



T.C.

**AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



**SELÇUK
ÜNİVERSİTESİ**

T.C

**SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI
ORTAK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI**

**FISHER'S DENKLEMİNİN KUİNTİK B-SPLINE FONKSİYONLARI
YARDIMI İLE ÇÖZÜLMESİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Özlem ÖZMEN

DANIŞMANLAR

Yrd. Doç. Dr. Ali ŞAHİN

Prof. Dr. Galip OTURANÇ

AKSARAY, 2013

T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
KABUL ve ONAY BELGESİ

Özlem ÖZMEN' in FISHER'S DENKLEMİNİN KUİNTİK B-SPLINE FONKSİYONLARI YARDIMI İLE ÇÖZÜLMESİ başlıklı lisansüstü tez çalışması, Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun tarih vesayılı kararı ile oluşturulan aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalında **YÜKSEK LİSANS** tezi olarak **Oy Birliği/Oy Çokluğu** ile kabul edilmiştir.

İmza

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Ali ŞAHİN(Aksaray Üniversitesi)

Üye : Yrd. Doç. Dr. Halis BİLGİL (Aksaray Üniversitesi)

Üye : Doç. Dr. Yıldırım KESKİN (Selçuk Üniversitesi)

Tezin Savunulduğu Tarih : .07.02.2013

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu' nun tarih ve
.....sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Unvan, Adı SOYADI
Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	Sayfa No
ÖNSÖZ.....	i
TEŞEKKÜR.....	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	v
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	vii
SİMGELER DİZİNİ.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Literatür Özeti.....	2
2. POLİNOM İNTERPOLASYONU.....	3
2.1.Tanım.....	3
2.2. . İnterpolasyon Teknikleri	3
2.3. İnterpolasyon ve Lagrange Polinomu.....	4
2.4. Weierstrass İnterpolasyon Teoremi.....	4
2.5. Lagrange İnterpolasyon Polinomları.....	5
2.6. Bölünmüş Farklar İnterpolasyon Polinomu.....	7
2.7. Hermite İnterpolasyonu.....	8
2.8. Kübik Spline İnterpolasyonu.....	9
3. SPLINE FONKSİYONLARI.....	
3.1. Tanım.....	12
3.2. Doğal Spline Fonksiyonları.....	14
3.3. B-Spline Fonksiyonları.....	14
3.3.1. B-Spline Fonksiyonlarının Bazı Özellikleri.....	15
3.3.2. Lineer B-Spline Fonksiyonları.....	16
3.3.3. Sıfırıncı Dereceden B-Spline Fonksiyonları.....	17
3.3.4. Birinci Dereceden B-Spline Fonksiyonları.....	18
3.3.4.1 Algoritma(B-Spline Fonksiyonlarının Katsayıları)	19
3.3.4.2. B-Spline fonksiyonlarının türev ve integralleri	19
3.3.4.3. Yardımcı Teorem(B-spline fonksiyonlarının	
türevleri).....	20
3.3.4.4. Yardımcı Teorem(Süreklilik Sınıfı).....	20
3.3.4.5. B-Spline fonksiyonlarının integralleri.....	20
3.3.5. Kuadratik B-Spline Fonksiyonlar.....	20
3.3.6. Kübik B-Spline Fonksiyonlar.....	22

3.3.7. Kuartik B-Spline Fonksiyonlar.....	24
3.3.8. Kuintik B-Spline Fonksiyonlar.....	25
4. FISHER'S DENKLEMİ.....	27
4.1. Tanım.....	27
4.2. Sonlu Elemanlar Yöntemi.....	34
4.2.1. B-spline taban fonksiyonları.....	36
4.2.2. Kolokasyon Yöntemi.....	37
4.2.3. B-spline kolokasyon yöntemi.....	38
4.3. Başlangıç Durumu.....	41
4.4. Sınır Durumu.....	43
4.5. Kararlılık Analizi.....	44
5. TEST PROBLEMLERİ.....	46
5.1. Test Problemi 1.....	46
5.2. Test Problemi 2.....	52
5.3. Test Problemi 3.....	56
5.4. Test Problemi 4.....	59
5.4.1. Zayıf reaksiyon problemi.....	63
5.4.2. Güçlü reaksiyon problemi.....	64
5.4.2.1. Şok benzer dalga.....	65
6. TARTIŞMALAR VE SONUÇLAR.....	69
KAYNAKLAR.....	70
ÖZGEÇMİŞ.....	75

ÖNSÖZ

Bu tezde kullanılan yöntem, genellikle lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılmış, temelinde önce çeşitli yöntemlerle denklemi lineerleştirip, daha sonra kuintik B-Spline fonksiyonları kullanılarak kolokasyon yöntemiyle sayısal çözüm araştırılmaktadır. B-Spline terimi Isac Jacop Schoenberg tarafından ortaya atılmıştır.

Rubin ve Khosla(1976) kübik spline kullanarak kolokasyon yöntemiyle kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümünü araştırmış, bu yöntemi Burger denkleminin sayısal çözümü için kullanmışlardır. İ.Dağ, D.Irk ve B. Saka(2005) bir boyutlu Burger denkleminin çözümlerini, sonlu elemanlar üzerinde kübik B-Spline fonksiyonlarının düzenlenmesine dayanan bir yöntem ile elde etmişlerdir.

H. Çağlar, M.Özer ve N.Çağlar(2007) ise lokal olmayan başlangıç koşuluna sahip bir boyutlu ısı denklemini üçüncü dereceden B-Spline fonksiyonlarını kullanarak incelemiştir.

Bu çalışmanın kolay anlaşılabilir olması açısından, birinci bölümde yaklaşım yöntemleri ve polinom yaklaşımlarından bahsedilerek yaklaşım fonksiyonlarına bir giriş yapılmıştır. İkinci bölümde polinom yaklaşımları detaylı bir şekilde teorik altyapısıyla beraber ele alınmıştır. Üçüncü bölümde Spline fonksiyonları, özellikleri ve bu fonksiyonların bazını oluşturan B-Spline fonksiyonlarından, özelliklerinden, beşinci dereceye kadar olan alt sınıflarından bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde asıl üzerinde durulacak olan Fisher's denklemi başlangıç ve sınır koşullarıyla birlikte tanıtılıp bu denklem, kuintik B-Spline fonksiyonları kullanılarak kolokasyon yöntemiyle çözülmüştür. Beşinci bölümde ise bu yöntemin doğruluk derecesi, Fisher's denkleminin farklı başlangıç koşulları altında test problemleriyle test edilip, sonuçlar araştırmacıların yaptıkları daha önceki çalışmaların sonuçlarıyla karşılaştırılıp birçok yöntemden daha doğru sonuçlar verdiği gerçeğine ulaşılmıştır.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması ve algoritmik çalışmaların yapılması sırasında yardım ve desteklerini esirgemeyen başta danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Ali ŞAHİN'e(Aksaray Üniversitesi) ve ikinci danışman hocam Prof. Dr. Galip OTURANÇ' a(Selçuk Üniversitesi), Yrd. Doç. Dr. Halis BİLGİL' e(Aksaray Üniversitesi), Öğretim Görevlisi Sayın Remzi DEMİR' e (Aksaray Üniversitesi), yardımlarını esirgemeyen yeğenlerim İbrahim Enes GÜNDOĞDU, Mustafa Kürşat DEMİR ve Yusuf Alperen DEMİR' e, gösterdikleri anlayış ve manevi desteklerden dolayı aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

FISHER'S DENKLEMİNİN KUİNTİK B-SPLINE FONKSİYONLARI YARDIMI İLE ÇÖZÜLMESİ

Özlem ÖZMEN

T.C.

Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd.Doç.Dr. Ali ŞAHİN
İkinci Danışman: Prof.Dr. Galip OTURANÇ

KKP denklemi olarak ta bilinen Fisher's denklemi, farklı fiziksel sistemlerde karşılaşılan önemli bir kısmi diferansiyel denklemdir.

Bu yüksek lisans tezinde Fisher's denkleminin(KKP) kuintik B-Spline fonksiyonlar yardımıyla kolokasyon yöntemi kullanılarak nümerik çözümleri incelendi.

Tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde yaklaşım yöntemleri ve literatür özetinden bahsedildi. İkinci bölümde polinom yaklaşımlarının teorik altyapısı ele alındı. Üçüncü bölümde Spline fonksiyonları, B-Spline fonksiyonları ve özellikleri verildi. Kuadratik, kübik, kuartik ve kuintik fonksiyonlar ile bunların özellikleri ifade edildi. Dördüncü bölümde, Fisher's denklemi başlangıç ve sınır koşulları ile birlikte tanıtıldı. Denklemin önceden bulunmuş nümerik çözümlerinden kısaca bahsedilip, denklemin kuintik B-Spline fonksiyonları kullanılarak kolokasyon yöntemi ile nümerik çözümleri elde edildi. Yöntemin kararlılık analizi Von Neumann yöntemi uygulanarak incelendi. Beşinci bölümde ise Fisher's denkleminin farklı başlangıç koşulları altında değiştirilmiş şekillerinin test analizleri yapıp nümerik sonuçlar elde edildi. Elde edilen sonuçlar, araştırmacıların daha önceki çalışmalarının sonuçları ile karşılaştırıldı.

Sonuç olarak kuintik B-Spline fonksiyonları kullanılarak uygulanan Kolokasyon yönteminin yeterince iyi sonuçlar verdiği görüldü. Bu nedenle diğer nonlinear kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinde B-Spline fonksiyonlarının kullanılması önerilmektedir.

2013, 75 Sayfa

Anahtar Kelimeler : Spline, Fisher, KKP, B-spline ,Kuintik B-spline, Kolokasyon

ABSTRACT

Master of Science Thesis

NUMERICAL SOLUTIONS OF THE FISHER'S EQUATION BY USING QUINTIC B-SPLINE FUNCTIONS

Özlem ÖZMEN

T.R.

Aksaray University Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Selçuk University Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Asst. Prof. Dr. Ali ŞAHİN
Co-Supervisor : Prof. Dr. Galip OTURANÇ

The Fisher (KKP) equation is an important partial differential equation which arises in the study of many physical systems.

In this MSc. Thesis, numerical solutions of the Fisher (KKP) equation based on Collocation methods using Quintic B-spline functions are investigated. The thesis is consist of five parts. In the first chapter of the thesis, approximation methods and summary of the literature is mentioned. In the second chapter, theoretical aspects of polynomial approximation methods is focused on. In the third chapter, Spline functions, B-spline functions and some properties of them are explained. Quadratic, cubic, quartic and quintic functions are given. In the fourth section, the Fishers' equation is introduced together with initial and boundary conditions. Some of the previous numerical methods about the equation are mentioned shortly and numerical solutions of the Fishers' equation are obtained with Collocation methods using quintic B-spline functions. The stability analysis of the numerical technic based on Von Neumann theory is given. In the fifth section, the collocation method which is given to solve the Fishers' equation is tested by using test problems with modified of equation under the different initial conditions. Then numerical solutions of Fisher equation are obtained with collocation methods by using quintic B-spline functions.

As a result, Collocation method with B-spline functions give adequately good results. Computed results are compared with the numerical results given by previous authors. So it is recommended that B-spline functions can be used for solving other nonlinear partial differential equations.

2013, Pages 75

Keywords : Spline, Fisher, KKP, B-spline ,Quintic, B-spline, Colocation

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 2.1. Kapalı ve sınırlı bir aralık üzerinde sürekli herhangi bir fonksiyona yakın bir polinomun olması.....	4
Şekil 2.2. $(n+1)$ noktadan geçen en fazla n . dereceden polinomun grafiği...	6
Şekil 2.3. Tipik bir $L_{n,k}$ Lagrange fonksiyonunun grafiği.....	6
Şekil 2.4. Sıfırıncı dereceden altı düğümlü bir spline.....	10
Şekil 3.1. Basit noktalarla lineer B-spline(ikili düğüm).....	17
Şekil 3.2. Sıfırıncı dereceden B-Spline fonksiyonları.....	17
Şekil 3.3. Birinci dereceden B-splinefonksiyonunun grafiği.....	18
Şekil 3.4. Kuadratik B-spline şekil fonksiyonları.....	21
Şekil 3.5. Kuadratik B-spline fonksiyonunun kendini oluşturan polinom parçaları ile birlikte olması.....	22
Şekil 3.6. Kübik B-spline şekil fonksiyonları.....	23
Şekil 3.7. Dört kübik polinomun birleşerek kübik B-spline fonksiyonunu oluşturması.....	23
Şekil 3.8. Düğüm noktaları, bağlantı noktaları,kontrol noktaları ile kübik B-spline eğrisi.....	23
Şekil 3.9. Kuartik B-spline şekil fonksiyonları.....	25
Şekil 3.10. Kuintik B-spline şekil fonksiyonları.....	26
Şekil 4.1. Düzgün bir aralık üzerinde kuintik B-spline fonksiyonları.....	37
Şekil 5.1. Birinci test problemi için başlangıç çözümü.....	47
Şekil 5.2. Birinci test problemi için erken dönemlerdeki çözümler.....	48
Şekil 5.3. Birinci test problemi için kısa zaman davranışı.....	49
Şekil 5. 4. Birinci test problemi için uzun zaman davranışı.....	49
Şekil 5.5. Birinci test problemi için popülasyondaki değişimler.....	50
Şekil 5.6. Birinci test problemi için dalga hızlarındaki değişimler.....	51
Şekil 5.7. İkinci test problemi için başlangıç çözümü.....	53
Şekil 5.8. İkinci test problemi için erken dönemlerdeki çözümler.....	53
Şekil 5. 9. İkinci test problemi için kısa zaman davranışı.....	54
Şekil 5. 10. İkinci test problemi için uzun zaman davranışı.....	54
Şekil 5.11. İkinci test problemi için popülasyondaki değişimler.....	55
Şekil 5.12. İkinci test problemi için dalga hızlarındaki değişimler.....	55
Şekil.5.13.Üçüncü test problemi $c = 2$ için başlangıç çözümleri	57

Şekil 5.14. Üçüncü test problemi $c = 2$ için çözüm profilleri.....	58
Şekil 5.15. Üçüncü test problemi $c = 4$ için çözüm profilleri.....	58
Şekil.5.16. Üçüncü test problemi $c = 6$ için çözüm profilleri	59
Şekil.5.17. Dördüncü test problemi için çözüm profilleri.....	62
Şekil 5.18. Mutlak hata dağılımları.....	62
Şekil 5.19. Ölçeklendirilmiş Fisher's denkleminin $t = 5.0(-4), 1.0(-3), \dots, 2.5(-3)$ zamanlarında $\rho = 10^4$ iken nümerik çözümleri. (a) DSC çözümleri b) CN çözümleri (c) FPS çözümleri (d) ASD çözümleri	65
Şekil 5.20. $t = 1\Delta t$ zamanında FPS ve ASD yöntemleri aracılığıyla yaklaşılan dalga çözümlerinin ön parçaları (a) FPS çözümleri (b) ASD çözümü.....	67

ÇİZELGELER DİZİNİ

	Sayfa No
Çizelge 2.1. ABD'nin yıllara göre nüfus sayımı.....	3
Çizelge 3.1. $\Phi_m(x)$ ve onun birinci $\Phi'_m(x)$ türevinin verilen bölüm noktalarındaki değerleri.....	21
Çizelge 3.2. $\Phi'_{m,3}(x)$ ve $\Phi'_{m,3}(x)$ nin $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığında düğüm noktalarındaki değerleri.....	24
Çizelge 3.3. Kuintik B-spline fonksiyonunun ve onun dördüncü mertebeye kadarki türevlerinin $[x_{m-3}, x_{m+3}]$ aralığında düğüm noktalarındaki değerleri.....	26
Çizelge 5.1. $t = 40$ anında dalga hızları ve hatalar arasındaki kıyaslama	52
Çizelge 5.2. $t = 40$ anı için dalga hızları ve hatalar arasındaki kıyaslama	56
Çizelge 5.3. Fisher's denkleminin $\rho = 1$ alınarak DSC, CN, FPS ve ASD yöntemleri kullanılarak kısa dönemlerdeki nümerik sonuçlarının karşılaştırılması.....	60
Çizelge 5.4. Yakınsama hızlarının mertebeleri.....	61
Çizelge 5.5. Fisher's denkleminin $\rho = 10^4$, $N = 64$, $\Delta t = 5.0(-6)$ alınarak elde edilen kısa dönem sonuçlarının DSC CN, FPS ve ASD yöntemlerinin sonuçlarıyla karşılaştırılması Qui ve Sloan tarafından listelenen sonuçlar (a) $MMDAE$, $N = 50$, (b) $MMPDE$, $N = 50$, $\tau = 10^{-7}$	63
Çizelge 5.6. Nümerik olarak test edilen dört yöntemin doğruluk sıralaması	64
Çizelge 5.7. Dördüncü test problemi için farklı zamanlardaki hatalar.....	69

SİMGELER DİZİNİ

$O(h^4)$	Dördüncü mertebeden hata
E_n	İnterpolasyonda yapılan hata
$C^m[a, b]$	m.dereceden türevi sürekli fonksiyon
$S_\Delta(x)$	S polinomunun parçalanışı
Δx	Çözüm kümesinin N tane noktaya parçalanışı($x_0 < x_1 < \dots < x_N$)

1. GİRİŞ

Yaklaşım yöntemleri matematikte olduğu kadar temel bilimlerin diğer alanlarında ve mühendislikte yaygın olarak kullanılan önemli çözüm tekniklerindendir. Tek yada çok değişkenli fonksiyonların yaklaşık hesabında kullanılan bu yöntem ile ilgili olarak günümüzde interpolasyon ve yaklaşım, nümerik integral ve türev, adi ve kısmi türevli diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri, integral denklemler, diferansiyel denklem sistemlerinin sayısal çözümleri, öz değer hesapları ve operatörlerin öz fonksiyonlarının hesaplanması, kontrol teorisi gibi alanlarda çok sayıda çalışma yapılmıştır. Yaklaşım fonksiyonları, interpolasyon ve eğri uydurma fonksiyonları olarak üstün özelliklere sahiptir.

Yaklaşım yöntemleri içerisinde polinom yaklaşımları önemli yer tutmaktadır. Ancak nokta sayısının artmasıyla elde edilecek interpolasyon polinomunun derecesi de artar. Bunun yanında bir de noktalar dışında interpolasyon polinomunun gerçek fonksiyondan göstereceği sapma dikkate alındığında, polinom interpolasyonu yerine başka tekniklere gerek duyulduğu anlaşılmıştır.

Birçok durumda bir diferansiyel denklemin belirli şartları sağlayan özel çözüm eğrisi bilinmiyor yada denklem analitik yollarla çözülemiyor olabilir. Bu durumda bilinmeyen fonksiyon değerleri, çözümün var olduğu aralık parçalara bölünerek, her bir parçada ikinci, üçüncü veya daha yüksek dereceden polinom yaklaşımı yapmak suretiyle çözüm yaklaşık olarak hesap edilir.

Her bir aralıkta değişik fonksiyonlarla yaklaşımın yapıldığı bu tür interpolasyona Spline interpolasyonu denir. Belirli verilere uyan Spline fonksiyonları konusunda ilk çalışma 1940' lı yıllarda Schoenberg tarafından yapılmıştır. Spline fonksiyonları, parçalı polinomların bir sınıfından olup, bu fonksiyonlar polinomların süreklilik özelliği taşıyan dizilişleri ile oluşmaktadırlar. (Baş, 2007)

Spline fonksiyonları diferansiyel denklemlerin çözümlerinde tanım ve teorileri ile ayırt edilen kullanışlı fonksiyonlardır. Bu fonksiyonlar nümerik metotlarda ve grafiklerde gittikçe artarak uygulama bulmaktadır. Örneğin Spline fonksiyonları, adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin sınır değer problemlerinin çözümleri için Rayleigh-Ritz ve

Galerkin metotlarında deneme fonksiyonları olarak kullanılabilir ve gerçek çözüme az hata ile ulaşılabilir (Özkan, 2006).

Bu tezde diferansiyel denklemler için Spline fonksiyonlarının teorileri incelenecektir.

1.1. Literatür Özeti

Yaklaşım teorisi uzun ve zengin bir tarihe sahiptir. Bu konudaki detaylı bilgi Achieser (1947), Sard (1963), Cheneyve Kincaid(1966), Laurent (1972) kitaplarında bulunabilir. Spline teorisi Schoenberg (1946) tarafından tanımlanmıştır. Ama bu fonksiyonlar ancak 1960 yılından sonra matematiksel modellere ve fiziksel problemlere uygulanmıştır. Bu konuda Birkhoff ve Garabedion (1960), Ahlberg ve Nilson (1962) birtakım çalışmalar yapmışlardır.

Yarı lineer parabolik denklemler için ilk çalışma David Archer tarafından 1977 yılında yapılmıştır. Bu çalışmada yarı lineer parabolik denklem üzerinde kübik spline kolokasyon yöntemi kullanılarak hata analizi yapılmış ve $O(h^4)$ mertebesinde hata yaklaşımı elde edilmiştir.

Trigonometrik Spline fonksiyonları da ilk defa Schoenberg tarafından incelenmiştir. Ayrıntılı bilgi için L.Schumaker(2007) kitabına bakılabilir. Bu fonksiyonlar Nikolis tarafından adi diferansiyel denklemlerin ve dinamik sistemlerin çözümü için kullanılmış ve hata analizleri yapılmıştır (Özkan, 2006).

BÖLÜM 2

POLİNOM ENTERPOLASYONU

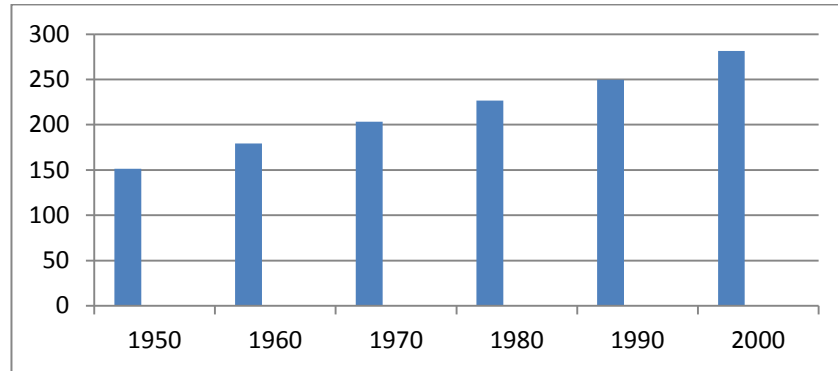
2.1. Tanım

Amerika Birleşik Devletleri nüfusunun sayımı her 10 yılda bir alınır.

Aşağıdaki tablo 1950-2000 yılları arasındaki insan sayısını listelemektedir ve ayrıca veriler aşağıdaki şekilde de temsil edilmektedir.

Yıl	1950	1960	1970	1980	1990	2000
Nüfus(Bin)	151,326	179,323	203,302	226,542	249,633	281,422

Çizelge 2.1. ABD'nin yıllara göre nüfus sayımı



Bu veriler gözden geçirildiğinde, bunların 1975 veya 2020 yılları için makul bir nüfus tahmini sağlayıp sağlayamayacağı sorulabilir.

Verilen verilere uyan bir fonksiyon kullanarak bu tip öngörülerde bulunulabilir. Bu süreç interpolasyon veya yaklaşım olarak adlandırılır.

(Burden ve Faires, 2001)

2.2. İnterpolasyon Teknikleri

İnterpolasyon teknikleri tablo veya grafik halinde verilen belirli noktalardan geçen eğri denklemlerinden yararlanarak ara değerlerin yaklaşık olarak bulunmasını sağlar ve bu yaklaşımın, analitik çözümün(gerçek çözüm) üzerindeki etkisi yapılacak hata analizi ile yaklaşık olarak belirlenir. İnterpolasyonda yapılan hata, herhangi bir f

fonksiyonunun belirli noktalara karşılık aldığı değerler ile oluşturulan P_n interpolasyon polinomu arasındaki farktan oluşur. Yani

$$E_n = |f(x) - P_n(x)|$$

şeklindedir (Özkan, 2006).

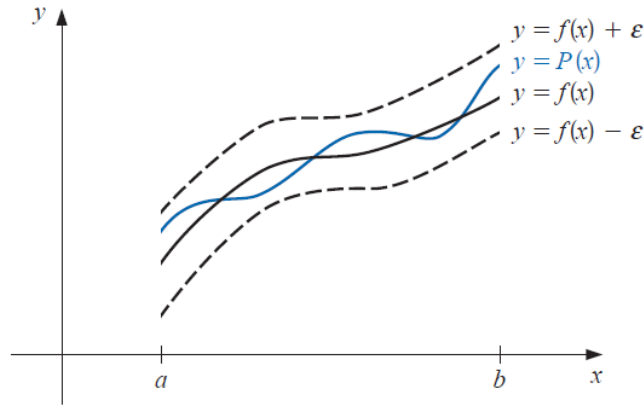
Şimdi kısaca interpolasyon teknikleri verilecektir.

2.3. İnterpolasyon ve Lagrange Polinomu

Reel Sayılar kümesi üzerinde tanımlı, en faydalı ve en iyi bilinen fonksiyon sınıflarından biri olan cebirsel polinomlar

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

formunda ve n , negatif olmayan tamsayı olmak üzere $a_0, a_1, \dots, a_n$ reel sabitlerin olduğu fonksiyonlardır. Bunların önemli olmalarının bir sebebi, sürekli fonksiyonlara düzgün olarak yaklaşmalarıdır. Bununla kastedilen, kapalı ve sınırlı bir aralık üzerinde, tanımlı ve sürekli verilen herhangi bir fonksiyon için, istenildiği gibi bu fonksiyona yakın olan bir polinomun olmasıdır. Bu sonuç tam olarak Weierstrass İnterpolasyon Teoremini ifade etmektedir (Burden ve Faires, 2001).



Şekil 2.1. Kapalı ve sınırlı bir aralık üzerinde sürekli herhangi bir fonksiyona yakın bir polinomun olması

2.4. Weierstrass İnterpolasyon Teoremi

f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli olduğu kabul edilsin.

Her $\varepsilon > 0$ için

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b] \text{ için}$$

özelliğine sahip bir $P(x)$ polinomu vardır.

Fonksiyon yaklaşımlarında polinom sınıflarının kullanılmasının diğer önemli sebebi, polinomun türev ve belirsiz integrallerinin bulunmasının kolay olmasıdır. Bu sebeplerle polinomlar, sürekli fonksiyonlara yaklaşmak için sıkça kullanılır.

Bu verilen öneme dayanarak, fonksiyon yaklaşımlarında polinom yaklaşımının yoğun olarak kullanıldığı düşünülebilir. Ama durum böyle değildir. Taylor polinomları belirli bir noktada, verilen fonksiyona olabildiğince yakındır ama Taylor polinomlarının doğruluğu verilen belirli nokta etrafında yoğunlaşmıştır. İyi bir yaklaşım polinomu, bütün aralık üzerinde nispeten doğru yaklaşımlar sağlama ihtiyacındadır ve Taylor polinomları genellikle bunu sağlayamaz.

Taylor polinomları için yaklaşımda kullanılan bütün bilgiler, tek x_0 noktasında yoğunlaşır, bu yüzden bu polinomlar x_0 noktasından uzaklaştıkça doğru olmayan sonuçlar verirler. Bu durum Taylor polinomlarına, sadece x_0 noktasına yakınlığının ihtiyaç duyulduğu yaklaşımlarda kullanılma sınırlılığını getirir.

Nümerik analizde Taylor polinomlarının kullanılmasının temel amacı, yaklaşım değil, hata tahmini ve nümerik tekniklerin türevidir. (Burden ve Faires, 2001)

2.5. Lagrange İnterpolasyon Polinomları

Birinci dereceden polinom interpolasyonu vasıtasıyla $f(x_0) = y_0$ ve $f(x_1) = y_1$ olan f fonksiyonuna yaklaşım problemiyle (x_0, y_0) , (x_1, y_1) noktalarından geçen polinomun derecesini belirleme problemi aynıdır. Aralık içinden verilen uç noktalarda yaklaşım yapmak için kullanılan polinoma Lagrange interpolasyon polinomu denir ve

$$L_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}, L_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \quad (2.1)$$

(x_0, y_0) ve (x_1, y_1) noktalarından geçen lineer Lagrange interpolasyon polinomu

$$P(x) = L_0(x).f(x_0) + L_1(x).f(x_1) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1) \quad (2.2)$$

$$L_0(x_0)=1, L_1(x_0)=0, L_0(x_1)=0, L_1(x_1)=1$$

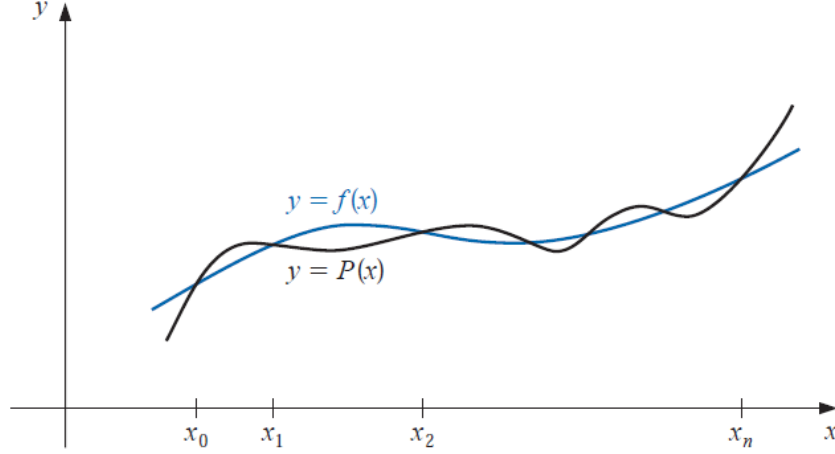
$$P(x_0) = 1.f(x_0) + 0.f(x_1) = f(x_0) = y_0$$

$$P(x_1) = 0.f(x_0) + 1.f(x_1) = f(x_1) = y_1$$

Bu yüzden P , (x_0, y_0) ve (x_1, y_1) noktalarından geçen en fazla birinci dereceden benzersiz (tek) polinomdur.

Lineer yaklaşımın konseptini genelleştirmek için, $n+1$ noktadan geçen en fazla n . dereceden polinomun oluşumu göz önüne alınsın.

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$$



Şekil 2.2. $(n+1)$ noktadan geçen en fazla n . dereceden polinomun grafiği

Bu durumda öncelikle her $k=0,1,\dots,n$ için $i \neq k$ iken

$$L_{n,k}(x_i) = 0 \text{ ve } L_{n,k}(x_k) = 1$$

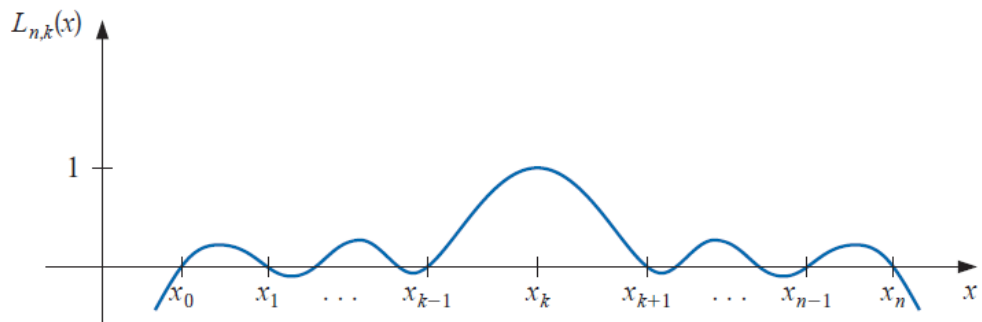
özelliklerine sahip $L_{n,k}(x)$ fonksiyonu inşa edilsin.

$L_{n,k}(x_k) = 1$ ' i sağlamak için $L_{n,k}(x)$ fonksiyonunun paydası bu terimle aynı olmalı fakat $x = x_k$ noktasında bu değerlendirilmez.

Böylece

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}$$

elde edilir.



Şekil 2.3. Tipik bir $L_{n,k}$ Lagrange fonksiyonunun grafiği

Lagrange interpolasyon polinomu olarak adlandırılan bu polinom, şu teoremle tanımlanır.

Teorem:

Eğer $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ belirli noktaları ve bu noktalardaki değerleri verilen f fonksiyonu veriliyor ise en fazla n .dereceden ve şu şartları sağlayan benzersiz bir $P(x)$ yaklaşım polinomu vardır (Burden ve Faires, 2001).

$$f(x_k) = P(x_k) \text{ her } k=0,1,\dots,n \text{ için}$$

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}$$

$$= \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$$

2.6. Bölünmüş Farklar İnterpolasyon Polinomu

x_p ve x_{p+1} noktalarına ait f fonksiyonunun birinci bölünmüş fark ifadesi,

$$f[x_p, x_{p+1}] = \frac{f(x_{p+1}) - f(x_p)}{x_{p+1} - x_p}$$

şeklinde. Bu ifade geometrik olarak $(x_p, f(x_p))$ noktasını $(x_{p+1}, f(x_{p+1}))$ noktasına birleştiren doğrunun eğimidir. x_p, x_{p+1} ve x_{p+2} noktalarına ait f fonksiyonunun ikinci bölünmüş fark ifadesi de,

$$f[x_p, x_{p+1}, x_{p+2}] = \frac{f[x_{p+1}, x_{p+2}] - f[x_p, x_{p+1}]}{x_{p+2} - x_p}$$

biçiminde tanımlanır. Bu ifade iki bölünmüş farkın bir bölünmüş farkıdır. Genelleştirme yapılacak olursa $x_p, x_{p+1}, \dots, x_{p+m}$ noktalarına ait m . bölünmüş fark aşağıdaki gibidir

$$f[x_p, x_{p+1}, \dots, x_{p+m}] = \frac{f[x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_{p+m}] - f[x_p, x_{p+1}, \dots, x_{p+m-1}]}{x_{p+m} - x_p}$$

Ayrıca $f[x_p] = f(x_p)$ şeklinde yazılır ve sıfıncı bölünmüş fark olarak bilinir:

Bu bölünmüş fark terimleri oluşturulan

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1)(x - x_{n-1})$$

enterpolasyon polinomuna bölünmüş farklar enterpolasyon polinomu denir (Özkan, 2006).

2.7. Hermite İnterpolasyonu

Oskülatör polinomlar, Taylor polinomlarını ve Lagrange polinomlarını genelleştirir. $[a, b]$ aralığında verilen $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ $n+1$ tane farklı sayı ve $m_0, m_1, m_2, \dots, m_n$ negatif olmayan tamsayılar ve $m = \max\{m_0, m_1, m_2, \dots, m_n\}$.

oskülatör polinom yaklaşımı olan f fonksiyonu için her $i=0, \dots, n$ için x_i noktasında $f \in C^m[a, b]$ olmak üzere, yaklaşım polinomunun derecesi her x_i için m_i den küçük veya m_i 'ye eşittir ayrıca bu oskülatör polinomunun derecesi en fazla

$$M = \sum_{i=0}^n m_i + n \text{ dir.}$$

Çünkü sağlanması gereken şartların sayısı

$$M = \sum_{i=0}^n m_i + (n + 1) \text{ dir.}$$

Ve m dereceli bir polinom, bu şartları sağlamak için kullanılabilecek $M + 1$ sabite sahiptir.

$[a, b]$ aralığı üzerindeki parçalanış $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ olmak üzere

$$P(a) = f(a) \quad , \quad P(b) = f(b) \quad (1)$$

$$P(a) = f(a) \quad , \quad P'(a) = f'(a) \quad (2)$$

$$P(b) = f(b) \quad , \quad P'(b) = f'(b) \quad (3)$$

ve (2)'yi sağlayan bir polinomun olup olmadığı sorusu ortaya çıkar.

Bu sorunun cevabı kesinlikle var olduğudur. Aslında böyle polinomlar son derece fazladır fakat derecesi 3 olan sadece bir tanedir. Şimdiye kadar verilen enterpolasyon tekniklerinde sadece (x_i, y_i) noktalarından geçen enterpolasyon polinomu oluşturuldu.

Buna ek olarak bazı durumlarda f fonksiyonunun birinci türevinin değerleri de kullanılabilir. Bu şekilde fonksiyonun ve birinci türevinin değerlerinin kullanılmasıyla oluşturulan polinoma Hermite İnterpolasyon Polinomu denir

(Burden ve Faires, 2001).

$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ şeklinde $(n + 1)$ tane nokta alınsın. y_i ve y'_i ifadeleri f ve f' fonksiyonlarının x_i ($i=0, \dots, n$) noktalarındaki sayısal değerlerini belirtsin. Verilen

$$f(x_i) = y_i \text{ ve } f'(x_i) = y'_i$$

değerleri ile $(2n+1)$. dereceden bir H_{2n+1} Hermite polinomu elde edilebilir.

Eğer $f \in C^{2n+2}[a, b]$, $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$ farklı noktalar ve bu noktaların f ve f' fonksiyonlarında aldığı değerler ile oluşturulan H_{2n+2} Hermite polinomu olmak üzere $a \leq \varepsilon \leq b$ koşulunu sağlayan ε sayısı için

$$f(x) = H_{2n+1}(x) + \frac{(x-x_0)^2 \dots (x-x_n)^2}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\varepsilon(x)) \quad (2.3)$$

vardır (Özkan, 2006).

2.8. Kübik Spline İnterpolasyonu

Bundan önceki bölümlerde kapalı aralıklar üzerinde keyfi fonksiyonlara olan yaklaşım tek bir polinom kullanılarak yapılmıştı.

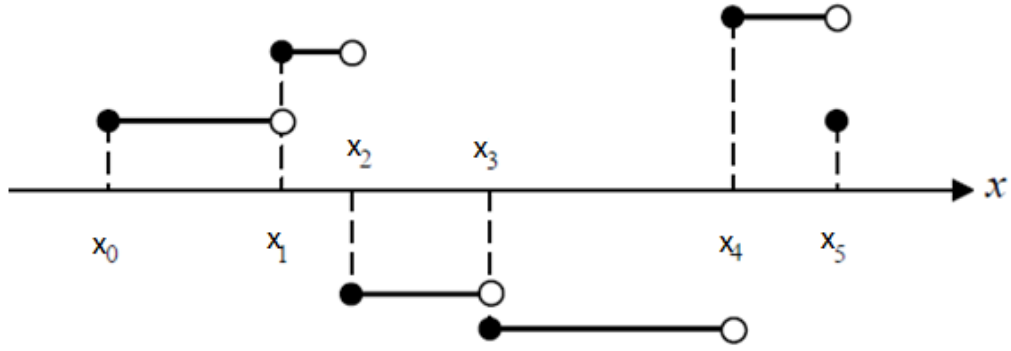
Ama yüksek dereceli terimler düzensiz bir şekilde dalgalanabilir. Yani aralığın küçük bir kısmı üzerindeki küçük bir dalgalanma aralığın tümü üzerinde katlanarak büyük ve düzensiz bir dalgalanmayı teşvik edebilir. Alternatif bir yaklaşım ise yaklaşım aralığını alt aralıklara bölmek ve her bir aralık üzerinde farklı bir polinom yaklaşımı elde etmektir. Buna parçalı polinom yaklaşımı denir. Bir spline fonksiyon, alt aralıklar üzerinde belirli süreklilik koşullarıyla birlikte birleşen polinom parçaları içerir. $x_0, x_1, \dots, x_n$, $n + 1$ tane nokta $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ sırasıyla verilmiş olsun. Bu noktalar düğüm olarak adlandırılır. Ayrıca $k \geq 0$ tamsayısı alınsın. $x_0, x_1, \dots, x_n$ düğümlerini içeren k derecesindeki bir spline fonksiyon şu şekilde bir S fonksiyonudur.

- i. Her bir $[x_{i-1}, x_i)$ aralığı üzerinde, S fonksiyonun derecesi k 'dan küçük veya eşittir.
- ii. S fonksiyonu en fazla $k - 1$ derecesine kadar bütün mertebelerdeki sürekli türevlere sahip k derecesinin sürekli parçalı bir polinomsalıdır.

Sıfırıncı derecenin spline fonksiyonları parçalı sabitlerdir. 0(Sıfır) derecesinin bir spline fonksiyonu aşağıdaki biçimde verilir;

$$S_{\Delta}(x) = \begin{cases} S_0(x) = c_0 & x \in [x_0, x_1) \\ S_1(x) = c_1 & x \in [x_1, x_2) \\ \vdots & \vdots \\ S_{n-1}(x) = c_{n-1} & x \in [x_{n-1}, x_n) \end{cases}$$

$[x_{i-1}, x_i)$ aralıkları birbiriyle kesişmez, bu nedenle böyle bir fonksiyonun düğüm noktalarında hiçbir karışıklık ortaya çıkmaz. 0(sıfır) derecesinin altı düğümlü tipik bir spline fonksiyonu aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 2.4. Sıfırıncı dereceden altı düğümlü bir spline (Baş, 2007)

Kübik spline interpolasyonu, spline interpolasyonun özel bir halidir.

$\Delta := \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$, x_i düğüm noktaları ile $[a, b]$ aralığının bir parçalanışı olsun. Değerler tablosu

X	x_0	x_1	...	x_n
Y	y_0	y_1	...	y_n

şeklinde verilsin. S_{Δ} kübik spline fonksiyonu yukarıdaki interpolasyon yardımıyla oluşturulacak olunursa, bunun için her bir $[x_i, x_{i+1}]$ aralığında S_i polinomları S_{Δ} fonksiyonlarını temsil eden kübik polinomlar olsun ($i = 0, \dots, n-1$). O halde S_{Δ} fonksiyonu,

$$S_{\Delta}(x) = \begin{cases} S_0(x) & x \in [x_0, x_1) \\ S_1(x) & x \in [x_1, x_2) \\ \vdots & \vdots \\ S_{n-1}(x) & x \in [x_{n-1}, x_n) \end{cases} \quad (2.4)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Kübik spline tanımından S_{i-1} ve S_i polinomları x_i noktasında aynı değeri alır. Yani

$$S_{i-1}(x_i) = y_i = S_i(x_i) \quad (1 \leq i \leq n-1)$$

eşitliği vardır.

Ayrıca S'_Δ ve S''_Δ fonksiyonları da tanım gereği süreklidir. Bu koşullar kübik spline fonksiyonunu belirlemede kullanılır.

Buradan S_Δ, S'_Δ ve S''_Δ fonksiyonlarının sürekliliğinden bir kübik spline fonksiyonunu tanımlamak için yeterli koşullar elde edilebilir mi sorusu ortaya çıkar.

Her bir kübik polinomda 4 katsayı olduğundan parçalı kübik polinomda $4n$ tane katsayı vardır. Ayrıca her bir $[x_i, x_{i+1}]$ alt aralığında 2 tane enterpolasyon koşulu bulunmaktadır. Bunlar $S_\Delta(x_i) = y_i$ ve $S_\Delta(x_{i+1}) = y_{i+1}$ şeklindedir, dolayısıyla toplam $2n$ tane koşul elde edilir. S_Δ fonksiyonunun sürekliliği ilave koşul vermez, zaten bu enterpolasyon koşullarının içine dahildir. S'_Δ fonksiyonunun sürekliliği her bir iç düğüm noktasında $S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i)$ şeklinde bir koşul verir ve $n-1$ tane daha ilave koşul elde edilir. Benzer şekilde S''_Δ fonksiyonunun sürekliliğinden de farklı $n-1$ tane ilave koşul gelir. Buradan da $4n$ tane katsayıyı belirlemek için toplam $4n-2$ tane koşul elde edilmiş olur. Kalan 2 koşulu çeşitli yollarla belirlenir. Bu son iki koşul için genellikle aşağıdaki 3 koşuldan biri kullanılır;

a) $S''_\Delta(a) = S''_\Delta(b) = 0$

b) $S_\Delta^{(k)}(a) = S_\Delta^{(k)}(b)$ $k = (0,1,2)$, S_Δ periyodik

c) Verilen y'_0, y'_n sayıları için $S'_\Delta(a) = y'_0$ ve $S'_\Delta(b) = y'_n$ dir

(Özkan, 2006).

BÖLÜM 3

SPLINE FONKSİYONLARI

3.1.Tanım

Bu bölümdeki başlangıç noktası, bir dizi noktadan düzgün eğriler belirlemek için etkili ve sayısal olarak kararlı metotlara olan ihtiyaçtır. Bunun için üç ihtimal göz önüne alınır, polinom interpolasyonu, Bezier ve Spline eğrileridir. Spline ismi, gemi tasarımında geniş süpürme eğrileri oluşturmak için ressamlar tarafından kullanılan elastik kirişlerden esinlenerek türetilmiştir. Spline eğrileri ilk çizim aracı olarak uçak sanayide ve gemi inşa sanayide kullanıldı.

İlk olarak Schoenberg tarafından tanıtılan Spline fonksiyonlar ve bu fonksiyonların uygulamaları, son dönemlerde gelişme göstermiştir. Spline fonksiyonlar yapısal özellikleri ve bilgisayarlarla yapılan hesaplamalarda kolaylıklar sağlaması nedeniyle de birçok alanda yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Lobachevsky spline fonksiyonlarının taban(baz) fonksiyonlarını teşkil eden B-spline fonksiyonlarını 19.yüzyılın ilk dönemlerinde araştırdı.

1946 yılında Schoenberg, B-Spline fonksiyonlarını istatistiksel veri yumuşatmada kullandı ve onun bu çalışması modern spline teorisi olarak başladı. Gordon ve Reisenfeld resmi olarak B-Spline fonksiyonlarını bilgisayar destekli tasarımda tanıştırdı. (URL-1)

$$g(x) = \sum_{i=0}^d c_i \varphi_i(x)$$

d polinomun derecesi, $(c_i)_{i=0}^d$ sabitler, $(\varphi_i)_{i=0}^d$ baz(taban) polinomlardır. Üç metot arasındaki fark, baz fonksiyonların seçiminde veya buna eşdeğer olarak, verilen noktaların nihai eğri ile olan uyumu ve ilişkisinde yatar. Yaklaşım durumunda eğri üzerinde temel polinomlar olarak Lagrange polinomları, sabitler fonksiyonun düğüm noktalarıdır. Her ne kadar her üç metot ta polinom eğrisi oluşturma özelliğine sahipse de farkları polinomların farklı temsillerine yol açar. Amaca uygun olarak Bezier ve Spline eğrileri tercih edilebilir çünkü onlar konveks eğrilerin tekrarıyla oluşturulabilirler. Bu eğriler yuvarlama hatalarına nispeten duyarsızdır.

Spline eğrileri, öngörülen sayıda türevlenebilen parçalı polinom eğrileridir. En basit örneği C^0 (sıfırıncı dereceden türevi sürekli) lineer parçalı polinom örneğidir. (URL-1)

İnterpolasyon formüllerinin tüm aralığa uygulanması her zaman istenilen sonucu vermeyebilir. Öyle ki yüksek dereceden polinomlar kullanılarak yapılan interpolasyonlardaki işlem hatalarının artmasıyla gerçek anlamda kararsız algoritmalarla karşılaşılır. Birçok durumda kullanılan noktaların sayısının artması çözümün ıraksaması anlamına gelir. Ayrıca istenilen fonksiyon $[a,b]$ aralığının değişik kısımlarında değişik özelliklere sahip ise örneğin, bölgenin bir kısmında hızlı diğer kısmında yavaş değişiyorsa fonksiyona tek bir eğri ile yaklaşmak uygun sonuçlara götürmez. Bu nedenlerden dolayı yüksek derecesi olmayan birinci, ikinci veya üçüncü dereceden fonksiyonlar ile yaklaşımların yapıldığı spline interpolasyon yöntemini kullanmak daha uygun olur. Spline interpolasyon parçalı polinom yaklaşımıdır. Yani verilen çözüm aralığı sonlu sayıda alt aralıklara bölünerek her bir alt aralıkta daha küçük dereceden polinomlar yardımı ile yaklaşımlar elde edilir.

Spline fonksiyonlar

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$$

sonlu parçalanışının her bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında k.dereceden uygun polinomlar olup, tanımlanan her alt aralıkta $(k-1)$. mertebeden türevlenebilen sürekli fonksiyonlardır. Spline fonksiyonların temel özellikleri aşağıda verilmiştir.

- Spline fonksiyonlar uygun bazlara sahip sonlu boyutlu lineer uzaylardır.
- Spline fonksiyonlar düzgün (smooth) fonksiyonlardır.
- Spline fonksiyonların türevleri ve integralleri kolay hesaplanabilir.
- Spline fonksiyonların türevleri ve integralleri yine spline fonksiyonlardır.
- Nümerik analizde ve yaklaşım teorilerinde spline fonksiyonların kullanılması durumunda matrisler ortaya çıkar. Bu matrisler uygun determinant özelliklerine sahiptir.
- Yeterince parçalara ayrılmış $[a,b]$ aralığı üzerinde her sürekli fonksiyona k.dereceden spline fonksiyonlar yardımıyla yaklaşımlar elde edilebilir.
- Spline fonksiyonlar yardımıyla sadece fonksiyonlara değil aynı zamanda onların türevlerine de ulaşılabilir
- Düşük dereceden Spline fonksiyonlar polinomlarda ortaya çıkan salınımları (dalgalanmaları) sergilemezler

(Özlük, 2005).

3.2. Doğal Spline Fonksiyonları

Eğer f , $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ de tanımlı ise böylece f fonksiyonu $x_0, x_1, \dots, x_N$ noktalarında benzersiz bir S doğal spline yaklaşımına sahiptir. Yani $S''(a) = 0$ ve $S''(b) = 0$ doğal sınır şartlarını sağlayan bir spline yaklaşımıdır.

3.3. B-Spline Fonksiyonlar

B-Spline fonksiyonlarının altında yatan temel dayanak, baz(taban) fonksiyonlar olmasıdır. B-Spline temel fonksiyonlarının orijinal tanımı, bölünmüş farklar düşüncesini kullanır. B-Spline fonksiyonları, bilgisayar çizimlerinde eğrileri tanımlayabilmek için çok yönlü yaklaşımlar sunarak, geometrik modelleme, bilgisayar çizimleri ve daha birçok alanda önemli bir konuma gelmiştir. (URL-1)

Çok sayıdaki veri noktalarına bir tek eğri ile yaklaşmak büyük kolaylıklar sağlasa da bazı hallerde bu durum büyük hatalara neden olabilir. Bu amaçla kullanılan Lagrange ve Newton interpolasyon polinomlarının derecesi nokta sayısı arttıkça artacağından bu tür polinomlarla yapılacak işlemler zorlaşır. Bu durumda düğüm adı verilen noktalarda birbirine bağlı, polinom eğri parçalarından oluşan B-spline fonksiyonlar yardımıyla yapılan yaklaşımlar bir alternatif olarak karşımıza çıkar.(Dönmez, 2008)

B-spline fonksiyonları öyle fonksiyonlardır ki, bütün diğer spline fonksiyonları bunların lineer birleşimleri ile kolayca elde edilebilir. B-spline fonksiyonları belirli spline uzayları için taban oluşturabilirler. Düğüm noktaları bilinirse, B-spline fonksiyonları ilerleme bağıntısı ile kolaylıkla üretilebilir ve algoritması nispeten basittir. (Özkan, 2006)

B-spline fonksiyonları teorileri ve sayısal hesaplamalardaki model davranışlarıyla ayırt edilebilir ve genelleştirilebilir. Carl de Boor 1970' lerin başında B-spline temeli için tekrar eden ilişkiyi kullanmıştır. Carl de Boor, spline temel fonksiyonları için Leibniz' teoremini uygulayarak aşağıdaki formülü türetmeyi başarmıştır.

$$w_{m,d}(t) := f(x) = \begin{cases} \frac{x - x_m}{x_{m+d-1} - x_m}, & x_{m+d-1} \neq x_m \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

olmak üzere

Temel ilerleme bağıntısı ile B-spline fonksiyonları arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\Phi_{m,d} := w_{m,d}\Phi_{m,d-1} + (1 - w_{m+1,d})\Phi_{m+1,d-1}$$

$$\Phi_m^1(x) = \left(\frac{x - x_m}{x_{m+1} - x_m}\right)\Phi_m^0(x) + \left(\frac{x_{m+2} - x}{x_{m+2} - x_{m+1}}\right)\Phi_{m+1}^0(x)$$

Bu birinci dereceden B-Spline fonksiyonlarından yüksek dereceli Spline fonksiyonları aşağıdaki ilerleme bağıntısı yardımıyla elde edilir.

$$\Phi_m^d(x) = \left(\frac{x - x_m}{x_{m+d} - x_m}\right)\Phi_m^{d-1}(x) + \left(\frac{x_{m+d+1} - x}{x_{m+d+1} - x_{m+1}}\right)\Phi_{m+1}^{d-1}(x), d \geq 1$$

Böylece 2.dereceden B-Spline fonksiyonları

$$\Phi_{m,2} = w_{m,2}X_m + (1 - w_{m+1,2})X_{m+1}$$

şeklinde olur.

3.3.1 B-spline fonksiyonlarının bazı özellikleri

d , negatif olmayan bir tamsayı ve $x = (x_i)$, en az $d + 2$ uzunluğunda, azalmayan bir reel sayı dizisi olsun. $x = (x_i)$ dizisine düğüm vektörü veya düğüm dizisi denir. Bu durumda x_i düğümlerine sahip, d .dereceden, m . B-Spline fonksiyonu $\Phi_{m,d}$ fonksiyonu ve bazı özellikleri aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\Phi_m^d(x) = \frac{x - x_m}{x_{m+d} - x_m}\Phi_m^{d-1}(x) + \frac{x_{m+d+1} - x}{x_{m+d+1} - x_{m+1}}\Phi_{m+1}^{d-1}(x)$$

- i. $\Phi_{m,d}(x)$, d . dereceden bir parçalı polinomdur.(Prautzsch vd., 2006)
- ii. m . B-Spline fonksiyonu $\Phi_{m,d}$,sadece $x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+d+1}$ düğümlerine bağlıdır (Şahin, 2004)
- iii. Eğer $x \in (x_m, x_{m+d+1})$ ise $\Phi_{m,d}(x) > 0$ dır. Burada $[x_m, x_{m+d+1}]$ kapalı aralığı $\Phi_{m,d}$ nin desteği olarak adlandırılır (Şahin, 2004).
- iv. $\Phi_{m,d}(x)$, $[x_m, x_{m+d+1}]$ nın dışında sıfırdır (Prautzsch vd., 2006).
 - (a) Eğer $x, [x_m, x_{m+d+1})$ aralığının dışında ise $\Phi_{m,d}(x) = 0$ dır.
 - Eğer $x_m = x_{m+d+1}$ ise her x için $\Phi_{m,d} = 0$ dır.

- (b) Eğer $x, [x_\mu, x_{\mu+1})$ aralığında bulunuyorsa ve $m < \mu - d$ ya da $m > \mu$ ise $\Phi_{m,d}(x) = 0$ dır (Şahin, 2004).

Her bir $\Phi_{m,d}^k(x)$ d.dereceden bir polinom olmak üzere $\Phi_{m,d}$ B-spline fonksiyonu,

$$\Phi_{m,d}(x) = \sum_{k=m}^{m+d} \Phi_{m,d}^k(x) \cdot \Phi_{k,0}(x)$$

şeklinde yazılabilir (Şahin, 2004).

- v. Eğer $z = x_{m+1} = \dots = x_{m+d} < x_{m+d+1}$ ise $\Phi_{m,d}(z) = 1$ ve $i \neq m$ için $\Phi_{i,d}(z) = 0$ dır (Şahin, 2004).
- vi. Eğer z sayısı $x_m, \dots, x_{m+d+1}$ arasında t defa görünüyorsa $\Phi_{m,d}$ nin $0, 1, \dots, d - t$ inci mertebeden türevlerinin hepsi z noktasında süreklidir (Şahin, 2004).
- vii. $x, y \in R$ olmak üzere,

$$\Phi(x + y | x_m + y, \dots, x_{m+d+1} + y) = \Phi(x | x_m, \dots, x_{m+d+1})$$
 sağlanır (Şahin, 2004).
- viii. Herhangi bir $[x_m, x_{m+1})$ aralığında d. dereceden B-Spline fonksiyonlardan en fazla $d + 1$ tanesi sıfırdan farklıdır ve sıfırdan farklı bu $d + 1$ B-spline fonksiyonun toplamı 1 dir (Şahin, 2004).
- ix. Eğer düğümlerin sayısı $t+1$, B-Spline fonksiyonların derecesi d ve B-Spline fonksiyonların sayısı da $n + 1$ ise $t = n + d + 1$ dir (Şahin, 2004).
 $\Phi_m^d (m \in Z, d \in N)$ olmak üzere eğer $d \geq 1$ ve $x \notin (x_m, x)$ ise $\Phi_m^d(x) = 0$ eşitliği vardır.
- x. $d \geq 0$ olduğu kabul edilsin. Eğer $x \in (x_m, x_{m+d+1})$ ise $\Phi_m^d(x) > 0$ eşitsizliği vardır. Bütün $d \geq 0$ sayıları için, aşağıdaki eşitlik mevcuttur (Özkan, 2006).

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \Phi_m^d(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [c_m w_m^d + c_{m-1}(1 - w_m^d)] c_m \Phi_m^{d-1}(x)$$

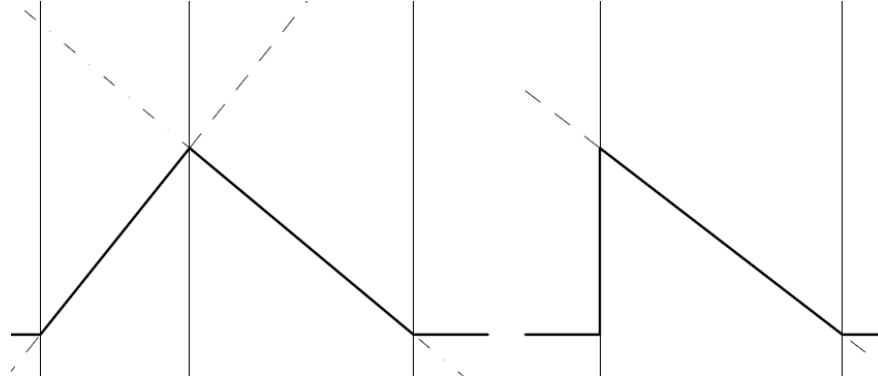
- xi. Bütün d değerleri için $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \Phi_m^d(x) = 1$ eşitliği vardır. (Özkan, 2006)

3.3.2. Lineer B-Spline fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ olmak üzere t_m noktalarında $L_m(x)$ Lineer B-Spline fonksiyonları

$$L_m(x) = \frac{1}{h} \begin{cases} (x_{m+1} - x) - 2(x_m - x) & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+1} - x) & [x_m, x_{m+1}] \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \quad (3.1)$$

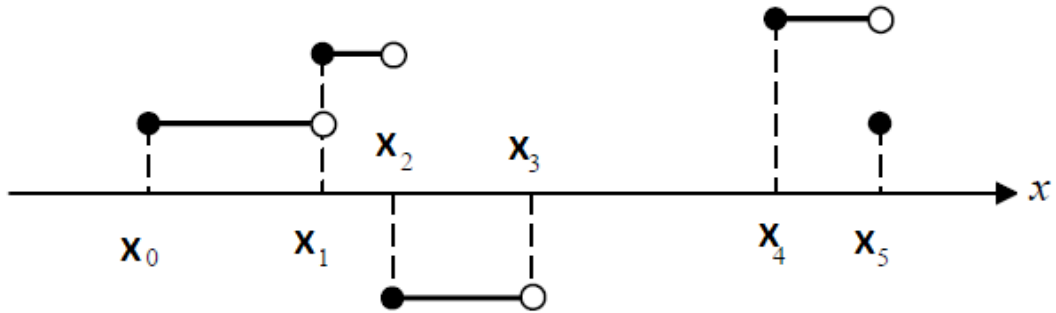
olarak tanımlanır. (3.1) parçalı fonksiyonundaki Linear B-spline fonksiyonlarıyla bir $[x_{m-1}, x_{m+1}]$ aralığı L_m ve L_{m+1} biçimindeki iki spline tarafından örtülür (Özlük, 2005).



Şekil 3.1. Basit noktalarla lineer B-Spline(de Boor, 1978)

3.3.3. Sıfırıncı dereceden B-spline fonksiyonları

Sıfırıncı dereceden B-Spline fonksiyonları $\Phi_m^0(x)$ ile gösterilir ve sahip oldukları şekil aşağıdaki gibidir.



Şekil 3.2. Sıfırıncı dereceden B-Spline fonksiyonları(Baş, 2007)

$$\Phi_m^0(x) = \begin{cases} 1, & x_m \leq x < x_{m+1} \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

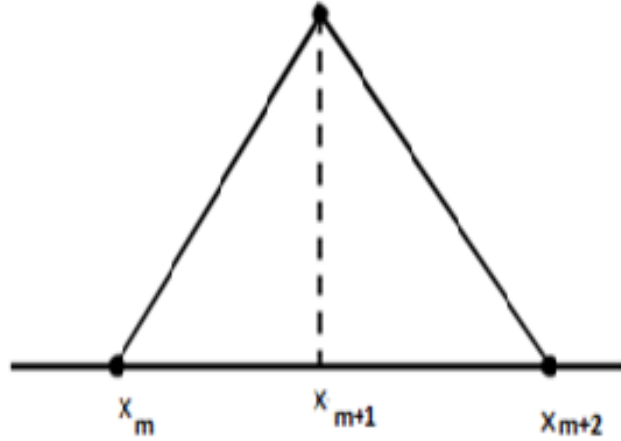
şeklinde tanımlanır.

$$\{\Phi_m^0 : m \in \mathbb{Z}\}$$

kümesi B-Spline formunun bir sonlu dizisi olmak üzere bunların önemli özellikleri şöyle sıralanabilir:

1. Φ_m^0 fonksiyonunun desteği $\Phi_m^0(x) \neq 0$ olan x noktalarının kümesi olarak tanımlanır. O halde bu destek $[x_m, x_{m+1})$ aralığıdır.
 2. Tüm m ve x değerleri için $\Phi_m^0(x) \geq 0$ eşitsizliği vardır.
 3. Φ_m^0 fonksiyonu, bütün sayı doğrusu üzerinde sağdan süreklidir.
 4. Bütün $x \in R$ noktaları için $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \Phi_m^0 = 1$ eşitliği vardır.
- Φ_m^0 fonksiyonları bütün yüksek dereceden B-spline fonksiyonları tanımlamak için bir başlangıç noktasıdır.

3.3.4. Birinci dereceden B-spline fonksiyonları



Şekil 3.3. $\Phi_m^1(x)$ fonksiyonunun grafiği (Baş, 2007)

$\Phi_m^1(x)$ fonksiyonları hakkında bazı incelemeler yapılabilir.

1. $\Phi_m^1(x)$ fonksiyonunun desteği (x_m, x_{m+2}) aralığıdır.
2. $\forall x \in R$ ve $\forall i$ indisi için $\Phi_m^1(x) \geq 0$ eşitsizliği vardır.
3. $\Phi_m^1(x)$ fonksiyonu süreklidir ve x_m, x_{m+1}, x_{m+2} noktaları hariç her noktada diferansiyallenebilirdir.
4. $\forall x \in R$ için $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \Phi_m^1(x) = 1$ eşitliği vardır (Özkan, 2006).

NOT

d.dereceden tüm Spline fonksiyonları için d.dereceden B-Spline fonksiyonları bir taban oluşturduğundan bundan sonra $\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \Phi_m^d(x)$ formuyla verilen lineer birleşimler üzerinde çalışılacaktır.

3.3.4.1. Algoritma(B-spline fonksiyonlarının katsayıları)

Eğer C_i^k katsayıları verilirse, $S(x) = C_m^d(x) \Phi_m^d(x)$ Spline fonksiyonu, verilen bir x değeri için aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$C_i^{j-1}(x) = [(x - x_i)C_i^j(x) + (x_{i+j} - x)C_{i-1}^j(x)] / (x_{i+j} - x_i) \quad (3.4)$$

Belirli bir m indisi için $x_m \leq x \leq x_{m+1}$ olmak üzere aşağıdaki gibi üçgensel bir tablo elde edilir.

$$\begin{array}{ccccccc} C_m^d & C_m^{d-1} & \dots & \dots & \dots & \dots & C_m^1 C_m^0 \\ C_{m-1}^d & C_{m-1}^{d-1} & \dots & \dots & \dots & \dots & C_m^1 \\ \vdots & & & & & & \ddots \\ C_{m-d+1}^d & C_{m-d+1}^{d-1} & \dots & & & & \end{array}$$

Bu tablo oluşturulurken (3.4) denklemi kullanılmıştır ve burada $S(x) = C_m^0$ olduğu açıktır (Özkan, 2006).

3.3.4.2.B-Spline fonksiyonlarının türev ve integralleri

Şimdi $\Phi_m^d(x)$ fonksiyonunun türevi için önemli bir formül verilecektir. $\Phi_m^d(x)$ fonksiyonunun türevi,

$$\frac{d}{d(x)} \Phi_m^d(x) = \frac{1}{x_{m+d} - x_m}$$

olmak üzere, burada

$$\alpha_m^d = \frac{1}{x_{m+d} - x_m}$$

alınırsa

$$\frac{d}{d(x)} \Phi_m^d(x) = \alpha_m^d$$

eşitliği yazılır.

Diğer kullanılan formüller aşağıdaki gibidir. Bu formüllerin doğrulanması α_i^d ve $\Phi_m^d(x)$ fonksiyonlarının tanımları ile sağlanır.

$$\alpha_m^d \Phi_m^{d+1}(x) = \alpha_m^{d+1} \Phi_m^d(x)$$

$$\alpha_{m+1}^d (1 - \Phi_m^d(x)) = \alpha_m^{d+1} (1 - \Phi_m^d(x))$$

3.3.4.3. Yardımcı teorem(B-spline fonksiyonlarının türevleri)

$d \geq 2$ için B-spline fonksiyonlarının türevleri,

$$\frac{d}{dx} \Phi_m^d(x) = \left(\frac{d}{x_{m+d} - x_m} \right) \Phi_m^{d-1}(x) - \left(\frac{d}{x_{m+d+1} - x_{m+d}} \right) \Phi_{m+1}^{d-1}(x)$$

eşitliğinden hesaplanır. Bu denklem $d = 1$ olduğu zaman $x = x_m, x_{m+1}, x_{m+2}$ hariç tüm x değerleri için doğrudur.

3.3.4.4. Yardımcı teorem (Süreklilik Sınıfı)

$d \geq 1$ için Φ_m^d , B-Spline fonksiyonları $C_{d-1}(R)$ süreklilik sınıfına sahiptir.

3.3.4.5. Yardımcı teorem(B-spline fonksiyonlarının integralleri)

B-spline fonksiyonlarının integralleri aşağıdaki eşitlik ile hesaplanır(Özkan, 2006).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_m^d(s) ds = \left(\frac{x_{m+d+1} - x_m}{d + 1} \right) \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_j^{d+1}(x)$$

3.3.5. Kuadratik B-spline fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ olmak üzere x_m noktalarındaki $\Phi_m(x)$ kuadratik B-spline fonksiyonları, $m = -1, 0, \dots, N$ olmak üzere

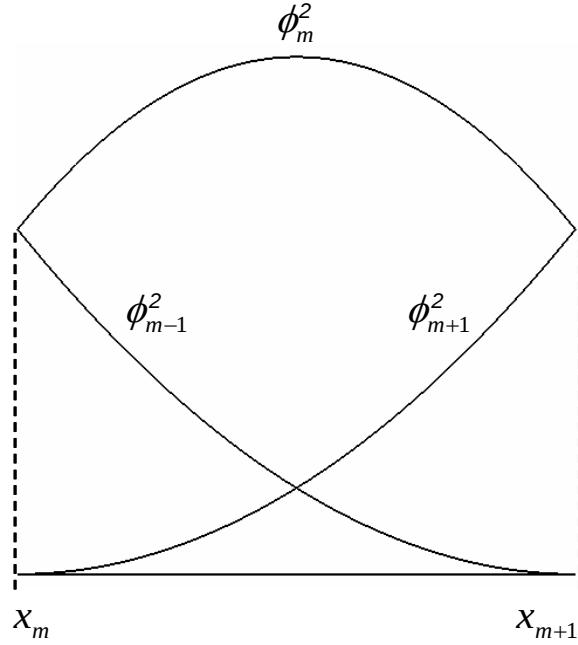
$$\phi_m = \frac{1}{h^2} \begin{cases} [x_{m+2} - x]^2 - 3[x_{m+1} - x]^2 + 3[x_m - x]^2 & [x_{m-1}, x_m] \\ [x_{m+2} - x]^2 - 3[x_{m+1} - x]^2 & [x_m, x_{m+1}] \\ [x_{m+2} - x]^2 & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \quad (3.5)$$

olarak tanımlanır. Burada $h = x_{m+1} - x_m$ dir. Kuadratik B-spline fonksiyonları ve onun birinci mertebeden türevleri $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ aralığı dışında sıfırdır. Sadece aralıktaki elemanlar göz önüne alındığında (3.5)' teki kuadratik B-spline fonksiyonlarıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralık $\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}$ gibi üç spline tarafından örtülür.

$\phi_m(x)$ kuadratik B-spline fonksiyonlarından oluşan

$$X_N = L(\phi_{-1}, \phi_0, \dots, \phi_{N-1}, \phi_N)$$

kümesi, $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı fonksiyonların bir tabanıdır.

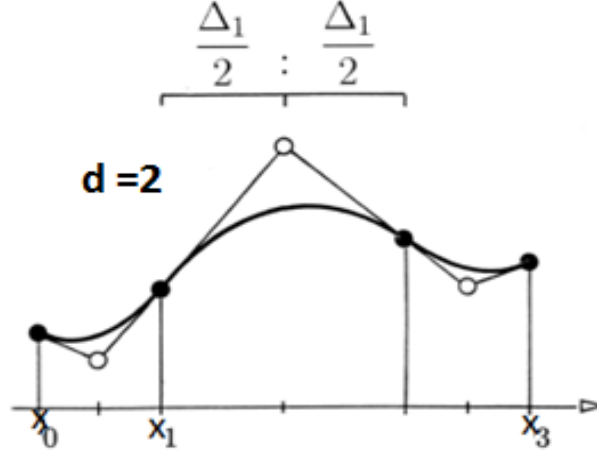


Şekil 3.4. Kuadratik B-Spline şekil fonksiyonları

Çizelge 3.1. $\phi_m(x)$ ve onun birinci $\phi'_m(x)$ türevinin verilen bölüm noktalarındaki değerleri

x	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}
$\phi_{m,2}$	0	1	1	0
$\phi'_{m,2}$	0	$\frac{2}{h}$	$-\frac{2}{h}$	0

kolaylıkla elde edilebilir (Özlük, 2005).



Şekil 3.5. Kuadratik B-spline fonksiyonunun kendini oluşturan polinom parçaları ile birlikte olması

Yukarıdaki şekilde $\Phi(x|0,1,2,3)$ kuadratik B-Spline fonksiyonu kendini oluşturan polinom parçaları ile birlikte görülmektedir. Şekilde üç polinomun $\Phi(x|0,1,2,3)$ kuadratik B-spline fonksiyonunu oluştururken, fonksiyonun birinci mertebeden türevinin sürekli olabilmesi için nasıl düzgün bağlandıklarına dikkat edilmelidir (Özlük, 2005).

3.3.6. Kübik B-Spline fonksiyonlar

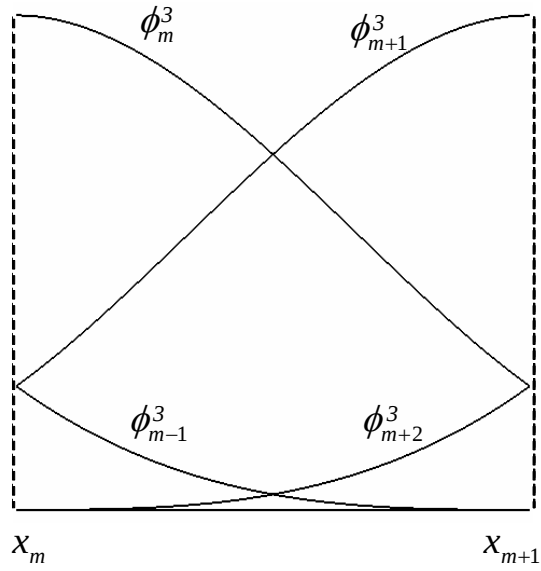
$[a,b]$ aralığının bir düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ olmak üzere x_m noktalarındaki $\Phi_m(x)$ kübik B-Spline fonksiyonları $m = -1, 0, \dots, N+1$ olmak üzere

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{m+2})^3 & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{m-1}) + 3h(x - x_{m-1})^2 - 3(x - x_{m-1})^3 & [x_{m-1}, x_m] \\ h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^3 & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^3 & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

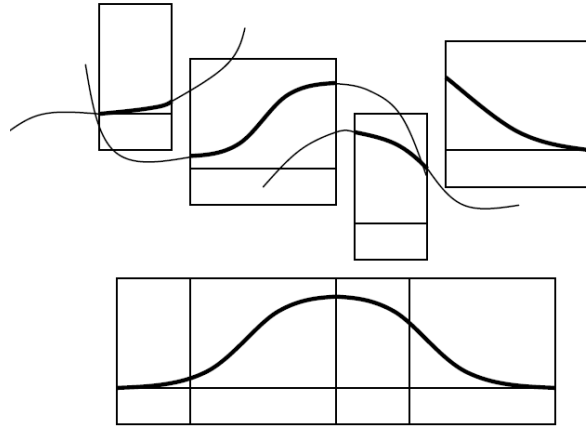
olarak tanımlanır. Burada $h = x_{m+1} - x_m$ dir. Kübik B-Spline fonksiyonları ve onun birinci ve ikinci mertebeden türevleri $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığı dışında sıfırdır. Sadece aralıktaki elemanlar göz önüne alındığında (3.6) deki Kübik B-spline fonksiyonlarıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $\Phi_{m-1}, \Phi_m, \Phi_{m+1}$ ve Φ_{m+2} gibi dört spline tarafından örtülür. $\Phi_m(x)$ kübik B-Spline fonksiyonlarından oluşan

$$X_N = L(\Phi_{-1}, \Phi_0, \dots, \Phi_{N-1}, \Phi_{N+1})$$

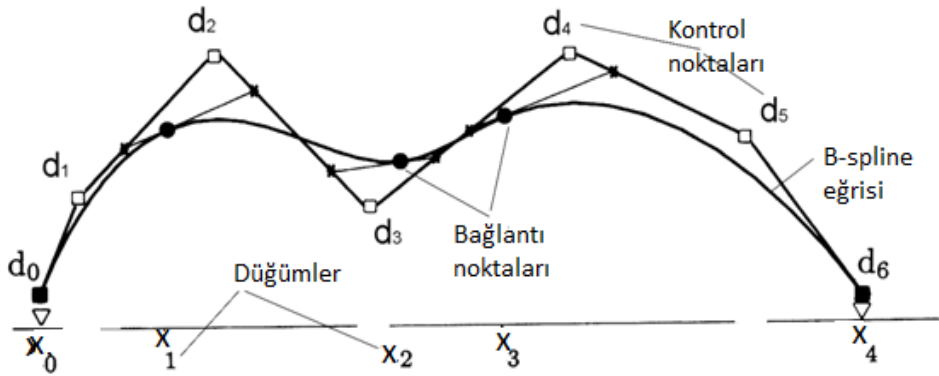
kümesi, $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı fonksiyonların bir tabanıdır (Özlük, 2005).



Şekil 3.6. Kübik B-spline  ekil fonksiyonları



Şekil 3.7. Dört kübik polinomun birleşerek kübik B-spline fonksiyonunu oluşturması
( zkan, 2006)



Şekil 3.8. Düğüm noktaları, bağlantı noktaları, kontrol noktaları ile kübik B-Spline e rresi (URL-1).

Düğüm aralıklarının eşit olması durumunda $\Phi_{m,3}(x)$ kübik B-spline fonksiyonu, onun birinci türevi $\Phi'_{m,3}(x)$ ve ikinci türevi $\Phi''_{m,3}(x)$ nin $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığında düğüm noktalarındaki değerleri Çizelge 3.2.'de verilmiştir (Özlük, 2005).

Çizelge 3.2. $\Phi'_{m,3}(x)$ ve $\Phi''_{m,3}(x)$ nin $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığında düğüm noktalarındaki değerleri

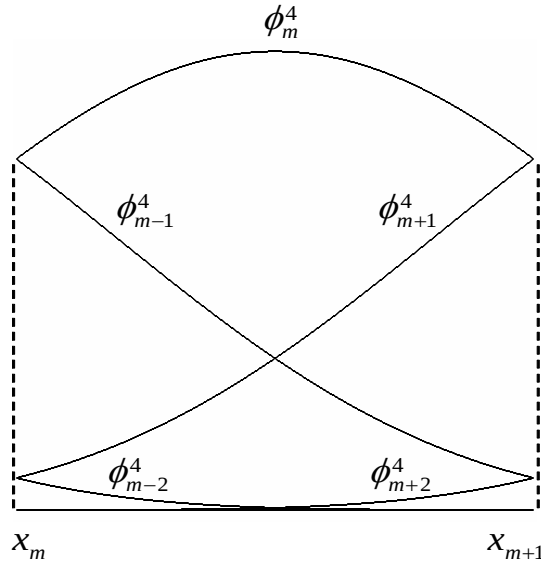
	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}
$\Phi_{m,3}(x)$	0	1	4	1	0
$\Phi'_{m,3}(x)$	0	$\frac{3}{h}$	0	$-\frac{3}{h}$	0
$\Phi''_{m,3}(x)$	0	$\frac{6}{h^2}$	$\frac{-12}{h^2}$	$\frac{6}{h^2}$	0

3.3.7. Kuartik B-spline fonksiyonları

$[a,b]$ aralığının bir düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ olmak üzere x_m noktalarındaki $\Phi_m(x)$ kuartik B-spline fonksiyonları

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^4} \begin{cases} (x_{m+3} - x)^4 - 5(x_{m+2} - x)^4 + 10(x_{m+1} - x)^4 - 10(x_m - x)^4 + 5(x_{m-1} - x)^4 & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x_{m+3} - x)^4 - 5(x_{m+2} - x)^4 + 10(x_{m+1} - x)^4 - 10(x_m - x)^4 & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+3} - x)^4 - 5(x_{m+2} - x)^4 + 10(x_{m+1} - x)^4 & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+3} - x)^4 - 5(x_{m+2} - x)^4 & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x_{m+3} - x)^4 & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \quad (3.7)$$

olarak tanımlanır. Burada $h = x_{m+1} - x_m$ dir. Kuartik B-spline fonksiyonları ile onun birinci, ikinci ve üçüncü mertebeden türevleri $x_{m-2} \leq x \leq x_{m+3}$ aralığı dışında sıfırdır. Sadece aralıktaki elemanlar göz önüne alındığında (3.7)' deki kuartik B-spline fonksiyonlarıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $\Phi_{m-2}, \Phi_{m-1}, \Phi_m, \Phi_{m+1}, \Phi_{m+2}$ gibi beş spline tarafından örtülür (Boz, 2006).



Şekil 3.9. Kuartik B-spline şekil fonksiyonları

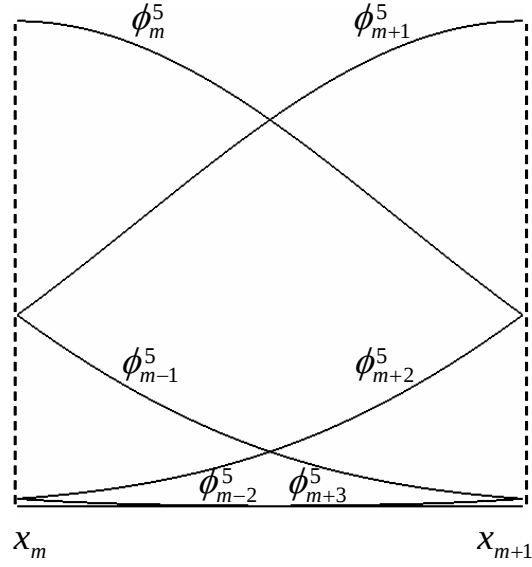
3.3.8. Kuintik B-Spline fonksiyonlar

$[a,b]$ aralığının bir düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ olmak üzere x_m noktalarındaki $\Phi_m(x)$ kuintik B-Spline fonksiyonlarıdır.

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^5} \begin{cases} (x - x_{m-3})^5 & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 & [x_{m-1}, x_m] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 - 20(x - x_m)^5 & [x_m, x_{m+1}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 - 20(x - x_m)^5 + 15(x - x_{m+1})^5 & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 - 20(x - x_m)^5 + 15(x - x_{m+1})^5 - 6(x - x_{m+2})^5 & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \quad (3.8)$$

olarak tanımlanır. Burada $h = x_{m+1} - x_m$ iki düğüm arasındaki uzaklıktır. Kuintik B-spline fonksiyonları ile onun birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü mertebeden türevleri $x_{m-3} \leq x \leq x_{m+3}$ aralığı dışında sıfırdır. Sadece aralıktaki elemanlar göz önüne alındığında (3.8)' deki kuintik B-spline fonksiyonlarıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $\phi_{m-2}, \phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}$ ve ϕ_{m+3} gibi altı spline tarafından örtülür. $[a,b]$ üzerinde tanımlı fonksiyonların bir bazı

$$X_N = L(\Phi_{-2}, \Phi_{-1}, \dots, \Phi_{N+1}, \Phi_{N+2}) \text{ dir.}$$



Şekil 3.10. Kuintik B-spline şekil fonksiyonları

Düğüm noktalarının eşit aralıklı olması durumunda $\Phi_{m,5}(x)$ kuintik B-spline fonksiyonunun ve onun dördüncü mertebeye kadarki türevlerinin $[x_{m-3}, x_{m+3}]$ aralığında düğüm noktalarındaki, değerleri Çizelge 3.3.' te gösterilmiştir (Boz, 2006).

Çizelge 3.3. Kuintik B-Spline fonksiyonunun ve onun dördüncü mertebeye kadarki türevlerinin $[x_{m-3}, x_{m+3}]$ aralığında düğüm noktalarındaki değerleri

x	x_{m-3}	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	x_{m+3}
$\Phi_{m,5}(x)$	0	1	26	66	26	1	0
$\Phi'_{m,5}(x)$	0	$\frac{5}{h}$	$\frac{50}{h}$	0	$-\frac{50}{h}$	$-\frac{5}{h}$	0
$\Phi''_{m,5}(x)$	0	$\frac{20}{h^2}$	$\frac{40}{h^2}$	$-\frac{120}{h^2}$	$\frac{40}{h^2}$	$\frac{20}{h^2}$	0
$\Phi'''_{m,5}(x)$	0	$\frac{60}{h^3}$	$-\frac{120}{h^3}$	0	$\frac{120}{h^3}$	$-\frac{60}{h^3}$	0
$\Phi''''_{m,5}(x)$	0	$\frac{120}{h^4}$	$-\frac{480}{h^4}$	$\frac{720}{h^4}$	$-\frac{480}{h^4}$	$\frac{120}{h^4}$	0

BÖLÜM 4

FISHER'S DENKLEMİ

4.1. Tanım

Son zamanlarda Fisher's denklemi için analitik ve nümerik yöntemlerin gelişmesinde çok büyük ilerlemeler kaydedilmiştir. Fisher's denkleminin açık çözümleri özel bir dalga çözümü için Ablowitz ve Zeptella(1979) tarafından bulunmuştur. D-boyutlu Fisher's denklemi için asimptotik çözümler Puri ve diğerleri(1989) tarafından bulunmuştur. Singular Perturbation Method, Puri ve arkadaşları tarafından Fisher's denklemine uygulanmıştır. Fisher's reaksiyon-difüzyon denklemi Carey ve Shen(1995) tarafından en küçük kareler sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak çözüldü. Fisher's denkleminin çözümü için Wang' in 1988 yılında yaptığı çalışmada lineer olmayan bir dönüşüm tanıtıldı. Mavoungou ve arkadaşlarının 1994 yılında, Wazwaz ve arkadaşlarının 2002 yılındaki çalışmalarında denklemin çözümlerine yaklaşmak için Adomian's decomposition yöntemi uygulandı. Denklemin ilerleyen dalga çözümlerinin simülasyonu için hareketli ızgara metodu Oui ve Sloan(1998) tarafından uygulanmıştır. Fisher's denkleminin çözümlerinin bulunması için Sinc Kolokasyon yöntemi Al-Khaled(2000) tarafından uygulanmıştır. Ayrıca denklemin çözümü pseudospectral yöntemiyle Olmos ve Shizgal(2009) tarafından incelendi. Son zamanlarda denklemin çözümüne yaklaşım olarak diferansiyel kuadratur yöntemi Mittal ve Jiwari(2009) tarafından uygulanmıştır. Parekh ve arkadaşları(1990) tarafından zaman ve konum ayrıştırmasındaki aralık ölçüsünün çok büyük olarak kullanımına izin veren bir nümerik yöntem önerildi.

Kompakt sonlu fark(CFD) yönteminin farklı türdeki denklemlerin yaklaşık çözümlerinin bulunmasında güçlü bir matematiksel araç olduğu bilinir. Euler ve Navier-Stokes denklemlerinin çözümü için bir kompakt sonlu fark yöntemi uygulanmıştır. Schrödinger denklemlerinin çözümü için compact split-step sonlu fark yöntemi Denghan ve Taleei(2010) tarafından kullanıldı. Reaksiyon-difüzyon denklem sistemleri için yüksek dereceli bir kompakt sonlu fark yöntemi uygulandı. Helmholtz denkleminin çözümüne altıncı dereceden kompakt sonlu fark(CFD6) yöntemiyle yaklaşılmıştır.(Sutmann, 2007)

İntegro-diferansiyel denklemlerinin yaklaşımı için bir CFD6 yöntemi sunulmuştur. (Zhao ve Corless, 2006)

Reaksiyon-difüzyon denklemleri fiziksel olayları modellemede önemli bir role sahiptir. Biyoloji, kimya, metalürji ve yanma gibi alanlarda kullanılır. Çözümlerinin bulunmasının karmaşıklığı nedeniyle, reaksiyon-difüzyon denklemleri sayısal analiz çalışmalarında merkezi bir araç haline gelmiştir.

Fisher's denklemi ise reaksiyon-difüzyon denklemlerinin özel bir halidir. Bir boyutlu uzayda, lineer olmayan reaksiyon-difüzyon denklemleri şu şekilde yazılabilir:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Phi(u) \quad (4.1)$$

burada $u = u(x, t)$ konum ve zamana bağlı reel değerli bir fonksiyondur ve popülasyon yoğunluğunu temsil etmektedir.

$\alpha \partial^2 u / \partial x^2$ difüzyon terimi, α negatif olmayan difüzyon sabiti ve $\Phi(u)$ fonksiyonu reaksiyon sistemini tanımlamaktadır. (4.1) denkleminin en popüler yazılımı şu şekilde verilir.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta u(1 - u), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \quad (4.2)$$

Burada β reel parametredir. Lineer olmayan (4.2) denklemi ilk olarak Fisher(1936) tarafından sonsuz uzunluktaki bir yaşam alanında bir yaşam geninin yayılımını açıklamak için kullanıldı. Aynı denklem alevin yayılmasında, Brownian hareketi dallanma sürecinde ve nükleer reaktör teorisinde (Canosa, 1969) de oluşur. Onun anısına, genellikle Fisher's denklemi olarak adlandırılır. Fisher, bir boyutlu lineer olmayan parabolik kısmi diferansiyel denklemi, faydalı bir genin kinetik ilerleme oranı nı tanımlamak için tanıttı. Fisher's denklemi popülasyonun değişimini, difüzyon ve lineer olmayan lokal çoğalma gibi iki fiziksel sürece bağlı olarak temsil eder. Baskın gen popülasyonunun gelişimi difüzyon ve lineer olmayan çoğalmadan kaynaklanır. Aynı fiziksel olay küçük farklılıklarla birlikte popülasyona benzer olarak bir nükleer reaktördeki nötronlar üzerinde de gözlemlenir. Denklem, bir alevin yayılmasının prototip bir modelini ve bir nükleer reaktördeki nötron popülasyonunun modelini de tanımlar.

Difüzyon mekanizması bir bölgedeki bireylerin hareketlerini modeller. Bu bireyler bakteriler, moleküller, hücreler ya da fizikteki partiküller gibi çok küçük nesneler olabileceği gibi hayvanlar, bitkiler ya da salgın hastalıklar ve dedikodu gibi bir takım olay türleri de olabilir. Diğer yandan, $\Phi(u)$ ile verilen reaksiyon terimi ise doğum, ölüm gibi reaksiyon sürecini gösterir.

Denklemdaki temel matematiksel değişkenler, t zaman ve x konum olmak üzere, $u(x, t)$ fonksiyonu bireylerin yoğunluğunu belirleyen fonksiyondur. Popülasyon yoğunluğu genellikle birim alandaki organizma ya da partiküllerin sayısı olarak tanımlanır. Bir habitattaki popülasyon iki türlü değişebilir. Birincisi bölgedeki bireylerin bölge içinde hareketleri ile oluşan değişim, ikincisi ise fiziksel, kimyasal, ya da biyolojik nedenlerle meydana gelebilecek doğum ve ölüm gibi faktörlerden kaynaklanan değişimdir.

Birçok matematiksel problemde olduğu gibi burada da $u(x, t)$ fonksiyonunun süreklilik ve türevlenebilirlik gibi bazı özelliklere sahip bir fonksiyon olduğu kabul edilecektir. Teknik olarak $u(x, t)$ fonksiyonu şu şekilde tanımlanır.

x, ω ile gösterilecek olan habitatta bir nokta ve $\{O_n\}_{n=1}^{\infty}$ de x civarında ω ile aynı boyutlu uzaysal bölgelerin bir dizisi olsun. Burada O_n seçimi yapılırken O_n ' in uzaysal ölçümü (uzunluk, alan, hacim ya da matematiksel olarak Lebesgue ölçümü) $|O_n|$ olmak üzere $n \rightarrow \infty$ iken $|O_n| \rightarrow 0$ ve $O_n \supset O_{n+1}$ olmasına dikkat edilir. Bu durumda $u(x, t)$ fonksiyonu

$$u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t \text{ zamanında } O_n \text{ deki organizma sayısı}}{|O_n|} \quad (4.3)$$

limiti ile tanımlanır. Yani, ω ' nun herhangi bir O alt bölgesinde t zamanındaki toplam popülasyon

$$\int_O u(x, t) dx \quad (4.4)$$

şeklindedir.

Reaksiyon-difüzyon denklemlerinin matematiksel gösterimini tamamlamak için başlangıç ve sınır koşullarının belirlenmesi gerekir. Fizik ve biyolojideki bazı modellerde denklem bütün R^n üzerinde düşünülür. Böyle bir durumda uzayın sınırı $x = \infty$ olacaktır ya da daha açık şekliyle, x noktasının orijine uzaklığı $|x|$ olmak üzere, sınır koşulu $|x| \rightarrow \infty$ iken çözümü sınırlayan davranış olacaktır.

Buna göre sınır koşulları

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, t) = 0, t \geq 0 \quad (4.5)$$

veya

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, t) = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0, t \geq 0$$

şeklinde verilebilir. Başlangıç koşuluna gelince, örneğin popülasyon artışını modelleyen bir reaksiyon-difüzyon denkleminde, habitatın destekleyeceği popülasyon miktarı sınırlı olacağından başlangıç koşulu

$$0 \leq u(x, 0) \leq 1, \quad -\infty < x < \infty \quad (4.6)$$

olacak şekilde seçilmelidir. Burada 1 işlem kolaylığı açısından seçilmiştir.

Sınırlı çözüm tanım kümesi olarak $[a, b]$ alındığı zaman üstteki fiziksel sınır koşulları sırasıyla aşağıdaki sınır koşullarına dönüşür

$$u(a, t) = u(b, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (4.7)$$

$$u(a, t) = 1, \quad u(b, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (4.8)$$

Kolmogoroff ve arkadaşları tarafından(1937) uygun başlangıç ve sınır koşullarıyla (4.2) denkleminin her $c \geq 2$ dalga hızı için ilerleyen dalga çözümü olduğu gösterildi.

Kolmogoroff ve arkadaşları (1937) , eğer

$$u(x, 0) = 1 \quad (x < a) , \quad u(x, 0) = 0 \quad (x > b)$$

şartları sağlanırsa (4.2) denkleminin çözümünün $c = 2$ ilerleyen dalga hızına yaklaştığını göstermişlerdir. McKean(1975) eğer başlangıç yüzeyi, sınırlarda doğru davranışlara sahipse ikiden büyük herhangi bir dalga hızı için($c > 2$) çözümün kararlı olduğunu gösterdi.

$c \geq 2$ olduğu zaman (4.2) denkleminde

$$u = u(z) = u(x - ct)$$

Değerini yerine koyarak elde edilen ilerleyen dalga denklemi

$$u'' + cu' + u(1 - u) = 0 \text{ olur.}$$

Yani $c = \frac{5}{\sqrt{6}} = 2.04$ özel dalga hızı için tam(gerçek) çözüm bulunur.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, t) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (4.9)$$

$x \rightarrow \mp\infty$ iken bütün türevleri sıfırdır.

(4.2) denklemi $t := \beta t$ ve $x := (\beta/\alpha)^{\frac{1}{2}}x$ dönüşümü aracılığıyla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1 - u) \quad (4.10)$$

daha basit bir forma dönüşmesi için boyutsuzlaştırmaya uygundur.

Sayısız araştırmacı Fisher's denkleminin matematiksel özellikleri üzerinde çalıştı.

Ancak, ilk çalışma Fisher'e aittir. Kolmogoroff(1937)' un bu konudaki çalışması çok önemlidir ve ilerleyen dalga yüzleri ile ilgili öncü makalelerinden sonra, bu denklem

KPP denklemi olarak ta adlandırılır. Fisher ve Kolmogoroff(1937) ayrıca bu problemi minimum hızlı ilerleyen dalga çözümü olarak kabul eder. Onlar (4.2) formunun her bir başlangıç koşulunu gösterdiler. (4.2) denklemi başlangıç dağılımı olarak bütün zamanlar için tek bir sınırlı çözüme sahiptir.

Fisher's denkleminin özellikleri teorik olarak Fisher(1937) gibi birçok araştırmacı bilim adamı tarafından çalışıldı.

İlerleyen dalga çözümleri,

$$u(x, t) = V(x - ct)$$

formunda belirli bir V fonksiyonu ve $z = x - ct$ bağımsız değişkeni ile ifade edilebilir.

Böyle bir çözüm (4.6)' dan dolayı $u_0(x)$ olarak sınırlıdır yani

$$V(z) \in [0,1] \quad \forall z \in R$$

Verilen bir başlangıç durumu için Fisher's denkleminin kararlı durum dalga hızı tektir.

(4.5) ve (4.6) lokal olmayan şartları altında her $c \geq 2$ hız değeri için bir ilerleyen dalga çözümü bulunduğu kanıtlandı.(Kolmogoroff vd.,1937)

(4.2) denkleminin herhangi bir $c \geq 2$ için ilerleyen dalga çözümü vardır. $c < 2$ ise böyle bir çözüm yoktur.

Larson ve Hagan, Fisher's denkleminin herhangi bir başlangıç çözümü olduğunu gösterdiler, öyle ki eğer

$$u_0(x) \sim e^{-\beta x} \quad x \rightarrow \infty,$$

ise, c aşağıdaki gibi olmak üzere

$$c(\beta) = \begin{cases} \beta + \frac{1}{\beta}, & 0 < \beta \leq 1 \\ 2, & \beta \geq 1 \end{cases}$$

böylece u , $c(\beta)$ hızıyla bir dalga yüzü olarak gelişir. Fisher's denkleminin ilerleyen dalga çözümü, denklemin dalga çözümünün nümerik temsilinin doğru ve güvenilir olmasından dolayı birçok araştırmacı tarafından sayısal olarak incelenmiştir.

Literatürde sayısız hesaplamalı yaklaşımlar Fisher's denklemine uygulanmıştır. Accurate Space Derivatives(ASD), sonlu elemanlar ve diğer yöntemler. Literatürde (4.5) ile (4.6) lokal olmayan şartlar ve lokal şartları içeren Fisher denklemi için sınır koşulları yaygın bir şekilde kullanılır. Sınır koşulları kullanılarak $c = 4$ ve $c = 6$ teorik dalga hızlarıyla süper dalga hızından minimum dalga hızına çabuk bir şekilde geçeceği Gazdag ve Canosa(1974) tarafından gösterildi. Ayrıca süper hızlı dalgadan minimum hızlı dalgaya geçiş zamanının X_N sınır noktasına bağlı olduğu da gösterildi. Carey ve Shen(1995) tarafından aynı sınır şartları altında farklı bir nümerik yöntem

kullanılarak benzer sonuçlar elde edildi. Fisher's denkleminin çözümleri üzerinde Li vd.(1998) tarafından son zamanlarda yapılan bazı çalışmalarda, sınır koşulları altında doğrudan tam çözüm değerleri kullanılarak bu sorun önlendi. Ancak sorunun bu şekilde çözülmesi genel nümerik çalışmalara uygulanamaz.

Fisher's denkleminin çözümünün başka bir zorluğu, dalga yüzünde küçük bir pertürbasyonla ilerleyen dalganın kararsızlığıdır.

Qui ve Sloan(1998) tarafından dalganın ön yüzündeki pertürbasyonların arka kesimleriyle kıyaslandığında çok önemli olduğu yorumları yapıldı. Carey ve Shen(1995) tarafından yapılan nümerik çalışmalarda, dalga yüzünde küçük bir negatif değerin katlanarak büyük bir negatif değere dönüştüğü belirtildi. Bu yüzden nümerik yöntemlerin kararlılığı ve güvenilirliği, ilerleyen dalga çözümlerinin uzun dönem davranışı için hayati bir öneme sahiptir.

Son dönemlerde Li vd.(1998) tarafından güçlü bir reaksiyon ile birlikte ölçeklendirilmiş Fisher's denkleminin nümerik çözümleri ile ilgilenildi. Böyle güçlü bir reaksiyon altında denklem, geleneksel düşük dereceli yöntemle çözülmesi zor bir çok benzer dalgaya dönüşür. Böylece Li vd.(1998) tarafından, dinamik uygun bir aralık için popüler olan hareketli ızgara metodu kullanılarak problemin üstesinden gelindi. Ancak bunların sonuçları tatmin edici değildir. Daha yakın bir zamanda Qui ve Sloan(1998) tarafından problem tekrar incelendi. Monitör(izleme) fonksiyonu değiştirilerek güçlü reaksiyon durumu için hareketli ızgara metodunun iyi bir sonuç vereceği onlar tarafından gösterildi.

En son, analitik sinyal işleme ve hesaplamalı tomografide, birçok hesaplama problemlerinin çözümü için potansiyel bir nümerik yaklaşım olan, Hilbert dönüşümü içeren, açılımı Discrete Singular Convolution olan DSC algoritma önerildi. DSC algoritmasının kullanımı, kuantum öz değerleri, doğrusal ve doğrusal olmayan dinamikler, sıkıştırılamayan sıvılar ve yapısal analiz problemlerinin çözümünde gösterildi. Algoritmanın matematiksel temelleri dağılımlar ve dalgacık(wavelets) teorilerine dayanır.

Faz düzlemi analizi ile Canosa(1964), Fisher's denklemini çözümlendi ve ikinci dereceden pertürbasyon çözümünü elde etti. Gazdag ve Canosa(1974) Fisher's denklemini için ASD yöntemini uyguladılar ve süper hızlı dalgadan minimum hızlı dalgaya geçiş

mekanizmasını gösterdiler. Fisher's denklemini içeren bazı reaksiyon-difüzyon problemlerinin Galerkin sonlu eleman çözümleri Mitchell ve Manoranjan(1984) tarafından verildi. Test fonksiyonları olarak kübik Spline fonksiyonlarını ve yaklaşım fonksiyonları olarak parçalı lineer fonksiyonları kullanarak, Tang ve Weber(1990), Petrov-Galerkin yöntemini farklı başlangıç koşulları için uyguladı ve ilerleyen dalga çözümlerini hesapladı. Carey ve Shen(1995), Fisher's denkleminin en küçük kareler karma formülünü geliştirip bu problem sınıfı için bahsedilen yöntemin uygulanabilirliğini araştırmışlardır. Galerkin yöntemi kullanılarak 1+2 boyutlu Fisher's denklemi Roessler ve Hüßner tarafından çözüldü. Qiu ve Sloan(1998) Fisher's denklemini, hareketli ızgara metodunu kullanarak çözdü ve monitör fonksiyonunun diferansiyel denklem özelliklerine göre seçildiği takdirde hareketli ızgara metodunun daha iyi sonuçlar ürettiği gösterildi. (4.2)'nin çözümü için bir sinc collocation yöntemi Al-Khaled(2000) tarafından sunuldu ve discrete singular yöntemi(DSC) Zhao ve Wei(2002) tarafından önerildi. Crank-Nicolson(CN), Fourier pseudospectral(FPS) ve ASD gibi diğer üç yöntem verilerek sonuçlar karşılaştırıldı ve (DSC) yönteminin sonuçlarının diğer üç yöntemden daha iyi sonuçlar verdiği fikrine varılmıştır.

Son zamanlarda, Fisher's denklemi Chebyshev-Gauss-Lobatto kuadratur noktalara dayanan kolokasyon yöntemi kullanılarak Olmos ve Shizgal(2006) tarafından çözülmüştür. Onlar öncelikle tek bir tanım kümesiyle nümerik yöntemi kullanmışlardır. Bu yaklaşım yuvarlama hatalarından kaynaklanan bazı kararsızlıklara neden olabilir. Böylece daha kararlı sonuçlar elde etmek için çok tanım kümeli yaklaşım kullandılar. Şahin vd.(2008) tarafından Fisher's denkleminin çözümleri için bir nümerik algoritma önerildi. Düzgün aralık üzerinde Galerkin yöntemi ile kuadratik B-Spline fonksiyonları çalışmalarında kullanıldı. Kuintik B-Spline sonlu elemanlar yöntemi, birçok diferansiyel denklemin çözümlerinde kullanıldı.

B-Spline fonksiyonları nümerik yöntemlerde yaklaşım fonksiyonları olarak kullanılan parçalı polinomlar için taban fonksiyonlardır. Bu bölümde kuintik B-Spline fonksiyonları kullanılarak Fisher's denkleminin çözümü kolokasyon yöntemiyle elde edilecektir. Kolokasyon yöntemiyle elde edilen denklem sistemi Thomas algoritması kullanılarak çözülüp sonuçlar grafikler halinde verilmiştir. Taban fonksiyonu olarak kullanılan kuintik B-Spline fonksiyonlarının dördüncü mertebeden türevleri de sürekli olduğundan bu yöntem yüksek mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümleri için bir alternatif olarak düşünülebilir. Bir sonraki kısımda ise denklemin çözümünde

kullanılacak olan kolokasyon ve sonlu elemanlar nümerik yöntemlerinden kısaca bahsedilecektir.

4.2. Sonlu Elemanlar Yöntemi

Sonlu elemanlar yöntemi, temelinde çözülmesi zor ve karmaşık bir diferansiyel denklemin, çözüm aralığının istenildiği kadar küçük parçalara ayrıştırılması suretiyle daha küçük ve çözülmesi daha kolay olan problemler oluşturmaya dayanan nümerik bir yaklaşımdır. Klasik sonlu farklar yöntemiyle kıyaslanacak olursa sonlu elemanlar yöntemi daha yeni bir yöntemdir. Sonlu elemanlar yönteminin sonlu farklar yöntemine oranla avantajları genel sınır koşulları, kompleks geometri ve çeşitli materyal özellikleri kolayca elde edilir. Sonlu elemanlar yöntemi ilk olarak 1943 yılında Courant tarafından tanıtıldı. 1950' lerden 1970' lere kadar kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için genel bir yöntem olarak matematikçiler ve mühendisler tarafından geliştirildi (Chen, 2005).

Sonlu eleman yöntemleri; uzay bilimleri, nükleer enerji endüstrisi ve diğer mühendislik alanlarında ortaya çıkan problemlerle birlikte akışkanlar mekaniği, gelgit hareketleri, kimyasal taşıma ve difüzyon problemlerine de başarılı bir şekilde uygulanmaktadır. Bir sonlu eleman yönteminin bir probleme uygulanmasında genellikle aşağıdaki yol izlenir:

- Çözüm bölgesi sonlu sayıda alt aralığa veya bölgeye ayrılır.
- Genelleştirilen bir aralık üzerinde denklem türetilir.
- Çözüm bölgesinde tüm aralıklar birleştirilir.
- Elde edilen denklem sistemi çözülür

Sonlu elemanlar yönteminin integral formülasyonları temelde varyasyonel ve genelde fonksiyonel olarak bilinen özel bir integral bağıntısının maksimum veya minimumunu oluşturan noktasal parametreleri bulmayı amaçlar. Fonksiyonelin ekstremumunu üreten çözüm, sınır şartlarını sağlar ve Euler denklemi olarak bilinen bir diferansiyel denklem sistemine dönüşür. Dolayısıyla fonksiyonelin bilinmesi durumunda fonksiyonele karşılık gelen Euler denklemini bulmak ta kolaylaşır.

Ancak bu fonksiyonelin bulunması bazen oldukça zor olmakta bazen de mümkün olmamaktadır. Bu nedenle orijinal diferansiyel denklemden integral formülasyonunun yapıldığı değişik ağırlıklı kalan yöntemleri geliştirilmiştir.

Ağırlıklı kalan yöntemlerini ifade edebilmek için, Ω çözüm bölgesini göstermek üzere

$$AU = f ; \Omega = (a, b) \quad (4.11)$$

Operatör denklemi göz önüne alınsın. Burada A lineer veya lineer olmayan bir diferansiyel operatör ve f bağımsız değişkenlerin bir fonksiyonudur. Ağırlıklı kalan yöntemlerinde U_N yaklaşık çözüm, δ_j belirlenmesi gereken serbest parametreler olmak üzere;

$$U_N = \sum_{j=1}^N \phi_j \delta_j \quad (4.12)$$

olarak seçilir. Burada ϕ_j trial baz fonksiyonlarıdır.

(4.12) yaklaşık çözümü (4.11) operatör denkleminde yerine yazılırsa

$$R_N = AU_N - f \quad (4.13)$$

olarak tanımlanan R_N kalanı elde edilir. Ağırlıklı kalan yöntemlerinde R_N kalanı, seçilen ϕ_j fonksiyonları ve δ_j bilinmeyen parametrelerinin bir fonksiyonudur. Bu yöntemler yardımıyla δ_j parametrelerinin belirlenmesinde, R_N kalanı ile bir ψ_j ağırlık fonksiyonunun çarpımının Ω bölgesindeki integralinin sıfır olması istenir:

$$\int_{\Omega} R_N \psi_j dx = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (4.14)$$

(4.13) ile verilen R_N kalanı (4.14) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega} (\psi_i A \phi_j dx) \right) \delta_j = \int_{\Omega} \psi_i f dx$$

ve

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \psi_i A \phi_j dx, \quad f_i = \int_{\Omega} \psi_i f dx$$

olarak alınır

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} \delta_j = f_i \quad (4.15)$$

bulunur. (4.15) denklem sistemi çözülerek δ_j parametreleri bulunur ve u_n yaklaşık çözümüne ulaşılır (Özlük, 2005).

Şimdi ise denkleminin çözümünde kullanılan B-spline taban fonksiyonlarından ve bir sonlu eleman yöntemi olan kolokasyon yönteminden bahsedilecektir.

4.2.1. B-spline taban fonksiyonları

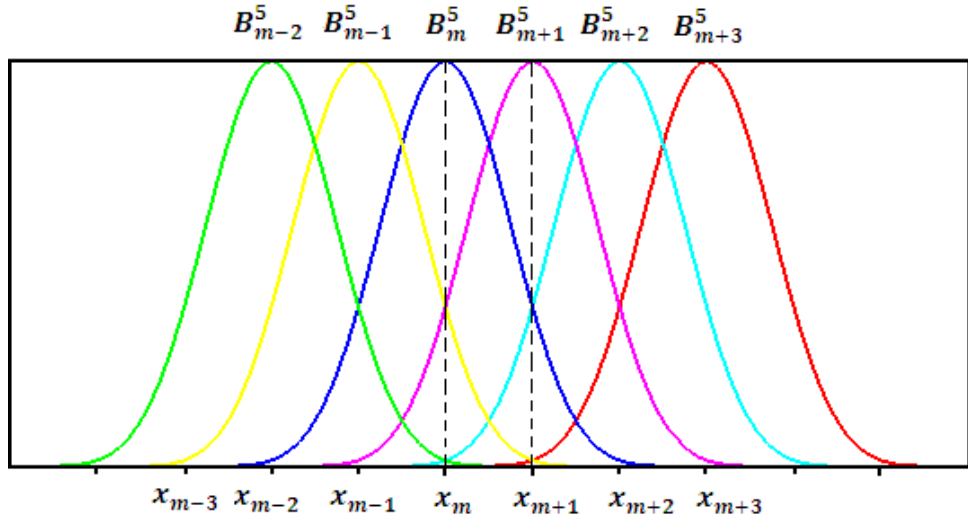
Matematikte en çok bilinen fonksiyon sınıflarından olan spline fonksiyonlar, nümerik analizde geniş bir uygulama alanına sahiptir. Spline fonksiyonlar k.dereceden yeterince düzgün parçalı polinomlardır. k. dereceden bir $S(x)$ spline fonksiyonu

$$S(x) = \left\{ \sum_{m=1} \xi_m B_m^k(x) : \xi_m \text{ reel} \right\}$$

şeklinde gösterilebilir.

Burada $B_m^k(x)$, k. dereceden B-spline fonksiyonu olarak adlandırılan özel taban spline fonksiyonlarıdır. B-spline fonksiyonlar kompakt destek sağlama ve yüksek çözme gücüne sahip nümerik yöntemler üretebilme özelliklerine bağlı olarak diferansiyel problemlerde geniş şekilde kullanılırlar. Özellikle Boor' un spline fonksiyonlar hakkındaki sonuçlarından sonra, B-spline fonksiyonlar diferansiyel problemlerde geniş bir uygulama yelpazesinde popüler hale geldi. Kuintik B-spline fonksiyonlar beşinci dereceden parçalı polinomlardır. Matematiksel olarak şöyle ifade edilebilirler

$$B_m^5(x) = \frac{1}{h^5} \begin{cases} (x - x_{m-3})^5 & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 & [x_{m-1}, x_m] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 - 20(x - x_m)^5 & [x_m, x_{m+1}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 - 20(x - x_m)^5 + 15(x - x_{m+1})^5 & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 - 20(x - x_m)^5 + 15(x - x_{m+1})^5 - 6(x - x_{m+2})^5 & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$



Şekil 4.1. Düzgün bir aralık üzerinde kuintik B-spline fonksiyonları

Ardışık altı tane kuintik B-spline fonksiyonu Şekil 4.1.'de gösterilmiştir. Bu şekilde gösterildiği gibi her bir kuintik B-spline fonksiyonu altı bitişik eleman üzerinde sıfırdan farklıdır ki altı kuintik B-spline her sonlu elemanı kaplar. Kompakt destek sağladığından dolayı, diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinde kuintik B-spline fonksiyonlarını kullanmak seyrek matris sistemlerine yol açar.

4.2.2. Kolokasyon yöntemi

Kolokasyon yöntemi, ağırlıklı rezidü yönteminin bir uygulamasıdır. Bu yöntemde W_i ağırlık fonksiyonları yerine

$$W_i = \delta(x - x_i)$$

olacak şekilde Dirac Delta fonksiyonları seçilir.

Dirac Delta fonksiyonları

$$\iint_{t,x} a(.)\delta_i(x - x_i, t - t_i)dxdt = a|x_i, t_i| \quad (4.16)$$

olacak şekilde önemli bir özelliğe sahiptir. Burada x konumu ve t zamanı göstermektedir. (4.1) denklemi kolokasyon yöntemi için

$$\iint_{t,x} \delta_i(.)R(.)dxdt = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (4.17)$$

formunda matematiksel olarak ifade edilebilir. N bağımsız değişken ve N denklemden oluşan sistemden her bir (x_i, y_i) kolokasyon noktasındaki rezidü değeri yok edilerek istenen sonuçlar kolaylıkla elde edilebilir. (Dönmez, 2008)

4.2.3. Kuintik B-spline kolokasyon yöntemi

Bu tez çalışmasında kuintik B-spline kolokasyon yöntemi aracılığıyla Fisher's denkleminin nümerik çözümleri incelenecektir. Nümerik yöntemi oluşturmak için öncelikle bir aralığın üretilmesi gerekiyor. Bu amaçla

$$a = X_0 < X_1 < \dots < X_N = b$$

aralık ölçüsü $h = X_{m+1} - X_m$, $X_m = a + mh$, ($m = 0, 1, \dots, N$) olmak üzere

$[a, b]$ düzgün aralığı alınsın.

$[a, b]$ aralığında tanımlı kuintik B-Spline fonksiyonlardan oluşan

$$X = \{\varphi_{-2}^5, \varphi_{-1}^5, \dots, \varphi_{N+2}^5\}$$

kümesinin bu aralıktaki fonksiyonlar için bir taban oluşturduğu Prenter(1975) tarafından ifade edilmiştir. Buna göre u çözümüne yapılacak olan nümerik yaklaşımlar

$$U(x, t) = \sum_{m=-2}^{N+2} \delta_m(t), \varphi_m^5(x)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\delta_m(t)$ denklemin kuintik B-spline kolokasyon formundan elde edilecek zamana bağlı parametrelerdir. Bu nümerik yaklaşımda kuintik B-spline fonksiyonlarının bölünme noktalarındaki değerlerinin kullanılmasıyla U çözümü ve bu çözümün konuma göre türevleri

$$\begin{aligned} U_m &= U(x_m) = \delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}, \\ (U_m)_x &= U_x(x_m) = \frac{5}{h}(-\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\ (U_m)_{xx} &= U_{xx}(x_m) = \frac{20}{h^2}(\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 6\delta_m + 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\ (U_m)_{xxx} &= U_{xxx}(x_m) = \frac{60}{h^3}(-\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\ (U_m)_{xxxx} &= U_{xxxx}(x_m) = \frac{120}{h^4}(\delta_{m-2} - 4\delta_{m-1} + 6\delta_m - 4\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \end{aligned} \quad (4.18)$$

bağıntıları elde edilir.

α ve β pozitif parametreler, U_t ve U_{xx} türevi göstermek üzere $[0, 1]$ aralığında tanımlı

$$U_t = \alpha \cdot U_{xx} + \beta \cdot U \cdot (1 - U) \quad (4.19)$$

Fisher's denkleminin

$$U(0,t) = U(1,t) = 0 \quad t \geq 0 \quad (4.20)$$

sınır şartları ve

$$U(x,0) = \text{sech}^2(10x), 0 \leq U(x,0) \leq 1 - \infty < x < \infty \quad (4.21)$$

başlangıç şartı altındaki sayısal çözümü araştırılacaktır.

Buna göre bu denklemin çözümü olarak kabul edilecek olan yaklaşım fonksiyonu ise,

$$U(x_m) = \delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}$$

olmak üzere, bu yaklaşım fonksiyonunun ikinci dereceden türevi ise (4.18)' ten de görüldüğü üzere

$$(U_m)_{xx} = U_{xx}(x_m) = \frac{20}{h^2}(\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 6\delta_m + 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}) \text{ dir.}$$

U yaklaşım fonksiyonun x parametresine göre birinci türevinin alınmayışının sebebi, çözümü araştırılan Fisher's denkleminin içerisinde fonksiyonun x parametresine göre birinci türevinin bulunmayışındır.

$$U_t = \dot{\delta}_{m+2} + 26\dot{\delta}_{m+1} + 66\dot{\delta}_m + 26\dot{\delta}_{m-1} + \dot{\delta}_{m-2}$$

ve $(1 - U)$ değerini lineerleştirmek için $Z_m = 1 - U$ olarak tanımlanabilir.

Üstteki tanımlamalar çözümü araştırılan Fisher's denkleminde (4.19)' da yerine koyulduğunda

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_{m+2} + 26\dot{\delta}_{m+1} + 66\dot{\delta}_m + 26\dot{\delta}_{m-1} + \dot{\delta}_{m-2} = & \frac{20\alpha}{h^2}(\delta_{m+2} + 2\delta_{m+1} - 6\delta_m + \\ & 2\delta_{m-1} + \delta_{m-2}) + \beta Z_m(\delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}) \end{aligned} \quad (4.22)$$

denkleminde ulaşılır. Burada

$$\dot{\delta}_m = \frac{\delta_m^{n+1} - \delta_m^n}{\Delta t}, \quad \delta_m = \frac{\delta_m^{n+1} + \delta_m^n}{2}$$

ve Crank-Nicolson formülleri (4.22)' de yerine konulduğunda

$$\begin{aligned} \delta_{m+2}^{n+1}\gamma_1 + \delta_{m+1}^{n+1}\gamma_2 + \delta_m^{n+1}\gamma_3 + \delta_{m-1}^{n+1}\gamma_4 + \delta_{m-2}^{n+1}\gamma_5 = & \delta_{m+2}^n\gamma_4 + \delta_{m+1}^n\gamma_5 + \delta_m^n\gamma_6 + \\ & \delta_{m-1}^n\gamma_5 + \delta_{m-2}^n\gamma_4 \end{aligned} \quad (4.23)$$

denkleminde ulaşılır.

Burada

$$\gamma_1 = \frac{1}{\Delta t} - \frac{10\alpha}{h^2} - \frac{\beta Z_m}{2}, \quad \gamma_2 = \frac{26}{\Delta t} - \frac{20\alpha}{h^2} - 13\beta Z_m$$

$$\gamma_3 = \frac{66}{\Delta t} + \frac{60\alpha}{h^2} - 33\beta Z_m, \quad \gamma_4 = \frac{1}{\Delta t} + \frac{10\alpha}{h^2} + \frac{\beta Z_m}{2}$$

$$\gamma_5 = \frac{26}{\Delta t} + \frac{20\alpha}{h^2} + 13\beta Z_m, \quad \gamma_6 = \frac{66}{\Delta t} - \frac{20\alpha}{h^2} - 13\beta Z_m$$

bulunur.

$$\gamma_1 \delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_2 \delta_{m-1}^{n+1} + \gamma_3 \delta_m^{n+1} + \gamma_4 \delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_5 \delta_{m+2}^{n+1} = F_m = U_m \quad (4.24)$$

(4.23) sistemi bir matris denkleminde dönüştürülebilir. Buna göre sistemin katsayı matrisi A olmak üzere A.D₂ şeklindeki (N+5) x (N+1) boyutlu matrisin detaylı açılımı yazılacak olursa

$$\begin{aligned} a_{00}\delta_{-2} + a_{01}\delta_{-1} + a_{02}\delta_0 + a_{03}\delta_1 + a_{04}\delta_2 &= U_0 \\ a_{10}\delta_{-1} + a_{11}\delta_0 + a_{12}\delta_1 + a_{13}\delta_2 + a_{14}\delta_3 &= U_1 \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \end{aligned}$$

$$a_{N,0}\delta_{N-2} + a_{N,1}\delta_{N-1} + a_{N,2}\delta_N + a_{N,3}\delta_{N+1} + a_{N,4}\delta_{N+2} = U_N$$

(4.25) sistemine karşılık gelen matris denklemi

$$A.D_2 = B.D \quad (4.26)$$

olarak yazılır. Burada D₂ vektörü, zamana bağlı parametrelerden oluşan

$$D_2 = [\delta_{-2}^n, \delta_{-1}^n, \dots, \delta_{N+1}^n, \delta_{N+2}^n]^T$$

n. zamandaki yani bir önceki zamandaki bilinen δ ların oluşturduğu vektördür.

(4.25) sisteminde bilinmeyen sayısı $N + 5$ ve toplam denklem sayısı $N + 1$ olduğundan dolayı kalan dört tane bilinmeyeni bulmak için yok etme yoluna gidilmelidir.

Sistemin sınır koşulları (4.25)' te kullanılarak $\delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}$ sınır parametreleri yok edilecektir. Fakat bu yok etme işleminde her iki sınır için de birer ilave sınır koşuluna ihtiyaç duyulur. Seçilen problemin karakterine göre belirlenecek olan bu ilave koşullarla birlikte yok etme işlemi tamamlanabilir. Böylece (4.26) denklemi,

(N+1) x (N+1) boyutlu katsayılar matrisine indirgenmiş olur ve bu denklemin çözümleri Gauss yok etme yöntemiyle bulunabilir. Sistemdeki lineer olmayan terimin lineerleştirilmesinden dolayı ortaya çıkacak hatayı en aza indirmek için uygulanan

$$(d^*)^{n+1} = d^n + \frac{1}{2}(d^{n+1} - d^n) \quad (4.27)$$

şu iç iterasyon, her bir zaman adımında iki ya da üç kez uygulanır. Elde edilecek D parametrelerinin (4.26)' de kullanılmasıyla herhangi bir n anındaki U çözümleri hesaplanmış olur. (4.25) sisteminde iterasyona başlamak için D^0 başlangıç çözümünün bilinmesi gerekir. D^0 vektörü başlangıç koşuluna bağlı olarak aşağıdaki şekilde bulunur.

4.3. Başlangıç Durumu

D^0 başlangıç çözümünün bilinmesi halinde (4.25) denklemi ardışık olarak çözülürse herhangi bir n zamanı için D^n çözümleri iteratif olarak bulunabilir. İterasyonun başlangıç adımını temsil eden D^0 çözümleri, sistemin başlangıç koşulundan elde edilecek denklemlerin çözülmesiyle bulunabilir. Bu durumda başlangıç koşulu için (4.24) eşitlikleri dikkate alınır

$$\begin{aligned} U_0=U(x_0, 0) &= U_0 = \delta_{-2}^0 + 26\delta_{-1}^0 + 66\delta_0^0 + 26\delta_1^0 + \delta_2^0 \\ U_1=U(x_1, 0) &= U_1 = \delta_{-1}^0 + 26\delta_0^0 + 66\delta_1^0 + 26\delta_2^0 + \delta_3^0 \\ U_2=U(x_2, 0) &= U_2 = \delta_0^0 + 26\delta_1^0 + 66\delta_2^0 + 26\delta_3^0 + \delta_4^0 \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ U_N = U(x_N, 0) &= U_N = \delta_{N-2}^0 + 26\delta_{N-1}^0 + 66\delta_N^0 + 26\delta_{N+1}^0 + \delta_{N+2}^0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $N+1$ denklem ve $N + 5$ bilinmeyen olduğundan dolayı $\delta_{-2}^0, \delta_{-1}^0, \delta_{N+1}^0, \delta_{N+2}^0$ sınır parametreleri sistemden elimine edilmelidir. Bunun için (4.1) eşitliklerinde $m=0$ iken yani başlangıç noktasında

$$U'(0) = 0 \text{ ve } U''(0) = 0$$

koşullarından hareketle

$$\begin{aligned} \delta_{-2}^0 &= \frac{15}{2}\delta_0 - 5\delta_1 - \frac{3}{2}\delta_2 \\ \delta_{-1}^0 &= -\frac{3}{4}\delta_0 + \frac{3}{2}\delta_1 + \frac{1}{4}\delta_2 \end{aligned} \quad (4.29)$$

ile δ_{-2} ve δ_{-1} sınır parametreleri $\delta_0, \delta_1, \delta_2$ parametrelerine bağılı olarak sistemden yok edilmiş oldu. Buna göre elimine etmek istediğimiz $\delta_{-2}^0, \delta_{-1}^0$ değerleri (4.28)' te yerine yazıldığında ulaşılacak olan yeni katsayı değerleri şu şekilde olacaktır.

Benzer şekilde U fonksiyonunun birinci ve ikinci türevlerinde diğer uç nokta olan N noktasında sıfır olma şartı kullanılırsa

$$U'_N = U'(x_N) = 0 \quad ve \quad U''_N = U''(x_N) = 0 \quad (4.30)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \delta_{N+1}^0 &= \frac{1}{4}\delta_{N-2} + \frac{3}{2}\delta_{N-1} - \frac{3}{4}\delta_N \\ \delta_{N+2}^0 &= -\frac{3}{2}\delta_{N-2} - 5\delta_{N-1} + \frac{15}{2}\delta_N \end{aligned} \quad (4.31)$$

Sınır parametreleri başlangıç koşulları kullanılarak amaca uygun biçimde elimine edilmiş oldu. Böylece elde edilen sınır parametreleri (4.24) sisteminde yerine yazılıp sistem düzenlenirse

$$\begin{aligned} a_{02} &= a_{02} - \frac{3}{4}a_{01} + \frac{15}{2}a_{00} \\ a_{03} &= a_{03} + \frac{3}{2}a_{01} - 5a_{00} \\ a_{04} &= a_{04} + \frac{1}{4}a_{01} - \frac{3}{2}a_{00} \\ a_{11} &= -\frac{3}{4}a_{10} + a_{11} \\ a_{12} &= \frac{3}{2}a_{10} + a_{12} \\ a_{13} &= \frac{1}{4}a_{10} + a_{13} \\ a_{N-1,1} &= \frac{1}{4}a_{N-1,4} + a_{N-1,1} \\ a_{N-1,2} &= \frac{3}{2}a_{N-1,4} + a_{N-1,2} \\ a_{N-1,3} &= -\frac{3}{4}a_{N-1,4} + a_{N-1,3} \\ a_{N,0} &= \frac{1}{4}a_{N,3} + a_{N,0} - \frac{3}{2}a_{N,4} \\ a_{N,1} &= -5a_{N,4} + a_{N,1} + \frac{3}{2}a_{N,3} \\ a_{N,2} &= \frac{15}{2}a_{N,4} + a_{N,2} - \frac{3}{4}a_{N,3} \end{aligned} \quad (4.32)$$

ve bunların sayısal değerleri yerine yazıldığında başlangıç değeri için yok etme işleminden sonraki katsayılar matrisine ulaşılmış olur.

4.4.Sınır Durumu

Başlangıç koşulundan D^0 çözümlerine ulaştıktan sonra iteratif olarak (4.23) denklem sistemi yoluyla D^n (n.zamandaki $\delta(delta)$ değerleri) bulunacak. Fakat öncelikle denklem sayısı ile bilinmeyen sayısını eşitlemek için sınır şartları kullanılarak $\delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}$ değerlerinin yok edilmesi gerekmektedir. Bunun için U fonksiyonunun kendisinde ve birinci derece türevinde sınır koşullarından faydalanılacaktır, yani

$$U_0 = U(0) = 0 \text{ ve } U'_0 = U'(0) = 0$$

şartları kullanılarak

$$\delta_{-2} = \frac{165}{4} \delta_0 + \frac{65}{2} \delta_1 + \frac{9}{4} \delta_2$$

$$\delta_{-1} = -\frac{33}{8} \delta_0 - \frac{9}{4} \delta_1 - \frac{1}{8} \delta_2$$

Benzer şekilde

$$U_N = U(N) = 0 \text{ ve } U'_N = U'(N) = 0$$

eşitliklerinden de

$$\delta_{N+1} = -\frac{1}{8} \delta_{N-2} - \frac{9}{4} \delta_{N-1} - \frac{33}{8} \delta_N$$

$$\delta_{N+2} = \frac{9}{4} \delta_{N-2} + \frac{65}{2} \delta_{N-1} + \frac{165}{4} \delta_N$$

eliminasyonu elde edilir.

Bu yok etme işleminden sonra bu değerler yine sistemde yerine konulup düzenlenecek olursa katsayılar matrisindeki yeni değerler şu şekilde olacaktır,

$$a_{02} = a_{02} - \frac{33}{8} a_{01} + \frac{165}{4} a_{00}$$

$$a_{03} = a_{03} - \frac{9}{4} a_{01} + \frac{65}{2} a_{00}$$

$$a_{04} = a_{04} - \frac{1}{8} a_{01} + \frac{9}{4} a_{00}$$

$$a_{11} = a_{11} - \frac{33}{8} a_{10}$$

$$\begin{aligned}
a_{12} &= a_{12} - \frac{9}{4} a_{10} \\
a_{13} &= a_{13} - \frac{1}{8} a_{10} \\
a_{N-1,1} &= a_{N-1,1} - \frac{1}{8} a_{N-1,4} \\
a_{N-1,2} &= a_{N-1,2} - \frac{9}{4} a_{N-1,4} \\
a_{N-1,3} &= a_{N-1,3} - \frac{33}{8} a_{N-1,4} \\
a_{N,0} &= a_{N,0} - \frac{1}{8} a_{N,3} + \frac{9}{4} a_{N,4} \\
a_{N,1} &= a_{N,1} - \frac{9}{4} a_{N,3} + \frac{65}{2} a_{N,4} \\
a_{N,2} &= a_{N,2} - \frac{33}{8} a_{N,3} + \frac{165}{4} a_{N,4}
\end{aligned}$$

4.5. Kararlılık Analizi

Kararlılık analizi Von Neumann yöntemine dayanılarak yapılacaktır. Von Neumann kararlılık analizi, lineer fark denklemlerinde hatanın yayılmasını anlamada oldukça kullanışlı bir yöntemdir. Bu yaklaşımı kullanarak (t_{n+1}, x_{m+1}) konum-zaman noktasındaki çözüm ile (t_n, x_m) noktasındaki çözüm, $i=\sqrt{-1}$, k mod sayısı, h eleman büyüklüğü, kh ise $x_{m+1} = x_m + h$, $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ konum-zaman ayrıştırmasıyla x yönünde düzgün bir aralık üzerindeki kh boyutsuz dalga sayıları olmak üzere

$$u_{m+1}^{n+1} = q e^{imkh} \cdot u_m^n \quad (4.33)$$

eşitliği ile ilişkilendirilebilir. Bu bağlamda kararlılık analizi, 0 (sonsuz dalga boyu) ve π (ayrık aralık üzerindeki en küçük dalga boyu) arasında değişen kh ' nin bütün olası değerleri üzerinde $|q| \leq 1$ i sağlama düzeyindedir.

$$\delta_m^n = q^n e^{im\varphi} \quad (4.34)$$

ile verilen Fourier modu, nümerik yöntemin lineer hale getirilmesi için belirlenir. Nümerik yöntemin kararlılığı için (4.29) denklemi kullanılarak yöntemin kararlılığı araştırılmalıdır. Fourier modu (4.29) denkleminde kullanıldığında yapılan düzenlemeler sonucunda q büyüme faktörü aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$q = \frac{2\gamma_{m4} \cos(2kh) + 2\gamma_{m5} \cos(kh) + \gamma_{m6}}{2\gamma_{m1} \cos(2kh) + 2\gamma_{m2} \cos(kh) + \gamma_{m3}}$$

şeklinde olur. Kararlılık şartı olan $|q| \leq 1$ eşitsizliğinden

$$|q| \leq 1 \Rightarrow |q|^2 \leq 1$$

$$\Rightarrow (2\gamma_{m4} \cos(2kh) + 2\gamma_{m5} \cos(kh) + \gamma_{m6})^2 - (2\gamma_{m1} \cos(2kh) + 2\gamma_{m2} \cos(kh) + \gamma_{m3})^2 \leq 0 \text{ ise}$$

$$\frac{32AB}{\Delta t h^2} \leq 0$$

bulunur. Burada

$$A = \cos^2(kh) + 13 \cos(kh) + 16$$

$$B = 20\alpha \cos^2(kh) + \beta Z_m h^2 \cos^2(kh) + 20\alpha \cos(kh) + 13\beta Z_m h^2 \cos(kh) - 40\alpha + 16\beta Z_m h^2$$

Tüm diğer şartlar kesinlikle negatif olmadığı için, kararlılık için tek şart sıfırdan küçük veya sıfıra eşit olan B teriminden gelir. Bazı işlemler sonrasında bahsedilen gereklilik şu şartı verir

$$\frac{\alpha}{\beta Z_m h^2} \leq \frac{16 + 13 \cos(kh) + \cos^2(kh)}{20(2 - \cos(kh) - \cos^2(kh))}$$

Dolayısıyla nümerik yöntem bu şarta bağlı olarak sürekli kararlı olur.

$\cos(kh)$, $[-1,1]$ arasında değiştiği için ve $h \rightarrow 0$ iken yukarıdaki eşitsizliğin hem sağ hem sol tarafındaki terimler sonsuza gitme eğiliminde oldukları için, h değeri için yukarıdaki şartı daha da sadeleştirmek hiç de kolay değildir. Ancak bu şarta bakılarak yöntemin kararlılığının zaman adımına bağlı olmadığı söylenebilir yani nümerik yöntem Δt zaman adımı açısından koşulsuz kararlıdır.

Böylece, sayısal hesaplamalarda Δt zaman adımı sabitlendikten sonra h değeri denenerek seçilebilir.

BÖLÜM 5

TEST PROBLEMLERİ

5.1. Test problemi 1

Bu bölüm bir önceki bölümde bahsedilen nümerik yöntemin performansının testi için ayrılmıştır. Test problemleri bu amaçla kullanılır. Öncelikle farklı başlangıç koşulları altında Fisher's denklemleri üzerinde reaksiyon ve difüzyon olayları analiz edilecek.

Sonuç olarak bu çalışmada kullanılan yöntemle literatürdeki diğer yöntemleri detaylı bir şekilde kıyaslamak için, yöntemimiz zayıf reaksiyon ve güçlü reaksiyon problemleri üzerinde doğrulanacaktır.

Yöntemin nümerik performansını analiz edebilmek için iki hata ölçüsü kullanılacaktır.

Yani yöntemin doğruluğu aşağıdaki şekillerde tanımlanan L_∞ maksimum mutlak hata ve L_2 hata normu aracılığıyla ölçülür.

$$L_2 = ||U^{tam} - U^{yaklaşık}||_2 = \sqrt{h \sum_{j=0}^N (U_j^{tam} - U_j^{yaklaşık})^2} \quad (5.1)$$

$$L_\infty = ||U^{tam} - U^{yaklaşık}||_\infty = \max_j |U_j^{tam} - U_j^{yaklaşık}|$$

olmak üzere burada U^{tam} , denklemin tam(analitik) çözümü ve $U^{yaklaşık}$ ta nümerik (yaklaşık) çözümüdür. Buna göre bağıl hata

$$Bağıl\ Hata = \sqrt{\frac{\sum_{j=0}^N |U_j^{n+1} - U_j^n|^2}{\sum_{j=0}^N |U_j^{n+1}|^2}} \quad (5.2)$$

Teorik ve nümerik dalga hızları arasındaki fark $|c - \hat{c}|$, kararlı durum hareketine ulaştığı zaman yaklaşım hatası olarak kullanılabilir.

Simüle edilen ilerleyen dalga çözümünün hızını $\hat{c}$ hesaplamak için, aşağıdaki formül kullanılır.

$$c^n = \frac{(x_{wf}^n - x_{wf}^{n-1})}{\Delta t} \quad (5.3)$$

Burada

$$x_{wf}^n = \int_0^L U(x, t_n) dx / \max_{0 \leq x \leq L} \{U(x, t_n)\} \quad (5.4)$$

yayılan dalga için referans konumudur. Böylece dönüştürülmüş dalga hızı $c_s = c/\sqrt{\alpha\beta}$ olur. Yukarıdaki integrale yamuklar kuralını kullanarak ulaşılır.

Yakınsama noktasal hızını hesaplamak için, algoritma çeşitli alan adımları için çalıştırıldı. Yöntemin yakınsaklık mertebesi şu formülle hesaplanır

$$mertebe = \frac{\log_{10}(\|u - u_{h_i}\|_2 / \|u - u_{h_{i+1}}\|_2)}{\log_{10}(h_i/h_{i+1})}$$

Burada u gerçek çözüm, h_i adım ölçüsü olmak üzere u_{h_i} nümerik çözümdür.

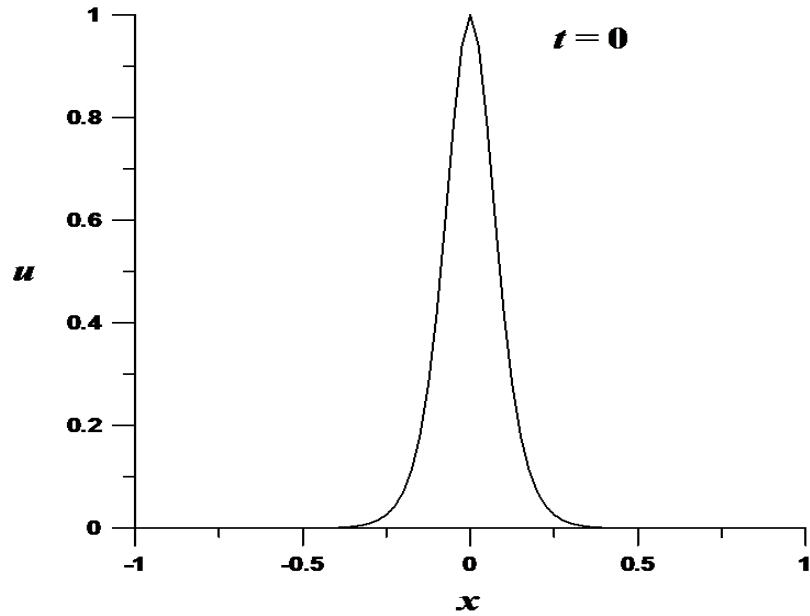
Öncelikle,

$$U(x, 0) = \text{sech}^2(10x) \quad (5.5)$$

ilk test için başlangıç koşulu olarak seçilir. (4.8) sınır şartları altındaki çözümleri edilir. Başlangıç koşulu ve ondan elde edilen sonuçlar hemen hemen sıfır olduğu için, programda çözüm aralığı olarak $[-50,50]$ alınır. Böylece (4.5)' teki sınır koşulları aşağıdaki gibi sınırlı çözüm alanına dönüşür.

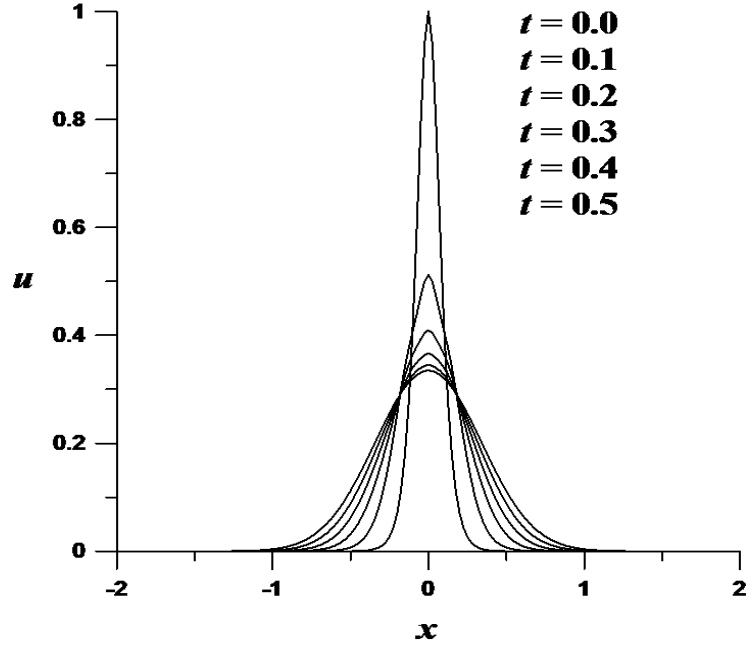
$$u(-50, t) = u(50, t) = 0, t > 0$$

Sayısal hesaplamalarda (4.2) denkleminde sabitler $\alpha = 0.1$ ve $\beta = 1$ olarak seçilir. Konum ve zaman ayırıştırması için, $h=0.025$ ve $\Delta t = 0.05$ olarak alınır. Algoritma $[-50,50]$ tanım kümesi üzerinde $t=40$ anına kadar çalıştırılır.



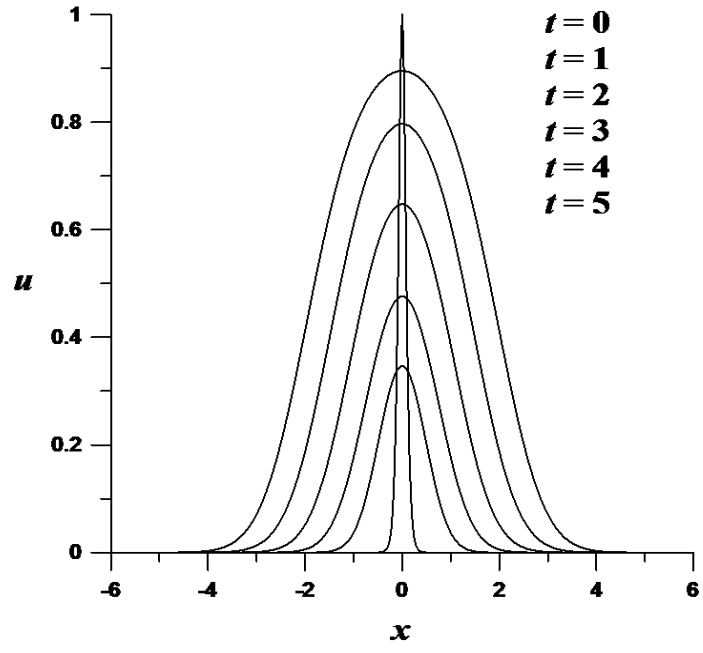
Şekil 5.1. Başlangıç çözümü

Şekil 5.1. ve Şekil 5.2.' de sırasıyla başlangıçtaki durum ve çözümün erken dönemdeki sonuçları gösterilmiştir. Zaman sürecinin başlangıcında, U_{xx} difüzyon terimi negatif ve büyük bir mutlak değere sahip ve $U(1 - U)$ reaksiyon terimi çok küçük olduğu için difüzyonun etkisi reaksiyonun etkisi üzerine baskındır. Şekil 5.2.' den de açıkça görüldüğü gibi bu baskınlığın sonucu olarak zirve nokta başlangıçta hızlıca iner ve daha sonra düzleşir.

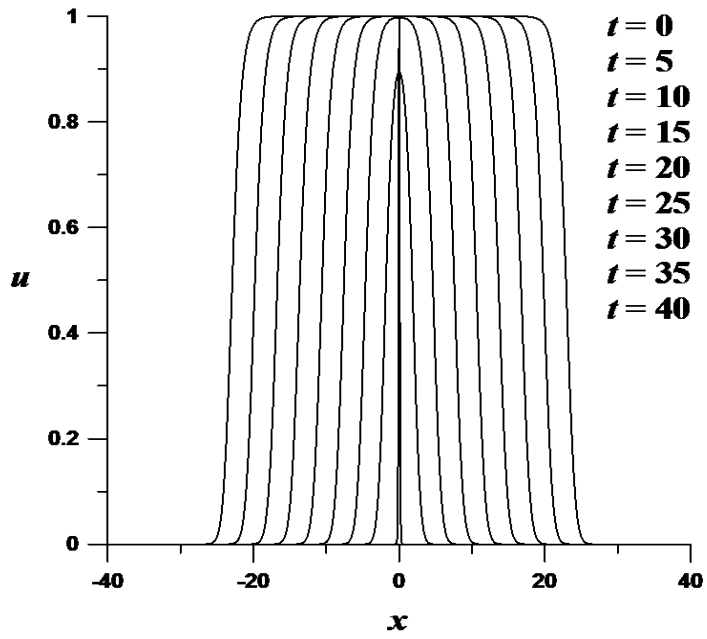


Şekil 5.2. Birinci test problemi için erken dönemlerdeki çözümler

Zirve nokta minimum değerini aldığı zaman, reaksiyon terimi difüzyon terimine yavaşça baskın olmaya başlar. Böylece zirve değeri artar ve Şekil 5.3.' te gösterildiği gibi genişliği büyür. Zirve $U=1$ maksimum değerine ulaştıktan sonra, yani yaşam alanının destekleyebileceği maksimum popülasyon yoğunluğuna ulaşıncaya Şekil 5.4.' te görüldüğü gibi grafiğin en üst noktası gittikçe düzleşir.



Şekil 5.3. Birinci test problemi için kısa zaman davranışı

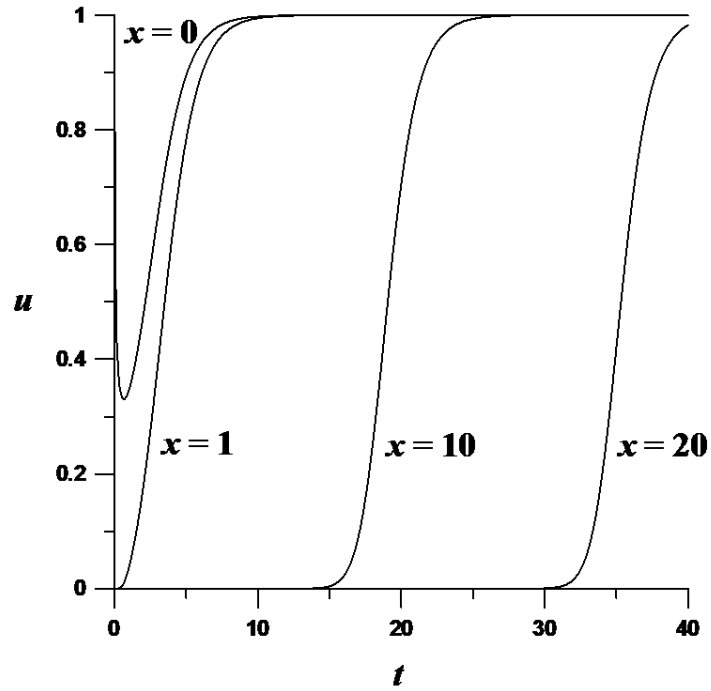


Şekil 5.4. Birinci test problemi için uzun zaman davranışı

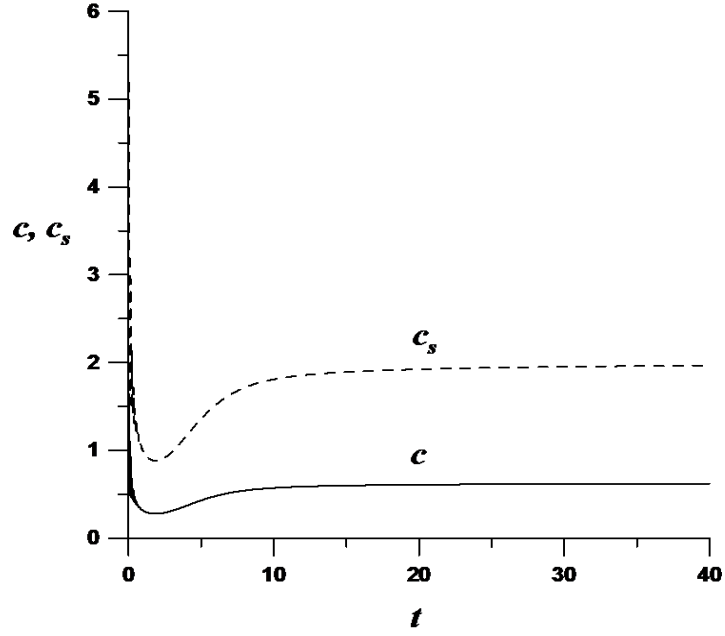
Zamana göre popülasyon yoğunluk profili, belirli noktalardaki reaksiyon-difüzyon sürecini anlamada önemli bir araç olarak kullanılabilir. Şekil 5.5. $x = 0, 1, 10, 20$ noktalarındaki popülasyon yoğunluğundaki değişimleri gösterir.

Şekil 5.5' ten kökeni olmayan bir popülasyon içinde hiçbir bozulma olmadığı açıktır. $x = 0$ noktasında, popülasyondaki azalma $t=0.65$ anına kadar hemen hemen %67 maksimum bozulmayla birlikte devam eder, böylece artmaya başlar ve en yüksek seviyesine ulaşır. Şekil 5.5. ve Şekil 5.6.' da görüldüğü gibi popülasyonun ve dalganın zamana göre davranışları verilmiştir.

$\hat{c}$, dalga hızı ve $\hat{c}_s$ dönüştürülmüş dalga hızındaki değişiklikler Şekil 5.6.' da gösterilmiştir. $\alpha = 0.1$ ve $\beta = 1$ değerlerinin seçimine bağlı olarak dalganın kararlı durum değeri $\hat{c} = 2\sqrt{\alpha\beta} = 0.63246$ olarak hesaplanır. Zamanın akışı içinde, dalga hızı kararlı durum değerine ulaşır oysa dönüştürülmüş dalga hızı $\hat{c}_s$, $c_{smin} = 2$ en küçük hız değerine ulaşır.



Şekil 5.5. Birinci test problemi için popülasyondaki değişimler



Şekil 5.6. Birinci test problemi için dalga hızlarındaki değişimler

Çizelge 5.1.' den görüldüğü üzere kuintik kolokasyon yöntemiyle elde edilen sonuçlar kabul edilebilir. Bu çalışmada kullanılan kuintik kolokasyon yönteminin sonuçları Carey ve Shen, Tang ve Weber tarafından bildirilen sonuçlar ile uyum içindedir. Teorik ve nümerik dalga hızları arasındaki fark, bu problemde yöntemin doğruluğunu ölçmek için kullanılabilir. $\hat{c}_s$ dönüştürülmüş dalga hızı $c_{smin} = 2$ minimum hız değerine ulaşırken c dalga hızı kararlı durum değerine yaklaşır.

$\alpha = 0,1$ ve $\beta = 1$ değerlerinin seçimine bağlı olarak teorik hız için kararlı durum değeri $2\sqrt{\alpha\beta} = 0,63246$ ' dır. Bahsedilen yaklaşımı anlamak için nümerik dalga hızları

Şekil 5.6.'da gösterilmiştir. Ayrıca bir kıyaslama yapmak için, dalga hızları ve hataları $t = 40$ anı için Çizelge 5.1.' de tablolastırılmıştır. Hesaplanan nümerik dalga hızları literatürde olan diğer çalışmalar ve teorik sonuçlarla uyum içindedir.

Çizelge 5.1. $t = 40$ anında dalga hızları ve hatalar arasındaki kıyaslama

	Hızlar		Hatalar	
	$\hat{c}$	$\hat{c}_s$	$ c - \hat{c} $	$ c_s - \hat{c}_s $
Quintik Kolokasyon	0,6214	1.9650	0.0111	0.0350
Galerkin	0.6214	1.9651	0.0111	0.0349
Carey ve Shen	0,6210	1.9638	0.0115	0.0362
Tang ve Weber	0.6205	1.9622	0.0120	0.0378
Analitik Çözüm	0,6325	2.0000		

5.2. Test Problemi 2(Başlangıç Adım Profili)

$$U(x, 0) = \begin{cases} e^{10(x+1)}, & x < -1 \\ 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ e^{-10(x-1)}, & x > 1 \end{cases} \quad (5.6)$$

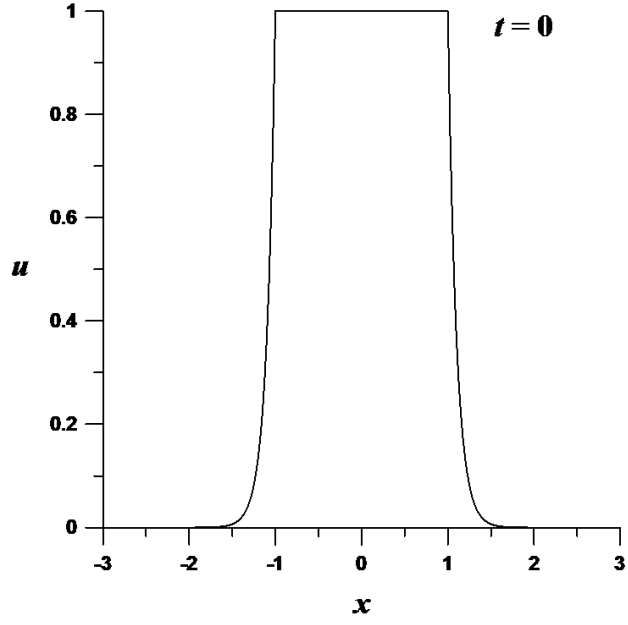
(5.6) başlangıç koşulu altında, bir önceki problemle benzer olarak, birinci problemdeki parametrelerle aynı seçilen çözüm parametreleri ve sınır koşulları altında reaksiyon-difüzyon süreci gözlemlenecektir.

Birinci probleme benzer olarak, algoritma $[-50,50]$ tanım kümesi üzerinde $t = 40$ anına kadar çalıştırılır ve parametreler

$$\alpha = 0.1, \quad \beta = 1, \quad h = 0.025, \quad \Delta t = 0.05$$

olarak seçilir.

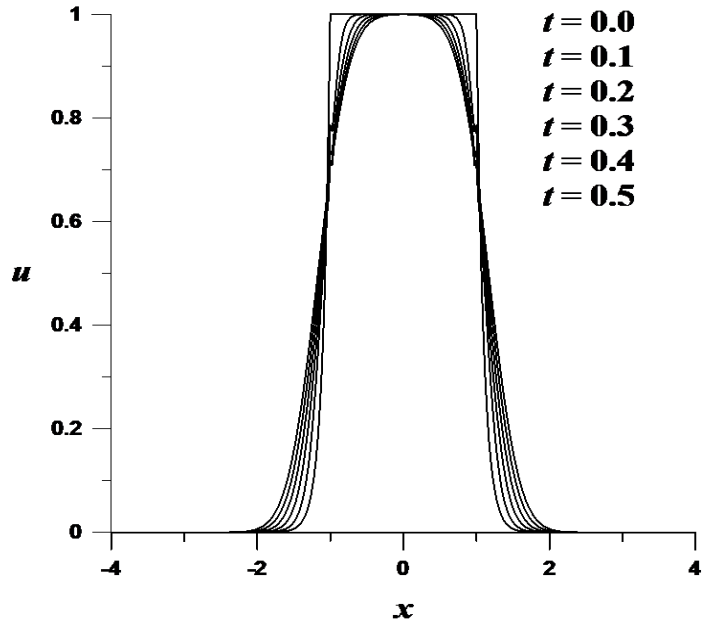
Başlangıç durumu için başlangıç koşulundan faydalananarak çözüme ulaşıldı. Şimdi ise denklem sisteminin diğer zamanlardaki çözümüne ulaşmak için sınır koşullarını kullanarak genel çözüme varmaya çalışılacaktır.



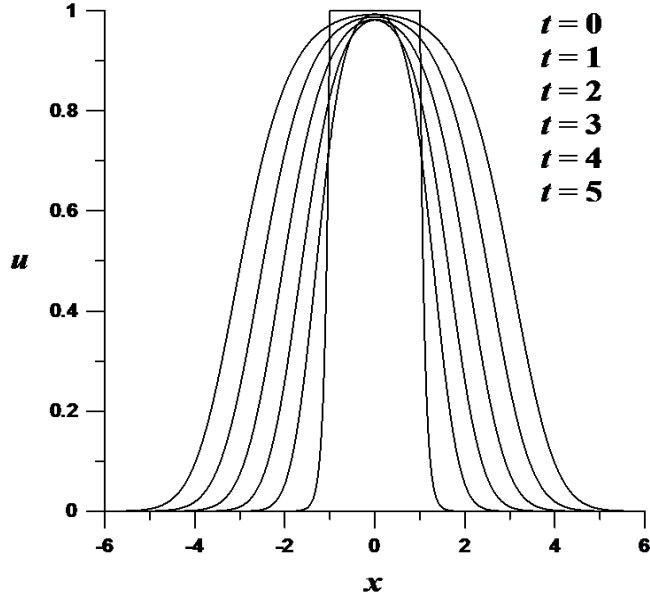
Şekil 5.7. İkinci test problemi için başlangıç çözümü

Şekil 5.7.' de başlangıç çözümü grafiği verilmiştir. Bu deneyde birinciden farklı olarak, difüzyon ve reaksiyonun etkileri çok küçüktür. Köşelerin yakınında difüzyon reaksiyondan daha etkilidir böylece grafik kenarlarda keskin köşelere sahip olmaktan düz olana kadar değişir ve biraz aşağı inmesine sebep olur.

Şekil 5.8. ve Şekil 5.9. gösterir ki kısa zaman periyodunda, $x = -1$ ve $x = +1$ yakınındaki noktalarda difüzyon etkileri grafiği keskin noktalara sahip olmaktan düz olana kadar değiştirir.

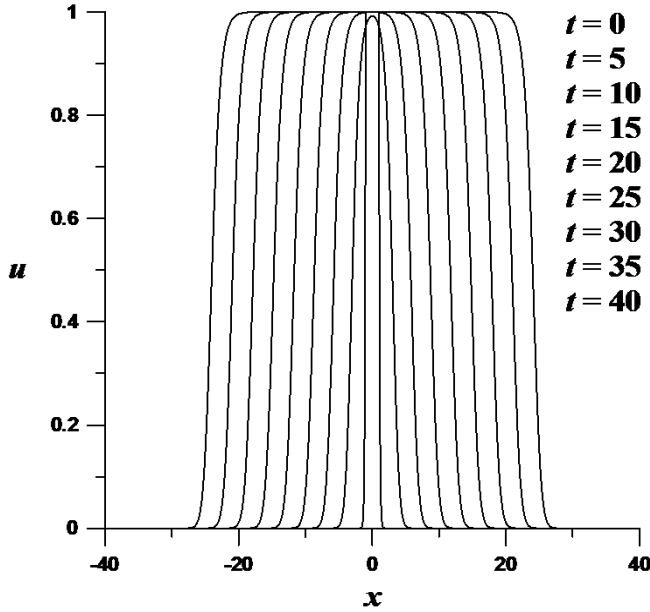


Şekil 5.8. İkinci test problemi için erken dönemlerdeki çözümler



Şekil 5.9. İkinci test problemi için kısa zaman davranışı

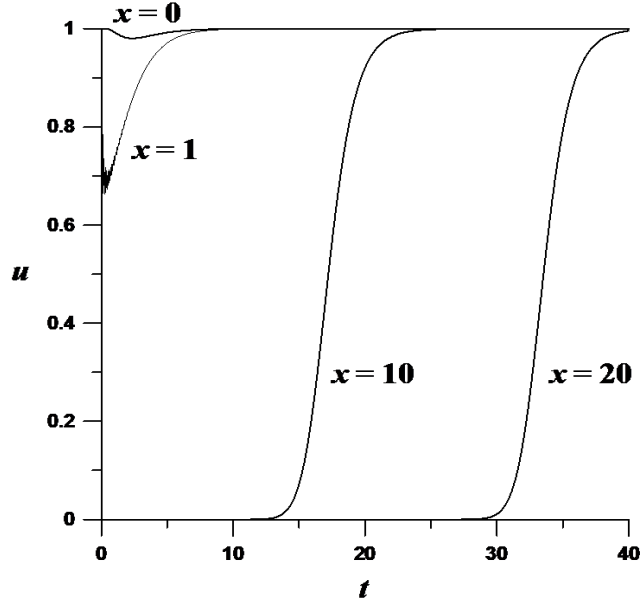
Uzun süre periyodunda, Şekil 5.10.' da görüldüğü gibi, grafiğin en üst noktası yaklaşır ve giderek düzleşir.



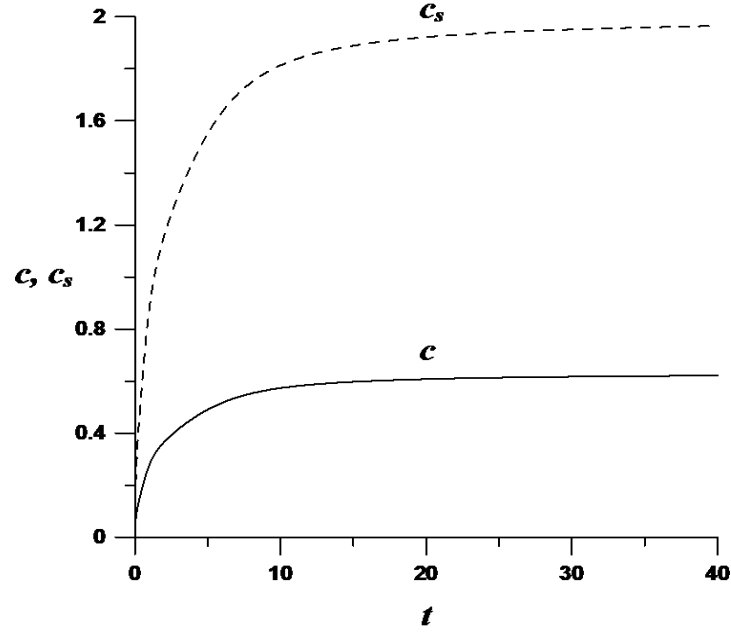
Şekil 5.10. İkinci test problemi için uzun zaman davranışı

Şekil 5.11' de $x = 0, 1, 10, 20$ noktalarında, popülasyonun yoğunluk-zaman grafiği verilmiştir. Her ne kadar başlangıç noktasında popülasyon yoğunluğunda sadece % 2' lik bir azalma olsa da $x = 1$ noktasında $t = 0.45$ anında maksimum %32 civarında dikkate değer bir azalmanın olduğu grafikten kolayca söylenebilir. Bu sonuç nedeniyle $x = 1$ noktasında difüzyon etkileri çok daha fazla görülmektedir.

Birinci problemle aynı parametreler kullanıldığı için, dönüştürülmüş dalga hızı için minimum değer ve hızın kararlı durum değerleri sırasıyla 0.63246 ve 2 dir.



Şekil 5.11. İkinci test problemi için popülasyondaki değişimler



Şekil 5.12. İkinci test problemi için dalga hızlarındaki değişimler

Süre ile $\hat{c}$ ve $\hat{c}_s$ dalga hızlarındaki değişimler arasındaki ilişki Şekil 5.12.' de gösterilmiştir. α ve β bir önceki problemdeki değerleriyle aynı değerleri aldığı için, c' nin kararlı durum değeri yine 0.63246' dır. Şekil 5.12.' den görüldüğü gibi $\hat{c}$ ve $\hat{c}_s$ sırasıyla kararlı durum değeri ve minimum hıza yaklaşır. Seçilen başlangıç şartları, hızı 2' ye yaklaşan ilerleyen bir dalga üretir.

Seçilen başlangıç profili, hızı yaklaşık olarak 2 olan ilerleyici bir dalga üretir. Dalga hızları karşılaştırması Çizelge 5.2.' de $t = 40$ anı için tablolastırılmıştır.

Çizelge 5.2. $t = 40$ anı için dalga hızları ve hatalar arasındaki kıyaslama

	Hızlar		Hatalar	
	$\hat{c}$	$\hat{c}_s$	$ c - \hat{c} $	$ c_s - \hat{c}_s $
Quintik Kolokasyon	0,6213	1.9648	0.0112	0.0352
Galerkin	0.6214	1.9649	0.0111	0.0351
Carey ve Shen	0,6520	2.0620	0.0195	0.0620
Tang ve Weber				
Analitik Çözüm	0,6325	2.0000		

5.3. Test Problemi 3 (Süper Dalga)

Üçüncü olarak, Canosa tarafından verilen ikinci dereceden bir pertürbasyon çözümü çalıştırılır. Ölçekli değişkenler kullanılarak

$$\tau = \beta t \quad \text{ve} \quad \zeta = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} x ,$$

Bu çözüm şu şekilde yazılabilir

$$U(\zeta, \tau) = \frac{1}{1 + e^{\frac{\zeta_s}{c_s}}} - \frac{e^{\frac{\zeta_s}{c_s}}}{c_s^2 (1 + e^{\frac{\zeta_s}{c_s}})^2} \left[1 - \ln \frac{4e^{\frac{\zeta_s}{c_s}}}{(1 + e^{\frac{\zeta_s}{c_s}})^2} \right] + O\left(\frac{1}{c_s^4}\right)$$

ile

$$Z_s = \zeta - c_s \tau - d_s = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} (x - ct - d) = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} Z$$

Burada $c_s = c \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ dönüştürülmüş dalga hızı ve d_s ise $\tau = 0$ da dönüştürülmüş başlangıç konumudur. Burada c , gerçek dalga hızını ve d ise orijinal ölçeklendirilmemiş çerçeveyi gösterir. Başlangıçtaki veri olarak ölçeklendirilmiş şekil dikkate alındığında

$$U(x, 0) = \frac{1}{1 + e^{\frac{\beta Z}{c}}} - \frac{\alpha \beta e^{\frac{\beta Z}{c}}}{c^2 (1 + e^{\frac{\beta Z}{c}})^2} \left[1 - \ln \frac{4e^{\frac{\beta Z}{c}}}{(1 + e^{\frac{\beta Z}{c}})^2} \right]$$

burada

$$Z = x - ct - d \text{ dir.}$$

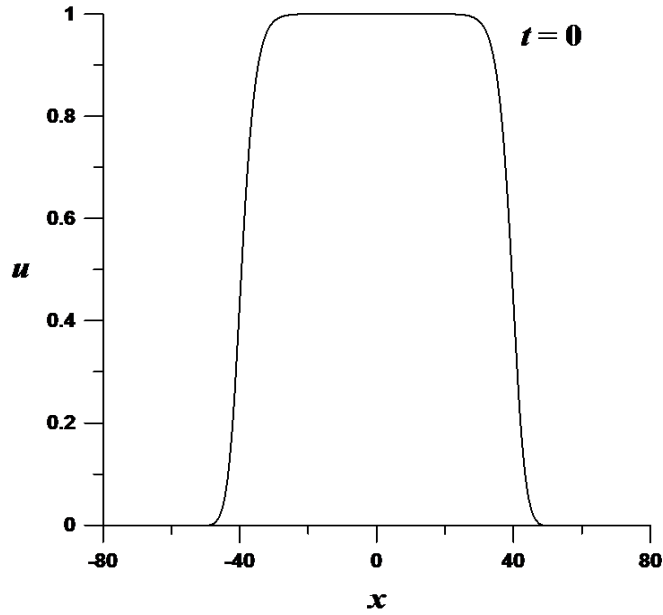
Bu problemde, Gazdag ile Canosa ve Carey ile Shen 'in çalışmalarına benzer olarak başlangıç dağılımları başlangıç noktası civarında simetrik seçilir. Hesaplamalarda, sayısal parametreler şöyle alınır.

$$\alpha = 1, \beta = 1, h = 0.5, \Delta t = 0.05, d = 40, c = 2, 4 \text{ ve } 6, x \in [-500, 500]$$

ve (4.8) sınır koşulları kullanılır.

α ve β uyumlu seçildiği için, c dalga hızı ve c_s dönüştürülmüş dalga hızı birbirine eşit olacaktır. Başlangıç dağılımı Şekil 5.13.' te $c = 2$ için gösterilmiştir. Başlangıç profili bazen negatif olur. Her ne kadar bu şekilde görülmese de, zaman periyodu içerisinde kararsız çözümlere sebep olur.

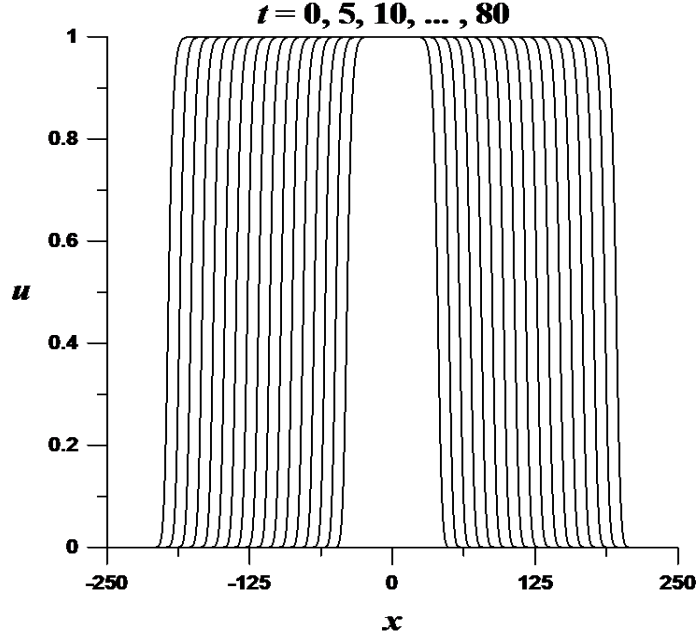
Bu zorluğun üstesinden gelmek için, Carey ve Shen'in yaklaşımına benzer olarak, başlangıç profilinin negatif olduğu yerlerde $U = 0$ olmaya zorlanır böylece çözümler kararlı kalır.



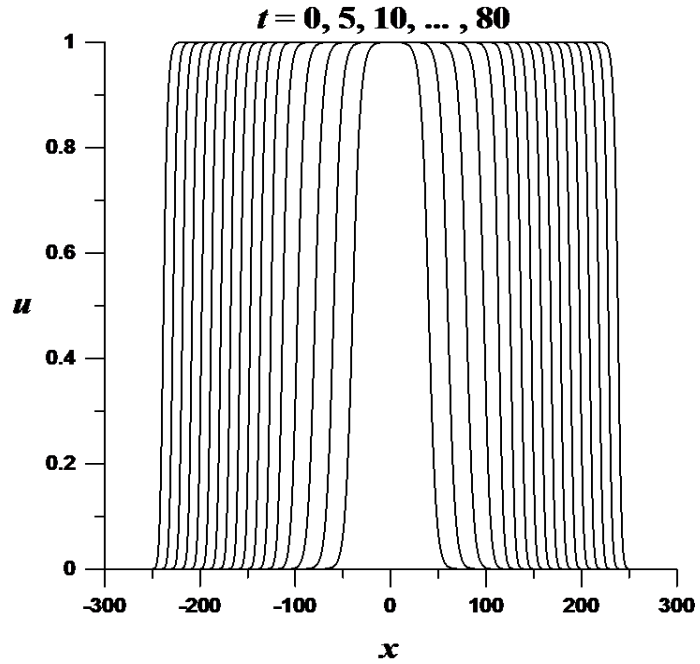
Şekil 5.13. Üçüncü test problemi $c = 2$ için başlangıç çözümü

Şekil 5.14., Şekil 5.15. ve Şekil 5.16.' da tasvir edilen dalga profilleri, $c = 2$, $c = 4$ ve $c = 6$ hız değerleri içindir. Şekil 5.14' te de görüldüğü üzere, hız değeri $c = 2$ olduğu zaman dalga yayılmalarında değişiklik yoktur. Diğer yandan, c hız değeri 4 ve 6 değerlerini aldığı zaman, süper hızlı dalgalara karşılık, dalga yayılmaları dikleşir ve yavaş yavaş değişerek minimum dalga hızına dönüşür.

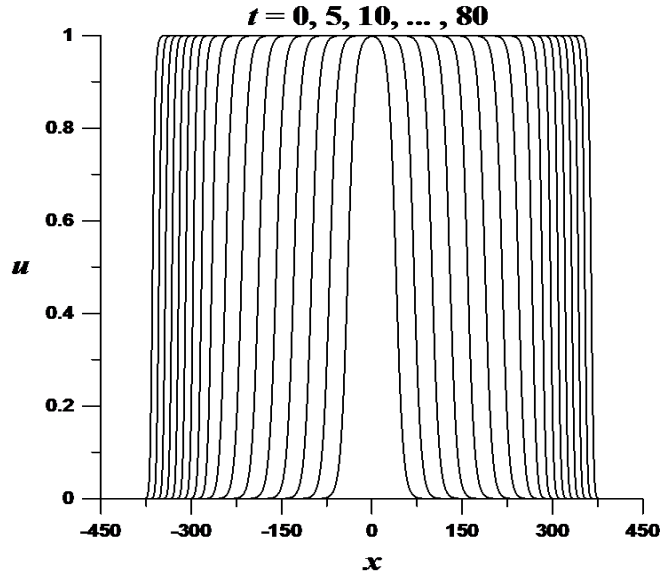
Elde edilen sonuçlar hemen hemen Carey ve Shen(1995) tarafından elde edilen sonuçlarla aynıdır. Gazdag ile Canosa(1974) tarafından tanımlanan sonuçlar ile kuintik kolokasyondan elde edilen sonuçlar arasında bazı küçük farklılıklar olsa da elde edilen sonuçlar onların sonuçları ile iyi uyum içindedir. Buna karşılık, bu yöntem içindeki geçiş süresi ve Carey ile Shen'in çalışmasında süper hızlı dalgadan minimum hızlı dalgaya kadar Gazdag ile Canosa' nın çalışmasından daha uzundur.



Şekil 5.14. Üçüncü test problemi $c = 2$ için çözümler



Şekil 5.15. Üçüncü test problemi $c = 4$ için çözümler



Şekil 5.16. Üçüncü test problemi $c = 6$ için çözümler

5.4. Test Problemi 4 (Güçlü Reaksiyon)

Sonuç olarak, difüzyon terimi reaksiyon teriminden çok daha küçük olan Fisher's denkleminin değiştirilmiş şekli göz önüne alınsın. Bu değiştirilmiş denklem aşağıdaki şekilde verilir.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \rho U(1 - U), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \quad (5.7)$$

DSC, CN, FPS ve ASD yöntemlerinin detaylı karşılaştırılması için, Fisher's denkleminin bazı Cauchy problemleri, analitik çözümlerle veya analitik çözümler olmaksızın, kullanılır. Başlangıç dalga profillerinin hepsi süper hızlı dalga(SSW) tipindedir.

Aşağıdaki süper hızlı dalga çözümü Li vd.(1998) in nümerik çalışmalarında kullanılır.

Burada $\rho \gg 1$ olan pozitif bir sabittir. Bu değiştirilmiş denklemin belirli bir çözümü, (4.8) sınır şartları ve (4.6) başlangıç şartlarını sağlayan

$$U(x, t) = \left[1 + \exp \left(\sqrt{\frac{\rho}{6}} x - \frac{5\rho}{6} t \right) \right]^{-2} \quad (5.8)$$

form ilerleyen dalga çözümüne sahiptir. Bu çözüm $c = 5\sqrt{\rho/6}$ sabit hızıyla hareket eder.

Zhao ve Wei' in sonuçlarıyla karşılaştırma yapmak ve yakınsama hızını görmek için güçlü reaksiyondan önce $\rho = 1$ ile problem çözüldü.

Çizelge 5.3.'te üç farklı hata normu aracılığıyla hatalar detaylı olarak gösterilmiştir. Karşılaştırmada kuintik kolokasyon yönteminin, CN ve ASD yönteminden daha doğru

verdiği gözlemlenmesine karşın FPS ve DSC yöntemlerinin kuintik kolokasyon yönteminden daha iyi sonuçlar verdiği açıkça görülmektedir.

Çizelge 5.3. Fisher's denkleminin $\rho = 1$ alınarak DSC, CN, FPS ve ASD yöntemleri kullanılarak kısa dönemlerindeki nümerik sonuçlarının karşılaştırılması

				t=5.0			t=10.0		
Yöntem	N	Δx	Δt	L_∞	L_2	$ c - \hat{c} $	L_∞	L_2	$ c - \hat{c} $
	128	1.0	0.2	3.52e-3	7.60e-3	9.50e-3	1.11e-2	2.55e-2	1.50e-2
Kuintik Kolo kasyon	128	1.0	0.1	8.80e-4	1.89e-3	2.39e-3	2.81e-3	6.45e-3	3.85e-3
	64	2.0	0.01	9.78e-5	2.46e-4	2.14e-4	8.82e-4	1.87e-3	2.25e-3
	128	1.0	0.01	5.65e-6	1.35e-5	3.11e-5	8.04e-5	1.76e-4	1.94e-4
	128	1.0	0.2	1.34e-5	2.74e-6	4.25(-5)	5.61e-5	1.17e-5	9.15e-5
DSC	128	1.0	0.1	9.00e-7	1.84e-7	2.95(-6)	3.86e-6	8.03e-7	6.41e-6
	64	2.0	0.01	4.35e-6	9.38e-7	1.34(-7)	3.12e-6	6.50e-7	1.19e-7
	128	1.0	0.01	1.59e-9	2.50e-10	7.02(-9)	1.39e-9	2.06e-10	8.43e-10
	512	1.0	0.2	5.18e-3	1.10e-3	1.18e-2	1.43e-2	2.99e-3	1.69e-2
CN	512	1.0	0.1	1.35e-3	2.91e-4	3.48e-3	4.25e-3	8.88e-4	5.53e-3
	64	2.0	0.01	1.02e-2	1.87e-3	4.47e-2	5.47e-2	1.16e-2	1.04e-1
	128	1.0	0.01	2.66e-3	4.84e-4	1.15e-3	1.46e-2	3.06e-3	2.77e-2
	128	1.0	0.2	1.34e-5	2.74e-6	4.25e-5	5.61e-5	1.17e-5	9.15e-5
FPS	128	1.0	0.1	9.01e-7	1.84e-7	2.94e-6	3.86e-6	8.03e-7	6.41e-6
	64	2.0	0.01	3.16e-6	6.75e-7	6.89e-8	3.21e-6	6.76e-7	1.10e-7
	128	1.0	0.01	1.27e-9	1.38e-10	4.01e-9	4.40e-10	8.78e-11	7.58e-10
	128	1.0	0.2	3.84e-2	7.24e-3	9.38e-2	1.09e-1	2.19e-2	1.26e-1
ASD	128	1.0	0.1	1.96e-2	3.73e-3	4.93e-2	5.62e-2	1.14e-2	6.68e-2
	64	2.0	0.01	1.99e-3	3.83e-4	5.16e-3	5.67e-3	1.18e-3	7.06e-3
	128	1.0	0.01	1.99e-3	3.83e-4	5.16e-3	5.72e-3	1.18e-3	7.06e-

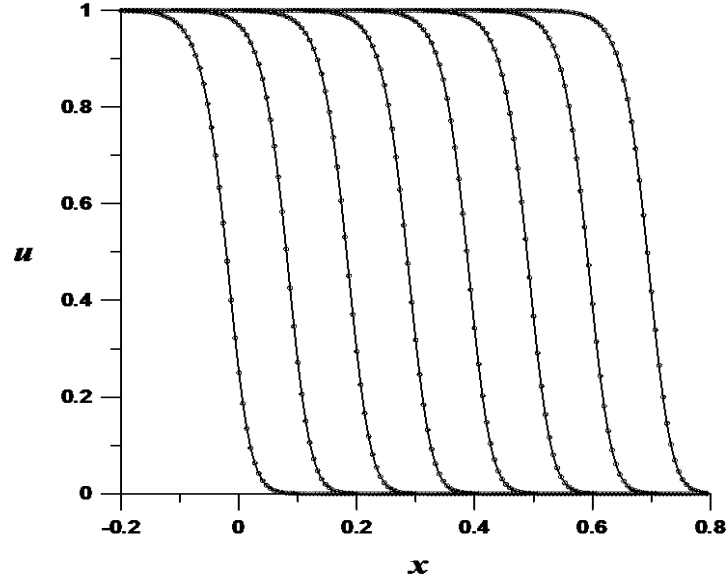
Yakınsama hızlarının mertebeleri Çizelge 5.4' te gösterilmiştir.

Çizelge 5.4. Yakınsama hızlarının mertebeleri

Uzaysal Mertebe($\Delta t = 0.01$)			Geçici Mertebe($h = 1.0$)		
h_i	$t = 5$	$t = 10$	Δ_{t_i}	$t = 5$	$t = 10$
2.00			0.200		
1.00	4.18566	3.40724	0.100	2.00412	1.98237
0.50	-0.44913	1.32379	0.050	2.02090	1.92680
0.25	-0.04591	0.13910	0.025	2.08996	1.74021

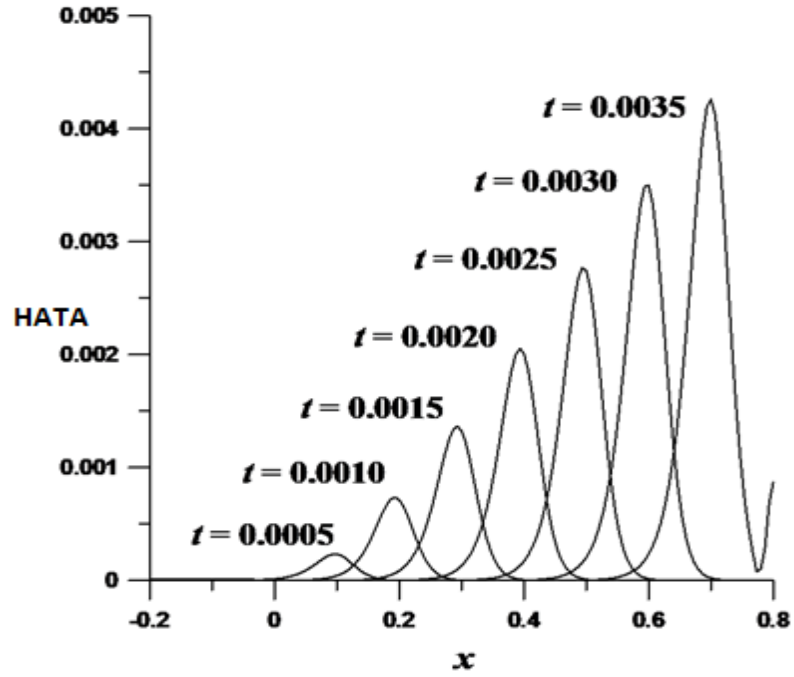
Değiştirilmiş Fisher's denkleminde $\rho = 10^4$ seçerek kuvvetli reaksiyon problemi göz önüne alınsın. Bu yüzden analitik çözümün dalga hızı $c = 5\sqrt{10^4/6} \approx 204.124$ olur. Güçlü reaksiyon kuvveti ile çözüm şok benzer dalgaya dönüşür. Bundan dolayı, hızla değişen çözümü doğru bir şekilde temsil etmek için düşük dereceli bir yöntemde çok iyi bir aralık kullanılmalıdır. Büyük hesaplamalardan doğacak yükü önlemek için düzgün olmayan aralık kullanılabilir. Li ve arkadaşları Qiu ve Sloan(1998) tarafından bu güçlü reaksiyon problemiyle ilerleyen aralık yöntemleri kullanılarak ilgilenilmiştir. Bu problem Olmos ve Shizgal(2005) tarafından çakışan çoklu tanım kümesi yaklaşımı kullanılarak çözüldü.

Bu çalışmada güçlü reaksiyon problemi için düzgün bir aralık üzerinde çalışılmıştır. Ayırıştırma parametreleri olarak $N = 64$ ve $\Delta t = 5 * 10^{-6}$. Seçilmiştir. Çözüm aralığı olarak $[-0.2, 0.8]$ alınır. Şekil 5.17' de nümerik sonuçlar ve analitik çözüm bir arada verilmiştir. (Sürekli çizgi analitik çözümdür)



Şekil.5.17. Dördüncü test problemi için çözüm profilleri

Hata dağılımı ise Şekil 5.18’ deki grafikte gösterilmiştir.



Şekil 5.18. Mutlak hata dağılımları

Kuintik kolokasyon yönteminin doğruluğunu görmek için, elde edilen sonuçlar Çizelge 5.5’ te tablolştırılmıştır. Karşılaştırmada yine bu çalışmada kullanılan kuintik kolokasyon yönteminin sonuçları, CN ve ASD yöntemlerinin sonuçlarına yakinken DSC ve FPS yöntemlerinin sonuçlarının bu çalışmada bulunan sonuçlardan daha doğru olduğu görülmüştür.

Çizelge 5.5. Fisher's denkleminin $\rho = 10^4$, $N = 64$, $\Delta t = 5.0(-6)$ alınarak elde edilen kısa dönem sonuçlarının DSC CN, FPS ve ASD yöntemlerinin sonuçlarıyla karşılaştırılması.

Qui ve Sloan tarafından listelenen sonuçlar (a) *MMDAE*, $N = 50$

(b) *MMPDE*, $N = 50$, $\tau = 10^{-7}$

Yöntem/ Hata		t					
		5.0(-4)	1.0(-3)	1.5(-3)	2.0(-3)	2.5(-3)	3.0(-3)
Kuintik Kolokas yon	L_∞	2.05(-4)	9.81(-4)	2.30(-3)	3.90(-3)	5.49(-3)	7.42(-3)
	L_2	4.25(-5)	2.25(-4)	5.35(-4)	9.08(-4)	1.31(-3)	1.74(-3)
	$ \mathbf{c}-\hat{\mathbf{c}} $	6.14(-2)	1.80(-1)	2.44(-1)	2.76(-1)	2.93(-1)	3.02(-1)
DSC	L_∞	6.28(-6)	3.03(-6)	1.98(-6)	3.23(-6)	4.46(-6)	5.44(-6)
	L_2	1.24(-6)	6.53(-7)	5.92(-7)	8.35(-7)	1.16(-6)	1.43(-6)
	$ \mathbf{c}-\hat{\mathbf{c}} $	2.53(-3)	1.06(-4)	6.23(-5)	6.58(-5)	7.37(-5)	1.00(-4)
CN	L_∞	1.03(-2)	5.55(-2)	1.25(-1)	2.04(-1)	2.80(-1)	3.60(-1)
	L_2	1.92(-3)	1.17(-2)	2.65(-2)	4.36(-2)	6.18(-2)	8.04(-2)
	$ \mathbf{c}-\hat{\mathbf{c}} $	4.49(+0)	1.04(+1)	1.31(+1)	1.46(+1)	1.54(+1)	1.60(+1)
FPS	L_∞	3.13(-6)	3.47(-6)	3.90(-6)	5.00(-6)	7.82(-5)	4.23(-3)
	L_2	7.71(-7)	6.79(-7)	7.02(-7)	9.04(-7)	2.11(-5)	1.19(-3)
	$ \mathbf{c}-\hat{\mathbf{c}} $	1.58(-3)	7.72(-5)	9.73(-5)	1.87(-3)	9.68(-2)	5.54(-0)
ASD	L_∞	1.07(-2)	2.88(-2)	4.93(-2)	7.10(-2)	9.37(-2)	1.24(-1)
	L_2	2.09(-3)	6.07(-3)	1.06(-2)	1.53(-2)	2.02(-2)	2.68(-2)
	$ \mathbf{c}-\hat{\mathbf{c}} $	2.61(+0)	3.45(+0)	3.70(+0)	3.80(+0)	4.05(+0)	1.59(+1)
(a)	L_∞					9.25(-3)	
(b)	L_∞					4.29(-2)	
(c)	L_∞					9.34(-3)	

5.4.1. Zayıf reaksiyon problemi

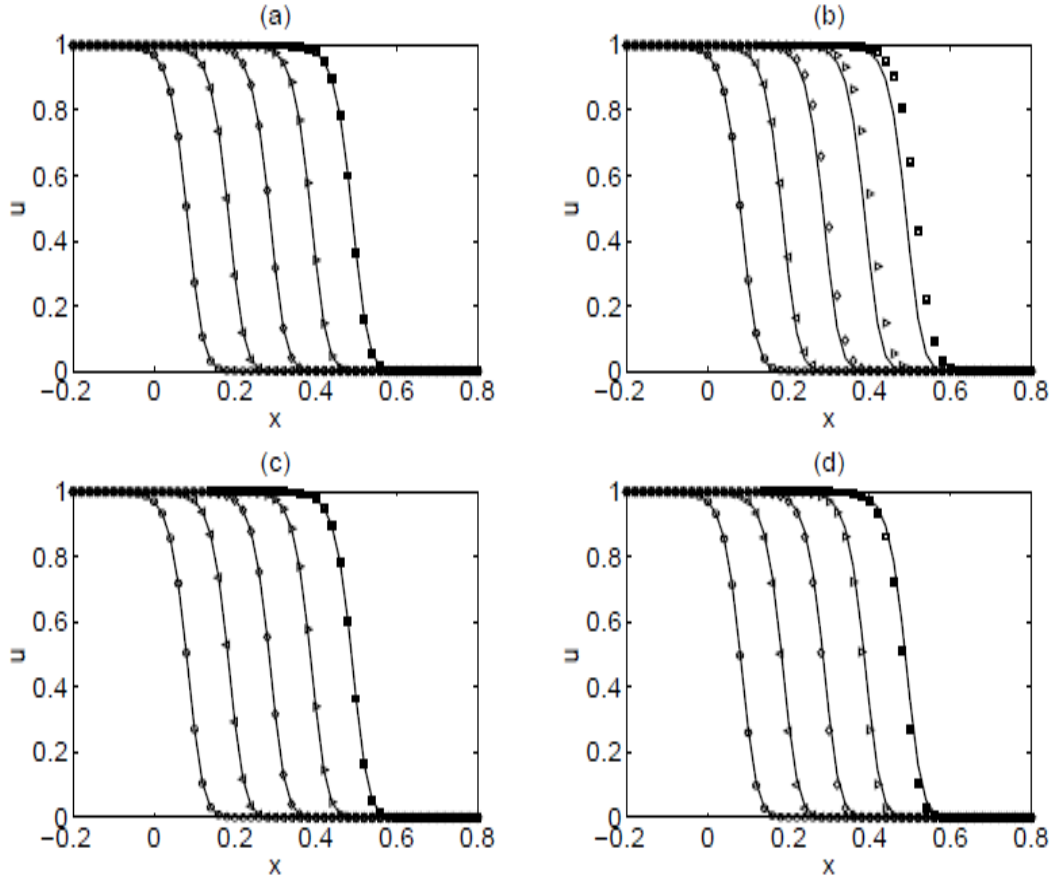
İlk olarak (5.8) çözümünde $\rho = 1$ alınsın, böylece (5.7) ile (4.10) aynı olur. Analitik çözümün dalga hızı $c = 5\sqrt{1/6} \approx 2.04124 > 2$. Fisher's denklemi dört yöntem aracılığıyla nümerik olarak çözülür. Çünkü sol sınır üzerindeki sınır şartları, nümerik çözümlerin doğruluğu için nispeten önemsizdir. Bu çalışmada DSC ve CN yöntemlerinde $U(x_0) = 1$ alınarak soldaki sınır şartları, Dirichlet sınır şartları olarak düzeltilir. Dört nümerik yaklaşım aracılığıyla elde edilen nümerik çözümler Çizelge 5.3.' te gösterilmiştir. Çizelge 5.3.' ten görüldüğü üzere DSC algoritması FPS yöntemiyle kıyaslandığında DSC algoritması her zaman doğru sonuçlar vermiştir ve her iki yöntem de yüksek doğrulukla başarılı sonuçlar vermiştir. Ancak her ne kadar ASD yöntemi için yüksek doğruluklu ayrıştırma kullanılsa da FPS yönteminin sonuçlarından daha az doğru yaklaşık sonuçlar vermiştir. Δt büyük olduğu zaman ASD yönteminin sonuçları CN yönteminin sonuçlarından daha da kötü olmuştur. Nümerik olarak her bir yöntemin zaman ayrıştırmalarına göre doğruluklarının sıralaması için Çizelge 5.3.' teki kullanılan çözümler özel olarak hazırlanmıştır.

Çizelge 5.6. Nümerik olarak test edilen dört yöntemin doğruluk sıralaması

	$t = 5.0$				$t = 10.0$			
	DSC	CN	FPS	ASD	DSC	CN	FPS	ASD
Δt	3.89	1.92	3.89	0.96	3.86	1.75	3.86	0.94
Δx	11.87	1.95	12.26	3.77(-5)	11.62	1.92	12.91	1.22(-4)

L_2 hataları açısından, her bir yöntemin azalan hata oranları Çizelge 5.3.' ten hesaplanabilir ve bunlar Çizelge 5.3.' de mevcuttur. Nümerik olarak tahmin edilen doğruluk sıralamaları teorik analiz sonuçları ile mükemmel bir uyum içindedir. Δx ikiye bölündüğü zaman, DSC sonuçları orijinal sonuçlardan 3000 defa daha doğru sonuçlar verir ve FPS' nin artan doğruluk oranları 4000' den daha büyüktür. Nümerik sonuçlar bu iki yöntemin kalıcı doğruluk sıralamalarının oldukça yüksek olduğunu gösterdi. DSC ve FPS yöntemlerinin her ikisinin de zaman ayrıştırma sıralamaları yaklaşık $O(\Delta t^4)$ ' dir çünkü aynı RK4 yöntemi her iki yöntemde de kullanılır. CN yönteminin nümerik olarak test edilen kesme hataları, klasik teorik analizle uyum içindedir yani $O(\Delta x^2)$ ve $O(\Delta t^2)$. Şu ilginç notu belirtmek gerekirse Δx ikiye parçalandığı zaman ASD sonuçlarının doğruluğunun değişmediği görülmüştür. Yani ASD yönteminin yaklaşım hataları zaman ayrıştırma aracılığıyla tam olarak tanıtılır. Δt ikiye bölündüğü

zaman ASD yönteminin sonuçlarının doğruluğu yaklaşık olarak iki kat artar. Bu yüzden ASD yönteminin geçici hatası $O(\Delta t)$ dir. Bu da daha önce yapılan analizi doğrular.



Şekil 5.19. Ölçeklendirilmiş Fisher's denkleminin $t = 5.0(-4), 1.0(-3), \dots, 2.5(-3)$ zamanlarında $\rho = 10^4$ iken nümerik çözümleri. (a) DSC çözümleri (b) CN çözümleri (c) FPS çözümleri (d) ASD çözümleri (Bütün çözümlerde sürekli çizgiler analitik çözümleri temsil eder)

5.4.2. Güçlü reaksiyon problemi

Güçlü reaksiyon problemi $\rho = 10^4$ iken (5.7) ölçeklendirilmiş Fisher's denklemini ile ilgilenir. Analitik çözümün dalga hızı $c = 5\sqrt{10^4/6} \approx 204.124$ 'dir.

Buna karşılık gelen minimum dalga hızı $c = 200$ 'dür.

5.4.2.1.Şok benzer dalga(Shock-like wave)

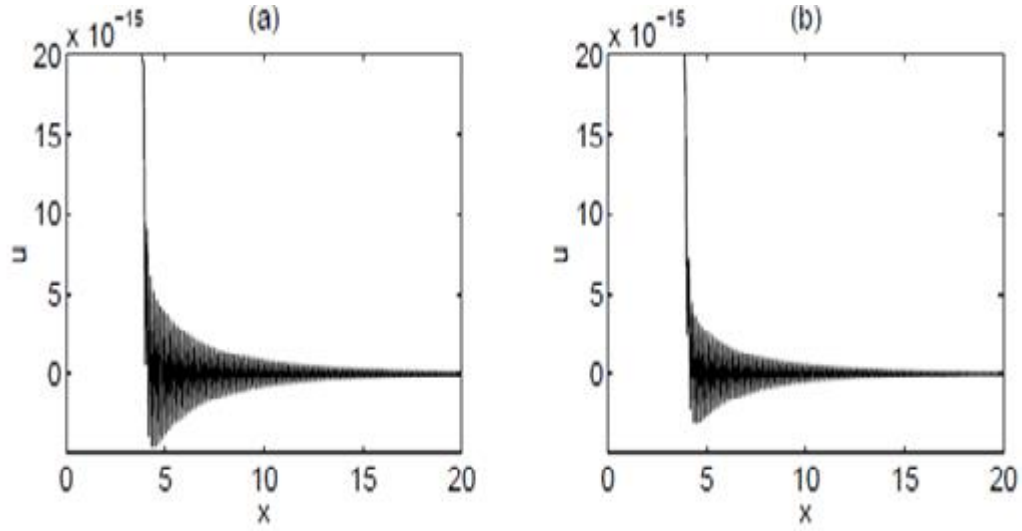
Güçlü reaksiyon kuvvetiyle birlikte, çözüm şok benzeri dalgaya(shock-like wave) dönüşür. Böylece hızlı bir şekilde değişen çözümü düşük dereceli bir yöntemle uygun bir şekilde temsil etmek için çok iyi bir çözüm yöntemi kullanılmalıdır. Li vd.(1998) ile Qui ve Sloan(1998) bu güçlü reaksiyon problemiyle hareketli ızgara yöntemini kullanarak ilgilendiler. Bunun sonucunda tatmin edici sonuçlar elde edildi. Bu çalışmada güçlü reaksiyon probleminin çözümü için düzgün aralık üzerinde çalışılır. Diskret Fourier analizine kıyasla yüksek dereceli yöntemler aynı Δx parçalamasıyla daha yüksek dalga sayısını ölçmede daha iyidir. Bu yüzden N bölünme nokta sayısının küçük olmasıyla yüksek dereceli yöntemleri kullanarak doğru bir sonuç elde edilebilir. Bu argümanı örneklendirmek için, Fisher's denkleminin çözümü $\rho = 10^4$ ile DSC, CN, FPS ve ASD yöntemleri ile yaklaşılr. Sıfır sınır koşulları hem DSC hem de CN yöntemlerinde kullanılır. Ayırıştırma parametreleri

$$N = 64, \Delta x = 0.02, \Delta t = 5.0(-6).$$

Hesaplamaların yapıldığı tanım aralığı $[X_0, X_N] = [-0.2, 1.06]$. Elde edilen nümerik sonuçlar Şekil 5.17.' de ve Çizelge 5.8.' de gösterilmiştir. Literatürde bazı araştırmacılar tarafından dikkat çekildiği üzere spektral yöntemler, dalga yüzünde istenmedik dalgalanmalara sebep olurlar ve Fisher's denklemi dalga yüzünde küçük bir pertürbasyon için kararsızdır, spektral yöntemlerin sonuçları hızlı bir şekilde kararsız olur. Şu andaki çalışmalarda DSC ve CN yöntemlerinin sonuçları bu dalgalanmalardan etkilenmezlerken FPS ve ASD yöntemlerinin çalışmalarının her ikisinde de ciddi dalgalanmalar üretildiği bulunur. Gazdag ve Canosa, kararlılıktan emin olmak için her bir zaman adımındaki dalgalanmaları baskılamak için ek bir yöntem kullanmayı önerdiler yani eğer

$$U(X_n, t_m) \leq \varepsilon \text{ ise böylece } U(X_n, t_m) = 0.$$

Burada ε küçük bir pozitif sayıdır ve deneyerek bulunur.



Şekil 5.20. $t = 1\Delta t$ zamanında FPS ve ASD yöntemleri aracılığıyla yaklaşılın dalga çözümlerinin ön parçaları (a) FPS çözümleri (b) ASD çözümü

Bu çalışmada, güçlü reaksiyon problemi için düzgün bir aralık dikkate alınır. Ayırıştırma parametreleri $N = 150$ ve $\Delta t = 5 \times 10^{-6}$ olarak seçilir.

Çözümün tanım kümesi $[-0.2, 0.8]$ alınır. Sayısal sonuçlar ve analitik çözüm

Şekil 5.15' te

$$t = 0.5 \times 10^{-4}, 1 \times 10^{-3}, 1.5 \times 10^{-3}, \dots, 3.5 \times 10^{-3}$$

zamanlarında birlikte örneklendirilir (sürekli çizgi analitik çözümdür). Hata dağılımları Şekil 5.15.' te farklı zamanlarda grafikte gösterilmiştir.

(4.21) dalga çözümü (4.5) ve (4.6) lokal olmayan şartları sağlayan ölçeklendirilmiş Fisher's denklemi

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dU}{dx^2} + \rho U(1 - U)$$

şeklindedir. (4.21) çözümünün nümerik çalışmaları için nümerik sonuçların doğruluğu L_∞ ve L_2 normları aracılığıyla ölçülür. Burada

$$L_\infty = \max_{i=1, \dots, N} |\hat{U}_i - U_i| \text{ ve } L_2 = \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{U}_i - U_i)^2 \right]^{1/2}$$

burada U_i ve $\hat{U}_i$ sırasıyla analitik ve nümerik çözümlerdir. (4.21) Süper hızlı dalga (SSW) çözümünden başka SSW' nin diğer tipleri de çalışılır. Teorik ve nümerik dalga hızları arasındaki fark $|c - \hat{c}|$, bütün durumlar için hesaplanır. Dalga hızları arasındaki fark $|c - \hat{c}|$, çözüm kararlı durum hareketine ulaştığı zaman bir yaklaşım hatası olarak ifade edilebilir.

Dalga yüzünde küçük pertürbasyon için Fisher denkleminin çözümünün kararsız olduğu literatürden bilinir. Şu andaki yöntem grafiğin sağ sınırında istenmedik salınımlar üretir. Bu yüzden bu çalışmada kullanılan yöntemin sonuçları kısa zamanda kararsız olur. Bu salınım Şekil 5.20.'de $t = t_1 = 1 \times \Delta t$ anında çizilir.

Gazdag ile Canosa, çözümleri kararlı hale getirmek için ek bir yöntem kullanmayı önerdiler. Onların önerilerine göre, bahsedilen salınım problemi, eğer

$$U(x_n, t_m) \leq \epsilon \quad , \quad U(x_n, t_m) = 0$$

şartları sağlanıyorsa, küçük pozitif bir ϵ sayısından daha küçük değerlerin olduğu bütün aralık noktalarında her zaman adımında dağılımı sifıra eşitleyerek başarılı bir şekilde çözülebilir. Buradaki ϵ eşik değeri deneysel(deneyerek) belirlenir. Hesaplamalarda, $\epsilon = 7 \times 10^{-7}$ ve 9×10^{-8} için sırasıyla $N=64$ ve 150 seçmek kararsızlığı önlemek için yeterlidir. Mevcut yöntemin doğruluğunu görmek için, elde edilen sonuçlar Çizelge 5.6.'da gösterilmiştir.

Karşılaştırma yapıldığında, CN, ASD [13] ve [11] in sonuçları kuintik kolokasyon yönteminin sonuçlarına yakinken DSC ve FPS[13]'ün sonuçları mevcut kuintik kolokasyon yönteminden daha doğrudur.

Çizelge 5.7. Dördüncü test problemi için farklı zamanlardaki hatalar

Yöntem	N	Hata	t=0.0005	t=0.0015	t=0.0025	t=0.0035
Kuintik Kolokasyon	64	L_∞	2.2220 E-4	2.3165 E-3	5.5074 E-3	9.0689 E-3
		L_2	4.9133 E-5	5.47 E-4	1.32 E-3	7.43 E-3
Kuintik Kolokasyon	150	L_∞	2.3412 E-4	1.3651 E-3	5.4841 E-3	4.2603 E-3
		L_2	4.9133 E-5	5.4712 E-4	1.3229 E-3	7.4381 E-3
Galerkin	64	L_∞	2.55 E-3	1.62 E-1	8.65 E-2	6.98 E-2
		L_2	6.47 E-4	3.80 E-1	2.03 E-2	1.59 E-2
Galerkin	150	L_∞	2.57 E-4	5.65 E-2	6.63 E-2	3.93 E-2
		L_2	6.89 E-5	1.30 E-2	1.55 E-2	8.82 E-3
CN [13]	64	L_∞	1.03 E-2	1.25 E-1	2.80 E-1	4.48 E-1
		L_2	1.92 E-3	2.65 E-2	6.18 E-2	9.91 E-2
ASD [13]	64	L_∞	1.07 E-2	4.93 E-2	9.37 E-2	9.44 E-1
		L_2	2.09 E-3	1.06 E-2	2.02 E-2	2.35 E-1
FPS [13]	64	L_∞	7.71 E-7	3.90 E-6	7.82 E-5	3.42 E-1
		L_2	1.58 E-3	7.02 E-7	2.11 E-5	8.95 E-2
DSC [13]	64	L_∞	6.28 E-6	1.98 E-6	4.46 E-6	6.22 E-6
		L_2	1.24 E-6	5.92 E-7	1.16 E-6	1.64 E-6
MMPDE[11]	50	L_∞			4.29 E-2	
MMDAE[11]	50	L_∞			9.25 E-3	
Even grid[11]	300				9.43 E-2	

BÖLÜM 6

TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Fisher's denkleminin nümerik çözümlerinin elde edilmesi için Kuintik B-spline kolokasyon tekniğine dayalı sonlu elemanlar yöntemi tanıtıldı. Önerilen yöntem $N \times N$ boyutlu 5 bant matris sistemine yol açar. Band matrislerinin oluşması hesaplama maliyeti açısından bir avantaj olarak görülebilir. Ayrıca kolokasyon yönteminin uygulama süreci de ek bir avantaj olarak düşünülebilir.

Şekillerden ve sonuçlardan da anlaşılacağı üzere kullanılan nümerik yöntem, dalga yüzlerinin yayılımının modellenmesinde başarılı olmuştur. Nümerik sonuçlar ya analitik çözümler ya da kararlı durum dalga hızı tarafından doğrulanır. Fisher's denkleminin nümerik simülasyonu için bilinen zorluklardan biri kuvvetli reaksiyon durumunda gerçekleşir. Kuintik kolokasyon yöntemi bu durumda kabul edilebilir sonuçlar doğurur fakat zaman integrasyonu için kullanılan dördüncü dereceden Runge-Kutta yönteminin çalıştırıldığı DSC ve FPS yöntemlerinin gerisinde kalır. Mevcut yöntemin sonuçlarını geliştirmek için Crank-Nicolson formüllerini ve düzgün bir ızgara kullanmak yerine, hareketli örgü stratejisi ve yüksek dereceli zaman integrasyonu gelecekteki bir çalışma olarak göz önüne alınabilir.

Özet olarak, Fisher's denkleminin çözümünde kullanılan kuintik B-spline fonksiyonlarının ve bu çalışmada nümerik yöntem olarak seçilen kuintik kolokasyon yönteminin başarılı sonuçlar verdiği söylenebilir

KAYNAKLAR

- Achieser, N.I., 1947. Lectures on the theory of approximation, Moskov-Leningrad, 309 s
- Ablowitz, J. ve Zeppetella, A., 1979. Explicit solutions of Fisher's equation for a special speed, Pergamon Press, 835-840, New York, 6
- Ahlberg, J.H. ve Nilson, E.L., 1962., The Theory of Splines and their applications, Academic Press Inc., New York
- Ahlberg, J.H., Nilson, E.L. ve Walsh, J.L., 1964., J. Mathematical Analysis Applications, American Mathematical Society, 468 s
- Al-Khaled, K., 2000. Numerical study of Fisher's reaction-diffusion equation by the sinc collocation method, Jordan University of Science and Technology, 245-255, Jordan, 11 s
- Archer, D., 1977. Cubic spline collocation method for quasilinear parabolic equations, SIAM Journal on numerical analysis, 620-637, Vol. 14
- Baş, F., 2007. Spline fonksiyonları ve uygulamaları, Sakarya Üniversitesi, Sakarya, 87 s
- Birkhoff, G. ve Garabedian, H., 1960. J. mathematical physics, 268 s
- Boz, A., 2006. Klein-Gordon denkleminin B-spline kolakasyon metodları ile çözümleri, Osmangazi Üniversitesi, Doktora Tezi, Eskişehir, 130s
- Burden, R. , 2001. Numerical Analysis, Brooks/Cole Publishing, 20 Channel Center Street Boston, MA02210 USA, 895 s
- Canosa, J., 1969. Diffusion in nonlinear multiplicative media, Journal of Mathematical Physics, IBM Scientific Center, Palo Alto, California 94304
- Carey, G.F. ve Shen, Y., 1995. Least-squares finite element approximation of Fisher's Equation, Numerical methods partial differential equations, 175-186
- Cheney, W. ve Kincaid, D., 1966. Numerical Analysis, Brooks/Cole Publishing
- Chen, Z., 2005. Finite element methods and their applications, Springer Berlin Heidelberg New York, ISBN-10 3-540-24078-0 , 414 s
- Çağlar, N., Çağlar, H. ve İşeri, M., 2006. Third-degree B-spline solution for a nonlinear diffusion Fisher's equation, İstanbul Kültür Üniversitesi, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul, 4 s
- Çağlar, H., Özer, M. ve Çağlar N., 2007. The numerical solution of the one dimensional heat equation by using third degree b-spline functions, Chaos, Solutions and fractals

- Dağ, İ., Irk, D. ve Saka, B., 2005. A numerical solution of the Burgers' Equation using cubic B-splines, Appl. Maths. And Comp., Vol 163(1)
- De Boor, C. , 1978. A Practical Guide to Splines, Springer Publishing, USA, 366 S
- Denghan, M. ve Taleei, A., 2010. A compact split-step finite difference method for solving the nonlinear Schrödinger equations with constant and variable coefficients, Amirkabir University of Technology, No:424, Hafez Ave., 15914 Tehran, İran
- Dönmez, D., 2008. Diferansiyel denklemlerin b-spline metodu ile çözümleri hakkında, Yüksek Lisans Tezi, Celal Bayar Üniversitesi, Manisa, 51 s
- Fisher, R.A., 1937. The wave of advance of advantageous genes, Ann. Eugenics, 369 s
- Gazdag, J., ve Canosa, J., 1974. Numerical solution of Fisher's equation, applied probability, 3, 445-457, İsrail, 4 s
- Gazdag, J., 1972. Numerical convective schemes based on accurate computation of space derivatives, Academic Press, 100-113, California, 14 s
- Hongxin, Z. ve Jieqing, F. , 2006. Zhejiang University Press, 330 s
- Kolmogoroff, A. ve Petrovskii, I., 1994. Stability of symmetric traveling waves in the cauchy problem, 377 s
- Kolmogoroff, A., Petrovshy, I. ve Piscounoff, N., 1937. Etude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique, Bull. Univ. Etat. Moscou Ser. Int. Sect. A math et Mecan, 1-25
- Larson, D.A., 1978. Transient bounds and time asymptotic behavior of solutions to nonlinear equations of Fisher's type, Siam Journal on applied mathematics, 93-103
- Laurent, P., 1972. Respiration Physiology, 485 s
- Li, S., Petzold, L.R. ve Ren, Y., 1998. Stability of moving mesh systems of partial differential equations, Siam J. scientific computational, 719-738
- Mavoungou, T. ve Cherruault, Y., 1994. Numerical study of Fisher's equation by Adomian's method, Mathematical computational modeling, 19(1), 89-95
- McKean, H.P., 1975. Communications on pure and applied mathematics, Wiley Periodicals, A Wiley Company, 331 s
- Mitchell, A.R. ve Manoranjan, V.S., 1984. Numerical solutions of the good Boussinesq equation, Society for industrial and applied mathematics, 957 s
- Mittal, R.C. ve Jiwari R., 2009 Numerical Study of Fisher's equation by using differential quadrature method, International journal of information and systems sciences, 143-160
- Olmos, D. ve Shizgal, B., 2005. A pseudospectral method of solution of Fisher's

- equation, University of British Columbia, 219-242, Canada, 24 s
- Olmos, D. ve Shizgal, B., 2006. Plane wave decomposition in the unit disc : convergence estimates and computational aspects, Acm Digital library, <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=1148829.1148839> , 13 Aralık 2012
- Özkan, N. , 2006. Spline Teorisi ve Diferansiyel Denklemlere Uygulamaları, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Yüksek Lisans Tezi, Samsun, 75 s
- Özlük, M., 2005. KdV denkleminin spline fonksiyonları yardımıyla nümerik çözümleri, İnönü Üniversitesi, Yüksek Lisans Tezi, Malatya, 73 s
- Parekh, H. ve Puri, S. 1990. A numerical scheme for the Fisher equation, Journal of physics A: Mathematical and general, Volume 23, pp.L1085-L1091
- Prautzsch, H. ve Wolfgang, B. , Paluszny M. , March 26, 2002
- Puri, M.L. ve Harel, M.L., 1989. J.Multivariate Analysis 29, Science Direct <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0047259X89900663>
- Petrovsky, I., Kolmogoroff A. ve Piskounoff, N., 1937. Study of the diffusion equation with growth of the quantity of matter and its application to biology problem, Bulletin de l'Universite d'elat a Moscou, Section A
- Prenter, P.M, 1975. Splines and Variational, Wiley Interscience, USA, 333 s
- Qiu, Y. ve Sloan, D.M., 1998. Numerical solution of Fisher's equation using a moving mesh method, University of Strathclyde, Glasgow G1 1XH, Scotland
- Rose, M.E., 1983. Compact finite difference schemes for the Euler and Navier-Stokes equations, Nasa Langley Research Center, Hampton, Virginia 23665, USA
- Rubin, S.G. ve Khosla, P.K, 1976. Higher-order numerical solutions using cubic splines, AIAA Journal, Volume 14(7), 851-858
- Sard, A., 1963. Linear Approximation, American Mathematical Society, United States of America, 539 s
- Schoenberg, I.J., 1946. ,Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions, Academic Press, 630 s
- Schumaker, L. , 2007. Spline Functions : Basic Theory, Cambridge University Press, The Edinburgh Building, Cambridge CB2 8RU, UK, 600 s
- Sloan, D.M. ve Qui, Y., 1998. Numerical solution of Fisher's equation using a moving mesh method, Academic Press, University of Strathclyde, Scotland, 21 s

- Sutmann, G., 2007. Compact finite difference schemes of sixth order for the Helmholtz equation, Journal of computational and applied mathematics, Germany, 203, 15-31
17 s
- Süli, E. , 2003. An Introduction to Numerical Analysis, The Pitt Building, Trumpington Street, Cambridge, United Kingdom, Cambridge University Press, The Edinburgh Building, Cambridge CB2 2RU, UK, 40 West 20th Street, New York, NY 10011-4211, USA, 440 s
- Şahin, A., 2004. Burger denkleminin B-spline fonksiyonlar yardımıyla nümerik çözümleri, Dumlupınar Üniversitesi, Kütahya, 115 s
- Şahin, A., Dağ, İ. ve Saka, B., 2008. A B-spline algorithm for the numerical solution of Fisher's equation, Emerald,
<http://www.emeraldinsight.com/journals.htm?articleid=1713941&show=abstract>
15 Aralık 2012
- Tang, S. ve Weber, R.O., 1990. Numerical study of Fisher's equation by a Petrov Galerkin finite element method, University of Cambridge, The Journal of the Australian Mathematical Society, 13 s
- URL-1, scholar.lib.vt.edu/theses/.../chapter4.PDF, Parametric B-splines, 23 Kasım 2012
- Wang, M.L., 1998. A nonlinear function transform action and the exact solutions of the approximate equations for long waves in shallow, Journal of Lanzhou University(Natural Sciences), 34 (2), 21-25
- Wang, M.L., 1988. Exact and explicit solitary wave solutions for the generalized Fisher's equation, Physics letters A, 131 s
- Wazwaz, A.M., 2002. Partial differential equations methods and applications, Saint Xavier University, pp. 84-87 Chicago, USA
- Wei, G.W. ve Zhao, Y.B., 2002. Discrete singular convolution for the prediction of high frequency vibration of plates, Int. J. Solids Struct., Volume 39, 65-88
- Wirtz, R.A., Briggs, D.G. ve Chen, C.F., Physical and numerical experiments on layered convection in a density-stratified fluid, Taylor Francis Online,
<http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/03091927208236083>, 10.12.2012
- Zhao, J. ve Wei, G.W., 2006. Comparison of the discrete singular convolution and three other numerical schemes for solving Fisher's equation, Siam J. Science and computation, 127-147, 21 s
- Zhao, J. ve Corless, R.M., 2006. Compact finite difference method for integro-differential equations, Applied mathematics and computation, Volume 177, 271-288, London

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Özlem ÖZMEN

Doğum Yılı : 1983

Eğitim Bilgileri (Kurum ve Yıl)

Lisans : İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ /2009

Yüksek Lisans : AKSARAY-SELÇUK ÜNİVERSİTESİ /2013

Doktora :

İletişim Bilgileri

Adres : Hilalkent Mah. Palmiye Sitesi 2.Blok Daire no:27 Kat:5
ELAZIĞ

Telefon : 0534 305 3681

E-posta : ozlmozmn23@gmail.com