancak deneyler, bu modellerin genellikle bir difüzyon bileşeni eklenerek iyileştirilemediğini göstermiştir. Bu nedenle, bu süreçlerde Brownian bileşeni bulunmamaktadır.

Sonlu aktivite süreçleri (her aralıkta sınırlı sayıda sıçrama) düşünülebilir, ancak bu modeller fiyat davranışının gerçek bir açıklamasına yol açmaz. Bu nedenle sadece sonsuz aktivite modellerini inceleyeceğiz. Sonlu aktivite modellerini incelemek isterseniz, CGMY'nin [42]'ye başvurabilirsiniz. İncelenecek süreçler arasında hiperbolik süreç, normal ters Gauss süreci, Gama varyans süreci ve pure sıçrama Lévy süreci bulunmaktadır. Pure sıçrama süreçleri genellikle 3.2 tanımıyla ifade edilir.

Tanım 3.2. Pure sıçrama süreçleri

Sayma süreci, negatif olmayan rastgele değişkenler dizisi T_n ile ifade edilir. Bu durumda, $T_n < \infty$ ise, $T_n < T_{n+1}$ ve $T_n = \infty$ ise $T_n = T_{n+1}$ olarak kabul edilir. T_n , n . olayın gerçekleşme zamanını temsil eder.

$N(t)$, t zamana kadar gerçekleşen olayların sayısıdır ve şu şekilde ifade edilir:

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} I\{T_n < t\}, N(t) = 0 \quad (3.11)$$

$N(t)$, parçalı sabit bir süreçtir ve T_n anlarında değeri 1 olan sıçramalara sahiptir. Bu tür süreçlere basit nokta süreçleri denir.

Basit nokta süreçleri, (T_n, Z_n) çiftleri ile tanımlanan işaretli nokta süreçlerinin bir alt türüdür ve örneğin, bu süreçlerde rastgele değişken Z_n , T_n anındaki sıçrama değerini ifade edebilir.

$(X_t)_{t \geq 0}$, pure sıçrama süreci olarak tanımlanır ve aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$X(t) = X(0) + \sum_{n=1}^{\infty} I(T_n < t) Z_n, \quad (3.12)$$

Bu süreç sağ-sürekli ve parçalı sabit bir süreçtir. Burada, T_n , n . zaman sıçraması ve Z_n , n . sıçrama değerini temsil eder.

3.2.1. Hiperbolik dağılımlar

Bir grup Lévy süreci, finansal uygulamalarda Eberlein ve Freiburg kentindeki araştırma grubu tarafından kapsamlı bir şekilde geliştirilen hiperbolik (simetrik) süreçleri içerir.

Bu bölümün amacı, 1995 yılında tanıtılan ve 1998 yılında Eberlein, Keller ve Pravez tarafından genişletilen hiperbolik modeli tanıtmaktır. Bu süreç, Brownian bileşeni içermeyen pure sıçrama süreçleri kategorisine aittir. Hiperbolik model, hisse senedi getirilerine oldukça iyi uyar. Ancak, hiperbolik hareketi kullanmak, Brownian hareketi kadar basit değildir. Bu süreçle opsiyon fiyatlandırmasının kapalı bir formülasyonu Eberlein ve Keller tarafından 1995 yılında bulunabilir.

Hiperbolik model, finans matematiğinde tanıtılan ilk pure sıçrama modellerinden biridir. Volatilitiyi sabit kabul eden Black-Scholes ve Merton formülünden farklı olarak, bu modellerde volatilité rastgele bir süreçtir [28].

Genelleştirilmiş hiperbolik dağılım, ilk olarak 1977 yılında Barndorff-Nielsen tarafından rüzgarla savrulan kum yataklarında parçacık boyutu için bir model olarak kullanıldı. Bingham ve Kiesel, kum torbalarının oluşum süreci ile hisse senedi fiyatları arasında ilginç bir ilişki buldu. Enerji transferinin ardışık etkilerinin büyük taşları kırıp kum yığınlarına dönüştürmesi gibi, küresel düzeyden bölgesel düzeye ve giderek küçülen sosyal bilimlere bilgi aktarımının art arda gelen etkileri sermayelerin ve hisse senetlerinin değerinde belirleyici bir role sahiptir [57].

Finansal veri modellemede üç alt kategori içinde genelleştirilmiş hiperbolik süreçler kullanılır. 1995 yılında Eberlein ve Keller tarafından kullanılan hiperbolik süreç, Barndorff-Nielsen tarafından ortaya atılan normal ters Gauss süreci ve gama varyans

süreci, finansal verileri modellemek için kullanılan genelleştirilmiş hiperbolik süreçlerin arasındadır [51]. Hiperbolik dağılım adı, yoğunluğunun logaritmasının bir hiperbol olmasından gelir. Hiperbolik dağılım, 4. bölümde tartışılan genelleştirilmiş hiperbolik dağılımların özel bir durumudur [16].

Hiperbolik fonksiyonların yoğunluğu aşağıdaki gibidir:

$$f(\alpha, \beta, \delta, \mu)(x) = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{2\alpha\delta K_1\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \exp\left(-\alpha\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2} + \beta(x - \mu)\right). \quad (3.13)$$

Bu bağlamda, hiperbolik dağılımın dört parametresi vardır, bunlar $\mu \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ ve $0 \leq |\beta| < \alpha$ 'dır. α ve β parametreleri dağılımın şeklini, β çarpıklığını, δ ve μ ise ölçeği ve konumunu ifade eder. Bu parametreler, bağımsız bir gözlem örneği kullanılarak maksimum olabilir. Bu alanda çalışmak için Blaesiold ve Serensen'in 1992 makalesine başvurulabilir.

Barndorff-Nielsen ve Halgreen, hiperbolik dağılımın sonsuz bölünebilir olduğunu kanıtladılar [4]. Bu nedenle, hiperbolik dağılım $(X_t)_{t \geq 0}$ Lévy sürecini, yani bağımsız ve sabit büyümeleri olan bir süreci oluşturabilir, bu dağılımın yoğunluğu (3.13) ile ifade edilir. $(X_t)_{t \geq 0}$ hiperbolik hareket süreci, $(\alpha, \beta, \delta, \mu)$ parametrelerine bağlıdır. Lévy-Khinchin temsil teoremi kullanılarak hiperbolik hareketin pure sıçramalarla değişen bir süreç olduğu gösterilmiştir. Moment üreten fonksiyon aşağıdaki gibi ifade edilir.

Lemma 3.1. Hiperbolik dağılımın moment üreten fonksiyonunu aşağıdaki ilişki ile ifade eder:

$$M(u) = \frac{e^{\mu u} \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{K_1(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})} \frac{K_1(\delta \sqrt{\alpha^2 - (\beta + u)^2})}{\sqrt{\alpha^2 - (\beta + u)^2}}, \quad |\beta + u| < \alpha. \quad (3.14)$$

İspat: μ bir konum parametresi olduğu için $\mu = 0$ durumu dikkate almak yeterlidir.

$$a(\alpha, \beta, \delta) = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{2\alpha\delta K_1\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \quad (3.15)$$

olarak tanımlayalım. $|\beta + u| < \alpha$ için,

$$\begin{aligned} M(u) &= \int e^{ux} f(\alpha, \beta, \delta, 0)(x) dx \\ &= a(\alpha, \beta, \delta) \int \exp\left[-\alpha\sqrt{\delta^2 + x^2} + (\beta + u)x\right] dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a(\alpha, \beta, \delta)}{a(\alpha, \beta + u, \delta)} \\
&= \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{K_1(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})} \frac{K_1(\delta\sqrt{\alpha^2 - (\beta + u)^2})}{\sqrt{\alpha^2 - (\beta + u)^2}}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Hiperbolik dağılımın tüm momentleri mevcuttur ve X_t hiperbolik hareketinin momentleri, $u = 0$ 'deki moment üreten fonksiyonun türevleri hesaplanarak elde edilebilir. İlk olarak, bağımsız ve sabit büyümleri kullanarak,

$$\begin{aligned}
E[X_t^k] &= \frac{\partial^k}{\partial u^k} M_{X_t}(u)|_{u=0} = \frac{\partial^k}{\partial u^k} [M(u)^t]|_{u=0} \\
&= tM^{(k)}(0) = tE[X_1^k]
\end{aligned}$$

çünkü, $M(0) = 1$. M 'nin türevini alarak

$$E[X_1] = \mu + \frac{\beta\delta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \frac{K_2(\varsigma)}{K_1(\varsigma)} \tag{3.17}$$

elde ederiz. Burada, $\varsigma = \delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ olur. Varyans için aşağıdaki bağlantıyı bulabiliriz:

$$Var(X_1) = \delta^2 \left(\frac{K_2}{\varsigma K_1} + \frac{\beta^2}{\alpha^2 - \beta^2} \left\{ \frac{K_3(\varsigma)}{K_1(\varsigma)} - \left(\frac{K_2(\varsigma)}{K_1(\varsigma)} \right)^2 \right\} \right) \tag{3.18}$$

Lemma 3.2. Hiperbolik dağılımın karakteristik fonksiyonunu aşağıdaki bağlantıyla ifade eder:

$$\varphi(x) = e^{i\mu u} \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\sqrt{\alpha^2 - (\beta + iu)^2}} \frac{K_1(\delta\sqrt{\alpha^2 - (\beta + iu)^2})}{K_1(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}. \tag{3.19}$$

İspat: Lemma 3.1'e göre hiperbolik dağılımın $a(\alpha, \beta, \delta)$ parametreleri ile moment üreten fonksiyonunun yakınsama yarıçapı $\alpha - \beta$ 'ya eşittir. Dolayısıyla, $\varphi(u) = Ee^{iuX_1} = M(iu)$ için istenilen formül elde edilebilir. Bu gösterim tüm u reel değerler için geçerlidir.

Bu nedenle, $\beta = \mu = 0$ simetrik merkezli durumda (ve sonuç olarak $\varsigma = \alpha\delta$ parametresine)

$$\varphi(u; \alpha, \delta) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \frac{K_1(\delta\sqrt{\alpha^2 - u^2})}{K_1(\alpha\delta)} \tag{3.20}$$

simetrik ve reel değerdedir.

Simetrik merkezli durumdaki $\beta = \mu = 0$ 'ın karakteristik fonksiyonunun Lévy-Khinchin gösterimi aşağıdaki gibidir:

$$\varphi(u) = \exp \left[\int_0^\infty (e^{iux} - 1 - iux)g(x)dx \right] \quad (3.21)$$

burada, $g(x)$ hiperbolik Lévy ölçümüdür ve

$$g(x) = \frac{1}{|x|} \left[\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{2y+\alpha^2|x|}}dy}{\pi^2 y (J_1^2(\sqrt{2y}) + Y_1^2(\delta\sqrt{2y}))} + e^{-\alpha|x|} \right] \quad (3.22)$$

olarak tanımlanır. Burada, J_1 ve Y_1 , 1 indeksli birinci ve ikinci tip Bessel fonksiyonlarıdır.

Bu temsilden, Lévy hiperbolik hareketinin sürekli kısmı olmadığı için pure sıçramalarla değişen bir süreç olduğu görülebilir. Bessel fonksiyonlarının özelliğini kullanarak, her $x \rightarrow 0$ için $g(x) \sim \frac{1}{x^2}$ olduğu sonucuna varabiliriz. Bu nedenle, bu sürecin her yörüngesi, her sonlu zaman aralığında sonsuz sayıda sıçramaya sahiptir. Lévy ölçümünü daha kesin olarak incelemek nispeten karmaşıktır ve belirli fonksiyonların integrallerinin incelenmesini gerektirir. Daha fazla bilgi edinmek için [11, 18 ve 19]'a bakınız. Genelleştirilmiş hiperbolik dağılımın bir parametresi daha vardır, bu parametreyi λ ile gösteririz. Bu dağılımın yoğunluğu şu şekildedir:

$$f_{GH}(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu)(x) = a(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu)(\delta^2 + (x - \mu)^2)^{\frac{(\lambda - \frac{1}{2})}{2}} \times K_{\lambda - \frac{1}{2}}(\alpha\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2} + \exp(\beta(x - \mu))) \quad (3.23)$$

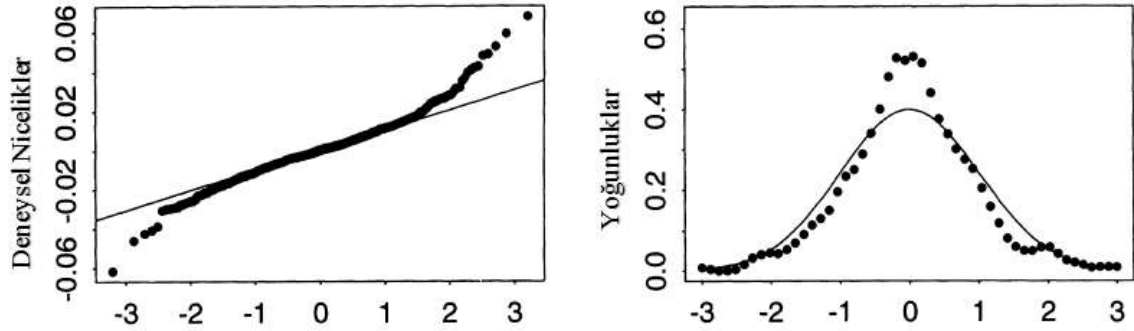
burada

$$a(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^{\frac{\lambda}{2}}}{\sqrt{2\pi}\alpha^{\lambda-1/2}\delta^\lambda K_\lambda(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}$$

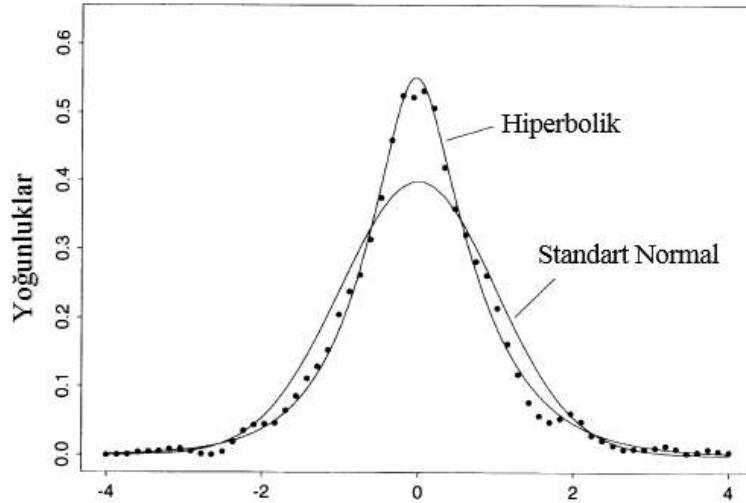
olarak tanımlanır. Bu bir sabit değerdir ve K_v , v mertebesinden genelleştirilmiş Bessel fonksiyonudur. λ , ek parametrenin kuyrukların ağırlığı üzerinde güçlü bir etkisi vardır. $\lambda = 1$ için hiperbolik bir dağılım elde edilir ve $\lambda = -1/2$ için, sonraki bölümde olduğu gibi normal ters Gauss dağılımının elde edildiği belirtilmektedir.

Şekil 3.7, Deutsche Bank Germany'nin logaritmasının normal dağılımdan sapmasını göstermektedir. Deneysel veriler, normal yoğunluğa kıyasla açıkça daha uzun bir tepe noktası ve daha ağır bir kuyruk göstermektedir. Şekil 3.8, hiperbolik dağılımın Deutsche

Bank Germany getirisinin logaritmasına uygunluğunu göstermektedir. Açıkçası, hiperbolik dağılım, normal dağılıma kıyasla verilere daha iyi uyum sağlamaktadır.



Şekil 3. 7. Sol: Almanya’da Deutsche Bank getirileri için normal QQ grafiği. Sağ: Deutsche Bank getirileri için ampirik yoğunluk ile normal yoğunluk uyumsuzluğu. Normallikten sapma açıkça görülmektedir.



Şekil 3. 8. Deutsche Bank’ın getiri yoğunluğu - normal dağılıma göre hiperbolik dağılımın daha iyi olduğu görülmektedir.

3.2.2. Normal ters Gauss süreci (NIG)

Finans matematiği bağlamında, varlık getirilerinin logaritmik dağılımları, normal ters Gauss süreci ile iyi uyum sağlayabilir. Bu süreç, birçok uygulama alanında başarılı bir şekilde kullanılmıştır. İlk olarak 1995 yılında Eberlein ve Barndorff-Nielsen tarafından tanıtılan ve daha sonra 1998 yılında Barndorff-Nielsen tarafından finansal modelleme için önerilen NIG süreci, $\lambda = 1/2$ ile genelleştirilmiş hiperbolik süreçlerin alt kategorilerinden biridir.

Normal ters Gauss süreci, ters Gauss sürecini temel alarak oluşturulan sonsuz değişimli pure sıçrama süreçleri kategorisine aittir (Ek-2). Bu modelin yapımı üçüncü

bölümde ele alınacaktır. Eğer $\{X_t\}_{t \geq 0}$ normal bir ters Gauss sürecini temsil ediyorsa, X_t 'in üç parametrelili dağılımının karakteristik fonksiyonu şu şekildedir:

$$\varphi_{NIG}(u; \alpha, \beta, t\delta) = \exp \left[-t\delta \left(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + iu)^2} - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \right) \right] \quad (3.24)$$

NIG modeli, bir ters Gauss bağımlayıcı T tarafından izlenen bir Brownian hareketidir ve aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$X(t) = B(T(t))$$

$T = (T_t^v)_{t \geq 0}$ ters Gauss sürecini göz önünde bulundurun. v , kaymalı Brownian hareketinin pozitif t düzeyine ulaştığı ilk zaman olan T_t^v olsun, ardından T_t^v , Laplace dönüşümü

$$E[\exp(-\lambda T_t^v)] = E \left[\exp \left(-t \left(\sqrt{2\lambda + v^2} - v \right) \right) \right]$$

ile ters bir Gauss dağılımına sahip olsun.

Şimdi, Gauss süresi T_t^v üzerinde sürüklenme parametresi θ ve dalgalanma parametresi σ ile Brownian hareketini ele alalım. Yeni X_{NIG} sürecini aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$$X_{NIG}(t; \sigma, v, \theta) = \theta T_t^v + \sigma W(T_t^v). \quad (3.25)$$

Bu, bir normal ters Gauss sürecidir ve karakteristik fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} E[e^{iuX_{NIG}(t)}] &= E \left[\exp \left(iu\theta T_t^v - \frac{\sigma^2 u^2}{2} T_t^v \right) \right] \\ &= E \left[\exp \left(iu\theta - \frac{\sigma^2 u^2}{2} \right) T_t^v \right] \\ &= \exp \left(-t \sqrt{v^2 - 2iu\theta + \sigma^2 u^2} - v \right) \\ &= \exp \left(-t\sigma \sqrt{\frac{v^2}{\sigma^2} - \frac{\theta^2}{\sigma^4} - \left(\frac{\theta}{\sigma^2} + iu \right)^2} - \frac{v}{\sigma} \right). \end{aligned}$$

Kolaylık sağlamak için

$$\beta = \frac{\theta}{\sigma^2}, \quad \alpha^2 = \frac{v^2}{\sigma^2} + \frac{\theta^2}{\sigma^4}, \quad \delta = \sigma$$

olarak yazabiliriz. Bu bağlantıları kullanarak, NIG sürecini aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$X_{NIG}(T; \alpha, \beta, \delta) = \beta \delta^2 T_t^{\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} + \delta W \left(T_t^{\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \right). \quad (3.26)$$

Zamana bağılı sıçrama değeri (ters Gauss) bağılı Gauss süreci X , ortalama $\beta \delta^2 u$ ve $\delta^2 u$ uvaryansa sahiptir. Ters Gauss'un değiştirilmiş zamanındaki sıçramaların Lévy yoğunluğu aşağıdaki gibidir:

$$v(u) = \frac{\exp \left[\frac{-\delta^2 (\alpha^2 - \beta^2)}{2} u \right]}{u^{3/2}}.$$

Yukarıdaki ifadeden, NIG süreci için Lévy yoğunluğu aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{1}{\delta \sqrt{2\pi u}} \exp \left(\frac{-(x - \beta \delta^2 u)^2}{2 \delta^2 u} \right) \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}} \exp \left[\frac{-\delta^2 (\alpha^2 - \beta^2)}{2} u \right] du \\ &= \frac{1}{\delta} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^{-2} \exp \left(\frac{-\delta^2 \alpha^2}{2} t - \frac{x^2}{2 \delta^2 t} \right) dt \\ &= \frac{e^{\beta x}}{\delta} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(t - \frac{x^2}{2 \delta^2 t} \right) \frac{\delta^2 \alpha^2}{2} dt. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Genelleştirilmiş Bessel fonksiyonu

$$K_a(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} \right)^2 \int_0^\infty \exp \left(- \left(t + \frac{x^2}{4t} \right) \right) t^{-a-1} dt$$

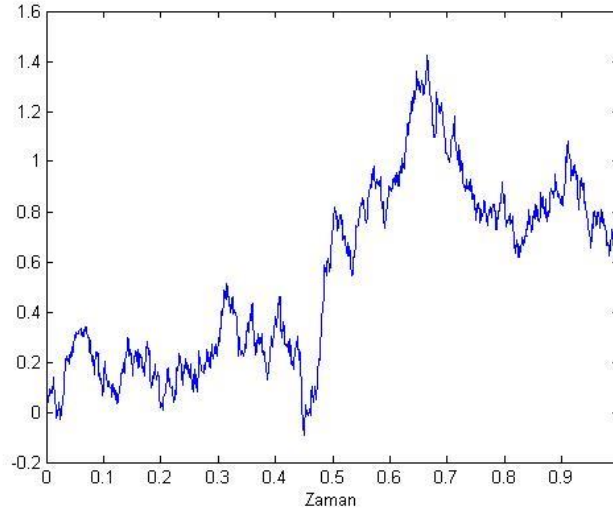
olmak üzere,

$$\int_0^\infty \exp \left(- \left(t + \frac{x^2}{4t} \right) \right) t^{-a-1} dt = 2 K_a(x) \left(\frac{x}{2} \right)^2$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu nedenle, NIG sürecinin Lévy yoğunluğu aşağıdaki gibidir [23]:

$$V_{NIG}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \delta \alpha^2 e^{\beta x} \frac{K_1(|x|)}{|x|} \quad (3.28)$$

Şekil 3.9, $\alpha = 50$, $\beta = -10$ ve $\delta = 1$ parametreleriyle normal ters Gauss sürecinin örnek bir yörüngesini göstermektedir.



Şekil 3. 9. Termal ters Gauss sürecinin örnek yörüngesi

3.2.3. Varyans Gama süreci (VG)

Gama varyans süreci, sonsuz aktiviteye sahip bir pure sıçrama süreci olarak kabul edilir. Bu model, ilk olarak 1990’da Madan ve Seneta [30] tarafından ve daha sonra 1998’de Madan, Caar ve Chang [39] tarafından incelenmiştir. Genel olarak, gama varyans süreci için iki farklı temsil yöntemi bulunmaktadır. Bu süreç, gama bağımlayıcısı tarafından oluşturulur ve bu sürecin yapısı 4. bölümde ayrıntılı bir şekilde ele alınmıştır. Bu model, bir normal rastgele değişkenin varyansının bir gama rastgele değişkeni ile değiştirilmesiyle oluşturulur ve bu nedenle adını haklı bir şekilde almıştır.

Aslında, gama varyans süreci, hisse senedi fiyatlarının logaritmasını modellemek için kullanılan bir model olan Brownian hareketinin üç parametrelili bir genişlemesidir. Bu süreç, sabit sürüklenme ve dalgalanma ile Brownian hareketinin rastgele değişimini gösterir ve gama süreci olarak adlandırılır.

VG (Variance-Gamma) süreci içinde, birim zaman başına varlık getirisinin normal bir dağılıma sahip olduğu rastgele bir zamanın gerçekleşmesine bağlıdır. Bu stokastik süreç ve bağımlı opsiyon fiyatlaması, üç parametrelili bir model sunar. Dalgalanma ile birlikte, belirginlik ve çarpıklık da bu parametreler tarafından kontrol edilir. Gama varyans sürecinin sürekli bir bileşeni yoktur; bunun yerine sürekli zaman aralıklarında sıçramaların sayısı sonsuzdur ve pure bir sıçrama sürecidir.

Gama varyans süreci, Brown hareketinin aksine, logaritmik değişimlerin mutlak değerlerinin toplamı sonlu bir değere sahiptir. Bu nedenle gama varyansı, fiyatları artıran ve azaltan iki artan sürecin farkı olarak yazılan sonlu bir değişim sürecidir. Gama varyans

süreci, iki artan gama sürecinin farkı olarak ifade edilebilir. Farklı borsalarda yapılan tahminler, normal dağılımda sıfır ekstra belirginlik varsayımının geçerli olmadığını göstermektedir.

Aslında, 1990 yılında Madan ve Seneta ve 1991 yılında Madan ve Milne tarafından incelenen, oynaklık ve belirginliği kontrol edebilen iki parametrelili stokastik bir süreç, çarpıklığı da içeren üç parametrelili bir sürece genelleştirilmiştir. Gama varyans süreci, gamma süreci tarafından verilen rastgele zamanlarda kayma ile bir Brownian hareketinin değişimini temsil eder. Yani,

$$B(t; \theta, \sigma) = \theta t + \sigma W(t) \quad (3.29)$$

$B(t; \theta, \sigma)$ ifadesi, $W(t)$ 'nin standart bir Brownian hareketi olduğu bir süreci ifade eder. $B(t; \theta, \sigma)$ süreci, θ sürüklenme ve σ dalgalı bir Brownian hareket içerir. Ortalama oranı μ ve varyans oranı κ , gama süreci $\gamma(t; \mu, \kappa)$ tarafından temsil edilir. Bu süreç, ayrı zaman aralıklarında bağımsız gama büyümleri içerir (Ek 3). Yeni yoğunluk fonksiyonu artışı,

$$g = \gamma(t + h; \mu, \kappa) - \gamma(t; \mu, \kappa)$$

ile ifade edilir. Bu gama dağılımı, μh ortalama ve κh varyans ile bir gama dağılımına sahiptir ve şu yoğunluk fonksiyonunu elde ederiz:

$$f_h(g) = \left(\frac{\mu}{\kappa}\right)^{\frac{\mu^2 h}{\kappa}} \frac{g^{\frac{\mu^2 h}{\kappa}-1} \exp\left(-\frac{\mu}{\kappa} g\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu^2 h}{\kappa}\right)}, \quad g > 0. \quad (3.30)$$

Gama yoğunluğunun karakteristik fonksiyonu, aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\varphi_{\gamma(t)} = \left(\frac{1}{1 - iu \frac{\kappa}{\mu}} \right)^{\frac{\mu^2 t}{\kappa}}. \quad (3.31)$$

Gama varyans süreci, sonsuz aktiviteye sahip olmayan bölünebilir (Infinity divisible) bir süreçtir ve Lévy yoğunluğu aşağıdaki denklemle ifade edilir:

$$v_{\gamma}(x) = \begin{cases} \frac{\mu^2 \exp\left(-\frac{\mu}{\kappa} x\right)}{\kappa x}, & x > 0, \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad (3.32)$$

Bölüm 4'te, yukarıdaki denklemde $c = \frac{\mu^2}{\kappa}$ ve $\lambda = \frac{\mu}{\kappa}$ olacak şekilde tanıtılacaktır (Bağlantı 3.32). Bu bağlantıya göre, $v_\gamma(x)$ Lévy ölçüsü $\mathbb{R}$ üzerinde sonsuz olduğu sonucuna varılabilir.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v_\gamma(x) dx = \infty$$

Diğer yandan, $[0, \infty)$ aralığındaki gama varyansı sonlu bir değişim sürecidir. Başka bir deyişle, gama varyans süreci, karakteristik üçlüsü $(A = 0, v, \gamma)$ olan ve

$$A = 0, \quad \int_{|x| < 1} |x| v_\gamma(x) dx < \infty$$

bağlantısını sağlayan bir Lévy sürecidir.

$X(t; \sigma, \kappa, \theta)$ gama varyans süreci, $B(t; \theta, \sigma)$ sürüklenme ile bir Brownian hareketi ve $\gamma(t; 1, \kappa)$ gama süreci tarafından tanımlanır:

$$X(t; \sigma, \kappa, \theta) = B(\gamma(t; 1, \kappa); \theta, \sigma) \quad (3.33)$$

Bu sürecin üç parametresi bulunmaktadır:

- σ : Brownian hareketinin dalgalanması,
- κ : gama varyans oranı gelişimi,
- θ : Brownian hareketinde sürüklenme.

Bu süreç, Brownian hareketi üzerinde dalgalanma ek olarak iki tür kontrol sağlar. Bu kontroller, sürecin çarpıklığını θ nedeniyle ve kurtosis'i κ nedeniyle etkiler.

t zamanındaki varyans sürecinin yoğunluk fonksiyonu, g 'nin zaman değişimine bağlı olarak normal dağılım fonksiyonu şeklinde ifade edilebilir. Koşulsuz yoğunluk, g 'ye göre integral alınarak ve g 'nin zaman değişimi için yoğunluk (3.30) kullanılarak elde edilir:

$$P_{X_t}(x) = \int_0^\infty P_{VG}|(x_t|t = \gamma = g)p_\gamma(g; \kappa)dg$$

$$f_{X_t}(x) = \int_0^\infty \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi g}} \exp\left(-\frac{(x - \theta g)^2}{2\delta^2 g}\right) \frac{g^{\frac{t}{\kappa}-1}}{\kappa^{\frac{t}{\kappa}}} \frac{\exp\left(-\frac{g}{\kappa}\right)}{\Gamma\left(\frac{t}{\kappa}\right)} dg \quad (3.34)$$

$\varphi_{X_t}(u) = E\left[\exp\left(iu p(iuX(t))\right)\right]$, karakteristik fonksiyonu, VG süreci için şu şekildedir:

$$\varphi_{X_t}(u) = \left(\frac{1}{1 - i\theta\kappa u + (\sigma^2\kappa/2)u^2} \right)^{\frac{t}{\kappa}} \quad (3.35)$$

Laplace dönüşümünü kullanarak:

$$E[\exp(-\lambda\gamma_t^\kappa)] = (1 + \lambda\kappa)^{-\frac{t}{\kappa}}$$

elde edilir. VG sürecinin karakteristik fonksiyonu, iki karakteristik fonksiyonun çarpımı olarak tanımlanabilir [31, Teorem 6.4]:

$$\varphi_{\gamma_p(t)}(u) = \left(\frac{1}{1 - i(\kappa_p/\mu_p)u} \right)^{\left(\frac{\mu_p^2}{\kappa_p}\right)t}$$

ve

$$\varphi_{-\gamma_n(t)}(u) = \left(\frac{1}{1 + i(\kappa_p/\mu_p)u} \right)^{\left(\frac{\mu_n^2}{\kappa_p}\right)t}.$$

Burada, μ_p, μ_n, κ_p ve κ_n için

$$\frac{\mu_p^2}{\kappa_p} = \frac{\mu_n^2}{\kappa_p} = \frac{1}{\kappa} \quad (3.36)$$

$$\frac{\kappa_p\kappa_n}{\mu_p\mu_n} = \frac{\sigma^2}{2} \quad (3.37)$$

$$\frac{\kappa_p}{\mu_p} - \frac{\kappa_n}{\mu_n} = \theta\kappa \quad (3.38)$$

bağlantıları sağlar. Bu nedenle, gama varyans süreci sırasıyla ortalama oranları μ_p ve μ_n , varyans oranları κ_p ve κ_n olan iki gama sürecinin farkı olarak elde edilir. Sonuç olarak:

$$X(t; \sigma; \kappa; \theta) = \gamma_p(t; \mu_p, \kappa_p) - \gamma_n(t; \mu_n, \kappa_n) \quad (3.39)$$

Gama süreci parametreleri ile gama varyans sürecindeki ana parametreler arasındaki açık bağlantı, (3.33), (3.37) ve (3.38) denklemlerini çözülerek elde edilir. (3.37) ve (3.38) denklemlerinden:

$$\frac{\kappa_p}{\mu_p} = \frac{1}{2}\sqrt{\theta^2\kappa^2 + 2\sigma^2\kappa} + \frac{\theta\kappa}{2},$$

$$\frac{\kappa_n}{\mu_n} = \frac{1}{2}\sqrt{\theta^2\kappa^2 + 2\sigma^2\kappa} - \frac{\theta\kappa}{2}.$$

Bu nedenle, (3.36)'dan aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$\mu_p = \frac{1}{2} \sqrt{\theta^2 + \frac{2\sigma^2}{\kappa}} + \frac{\theta}{2} \quad (3.40)$$

$$\mu_n = \frac{1}{2} \sqrt{\theta^2 + \frac{2\sigma^2}{\kappa}} - \frac{\theta}{2} \quad (3.41)$$

$$\kappa_p = \left(\frac{1}{2} \sqrt{\theta^2 + \frac{2\sigma^2}{\kappa}} + \frac{\theta}{2} \right)^2 \kappa \quad (3.42)$$

$$\kappa_n = \left(\frac{1}{2} \sqrt{\theta^2 + \frac{2\sigma^2}{\kappa}} - \frac{\theta}{2} \right)^2 \kappa. \quad (3.43)$$

Gama varyans süreci, iki Gama sürecinin farkı olarak görüldüğünde, (3.32) ilişkisi kullanılarak X_t için Lévy ölçüsü aşağıdaki gibi olacaktır:

$$v_X(x) = \begin{cases} \frac{\mu_n^2 \exp\left(-\frac{\mu_n}{\kappa_n} |x|\right)}{\kappa_n |x|}, & x < 0 \\ \frac{\mu_p^2 \exp\left(-\frac{\mu_p}{\kappa_p} x\right)}{\kappa_p x}, & x > 0 \end{cases} \quad (3.44)$$

(3.44)'te, VG sürecinin hisse senedi fiyatındaki sıçramanın sonsuz giriş oranı özelliğini, Gama sürecinden devraldığını görebiliriz. Çünkü (3.32) ilişkisini kullanarak, integral sonucunun sonsuz olduğu görülür.

Lévy ölçüsünü doğrudan bu parametrelerle yazdığımızda ana parametrelerin rolü kolayca görülebilir. (σ, κ, θ) parametrelerine bağlı olarak Lévy ölçüsü aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} v_X(x) &= \frac{\exp\left(\frac{\theta x}{\sigma^2}\right)}{\kappa |x|} \exp\left(-\frac{\sqrt{\frac{2}{\kappa} + \frac{\theta^2}{\sigma^2}}}{\sigma} |x|\right) \\ &= \frac{1}{\kappa |x|} e^{Mx - G|x|} = \frac{C}{|x|} e^{Mx - G|x|} \end{aligned} \quad (3.45)$$

(3.45) bağıntısı, $\theta = 0$ özel durumu, sıfır civarında simetrik Lévy ölçümünü elde eder. 1990'da Madden ve Seneta tarafından ve 1991'de Madden ve Milne tarafından gösterilen, bazen simetrik bir sürece yol açacaktır.

Gama varyans süreci parametreleri, verim dağılımının çarpıklığını ve basıklığını yalnızca dolaylı olarak yansıtır. Aşağıda, t uzunluğunda bir mesafe boyunca verim dağılımının dört ana merkezi momentini elde ediyoruz. $X(t)$ değişkeninin dağılımının, g normal koşuluna göre, ortalaması θg ve varyansı $\sigma\sqrt{g}$ olduğu düşünüldüğünde

$$X(t) = \theta g + \sigma\sqrt{g}z \quad (3.46)$$

Olur. Burada, z bir normal standart değişken, ortalaması t ve varyansı κt olduğu, g gama rastgele değişkenden bağımsızdır. Öyleyse,

$$E[X(t)] = \theta t$$

olduğundan ve $x = X(t) - E[X(t)]$ 'yi varsayarsak,

$$x = \theta(g - t) + \sigma\sqrt{g}z$$

olur. İkinci kuvvetin beklenen değerini hesaplayarak

$$E[x^2] = \theta^2 \kappa t + \sigma^2 t$$

elde edeceğiz ve bu nedenle,

$$E[(X(t) - E[X(t)])^2] = (\theta^2 \kappa + \sigma^2)t \quad (3.47)$$

olur. x 'in üçüncü kuvvetini hesaplayarak,

$$x^3 = \theta^3(g - t)^3 + 3\theta^2(g - t)^2\sigma\sqrt{g}z + 3\theta(g - t)\sigma^2gz^2 + \sigma^3g^{\frac{3}{2}}z^3$$

olur ve buyüzden,

$$E[x^3] = \theta^3 E[(g - t)^3] + 0 + 3\sigma^2 \theta \kappa t + 0.$$

elde edilir. $E[(g - t)^3]$ 'ün beklenen değeri gama yoğunluğunun doğrudan integrasyonu ile elde edilir ve

$$E[g^3] = \kappa^3 \left(2 + \frac{t}{\kappa}\right) \left(1 + \frac{t}{\kappa}\right) \frac{t}{\kappa} = t^3 + 3\kappa t^2 + 2\kappa^2 t$$

olduğundan,

$$E[(g - t)^3] = t^3 + 3\kappa t^2 + 2\kappa^2 t - 3(\kappa t + t^2)t + 3t^3 - t^3 = 2\kappa^2 t$$

olur ve $E[x^3]$ içindeki bu ifadeyi değiştirerek şunu elde ederiz:

$$E[(X(t) - E[X(t)])^3] = (2\theta^3\kappa + 3\sigma^2\theta\kappa)t \quad (3.48)$$

olur. x^4 'ün açılımına göre dördüncü momenti için

$$E[x^4] = \theta^4 E[(g - t)^4] + 6\sigma^2\theta^2 E[(g - t)^2 g] + 3\sigma^4 E[g^2]$$

vardır. g^4 'ün beklenen değeri açık integrasyonla hesaplanır ve

$$E[g^4] = (3\kappa + t)(2\kappa + t)(\kappa + t) = 6\kappa^3 t + 11\kappa^2 t^2 + 6\kappa t^2 + t^4$$

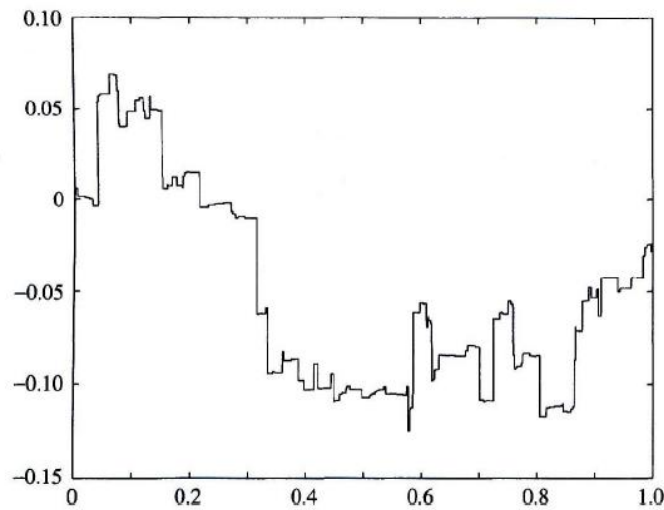
elde edilir. Sonuç olarak, yerine koyarak

$$\begin{aligned} E[(X(t) - E[X(t)])^4] &= (3\sigma^4\kappa + 12\sigma^2\theta^2\kappa^2)t \\ &+ (3\sigma^4 + 6\sigma^2\theta^2\kappa + 3\theta^4\kappa^2)t^2 \end{aligned} \quad (3.49)$$

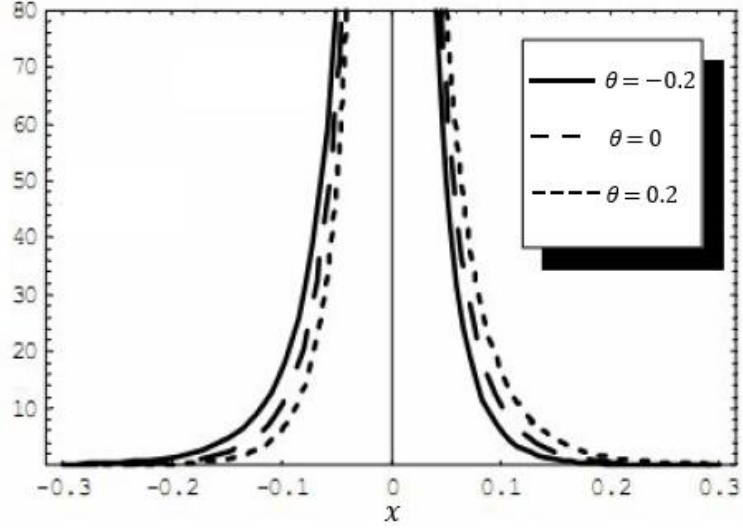
İfadesini elde ederiz.

(3.48)'de θ değerinin 0 olduğunu görüyoruz, bu nedenle çarpıklığın olmadığını gösterir, bu bağlamda θ çarpıklığı temsil eder. Ayrıca, (3.47) ve (3.49) bağlantılarından, θ 'nın 0 olduğu durumda dördüncü merkezi momentin ikinci merkezi momentin karesine bölünmesi sonucunun $3(1 + \kappa)$ 'ya eşit olduğu ve dolayısıyla κ 'nın bu dağılımın normal dağılıma göre ekstra belirginlik oranını gösterdiğini görebiliriz [39].

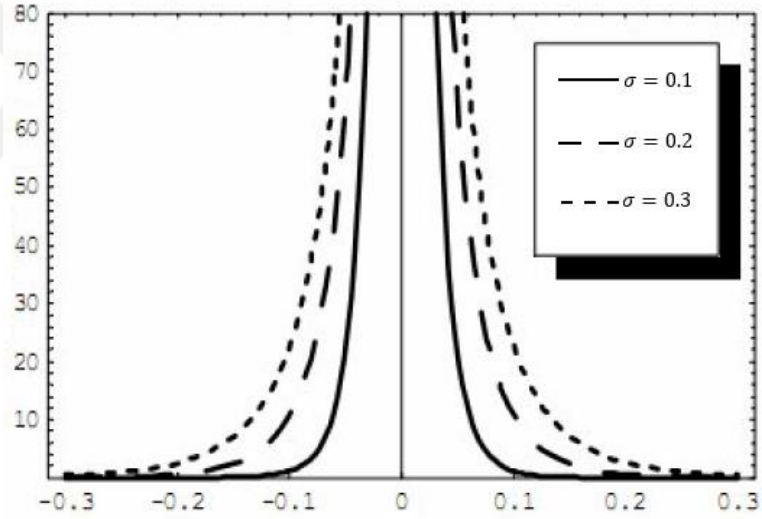
Şekil 3.10, $C = 20$, $G = 40$ ve $M = 50$ parametreleriyle gama varyans sürecinin örnek bir yörüngeni göstermektedir. Ayrıca, Şekil 3.11, parametrelerinin farklı değerleri için gama varyans sürecinin büyüklüğünü göstermektedir.



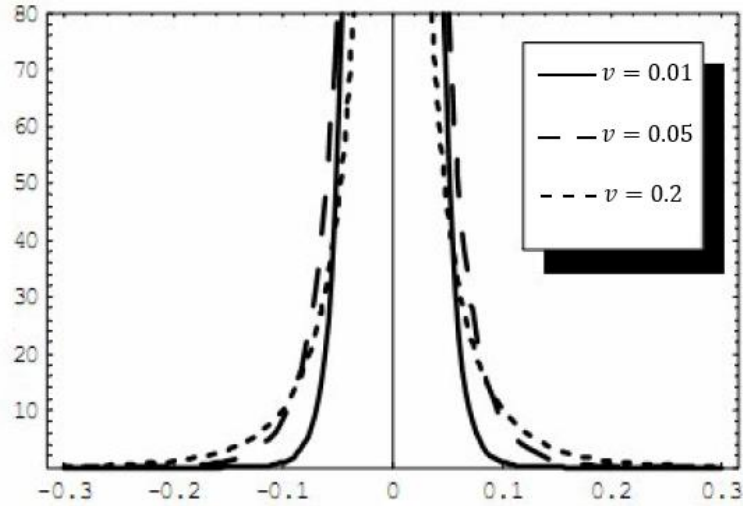
Şekil 3. 10. Gama varyans sürecinin örnek yörüngesi



Şekil 3. 11. σ sürüklenme parametresinin farklı değerlerle gama varyans sürecinin Lévy ölçüsünü grafiyi. $\sigma = 0.2$ ve $\kappa = 0.1$ parametreleri sabittir.



Şekil 3. 12. Volatilite için farklı değerlerle gama varyans sürecinin Lévy ölçüsü. $\kappa = 0.1$ ve $\theta = 0$ parametreleri sabittir.



Şekil 3. 13. Takipçi varyansının farklı değerleri için gama varyans sürecinin Lévy ölçüsü. $\theta = 0$ ve $\sigma = 0.2$ parametreleri sabittir.

3.2.4. CGMY süreci

Genellikle, varlık getirilerini tanımlamak için kullanılan sıçrama-difüzyon modelleri, difüzyon bölümünün sürekli küçük dalgalanmaları yansıttığı ve sıçramaların nadir büyük dalgalanmaları temsil ettiği ilkesine dayanmaktadır. Sonsuz aktivite sıçramaları içerebilen bu model, varlık getirilerini modelleme konusunda hala emisyon bileşenini dahil etmenin gerekliliği konusunu gündeme getirir. Bu soruya yanıt 2002’de Karr, Geman, Madan ve Yor tarafından “Varlık Getirilerinin Ayrıntılı Yapıları: Ampirik Bir Araştırma” başlıklı makalede verilmiştir [14].

Bu makale, serbest bırakmalar ve sıçramalar için sürekli bir zaman modelini hem sonlu aktivite hem de sonsuz aktivite modları için tanıtmaktadır. Model, aslında pure bir sıçrama sürecidir ve her zaman diliminde fiyat sıçramalarının sonlu veya sonsuz olmasına bağlı olarak sonlu veya sonsuz bir aktiviteye sahiptir. Bu model, bu makalenin dört yazarının adının ilk harflerinden esinlenerek CGMY modeli olarak adlandırılmaktadır.

CGMY modeli, varlık riski ve varlık tahsisi süreçlerini incelemek, türevlerin fiyatlandırılması ve riskten korunma için risksiz süreçleri değerlendirmek amacıyla kullanılır. Bu modelde, difüzyon bileşeni bulunmamakta, sıçrama bileşeninin varlığı ise hem pozitif hem de negatif olabilmektedir. Kesikli verilerden sürekli zamanlı örnek yörüngelerin özelliklerini incelemek için Karr ve Madan’ın 1998 tarihli makalesine başvurabilirsiniz [12].

Yeni model, yörüngenin sürekliliği ve otomatik düzelme yeteneği gibi özellikleri koruyarak Brownian hareketinin temel özelliklerini değiştirmeyi amaçlamaktadır. Karakteristik fonksiyon, Lévy-Khinchin teoremi tarafından benzersiz bir şekilde tanımlanır. Özellikle, $X(t)$, sonlu sıçrama bileşenine sahip bağımsız büyüme ve sabit sürüklenme a ve difüzyon katsayısı b ile sonsuz bölünebilir bir süreç içinde karakteristik fonksiyon aşağıdaki bağlantı tarafından benzersiz bir şekilde tanımlanır:

$$E[e^{iuX(t)}] = E\left[iuat - \frac{u^2 b^2 t}{2} + t \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{iux} - 1)v(x)dx\right].$$

Lévy yoğunluğu $v(x)dx$, x konumundaki sıçramaların varış hızını ölçer. Bu süreçlerin sıçrama bileşeni tamamen Lévy yoğunluğu tarafından belirlenir.

Önceki kesimde gama varyans modelinin ayrıntılarını inceledik. Gama varyans modelinin volatilitiyi açıklamadaki başarısı, bu modelin sonsuz aktiviteye sahip olmasına rağmen sonlu değişime sahip pure bir sıçrama süreci olmasından kaynaklanmaktadır. CGMY süreci aslında sonlu bir değişken parametresi içeren genelleştirilmiş bir gama varyans sürecidir.

Eklenen Y parametresi, sonlu veya sonsuz aktiviteyi ve sonlu veya sonsuz değişimi temsil edecektir. Gama varyansının CGMY modeline genellemesi Y parametresi tarafından gerçekleştirilir.

CGMY yoğunluğu aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$V_{CGMY}(x) = \begin{cases} C \frac{\exp(-G|x|)}{|x|^{1+Y}}, & x < 0 \\ C \frac{\exp(-M|x|)}{|x|^{1+Y}}, & x > 0 \end{cases} \quad (3.50)$$

burada, $C > 0, G \geq 0, M \geq 0$ ve $Y < 2$ koşulları geçerlidir. $Y < 2$ koşulu, 3.12 önermelerinde sunulan sınırlamalardan kaynaklanmaktadır. $X_{CGMY}(t; C, G, M, Y)$, (3.50) bağlantısında bir Lévy yoğunluğuna sahip bağımsız büyümeye sahip sonsuz bölünebilir bir süreçtir. $Y = 0$ durumunda, VG süreci parametreleri şu şekildedir:

$$C = \frac{1}{\kappa} \quad (3.51)$$

$$G = \frac{\mu_n}{\kappa_n} \quad (3.52)$$

$$M = \frac{\mu_p}{\kappa_p}. \quad (3.53)$$

Bu parametreler, incelenen süreçlerin farklı yönlerini incelemekte temel bir rol oynar. C parametreleri, tüm aktiviteleri içeren bir ölçü olarak kabul edilebilir. $G = M$ durumunda, Lévy boyutu simetriktir. Madan tarafından 1998 yılında yapılan bir çalışma, bu özel durumda C parametresinin $X(t)$ dağılımının önemini kontrol edeceğini gösterdi. Ayrıca, $G = M$ modu, 1995 yılında Koponen tarafından incelenmiştir. Daha fazla çalışma için [33]'e bakabilirsiniz.

G ve M parametreleri, sırasıyla Lévy boyutunun sağ ve sol üstel bozulma oranlarını kontrol eder ve farklı olduklarında çarpık bir dağılıma neden olur. $G > M$ durumunda, $X(t)$ dağılımının sol kuyruğu sağ kuyruğundan daha ağır olacaktır.

Y parametresi, 1995 yılında Por ve Vershik tarafından [56] makalesinde incelenmiş olup, kararlı yasalarla ilgili süreçlerde ortaya çıkar. Y parametresi, opsiyon fiyatlarının yörüngesinin davranışını ifade eder ve özellikle stokastik süreçlerin ayrıntılı yapılarını tanımlamak için yararlıdır. Örneğin, şu soruları sorabiliriz: Yukarı ve aşağı süreçlerde tamamen tekdüze bir Lévy dağılımı var mı? Yoksa sürecin sonlu veya sonsuz etkinliği veya değişiklikleri var mı?

Fonksiyonun tamamen monoton Lévy yoğunluğu: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun tüm türevleri mevcutsa ve her $k \geq 1$ için $(-1)^k \frac{d^k f(u)}{du^k}$ tamamen monoton ise. Büyük sıçramaların küçük sıçramalardan daha az olduğunu biliyoruz; aslında Lévy yoğunluğu, büyük sıçramaların miktarı ile küçük sıçramaların giriş oranını tamamen monoton bir şekilde ilişkilendirir. Bernstein teoremine göre (Ek 2.4), CGMY sürecinin Lévy yoğunluğu ζ 'nin pozitif ölçü değerleri için tamamen monoton ve bu yoğunluk aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$v(x) = \int_0^\infty e^{-ax} \zeta(da). \quad (3.54)$$

Daha fazla çalışma için [24]'e başvurabilirsiniz.

Sonsuz aktivite süreci: Sonsuz aktivite süreçleri ilk olarak finans teorisinde finansal piyasa verilerinin ilk tahminleri olarak kabul edildi. Bu süreçler, yüksek düzeyde aktiviteye sahip pazarları incelemek amacıyla tasarlanmıştır. Bu piyasalarda kısa süreli sürekli ve sonsuz gelişmeler hisse senedi fiyat trendinde sıçramalara neden olur. Bu

nedenle, herhangi bir sonlu aralıktaki aktivite veya sıçrama miktarı sonsuz olarak kabul edilir.

Çizelge 3. 1. Y parametresinin farklı değerleri için CGMY sürecinin özellikleri

Y değerleri aralığı	Süreç özellikleri
$Y < -1$	Tamamen monoton değil, sonlu aktivite
$-1 < Y < 0$	Tamamen monoton süreç, sonlu aktivite
$0 < Y < 1$	Tamamen monoton süreç, sonlu aktivite, sonlu değişimin
$1 < Y < 2$	Tamamen monoton süreç, sonlu aktivite, sonsuz değişimin

CGMY, $(X_t)_{t \geq 0}$ süreci için, $(0, V_{CGMY}, 0)$ üçlüsüyle aşağıdaki teorem ile elde edilir.

Teorem 3.1. Bağımsız büyümler ve CGMY yoğunluğu ile sonsuz bölünebilirlik sürecinin karakteristik fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\begin{aligned} \varphi_{CGMY}(u, t; C, G, M, Y) \\ = \exp\{tC\Gamma(-Y)[(M - iu)^Y - M^Y + (G + iu)^Y - G^Y]\} \end{aligned} \quad (3.55)$$

İspat: Lévy-Khinchin teoreminden

$$\varphi_{CGMY}(u, t) = \exp \left[t \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{iux} - 1) v_{CGMY}(x) dx \right] \quad (3.56)$$

olur. Görünümdeki integral aşağıdaki gibi iki integralin toplamı olarak yazılabilir.

$$I = \int_0^{+\infty} (e^{iux} - 1) C \frac{\exp(-\beta x)}{x^{1+Y}} dx. \quad (3.57)$$

Yukarıdaki bağlantıda β 'yi G ve M ile değiştirerek

$$I = \int_{-\infty}^0 (e^{iux} - 1) C \frac{\exp(-Gx)}{|x|^{1+Y}} dx + \int_0^{+\infty} (e^{iux} - 1) C \frac{\exp(-Mx)}{x^{1+Y}} dx \quad (3.58)$$

elde ederiz. $I = I_1 + I_2$ tanımlar ve I_2 için

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{+\infty} (e^{iux} - 1) C \frac{\exp(-Mx)}{x^{1+Y}} dx \\ &= \int_0^{+\infty} C x^{-1-Y} \{ \exp[-(M - iu)x] - \exp[-Mx] \} dx \end{aligned}$$

$(M - iu)x = w$ ve $Mx = w$ değişkeni değiştirerek,

$$\begin{aligned}
&= C \int_0^{+\infty} (M - iu)^Y w^{-Y-1} \exp(-w) dw - C \int_0^{+\infty} M^Y w^{-Y-1} \exp(-w) dw \\
&= C(M - iu)^Y \int_0^{+\infty} w^{-Y-1} \exp(-w) dw - CM^Y \int_0^{+\infty} w^{-Y-1} \exp(-w) dw \\
&= C\Gamma(-Y)[(M - iu)^Y - M^Y]
\end{aligned}$$

elde eder'z. $\beta = G$ durumu için benzer bir şekilde ve $-iu$ 'nun yerine iu yazarak

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{+\infty} (e^{iux} - 1) C \frac{\exp(-Mx)}{x^{1+Y}} dx \\
&= C\Gamma(-Y)[(G + iu)^Y - G^Y]
\end{aligned}$$

olur. Böylece ifadeyi değiştirerek sonuç

$$\begin{aligned}
I &= I_1 + I_2 = C\Gamma(-Y)[(M - iu)^Y - M^Y] + C\Gamma(-Y)[(G + iu)^Y - G^Y] \\
&= C\Gamma(-Y)[(M - iu)^Y - M^Y + (G + iu)^Y - G^Y]
\end{aligned}$$

Karakteristik fonksiyon görünümünde elde edilecektir.

Teorem 3.2. (CGMY Süreci)

- i. CGMY süreci, $Y > -1$ koşulu altında tamamen monoton bir yoğunluğa sahiptir.
- ii. CGMY süreci, $Y > 0$ koşulu altında sonsuz aktivite süreci olarak kabul edilir.
- iii. CGMY süreci, $Y > 1$ koşulu altında sonsuz aktivite süreci olarak kabul edilir.

İspat: (i) $Y < -1$ durumu için, $1 + Y$ negatif olduğundan, $\beta = G$ veya M için Lévy yoğunluğu $x^{-(1+Y)} \exp(-\beta x)$ sıfıra yaklaşır. x büyüdükçe $\left(x > \frac{\beta}{\alpha}\right)$ Lévy yoğunluğu azalır ve x sonsuza gittiğinde, Lévy yoğunluğu sıfıra yaklaşır. Bu nedenle, yoğunluk tamamen monoton değildir. $(1 + Y) > 0$ olduğunda,

$$\frac{1}{x^{1+Y}} \exp(-\beta x) = \int_{\beta}^{+\infty} \frac{(\alpha - \beta)^Y}{\Gamma(1 + Y)} e^{-ax} da$$

ağırlık fonksiyonu ile tam monoton olacaktır.

(ii) Negatif değerler için, Lévy ölçüsü sıfıra yakın sonlu bir değer verir. Sonuç olarak, sonlu bir aktivite süreci elde ederiz. Y değeri sıfırdan büyük olduğunda, sıfıra yakın Lévy ölçüsü sonsuz bir değere ulaşır ve sonsuz bir aktivite süreci elde edilir.

(iii) $|x|k_{CGMY}$, sıfırın yakınında ve $Y < 1$ için sonlu bir integrale sahiptir, bu integral $Y > 1$ için sonsuzdur.

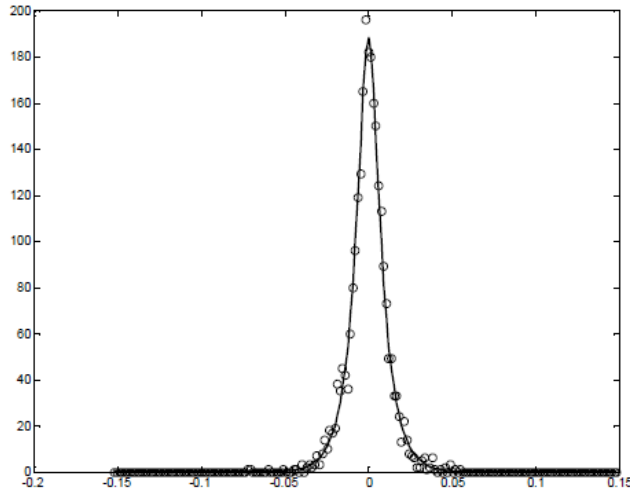
CGMY sürecinin momentleri, karakteristik fonksiyonun türevlenmesiyle elde edilir ve VG süreci ile aynıdır. Bu sürecin beklenen değeri $E[X(t)] = 0$ olur ve ikinci, üçüncü ve dördüncü momentler sırasıyla aşağıdaki bağlantılarla hesaplanır:

$$E[(X(t) - E[X(t)])^2] = t\Gamma(2 - Y)CM^{Y-2}$$

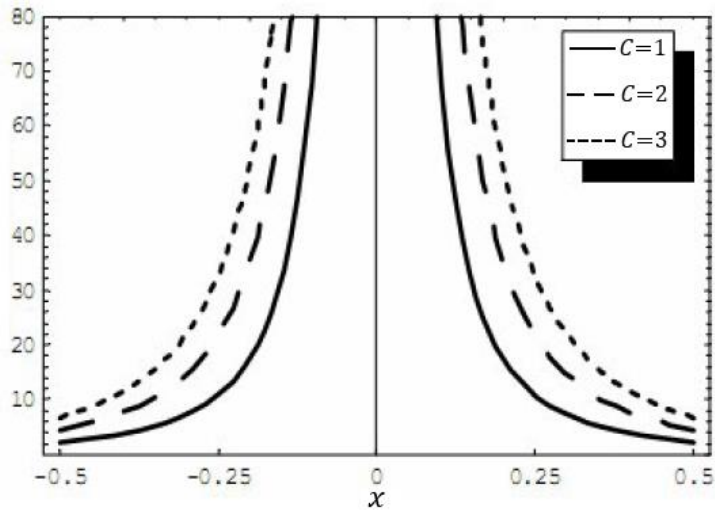
$$E[(X(t) - E[X(t)])^3] = t\Gamma(2 - Y)CM^{Y-3}$$

$$E[(X(t) - E[X(t)])^4] = t\Gamma(2 - Y)CM^{Y-4}$$

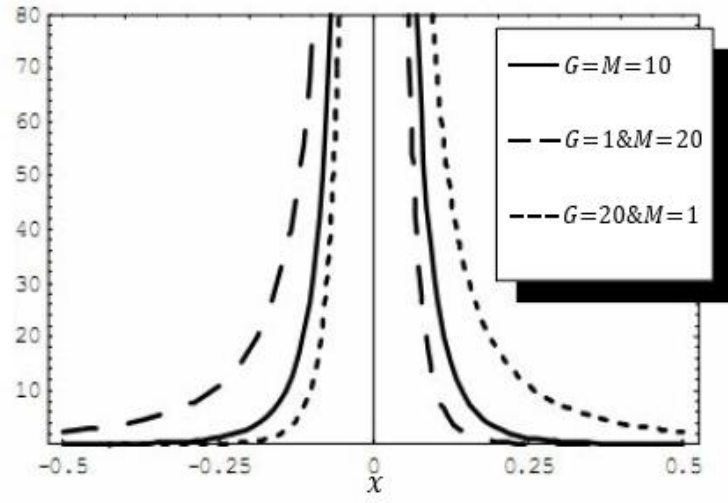
Şekil 3.12, CGMY sürecinin SPX indeks verilerine uydurulmasını göstermektedir.



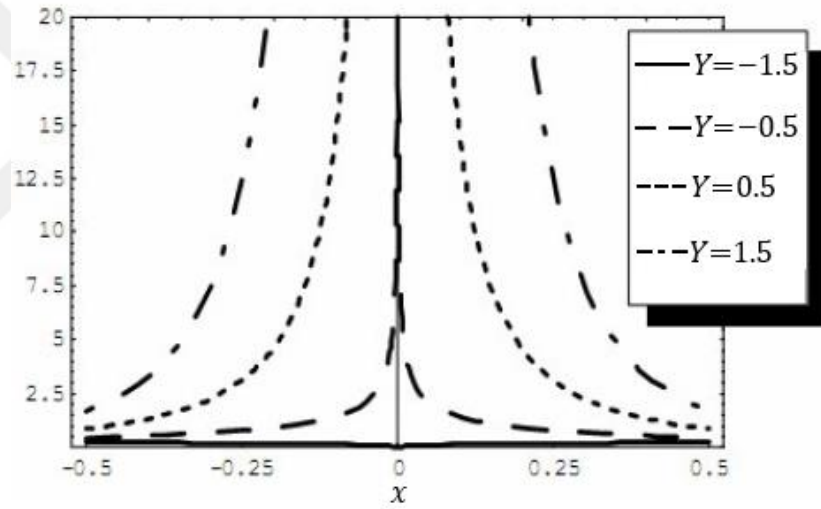
Şekil 3. 14. CGMY modeline uydurulmuş SPX endeks verileri



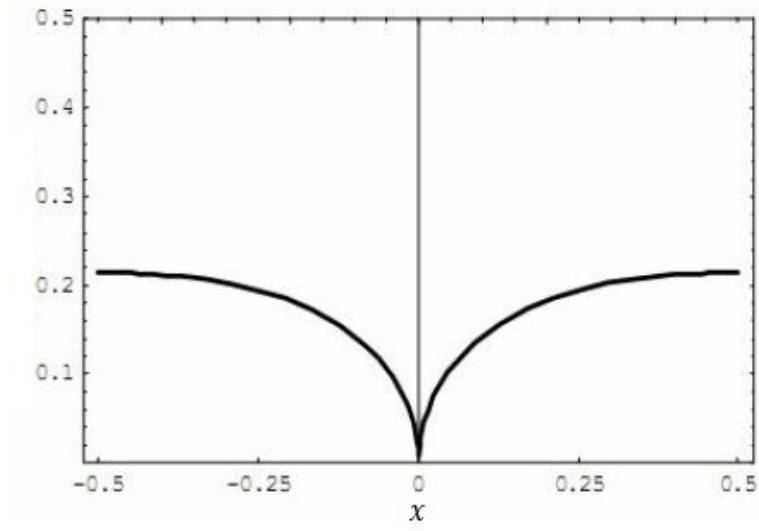
Şekil 3. 15. C 'nin çeşitli değerlerle CGMY sürecinin Lévy yoğunluğu. Sabit parametreler: $G = 1, M = 1$ ve $Y = 0.9$.



Şekil 3. 16. G ve M 'nin farklı değerlerle CGMY sürecinin Lévy yoğunluğu. Sabit parametreler: $C = 1$ ve $Y = 0.9$.



Şekil 3. 17. Y 'nin çeşitli değerlerle CGMY sürecinin Lévy yoğunluğu. Sabit parametreler: $G = 1$, $M = 1$ ve $C = 0.5$.



Şekil 3. 18. $Y = -1.5$ 'in farklı değerlerle CGMY sürecinin Lévy ölçüsü. $G = 1$, $M = 1$ ve $Y = 0.5$ parametreleri sabittir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, Lévy sıçrama süreçlerinin ve yarım martingale dayalı stokastik analizlerin finansal modelleme üzerindeki etkilerini kapsamlı bir şekilde inceleyeceğiz. Lévy süreçlerinin inşası ve modifikasyonu üzerine yapılan çalışmalar, finansal piyasalarda varlık fiyatlarının modellenmesinde önemli bir rol oynamaktadır. Öncelikle, Lévy süreçlerinin nasıl oluşturulduğu ve mevcut yöntemlerle nasıl geliştirildiği üzerinde durulacak. Lévy süreçleriyle model oluşturma süreci, bu süreçlerin yapı taşları ve parametrelerinin nasıl seçildiği üzerine detaylı bir analiz sunacaktır. Bilinen Lévy türlerinden yeni bir süreç oluşturma aşamasında kullanılan doğrusal dönüşümler, bağlayıcılar ve Lévy ölçüsünün tilting ve tempering özellikleri, yeni süreçlerin teorik ve uygulamalı özelliklerini belirlemede kritik rol oynamaktadır. Difüzyon sıçrama tipi modellerin yapımı ve genelleştirilmiş hiperbolik modellerin oluşturulması gibi konular da ele alınacak. Bu konular, finansal modelleme için daha esnek ve doğru araçlar geliştirilmesini sağlamakta, piyasa davranışlarını daha iyi yansıtacak modellerin ortaya çıkmasına olanak tanımaktadır. Brownian hareketi ile bağlayıcı yöntemlerin uygulanması ve değiştirilmiş Brownian hareketine dayalı modellerin incelenmesi, klasik modellerin ötesine geçerek daha karmaşık finansal dinamikleri yakalamayı amaçlamaktadır. Bu modeller, Lévy süreçlerinin özelliklerini daha iyi bir şekilde temsil edebilmekte ve farklı piyasa koşullarına adapte olabilmektedir. Son olarak, kararlı ve iyi huylu süreçlerin oluşturulması üzerine yapılan çalışmalar, bu süreçlerin finansal uygulamalarda daha güvenilir ve geçerli sonuçlar üretmesini hedeflemektedir.

Yarım martingale dayalı stokastik analizler ise bu modellerin uygulama aşamasında nasıl kullanılabileceğini göstermektedir. Riemann-Stieltjes integrali, stokastik integral kavramları ve bu integrallerin alım-satım stratejileri üzerindeki etkileri detaylı bir şekilde ele alınacaktır. Ayrıca, basit tahmin edilebilir integrallerden yarım martingale süreçlerine, Càdlàg süreçleri için integrandlardan Poisson rastgele değişkeni üzerinden rastgele integrallere kadar geniş bir yelpazede konular incelenecek ve her birinin finansal analizlerdeki rolü değerlendirilecektir.

Bu bölümde elde edilen bulgular, teorik modellerin uygulamalı finansal problemlere uyarlanabilirliğini ve etkinliğini gösterecek, ayrıca bu bulguların gelecekteki araştırmalar ve pratik uygulamalar için nasıl bir temel oluşturabileceği tartışılacaktır.

4.1. Lévy Süreçleriyle Modelini Oluşturma

Sıçramalı finansal modeller, iki ana kategoriye ayrılır. İlk kategori olan “Sıçrama-difüzyon” modellerinde, fiyatların gelişimi rastgele aralıklarla sıçramaların bulunduğu bir difüzyon süreci ile ifade edilir. Bu sıçramalar genellikle nadir olaylar olarak kabul edilir. Fiyatların bu gelişimini açıklamak için, sıçrama-difüzyon modelleri, sıçrama bileşeni olarak adlandırılan bir compound Poisson süreciyle (her zaman diliminde sınırlı sayıda sıçramaya sahip) ve sıfır olmayan bir Gauss bileşenine sahip bir Lévy süreciyle modelleyebilir. Merton sıçrama-difüzyon modeli (Gauss sıçramalarına sahip) ve Kou modeli (çift üstel sıçramalara sahip), sıçrama-difüzyon modellerine örnek teşkil eder.

İkinci kategori, her sonlu aralıkta sonsuz sayıda sıçramaya sahip modelleri içerir ve bu modellere “sonsuz aktivite” modelleri denir. Bu tür modeller, sıçramaların fiyat davranışını çok yönlü bir şekilde açıkladığı için, Brownian bileşenine gerek duyulmaz. Bu modeller, fiyat sürecini çeşitli zaman ölçeklerinde daha doğru ve gerçekçi bir şekilde tanımlamak için kullanılır. Bu kategorideki birçok model, Brownian hareketinin bir uyarlaması ile elde edilebilir. Difüzyon bileşeni olmadan sonlu aktiviteye sahip pure sıçrama süreçlerini düşünmek de mümkündür, ancak bu modeller, fiyat hareketini gerçekçi bir şekilde tanımlama konusunda yetersiz kalabilir.

Çizelge 4. 1. İki sıçrama-difüzyon ve sonsuz aktivite modellerin karşılaştırılması

<i>Difüzyon-sıçrama modelleri</i>	<i>Sonsuz aktivite modelleri</i>
Bir Brownian bileşeni içerir.	Zorunlu olarak bir Brownian bileşeni içermez.
Sıçramalar nadir olaylardır.	Süreç sıçramalarla hareket eder
Sıçramaların dağılımı bilinmemektedir.	Sıçrama değeri dağılımı mevcut değildir ve sıçrama sayısı sonsuzdur.
Yoğunluğun kapalı şekli bilinmemektedir.	Bazı kapalı yoğunluk durumları mevcuttur.

Çizelge 4.2’de görülebilen parametrik Lévy sürecini tanımlamak için üç uygun yöntem bulunmaktadır.

Birinci yöntem, sonsuz bölünebilir bir yoğunluğun, belirli bir zaman ölçeği (Δ) için büyüme yoğunluğu olarak doğrudan tanıtılmasını içerir. Genelleştirilmiş hiperbolik süreç, bu yöntemle elde edilir.

İkinci yöntem, bağımsız bir artımlı Lévy süreci ile bir Brownian hareketini bağımlı hale getirmeyi içerir. Bu yöntem, süreçlerin karakteristik fonksiyonuna erişilebilmesine rağmen, Lévy ölçüsü için her zaman net bir formüle sahip olunmamasını içerir.

Üçüncü yöntem, sıçrama yapısını doğrudan modelleyen ve Lévy boyutunu belirleyen yöntemler içerir. Bu yöntemle sürecin dağılımı, Lévy-Khinchin formülü (karakteristik fonksiyon) kullanılarak verilir. Bu yöntem, doğrudan Lévy boyutunu belirlemek açısından kullanışlıdır [14].

4.2. Bilinen Türlerden Yeni Bir Lévy Süreci Oluşturma

Yeni Lévy süreçleri oluşturmak için, değişmez Lévy süreçleri kategorisine ait üç temel dönüşüm türünü kullanmaktayız: Doğrusal dönüşümler, bağımlı dönüşümler (başka bir artımlı Lévy süreci ile zaman değişimini kullanarak bir Lévy süreci oluşturma) ve Lévy ölçüsünün üstel hale getirilmesi (tempering).

Çizelge 4. 2. Lévy süreçlerini yapmanın üç yöntemi

<i>Brownian'ı bağlayıcı yapmak</i>	<i>Lévy'nin boyutunu belirleme</i>	<i>$\Delta = t$ için olasılık yoğunluğunu belirleme</i>
“Ticaret sırasında Brownian hareketi” olarak yorumlanır.	özelliklerin net bir görüntüsü örnek yörüngeyi verir.	Sıçramaların yapısı bilinmiyor. Örneklem aralığı Δ olan veriler için tahmin yapmak kolaydır.
Maksimum Likelihood tahminlerini elde etmek zordur.	Tahmin, transfer yoğunluğuna yaklaşılarak elde edilir.	Verilen modellerin sonsuz bölünebilirliğini kanıtlamak zordur.
Çok boyutlu Brownian hareketi ile çok değişkenli genelleme mümkündür.		

4.2.1. Doğrusal dönüşümler

Teorem 4.1. $(X_t)_{t \geq 0}$, $\mathbb{R}^d$ üzerinde bir Lévy süreci, üçlü karakteristik (A, v, γ) ile temsil edilsin, ve $M, n \times d$ boyutlu bir matris olsun. Bu durumda, $Y_t = MX_t$, $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir Lévy süreci oluşturur ve üçlü karakteristik (A_Y, v_Y, γ_Y) şu şekildedir:

$$A_Y = MAM' \quad (4.1)$$

$$v_Y(B) = v(\{x: Mx \in B\}), \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \quad (4.2)$$

$$\gamma_Y = M\gamma + \int_{\mathbb{R}^n} y \left(1_{\{|y| \leq 1\}}(y) - 1_{S_1}(y) \right) v_Y(dy). \quad (4.3)$$

Burada $x \in \mathbb{R}^d$ ve $S_1 = \{Mx: |x| \leq 1\}$.

İspat: [16, Bölüm 4]'e bakınız.

Önerme 4.1. Lévy süreçlerinin bağımsızlığı (X_t, Y_t) , Gauss bileşeni içermeyen ve v Lévy ölçüsüne sahip olan bir Lévy sürecinin bileşenleri yalnızca $v(A)$ destekleyicisinin bir alt kümesi olduğunda bağımsızdır. Başka bir deyişle, X_t ve Y_t 'nin bileşenleri, yalnızca birlikte sıçrama olmamaları koşuluyla bağımsızdır. Bu durumda,

$$v(A) = v_X(A_X) + v_Y(A_Y)$$

burada

$$A_X = \{x: (x, 0) \in A\}$$

ve

$$A_Y = \{y: (0, y) \in A\}$$

şeklindedir. Ayrıca, v_X ve v_Y , X_t ve Y_t 'nin Lévy ölçüleridir.

İspat: [16, Bölüm 5]'e bakınız.

Örnek 4.1. Bağımsız Lévy süreçlerinin toplamı

$(X_t)_{t \geq 0}$ ve $(Y_t)_{t \geq 0}$, iki bağımsız Lévy süreci olup, her biri üçlü karakteristik (A_1, v_1, γ_1) ve (A_2, v_2, γ_2) ile tanımlanmıştır.

Teorem 3.1'e göre, $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ için, önerme 4.1 kullanılarak $X_t + Y_t$, üçlü karakteristik (A, v, γ) ile bir Lévy süreci olur ve şu şekilde ifade edilir:

$$A = A_1 + A_2$$

$$v(B) = v_1(B) + v_2(B), \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

$$\gamma_Y = \gamma_1 + \gamma_2 - \int_{[-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}]} y v(dy)$$

Sonlu değişimli Lévy süreci için Teorem 4.1 aşağıdaki şekilde basitleştirilebilir.

Eğer $(X_t)_{t \geq 0}$, $\mathbb{R}^d$ üzerinde sonlu değişime sahip bir Lévy süreci ise ve karakteristik fonksiyonu

$$E[e^{iz.X_t}] = \exp \left\{ ib.z + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{iz.x} - 1) v d(x) \right\} \quad (4.4)$$

ise ve $M, n \times d$ boyutlu bir matrisse, o zaman $Y_t = MX_t$, $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir Lévy süreci oluşturur ve aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$v_Y(B) = v(\{x: Mx \in B\}),$$

Lévy ölçüsü ve $b_Y = Mb$.

4.2.2. Bağlayıcı yapmak

$(S_t)_{t \geq 0}$ 'ın bağımlayıcı olduğunu varsayalım, yani 2.14 önermelerinin eşdeğer koşullarından birini sağlayan bir Lévy süreci olsun ve bu sürecin yörüngeleri neredeyse kesinlikle artış gösterebilir. S_t her t için pozitif bir rastgele değişken olduğu için, Fourier dönüşümü yerine Laplace dönüşümünü kullanabiliriz.

S Lévy üçlüsünün $(0, \rho, b)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, moment üreten fonksiyonu

$$E[e^{uS_t}] = e^{tl(u)}, \quad \forall u \leq 0 \quad (4.5)$$

şeklinde olur. Burada,

$$l(u).l(u) = bu + \int_0^\infty (e^{ux} - 1) \rho d(x)$$

ifadesine S 'nin Laplace üsteli denir. S rastgele artışı olduğu için, diğer Lévy süreçlerinde “Rastgele değiştirilen zaman” olarak kullanılabilir. Teorem 4.2, bu ifadeyi açıklamaktadır.

Teorem 4.2. Bir olasılık uzayı (Ω, F, P) üzerinde bağımlayıcı olan bir Lévy süreci $(X_t)_{t \geq 0}$, $\mathbb{R}^d$ üzerinde $\Psi(u)$ üstel ve (A, v, γ) üçlü karakteristiğe sahip bir süreçtir. Aynı zamanda $(S_t)_{t \geq 0}$, $l(u)$ Laplace üsteli ve $(0, \rho, b)$ üçlü bağımlayıcı bir süreçtir. Bu koşullar altında, $(Y_t)_{t \geq 0}$, her $\omega \in \Omega$ için $Y(t, \omega) = X(S(t, \omega), \omega)$ ile tanımlanan ve karakteristik fonksiyonu

$$E[e^{iz.Y_t}] = e^{tl(\Psi(u))} \quad (4.6)$$

olan bir Lévy süreci olur. Yani, S 'nin Laplace üsteli ile X 'in Laplace üsteli birleştirilerek Y 'nin karakteristik üsteli elde edilir. Y süreci ile ilgili (A^Y, v^Y, γ^Y) üçlüsü

$$A^Y = bA$$

$$v^Y(B) = v(\{x: Mx \in B\}), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \quad (4.7)$$

$$\gamma^Y = b\gamma + \int_0^\infty \rho(ds) \int_{|x| \leq 1} x p_s^X(dx) \quad (4.8)$$

olarak belirlenir. Yukarıdaki bağlantılarda X_t olasılık dağılımı p_t^X ve $(Y_t)_{t \geq 0}$, $(X_t)_{t \geq 0}$ sürecinin bağımsız olarak adlandırılır.

İspat: İlk olarak Y 'nin bir Lévy süreci olduğunu gösterelim. F_t^S , $F^S \equiv F_\infty^S$ ile $(S_t)_{t \geq 0}$ tarafından üretilen bir filtrasyon olsun.

$t_0 < t_1 < \dots < t_n$ zaman dizisi için, bağımsızlık ve durağanlık özelliklerini kullanarak X artışları ile Lévy-Khinchin formülünü elde ederiz. X için ve artışların bağımsızlık özelliğini kullanarak şu ifadeyi elde ederiz:

$$\begin{aligned} E \left[\prod_{i=1}^n e^{iu_i(X(S_{t_i}) - X(S_{t_{i-1}}))} \right] &= E \left\{ E \left[\prod_{i=1}^n e^{iu_i(X(S_{t_i}) - X(S_{t_{i-1}}))} \middle| F^S \right] \right\} \\ &= E \left\{ \prod_{i=1}^n E \left[e^{iu_i(X(S_{t_i}) - X(S_{t_{i-1}}))} \middle| F^S \right] \right\} = E \left\{ \prod_{i=1}^n e^{(S_{t_i} - S_{t_{i-1}})\Psi(u_i)} \right\} \\ &= \prod_{i=1}^n E \left\{ e^{(S_{t_i} - S_{t_{i-1}})\Psi(u_i)} \right\} = \prod_{i=1}^n E \left\{ e^{u_i(X(S_{t_i}) - X(S_{t_{i-1}}))} \right\} \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu nedenle, Y 'nin bağımsız artışlarına sahiptir. Artışların durağanlığı da benzer şekilde kanıtlanmıştır. Şimdi Y 'nin olasılıkta sürekli olduğunu gösterelim. Her Lévy süreci, artışların durağanlık nedeniyle düzgün olarak sürekli. Ek olarak, her $\varepsilon > 0$ ve $\delta > 0$ için

$$\leq P\{|X(S_s) - X(S_t)| > \varepsilon | |X(S_s) - X(S_t)| < \delta\} + P\{|X(S_s) - X(S_t)| \geq \delta\}$$

elde edilir. δ 'yı değiştirerek, soldaki ifade, tüm s ve t değerleri için aynı anda keyfi olarak en aza indirilebilir, çünkü X , olasılıkta düzgün olarak sürekli. İkinci terimin limiti, $s \rightarrow t$ olduğunda her zaman sıfıra eşittir, çünkü S olasılıkta sürekli. Bu nedenle, $s \rightarrow t$ olduğunda

$$P\{|X(S_s) - X(S_t)| \geq \varepsilon\} \rightarrow 0$$

Formül (4.6), F^S üzerinde koşullandırılarak elde edilir.

$$E[e^{iuX(S_t)}] = E\{E[e^{iuX(S_t)}] | F^S\} = E\{e^{S_t\Psi(u)}\} = e^{t\Psi(u)}$$

Y 'nin karakteristik üçlüsü hakkında daha fazla ayrıntı için [50, Teorem 7.30]'a bakınız. S üçlü $(0, \rho, 0)$ karakteristik içeren bir compound Poisson bağlayıcıyı varsayalım. Bu

durumda Y , sıçramaları S ile aynı anda meydana gelen, benzer yoğunluğa sahip bir compound Poisson süreci olacaktır.

Bu compound Poisson süreci sadece suçlamalarla ilerler, bu yüzden sürüklenme ve Gauss bileşeni sıfırdır. Sıçrama ölçüsünü hesaplamak için, S 'nin t 'de bir sıçraması olduğunu varsayalım. $S = S_t - S_{t-}$ 'ye bağlı olarak Y 'deki sıçrama değerleri, p_s^X olasılık dağılımına sahiptir. Oranı hesaplamak için, S 'nin sıçrama ölçüsüne göre integralini alarak (4.7) bağlantısını elde ederiz. Son olarak, Y 'nin üçlü karakteristiğini $1_{|x| \leq 1}$ kesme fonksiyonuna göre yazarak (4.8) formülünü elde ederiz.

Örnek 4.2. Bir α değeri aralığında $(0,1)$ olan α -kararlı bir süreci içerir. Bu bağlayıcının negatif olmayan bir sürüklenme bileşeni vardır ve büyüklüğü pozitif yarıçapta merkezlenmiştir (bu tür süreçler bağışlayıcıdır çünkü Önerme 2.14'ün son koşulunu sağlar). $(S_t)_{t \geq 0}$, sıfır sürüklemeli ve kararlı bir bağlayıcıya sahiptir. $c_1 > 0$, sabit değeri için Laplace üstel ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$l(u) = c_1 \int_0^\infty \frac{e^{ux} - 1}{x^{1+\alpha}} dx = -\frac{c_1 \Gamma(1-\alpha)}{\alpha} (-u)^\alpha \quad (4.9)$$

$(X_t)_{t \geq 0}$, $c_2 > 0$, sabit bir değere sahip olup $\mathbb{R}$ üzerinde $\Psi(u) = -c_2 |u|^\beta$ karakteristik üstelle β -kararlı bir sürece sahiptir. Bu durumda, $(Y_t)_{t \geq 0}$ süreci, S ile X 'in bağlayıcısıdır. Bu süreç, $c = c_1 c_2 \Gamma(1-\alpha)/\alpha$ değeri için $l(\Psi(u)) = -c |u|^{\beta\alpha}$ karakteristik üstelle sahiptir, yani, Y simetrik kararlı ve $\beta\alpha$ kararlı bir süreçtir. Özellikle X , Brownian hareketi olduğunda, bağlayıcı 2α -kararlıdır.

4.2.3. Lévy ölçüsünün Tilting ve iyi huylu (Tempering) özellikleri

Lévy ölçüsünün, aşağıdaki integral koşullarını karşıladığını biliyoruz:

$$\int_{|x| \leq 1} |x|^2 v(dx) < \infty, \quad \int_{|x| \geq 1} v(dx) < \infty$$

Lévy ölçüsündeki herhangi bir dönüşüm, yukarıdaki integral koşulları için geçerliyse, yeni bir Lévy sürecine yol açacaktır. Bu dönüşümlerden biri $v(\cdot)$ 'ni bir üstel fonksiyonla çarparak elde edilir. $\theta \in \mathbb{R}^d$ olduğunda ve $\int_{|x| \geq 1} e^{\theta x} v(dx) < \infty$ olduğunda, o zaman

$$\tilde{v}(dx) := e^{\theta \cdot x} v(dx) \quad (4.10)$$

şeklinde tanımlanan ölçü bir Lévy ölçüsüdür. $\theta \cdot x$, iki θ ve x vektörlerinin iç çarpımıdır. Bu nedenle, her $(X_t)_{t \geq 0}$, (A, ν, γ) üçlü karakteristiğe sahip olan bir Lévy süreci, $(A, \tilde{\nu}, \gamma)$ üçlü karakteristiğe sahip bir Lévy süreci olur. Buna Esscher dönüşümü denir ve (4.10)'daki dönüşüm, Lévy ölçüsünü üstel tiling hale getirir.

$d = 1$ için, bu dönüşümün asimetrik bir versiyonu düşünülebilir. Eğer ν , $\mathbb{R}$ üzerinde bir Lévy ölçüsüyse, o zaman

$$\tilde{\nu}(dx) = \nu(dx)(1_{x>0}e^{-\lambda_+x} + 1_{x<0}e^{-\lambda_-|x|})$$

şeklinde olur. Burada, λ_+ ve λ_- -pozitif parametrelerdir. $\tilde{\nu}(dx)$, büyük sıçramaları ıslah işlemi yapılmış olan bir Lévy ölçüsüdür, yani, Lévy ölçüsündeki kuyruklar üstel olarak azalır [16].

4.3. Difüzyon Sıçrama Tipi Modellerin Yapımı

Önerme 4.1 ve örnek 4.1'e göre, bağımsız Lévy süreçlerinin toplamının da bir Lévy süreci oluştuğunu biliyoruz. Sıçrama-difüzyon süreçleri (Merton ve Kou), sürekli (sürüklenen Brownian hareketi) ve sıçrama (compound Poisson süreci) olmak üzere iki bileşenin toplamından kaynaklanır. Bu iki bileşen birbirinden bağımsızdır ve her biri bir Lévy sürecidir. Bu nedenle, örnek 4.1'in sonucuna göre, sıçrama-difüzyon süreçleri iki bağımsız Lévy sürecinin toplamından oluşur.

4.4. Genelleştirilmiş Bir Hiperbolik Model Oluşturma

Bu modellerin yapısı doğrudan olasılık yoğunluğundan elde edilir. Sabit zamanda ters Gauss bağlayıcı olasılık yoğunluğu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$p(x) = c(\chi, \zeta)x^{-3/2}e^{-\frac{1}{2}(\chi x - \zeta/x)}1_{x>0} \quad (4.11)$$

ve genelleştirilmiş ters Gauss olasılık dağılımı şu şekildedir:

$$p(x) = c(\lambda, \chi, \zeta)x^{\lambda-1}e^{-\frac{1}{2}(\chi x - \zeta/x)}1_{x>0}. \quad (4.12)$$

Bu dağılımın sonsuz bölünebilir olduğu ispatlanmıştır [26] ve bir bağlayıcı Lévy süreci üretebilir. Genelleştirilmiş ters Gauss dağılımları kategorisinin konvolüsyona göre kapalı değildir. S , bir GIG rastgele değişken ve S 'den bağımsız W standart normal rastgele değişken olsun. μ sabit olmak üzere, $\sqrt{S}W + \mu S$ dağılımı, birleştirici S dağılımı ile “normal ortalama-varyans compound” dağılımı olarak adlandırılır. S , bir GIG rastgele değişkeni ise, $\sqrt{S}W + \mu S$ dağılımı sonsuz bölünebilirdir ve genelleştirilmiş hiperbolik dağılım olarak

adlandırılır. Bölüm 2’de bahsedildiği gibi, genelleştirilmiş hiperbolikler finansal modelleme için birçok yazar tarafından kullanılmıştır. Tek boyutlu bir genelleştirilmiş hiperbol, aşağıdaki yoğunlukla tanımlanan beş parametrelili bir aile içinde yer alır.

$$f(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) = C(\delta^2 + (x - \mu)^2)^{\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{4}} K_{\lambda - \frac{1}{2}} \left(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2} \right) e^{\beta(x - \mu)}. \quad (4.13)$$

Burada,

$$C = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^{\frac{\lambda}{2}}}{\sqrt{2\pi} \alpha^{\lambda - 1/2} K_{\lambda}(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}$$

ve K ikinci tipin değiştirilmiş Bessel fonksiyonudur. Yukarıdaki dağılımın karakteristik fonksiyonu şu şekildedir:

$$\Phi(u) = e^{i\mu u} \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 - (\beta + iu)^2} \right)^{\lambda/2} \frac{K_{\lambda}(\delta \sqrt{\lambda^2 - (\beta + iu)^2})}{K_{\lambda}(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}. \quad (4.14)$$

Genelleştirilmiş hiperbolik dağılım konvolüsyon altında kapalı değildir. İki GH rastgele değişkenin toplamı bir rastgele değişken değildir. Öte yandan, GH sonsuz bölünebilir olduğundan, belirli bir t zamandaki dağılımı $\Phi(u)^t$ karakteristik bir fonksiyon olan genelleştirilmiş bir hiperbolik Lévy süreci oluşturmak mümkündür. Bu sürecin Lévy ölçüsünü hesaplamak ve bununla çalışmak zordur, ancak bazı özelliklerine, aşağıdaki lemma uygulanarak doğrudan karakteristik fonksiyondan erişilebilir.

Lemma 4.1. (X_t) , $\Psi(u) = \frac{1}{t} \log E[e^{iuX_t}]$ karakteristik üstel ve

$$\tilde{\Psi}(u) = \frac{\Psi(u) + \Psi(-u)}{2},$$

simetrik karakteristik üstel ile bir Lévy süreci olsun.

1. X bir compound Poisson süreci ise, o zaman $\tilde{\Psi}(u)$ sınırlıdır.
2. X bir sonlu değişim süreci ise, o zaman $u \rightarrow \infty$ olduğu zaman $\frac{\tilde{\Psi}(u)}{u} \rightarrow 0$ olur.
3. X ’in Gauss kısmı yoksa, o zaman $u \rightarrow \infty$ olduğu zaman $\frac{\tilde{\Psi}(u)}{u} \rightarrow 0$ olur.

İspat: [16, 4. bölüm]’e bakınız.

Genelleştirilmiş hiperbolik dağılımın ana avantajı, güçlü yapısı ve çok çeşitli formlarıdır. Bilinen çok sayıda olasılık dağılımı, genelleştirilmiş hiperbolik ailenin alt kategorileridir. Örneğin,

- Genelleştirilmiş hiperbolik dağılımın limit durumunun normal dağılımı, $\delta \rightarrow \infty$ olduğu zaman $\delta/\alpha \rightarrow \sigma^2$ olur.
- t -student dağılımları $\lambda < 0$ ve $\alpha = \beta = \mu = 0$ ile elde edilir.
- $\lambda = 1$ durumu

$$P(x; \alpha, \beta, \delta, \mu) = a(\alpha, \beta, \delta) \exp \left(-\alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2} + \beta(x - \mu) \right)$$

yoğunluğa sahip hiperbolik dağılıma karşılık gelir.

- $\lambda = -1/2$ durumu bir sonraki bölümde incelenecek olan normal ters Gauss dağılımına karşılık gelir.
- $\delta = 0$ ve $\mu = 0$ gama varyans dağılımına karşılık gelir.

4.5. Brownian'ı Bağlayıcı Ederek Lévy Süreçlerinin İnşası

$(S_t)_{t \geq 0}$, $l(u)$ Laplace üsteli ile bir bağlayıcı yapar ve $(W_t)_{t \geq 0}$, S' 'ten bağımsız bir Brownian hareket olsun. Brownian hareketini μ sürüklemeyle S sürecini kullanarak bağlayıcı yaparak yeni bir süreç, $X_t = \sigma W(S_t) + \mu S_t$, elde edilir. Bu süreç, yeni bir zaman ölçeğinde, yani rastgele bir S_t zaman ölçeğinde elde edilirse, bir Brownian hareketidir. (4.6) bağlantısı için X için karakteristik üsteli

$$\Psi(u) = l \left(-\frac{u^2 \sigma^2}{2} + i\mu u \right)$$

olarak elde edilir ve X_t 'nin logaritmik momentlerini S_t 'ler üzerinden hesaplayabiliriz. $\mu = 0$ simetrik durumu olarak dikkate alırsak, o zaman X_t dağılımı dağılım ortalaması etrafında simetriktir ve ortalama ile çarpıklığı sıfırdır, bu nedenle varyansı ve kürtosis hesaplanabilir ve

$$\text{Var} X_t = \sigma^2 E[S_t]$$

$$k(X_t) = \frac{3\text{Var} S_t}{E[S_t]^2}$$

olur. Bu nedenle, süreç bağlayıcısı deterministik bir süreç değilse, X_t uzamış olacaktır. Modellerin daha kolay anlaşılması için Brownian bağlayıcı ile temsil edilmesi arzu edilen bir özellik olmasına rağmen, Lévy ölçüsünde kısıtlamalar da oluşturur.

Teorem 4.3. ν , $\mathbb{R}$ üzerinde bir Lévy ölçüsü ve $\mu \in \mathbb{R}$ olsun. $(Z_t)_{t \geq 0}$ bir bağlayıcı olsun, $(W_t)_{t \geq 0}$ ise Z 'den bağımsız bir Brownian hareketi olsun. Bir $(X_t)_{t \geq 0}$ Lévy süreci, ν Lévy ölçüsü ile $X_t = W(Z_t) + \mu Z_t$ olmak üzere, ancak ve ancak aşağıdaki koşullar sağlandığında mevcut olur:

1. v , kesinlikle sürekli bir yoğunluk fonksiyonuna sahiptir.
2. Her x için $v(x)e^{-\mu x} = v(-x)e^{\mu x}$ olur.
3. $(0, \infty)$ üzerinde $v(\sqrt{u})e^{-\mu\sqrt{u}}$, monoton bir fonksiyondur.

İspat: [16, 4. Bölüm]'e bakınız.

Bu teorem, bir sürecin sıçramalı yapısının zamanla değişen sürüksüz Brownian hareketi ile temsil edilebileceğini belirtir. Üstel tilting büyük sıçramaları etkiler, bu nedenle bu tür süreçlerin küçük sıçramaları her zaman simetrik kalır. v , $\mathbb{R}^d$ üzerinde bir Lévy ölçüsü olsun. v simetrikse ve $v(\sqrt{u})$, $(0, \infty)$ üzerinde tamamen monoton bir fonksiyon olması koşuluyla, ancak ve ancak, bir bağlayıcı olmayan (sürüklenmesiz) bir Brownian hareketinin bir Lévy ölçüsü olduğunu varsayalım. Ayrıca, sürüksüz ve ρ bir Lévy ölçüsü olduğunu dikkate alalım. Formül (4.7), bu zamanla değişen bağlayıcı ile μ sürüksüz Brownian hareketinin Lévy yoğunluğunun $v(x)$ için aşağıdaki gibi olacağını belirtir:

$$v(x) = \int_0^\infty e^{-\frac{(x-\mu t)^2}{2t}} \frac{\rho(dt)}{\sqrt{2\pi t}}. \quad (4.15)$$

4.5.1. Süreçleri bağlayıcı yapmak

İyi huylu ve kararlı bağlayıcının iyi huylu versiyonunu ele alalım, bu üç parametrelili sürecin Lévy ölçüsü:

$$\rho(x) = \frac{ce^{-\lambda x}}{x^{\alpha+1}} 1_{x>0} \quad (4.16)$$

Burada, c ve λ pozitif ve $1 > \alpha \geq 0$. İyi huylu kararlı bağlayıcı, formül (4.25)'e dayalı olarak elde edilen iyi huylu kararlı bir süreçtir.

c parametresi, tüm sıçrama değerlerinin yoğunluğunu aynı anda değiştirir, yani sürecin zaman ölçeğini değiştirir, λ büyük sıçramaların sönüm (decay) oranını ve α , süreç yörüngelerindeki küçük sıçramaların göreceli önemini belirler. Genel durumdaki ($\alpha \neq 0$) iyi huylu kararlı bağlayıcının üstel Laplace ifadesi şöyledir:

$$l(u) = c \Gamma(-\alpha) \log((\lambda - u)^\alpha - (\lambda)^\alpha) \quad (4.17)$$

ve $\alpha = 0$ durumunda:

$$l(u) = c \log(1 - u/\lambda)$$

İyi huylu ve kararlı bağlayıcının olasılık yoğunluğu $\alpha = 1/2$ (Ters Gauss bağlayıcısı) ve $\alpha = 0$ (Gama bağlayıcısı) bilinmektedir. Bu iki durum Tablo 4.3'te karşılaştırılmıştır.

İyi huylu kararlı bağlayıcının aşağıda açıklanan ölçek özelliği vardır. $(S_t(\alpha, \lambda, c))_{t \geq 0}$, α, λ ve c parametrelerine sahip bir kararlı ve iyi huylu bağlayıcı olsun. O zaman her $r > 0$ için:

$$rS_t(\alpha, \lambda, c), S_{r\alpha t}(\alpha, \lambda/r, c)$$

ile aynı dağılıma sahiptir.

Bu ölçekleme özelliği ve Brownian hareketinin özbenzerliği nedeniyle, bağlayıcı modellerde yalnızca $E[S_t] = t$ ile uyumlu kararlılığı dikkate almak daha iyidir. Bu durumda, iki parametrelili bir aile oluşturur. Momentler ve logaritmik momentler dahil olmak üzere, karakteristik fonksiyonla ilgili tüm hesaplamalar için, parametrik form

$$\rho(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{1-\alpha}{\kappa} \right)^{1-\alpha} \frac{e^{-(1-\alpha)x/\kappa}}{x^{\alpha+1}} \quad (4.18)$$

ifadesini kullanmak daha iyidir.

α kararlılığı temsil eder. k yeni bir parametre olması durumunda bağlayıcının zamandaki varyansı 1'dir. Bundan dolayı, bağlayıcının beklenen değeri 1 zamanında 1'e eşittir ve $k = 0$ deterministik bir fonksiyona eşittir. Yukarıdaki ilişkinin gama varyans süreç modu daha basit bir şekilde

$$\rho(x) = \frac{1}{\kappa} \frac{e^{-x/\kappa}}{x} \quad (4.19)$$

dönüşür ve ters Gauss süreci durumunda aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\kappa}} \frac{e^{-x/2\kappa}}{x^{3/2}}. \quad (4.20)$$

Çizelge 4. 3. Gama bağımlayıcı ve ters Gauss bağlayıcı

Bağlayıcı	Gama süreci	Ters Gauss süreci
Lévy yoğunluğu	$\rho(x) = \frac{ce^{-\lambda x/\kappa}}{x} 1_{x>0}$	$\rho(x) = \frac{ce^{-\lambda x/\kappa}}{x^{3/2}} 1_{x>0}$
Laplace dönüşümü	$E[e^{uS_t}] = e^{-2ct\sqrt{\pi}(\sqrt{\lambda-u}-\sqrt{\lambda})}$	$E[e^{uS_t}] = (1 - u/\lambda)^{-ct}$
X_t olasılık yoğunluğu	$\rho_t(x) = \frac{\lambda^{ct}}{\Gamma(ct)} x^{ct-1} e^{-\lambda x}$ ($x > 0$ için)	$\rho_t(x) = \frac{ct}{x^{3/2}} x^{2ct\sqrt{\pi\lambda}} e^{-\lambda x - \pi c^2 t^2/x}$ ($x > 0$ için)

4.5.2. Değiştirilmiş Brownian hareketine dayalı modeller

Kararlı bir harmonik bağlayıcı tarafından bağımsız bir Brownian hareketinin (σ salınımlık ve θ sürüklenme ile) süresi değiştirilerek, normal ve iyi huylu kararlı süreç elde edilebilir. Genelde kararlı sürecin karakteristik

$$\Psi(u) = \frac{1-\alpha}{\kappa\alpha} \left\{ 1 - \left(1 + \frac{\kappa \left(\frac{u^2\sigma^2}{2} - i\theta u \right)}{1-\alpha} \right)^\alpha \right\} \quad (4.21)$$

iyi huylu ve normaldir ve ve gama varyansı durumunda ($\alpha = 0$) olarak

$$\Psi(u) = \frac{1}{\kappa} \log \left\{ 1 + \frac{u^2\sigma^2\kappa}{2} - i\theta\kappa u \right\} \quad (4.22)$$

elde edilir. Kararlı, normal ve iyi huylu bir sürecin Lévy ölçüsü, denklem 4.7 kullanılarak hesaplanır ve aşağıdaki Lévy yoğunluğuna sahiptir:

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{2c}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{(x-\theta t)^2}{2t\sigma^2}} \frac{dt}{t^{\alpha+3/2}} \\ &= \frac{2c}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sqrt{\theta^2 + 2\lambda\sigma^2}}{|x|} \right)^{\alpha+1/2} e^{\theta x/\sigma^2} K_{\alpha+1/2} \left(\frac{|x|\sqrt{\theta^2 + 2\lambda\sigma^2}}{\sigma^2} \right) \\ &= \frac{C(\alpha, \kappa, \sigma, \theta)}{|x|^{\alpha+1/2}} e^{\theta x/\sigma^2} K_{\alpha+1/2} \left(\frac{|x|\sqrt{\theta^2 + \frac{2}{\kappa}\sigma^2(1-\alpha)}}{\sigma^2} \right). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Burada,

$$C(\alpha, \kappa, \sigma, \theta) = \frac{2}{\Gamma(1-\alpha)\sigma\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1-\alpha}{\kappa} \right)^{1-\alpha} \left(\theta^2 + \frac{2}{\kappa}\sigma^2(1-\alpha) \right)^{\alpha/2+1/4}$$

ve K , modifiye edilmiş Bessel fonksiyonunun ikinci türüdür.

$$\lambda_- = \frac{1}{\sigma^2} \left(\sqrt{\theta^2 + \frac{2}{\kappa}\sigma^2(1-\alpha)} + \theta \right)$$

ve

$$\lambda_+ = \frac{1}{\sigma^2} \left(\sqrt{\theta^2 + \frac{2}{\kappa}\sigma^2(1-\alpha)} - \theta \right)$$

kuyrukların sönülüm oranını tanımlar. Bu ölçüyü aşağıdaki gibi yeniden yazabiliriz:

$$v(x) = \frac{C}{|x|^{\alpha+1/2}} e^{(\lambda_- - \lambda_+)/2} K_{\alpha+1/2}(|x|(\lambda_- + \lambda_+)/2) \quad (4.24)$$

K Bessel fonksiyonunun limit davranışından,

$$v(x) \sim \frac{1}{|x|^{2\alpha+1}} \quad x \rightarrow 0 \text{ ise}$$

$$v(x) \sim \frac{1}{|x|^{\alpha+1}} e^{-\lambda_+ x} \quad x \rightarrow \infty \text{ ise}$$

$$v(x) \sim \frac{1}{|x|^{\alpha+1}} e^{-\lambda_- x} \quad x \rightarrow -\infty \text{ ise}$$

Yani, Lévy ölçüsü sıfıra yakın olduğunda, kararlı bir davranış sergiler ve kuyruklarda sönülüm oranı λ_- ve λ_+ olur.

İyi huylu kararlı bağlayıcıların $\alpha = 1/2$ ve $\alpha = 0$ için olasılık yoğunluğu kapalı bir formda bilindiğinden, bu nedenle bağlayıcı süreçler yaygın olarak kullanılmaktadır. Finansal modellemede, hisse senedi fiyatlarının logaritması için gama varyans modelleri [39] ve normal ters Gauss modelleri [5, 6 ve 48] gibi modeller kullanılmaktadır.

4.6. Kararlı ve İyi Huylu Bir Süreç Oluşturmak

İyi huylu kararlı süreç, tek boyutlu bir kararlı süreç alıp Lévy ölçüsünü azalan bir üs ile çarparak elde edilir. Bu süreçte, küçük sıçramalar kararlı bir davranış sergilerken, büyük sıçramalar daha düşük yoğunluğa sahip olur.

İyi huylu bir kararlı süreç, $\mathbb{R}$ üzerinde Gauss bileşeni olmayan ve aşağıdaki Lévy yoğunluğuna sahip bir Lévy sürecidir:

$$v(x) = \frac{c_-}{|x|^{1+\alpha}} e^{-\lambda_- |x|} 1_{x<0} + \frac{c_+}{|x|^{1+\alpha}} e^{-\lambda_+ x} 1_{x>0}. \quad (4.25)$$

Burada, $c_+ > 0$, $c_- > 0$, $\lambda_+ > 0$, $\lambda_- > 0$ ve $\alpha > 0$ 'dır. Bu model, finansal modellemede Koponen tarafından kullanılmıştır [12].

Notasyon: Kararlı süreçler sadece $\alpha > 0$ için tanımlandığına karşın, iyi dengelenmiş kararlı süreçlerde α üzerinde doğal bir alt sınıra sahip değildir. Denklem (4.25), $\alpha < 2$ olan tüm α değerleri için Lévy ölçüsünü sağlar.

Negatif α değerleri, daha güçlü bir compound Poisson modeline yol açar ve α için farklı değerler, gerçek sayılar bazında düşünülebilir. Bu süreçler $\alpha_+ < 2$ ve $\alpha_- < 2$ olduğunda aşağıdaki Lévy ölçüsüne sahiptir:

$$v(x) = \frac{c_-}{|x|^{1+\alpha_-}} e^{-\lambda_-|x|} 1_{x<0} + \frac{c_+}{|x|^{1+\alpha_+}} e^{-\lambda_+x} 1_{x>0} \quad (4.26)$$

Aşağıdaki önerme, iyi dengelenmiş kararlı modellerin, Brownian hareket bağlayıcı modellere göre daha güçlü bir yapıya sahip olduğunu göstermektedir.

Önerme 4.2. Kararlı iyi huylu süreç için zamanla değişen Brownian hareketinin gösterimi

Genelleştirilmiş iyi huylu kararlı süreci, ancak ve ancak $c_- = c_+$ ve $\alpha_+ = \alpha_- = \alpha \geq -1$ ise, zamanla değişen Brownian hareketi (sürüklenme ile) olarak temsil edilebilir.

İspat: [16, Bölüm 4]'e bakınız.

Notasyon: Genelleştirilmiş iyi huylu kararlı süreç, yalnızca $c_- = c_+$ ve $\alpha_+ = \alpha_- = \alpha \geq -1$ olduğunda zamanla değişen Brownian hareketi (sürüklenme ile) olarak temsil edilebilir.

İspat için [16, Bölüm 4]'e bakınız.

Notasyon: Katsayılarıdaki koşullar, küçük sıçramaların simetrik olması gerektiğini gösterirken, büyük sıçramaların sönülme oranlarının farklı olabileceğini belirtir. Bu iyi huylu kararlı süreç kategorisi, Carr [13] tarafından tanıtılan “CGMY” modeline karşılık gelir. İyi huylu kararlı süreçler sınıfı, Brownian uyarlamasına dayalı modellere göre daha fazla esneklik sunar, çünkü iyi huylu kararlı modeller aynı zamanda küçük sıçramaların asimetrisini de yansıtır.

Genelleştirilmiş kararlı süreç, sürüklenme parametresinden bağımsız olarak 6 parametrelidir. Bu 6 parametrenin rolünü karakteristik fonksiyonu hesapladıktan sonra tartışacağız. Büyük sıçramaları kesilmeyen Lévy-Khinchin formülünü kullanarak, yani aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$E[e^{iux_t}] = \exp t \left\{ iu\gamma_c + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{iux} - 1 - iux)v(x)dx \right\}. \quad (4.27)$$

Bu durumda, $E[X_t] = \gamma_c t$ olur. Karakteristik fonksiyonu hesaplamak için önce pozitif Lévy büyüklüğünü ve $\alpha_{\pm} \neq 1$ ve $\alpha_{\pm} \neq 0$ varsayımını ele alacağız.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} (e^{iux} - 1 - iux) \frac{e^{-\lambda x}}{x^{1+\alpha}} dx \\ = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(iu)^n}{n!} \int_0^{\infty} x^{n-1-\alpha} e^{-\lambda x} dx = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(iu)^n}{n!} \lambda^{\alpha-n} \Gamma(n-\alpha) \end{aligned}$$

$$= \lambda^\alpha \Gamma(2 - \alpha) \left\{ \frac{1}{2!} \left(\frac{i u}{\lambda} \right)^2 + \frac{2 - \alpha}{3!} \left(\frac{i u}{\lambda} \right)^3 + \frac{(2 - \alpha)(3 - \alpha)}{4!} \left(\frac{i u}{\lambda} \right)^4 + \dots \right\}$$

Parantez içindeki ifade, bilinen bir kuvvet serisine benziyor:

$$(1 + x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu - 1)x^2}{2!} + \dots$$

İki seriyi karşılaştırarak aşağıdaki sonuca varıyoruz:

$$\int_0^\infty (e^{iux} - 1 - iux) \frac{e^{-\lambda x}}{x^{1+\alpha}} dx = \lambda^\alpha \Gamma(-\alpha) \left\{ \left(1 - \frac{i u}{\lambda} \right)^\alpha - 1 + \frac{i u \alpha}{\lambda} \right\} \quad (4.28)$$

$|\mu| < \lambda$ ise, yukarıdaki ifadeyi elde etmek için kullandığımız sigma ve integral ve kuvvet serisi yakınsamasının kayması doğrulanabilir. $\alpha = 0$ ve $\alpha = 1$ durumlarında benzer hesaplamalar yapacağız.

$\alpha = 1$ ise,

$$\int_0^\infty (e^{iux} - 1 - iux) \frac{e^{-\lambda x}}{x^2} dx = (\lambda - i u) \log \left(1 - \frac{i u}{\lambda} \right) + i u \alpha \quad (4.29)$$

ve $\alpha = 1$ ise,

$$\int_0^\infty (e^{iux} - 1 - iux) \frac{e^{-\lambda x}}{x} dx = \frac{u}{i \lambda} + \log \frac{i \lambda}{u + i \lambda} \quad (4.30)$$

Her iki Lévy ölçüsünü de dikkate alarak, genelleştirilmiş iyi huylu kararlı sürecin karakteristiği elde edilir.

Önerme 4.3. $(X_t)_{t \geq 0}$, genelleştirilmiş iyi huylu kararlı bir süreçtir. Genel durumda ($\alpha_\pm \neq 1$ ve $\alpha_\pm \neq 0$) $\Psi(u) = t^{-1} \log E[e^{i u X_t}]$ karakteristik üsteli

$$\begin{aligned} \Psi(u) = i u \gamma_c + \Gamma(-\alpha_+) \lambda_+^{\alpha_+} c_+ \left\{ \left(1 - \frac{i u}{\lambda_+} \right)^{\alpha_+} - 1 + \frac{i u \alpha_+}{\lambda_+} \right\} \\ + \Gamma(-\alpha_-) \lambda_-^{\alpha_-} c_- \left\{ \left(1 - \frac{i u}{\lambda_-} \right)^{\alpha_-} - 1 + \frac{i u \alpha_-}{\lambda_-} \right\} \end{aligned} \quad (4.31)$$

olur. $\alpha_+ = \alpha_- = 1$ ise

$$\Psi(u) = i u (\gamma_c + c_+ - c_-) + c_+ (\lambda_+ - i u) \log \left(1 - \frac{i u}{\lambda_+} \right)$$

$$+c_-(\lambda_- + iu) \log \left(1 + \frac{iu}{\lambda_-} \right) \quad (4.32)$$

$\alpha_+ = \alpha_- = 0$ ise

$$\Psi(u) = iu\gamma_c + c_+ \left\{ \frac{iu}{\lambda_+} + \log \left(1 - \frac{iu}{\lambda_+} \right) \right\} + c_- \left\{ \frac{iu}{\lambda_-} + \log \left(1 + \frac{iu}{\lambda_-} \right) \right\} \quad (4.33)$$

2.15 önermesini kullanarak, iyi huylu kararlı süreçlerinin ilk logaritmik momet hesaplamak mümkündür. Genel olarak, karakteristik üstelden türev alarsak,

$$K_1 = E[X_t] = t\gamma_c$$

$$K_2 = VarX_t = t\Gamma(2 - \alpha_+)c_+\lambda_+^{\alpha_+-2} + t\Gamma(2 - \alpha_-)c_-\lambda_-^{\alpha_--2}$$

$$K_3 = t\Gamma(3 - \alpha_+)c_+\lambda_+^{\alpha_+-3} + t\Gamma(3 - \alpha_-)c_-\lambda_-^{\alpha_--3}$$

$$K_4 = t\Gamma(4 - \alpha_+)c_+\lambda_+^{\alpha_+-4} + t\Gamma(4 - \alpha_-)c_-\lambda_-^{\alpha_--4}$$

Yukarıdaki ifadeler, farklı parametrelerin rolünü netleştirmez. Sürecin simetrik olduğunu varsayalım, o zaman X_t dağılımının çarpıklığı

$$k = \frac{K_4}{(VarX_t)^2} = \frac{(2 - \alpha)(3 - \alpha)}{ct\lambda^\alpha}$$

olur.

Yukarıdaki ifadeden anlıyoruz ki, λ' 'yi artırarak (sıçramalar küçülür ve süreç sürekli bir duruma yaklaşır) veya c' 'yi artırarak (sıçramalar daha fazla tekrarlanır ve bu nedenle merkezi limit teoremi daha iyi çalışır) azaltabileceğimizi gösterir. Ancak bu ifadeler, λ ve c arasındaki farkı açıkça belirtmez. Farklı parametrelerin rolünü tam olarak anlamak için Lévy ölçüsüne bir kez daha dikkat ediyoruz. λ_+ ve λ_- , risk yönetimi açısından kısa vadede kazanç veya kayıp miktarını ifade eden Lévy ölçüsünün kuyruğunun davranışını belirler. c_+ ve c_- , artan ve azalan sıçramaların göreceli frekansını belirler. Sıçramaların toplam frekansı sonsuzdur. Bu iki parametre, belirli bir olayın ne sıklıkla beklenmesi gerektiğini gösterir. Sonuç olarak, α_+ ve α_- , sürecin yerel davranışını (fiyatın büyük sıçramalar arasında nasıl değiştiğini) belirler. α_+ ve α_- , 2'ye yakınsa, süreç, büyük sıçramalar arasında birçok küçük salınımla birlikte bir Brownian hareketi gibi davranır. α_+ ve α_- , küçükse, fiyat değişikliklerinin çoğu, aralarında nispeten istikrarlı dönemler bulunan (çok sayıda küçük dalgalanmadan bağımsız olarak) büyük sıçramalardan kaynaklanacaktır.

Notasyon: İyi huylu kararlı süreçler finansal literatüre ilk olarak Koponen tarafından kesintili Lévy sıçramaları olarak girmiştir. Bundan sonra Boyarchenko-Levendorski, bu süreçleri KOBOL adı altında incelemiş ve son olarak Carr, 4 parametrelili kararlı iyi huylu modellerin bir alt kategorisini CGMY adıyla incelemiştir.

4.7. Yarım Martingale Dayalı Stokastik Analiz

Günümüz dünyasında, Itô Lemması kadar bilinen ve yaygın olarak kullanılan bir matematiksel sonuç düşünmek oldukça zordur. Matematiksel analizde bu sonuç, klasik analizdeki kalkülüsün temel teoremi (Newton) ile benzer bir öneme sahiptir. Bu, bu konunun ayrılmaz bir parçası olduğu anlamına gelir. Kiyoshi Itô'nun bilimsel çalışmaları, Amerikan Ulusal Bilimler Akademisi tarafından açıklanmıştır.

1944 yılında Kiyoshi Itô, Tokyo Kraliyet Akademisinin “Stokastik integral” başlıklı ünlü makalesini yayınladı. Itô'nun makalesi, stokastik analizin veya Itô analizinin başlatıcısı olarak kabul edilir. Son 60 yıl boyunca, Itô'nun teorisi birçok bilimsel alanda incelenmiş ve en dikkate değer olanı Black-Scholes modelidir [34].

Leibniz-Newton'un hesaplamalarında, deterministik fonksiyonların türevi ve integrali ortaya çıkar. Türevdeki temel teorem, iki farklı fonksiyonun türevlerini çarparak birleştirilmesi ile türevi hesaplamak için kullanılan zincir kuralını içerir. Ancak Brownian hareketi karşısında, Leibniz-Newton hesaplamalarının zincir kuralı etkisizdir. Brownian hareketin örnek yörüngeleri hiçbir yerde türevlenebilir değildir. Bu nedenle, klasik hesaplamalarda olduğu gibi Brownian hareketini elde edemeyiz [34].

4.8. Riemann–Stieltjes İntegrali

Bir sonlu $p = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ nokta kümesini ele alalım, burada $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = t$ olmak üzere, $p, [0, t]$ aralığının bir bölüntüsü olarak adlandırılır. $t'_k \in [t_{k-1}, t_k]$ noktası, p 'nin bir orta noktasıdır. $\Delta(p), p$ bölünüşü için $\max_{1 \leq k \leq m} (t_k - t_{k-1})$ ile tanımlansın. Eğer $\sup\{\sum_i |h(t_i) - h(t_{i-1})|^r\} < \infty$ ise, her $r > 0$ için $h, [0, t]$ üzerinde sınırlı r -değişimlidir. Burada supremum, $[0, t]$ aralığının tüm bölüntüleri üzerinde hesaplanır. $r = 1$ ise, o zaman h 'a $[0, t]$ üzerinde sınırlı değişim denir.

f ve g sınırlı $[0, t] \subset \mathbb{R}$ aralığında iki gerçel değerli fonksiyon olsun. p 'ye karşılık gelen f 'nin g 'ye göre Riemann-Stieltjes toplamı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$S_{f,p}(g) = \sum_{k=1}^m f(t'_k)[g(t_k) - g(t_{k-1})] \quad (4.35)$$

$f, [a, b]$ üzerinde g 'ye göre Riemann-Stieltjes integraline sahiptir, eğer s gibi bir sayı bulunuyorsa, her $\varepsilon > 0$ için $[a, b]$ aralığının bir p_ε bölüntüsü vardır ve her p_ε bölünüşü için $p_\varepsilon \subseteq p$ olmak üzere $|S_{f,p}(g) - s| < \varepsilon$ sağlansın. s, f 'nin g 'ye göre Riemann-Stieltjes integrali olarak adlandırılır ve $\int_0^t f(s)dg(s)$ veya $\int_0^t f dg$ ile gösterilir.

$\int_0^t f dg$ 'nin varlığı aşağıdaki iki koşul sağlandığında ispatlanır:

1. f ve g her ikisi de aynı $s \in [0, t]$ noktasında sürekli değilse.
2. Her $h > 0$ ve $q > 0$ değerleri için f ve g sırasıyla h -değişimi ve q -değişimi ile sınırlanır, böylece, $\frac{1}{h} + \frac{1}{q} > 1$.

$\int_0^t f dg$ Riemann-Stieltjes integrali, S_{f,p_n} 'nin toplamaları dizisinin limiti olarak tanımlanabilir. Burada p_n , keyfi orta noktalar $t'_k{}^{(n)} \in [t_{k-1}^{(n)}, t_k^{(n)}]$ ile rafine edilmiş bölüntünün bir dizisidir ve $n \rightarrow \infty$ olduğunda $\Delta(p_n) \rightarrow 0$ olur.

Riemann-Stieltjes integrali, sıradan integralin tüm özelliklerine sahiptir.

Teorem 4.4. f_1 ve f_2, g 'ye göre Riemann-Stieltjes integrallerine sahipse ve c_1 ve c_2 keyfi gerçek sayılarsa ve $s \in (0, t)$ ise, o zaman:

- a) $c_1 f_1 + c_2 f_2, g$ 'ye göre Riemann-Stieltjes integraline sahiptir ve şu şekilde ifade edilir:

$$\int_0^t (c_1 f_1 + c_2 f_2) dg = c_1 \int_0^t f_1 dg + c_2 \int_0^t f_2 dg$$

- b) f, g_1 ve g_2 'ye göre Riemann-Stieltjes integraline sahipse, o zaman

$$\int_0^t f d(c_1 g_1 + c_2 g_2) = c_1 \int_0^t f dg_1 + c_2 \int_0^t f dg_2$$

- c) İntegrasyon aralığı iki parçaya bölünebilir. Yani eğer $[0, t]$ üzerinde f, g 'ye göre Riemann-Stieltjes integraline sahipse ve $0 < s < t$ ise, o zaman

$$\int_0^t f dg = \int_0^s f dg + \int_s^t f dg \quad (4.36)$$

İspat: [25, Bölüm 4]'e bakınız.

B bir Brownian hareketi olsun. B 'nin $s \mapsto B(s, \omega)$ örnek yörüngeleri, herhangi bir $[0, t]$ sonlu aralıkta, her $q > 2$, q -değişim ile sınırlıdır. Bu nedenle, $\int_0^t f dB(s, \omega)$, Riemann-Stieltjes integrali olarak, hemen hemen tüm örnek yörüngeleri için B 'ye sahiptir.

$$\int_0^t s^k f dB(s, \omega), \int_0^t \cos(s) f dB(s, \omega), \int_0^t e^s f dB(s, \omega).$$

Riemann-Stieltjes integralleri, s^k , $\cos(s)$ ve e^s fonksiyonları sınırlı değişime sahip olduğundan dolayı, hemen hemen tüm örnek yörüngeleri için Brownian hareketi mevcuttur.

Görünüşe göre yukarıdaki tanım $\int_0^t f dB$ ve $\int_0^t B dB$ gibi daha genel integrallere genişletilebilir. Burada, f keyfi bir sürekli fonksiyondur. Ancak, $\int_0^t f(s) dB(s, \omega)$ ve $\int_0^t B(s, \omega) dB(s, \omega)$ 'lerin Riemann-Stieltjes integralleri mevcut değildir.

Örneğin, $\int_0^t f(s) dg(s)$ Riemann-Stieltjes integrali, keyfi sürekli f fonksiyonları için, g 'nin değişimi sınırlı olduğu dışında mevcut değildir [52].

Bu nedenle, $\int_0^t f(s) dB(s, \omega)$ integrallerini hesaplamak için, daha genel integralleri ve rastgele integratörleri tanımlayan yöntemlere ihtiyaç vardır [25].

Bu nedenle, keyfi bir sürekli fonksiyon için $\int_0^t f(s) dB(s, \omega)$ bir Riemann-Stieltjes integrali olarak tanımlanamaz ve bu sebeple $\int_0^t f(s) dB(s, \omega)$ ve $\int_0^t B(s, \omega) dB(s, \omega)$ integrallerini hesaplamak için, daha genel integralleri ve stokastik integratörleri içeren tanımlamalar yapılmalıdır [25].

4.9. Stokastik İntegrale Giriş

Stokastik integralin tanımı ile Riemann-Stieltjes integralinin tanımı arasında iki temel fark bulunmaktadır:

1. Stokastik integrali tanımlayan toplamlar dizisi rastgeledir. Stokastik integralin tanımı, rastgele değişken dizileri için yakınsama kriterlerinin uygulanmasını gerektirir. Bu bağlamda, kullanılan en yaygın yakınsama kriteri, karesel ortalama yakınsamasıdır.
2. Stokastik integrali tanımlayan toplamlar dizisinin limiti, $[0, t]$ aralığında p_n dizisi bölüntülerinin $t_k^{(n)}$ orta noktalarının seçimine bağlı olabilir. Öte yandan, Riemann-Stieltjes integralinin tanımında kullanılan orta noktanın seçimi ne olursa olsun, her zaman aynı değere sahip olur [25].

Bu bölümde, B ve N , sırasıyla Brownian hareketi ve Poisson sürecini temsil eder, ve $\int_0^t B dB$ ve $\int_0^t N dB$ stokastik integrallerini ifade ediyoruz.

Örnek 4.3. Aşağıdaki diziye odaklanalım:

$$J_{B,n}(B) = \sum_{k=1}^{n+1} B(t_{k-1}^{(n)}) [B(t_k^{(n)}) - B(t_{k-1}^{(n)})]$$

$\pi^n = (t_0^n = 0 < t_1^n < \dots < t_{n+1}^n = t)$, $[0, t]$ üzerinde, $|\pi^n| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ olduğunda, dizi bölüntüsünün $t_k'^{(n)} = t_{k-1}^{(n)}$ orta noktası olarak kabul edelim. $J_{B,n}(B)$ 'nin limiti, $n \rightarrow \infty$ olduğunda karesel ortalama ve olasılık açısından mevcuttur. Bu limit, $\int_0^t B(s) dB(s)$ veya $\int_0^t B dB$ olarak gösterilir ve B 'nin $[0, t]$ üzerinde Itô integrali olarak adlandırılır.

$$\int_0^t B(s) dB(s) = \frac{1}{2} (B(t)^2 - t), \quad t \geq 0 \quad (4.37)$$

Ayrıca, bölüntü dizisi $[0, t]$ üzerinde rafine edilirse, yani $\pi^n \subseteq \pi^{n+1}$ ise, o zaman $J_{B,n}(B)$ neredeyse kesinlikle (4.37)'e yakınsar.

İspat:

$$\begin{aligned} J_{B,n}(B) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} \left(B(t_k^{(n)})^2 - B(t_{k-1}^{(n)})^2 \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} \left(B(t_k^{(n)}) - B(t_{k-1}^{(n)}) \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} B(t)^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} \left(B(t_k^{(n)}) - B(t_{k-1}^{(n)}) \right)^2 \end{aligned}$$

$J_{B,n}(B)$ 'nin karesel kuvvetin ortalaması limiti $(B(t)^2 - t)/2$ olur, çünkü

$$\begin{aligned} E \left[J_{B,n}(B) - \frac{1}{2} (B(t)^2 - t)^2 \right] &= E \left[\left(-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} \left(B(t_k^{(n)}) - B(t_{k-1}^{(n)}) \right)^2 + \frac{t}{2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k,l} E[(\Delta B_k)^2 (\Delta B_l)^2] - \frac{t}{2} \sum_{k,l} E[(\Delta B_k)^2] + \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

Yukarıdaki ifade, $n \rightarrow \infty$ olduğunda sıfıra yaklaşır. Burada $\Delta B_k = B(t_k^{(n)}) - B(t_{k-1}^{(n)})$ 'dir.

Bu nedenle $\int_0^t B dB$ Itô integralini temsil eder ve rafine edilmiş fonksiyonlar dizisi için neredeyse kesin olduğundan, rafine edilmiş $J_{B,n}(B)$ 'nin bölüntüleri neredeyse kesin olarak

$(B(t)^2 - t)/2$ 'ye yakınsar. Sonuç olarak, bu durumda Itô integrali, $J_{B,n}(B)$ olarak tanımlanabilir.

Örnek 4.4. N , yoğunluğu λ olan bir Poisson süreci olsun. Aşağıdaki rastgele diziye odaklanalım:

$$J_{N,n}(N) = \sum_{k=1}^{n+1} N(t_{k-1}^{(n)}) [N(t_k^{(n)}) - N(t_{k-1}^{(n)})]$$

$[0, t]$ üzerinde, $|\pi^n| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ olduğunda, dizi bölüntüsü olarak kabul edelim. O zaman, $J_{N,n}(N)$ 'nin limiti, $n \rightarrow \infty$ olduğunda karesel kuvvet ortalama ve neredeyse kesin olarak yakınsaktır. $J_{N,n}(N)$ 'nin limiti, $\int_0^t N(s^-) dN(s)$ veya $\int_0^t N_- dN$ olarak gösterilir ve N_- 'nin, $[0, t]$ üzerinde, N 'ye göre Itô integrali olarak adlandırılır ve

$$\int_0^t N_-(s) dN(s) = \int_0^t N(s^-) dN(s) = \frac{1}{2} (N(t)^2 - N(t)), \quad (4.38)$$

olarak ifade edilir. N 'nin Càdlàg örnek yörüngeleri olduğu için

$$N_-(s) = N(s^-) = \lim_{u \uparrow s} N(u)$$

bir Càdlàg süreçtir.

İspat: [25]'e bakınız.

Bu kesimde öncelikle finansal modelleme kavramlarını ifade ederek stokastik integral ile sıçrama süreçleri arasındaki bağlantıyı ele alacağız. Daha sonra, basit öngörücü integrallerin ve yarı martingallerin Càdlàg integraller ve yarı martingal integratörlerle nasıl genişletildiğini açıklayacağız.

Alım-satım stratejisi, farklı tarihlerde varlıkların alınıp satılmasıyla elde edilen dinamik bir φ_t portföyünü sürdürmekten oluşur. Bir finansal varlığın fiyatının rastgele süreç $S = (S_t)_{t \in [0, T]}$ olarak verildiğini varsayalım. Alım-satım stratejisini ifade etmek için, varlıkların alım-satımından kaynaklanan hisse senedi portföyündeki değişimi dikkate almalıyız.

Bir yatırımcı $0 = T_0 < T_1 < \dots < T_m = T$ dönemlerinde alım-satım yaparsa, $[T_i, T_{i+1}]$ dönemdeki varlığı φ_i 'dir. Piyasa fiyatlarındaki dalgalanmalardan kaynaklanan sermaye

$$\sum_{i=0}^n \varphi_i [S_{T_{i+1}} - S_{T_i}]$$

olarak verilmiştir. φ 'den kaynaklanan bu sermayeyi temsil eden bu miktar, S 'ye göre φ 'nin rastgele integrali olarak adlandırılır ve $\int_0^T \varphi_t dS_t$ olarak gösterilir.

Eğer X bir Lévy veya difüzyon süreciyse, genel olarak $\int_0^t \varphi dX$, Lévy veya difüzyon süreci değildir. Yani, Lévy süreçleri bu tür rastgele integrasyon veya doğrusal olmayan dönüşümler altında kararlı değildirler. Bu nedenle, bu operatörler altında kararlılık özelliği içeren daha geniş bir stokastik süreç kategorisini göz önünde bulundurmamız gereklidir. Bu tür koşulları sağlayan bir sınıf yarım martingalelere aittir. Yarım martingaleler, sadece rastgele integrasyon ve doğrusal olmayan dönüşümler altında değil, aynı zamanda ölçüm değişikliği, filtre değişikliği ve zaman değişikliği gibi diğer operatörler altında da kararlıdır.

4.10. Alım-Satım Stratejisi ve Stokastik İntegral

4.10.1. Basit tahmin edilebilir integral

$(\Omega, F, (F_t)_{t \in [0, T]}, P)$, filtrelenmiş bir olasılık uzayı olduğunu varsayalım. Fiyatları Càdlàg $S_t = (S_t^1, \dots, S_t^d)$ 'nin rastgele vektör süreci ile modellenen d adet varlığa sahip bir piyasa düşünün. Portföy g , yatırımcının varlıklarının miktarını gösteren bir vektördür. Bu sepetin t zamanındaki değeri aşağıdaki bağlantıyla ifade edilir:

$$V_t(\varphi) = \sum_{k=1}^d \varphi_k S_t^k \equiv \varphi \cdot S_t. \quad (4.39)$$

Alım-satım işlemleri $0 = T_0 < T_1 < \dots < T_m = T$ tarihlerinde gerçekleşir. T_i ve T_{i+1} arasındaki süre içinde varlık portföyü değişmez ve bu φ_i ile gösterilir. Portföy φ_t , t zamanında

$$\varphi_t = \varphi_0 1_{\{0\}} + \sum_{i=0}^n \varphi_i 1_{[T_i, T_{i+1}]}(t) \quad (4.40)$$

olarak belirir. Aslında, alım-satım zamanları önceden bilinmez çünkü bir yatırımcı T_i zamanında alım-satım kararı, T_i zamanında eldeki bilgilere dayalı olarak alır. Bu nedenle, alım-satım zamanları (T_i) adapte rastgele süreler (veya durma zamanları) olarak tanımlanmalıdır, bu $[0, T]$ üzerinde rastgele bir dağılım oluşturur. Yeni portföy φ_i , T_i zamanındaki bilgilere dayalı olarak seçildiğinden, φ_i , F_{T_i} tarafından ölçülebilir. Bir tüccar

$t = T_i$ anında alım-satım yapma kararı aldığında, portföy hala φ_{i-1} olarak ifade edilir. Portföy φ_i , alım-satımdan hemen sonra, yani $t > T_i$ anında yeni değerini alır. Bu nedenle (4.40) bağlantısındaki gösterge fonksiyonu $1_{]T_i, T_{i+1}]}$ olarak belirir. (4.40) biçimindeki rastgele süreçlere basit tahmin edilebilir süreçler (Simple predictable process) denir.

Tanım 4.1. Basit tahmin edilebilir süreç

$(\varphi_t)_{t \in [0, T]}$, rastgele süreççe aşağıdaki gibi bir temsilimiz varsa, basit tahmin edilebilir süreci olarak adlandırılır:

$$\varphi_t = \varphi_0 1_{t=0} + \sum_{i=0}^n \varphi_i 1_{]T_i, T_{i+1}]}(t)$$

Burada, $0 = T_0 < T_1 < \dots < T_m = T$ adaptif rastgele zamanlar ve her φ_i , değeri T_i 'de belirlenen sınırlı rastgele değişkendir (F_{T_i} -ölçülebilirdir).

$[0, T]$ 'deki basit tahmin edilebilir süreçler kümesini $S([0, T])$ ile gösteriyoruz. Herhangi bir gerçek veya operasyonel strateji, basit bir tahmin edilebilir süreciyle ifade edilmeli veya en azından (4.40) biçimindeki stratejilerle yaklaşık olarak tahmin edilmelidir. Çünkü sıçramaların olduğu bir piyasada, tahmin edilebilmeyen stratejiler arbitraj fırsatları yaratır. Tahmin edilebilir süreçler kategorisi, stokastik integralin tanımında temel bir role sahiptir. Yarım martingallere (ve daha spesifik olarak Lévy süreçlerine) yalnızca tahmin edilebilir veya yaklaşık süreçlerin integre edilebileceği kanıtlanmıştır. Yarım martingallerin integrasyonunda tahmin edilebilir süreçlerin temel rolünü incelemek için [32 ve 44]'e başvurabilirsiniz. Burada bir örnekle basit tahmin edilebilir süreçlerini kullanmanın gerekliliğini gösteriyoruz.

Örnek 4.5. Alım Satım Stratejilerinin Tahmin Edilebilirliği

$S_t = \lambda t - N_t$ 'yi N_t , λ yoğunluğuna sahip bir Poisson süreci olan N_t tarafından telafi edilen bir Poisson sürecidir. Bu nedenle S bir yarı martingale'dir. İlk sıçramanın zamanını T_1 ile gösterelim ve $S_{T_1} = S_{T_1-} - 1$ olsun. T_1 , λ parametresi ile üstel bir rastgele değişken olarak modellenenebilir. Şimdi, stratejinin $t = 0$ zamanında (sıfır fiyattan!) bir S varlığı birimi satın almak ve fiyatı düşmeden hemen önce satmak şeklinde olduğunu varsayalım: $\varphi_t = 1_{[0, T_1]}(t)$. Bu strateji, (4.40)'da tanımlandığı gibi soldan sürekli değil, ancak sağdan sürekli (Càdlàg) bir stratejidir. Bu stratejiye bağlı olarak oluşan sermaye şu şekildedir:

$$G_t(\varphi) = \int_0^t \varphi_u dS_u = \begin{cases} \lambda t, & t < T_1, \\ \lambda T_1, & t \geq T_1. \end{cases}$$

Yukarıdaki denklemin nasıl elde edildiğini, ilerleyen bölümlerde Itô formülünü kullanarak göreceğiz. Bu nedenle, sıfır başlangıç yatırımına sahip olan bu strateji, kesin olmamakla birlikte kesinlikle sıfır olmayan bir sonuca yol açar, bu da kesin olmayan bir olasılıkla pozitif bir sonuç elde etme fırsatı yaratır. Bu tür stratejiler, arbitraj fırsatları yaratabilir ve bu nedenle arbitraj dışı modellere dönüştürülmelidir. Arbitraj, nakit ve opsiyon piyasaları arasındaki önemli ve temel bir ilişkiyi ifade eder. Arbitraj, aynı ürünün farklı piyasalarda farklı fiyatlarla satıldığı durumlarda, risksiz kar elde etme fırsatıdır. Bir arbitrajcı, bir ürünü düşük bir fiyattan alır ve hemen daha yüksek bir fiyattan satar. Arbitraj, yatırımcılar için cazip bir stratejidir. Bir hisse senedi, farklı borsalarda farklı fiyatlarla satılıyorsa, arbitrajcılar düşük fiyattan satın alır ve yüksek fiyattan satarlar, bu da düşük fiyatın yükselmesine ve yüksek fiyatın düşmesine yol açar. Genellikle aynı portföyler aynı fiyata sahip olmalıdır, aksi takdirde arbitrajcılar hızla harekete geçer ve fiyatları dengelemek için işlem yapar. Bu kurala tek “fiyat kanunu” denir ve aynı ürünün farklı fiyatlarda satılamayacağı anlamına gelir [28].

Fiyatların düşeceğini zaten bilen birileri olmadıkça, Örnek 4.5’deki strateji φ pratik bir strateji değildir. Aslında, φ_t tahmin edilebilir bir süreç değildir. Bu örnek, stratejileri ve bu stratejilerin integrandlarını tahmin süreçleriyle sınırlamamız gerektiğine dair bir motivasyon sunacaktır. Ayrıca, bu örnekte, S sürecinin kesikli doğasına dikkat edin. Eğer S sürekli olsaydı, strateji bir noktada değişse bile yatırımcının elde edeceği sonucu etkilemeyecekti ve bu durumda strateji sağdan sürekli olabilirdi. Bu nedenle, yarı-martingal integratörlü stokastik integral konseptinde, integral olarak soldan sürekli adaptif süreçlerin (Càdlàg) kullanılmasını gerektirecektir. Başka bir deyişle, rastgele integrali toplamaların limiti olarak tanımladığımızdan, düzgün yörüngelere sahip integral hesaplamak için ihtiyacımız vardır. Bu nedenle, integralin tanımını, soldan sürekli yörüngelere ve sağ limitlere sahip adapte süreçlerin uzayına odakladık.

T_i ve T_{i+1} zaman aralığında portföydeki varlık miktarı φ_i ’ye eşittir ve varlık miktarı $(S_{T_{i+1}} - S_{T_i})$ değişir. Bu nedenle portföy sermayesinin edinimi $\varphi_i \cdot (S_{T_{i+1}} - S_{T_i})$ ile ifade edilir. Sonuç olarak, başlangıç sermayesi φ_0 ile başlayan ve strateji φ ’yi benimseyen bir yatırımcı, $t > 0$ zamanında:

$$G_t(\varphi) = \varphi_0 \cdot S_0 + \sum_{i=0}^{j-1} \varphi_i \cdot (S_{T_{i+1}} - S_{T_i}) + \varphi_j (S_t - S_{T_j}), \quad T_j < t \leq T_{j+1}$$

eşit birikmiş sermayeye sahip olacaktır. Rastgele süreç $(G_t(\varphi))_{t \in [0, T]}$, strateji φ 'yi elde etme süreci olarak adlandırılır. Durma süresi tanımı uygulanarak, elde etme işlemi şu şekilde yeniden yazılabilir:

$$G_t(\varphi) = \varphi_0 \cdot S_0 + \sum_{i=0}^{j-1} \varphi_i \cdot (S_{T_{i+1} \wedge t} - S_{T_i \wedge t}). \quad (4.41)$$

Rastgele integrali strateji φ 'e ulaşma süreci olarak yorumlamak istiyorsak, portföy φ_i dönemin başında oluşturulmalıdır. Yani, varlıklardaki değişim T_i 'de φ_i ortaya çıkarken, $(S_{T_{i+1}} - S_{T_i})$ sadece dönem sonunda, yani φ_i 'de ortaya çıkıyor. (4.41)'de tanımlanan stokastik süreç, φ 'in tahmin sürecine göre S 'ye göre stokastik integral olarak adlandırılır ve şu şekildedir:

$$\int_0^t \varphi_u dS_u := \varphi_0 \cdot S_0 + \sum_{i=0}^n \varphi_i \cdot (S_{T_{i+1} \wedge t} - S_{T_i \wedge t}). \quad (4.42)$$

Bu nedenle, rastgele integral $\int_0^t \varphi dS$, strateji φ 'yi benimseyerek 0 ile t arasında biriken sermayeyi temsil eder. t zamanında varlık portföyü $V_t(\varphi) = \varphi \cdot S_t$ 'ye eşit bir değere sahiptir. Bu iki değer arasındaki fark, stratejinin t zamana kadar olan maliyetini açıklar

$$C_t(\varphi) = V_t(\varphi) - G_t(\varphi) = \varphi_t \cdot S_t - \int_0^t \varphi_u dS_u \quad (4.43)$$

$C_t(\varphi)$, strateji φ 'nin maliyet sürecidir. Maliyet (neredeyse kesinlikle) sıfırsa, strateji $(\varphi_t)_{t \in [0, T]}$ 'ye kendini finanse eden strateji denir. Bu durumda, $V_t(\varphi)$ portföyün değeri, başlangıç değeri artı 0 ile t arasındaki sermaye kazançlarına eşit olacaktır:

$$V_t(\varphi) = \int_0^t \varphi_u dS_u = \varphi_0 S_0 + \int_0^t \varphi_u dS_u \quad (4.44)$$

Denklem (4.44), portföy değerindeki değişikliğin tek kaynağının varlığın değerindeki değişiklik olduğu anlamına gelir: tüm işlemler ortaya çıkan fonlar tarafından yapılır, ortaya çıkan tüm fonlar portföye yatırılır ve hesaba likidite eklenmez veya azaltılmaz.

Bir edinim süreci S_t , stratejiyle ilişkili stokastik integralin aşağıdaki temel özelliğe sahip olduğu anlamına gelir: eğer bu bir martingale ise, o zaman herhangi bir strateji ile ilişkili edinme süreci de bir martingale olacaktır.

Rastgele integralin özellikleri aşağıda sınıflandırılmıştır.

Önerme 4.4. Koruyan Martingale Özelliği

$(S_t)_{t \in [0, T]}$ bir martingale ise, her basit tahmin edilebilir süreci φ için stokastik integral $G_t = \int_0^t \varphi ds$ de bir martingale'dir.

İspat: [16] kaynağına başvurun.

Kendi kendini finanse eden stratejiyi göz önünde bulundurarak, $V_t(\varphi) = G_t(\varphi)$ olsun. Bu nedenle, $(S_t)_{t \in [0, T]}$ bir martingale ise, herhangi bir kendi kendini finanse eden stratejinin değeri de bir martingale'dir [44].

Önerme 4.5'i genelleştirerek düzeltilmiş bir şekilde ifade edelim:

Önerme 4.5. Birleşme (Associative) Özelliği

$(X_t)_{t \in [0, T]}$ gerçekteğerli bir adaptif C  dl  g süreç olduğunu ve $(\sigma_t)_{t \geq 0}$ ve $(\varphi_t)_{t \geq 0}$ ger  ekteğerli basit tahmin edilebilir süreçler olduğunu varsayalım. Bu durumda, $S_t = \int_0^t \sigma dX$ bir adaptif C  dl  g süreçtir ve şu bağlantı geçerlidir:

$$\int_0^t \varphi_u dS_u = \int_0^t \varphi_u \sigma_u dX_u$$

İspat: [44, Bölüm 2]'ye bakınız.

$S_t = \int_0^t \sigma_u dX_u$ bağlantısı genellikle diferansiyel form $dS_t = \sigma_t dX_t$ ile ifade edilir. Birleşme özelliği, "rastgele türevler" için bir bağlantıya yol açar: $dS_t = \sigma_t dX_t$ ve $G_t = \varphi_t dS_t$ ise, o zaman $dG_t = \varphi_t \sigma_t dX_t$ olur.

$(X_t)_{t \in [0, T]}$ sonlu bir değişim süreci ise, $\int_0^t \varphi dS$ ile yörüngeden yörüngeye Stieltjes integrali kullanılarak tanımlanabilir.

4.10.2. Yarı martingaleler

Kararlılığın özelliği, integrand'deki (portföy) küçük bir değişikliğin integralin sonucunda (edinme işlemi) küçük bir değişikliğe yol a  ması gerektiği anlamına gelir. Örneğin, $S([0, T])$ ise, $\varphi^n \rightarrow \varphi$ (  rne  in, düzgün yakınsak) olduğunda, $\int_0^t \varphi^n dS \rightarrow \int_0^t \varphi dS$ (  rne  in, olasılıkta yakınsak) olur. Önerme 4.6, yukarıdaki anlamda yarım martingalelerin sadece kararlılık özelliğine sahip olduğunu gösterir.

Önerme 4.6. Eğer $(S_t)_{t \in [0, T]}$ bir yarım martingale ise, o zaman φ^n ve $\varphi \in S([0, T])$ 'nin tümü için,

$$\sup_{(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega} |\varphi_t^n(\omega) - \varphi_t(\omega)|_{n \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \quad (4.45)$$

ise

$$\sup_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t \varphi^n dS - \int_0^t \varphi dS \right|_{n \rightarrow \infty} \xrightarrow{P} 0 \quad (4.46)$$

olur. (4.45) bağlantısının yakınsaması $[0, T] \times \Omega$ üzerinde düzgün yakınsamasını ve (4.46) bağlantısının yakınsaması, olasılıkta ve $[0, T]$ 'de düzgün yakınsamasıdır [16].

İspat: [44]'e bakınız.

Genel olarak, bir sürecin yarım martingale olduğunu kanıtlamak için tanımı kullanmak zordur. Yarım martingalleri tanımlamak için basit kriterler vardır. Şimdi yarım martingalleri belirlemek için bazı kriterleri tanıtıyoruz.

- S , kompakt bir kümede sınırlı değişmeli Càdlàg yörüngeler ile adaptif bir süreç ise, S bir yarım martingale'dir.
- S , Càdlàg yörüngeleri olan ikinci mertebeden integrallenebilir bir martingale ise, S bir yarım martingale'dir.
- S , Càdlàg yörüngeleri olan ikinci mertebeden integrallenebilir bir martingale ise, S bir yarım martingale'dir.
- S , Càdlàg yörüngeleri olan ikinci mertebeden lokal integrallenebilir bir martingale ise, S bir yarım martingale'dir.

Bu nedenle, her Brownian hareketinin bir yarım martingale olduğunu söyleyebiliriz, çünkü sürekli yörüngeleri vardır ve martingalelerin kendileri yerel martingalelerdir ve martingaleler ikinci dereceden integrallenebilirdir. Aşağıdaki önermeler, bu tezde tartışılan tüm süreçlerin yarım martingale olduğunu göstermektedir.

Önerme 4.7. Her sınırlanmış değişim süreci bir yarım martingaledir.

İspat: [44]'e bakınız.

Önerme 4.8. Her ikinci mertebeden integrallenebilir martingale, bir yarım martingaledir.

İspat: $\|\varphi\|_u = \sup_{(t, \omega)} |\varphi(t, \omega)|$ 'yı ele alalım. İkinci mertebeden integrallenebilir M martingali için aşağıdaki ifade yazılabilir:

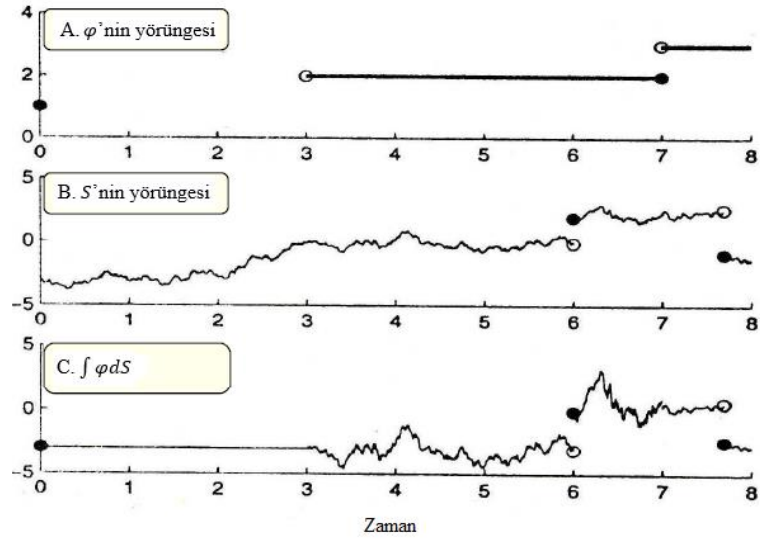
$$\begin{aligned}
E \left[\left(\int_0^t \varphi dM \right)^2 \right] &= E \left[\left(\varphi_0 M_0 + \sum_{i=0}^n \varphi_i (M_{T_{i+1}} - M_{T_i}) \right)^2 \right] \\
&= E \left[\left(\varphi_0^2 M_0^2 + \sum_{i=0}^n \varphi_i^2 (M_{T_{i+1}} - M_{T_i}) \right)^2 \right] \\
&\leq \|\varphi\|_u^2 E \left[\left(M_0^2 + \sum_{i=0}^n (M_{T_{i+1}} - M_{T_i}) \right)^2 \right] \\
&= \|\varphi\|_u^2 E \left[\left(M_0^2 + \sum_{i=0}^n (M_{T_{i+1} \wedge t} - M_{T_i \wedge t}) \right)^2 \right] \\
&= \|\varphi\|_u^2 E[M_{T_{n+1}}] \leq \|\varphi\|_u^2 E[M_\infty^2]
\end{aligned}$$

Yukarıda, rastgele değişkenler üzerinde keyfî örnekleme teoremi birkaç kez kullanılmıştır. Bu eşitsizlikten, stratejinin düzgün yakınsak olduğunda, stokastik integralin t için L^2 normüne düzgün yakınsak olduğunu ve L^2 yakınsamasından olasılıkta yakınsama elde edildiğini ve sonucun elde edildiğini görüyoruz.

Eğer $\varphi^n - \varphi$ basit bir tahmin edilebilir süreciyse, aşağıdaki sonuca ulaşırız:

$$\begin{aligned}
E \left[\left(\int_0^T (\varphi^n - \varphi) dM \right)^2 \right] &\leq \left[\sup_{(s, \omega)} |\varphi_s^n(\omega) - \varphi_s(\omega)| \right]^2 \sup_s E[M_s^2] \rightarrow 0 \\
&\Rightarrow \int_0^T (\varphi^n - \varphi) dM \xrightarrow{L^2} 0 \\
&\Rightarrow \int_0^T \varphi^n dM \xrightarrow{L^2} \int_0^T \varphi dM \\
&\Rightarrow \int_0^T \varphi^n dM \xrightarrow{P} \int_0^T \varphi dM.
\end{aligned}$$

Sonuç olarak, Wiener süreci (çünkü martingale karesel kuvvetle integrallenebilir), Poisson süreci (sonlu bir değişim süreci) ve tüm Lévy süreçleri yarı martingaledir, çünkü bir Lévy süreci ikinci mertebeden integrallenebilir bir martingaledir ve sonlu bir değişim sürecinin toplamına ayrıştırılabilir.



Şekil 4. 1. Yalnızca integral sıçramaların rastgele integral sıçramalara yol açtığını (2) rastgele integralin Càdlàg günlüğünün örnek bir yörüngeye sahip olduğunu gösterir.

4.10.3. Càdlàg süreci için integrand

Gerçek alım satım stratejileri genellikle (4.40) ile temsil edilir, bu nedenle tahmini süreçler için stokastik integrallerin tanımı basit gibi görünse de, bazı stratejiler (örneğin, alım satım opsiyonlarının riskinden korunma stratejileri) ekonomik nedenlerle (4.40) olarak ifade edilemez. Bu tür stratejiler sadece basit bir tahmin edilebilir süreçle tahmin edilebilir. Bu sınırlama, stokastik integralleri basit tahmin edilebilir süreçlerin ötesine genişletmek için bir motivasyon sunar.

Örnek 4.6, S 'nin bir sıçraması olduğunda, S 'ye göre rastgele bir integrandın tanımlanamayacağını ve sağdan sürekli integralleri koruyarak (örneğin, Önerme 4.4 gibi) bu nedenle sol-sürekli integralleri (Càdlàg) dikkate almalıyız.

$S([0, T])$, $[0, T]$ üzerinde basit tahmin edilebilir süreçler ve $L([0, T])$, $[0, T]$ üzerinde tüm Càdlàg süreçlerinin kümesi olsun. Her $\varphi \in L([0, T])$ Càdlàg süreci, bir $(\varphi^n) \in S([0, T])$ basit tahmin edilebilir süreçler dizisi ile yaklaşık olarak hesaplanır [44]. (4.45) ve (4.46) bağlantılarını kullanarak, $\int \varphi dS$ rastgele integrali $\int \varphi^n dS$ 'nin limiti olarak tanımlanabilir. Ayrıca, adi Riemann toplamı ayrık bir yaklaşım olarak kabul edilebilir.

Önerme 4.9. Riemann toplamı ile rastgele integral

S 'nin bir yarı martingale olduğunu, φ 'in bir Càdlàg süreci olduğunu ve $\pi^n = (t_0^n = 0 < t_1^n < \dots < t_{n+1}^n = T)$, $[0, t]$ üzerindeki rastgele dağılımların bir dizisi olduğunu

varsayalım, böylece $n \rightarrow \infty$ iken, neredeyse kesinlikle $|\pi^n| = \sup_k |T_k^n - T_{k-1}^n| \rightarrow 0$ olur.

Bu durumda yakınsama

$$\varphi_0 S_0 + \sum_{i=0}^n \varphi_{T_i} (M_{T_{i+1} \wedge t} - M_{T_i \wedge t}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \int_0^t \varphi_{u^-} dS_u \quad (4.47)$$

$[0, T]$ üzerinde, t 'ye göre düzgündür.

Yukarıdaki tanım, Riemann integralinin tanımına çok benzer. Tek fark, aralığın sol uç noktası için S değışikliklerinin sol tarafının (4.47) toplamının φ_t ile çarpılması gerektiğidir. Ancak Riemann integralinde φ değeri, limiti değıştirmeden $[T_i, T_{i+1}]$ aralığının herhangi bir noktasında tanımlanabilir. Bir Càdlàg sürecini bir tahmin edilebilir süreçye yaklaştıarak, basit tahmin edilebilir integrand için önerilen özelliklerin Càdlàg integrand için de geçerli olduğü gösterilebilir. S bir yarı martingale ise, $(\sigma_t)_{t \in [0, T]}$ adaptif her Càdlàg süreci için $(\Omega, \mathcal{F}, (F_t), P)$ aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- Yarı martingale özelliğı: $S_t := \int_0^t \sigma dX$ bir yarı martingaledir.
- Birleşme: φ_t adaptif Càdlàg süreçse, o zaman

$$\int_0^t \varphi dX = \int_0^t (\varphi \sigma) dX$$

- Koruyan Martingale Özelliğı: $(X_t)_{t \in [0, T]}$ ikinci mertebeden integrallenebilir bir martingale ve φ sınırlı ise, o zaman $M_t = \int_0^t \varphi dX$ rastgele integral, ikinci mertebeden integrallenebilir bir martingaledir.

4.10.4. Brownian hareketine göre rastgele integraller

Wiener süreci yarı martingaledir, bu nedenle rastgele integral, Wiener sürecine kıyasla yukarıdaki gibi tanımlanabilir. φ basit tahmin edilebilir süreci verilmiştir.

$$\varphi_t = \varphi_0 1_{\{0\}} + \sum_{i=0}^n \varphi_i 1_{[T_i, T_{i+1}]}(t)$$

$\int \varphi dW$ rastgele integralini

$$\int_0^T \varphi_t dW_t = \sum_{i=0}^n \varphi_i (W_{T_{i+1}} - W_{T_i})$$

olarak tanımlıyoruz.

W_t , martingale olduundan, $\int_0^t \varphi dW$ da bir martingale olacaktır ve $E \left[\int_0^T \varphi_t dW_t \right] = 0$. W 'nin bağımsız artış özelliğini kullanarak, ikinci momet de hesaplanabilir.

$$\begin{aligned}
E \left[\left| \int_0^T \varphi_t dW_t \right|^2 \right] &= Var \left[\sum_{i=0}^n \varphi_i (W_{T_i} - W_{T_{i+1}}) \right] \\
&= \sum_{i=0}^n E \left[\varphi_i^2 (W_{T_i} - W_{T_{i+1}})^2 \right] \\
&\quad + 2 \sum_{i>j} Cov \left(\varphi_i (W_{T_{i+1}} - W_{T_i}), \varphi_j (W_{T_j} - W_{T_{j+1}}) \right) \\
&= \sum_{i=0}^n E \left[E \left[\varphi_i^2 (W_{T_i} - W_{T_{i+1}})^2 \middle| F_{T_i} \right] \right] \\
&\quad + \sum_{i>j} E \left[E \left[\varphi_i \varphi_j (W_{T_{i+1}} - W_{T_i}) (W_{T_j} - W_{T_{j+1}}) \middle| F_{T_i} \right] \right] \\
&= \sum_{i=0}^n E \left[\varphi_i^2 (W_{T_i} - W_{T_{i+1}})^2 \middle| F_{T_i} \right] + 0 \\
&= \sum_{i=0}^n E[\varphi_i^2] (T_{i+1} - T_i) = E \int_0^T \varphi_t^2 dt
\end{aligned}$$

Bu çok yararlı bağlantıya izometrik formül denir.

Önerme 4.10. İzometrik formülü: Basit integrand

$(X_t)_{t \in [0, T]}$, basit tahmin edilebilir süreci ve $(W_t)_{t \in [0, T]}$ bir Wiener süreci olsun. Bu durumda,

$$E \left[\int_0^T \varphi_t dW_t \right] = 0 \quad (4.48)$$

$$E \left[\left| \int_0^T \varphi_t dW_t \right|^2 \right] = E \left[\int_0^T |\varphi_t|^2 dt \right] \quad (4.49)$$

İzometrik formülü kullanarak, aşağıdaki ilişki için geçerli olan Wiener sürecine göre basit tahmin edilebilir süreçler $(\varphi_t)_{t \in [0, T]}$ için rastgele bir integral yapmak mümkündür.

$$E \left[\int_0^T |\varphi_t|^2 dt \right] < \infty \quad (4.50)$$

φ 'ye L^2 'deki basit tahmin süreçleri (φ^n) 'nin bir dizisi ile yaklaşılarak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$E \left[\int_0^T |\varphi_t^n - \varphi_t|^2 dt \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

İzometrik formülü (4.49) kullanılarak, $\int_0^T \varphi_t^n dW_t$ 'nin $L^2(P)$ 'de $\int_0^T \varphi dW_t$ 'ye yakınsak olduğunu gösterilebiliriz.

Önerme 4.11. Brownian integralleri için izometrik formül

φ , aşağıdaki ilişkide geçerli olan bir tahmin edilebilir süreci olsun:

$$E \left[\int_0^T |\varphi_t|^2 dt \right] < \infty. \quad (4.51)$$

Bu durumda, $\int_0^T \varphi dW$, ikinci mertebeden integrallenebilir martingale ve

$$E \left[\int_0^T \varphi_t dW_t \right] = 0 \quad (4.52)$$

$$E \left[\left| \int_0^T \varphi_t dW_t \right|^2 \right] = E \left[\int_0^T |\varphi_t|^2 dt \right] \quad (4.53)$$

Bu yapı bize iyi tanımlanmış rastgele değişken $\int_0^T \varphi dW$ 'yı sağlasa da, φ , “alım satım”ın stratejisi” olarak yorumlanamaz çünkü mutlaka C  dl  g değildir ve integrali mutlaka Riemann toplamlarının limiti olarak temsil edilemez.

4.10.5. Poisson rastgele değişkeni üzerinden rastgele integral

Bu kesimde, Poisson rastgele değişkenine göre tahmin edici fonksiyonların integrallerini açıklıyoruz.

M , yoğunluğu $\mu(dt dx)$ olan $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ üzerinde bir Poisson rastgele değişkeni olsun. $\tilde{M}$ telafi edilmiş bir rastgele   l  m, M 'nin merkezi versiyonu olarak tanımlanır, yani,

$$\tilde{M}(A) = M(A) - \mu(A) = M(A) - E[M(A)]$$

olur.

2.4.1 bölümünden, her   l  c  lebilir $A \subset \mathbb{R}^d$ kümesi için $M_t(A) = M([0, t] \times A)$, $\mu([0, T] \times A) < \infty$ '  n bir sayma sürecini tanımladığını ve $\tilde{M}_t(A) = M([0, t] \times A) - \mu([0, t] \times A)$ bir martingale olduğunu biliyoruz.

Şimdi $\varphi: \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^d$ basit tahmin edilebilir fonksiyonunu ele alalım.

$$\varphi(t, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \varphi_{ij} 1_{[T_i, T_{i+1}]}(t) 1_{A_j}(y) \quad (4.54)$$

Burada $T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_n$ rastgele adaptif zamanlar, $(\varphi_{ij})(j = 1, 2, \dots, m)$ sınırlı $F(T_i)$ -ölçülebilir rastgele değişkenler, $(A_j)_{j=1,2,\dots,m}$, $\mathbb{R}^d$ 'den ayrı alt kümeler ve $\mu([0, T] \times A_j) < \infty$. $\int_{[0,T] \times \mathbb{R}^d} \varphi(t, y) M(dtdy)$ rastgele integral olarak tanımlanır:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(t, y) M(dtdy) &= \sum_{i,j=1}^{n,m} \varphi_{ij} M([T_i, T_{i+1}] \times A_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \varphi_{ij} [M_{T_{i+1}}(A_j) - M_{T_i}(A_j)]. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Benzer bir şekilde, $t \mapsto \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(s, y) M(dsdy)$ sürecini aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(t, y) M(dtdy) = \sum_{i,j=1}^{n,m} \varphi_{ij} [M_{T_{i+1} \wedge T}(A_j) - M_{T_i \wedge T}(A_j)] \quad (4.56)$$

$t \mapsto \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(s, y) M(dsdy)$ rastgele integrali bir adaptif Càdlàg süreçtir.

$\int_{[0,T] \times \mathbb{R}^d} \varphi(t, y) \tilde{M}(dtdy)$ 'in telafi edilmiş integrali de rastgele bir değişken olarak tanımlanır.

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(t, y) \tilde{M}(dtdy) &= \sum_{i,j=1}^{n,m} \varphi_{ij} \tilde{M}([T_i, T_{i+1}] \times A_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n,m} \varphi_{ij} [M([T_i, T_{i+1}] \times A_j) - \mu([T_i, T_{i+1}] \times A_j)] \end{aligned} \quad (4.57)$$

C mleri $T_i \leq t$ ile sınırlayarak (yani t 'de durarak), sonu ta ortaya  ıkan rastgele s re  elde edilir:

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(s, y) \tilde{M}(dsdy) = \sum_{i,j=1}^{n,m} \varphi_{ij} [\tilde{M}_{T_{i+1} \wedge t}(A_j) - \tilde{M}_{T_i \wedge t}(A_j)]. \quad (4.58)$$

Önerme 4.12. Koruyan Martingale özelliği

$\varphi: \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^d$ için basit tahmin edilebilir bir fonksiyon olsun. Telif edilmiş integral, $(X_t)_{t \in [0, T]}$ tarafından tanımlanan

$$X_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(s, y) \tilde{M}(ds dy)$$

süreci, ikinci mertebeden integrallenebilir bir martingale'dir ve

$$E[|X_t|^2] = E \left[\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(s, y)|^2 \mu(ds dy) \right] \quad (4.59)$$

izometrik bir formül olarak geçerlidir.

İspat: [16, Bölüm 8]'e bakınız.

Bizi ilgilendiren durum, sıçrama zamanı ve $(S_t)_{(t \in [0, T])}$ rastgele sürecin sıçrama değerleri ve M sıçrama değerlerini açıklayan Poisson rastgele değişkenidir. M sıçrama ölçüsü, (2.18) denkleminde olduğu gibi

$$M = J_S(\omega, \cdot) = \sum_{t \in [0, T]}^{\Delta S_t = 0} \delta_{(t, \Delta S_t)}$$

olarak tanımlanır.

S , Lévy ölüsü olan bir Lévy süreci ise, o zaman sıçrama boyutu J_S , yoğunluğu $\mu(dt dx) = dt \nu(dx)$ olan bir Poisson rastgele değişkenidir.

Sonra, φ integral tahmin edilebilir (4.55) stokastik bir fonksiyonu için, sıçrama zamanları ve sıçrama değerleri ile ilgili cümlelerin toplamı S_t 'dir:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(t, y) M(dt dy) = \sum_{t \in [0, T]}^{\Delta S_t = 0} \varphi(t, \Delta S_t). \quad (4.60)$$

4.11. İkinci Mertebeden Değişim

Tanım 4.2. İkinci dereceden değişim, yarı martingale X 'in ikinci dereceden değişimi, aşağıdaki gibi tanımlanan adaptif Càdlàg süreçtir:

$$[X, X]_t := |X_t|^2 - 2 \int_0^t X_u - d X_u \quad (4.61)$$

Teorem 4.5. İkinci dereceden değişim süreci X , Càdlàg, adaptif ve artımlı bir süreçtir. Ayrıca,

- i. $[X, X]_0 = X_0^2, \Delta[X, X] = (\Delta X)^2$
- ii. $\pi^n = (t_0^n = 0 < t_1^n < \dots < t_{n+1}^n = T), [0, T]$ üzerindeki bölmelerin bir dizisi olduğunu varsayalım, böylece, $n \rightarrow \infty$ iken, $|\pi^n| = \sup_k |t_k^n - t_{k-1}^n| \rightarrow 0$ ise, o zaman

$$\sum_{t_i \in \pi^n}^{0 \leq t_i \leq t} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} [X, X]_t$$

Yakınsaklığı, t 'ye göre düzgündür.

İspat: [44]'e bakınız.

Teorem 3.4'ten, eğer X sürekliyse ve sonlu değişimli örnek yörüngeye sahipse, X 'in toplam değişimi $[0, T]$ üzerinde, $TV(X)$ ise, şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned} \sum_{t_i \in \pi^n}^{0 \leq t_i \leq t} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 &\leq \sup_i |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}| \sum_{t_i \in \pi^n} |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}| \\ &\leq \sup_i |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}| TV(X) \xrightarrow{|\pi| \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Bu nedenle, sonlu değişime sahip sürekli süreçler için ikinci mertebeden değişim sıfırdır.

Tanım 4.3. Yarı martingale X için, $[X, X]^c$ süreci, $[X, X]$ yörüngesine giden yörüngenin sürekli kısmını ifade eder ve aşağıdaki özelliğe sahip oluruz:

$$[X, X]_t = [X, X]_t^c + \sum_{0 \leq s \leq t} (\Delta X(s))^2. \quad (4.62)$$

Önerme 4.13. İkinci mertebeden değişikliğın özellikleri

- $([X, X]_t)_{t \in [0, T]}$, artan bir süreçtir.
- $\Delta[X, X]_t = |\Delta X_t|^2$ ifadesiyle $[X, X]$ 'nin sıçramaları, X 'in sıçramalarına bağlıdır.
- $[X, X]$ sürekli örnek yörüngelere sahiptir, ancak ve ancak X sürekli ise.
- X sürekli ise ve sonlu değişimli yörüngelere sahipse, o zaman $[X, X] = 0$.
- X bir martingale ve $[X, X] = 0$ ise, o zaman neredeyse kesinlikle $X = X_0$.

İspat: [44]'e bakınız.

İkinci mertebeden değişimin varyanstan farklı olarak beklenti değeri hesaplanarak belirlenmediği, bir “örnek yörünge” özelliği olduğu unutulmamalıdır.

Önerme 4.14. Brownian hareketinin ikinci mertebeden değişimi $B_t = \sigma W_t$ ise, o zaman $[B, B]_t = \sigma^2 t$ olur. (W standart Wiener sürecidir.)

İspat: $\pi^n = (t_0^n = 0 < t_1^n < \dots < t_{n+1}^n = T), [0, T]$ üzerindeki bölmelerin dizisi olduğunu varsayalım, öyle ki, $n \rightarrow \infty$ iken, $|\pi^n| = \sup_k |t_k^n - t_{k-1}^n| \rightarrow 0$. Bu durumda,

$$V_B(\pi^n) - \sigma^2 T = \sum_{\pi^n} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - \sigma^2 (t_{i+1} - t_i)$$

sıfır ortalamalı bağımsız cümleler toplamıdır.

$$\begin{aligned} E|V_B(\pi^n) - \sigma^2 T|^2 &= \sum_{\pi^n} E \left[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - \sigma^2 (t_{i+1} - t_i) \right]^2 \\ &= \sum_{\pi^n} \sigma^4 |t_{i+1} - t_i|^2 E \left[\left(\frac{(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2}{\sigma^2 (t_{i+1} - t_i)} - 1 \right)^2 \right] \\ &= \sigma^4 \sum_{\pi^n} \sigma^4 |t_{i+1} - t_i|^2 E[(Z^2 - 1)^2] \quad (Z \sim N(0,1) \text{ ise}) \\ &\leq E[(Z^2 - 1)^2] \sigma^4 T |\pi^n| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

$E|V_B(\pi^n) - \sigma^2 T|^2 \rightarrow 0$ 'dan, $V_B(\pi^n)$ 'nin olasılıkta $\sigma^2 T$ 'ye yakınsak olduğu sonucuna varıyoruz. X bir Brownian hareketi ise, $[X, X]_t, X_t$ 'nin varyansına eşit olacağına dikkat edebiliriz.

Tanım 4.4. $[X, X]^c = 0$ ise, o zaman X yarı martingale olarak adlandırılır ve ikinci mertebeden pure sıçrama süreci olarak kabul edilir.

X ikinci mertebeden pure sıçrama süreciyse, o zaman Tanım 4.3'e göre

$$[X, X]_t = \sum_{0 \leq s \leq t} (\Delta X(s))^2$$

olur. Poisson süreci, ikinci mertebeden pure sıçrama yarı martingale için iyi bilinen bir örnektir.

Örnek 4.6. Poisson sürecinin ikinci mertebeden değişimi N bir Poisson süreciyse, tanımdan veya Teorem 4.5'den $[N, N]_t = N_t$ olduğu kolayca görülür. $X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Z_i$, N_t bir sayma

süreci, T_i sıçrama süreçleri ve Z_i 'ler bağımsız ve aynı dağılıma sahip rastgele değişkenler olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Z_i \Rightarrow [X, X]_t = \sum_{i=1}^{N_t} |Z_i|^2 = \sum_{0 \leq s \leq t} |\Delta X_s|^2. \quad (4.63)$$

Örnek 4.7. Lévy sürecinin ikinci mertebeden değişimi $X, (\sigma^2, \nu, \gamma)$ üçlü karakteristik ile bir Lévy süreci olsun. Lévy-Itô ayrıştırmasına göre, aşağıdaki gibi ikinci dereceden bir değişim sürecine sahiptir:

$$[X, X]_t = \sigma^2 t + \sum_{\substack{0 \leq s \leq t \\ \Delta X_s \neq 0}} |\Delta X_s|^2 = \sigma^2 t + \int_{[0,t]} \int_{\mathbb{R}} y^2 J_X(ds dy) \quad (4.64)$$

Bir Lévy sürecinin ikinci mertebeden değişimi yine bir Lévy sürecidir [16, Bölüm 3].

Örnek 4.8. Poisson integralinin ikinci mertebeden değişimi $M, [0, T] \times \mathbb{R}^d$ üzerinde $\mu(ds dy)$ yoğunluğuyla Poisson ölçüsü ve $\psi: [0, T] \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ basit tahmin edilebilir rastgele bir fonksiyon olsun. X sürecini ψ 'nin M 'ye göre integrali olarak tanımlıyoruz.

$$X_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \psi(s, y) M(ds dy)$$

X 'in ikinci mertebeden değişimi aşağıdaki ifade ile belirlenir:

$$[X, X]_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |\psi(s, y)|^2 M(ds dy) \quad (4.65)$$

4.12. Itô Formülü

Leibniz kalkülüsünden, her $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları için

$$\frac{d}{dt} f(g(t)) = f'(g(t))g'(t)$$

zincir kuralı, integral biçiminde

$$f(g(t)) - f(g(0)) = \int_0^t f'(g(s))g'(s)ds = \int_0^t f'(g(s))dg(s) \quad (4.66)$$

olduğunu biliyoruz. Bu ifadeyi $f(x) = x^2$ için kullanırsak,

$$g(t)^2 - g(0)^2 = 2 \int_0^t g(s)dg(s)$$

ve 4.11 kesiminden X yarı martingale olduğu zaman

$$X_t^2 - X_0^2 = 2 \int_0^t X_s^- dX_s + [X, X]_t$$

Olduunu gösterebiliriz ve genel olarak $[X, X] \neq 0$ ifadesi doğrudur [16].

$g(y) = y^2/2$ için klasik değişken değiştirme formülü ile şunu elde ederiz:

$$\int_0^t B(s)dB(s) = \frac{1}{2}B(t)^2$$

Ancak, Itô formülü değeri $\int_0^t B(s)dB(s)$ için $B(t)^2/2 - t/2$ olur.

Önerme 4.15. Itô formülü

X bir yarı maringale ve $f \in C^2(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ üzerinde iki kez türevlenebilir fonksiyon ise, $f(X)$ bir yarı martingaledir ve

$$\begin{aligned} f(X(t)) - f(X(0)) &= \int_{0+}^t f'(X(s^-))dX(s) + \frac{1}{2} \int_{0+}^t f''(X(s^-))d[X, X]^c(s) \\ &\quad + \sum_{0 \leq s \leq t} [f(X(t)) - f(X(s^-)) - f'(X(s^-))\Delta X(s)] \end{aligned} \quad (4.67)$$

formülü her $t \geq 0$ için neredeyse kesinlikle doğrudur.

İspat: [44]'e bakınız.

Notasyon: $f \in C^2(\mathbb{R})$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekli ve ikinci mertebeden türevlenebilir olduğu ve f' ve f'' , f fonksiyonunun birinci ve ikinci türevini gösteriyor. 4.67 bağıntısının sağındaki son iki terim klasik hesaplamalarda görülmez.

$[X, X]$ ile $[X, X]^c$ arasındaki ilişkiye göre, Itô formülünü yarı martingaleler için

$$\begin{aligned} f(X(t)) - f(X(0)) &= \int_{0+}^t f'(X(s^-))dX(s) + \frac{1}{2} \int_{0+}^t f''(X(s^-))d[X, X](s) \\ &\quad + \sum_{0 \leq s \leq t} \left[f(X(t)) - f(X(s^-)) - f'(X(s^-))\Delta X(s) - \frac{1}{2} f''(X(s^-))(\Delta X(s))^2 \right] \end{aligned} \quad (4.68)$$

olarak da yazılabilir.

Önerme 4.16. Sürekli yarı martingale için Itô formülü

X sürekli bir yarı maringale ve $f \in C(\mathbb{R})$ ise, o zaman $f(X)$ sürekli bir yarı martingaledir.

Itô formülünün türev ve integral formu aşağıdaki gibidir:

$$df(X(t)) = f'(X(t))dX(t) + \frac{1}{2}f''(X(t))d[X, X](t) \quad (4.69)$$

$$f(X(t)) - f(X(0)) = \int_{0+}^t f'(X(s^-))dX(s) + \frac{1}{2} \int_{0+}^t f''(X(s^-))d[X, X](s)$$

İspat: [34]'e bakınız.

sürekli yarı martingale , tüm $t \geq 0$, $\Delta X(t) = 0$ için ve X , sürekli örnek yörüngelere sahip ise, o zaman $[X, X](t) = [X, X]^c(t)$ olur [34].

Önerme 4.17. Lévy süreci için Itô formülü

(σ^2, ν, γ) üçlü Lévy ile bir Lévy süreci ve $f \in C^2(\mathbb{R})$ olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} f(X_t) = f(0) &+ \int_0^t \frac{\sigma^2}{2} f''(X_s) ds + \int_0^t \frac{\sigma^2}{2} f'(X_{s^-}) ds \\ &+ \sum_{\substack{0 \leq s \leq t \\ \Delta X_s \neq 0}} [f(X_{s^-} + \Delta X_s) - f(X_{s^-}) - \Delta X_s f'(X_{s^-})] \end{aligned} \quad (4.70)$$

İspat: [16]'ya bakınız.

Notasyon: $f \in C^2(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli ve iki kez türevlenebilir bir f fonksiyonunu tanımlar. f' ve f'' , sırasıyla, f fonksiyonunun birinci ve ikinci türevlerini gösterir.

4.67 bağıntısının sağındaki son iki terim klasik hesaplamalarda görülmez.

$[X, X]$ ile $[X, X]^c$ arasındaki ilişkiye göre, Itô formülünü yarı martingaleler için şu şekilde ifade edebiliriz:

$$\begin{aligned} f(X(t)) - f(X(0)) &= \int_{0+}^t f'(X(s^-))dX(s) + \frac{1}{2} \int_{0+}^t f''(X(s^-))d[X, X](s) \\ &+ \sum_{0 \leq s \leq t} \left[f(X(t)) - f(X(s^-)) - f'(X(s^-))\Delta X(s) - \frac{1}{2}f''(X(s^-))(\Delta X(s))^2 \right]. \end{aligned}$$

Önerme 4.18. Sürekli yarı martingaleler için Itô formülü

X sürekli bir yarı martingale ve $f \in C(\mathbb{R})$ ise, o zaman $f(X)$ sürekli bir yarı martingaledir. Itô formülünün türev ve integral formu aşağıdaki gibidir:

$$df(X(t)) = f'(X(t))dX(t) + \frac{1}{2}f''(X(t))d[X, X](t)$$

$$f(X(t)) - f(X(0)) = \int_{0+}^t f'(X(s^-))dX(s) + \frac{1}{2} \int_{0+}^t f''(X(s^-))d[X, X](s).$$

İspat: [34]'e bakınız.

Sürekli yarı martingaleler, tüm $t \geq 0$ için $\Delta X(t) = 0$ ve X sürekli örnek yörüngelere sahipse, o zaman $[X, X](t) = [X, X]^c(t)$ olur [34].

Önerme 4.19. Lévy süreci için Itô formülü (σ^2, ν, γ) üçlüsüyle bir Lévy süreci X ve $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} f(X_t) = f(0) &+ \int_0^t \frac{\sigma^2}{2} f''(X_s) ds + \int_0^t \frac{\sigma^2}{2} f'(X_{s^-}) ds \\ &+ \sum_{\substack{0 \leq s \leq t \\ \Delta X_s \neq 0}} [f(X_{s^-} + \Delta X_s) - f(X_{s^-}) - \Delta X_s f'(X_{s^-})] \end{aligned}$$

İspat: [16]'ya bakınız.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu araştırma, finansal matematik ve opsiyon fiyatlandırma süreçlerinin derinlemesine incelenmesini ve bu süreçlerin yatırımcılar için nasıl önemli araçlar sunduğunu kapsamaktadır. Dört ana bölümde ele alınan konular, finansal modelleme dünyasında karmaşık dinamiklerin anlaşılmasına katkı sağlamaktadır.

Bu tezde, finansal matematik ve opsiyon sözleşmelerinin temel tanımlamaları yapılmıştır. Opsiyon sözleşmelerinin fiyatlandırılmasında kullanılan modellerin gerekliliği vurgulanmış ve bu modellerin yatırımcıların risklerini yönetmelerinde nasıl kritik rol oynadığı açıklanmıştır. Finansal piyasaların dinamiklerini anlamak, yatırımcıların doğru stratejiler geliştirmesi ve risklerini minimize etmesi için ilk adımdır. Sonra, finansal matematik dünyasında piyasa modellemesi için sunulan en ünlü Lévy süreçleri iki ana kategori altında tanıtılmıştır. Sıçrama-difüzyon süreçleri kategorisinde Merton ve Kou modelleri; pure sıçrama süreçleri kategorisinde ise hiperbolik, normal ters Gauss, gama varyansı ve CGMY modelleri ele alınmıştır. Bu modellerin her biri, piyasa hareketlerini daha doğru bir şekilde yansıtmak için belirli avantajlar sunmaktadır. Hangi modelin kullanılacağı, hedef piyasanın verilerine ve yatırımcıların ihtiyaçlarına bağlı olarak değişir. Devamında, karmaşık Lévy süreçlerinin nasıl oluşturulacağı detaylandırılmıştır. Bu modellerin doğrudan olasılık yoğunluğu kullanılarak, Brownian hareketinin zaman ölçeği değiştirilerek ve Lévy ölçüsü ayarlanarak nasıl geliştirileceği gösterilmiştir. Bu süreçlerin oluşturulması, finansal modelleme için gerekli matematiksel altyapının anlaşılmasını sağlar. Son olarak, stokastik analizin temellerine odaklanmıştır. Lévy sıçrama süreçlerinin rastgele yapısı, finansal modelleme dünyasının stokastik hesaplamalarını gerektirir. Bundan dolayı, Càdlàg süreçlerinin yarı-martingallere göre stokastik integrali ve önemli Itô formülü ele alınmıştır. Bu analizler, yatırımcıların portföylerinin değerini doğru bir şekilde hesaplamalarına ve arbitraj fırsatlarını önlemelerine yardımcı olur.

Genel olarak, bu tezde sunulan 5 bölüm, finansal enstrümanların fiyatlarının tahmin edilmesi için gerekli araçları sağlamaktadır. Opsiyon fiyatlandırmasının ilk adımı, fiyat hareketlerinin sürecini doğru bir şekilde anlamaktır. Hisse senedi piyasalarındaki gözlenen fiyat eğilimleri ve dalgalanmalar, matematiksel süreçlerle açıklanabilir. Bu nedenle, uygun modelin seçimi büyük önem taşır.

Yatırımcılar, farklı enstrümanlardan oluşan portföylerini yönetmek için bu modellerden yararlanabilirler. Üstel hisse senedi fiyat süreçleri kullanılarak, rastgele zamanlarda alım satım stratejileri uygulanabilir. Yarı-martingale integratörlü rastgele integral, yatırımcıların portföylerinin değerini hesaplamalarında ve arbitraj fırsatlarını önlemelerinde önemli bir araçtır.

Bu araştırma, finansal matematik ve opsiyon fiyatlandırma süreçlerinin karmaşıklığını anlamak ve bu süreçlerin yatırım stratejilerine nasıl entegre edilebileceğini göstermek için önemli bir katkı sağlamaktadır. Yatırımcılar, doğru model ve stratejilerle finansal piyasalardaki risklerini yönetebilir ve potansiyel getirilerini artırabilirler. Özellikle Lévy süreçlerinin sunduğu esneklik ve doğruluk, finansal modellemede büyük avantajlar sağlamaktadır. Sıçrama-difüzyon ve pure sıçrama süreçlerinin doğru kullanımı, hisse senedi fiyat hareketlerinin daha iyi tahmin edilmesine yardımcı olabilir. Ayrıca, stokastik analiz ve Itô formülünün uygulanması, yatırımcıların karmaşık finansal enstrümanları anlamalarını ve değerlendirmelerini kolaylaştırır. Sonuç olarak, bu araştırma, finansal modelleme dünyasında kullanılan matematiksel araçların ve süreçlerin kapsamlı bir incelemesini sunarak, yatırımcıların bilinçli kararlar almalarına ve piyasalardaki dalgalanmalara karşı daha hazırlıklı olmalarına katkıda bulunmaktadır. Bu sayede, finansal piyasalarda daha etkin ve verimli stratejiler geliştirilebilir, yatırımcıların hedeflerine ulaşmaları daha mümkün hale gelir.

Bu tez, finansal matematik ve opsiyon fiyatlandırma süreçlerinin derinlemesine incelenmesini sunmakta olup, gelecekteki araştırmalar ve geliştirmeler için çeşitli önerilerde bulunulabilir:

1. Lévy Süreçlerinin Geliştirilmesi ve Uygulama Alanları:

- Lévy süreçlerinin daha karmaşık piyasa koşullarını modelleyebilme kapasitesinin artırılması için yeni yöntemler geliştirilebilir. Özellikle, Lévy süreçlerinin hiperparametre ayarlamaları ve karmaşık piyasa hareketlerini yansıtmaya yetenekleri üzerine daha fazla çalışma yapılabilir.
- Lévy süreçlerinin diğer finansal araçlar ve ürünlerle entegrasyonu üzerine araştırmalar yapılabilir. Örneğin, karmaşık türev ürünlerinin fiyatlandırmasında Lévy süreçlerinin kullanımı üzerine çalışmalar genişletilebilir.

2. Model Performansının Karşılaştırılması:

- Merton ve Kou modelleri ile hiperbolik, NIG, VG ve CGMY modellerinin performanslarını karşılaştıran daha kapsamlı çalışmalara ihtiyaç duyulmaktadır. Farklı piyasa koşullarında bu modellerin etkinlikleri ve doğrulukları detaylı olarak incelenebilir.
- Finansal verilerle bu modellerin performanslarının gerçek dünya uygulamaları üzerinde değerlendirilmesi, hangi modellerin hangi koşullarda daha iyi sonuç verdiğini belirlemek açısından faydalı olabilir.

3. Stokastik Analizlerin Derinleştirilmesi:

- Stokastik analizlerin, özellikle C  dl  g süreçleri ve yarı-martingale analizlerinin daha geniş uygulama alanları üzerine çalışılabilir. Yarı-martingale süreçlerinin finansal piyasaların dinamiklerini daha iyi modellemede nasıl kullanılabileceği üzerine yeni yöntemler geliştirilebilir.
- Stokastik integrallerin ve It   formülünün daha karmaşık finansal yapıların analizindeki rolü üzerine derinlemesine araştırmalar yapılabilir.

4. Yeni Finansal Araçların İncelenmesi:

- Finansal modelleme için yeni finansal araçlar ve enstrümanların geliştirilmesi ve bu araçların L  vy süreçleri ve stokastik analizlerle entegrasyonu üzerine çalışmalar yapılabilir.
- Kripto paralar ve diğer dijital varlıklar gibi yeni finansal enstrümanların fiyatlandırması üzerine yapılan araştırmalar genişletilebilir ve bu araçlar için uygun modeller geliştirilebilir.

5. Makine   ğrenmesi ve Yapay Zeka Uygulamaları:

- Finansal modelleme ve opsiyon fiyatlandırmasında makine öğrenmesi ve yapay zeka tekniklerinin kullanımı üzerine araştırmalar yapılabilir. Bu tekniklerin L  vy süreçleri ve stokastik analizlerle nasıl entegre edilebileceği incelenebilir.

- Model doğruluğunu artırmak için veri tabanlı yaklaşımlar ve yapay zeka algoritmaları ile finansal tahminlerin nasıl iyileştirilebileceği üzerine çalışmalar yapılabilir.

6. Gerçek Zamanlı Veri ve Portföy Yönetimi:

- Gerçek zamanlı veri kullanarak portföy yönetimi stratejilerinin nasıl geliştirilebileceği üzerine araştırmalar yapılabilir. Lévy süreçlerinin ve stokastik analizlerin gerçek zamanlı veri ile nasıl uyumlu hale getirilebileceği konusunda yeni yöntemler geliştirilebilir.
- Portföy optimizasyonu ve risk yönetimi stratejilerinde daha etkili yöntemlerin araştırılması, yatırımcıların finansal piyasalarda daha başarılı olmasını sağlayabilir.

Bu öneriler, finansal modelleme ve opsiyon fiyatlandırma alanındaki araştırmaların genişletilmesi ve iyileştirilmesi için temel oluşturabilir. Gelecekte yapılacak bu tür çalışmalar, yatırımcıların finansal piyasalardaki riskleri daha iyi yönetmelerine ve daha bilinçli yatırım kararları almalarına yardımcı olabilir.

KAYNAKLAR

- [1] H. Allouba, “A Differentiation Theory for Itô’s Calculus,” *Stochastic Analysis and Applications*, vol. 24, pp. 363-380, 2006.
- [2] T. M. Apostol, *Mathematical Analysis*, Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, 1974.
- [3] D. Applebaum, *Lévy Processes and Stochastic Calculus*, Cambridge, U.K.: Cambridge University Press, 2004.
- [4] O. E. Barndorff-Nielsen and C. Halgreen, “Infinitely Divisibility of the Hyperbolic and Generalized Inverse Gaussian Distribution,” *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, vol. 38, pp. 309-311, 1977.
- [5] O. E. Barndorff-Nielsen, “Processes of Normal Inverse Gaussian Type,” *Finance Stoch.*, pp. 41-68, 1998.
- [6] O. E. Barndorff-Nielsen, “Normal Inverse Gaussian Distributions and Stochastic Volatility Modeling,” *Scandinavian Journal of Statistics*, vol. 24, pp. 1-13, 1997.
- [7] E. Benhamou, “Option Pricing with Lévy Process,” *JEL Classification: G13*, 2000.
- [8] A. Bensoussan and J. L. Lions, *Contrôle Impulsionnel et Inéquations Quasi-Variationnelles*, Paris, France: Dunod, 1982.
- [9] F. Black and M. Scholes, “The Pricing of Options and Corporate Liabilities,” *The Journal of Political Economy*, vol. 81, no. 3, pp. 637-654, 1973.
- [10] P. Blaesild and M. Sørensen, *hyp: A Computer Program for Analyzing Data by Means of the Hyperbolic Distribution*, Research Report 248, Department of Theoretical Statistics, University of Aarhus, 1992.
- [11] L. Breiman, *Probability*, Reading, MA: Addison-Wesley, 1968.
- [12] P. Carr and D. Madan, “Option Valuation Using the Fast Fourier Transform,” *Journal of Computational Finance*, vol. 2, pp. 61-73, 1998.

- [13] P. Carr, H. Geman, D. Madan, and M. Yor, "Stochastic Volatility for Lévy Processes," *Mathematical Finance*, vol. 13, pp. 345-382, 2003.
- [14] P. Carr, H. Geman, D. Madan, and M. Yor, "The Fine Structure of Asset Returns: An Empirical Investigation," *Journal of Business*, vol. 75, 2002.
- [15] P. Carr and L. Wu, "Time-changed Lévy Processes and Option Pricing," *Journal of Financial Economics*, vol. 71, no. 1, pp. 113-141, 2004.
- [16] R. Cont and P. Tankov, *Financial Modelling with Jump Processes*, Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series, 2004.
- [17] J. Doob, *Stochastic Processes*, New York, NY: Wiley, 1953.
- [18] E. Eberlein and U. Keller, "Hyperbolic Distributions in Finance," *Bernoulli*, vol. 1, no. 3, pp. 281-299, 1995.
- [19] E. Eberlein, U. Keller, and K. Prause, "New Insights into Smile, Mispricing, and Value at Risk: The Hyperbolic Model," *Journal of Business*, vol. 71, pp. 371-405, 1998.
- [20] A. Etheridge, *A Course in Financial Calculus*, Cambridge, U.K.: Cambridge University Press, 2002.
- [21] H. Fama, "The Behavior of Stock Market Prices," *Journal of Business*, vol. 38, pp. 34-105, 1965.
- [22] B. Fristedt and L. Gray, *A Modern Approach to Probability Theory*, Boston, MA: Birkhäuser, 1997.
- [23] H. Geman, "Pure Jump Lévy Processes for Asset Price Modeling," *Journal of Banking and Finance*, vol. 26, pp. 1297-1316, 2002.
- [24] H. Geman, D. Madan, and M. Yor, "Time Changes for Lévy Processes," *Mathematical Finance*, vol. 11, pp. 79-96, 2001.
- [25] M. Grigoriu, *Stochastic Calculus: Applications in Science and Engineering*, Boston, MA: Birkhäuser, 2002.

- [26] C. Halgreen, "Self-Decomposability of the Generalized Inverse Gaussian and Hyperbolic Distributions," *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, vol. 47, pp. 13-18, 1979.
- [27] F. B. Hanson and J. J. Westman, "Jump-Diffusion Stock Return Models in Finance: Stochastic Process Density with Uniform-Jump Application," Course book, University of Illinois, Chicago, 2002.
- [28] J. C. Hull, *Fundamentals of Futures and Options Markets*, Prentice Hall Finance Series, Pearson Education Inc., New Jersey, 2001.
- [29] O. Kallenberg, *Foundations of Modern Probability*, New York, NY: Springer, 1997.
- [30] I. Karatzas and S. E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, New York, NY: Springer-Verlag, 1988.
- [31] A. F. Karr, *Probability*, Mathematical Subject Classification, Springer-Verlag, 1992.
- [32] F. C. Klebaner, *Introduction to Stochastic Calculus with Applications*, Imperial College Press, 2001.
- [33] I. Koponen, "Analytic Approach to the Problem of Convergence of Truncated Lévy Flights Towards the Gaussian Stochastic Process," *Physical Review*, vol. E52, pp. 1197-1199, 1995.
- [34] H. H. Kuo, *Stochastic Differential Equations*, Springer New York, pp. 185-230, 2006.
- [35] S. G. Kou and H. Wang, *Option Pricing Under a Jump-Diffusion Model*, Working Paper, 2001.
- [36] S. G. Kou, "A Jump-Diffusion Model for Option Pricing," *Management Science*, vol. 48, pp. 1086-1101, 2002.
- [37] S. G. Kou, "Lévy Processes in Asset Pricing," Working Paper, 2002.

- [38] D. Madan, "Financial Modeling with Discontinuous Price Processes," in *Lévy Processes-Theory and Applications*, O. Barndorff-Nielsen, T. Mikosch, and S. Resnick, Eds., Boston, MA: Birkhäuser, 2001.
- [39] D. Madan, P. Carr, and E. C. Chang, "The Variance Gamma Process and Option Pricing," *European Finance Review*, vol. 2, pp. 79-105, 1998.
- [40] D. Madan and E. Seneta, "The VG Model for Share Market Returns," *Journal of Business*, vol. 63, pp. 511-524, 1990.
- [41] R. Merton, "Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous," *Journal of Financial Economics*, vol. 3, pp. 125-144, 1976.
- [42] S. Press, "A Compound Events Model for Security Prices," *Journal of Business*, vol. 40, pp. 317-335, 1967.
- [43] P. Protter, "A Partial Introduction to Financial Asset Pricing Theory," *Stochastic Processes and their Applications*, vol. 91, pp. 169-203, 2001.
- [44] P. E. Protter, *Stochastic Integration and Differential Equations*, 2nd ed., Version 2.1, Springer, Germany, 2008.
- [45] C. A. Ramezani and Y. Zeng, "Maximum Likelihood Estimation of Asymmetric Jump-Diffusion Processes: Application to Security Prices," available at SSRN 606361, 1998.
- [46] H. Royden and P. M. Fitzpatrick, *Real Analysis*, China Machine Press, 2010.
- [47] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, New York, NY: McGraw-Hill, 1966.
- [48] T. H. Rydberg, "The Normal Inverse Gaussian Lévy Process: Simulation and Approximation," *Communications in Statistics: Stochastic Models*, vol. 13, pp. 887-910, 1997.
- [49] G. Samorodnitsky and M. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Random Processes*, New York, NY: Chapman & Hall, 1994.

- [50] K. Sato, *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Cambridge, U.K.: Cambridge University Press, 1999.
- [51] W. Schoutens, *Lévy Processes in Finance: Pricing Financial Derivatives*, Wiley Series in Probability and Statistics, John Wiley & Sons Ltd., 2003.
- [52] S. E. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*, Springer, 2008.
- [53] P. Tankov, “Lévy Processes in Finance and Risk Management,” *World Congress on Computational Finance*.
- [54] P. Tankov, *Lévy Processes in Finance: Inverse Problems and Dependence Modelling*, Ph.D. dissertation, Ecole Polytechnique, Paris, France, 2004.
- [55] S. J. Taylor, “Exact Asymptotic Estimates of Brownian Path Variation,” *Duke Mathematical Journal*, vol. 39, 1972.
- [56] A. Vershik and M. Yor, “Multiplicativité du Processus Gamma et Étude Asymptotique des Loix Stables d’Indice α , Lorsque α Tend Vers 0,” *Prépublication du Laboratoire de Probabilités de l’Université de Paris VI*, vol. 289, pp. 1-10, 1995.
- [57] R. Cont and P. Tankov, *Financial Modelling with Jump Processes*, Chapman and Hall/CRC, 2004.
- [58] B. Øksendal and A. Sulem, *Applied Stochastic Control of Jump Diffusions*, Springer-Verlag, 2005.
- [59] C. A. Ramezani and Y. Zeng, “An Empirical Assessment of the Double Exponential Jump-Diffusion Process,” available at SSRN 606101, 2004.
- [60] L. Xu, *Nonequispaced Fourier Transform for Option Pricing*, Library and Archives Canada, Ottawa, 2009.

EKLER

Ek 1. Black-Scholes Modeli

Black-Scholes Modeli, opsiyon fiyatlamasında kullanılan matematiksel bir modeldir. Bu model, özellikle Avrupa tipi opsiyonların fiyatlandırılması için yaygın olarak kullanılır. Black-Scholes Modeli, Fisher Black ve Myron Scholes tarafından geliştirilmiş ve 1973 yılında yayımlanmıştır. Robert Merton da modelin geliştirilmesine katkıda bulunmuş ve bu katkılarından dolayı Merton ve Scholes, 1997 yılında Nobel Ekonomi Ödülü'ne layık görülmüşlerdir. Bu model, türev fiyatlama teorisi için 1900 yılında Bachelier tarafından önerilen ilk formülün daha genel bir versiyonudur.

Riskli varlıkların fiyat hareketlerini modellemek için $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ olasılık alanı ve belirli bir varlık seti $S = \{S_t, 0 \leq t \leq T\}$ ile bir hareket süreci $W = \{W_t, t \geq 0\}$ varsayalım. Bu süreç, aşağıdaki stokastik diferansiyel denkleme göre tanımlanır:

$$S_t = S_0 \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right).$$

Burada W , hareket sürecini, r sabit faiz oranını ve σ fiyatın volatilitelerini temsil eder. Black-Scholes modelinde, piyasaların friksiyonsuz olduğu, işlemlerin anında ve risksiz yapılabilirdiği ve arbitrajın olmadığı varsayılır.

Ek 2. Bağlayıcılar ve Bernestein Teoremi

2.1. Ters Gauss Bağlayıcılar

T_b^a 'nin, sürüklenme katsayısı $\{w_s + bs, s \geq 0\}$ olan bir Brownian hareketinin pozitif $a > 0$ seviyesine ulaştığı ilk zaman olduğunu varsayın. Bu rastgele zaman, $IG(a, b)$ ters Gauss süreci olarak tanımlanır ve karakteristik fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\phi_{IG}(u; a, b) = \exp\left(-a\left(\sqrt{-2iu + b^2} - b\right)\right).$$

Ters Gauss dağılımı sonsuz bölünebilirdir ve parametreleri $a, b > 0$ olan ters Gauss süreci $X^{(IG)} = \{X_t^{(IG)}, t \geq 0\}$, sıfırdan başlar ve durağan ve bağımsız artışlara sahiptir

$$E\left[\exp(iuX_t^{(IG)})\right] = \phi_{IG}(u; a, b) = \exp\left(-at\left(\sqrt{-2iu + b^2} - b\right)\right).$$

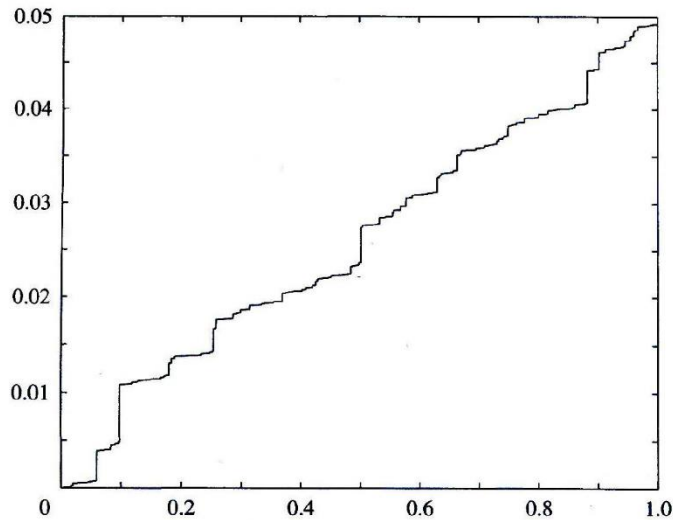
ile elde edilir. Ters Gauss yoğunluk fonksiyonu şu şekildedir:

$$f_{IG}(x; a, b) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \exp(ab) x^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(a^2 x^{-1} + b^2 x)\right), x > 0.$$

Ve $IG(a, b)$ Lévy yoğunluğu

$$v_{IG}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} ax^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(b^2 x)\right) 1_{(x,0)},$$

olarak tanımlanır.



Şekil A. Ters Gauss sürecinin örnek yörüngesi

2.2. Genelleştirilmiş ters Gauss süreci

Ters Gauss dağılımı, $GIG(\lambda, a, b)$ genelleştirilmiş ters Gauss dağılımına genelleştirilebilir. $x > 0$ için yoğunluk fonksiyonu

$$f_{GIG}(x; \lambda, a, b) = \frac{(b/a)^\lambda}{2K_\lambda(ab)} x^{1-\lambda} \exp\left(-\frac{1}{2}(a^2x^{-1} + b^2x)\right), x > 0.$$

olur. Burada, $\lambda \in \mathbb{R}$, a ve b her ikisi de negatif ve aynı zamanda 0 değildir. Genelleştirilmiş ters Gauss dağılımının karakteristik fonksiyonu

$$\phi_{GIG}(u; \lambda, a, b) = \frac{1}{K_\lambda(ab)} (1 - 2iub^{-2})^{\lambda/2} K_\lambda\left(ab\left(\sqrt{1 - 2iub^{-2}} - b\right)\right),$$

olarak tanımlanır ve $K_\lambda(x)$, λ indeksli düzeltilmiş Bessel fonksiyondur. Genelleştirilmiş ters Gauss süreci Lévy süreci olarak tanımlanır. $s, t \geq 0$ olmak üzere $[s, s+t]$ aralığındaki her zaman dilimi üzerinde artışlarla, $(\phi_{GIG}(u; \lambda, a, b))^t$ karaktistik fonksiyona sahiptir.

2.3. Gamma Taşıyıcılar

Gama dağılım yoğunluğu fonksiyonu, $Gamma(a, b)$, $a > 0$ ve $b > 0$ parametreler ile şu şekilde ifade edilir:

$$f_{Gamma}(x; a, b) = \frac{(b)^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \exp(-xb), x > 0.$$

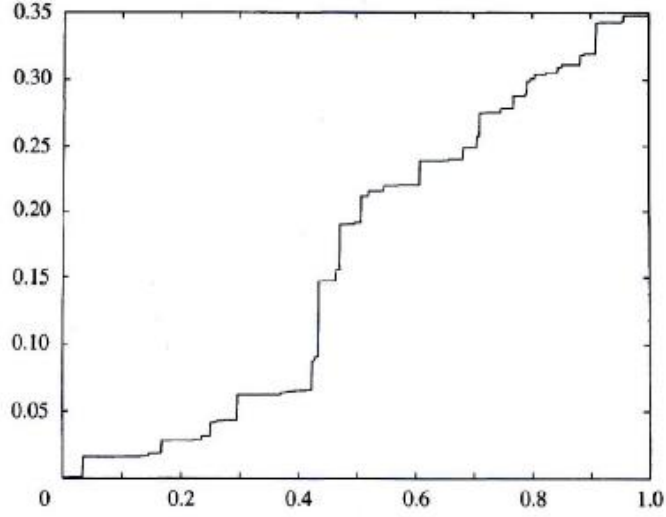
Karakteristik fonksiyonu şu şekilde ifade edilir:

$$\phi_{Gamma}(u; a, b) = \frac{1}{K_\lambda(ab)} (1 - iu/b)^{-a},$$

açıkça görülüyor ki karakteristik fonksiyon sonsuza kadar bölünebilir.

$$X^{(Gamma)} = \{X_t^{(Gamma)}, t \geq 0\},$$

Gamma süreci olarak, $a, b > 0$ parametreler ile sıfırdan başlayan, gama dağılımı ile bağımsız büyüyen rastgele bir süreç olarak tanımlanır ve $X^{(Gamma)}$ süreci $Gamma(at, b)$ dağılımına sahiptir.



Şekil B. Gama sürecinin örnek yörüngesi

2.4. Bernestein Teoremi

- 1) f Bernstein fonksiyonudur ancak ve ancak tüm $t \geq 0$ için $x \rightarrow e^{-tf(x)}$ görüntüsü tamamen monotondur.
- 2) f Bernstein fonksiyonudur ancak ve ancak her $x > 0$ için $a, b > 0$ ve $\int_0^\infty (y \wedge 1) \lambda(dy) < \infty$, aşağıdaki gibi bir gösterimi var:

$$f(x) = a + bx + \int_0^\infty (1 - e^{-yx}) \lambda(dy).$$

- 3) g tamamen monotondur, ancak ve ancak $[0, \infty[$ üzerinde bir μ ölçüsü mevcut olmak üzere

$$g(x) = \int_0^\infty e^{-yx} \mu(dy),$$

olsun.

Ek 3. Bessel Fonksiyonu ve Değiştirilmiş Bessel Fonksiyonu

3.1. Besel fonksiyonu

Bessel fonksiyonları, sırasıyla Johann Friedrich Pfaff ve Daniel Bernoulli tarafından 18. yüzyılın sonlarında incelenmiş ve Adrien-Marie Legendre tarafından daha derinlemesine çalışılmıştır. İsimlerini, bu fonksiyonları ilk defa inceleyen ve kullanan Alman matematikçi Friedrich Bessel'den almışlardır. Bessel fonksiyonları, ikinci dereceden bir diferansiyel denklemin çözümleri olarak ortaya çıkar. Genellikle, dikdörtgen koordinat sistemindeki Laplace denkleminin çözümlerinde, silindirik ve konik simetrlili problemlerde, dalga denkleminin ve diğer fiziksel süreçlerin çözümlerinde kullanılırlar.

İlk tür Bessel fonksiyonları $J_{\pm v}(z)$, ikinci tür Bessel fonksiyonları $Y_v(z)$ ve değişken katsayılı Bessel fonksiyonları $H_v^{(1)}(z)$ ve $H_v^{(2)}(z)$ olmak üzere dört ana tiptedir ve

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + (z^2 - v^2)w = 0$$

diferansiyel denklemin çözümleri olsun. Bu çözümler, farklı matematiksel özelliklere ve davranışlara sahiptir. Bessel fonksiyonları genellikle x pozitif ve reel sayılar için tanımlıdır. Bu fonksiyonlar her zaman doğrusal olarak bağımsızdır ve aşağıdaki seri açılımlarıyla

$$J_v(z) = (z/2)^v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z^2/4)^k}{k! \Gamma(v+k+1)},$$

$$Y_v(z) = (z/2)^v \frac{J_v(x) \cos(v\pi) - J_{-v}(x)}{\sin(v\pi)},$$

olarak ifade edilir. v bir tamsayı değeri veya sıfır ise yukarıdaki ilişkinin sağ tarafı bir sınır değeriyle değiştirilir. Ayrıca,

$$H_v^{(1)}(z) = J_v(z) + iY_v(z)$$

ve

$$H_v^{(2)}(z) = J_v(z) - iY_v(z)$$

olur.

3.2. Değiştirilmiş Bessel fonksiyonu

Birinci tip ve üçüncü tipteki değiştirilmiş Bessel fonksiyonlarına Macdonald fonksiyonları da denir. $K_v(z)$,

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + (z^2 - v^2)w = 0$$

diferansiyel denklemin çözümleri olsun. $I_v(z)$ aşağıdaki seri olarak yazılabilir:

$$I_v(z) = (z/2)^v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z^2/4)^k}{k! \Gamma(v+k+1)},$$

ve $K_v(z)$,

$$K_v(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_v(z) - I_{-v}(z)}{\sin(v\pi)},$$

ifadesile, eğer v bir tamsayı değeri veya sıfır ise, bu denklemin sağ tarafının yerini bir limit değeri alır. K_v , Bessel fonksiyonu aşağıdaki integral biçiminde ifade edilebilir:

$$K_v(z) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} u^{v-1} \exp\left(-\frac{1}{2}z(u + u^{-1})\right) du, \quad v > 0.$$