

T.C.
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTA ÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLARI EĞİTİMİ
ANABİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ BİLİM DALI

FONKSİYON KAVRAMI HAKKINDA ÖĞRETMEN ADAYLARININ
GÖRÜŞLERİ ÜZERİNE BİR FENOMENOGRAFİK ÇALIŞMA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hazırlayan
Yasemin TÜRKELİ ŞANDIR

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Ahmet ARIKAN

ANKARA – 2006

Eğitim Bilimleri Enstitüsü M¼d¼rl¼đ¼'ne

Yasemin T¼RKELİ ŞANDIR tarafından hazırlanan “FONKSİYON KAVRAMI HAKKINDA ÖğRETMEN ADAYLARININ GÖRÜŞLERİ ÜZERİNE BİR FENOMENOĞRAFİK ÇALIŞMA” adlı çalışma, j¼rimiz tarafından Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalı'nda Y¼KSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan

¼ye

(Danıőman)

¼ye

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca, değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren Doç. Dr. Ahmet ARIKAN ve Prof. Dr. Ziya ARGÜN'e, eşim Hakan ŞANDIR'a ve aileme teşekkür ederim.

14/06/2006

Yasemin TÜRKELİ ŞANDIR

ÖZET

Bu çalışmanın amacı matematik eğitiminde büyük bir önemi olan fonksiyon kavramı ile ilgili problemler hakkında öğretmen adaylarının görüşlerini almak ve böylece onların bu kavram ile ilgili vurguladıkları ya da sıkıntı çektikleri noktaları ortaya koymaktır.

Fonksiyon kavramı ile ilgili problemler “Ask Dr. Math” adlı bir eğitim portalında yer alan 236 soru incelenmiş ve aralarından kavramın temel özellikleri ile ilgili olan 22 tanesi uzman görüşleri doğrultusunda seçilmiştir. Seçilen sorular fenomenografik araştırma yaklaşımı kullanılarak Ankara’da bir devlet üniversitesinin Matematik Eğitimi Anabilim Dalına devam eden 7 öğretmen adayıyla birebir mülakatlar şeklinde görüşülmüştür. Mülakat çözümlemeleri üzerinden veri analizleri yapılmış ve her bir soru için (ve varsa sorunun alt başlıkları için) öğrenci görüşlerini yansıtacak kategoriler oluşturulmuştur. Bu kategoriler oluşturulurken öğrenci görüşlerinin tamamını yansıtacak minimum sayıda kategori elde edilmeye çalışılmıştır.

Verilerin değerlendirilmesi sonucunda öğretmen adaylarının;

- fonksiyon, bir fonksiyonun grafiği, lineer fonksiyon ve ters fonksiyon gibi matematiksel kavramları günlük hayatla bağdaştırmada,
- bir fonksiyonun cebirsel gösterimini grafiksel gösterime dönüştürme ya da tam tersi bir dönüşümü yapmada,
- herhangi bir fonksiyonun tanım kümesini belirlemede ve aynı şekilde bileşke fonksiyonun tanım kümesini belirlemede,
- fonksiyon, eşitlik ve matematiksel ifade kavramları arasındaki farkı ortaya koymada ya da bu kavramlar arasındaki ilişkileri belirlemede,
- pozitif bir irrasyonel bir sayının irrasyonel kuvvetini (özel olarak e^π ifadesini) tanımlamada zorlandıkları görülmüştür.

Bunun yanında öğretmen adaylarının, bir bağıntının fonksiyon olması için gereken şartlara bir hayli vurgu yaptığı ve bu şartları tam olarak ifade ettikleri, ama yine de fonksiyon kavramını anlamlı bir şekilde öğrenmedikleri görülmüştür.

ABSTRACT

The aim of this study was to investigate pre-service teachers' opinions about questions on the concept of function which is one of the most important subjects of mathematics education. So, pre-service teachers' difficulties and priorities about concept of function are investigated.

The problems about the concept of function were selected from an educational web portal named "Ask Dr. Math" after expert's view. For this purpose, 236 questions about concept of function were reviewed and then 22 of them were selected to represent fundamental principles of functions.

The selected questions were interviewed by 7 pre-service teachers from the Department of Secondary Science and Mathematics Education of a university in Ankara by employing the phenomenographical research method. Interview records analyzed and their responses coded and categorized for each question. Number of categories were minimized according to reflecting pre-service teachers' responses.

According to analysis of data, pre-service teachers have difficulties about

- Interrelating the concept of function, the graphics of a function, linear functions and inverse functions with real-life
- Graphical drawing, effecting usage of graphics and transforming algebraic representation to graphical representation or vice versa
- Determining the domain set of a function and domain set of a composite function
- Determining differences and relations between concepts of function, equality and mathematical expressions.
- Determining irrational power of a positive irrational number

In addition to these results, it was seen that pre-service teachers gave importance to necessities for defining a function and expressed exact rules for defining functions.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
İÇİNDEKİLER	iv
TABLolar CETVELİ	vii
ŞEKİLLER CETVELİ	viii

BÖLÜM I

GİRİŞ

1.1. Problem Durumu	1
1.2. Tezin Amacı	2
1.3. Tezin Önemi	3
1.4. Varsayımlar	3
1.5. Kapsam ve Sınırlılıklar	4

BÖLÜM II

KAVRAMSAL VE KURAMSAL ÇERÇEVE

2.1. Fonksiyon Kavramı	5
2.2. Fenomenografi	9
2.2.1. Fenomenografik Araştırma Yaklaşımının Amacı	13
2.2.2. Fenomenografik Araştırma Yaklaşımının Metodu	14
2.2.3. Veri Analizi	15
2.2.4. Fenomenografik Araştırma İle İlgili Eleştiriler	17

BÖLÜM III

YÖNTEM

3.1. Örneklem	19
3.2. Veri Toplama Aracının Geliştirilmesi	19
3.3. Mülakatların Uygulanması ve Analizi	20
3.4. Veri Analizi	21

BÖLÜM 4

BULGULAR ve YORUMLAR

4.1. Mülakat İle İlgili Bulgular	22
--	----

BÖLÜM 5

TARTIŞMA VE SONUÇLAR	82
-----------------------------------	-----------

KAYNAKÇA	86
-----------------------	-----------

TABLOLAR CETVELİ

Tablo 3.1	Mülakat Sorularının Dağılımı	20
Tablo 4.1	Soru 1'e Verilen Cevaplara Ait Kategori	22
Tablo 4.2	Soru 2'ye Verilen Cevaplara Ait Kategori	25
Tablo 4.3.1	Soru 3'e Verilen Cevaplara Ait Kategori	27
Tablo 4.3.2	Soru 3'ün Devamına Verilen Cevaplara Ait Kategori	29
Tablo 4.4	Soru 4'e Verilen Cevaplara Ait Kategori	30
Tablo 4.5	Soru 5'e Verilen Cevaplara Ait Kategori	32
Tablo 4.6	Soru 6'ya Verilen Cevaplara Ait Kategori	35
Tablo 4.7	Soru 7'ye Verilen Cevaplara Ait Kategori	38
Tablo 4.8	Soru 8'e Verilen Cevaplara Ait Kategori	43
Tablo 4.9	Soru 9'a Verilen Cevaplara Ait Kategori	44
Tablo 4.10	Soru 10'a Verilen Cevaplara Ait Kategori	49
Tablo 4.11	Soru 11'e Verilen Cevaplara Ait Kategori	50
Tablo 4.12	Soru 12'ye Verilen Cevaplara Ait Kategori	52
Tablo 4.13	Soru 13'e Verilen Cevaplara Ait Kategori	54
Tablo 4.14	Soru 14'e Verilen Cevaplara Ait Kategori	56
Tablo 4.15	Soru 15'e Verilen Cevaplara Ait Kategori	59
Tablo 4.16	Soru 16'ya Verilen Cevaplara Ait Kategori	61
Tablo 4.17	Soru 17'ye Verilen Cevaplara Ait Kategori	64
Tablo 4.18.1	Soru 18'e Verilen Cevaplara Ait Kategori	65
Tablo 4.18.2	Soru 18'in Devamına Verilen Cevaplara Ait Kategori	66
Tablo 4.19.1	Soru 19'a Verilen Cevaplara Ait Kategori	67
Tablo 4.19.2	Soru 19'un Devamına Verilen Cevaplara Ait Kategori	70
Tablo 4.20	Soru 20'ye Verilen Cevaplara Ait Kategori	72
Tablo 4.21	Soru 21'e Verilen Cevaplara Ait Kategori	74
Tablo 4.22	Soru 22'e Verilen Cevaplara Ait Kategori	77

ŞEKİLLER CETVELİ

Şekil 2.1	Fenomenografik Araştırma Yaklaşımının Hareket Noktaları	12
-----------	---	----

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1. Problem Durumu

Matematik, her seviyeden bir çok öğrencinin öğrenmede ya da başarmada zorluk çektiği bir derstir. Bu yüzden öğrencilerin matematiği nasıl öğrendiği, matematiğin nasıl öğretilmesi gerektiği ya da matematik öğretiminin nasıl yapılması gerektiği gibi sorulara cevap vermek bugün çok önemlidir. Fonksiyon kavramı, öğrencilerin zaten güçlük çektiği bu dersin, yani matematiğin, en önemli ve en zor kavramlarından biridir. Hitt (1998), fonksiyon kavramının matematik öğreniminde büyük önem taşımasına rağmen öğretmenlerin öğretmekte ve öğrencilerin öğrenmekte en çok zorlandıkları kavramlardan biri olduğunu belirtmiştir. Üstelik bu kavram, matematiğin bir çok alanında kullanılan ve limit, türev, integral ve trigonometri gibi bir çok kavramın öğrenilmesinde ön şart olan bir kavramdır. Zira matematikte yeni öğrenilecek kavramın kazanılması, ön kavramların özümsemiş olmasına bağlıdır. Ancak yapısı itibariyle karmaşık, çok yönlü ve soyut düzeyde olan bu kavramı öğrencilerin anlamakta zorluk çektiği ve bir çok kavram yanılgısına sahip oldukları bilinmektedir.

Vinner (1992) öğrencilerin ve yetişkinlerin kavramlar hakkında ne düşündüklerini ve nasıl düşündüklerini tarif etmek için “kavram imajı” terimini kullanmıştır. Vinner (1992), bir insanın kavram imajının, o insanın verilen kavram ile ilgili zihinsel resimlerin tümünü içerdiğini belirtmiştir. Bu kavram imajları, matematiksel olarak kabul edilebilir bir tanımdan hayli uzak olabilir ve öğrencilerin kavram imajları genelde dardır ve yanlış kabuller içerebilir. Fonksiyon kavramı ile ilgili öğrencilerin kavram imajları aşağıda sıralanmıştır (Vinner, 1992):

- Dikey doğru testini geçen bir bağıntının grafiği,
- bir girdi olduğunda buna bir çıktı sağlayan bir makine,

- bir fonksiyon sistematik olmalı, “keyfi bir eşleme fonksiyon gösteremez”,
- bir fonksiyon tek bir kural ile verilmeli, mesela tanım kümesi parçalı olan fonksiyonlar iki ya da daha fazla fonksiyonu gösterir,
- bir fonksiyonun grafiği sürekli olmalı, mesela öğrenciler genellikle tam değer fonksiyonun grafiğine bir fonksiyon grafiği gözüyle bakmazlar,
- bir fonksiyon 1-1 olmalı, mesela $f(x)=12$ genellikle bir fonksiyon olarak ele alınmaz çünkü birebir değildir (Markovits, Eylon ve Bruckheimer, 1988),
- bir fonksiyon cebirsel bir formül içermeli, mesela fonksiyonun açık analitik gösterimi olmalı, öğrenciler $y=\pm\sqrt{x^{2-3}}$ ü cebirsel bir formülü olduğu için fonksiyon olarak algırlar. Aynı şekilde Mari’nin 6 dolar, John’un 3 dolar ve Sue’nin 2 dolar borcu var eşlemesini de ona uygun bir formül olmadığı için fonksiyon olarak görmezler. Williams (1998), üniversite öğrencilerinin %26’sının fonksiyonun eşitlik şeklinde olması gerektiğinde ısrar ettiklerini ortaya koymuştur (akt. Clement, 2001).

1.2. Tezin Amacı

Bu çalışmanın amacı, matematik eğitiminde çok önemli bir yere sahip olan fonksiyon kavramı ile ilgili “Ask Dr Math” adlı eğitim portalında yer alan sorular ile ilgili öğretmen adaylarının görüşlerini almak ve bu görüşleri fenomenografik araştırma yaklaşımı kullanarak analiz etmektir. Bu yaklaşım doğrultusunda, cevaplar yardımıyla kategoriler oluşturmak ve bu kategoriler ışığında öğretmen adaylarının bu konu ile ilgili görüşlerini yorumlamak ve ne düşündüklerini ortaya koymaktır.

Bu bağlamda aşağıda verilen soruya cevap aranacaktır:

Fonksiyon kavramı ile ilgili olarak “Ask Dr. Math” adlı internet sitesinde sorulmuş bazı sorular hakkında öğretmen adaylarının görüşleri nelerdir?

1.3. Tezin Önemi

Fonksiyon kavramı matematik eğitiminde büyük önem taşıyan ve matematiğin hemen hemen her alanında kullanılan temel kavramlardan biridir (Eisenberg, 1991). 9. sınıf müfredatında yer alan bu kavram, öğrencilerin daha sonra karşılaşacağı trigonometri, logaritma, karmaşık sayılar, limit gibi pekçok kavrama esas teşkil eder. Matematikte yeni öğrenilecek kavramların kazanılması ön kavramların gerçekleşmiş olmasına ve aralarında bir bağ kurulmasına bağlıdır. Ancak karmaşık ve soyut düzeyde olan fonksiyon kavramını öğrenmede öğrencilerin zorluk çektikleri bilinmektedir. Aynı şekilde öğretmenlerin de öğretmekte en çok zorlandıkları kavramlardan birisidir. Bu yüzden öğrencilerin fonksiyon konusunda pekçok kavram yanlışlarına sahip oldukları yapılan araştırmalarda ortaya konmuştur (Vinner, 1991).

Bu çalışma ile matematikle ilgili dünyanın değişik yerlerindeki öğrenci ve öğretmenler tarafından sorulan sorulardan fonksiyon kavramı ile ilgili olanlar incelenerek; bu kavramı öğretmede / öğrenmede ne gibi zorluklarla karşılaşıldığı ve öğrencilerin anlamadaki problemleri incelenmiştir. Üstelik bu çalışma ile mesleğe başlamak üzere olan öğretmen adaylarının hangi konularda sıkıntı çektiklerini görme imkanı bulunmuştur.

1.4. Varsayımlar

Araştırmanın yapılmasında geçerli olacak varsayımlar aşağıda belirtilmiştir:

1. Çalışma boyunca araştırmacı önyargıyla hareket etmemiştir.
2. Uygulama sürecinde katılımcılar arasında olumlu ya da olumsuz etkileşim olmamıştır.
3. Tüm öğretmen adayları sorulan sorulara samimiyetle cevap vermiştir.
4. Araştırmada kullanılan veri toplama araçlarının maddeleriyle ilgili uzman kanıları yeterlidir.

1.5. Kapsam ve Sınırlılıklar

Bu araştırma “Ask Dr. Math” adlı internet eğitim portalında fonksiyon kavramı ile ilgili sorulan sorularla ve Ankara’da bir devlet üniversitesinin Ortaöğretim Matematik Eğitimi Anabilim Dalında öğrenim gören yedi öğretmen adayıyla sınırlıdır.

BÖLÜM 2

KAVRAMSAL ÇERÇEVE

2.1. Fonksiyon Kavramı

Fonksiyon kavramı, matematiğin adeta her alanına nüfuz eden temel fikirlerinden biridir (Eisenberg, 1991). Matematik öğreniminde büyük önem taşımaya rağmen öğretmenlerin öğretmekte en çok zorlandıkları kavramlardan biridir (Hitt, 1998). Didaktik süreçte çok fazla ilgi ve dikkat harcanması bu kavramın zor bir kavram olduğunu gösterir (Sajka, 2003). Eisenberg (1992) öğrencilerde fonksiyonlar için bir his geliştirmenin lise ve kolej müfredatının temel hedeflerinden biri olabileceğini söylemiştir (Akt. Hitt, 1998).

Fonksiyon kavramının tarihçesine bakıldığında, bu kavramın matematik araştırmalarında ayrı bir kavram olarak ortaya çıkışının 17. yy'ın sonlarına rast geldiği görülmektedir. Fonksiyon kavramının ayrı bir matematiksel varlık olarak ele alınması “sonsuz küçük” matematiğinin başlangıcını takip ediyor olabilir. Leibniz “fonksiyon” terimini ilk defa 1673’te, bir eğrinin teğet ve normalleri gibi geometrik nicelikleri arasındaki bağı göstermek için kullanmıştır. “Sabit”, “parametre” ve “değişken” gibi terimleri de ilk defa tanıtan Leibniz’dir.

Cebirsel metodlarla eğriler üzerindeki çalışmalarının gelişmesiyle tek bir değişkene bağlı nicelikleri gösterecek bir terime-ifadeye giderek daha fazla ihtiyaç duyulmuş ve nihayet “fonksiyon” 1694 ve 1698 yılları arasında bu amaç için Leibniz ve Jean Bernoulli tarafından benimsenmiştir.

Fonksiyon terimi, 1716’ya kadar matematik sözlüklerinde yer almamıştır ama bundan iki yıl sonra Bernoulli geniş çaplı bir makale yayınlamış ve bu makalede bir değişkene ait bir fonksiyonu, bu değişkenlerle sabitlerden oluşan bir nicelik olarak tanımlamıştır. Bernoulli’nin öğrencisi Euler daha sonra bu tanıma nicelik yerine analitik ifade deyişini eklemiştir.

Bir durumu etkileyen farklı faktörlerin etkilerini çalışmak her zaman gereklidir. Bunu başarılı bir şekilde yapabilmek için, modelin temel değişkenlerini ve böyle faktörleri temsil eden parametreleri içeren fonksiyonel ilişkiler kurulmalıdır. Sayısal fonksiyon kavramını değişkenler arası eşlemeler olarak alma, matematiksel modelleri çalışma ve kavramsallaştırma için büyük önem taşır. Bu yüzden fonksiyon kavramı bugün matematik uygulamalarında anahtar bir kavram olmayı sürdürür (Ponte, 1990).

Yorum ve gösterimlerindeki çeşitliliği ile şaşırtan (Sajka, 2003) fonksiyon kavramını anlamak, bu kavramın çeşitli gösterimlerini doğru kullanabilmeye işaret eder (Hitt, 1998). Ponte (1990), fonksiyonları öğrenmenin üç önemli gösterim formunu yani sayısal, grafiksel ve cebirsel formları anlamayı gerektirdiğini ve zaten soyut olan bu kavramın bu yüzden daha da zorlaştığını ifade etmektedir. Öğrencilerin fonksiyon kavramını anlamalarındaki başka bir zorluk ise fonksiyonun ikili yapısından meydana gelmektedir. Gerçekten fonksiyon iki farklı yolla anlaşılabilir: Yapısal-obje gibi ve işlemsel-süreç gibi (Sfard, 1991). Yapısal açıdan bir fonksiyon sıralı ikililerin bir kümesidir (Kuratowski ve Mostowski, 1966). İşlemsel açıdan fonksiyon hesaplama ile ilgili bir süreçtir ya da “Bir sistemden diğerine geçmek için bir metot” tür (Skemp, 1971: Akt. Sajka, 2003).

Clement (2001) fonksiyonları anlama ve fonksiyonun matematiksel tanımı ile örtüşen bir kavram imajı geliştirmeye yönelik bir çalışma yapmıştır. Bu çalışmada, öğretmenlerin, öğrencilerin bu konuyla ilgili düşündükleri hakkında bir fikir edinebileceği değerlendirme maddelerine, öğrencilerin bu maddelerle ilgili cevaplarını tanımlamaya ve yorumlamaya yer vermiştir. Çoğu önceki çalışmalardan seçilmiş 25 değerlendirme maddesi yıl sonunda, akademik üstünlüğü ile bilinen bir okulun Cebire Giriş dersini alan öğrencilerinin 35'ine verilmiştir. Araştırma sonunda Clement, öğrencilerin bu kavramı pek az anladıklarını ya da yanlış varsayımlara sahip olduklarını gözlemlemiştir. Bunun sonucunda, ilk olarak fonksiyonlara ayrılan sürenin belki bu kavramı değişik şekillerde tartışmaya ayrılması gerektiğini ve öğretmenlerin öğrencilerini kitaplardakine pek uymayan fonksiyon örnekleri ile donatmaları gerektiğini belirtmiştir (Clement, 2001). İkinci olarak da değerlendirme

materyallerinin ve öğrenci düşüncelerini değerlendirme yollarının, öğrencilerin fonksiyon kavramı altında ne anladıklarını daha iyi belirleyecek şekilde değiştirilmesi gerektiğini ifade etmiştir.

Yine Vinner (1991) yaptığı bir çalışmada matematikte iyi durumda olan 10. ve 11. sınıf öğrencilerine bir anket uygulanmış ve bu ankette “Size göre fonksiyon nedir?” sorusuna, fonksiyonun tanımı verildiği halde, öğrencilerin sadece %57 sinin doğru cevap verdiği görülmüştür. Normalde büyük bir başarı sayılabilecek bu oran, iyi öğrencilerle ilgilenildiği için bu defa öyle değildir (Vinner, 1991).

Hitt’in (1998) lise öğrencileriyle yaptığı deneysel çalışmalar, fonksiyonların bazı gösterimlerinin diğerlerine göre daha zor ifade edilebildiğini göstermiştir. Aynı şekilde öğretmenler de bir gösterimden diğerine geçişte zorluk yaşamaktadırlar. Bu zorlukların bir kısmı ön çalışmalarla belirlenirken bir kısmı da daha sonra 14 sorudan oluşan bir çalışmayla ortaya konmuştur. Sonuçlar öğretmenlerin yaşadıkları zorlukların öğrencilerle aynı olmadığını göstermiştir.

Sajka (2003) tarafından yapılan başka bir çalışmada 16 yaşındaki bir lise öğrencisi ile standart olmayan bir problem; fonksiyonel eşitlik ile ilgili bir mülakat yapılmış ve bu öğrencinin fonksiyon kavramını anlamayla ilgili yaşadığı sorunların fonksiyon kavramın çok sınırlı bir süreçte temellendirilmesi ve fonksiyonel eşitliklerde kullanılan sembollerin yanlış anlaşılmasına bağlı olduğu görülmüştür.

King (2002) birinci sınıf cebir öğrencilerinin yalnız fonksiyon kavramı ile uğraşmadıklarını ayrıca fonksiyon notasyonunu çarpma işareti gibi alarak hata yaptıklarını bulmuştur.

Dyke (2003), öğrencilerin grafikleri yok saydıklarını ve bilgiyi grafikten okumaktansa karışık cebirsel ifadelerle başvurmayı tercih ettiklerini, bu sorunu gidermek için grafik çizen hesap makinalarının kullanışlı olabileceğini ifade etmiştir. Dyke (2003) grafik çizen hesap makinalarının gelişmesiyle, grafiklerin daha ulaşılabilir bir hale geldiğini ve daha anlamlı kullanılabileceğini kaydettikten sonra fonksiyon kavramı ilk verilirken grafikleri ya da fonksiyonların resimli

gösterimlerini kullanmanın hem grafiklerin önemini belirtmek hem de gösterimlerle bağlamak için iyi bir fikir olabileceğini söylemiştir. Dyke'a (2003) göre nitel grafiklerden nicel grafiklere, nicel grafiklerden tablolara ve tablolardan eşitliklere şeklinde doğal bir süreçle fonksiyonlar tanıtıldığında öğrencilerin daha rahat oldukları görülmüştür.

Davidenko (1997) ise, insanların farkında olmasalarda günlük hayatta cebirsel düşünceyi kullandıklarını söylemiştir. Bu yüzden öğrencilere fonksiyonları ilk tanıtırken matematiksel tanımını vermek, tanım kümesinin her elemanın bir tek görüntüsü olması gerektiğini vurgulayarak tanıtmak yerine, onların kendi düşüncelerini yansıtacak ve bu düşünceler üzerine inşaa edilecek bir girişin yapılması gerektiğini belirtmiştir. Davidenko (1997), öğrenciler farkında olmasalarda günlük hayatta fonksiyonları kullandıklarını ve onların bu düşünce ya da tecrübelerini matematiksel ifadelerle birleştirmek gerektiğini ifade etmiştir. Yazar bu söylediklerini somutlaştırmak için gazete, dergi ya da öğrencilerin dikkatini çekecek herhangi bir bilgiden faydalanarak öğrencilere fonksiyon ya da değişken kavramlarını anlatabileceğini söylemiştir.

Güveli ve Güveli (2002), bağıntı, fonksiyonun tanımı, birebir fonksiyon ve örten fonksiyon konularında lise 1 düzeyinde kavram yanlışlarını tespit etmek için çoktan seçmeli bir test hazırlamışlar ve testin sonucunda öğrencilerin her bağıntıyı fonksiyon sanma, birebirlik ve örtenlik arasında bir ilişki olduğunu zannetme gibi kavram yanlışlarına düştükleri tespit etmişlerdir.

Doğan, Sulak ve Cihangir'in (2002) yaptığı çalışmada Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Eğitimi Anabilim Dalına kayıt yaptıran öğrencilere 18 soruluk bir test uygulanmış ve bu testin sonucunda öğrencilerin fonksiyonlarda limit, türev ve fonksiyonların uygulamaları konusunda çok düşük oranda doğru cevaplar verebildikleri görülmüştür.

Sánchez ve Llinares (2003) öğretmen adaylarının, konu alan bilgilerinin pedagojik düşünme sürecine, öğretme açısından etkilerini tanımlamak amacıyla bir araştırma yapmıştır. Bu araştırmada fenomenografik araştırma yöntemini kullanarak

dört öğretmen adayıyla fonksiyon kavramı üzerine görüşmüştür. Çalışma sonucunda öğretmen adaylarının öğretmek için konu alan bilgilerinin, kavramın vurguladıkları farklı yönlerine ve kullandıkları gösterim şekillerine (grafiksel, cebirsel ve gerçek durum) göre farklılaştığı görülmüştür. Araştırmacı bu yüzden öğretmen eğitim programları boyunca, öğretmen adaylarının pedagojik alan bilgisine bir yerine daha fazla farklı yolla yaklaşımları gerektiğini söylemiştir.

2.2. Fenomenografi

Bu çalışmada veri toplamı aracı olarak fenomenografik araştırma yaklaşımı kullanılmıştır. Fenomenografi, düşünme ve öğrenme ile ilgili soruları (özellikle eğitimsel araştırmaların içeriğinde yer alan) cevaplamaya çalışan deneysel bir araştırma geleneğidir (Marton, 1986) ve insanların kendi etrafındaki dünya ile olan ilişkilerini inceler.

“Phenomenography” kelimesi Yunan kökenlidir. Phainomenon (görünüş) ve graphein (tanım) kelimelerinin bir araya gelmesiyle oluşur. Böylece fenomenografi, görünüşlerin tanımı anlamına gelir (Hasselgren ve Beech, 1997: akt. Orgill, 2000).

Fenomenografinin epistemolojik kökleri; gerçeği fenomenle ve fenomeni de gerçek tecrübeyle sunan fenomenalizme dayanır. Fenomenalizm resmen Alman filozof Edmond Husser (1901) tarafından başlatılmış ve daha sonra Heidegger ve Sartre tarafından geliştirilmiştir (Bell,2001).

Fenomenografi terimini ilk defa Ulrich Sonnemann (1954)’nın “Existence and Therapy” adlı kitabında kullanılmıştır (Bell,2001). O, bu terimi psikoterapik araştırmanın iki şekli olan Jaspers ve Heidegger’in araştırmaları arasındaki zor fark edilen ana farkları belirlemek için kullanmıştır. Jaspers’in çalışması; kişi tarafından kaydedilen yaşanmış tecrübelerin dağılımının bir raporudur. Heidegger’in çalışması ise araştırmacı tarafından deneysel olarak gözlemlenen bireysel tecrübeleri tarif eden bir araştırmadır. Sonnemann, Jaspers’in çalışmasını “Fenomenografi” ve Heidegger’in çalışmasını da “Fenomenoloji” olarak karakterize etmiştir (Bell,2001).

Fenomenografi, 60'ların sonu 70'lerin başında İsveç'te (Göteborg Üniversitesinde) yürütülen eğitim amaçlı bir araştırmadan doğmuştur. Bu araştırmanın amacı dünyayı öğrencinin perspektifinden ve algılama, kavramlaştırma, anlama, kavrama gibi pek çok süreçlerinden görmektir (Ashworth and Lucas,1998).

Ference Marton ve meslektaşları Roger Säljö, Lars-Öwe Dahlgren ve Lennart Svensson bu öncü araştırmayı üstlendikleri zaman dünyanın çeşitli yerlerinden pek çok akademisyen araştırmanın yapılma şekliyle ilgilendi. Bu akademisyenlerin çoğu tecrübeli Fenomenografikçilerle birebir görüştüktan sonra fenomenografik metodları kendi araştırmalarına uyguladı (Clement, 2001). O zamandan sonra araştırma paradigması ortaya çıkmış ve yavaş yavaş gelişmiştir.

Marton (1981) "Phenomenography - Describing Conceptions of World Around Us" adlı makalesinde fenomenografinin çıkış noktasından ve felsefesinden bahsetmiştir. Marton'a (1981) göre eğitim psikolojisinde sorular genellikle bazı öğrencilerin neden diğerlerine göre daha başarılı olduğu ile ilgilidir. Bu soruya alternatif bir soru Säljö (1981) tarafından sorulmuştur: "-Bazı öğrencilerin diğerlerine göre neden daha başarılı olduğu- hakkında insanlar ne düşünüyorlar?" Marton soruları formüle etmenin bu iki yolunun iki farklı perspektifi temsil ettiğini söylemiştir: Birinci ve daha fazla benimsenen perspektif, "kendimizi dünyaya yöneltir ve onunla ilgili durumlar oluştururuz". İkinci perspektifte ise "kendimizi insanların dünya ile ilgili fikirlerine ya da tecrübelerine yöneltir ve insanların dünya ile ilgili fikirleri hakkında durumlar oluştururuz". Marton (1981), öncekine birinci derece ve sonrakine de ikinci derece perspektif demiştir. Marton'a (1981) göre ikinci derece perspektifi tercih etmenin iki önemli sebebi vardır: Birincisi ve daha açık olanı; insanların gerçeğin farklı yönlerini nasıl tecrübe ettiklerinin, anladıklarının, yorumladıklarının, yakaladıklarının ve kavradıklarının farklı yöntemlerini bulmanın yeterince ilginç olması, pedagojik potansiyele sahip olduğu için zayıf ya da yetersiz olmayışı ve alan bilgisinin şekillenmesi gerekliliğidir. İkincisi ise ikinci derece perspektiften elde edilen tanımların birinci derece perspektiften türetilen tanımlara göre daha özgün ve bağımsız oluşudur. Marton (1981) bunun şu anlama geldiğini söyler :

Eğer biz (örneğimize dönersek) insanların okul başarıları hakkında ne düşündüğü ile ilgileniyorsak o zaman bu problemi araştırmak zorundayız. Çünkü cevap insan aklının genel özellikleri ya da okul sistemi ya da hatta her ikisi ile ilgili bulduklarımızın kombinasyonundan elde edilemeyebilir.

Marton (1981) tartışılan araştırma programının amacının, insanları sınıflandırmak ya da grupları karşılaştırmak ya da insanlar hakkında doğru ya da yanlış kararlar almak, kanaatte bulunmak, açıklama yapmak olmadığını; amacının, sosyal önemi olan ve belli bir sosyal kesim tarafından paylaşılan realitenin farklı yönlerini, düşünce şekillerini bulmak ve sistematize etmek olduğunu söylemiştir. Tartışmak istediği araştırma yönteminin diğer araştırma yöntemlerini tamamlayıcı olduğunu ve tecrübelerin tanımlarını, analizlerini ve nasıl anlaşıldıklarını araştıran, deneyime dayalı tanımlamaya yönelik bir yöntem olduğunu ifade etmiş ve diğerlerine göre nispeten farklı bu yaklaşımı “Fenomenografi” olarak isimlendirmek istediğini söylemiştir.

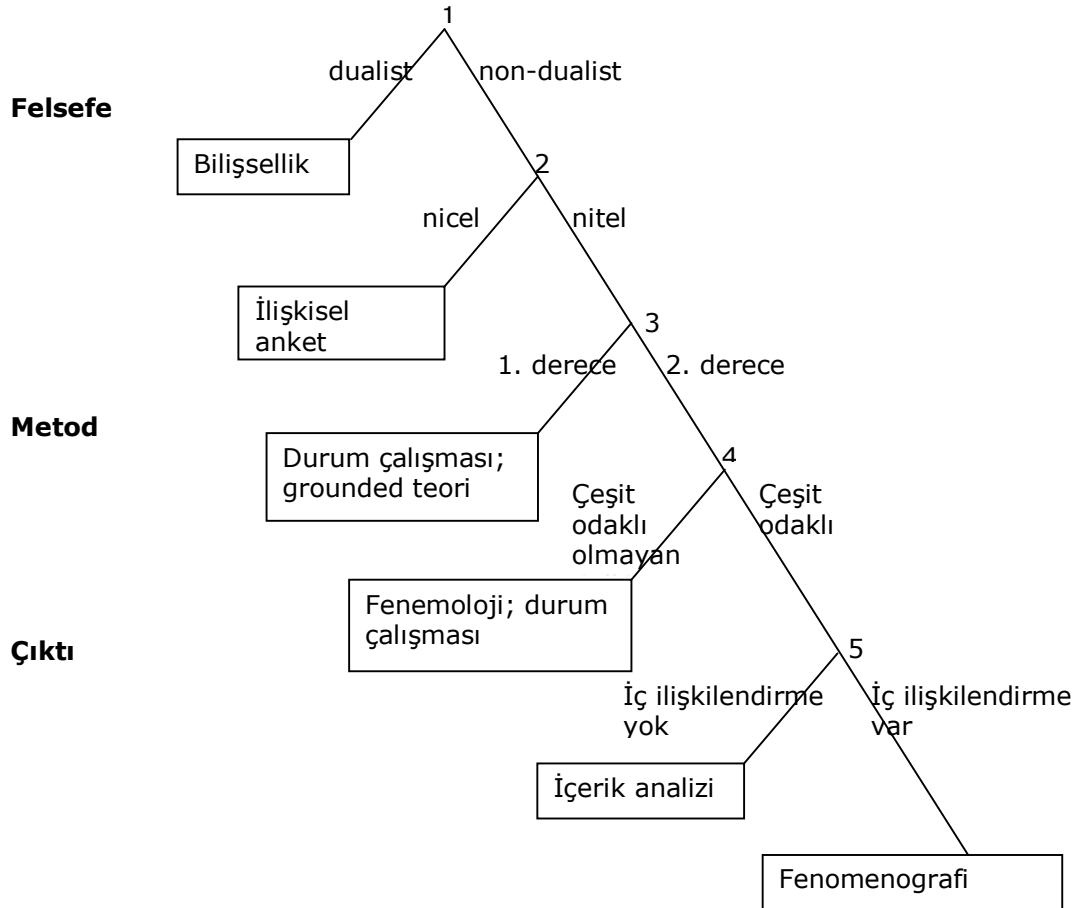
Fenomenografi: etrafımızdaki dünyanın çeşitli yönlerini ve bu dünyadaki çeşitli fenomenleri; tecrübe etme, anlama, algılama ve kavramanın sınırlı sayıdaki nitel farklı yollarının deneysel çalışmasıdır (Marton, 1981).

Borg ve Gall’in (1996) fenomenografi tanımı “İnsanların çevrelerindeki dünyayı kavramalarının farklı yollarının çalışılması için uzmanlaşmış metodolojik araştırma süreci ve bir fenomeni algılamanın sınırlı sayıda nitel farklı yolları olduğu kabulü üzerine kurulmuş olan verinin analizi ve kavram kategorileri şeklinde gruplandırılması” şeklindedir (akt. Bell, 2001).

Bir fenomen ile ilgili öğrenme deneyiminin eğitimsel yönlerini tanımlama süreci, öğrencilerin bu fenomen hakkındaki öğrenme deneyimlerinin çeşitliliğini araştırmayı gerektirir (Marton, 1981).

Sáljö’ye (1997) göre fenomenografik araştırma zaman harcamaya değer bir uygulamadır çünkü tamamen tecrübe etme realitesinin farklı yollarını bulmaya, sınırlandırmaya ve tarif etmeye çalışmaktadır. Bu yöntem tecrübe etme realitesinin sınırlı sayıda farklı yollarının olduğunu kabul eder (akt. McDonald, 2000).

Trigwell (2000), fenomenografik araştırma yaklaşımının temel özelliklerini ortaya koyan ve bu yaklaşımı diğerlerinden ayıran 5 hareket noktasından bahsetmiştir. Aşağıdaki tabloda bu hareket noktaları 1' den 5' e kadar sayılarla gösterilmiştir.



Şekil 2.1: fenomenografik Araştırma Yaklaşımının Hareket Noktaları

Trigwell (2000) bu hareket noktalarını şöyle açıklar:

- 1- Fenomenografi, dualistlere göre non-dualisttir: Bireysel yapılandırmayı ve bilişselliği destekleyen, fenomeni bireyden ayıran dualist felsefecilerin aksine fenomenografik felsefe non-dualisttir. Gerçek, birey ve fenomen arasındaki ilişkiyi yapılandırılır.
- 2- Nicelden ziyade niteldir: Fenomenografi nicel farklardan ziyade öğrencilerin nasıl tecrübe ettiklerinin nitel farklarının doğasını anlamaya çalışır. İnsanların zihinsel, ahlaki ve sosyal durumlarına göre algılama kabiliyetlerindeki

farklılığı yansıtır (Entwistle, 1973; akt: Dyke, 2003). Ayrıca fenomenografikçiler, nitel bir yaklaşımın çalışma ve öğrenme aktiviteleri arasındaki fonksiyonel ilişkiyi anlamaya imkan verdiğini bu yüzden nitel bilgiye bel bağladıklarını söylerler (Dyke, 2003).

- 3- Birinci dereceden ziyade ikinci derecedir: Birinci derece yaklaşımda araştırmacı fenomeni kendi başına tarife çalışır. İkinci derece yaklaşımda ise araştırmacının tarifini şekillendiren başkalarının fenomen ile ilgili deneyimini tarif etmesidir. Marton (1981) bunu, fenomeni bireye görüldüğü gibi tarif etme olarak ifade eder (akt. Eklund-Myrskog, 1997). Geleneksel yaklaşımlarda araştırmacı bir teori ile başlar ve bu teori ile ilgili bilgi toplamak için araştırma yapar. Karşıt olarak fenomenografi “öğrencilerin yorumları yardımıyla kategoriler bulmaya çalışan” araştırmacılara dayanır (Marton ve Svensonn, 1979). Diğer bir deyişle geleneksel araştırma yöntemleri bilgi üzerine empoze edilirken fenomenografi, bilgiden üretilir (Svensonn, 1977: akt: Trigwell, 2000).
- 4- Çeşit üzerine odaklanır: Farklı insanlar verilen bir fenomeni aynı şekilde tecrübe etmeyeceklerdir. İnsanların bir fenomeni tecrübe etme ya da anlamaları çeşitlilik oluşturacaktır (Orgill, 2000). fenomenografik yaklaşım bu çeşitliliğin anahtar yönlerini ortaya koymaya çalışır (Trigwell, 2000).
- 5- İç ilişkilidir: Fenomenografi, bir fenomenin farklı tecrübe yolları arasındaki iç ilişkilerin birleşimidir. Bu, fenomenografiyi birbiriyle ilişkisiz kategoriler sunan yaklaşımlardan (içerik analizi gibi) ayıran özelliktir.

2.2.1. Fenomenografik Araştırma Yaklaşımının Amacı

Fenomenografi deneysel bir araştırma yöntemidir. Bu yöntem özellikle eğitim araştırmalarının içeriğinde yer alan düşünme ve öğrenme ile ilgili sorulara cevap vermesi için tasarlanmıştır (Jafari ve Iturralde, 2004). Fenomenografik yaklaşımda amaç ikinci derece bakış açısından bireyin etrafındaki dünyada yer alan fenomeni nasıl kavramlaştırdığını tanımlamak, analiz etmek ve anlamaktır. Başka bir deyişle, fenomeni bireylere görüldüğü gibi tarif etmektir (Marton 1981, 1986, 1994). Burada

“kavramsallaştırma” kavramı asıl önemli olandır ve “bir birey ile fenomen arasındaki ilişkiyi görmenin bir yolu” olarak tanımlanır (Johansson, Marton & Svensson, 1985: akt. Eklund-Myrskog, 1997).

Marton (1981, 1994) farklı insanların belli bir olayı tecrübe etmesinde nitel farklılıkların sınırlı sayıda olduğuna inanır. Amaç, verilen bir olay için insanların sahip olduğu farklı kavramaları aydınlatmaktır.

Fenomenografik çalışmalar verilen bir fenomen için insanların sahip olduğu kavramalar üzerine yoğunlaşırken, araştırmacı çalışmaya katılanların fikirlerine mümkün olduğunca nötr bir etkide bulunmaya çalışır (Orgill, 2000).

Bir araştırmanın ana sonuçları, bir fenomen ile ilgili yapılan farklı tariflerin, tanımların kategorileridir. Fakat fenomenografik araştırma bundan fazlasıdır. Çünkü kavramları tanımlamayı, altlarında yatan anlamları ve birbiriyle olan ilişkilerini araştırmayı içerir (Enswiste, 1997: akt. Orgill, 2000).

2.2.2. Fenomenografik Araştırma Yaklaşımının Metodu

Fenomenografik çalışmalar, insanların farklı öğrenme yollarını keşfetmeye çalışır. İnsanların anlama ya da kavramlaştırma yollarını açıklayan birçok bilgi kaynağı olmasına rağmen bu yaklaşımda veri toplamak için baskın yöntem; diyalog şeklinde icra edilen bireysel mülakatlardır (Trigwell, 2000). Fenomenografik çalışmalar, küçük bir grup bireyin yaşanmış tecrübelerinin uzun süreli birliktelik ve tekrarlı mülakatlarla anlamaya ve tarif etmeye çalışır (Bell, 2001). Mülakata katılanlar soruda verilen fenomenin yönlerini yansıtmaları için cesaretlendirilirler (Trigwell, 2000). Orgill (2000) bu mülakatları “açık ve derin” diye nitelendirir. Açıklıktan kasıt, soru listesinin istenildiği gibi hazırlanabilmesidir. Ayrıca kendisi ile mülakat yapılan kişinin beklenmeyen ama araştırmacının işine yarar cevapları için de boşluklar vardır. Derinlikten kasıt ise yoruluncaya kadar ve ortak bir anlamda buluşuncaya kadar sorulara devam edilmesidir. Ancak araştırmacı mülakata katılan kişinin fikirlerine etki etmez, onun fikirlerini ortaya çıkarmaya çalışır.

2.2.3. Veri Analizi

Ponte (1990), sıkça kullanılan diğer araştırma perspektiflerinin aksine fenomenografinin, analitik metotların çeşitliliğine izin verecek başarıda esnek olduğunu söylemiştir. 1993'te eğitim anlamları üzerine yaptığı çalışmada Stalker, fenomenografi'nin "kavramsallaştırmayı ortaya çıkarma ile ilgili nihai bir amaç olmaktan ziyade veri analizinin bir süreci" olduğunu söyler (Ponte, 1990).

Veri analizi boyunca, araştırmacı nitel fark kategorilerini belirlemeye çalışır. Bu kategoriler farklı insanların farklı kavramları nasıl tecrübe ettiklerini tarif eder. Fenomenografikçiler, çalışmadaki her bir kavram için sınırlı sayıda kategorinin olabileceğine ve bu kategorilerin veri toplayarak keşfedebileceğine inanırlar. Burada veri toplamadan kasıt mülakatların kopyalanmasıdır (Both, 1997: akt. Orgill, 2000). Mülakatlar harfi harfine kopyalanır ve analizi bu kopyaları üzerine tekrarlanan davranışlarla yapılır (Trigwell, 2000).

Araştırmacı, mülakata katılan bireylerin ifadeleri arasındaki benzerlikler ve farklılıkları kıyaslayarak kategorileri oluşturmaya başlar. Orgill (2000), bu kategorilere öncü kategoriler demiştir. Araştırmacı, öncü kategorileri akılda tutarak, verileri tanımlayan ve açıkça gösteren yeterli sayıda kategori olup olmadığını kontrol etmek için mülakat kopyalarını tekrar inceler. Verilerin ikinci kez gözden geçirilmesi ya tanım kategorilerini çıkarmaya ya eklemeye ya da mevcut kategorileri değiştirmeye yol açar. Verilerin üçüncü kez incelenmesi tanım kategorilerinin iç tutarlılığı içindir. Bu süreç, modifiye edilen kategoriler mülakat verileriyle uyumlu hale gelene kadar devam eder (Orgill, 2000).

Kategorilerin belirlenmesi verilere göre test edilir ve düzeltilir, tekrar test edilir tekrar düzeltilir. Her defasında değişim azalır ve sonunda mülakat durağan hale gelir (Marton, 1986).

Pittsburg'da 1983'te 2. İnsan Bilim Araştırma Konferansı'nda yer alan bir konuşmada, fenomenografi ile ilgilenen Lennart Svensson ve Janb Theman

fenomenografinin amaçlarını gerçekleştirmek için ihtiyaç olunan mülakat analizini tarif etmişlerdir. Kelimesi kelimesine aynı olan mülakat nüshalarının analizi başlıca iki yolla yürütülür:

- 1- Araştırılan fenomeni yansıtan önemli durumları seçerek,
- 2- Kapalı kavramların anlamı ya da anlamlarını belirleyerek.

Fenomenografik araştırma yaklaşımında araştırmacı, kişilerin tanımlarını kategorize eder ve kategorileştirme fenomenografik araştırmanın ilk ürünüdür. Araştırmacı, bir fenomenin tanımlamalarını okuyup sınıflandırdığında sadece bilgiyi sınıflandırmaz, ayrıca bu bilgilerden en farklı olanı bulmaya çalışır. Çünkü fenomenografikçiler insanların dünyanın belli kısımlarını nasıl tanımladıklarını açıklayarak önemli yapısal farkları bulmaya çalışırlar ya da Svensson ve Theman'ın (1983) söylediği gibi objektif fenomenografi, bilgiyi daha yerel ve soyut ifadelerle tarif etmek değil ama bilgiyi gruplamak, ilişkilendirmek ve farkını ortaya koymak ve böylece sonucu tanım kategorileri şeklinde kategorize etmektir (Sánchez ve Llinares, 2003).

Orgill (2000) kategori geliştirmede temel kuralların; iç tutarlılık ve verilerdeki tüm çeşitliliği açıklayan ve minimum sayıda kategori içeren ürün havuzu oluşturmak olduğunu söylemiştir. Ayrıca eğer mülakat çoklu başlık ya da verilen bir fenomenin çoklu yönlerini içeriyorsa araştırmacı herbir başlık için ayrı bir ürün havuzu geliştirir (Orgill, 2000).

Mülakatta açıkça tartışılan fenomenin farklı tecrübe edilme yolları, analizin birimlerini oluşturur ve tek bir kişiye ait değildir. Bu farklı anlamaları eşleştiren tanım kategorileri ve bunlar arasındaki ilişkiler fenomenografik çalışmanın başlıca sonuçlarıdır (Marton, 1992: akt. Trigwell, 2000).

Fenomenografik araştırmada ve analizde kategoriler önceden tahmin edilmeye çalışılmaz ve analiz süreci, hem bireysel hem toplu olarak, araştırmayı bir hipotezi ispat etmeye ya da çürütmeye itmez ya da bulguları özel bir teorik noktaya bağlamaz. Bilakis, analizin ilk evresinde bireylerin gerçek kavramlarından ortaya

çıkan kategoriler, analizin ikinci aşamasında verilerin analiz ve sentezi için kullanılır ve bulgular anında araştırma sonuçları olur. Yani araştırmacı verileri önceden oluşturulmuş kategoriler ya da zihnindeki teorik yapı ile analiz etmez. Hatta kategorilerin ve temaların, ilk analizden ortaya çıkmasını sağlar (Bell, 2001).

2.2.4. Fenomenografik Araştırma İle İlgili Eleştiriler

Orgill (2000), fenomenografik araştırma yaklaşımı ile ilgili üç önemli eleştiriden bahsetmiştir:

Bunlardan birincisi öğrenci deneyimlerinin aynı olmayışıdır. Yani öğrencinin deneyimlerini nasıl tanımladığı ve araştırmacının bunu nasıl gözlemlediği konusunda çelişki vardır. Bir öğrencinin fenomen ile ilgili deneyim sayısı başka bir öğrencinin deneyim sayısından fazla olabilir. Bu da araştırmacının gözlemlerini etkiler. Saljö (1997), bu problemi çözmek için kişilerin deneyimlerini incelemek yerine genel ve erişilebilir bir fenomenin farklı sayıdaki uygulamalarını incelemeyi tavsiye etmiştir. Orgill'in (2000) bahsettiği ikinci eleştiri, Webb'in (1997) "fenomenografiyi kullanan araştırmacının sahip olduğu deneyim ve teorik bilgilerin; kategorileri ve veri analizini etkilemesi çok mantıklıdır" eleştirisidir. Webb (1997) buna çözüm olarak araştırmacının geçmişinin ve bilgilerinin açıkça ortaya konması gerektiğini böylece çalışmayı etkileyebilecek değişkenler hakkında araştırmayı kullananların ya da okuyanların bilgi sahibi olacaklarını söylemiştir. Webb ile aynı fikirde olan Ashworth ve Lucas (1998) araştırmacının kendi bilgilerinin araştırmayı etkilememesi için aşağıdakileri bir kenara koyması gerektiğini söylemişlerdir (akt. Felix, 2004):

- Bilimsel teorilerin ve önceki araştırmaların bulguları,
- Saygın kaynaklardan diğer deliller,
- Araştırmacının kişisel bilgi ve inançları,
- Hipotezlerin önceki yapısı ya da kategorilerin yorumlanması,
- Belirli özel metodları dikte eden varsayımlar,
- Deneyimlerin sıralaması,

- Sebep soruları,
- Deneyimlerin sorularına karşılık objektiflik.

Ashworth ve Lucas (1998), analizleri tamamlayana kadar literatürlerin taranmaması gerektiğini savunmuşlardır. Mülakat yapmadan önce literatür taramanın sakıncasını, araştırmacının uyarılarının katılımcının ifade ettiği deneyimlerdeki inceliği örtmesi ihtimali olarak açıklamışlardır.

Orgill'in (2000) bahsettiği diğer bir eleştiri de fenomenografik çalışmaların güvenilirliği ve tekrar edilebilirliğidir. Güvenirlik konusunda Marton (1986) "aynı veriler üzerinde bireysel olarak çalışıldığında iki farklı araştırmacının farklı kategoriler tanımlaması mümkündür" demiştir. Çözüm olarak da "Eğer kategoriler bir kez belirlenmişse bu kategoriler diğer bütün araştırmacıların anlayabileceği ve kullanabileceği şekilde tanımlanmalıdır." demiştir (Akt. Orgill, 2000).

Ashworth ve Lucas (1998) ek olarak, kişilerin karşılaştığı durum ya da fenomeni tecrübe etme ya da anlamalarının mantıksal ilişkili ve sınırlı sayıda nitel farklı yollarının olması (Marton, 1994) iddiasını sorgulamışlardır. Ashworth ve Lucas (1998) neden bir fenomen ile ilgili sınırlı sayıda tanım kategorileri olduğunu sormuşlardır. Ayrıca varolan fenomenografik çalışmalarda çalışmanın sınırlarını etkileyen faktörlerin belirlenmemesini üzüntü verici olarak nitelendirmişler ve araştırmanın başarılı olması için belli kriterler kurulması gerektiğini ifade etmişlerdir (akt. Felix, 2004).

BÖLÜM 3

YÖNTEM

Bu bölümde veri toplama aracı olarak kullanılan mülakat sorularının nasıl geliştirildiği, bu mülakatın nasıl uygulandığı ve mülakattan elde edilen verilerin fenomenografi araştırma yaklaşımı kullanılarak nasıl analiz edildiği açıklanmıştır.

3.1. Örneklem

Bu araştırmanın örneklemini Ankara’da bir devlet üniversitesinin Matematik Eğitimi Anabilim Dalı 5. sınıfında öğrenim gören 7 öğretmen adayı oluşturmaktadır. Bu öğretmen adayları 2005-2006 eğitim-öğretim yılı itibarıyla genel not ortalamalarının yüksekliği baz alınarak seçilmiştir. Bu öğretmen adaylarından biri ile mülakat sorularının geçerlik ve güvenilirliğini kontrol etmek için pilot çalışma amacıyla mülakat yapılmıştır. Katılımcıların isimleri değiştirilmiş ve temsilen rumuz isimler kullanılmıştır.

3.2. Veri Toplama Aracının Geliştirilmesi

Veri toplama aracı olarak kullanılan mülakat soruları “Ask Dr. Math” adlı bir eğitim portalında yer alan dünyanın değişik yerlerinden öğretmen ve öğrencilerin fonksiyon kavramı ile ilgili sordukları sorular arasından seçilmiştir. Bu portalda fonksiyon kavramı ile ilgili yer alan 236 soru incelenmiş ve sorular fonksiyon ile ilgili 11 alt gruba ayrılmıştır. İlk aşamada bu sorulardan 43’ü, ikinci aşamada ise uzman görüşleri doğrultusunda 22’si seçilmiştir. Nihai olarak bazı ekleme ve çıkarmalarla 22 adet açık uçlu soru belirlenmiştir. Sorular öğretmen adaylarının fikirlerini ortaya çıkarması açısından açık uçlu hazırlanmıştır. Bu soruların ifadeleri

yeniden düzenlenerek mülakat için belli bir konu sırası gözetilerek sıralanmıştır. Tablo 3.1 de fonksiyon kavramı ile ilgili seçilen soruların dağılımı ve hangi alt başlıklarla ilgili olduğu gösterilmiştir:

Tablo 3.1: Mülakat Sorularının Dağılımı

Alt Başlıklar	Soru Adedi
Fonksiyon kavramı	3
Fonksiyon ve Grafik	5
Fonksiyon ve Eşitlik	4
Özel tanımlı fonksiyonlar	3
Bileşke fonksiyon	1
Tanım kümesi ve değer kümesi	2
Ters Fonksiyon	2
Örtenlik	1
Lineer Fonksiyon	1
Toplam	22

Mülakat sorularının; bu alanda akademik çalışma yapmış biri doçent iki ayrı alan uzmanının görüşü alınarak ve öğretmen adaylarından biri ile pilot görüşme yapılarak geçerlik ve güvenilirliği kontrol edilmiştir. Pilot uygulama sonucunda bir soru eklenmiş ve bir soru çıkarılmıştır. Bu sorular haricinde pilot uygulama da veri analizine dahil edilmiştir.

3.3. Mülakatların Uygulanması ve Analizi

Mülakatlar öğretmen adaylarıyla önceden kararlaştırılan tarih ve yerde birebir görüşme şeklinde gerçekleştirilmiştir. Mülakatların yapıldığı yerin öğretmen adaylarının sağlıklı düşünebileceği uygun bir ortam olmasına dikkat edilmiştir. Görüşmeler öğretmen adaylarının kendilerini rahatça ifade edebilecekleri bir sohbet havasında gerçekleşmiş ve öğretmen adayları düşüncelerini ifade etmek için cesaretlendirilmiştir. Öğretmen adaylarının mülakat sırasında ne dediğinin tam anlaşılmasını ve daha anlaşılır ifadeler kullanmalarını sağlamak için bazı açıklayıcı sorular sorulmuştur. Bu görüşmeler öğretmen adaylarından izin alınarak kamera ile kayda alınmıştır.

3.4. Veri Analizi

Öğretmen adayları ile yapılan mülakatların kayıtları bilgisayar ortamında, kelimesi kelimesine yazıya dökülmüştür. Mülakatlar, yazıya aktarılırken öğretmen adaylarının duygu ve düşüncelerinin de yansıtılmasına dikkat edilmiştir. Daha sonra mülakat nüshaları, mülakat kayıtlarından takip edilerek kontrol edilmiş ve öğretmen adaylarının fikirleri tam olarak yansıtıldığından emin olunmuştur. Bundan sonra mülakat nüshaları soru soru ayrılmış, öğretmen adayı cevapları soru numarasına göre yapılandırılmıştır. Herbir soru için nüshalar defalarca okunmuş öğretmen adaylarının vurguladıkları farklılıklar ve benzerlikler belirlenmeye çalışılmıştır. Bu farklılıklar ışığında ilk (ham) kategoriler oluşturulmuştur (Ayrıca kategoriler yorumlanmadan önce önemli görülen yerler için notlar alınmıştır). Daha sonra tekrar başa dönülerek herbir soru için nüshalar tekrar okunmuş ve kategoriler kontrol edilmiştir. Bu kontrol sonucunda bazı kategoriler yeniden düzenlenmiş bazıları ise sabit kalmıştır. Kategoriler başka bir uzman tarafından yapılan kategorilerle karşılaştırılmış ve farklılıklar tartışılarak kategorilere yansıtılmış bunun sonucunda kategoriler durağan hale gelmiştir. Daha sonra bu kategorilerin nasıl oluşturulduğu ve kategorilerde yer alan bilgiler açıklanmaya çalışılmıştır. Ayrıca kategorilerde yer almayan ancak önemli görülen ifadeler ve açıklamalara, bulgular ve yorumlar kısmında yer verilmiştir.

BÖLÜM 4

BULGULAR ve YORUMLAR

4.1. Mülakatlardan Elde Edilen Bulgular

Bu bölümde, araştırmada elde edilen verilerin, üçüncü bölümde belirtilen yöntem ve teknikler kullanılarak yapılan analizleri sonucunda, araştırmanın alt problemlerine göre elde edilen bulgulara, bunlara ilişkin yorumlara, açıklamalara ve tartışmalara yer verilmiştir.

Tablo 4.1: Soru 1'e verilen cevaplara ait kategori

Soru 1: Bir fonksiyon nedir?		
Cebirsel işlem/ bağımlı değişken	... belli bir kümenin elemanlarını, başka bir kümeye belli bir kurala götüren işlem. ... bağımlı ve bağımsız değişkenler vardır, bağımsız değişkenin durumuna göre bağımlı değişken. <i>Serkan</i>	
Bir şeyin işlevi/araç	... bir şeyin işlevi gibi. ... verilen değerlerle o değerleri değiştiren şey. <i>Ayşe</i>	
	... bir şeyi diğer bir şeye götüren, başka farklı bir şeye götüren aracıya fonksiyon denir. Mesela beni buraya götüren otobüs gibi. <i>Bekir</i>	
Bağıntı	(Bağıntı olmasına odaklanmış cevap)	... özel tanımlanmış bağıntı. <i>Elif</i>
	(Fonksiyon olması için sağlanması gereken şartlara odaklanmış cevaplar)	... A kümesinin her elemanı, en az bir kez ve en fazla bir kez B kümesinin bir elemanı ile eşleniyorsa biz bu şekilde tanımlanan bağıntılara fonksiyon deriz. <i>Gül</i>
		Tanım kümesindeki elemanların hepsini, değer kümesinde en az bir tane elemana götüren her bağıntıya fonksiyon denir. İki şartımız var her eleman gidecek ve en az değil pardon en fazla bir elemana gidilebilir. <i>Arda</i>
		Tanım kümesindeki elemanların hiçbiri açıkta kalmayacak ya da bir tane eleman iki kere eşleşmeyecek. <i>Ali</i>
		... fonksiyonun işte şeyleri var; tanım kümesinde boşta eleman kalmayacak işte bir eleman değer kümesinde iki elemana gitmeyecek falan gibi şeyleri var. <i>Ayşe</i>

Tablo 1’de öğretmen adaylarının “fonksiyon nedir?” sorusuna verdikleri cevaplar tarif edilmeye çalışılmıştır. Bunun için öğretmen adaylarının vurguladıkları farklı bakış açıları ve bunlar arasındaki ilişkiler tanımlanmaya çalışılmıştır.

Mülakata katılan öğretmen adaylarının hepsi bir bağıntının fonksiyon olması için sağlaması gereken şartları vurgulamış ve bu şartları hemen hemen doğru olarak ifade etmiştir:

Ayşe: Yani mesela fonksiyonun işte şeyleri var, tanım kümesinde boşta eleman kalmayacak. İşte bir eleman değer kümesinde iki tane elemana gitmeyecek.

Arda: İki şartımız var. Her elemanI gidecek ve en az değil pardon en fazla bir elemana gidebilir.

Serkan: Fonksiyon olması için bildiğimiz iki tane temel şey var özellik var. Birincisi tanım kümesindeki elemanların açıkta kalmaması, ikincisi de tanım kümesindeki bir elemanın değer kümesinde iki elemanla eşleşmemesi sadece bir elemanla eşleşmesi.

Gül: Eğer A kümesinin her elemanı en az bir kez ve en fazla bir kez B kümesinin bir elemanı ile eşleşiyorsa biz bu şekilde tanımlanan bağıntılara fonksiyon diyoruz.

Elif: Bildiğimiz iki tane özelliği var. ... Her kümesi (eleman demek istiyor) yalnızca bir tane görüntü kümesinde bir tane elemana gidecek ...Tanım kümesinde de işte gitmeyen eleman kalmayacak.

Bekir: Birincisi fonksiyon olması için tanım kümesinde açıkta eleman kalmamalı, ikinci olarak da bir eleman iki elemana gitmemeli.

Ali: Tanım kümesindeki elemanların hiç biri açıkta kalmayacak ya da bir tane eleman iki kere eşleşmeyecek.

Bütün öğretmen adaylarının bu şartları vurgulaması hatta üç öğretmen adayının soruyu cevaplamaya direkt olarak fonksiyon olma şartlarını tarifleyerek başlaması öğretmen adaylarının bu konuya büyük önem verdiklerini göstermektedir.

Bunun yanında öğretmen adayları bu kavramın farklı yönlerini de vurgulamışlardır. Örneğin Serkan, fonksiyonların cebirsel yönünü vurgulamış ve

fonksiyonu “bir kümenin elemanlarını belli bir kurala göre başka bir kümeye götüren bağıntı” olarak tanımlamıştır:

Serkan: Bir fonksiyon belli bir kümenin elemanlarına, başka bir kümeye belli bir kurala göre götüren işlem diyeyim. ... bağımsız değişkenin durumuna göre bağımlı değişken.

Başka iki öğretmen adayı (Bekir ve Ayşe) fonksiyon kavramının işlevsel yönünden bahsetmişler ve bunu “bir şeyi başka bir şeye götüren başka farklı bir şeye götüren aracıya fonksiyon denir” ve “verilen değerlerle o değerleri değiştiren şey” şeklinde ifade etmişlerdir. Bu ifadeler, Bekir ve Ayşe’nin fonksiyonun girdi-çıkı tanımina (Hitt, 1998) ağırlık verdiklerini ve fonksiyonun illa girdi üzerinde değişiklik yapması gerektiği yanılgısına sahip olduklarını göstermektedir. Hitt (1998) yaptığı çalışmada öğretmen adaylarının fonksiyon kavramının kural temelli yorumuna sahip olduklarını ve bu yoruma bağlı olarak öğretmen adaylarının sabit fonksiyonun fonksiyon olduğunu reddetmeye güçlü bir eğilimleri olduğunu ortaya koymuştur (Meel, 1995).

Vinner ve Dreyfus (1989) tarafından yapılan bir çalışmada öğretmen adaylarına fonksiyon teriminin tanımı sorulmuş, cevaplar 6 kategoride toplanmıştır:

- 1- Formal Dirichlet-Bourbaki tanımı
- 2- İki değişken arasındaki birbirine bağlı ilişki (y’nin x’e bağlı olması)
- 3- Belli bir düzen gerektiren bir kural
- 4- Bir işlem ya da süreç
- 5- Bir formül, cebirsel ifade ya da eşitlik
- 6- Anlamsız grafiksel ya da sembolik bir gösterim

Vinner ve Dreyfus’un (1989) çalışmasında oluşan kategorilerden 1., 3., 4. ve 5. kategoriler bu çalışmadaki kategorilerle uyum göstermektedir. Hatta Serkan’ın verdiği cevap 3. ve 5. kategorileri birlikte içermektedir.

Tablo 4.2: Soru 2'ye verilen cevaplara ait kategori

Soru 2: Bu kavramla ilgili günlük hayattan örnekler verir misiniz?	
Fonksiyon olma şartına odaklanmış örnekler	... mesela anne ve çocuklar arasındaki ilişki. Çünkü her annenin birden fazla çocuğu olabilir ve her çocuğun bir annesi vardır. Burada eğer çocukları tanım kümesi anneyi değer kümesi yaparsak her çocuğun mutlaka bir annesi vardır annesiz çocuk yoktur. Aynı annenin iki çocuğu olabilir yani tanım kümesindeki her eleman aynı anneye gidebilir. <i>Gül</i>
	5 kişi olsun ... işte herkes işte bir çikolata alacak yani çikolata almayan kalmayacak sonra bir kişi birden fazla çikolata almayacak. <i>Elif</i>
	Herkesin bir doğduğu yer vardır, memleketi vardır ve her insan mutlaka bir yerde doğmak zorundadır. Bunun tanım ve değer kümesini belirlediğimiz zaman şu karşımıza çıkabilir o da işte memleketlerimiz değer kümelerimizse insanlar da tanım kümesi ise herkesin mutlaka bir yerde kütüğü olmak zorunda ama bir memlekette doğan birden çok kişi olabilir ve bir kişi de aynı anda iki yerde doğmuş olamaz. <i>Arda</i>
	İşte postacı vardı, mektupları dağıtıyordu falan öyle bir örnek geliyor aklıma. <i>Ayşe</i>
	Tanım kümesini çocuklardan oluşan kümeye, görüntü kümesini de evlerden oluşan kümeye benzetecek olursak her bir çocuğun bir evi olmalı, yani sokakta çocuk kalmamalı veya da bir çocuk zaten iki evde bulunamaz. <i>Ali</i>
Günlük hayatla fonksiyonu bağdaştıran örnekler (günlük hayattan örnekler)	Fabrika örneği! Fabrikaya bir şey geliyor sonra mesela bilgisayar olarak çıkıyor, ekmeklerin poşetlenmesi yani bir şeyin içerisine giriyor; makinanın içerisine ekmek giriyor, poşetlenip poşetli olarak çıkıyor. Buradaki fonksiyon mesela poşetlere koyma fonksiyonu olabilir. <i>Bekir</i>
	Mesela bu şeyler var bisküvi işte; o diğer şeylerin çikolata mesela, ne kadar para atıyorsanız bir fonksiyon makinesi de diyebiliriz belki. Yani oradaki fonksiyon komutuna göre size bir yani f(250 000 lira) atıyorum da eşittir çikolata gibisinden. <i>Ali</i>
	Girdiler, çıktılar, arz talep mesela bunlar birer fonksiyondur. İşte ne bileyim arz arttıkça fiyat yükseliyor veya talep arttıkça fiyat yükseliyor öyle diyebiliriz. <i>Serkan</i>

Tablo 2'de öğretmen adaylarının fonksiyon kavramına günlük hayattan verdikleri örnekler gösterilmiştir. Öğretmen adaylarının bu soruya verdiği cevaplara genel olarak bakıldığında; fonksiyon kavramına günlük hayattan örnekler vermede sıkıntı çektikleri; sadece iki öğretmen adayının iki farklı örnek verebildiği, iki öğretmen adayının ise tam bir örnek veremedikleri, diğerlerinin de birer örnek verdikleri görülmüştür. Bu ise öğretmen adaylarının matematikle günlük hayatı bağdaştırmada güçlük çektiklerini göstermektedir. Davidenko (1997), insanların

günlük hayatta farkında olmasalar da cebirsel düşünceyi, değişken ve fonksiyon kavramlarını her zaman kullandıklarını bu yüzden öğrencilere fonksiyon kavramı ilk tanıtılırken matematiksel tanımını vermek yerine onların kendi düşüncelerini / tecrübelerini yansıtacak ve bu düşüncelerin / tecrübelerin üzerine inşa edilecek bir girişin yapılması gerektiğini ifade eder. Bu şekilde hem öğrencilerin bu kavramla ilgili zorluk yaşamayacaklarını hem de günlük hayatla daha iyi bağdaştıracaklarını iddia etmektedir.

Kategorilere ayrı ayrı bakıldığında; ilk kategoride soru 1’de fonksiyon kavramına bağıntı gözüyle bakan ve fonksiyon olma şartını vurgulayan öğretmen adaylarından beşi yine fonksiyon olma şartını vurgulayan ya da modelleyen örnekler verdikleri bunun dışında başka bir örnek veremedikleri görülmüştür:

Gül: Mesela anne ve çocuklar arasındaki ilişki.

Arda: Herkesin bir doğdu yer vardır, memleketi vardır ve her insan bir yerde doğmak zorundadır.

Ali: Tanım kümesini çocuklardan oluşan bir kümeye, görüntü kümesini de evlerden oluşan bir kümeye benzetecek olursak ...

Ayşe: Postacı vardı mektupları dağıtıyordu ...

Elif: İşte herkes bir çikolata alacak, çikolata almayan kalmayacak. Sonra bir kişi birden fazla çikolata almayacak.

Fonksiyon kavramına “cebirsel işlem ya da bağımlı bağımsız değişken arasındaki kural” gözüyle bakan Serkan’ın verdiği örnekler ise yine bağımlı-bağımsız değişken ilişkisine yönelik örneklerdir:

Serkan: Arz talep mesela arz arttıkça fiyat yükseliyor. Binalar mesela yükseldikçe fiyat artıyor.

Yine Soru 1’de fonksiyona “bir araç” diyen Bekir, bu soruya fabrika örneği vermiştir.

Soru 1 ve Soru 2'ye genel olarak bakıldığında öğretmen adaylarının verdikleri cevapların paralellik gösterdikleri ve fonksiyon ile ilgili sahip oldukları kavram imajlarıyla verdikleri örneklerin uyumlu olduğu görülmüştür.

Tablo 4.3.1: Soru 3'e verilen cevaplara ait kategori

Soru 3: Bir fonksiyonun grafiğini neden çizeriz?	
Fonksiyonu görsel olarak ifade etmek ve daha anlaşılır kılmak için	... grafik görsellik bakımından, yani öğrencilere işte gösterdiğin zaman işte anlamayabilir ama grafiğini çizdiğimiz zaman kafalarında iyi bir yer edermiş gibi geliyor. <i>Ayşe</i>
	... şekilde görmek için ... yani görsel olarak görmek için olabilir. <i>Bekir</i>
Fonksiyonun davranışını, gidişatını daha rahat görmek için	... hani nasıl diyeyim artıyor mu azalıyor mu? Grafiğin daha çok genel görüntüsünü çizmek için olabilir yani. <i>Elif</i>
	Fonksiyonun nasıl hareket ettiğini görebilmek için ... fonksiyonun gidişatını, hareketini belirlemek için grafiği kullanmak zorundayız. <i>Serkan</i>
	O fonksiyonu daha geniş görebilmek için ... fonksiyonu zaten sayılarla belirlediğimiz için grafiğini çizdiğimiz zaman onun nasıl bir şekil alabileceğini, nasıl devam edeceğini en azından kestirebiliyoruz. <i>Arda</i>
Verilen bir değer görüntüsünü daha kolay bulmak için	Mesela reel sayılarda tanımlı bir fonksiyon; diyelim ki $y=x$. Biz onun grafiğini çizdik. 1 için, 2 için, 3 için, 5 için bilebiliriz ama bunu işte sonsuz sayıdaki davranışını bilemediğim için grafiği, onu görmek için çizeriz. Belki 100'deki 1000'deki değerini daha rahat bulmak için. <i>Gül</i>
	Belki x e karşılık $f(x)$ 'i daha iyi görebilmemiz için. <i>Ali</i>
Günlük hayatta ihtiyaç olduğu için	Kağıt üzerinde alan hesabı falan yapıyoruz. ... Belli cisimlerin grafiğini çizerken hacim hesapları falan kullanıyoruz. Günlük hayatta ihtiyacımız oluyordur herhalde şeyde mühendislikte falan ... Sonuçta doğada olan bir şey... yani günlük hayatta ihtiyaç olduğu içindir herhalde. <i>Elif</i>
Sınavda sorulur	Sınavda sorulur; ondan dolayı, sınavda sorulduğu için çizeriz. <i>Bekir</i>

Tablo 3'te öğretmen adaylarının "Bir fonksiyonun grafiğini neden çizeriz?" sorusuna verdikleri cevaplar kategorize edilmiştir. Öğretmen adaylarının hemen hepsi (7 öğretmen adayının 6'sı) grafiğin, fonksiyonu görselleştirmek ve fonksiyonun nasıl hareket edeceğini daha iyi kestirebilmek için çizildiğini söylemişlerdir.

Bu öğretmen adaylarından ikisi (Elif ve Bekir) önce, "grafiği, fonksiyonun tanım ve değer kümesini görmek için çizeriz" demişler ancak bir fonksiyonun grafiğinin tanım ve değer kümesi bilinmeden çizilemeyeceğine karar verdikleri için bundan vazgeçmişlerdir:

Elif: Hani nereden tanımlanıp nereden gittiğini; hani nereye gittiğini biliyoruz fonksiyonu çizerken ...

Bekir: Tanım kümesini değer kümesini görmek için desek olmaz herhalde tanım kümesine göre çizeceğiz.

Diğer öğretmen adayları ise grafiğin bu yararına (tanım ve değer kümesini resmetmesi) hiç değinmemişlerdir.

Elif, diğerlerinden farklı olarak grafiğin çizilme nedenini günlük hayat problemleriyle bağdaştırarak alan ve hacim hesaplarına bağlamıştır:

Elif: ... yani belli cisimlerin grafiğini çizerken hacim hesapları kullanıyoruz günlük hayatta ihtiyacımız oluyordur herhalde ...

Ayşe ise grafiğin, öğrencilerin fonksiyonu anlamasına yardımcı olacağını ifade etmiş ve grafiği çizilen bir fonksiyonun öğrencilerin kafasında daha iyi yer edeceğini söylemiştir:

Ayşe: ... grafiğini çizdiğimiz zaman kafalarında iyi bir yer edermiş gibi geliyor.

Gül ve Ali ise grafikten bilgi okumayı, grafiğin çizilme nedeni olarak göstermişler ancak buna sadece verilen bir x değeri için $f(x)$ değerini bulma örneği verebilmişlerdir:

Gül: ... belki 100'deki, 1000'deki değerini daha rahat bulmak için ...

Ali: Belki x e karşılık $f(x)$ i daha iyi görebilmemiz için ...

Bekir, ayrıca grafiğin çizilme nedeni olarak sınavda sorulmasını sebep göstermiştir.

Öğretmen adaylarının cevaplarına genel olarak bakıldığında grafiğin kullanım alanlarına ya da sağladığı avantajlara pek fazla farklı örnek veremedikleri görülmüştür. Dyke (2003), öğrencilerin grafikleri yok saydığını ve bilgiyi grafikten okumaktansa karışık cebirsel ifadelere başvurmayı tercih ettiklerini belirtmektedir. Halbuki öğrenciler için bir fonksiyonun grafiksel formu ile çalışmak cebirsel forma

göre daha kolaydır. Çünkü fonksiyonun görsel doğasına izin vermiş ve tanım ve değer kümesini beraberinde sunmuştur (Thangata, 2003).

3. sorunun devamında öğretmen adaylarına, “grafik günlük hayatta ne için kullanılır?” sorusu sorulduğunda, iki öğretmen adayı (Ayşe ve Serkan) grafiğin günlük hayatta çizilme sebebinin; matematikte olduğu gibi görsel olarak ifade etmek, fonksiyonun nasıl hareket ettiğini görmek ve daha anlaşılır kılmak olduğunu söylemişlerdir:

Ayşe: Günlük hayatta yine aynı şey için çizeriz yani daha iyi bir yer edebilmesi için öğrencilerin kafalarında ...

Serkan: Eğer bir fonksiyonu tanımladıysak günlük hayatta ihtiyacımız olan onun yine gidişatını belirlemek için yine grafik kullanmak zorundayız.

Tablo 4.3.2: Soru 3’ün devamına verilen cevaplara ait kategori

Soru 3’ün devamı: Grafik günlük hayatta ne için kullanılır?	
Matematik dersinden esinlenerek verilen örnekler	Mesela parabol! Her yerde yani çok fazla örnek var parabol için. O tarz bir şey mi ? <i>Ayşe</i>
	Türevin, integralin ve fonksiyonun grafiğinden yola çıkarak türevde integralde bir çok şey tanımlanıyor. Bu da işte gün mühendislikte falan uygulaması vardır herhalde daha doğrusu var. <i>Gül</i>
	Eğime bağlı bir şey gelir mi gelmez mi? <i>Bekir</i>
	Kağıt üzerinde alan hesabı falan yapıyoruz. ... cisimlerin grafiğini çizerken hacim hesapları kullanırız . Günlük hayatta ihtiyacımız oluyordur herhalde. <i>Elif</i>
Günlük hayattan esinlenerek verilen örnekler	Genelde coğrafyada çok kullanılıyor ama işte buğday üretimi şu üretimi bu üretimi nüfus dağılımı falan. <i>Serkan</i>
	Mesela fonksiyon grafikleri ekonomide arz talep doğrultusudur veya marjinal tüketim eğrisidir. <i>Arda</i>
	Tıpta mesela şey var o kalp şeyi. Kalp atışı o makinada fonksiyon olarak düşünülecek olursak. <i>Ali</i>

Sadece üç öğretmen adayı (Ali, Serkan, Arda) grafiğin günlük hayatta kullanımına dair örnekler verebilmişlerdir.

7 öğretmen adayından 4’ü grafiğin günlük hayatta kullanımına dair örnekler verememişlerdir. Daha doğrusu örnekleri matematik dersi çerçevesinde kalmıştır. “Grafiği neden çizeriz? ” sorusuna “ sınavda sorulduğu için ” şeklinde cevap veren

Bekir ise bu soruya hiç örnek verememiştir. Verilen cevaplara genel olarak bakıldığında öğretmen adaylarının bu konuyu yine günlük hayatla bağdaştırmakta sıkıntı çektikleri görülmüştür.

Tablo 4.4: Soru 4'e verilen cevaplara ait kategori

Soru 4: Grafiği verilen bir bağıntının fonksiyon olup olmadığını nasıl anlarsınız?	
Fonksiyon olma şartlarını grafik üzerinde test ederek	y eksenine paralel doğrular çizdiğimiz zaman ... bu doğrulardan en az bir tanesi (grafiği) iki noktada kesiyorsa o zaman fonksiyon değildir. <i>Arda</i>
	Mesela işte x eksenindeki bir eleman, y ekseninde birden çok elemana gidiyor (bu durumda) fonksiyon değildir. <i>Elif</i>
	Deminki dediğim özelliklere bakarak yani tanım kümesindeki bir değer iki tane elemana gittiye fonksiyon değil deriz. Yine aynı şekilde işte tanım kümesinde boşta eleman kaldıysa deriz ki fonksiyon değil. <i>Ayşe</i>
	Grafik üzerinde fonksiyonun tanımına gidersek işte demiştik ki tanım kümesinde açıkta eleman kalmayacak, tanım kümesindeki bir eleman değer kümesindeki birden fazla elemanla eşleşmeyecek demiştik. y eksenine paralel çekiliyor, eğer iki noktada keserse bu fonksiyon değildir. <i>Serkan</i>
	Grafiğe bir dikme çizerim, grafiğe ulaşırım, eğer o noktanın grafikte eşlendiği bir tek nokta varsa o zaman o fonksiyondur ama iki nokta varsa o fonksiyon değildir. Ya da yine bir x seçerim, grafiğe ulaşırım. Mesela orada grafik atlanmıştı boştur tanımsızdır. Eğer o nokta tanım kümesinde ise fonksiyon değildir. Tanım kümesinde değilse fonksiyondur. <i>Gül</i>
	y'ye paralel çizdiğimiz zaman bir tane x'e karşılık iki tane y değeri gelmemesi lazım. Bir de ne olacaktı açıkta x elemanı kalmayacaktı. <i>Ali</i>
	x eksenine dikler çizeriz. Eğer tek noktada kesiyorsa fonksiyondur, değilse değildir. <i>Bekir</i>

Bu soruyu cevaplayan öğretmen adaylarının hepsi grafiği verilen bir bağıntının fonksiyon olup olmadığını anlamak için fonksiyon olma şartlarını grafik üzerinde kontrol etmeye çalışmışlardır. Bunun için ilk olarak y eksenine paraleller çizmişler ve bu paralellerden en az biri grafiği iki noktada kesiyorsa, bir elemanın iki görüntüsü olacağı için grafiğin fonksiyona ait bir grafik olamayacağını söylemişlerdir.

Ayrıca açıkta eleman kalıp kalmadığını da kontrol etmek gerektiğini bunun için ise mutlaka fonksiyonun tanım ve değer kümesinin verilmiş olması gerektiğini vurgulamışlardır:

Arda: O zaman şu lazım bize tanım ve değer kümelerimizin verilmiş olması lazım eğer tanım kümemizden o nokta çıkarılmışsa yine fonksiyondur.

Elif: Tanım kümesinin her elemanı tanımlı olacak ...

Ayşe: Yine aynı şekilde tanım kümesine boşta eleman kaldıysa o zaman deriz ki bu fonksiyon değil.

Serkan: Grafikte boşluklar varsa şimdi ilk önce tanım kümesi nasıl bize verilmiş ona bakmamız lazım.

Gül: Ya da yine bir x seçerim grafiği ulaşırim. Mesela orada grafik atlanmıştır boştur tanımsızdır. Mesela o nokta için eğer o nokta tanım kümesindeyse fonksiyon değildir. Tanım kümesinde değilse fonksiyondur.

Ali: Bir de ne olacaktı? Açıkta x elemanı kalmayacaktır.

Eğer fonksiyon bir noktada süreksiz ya da tanımsız ise bu grafiğin fonksiyon belirtip belirtmediğini söylemek için tanım kümesine bakmak gerektiğini söylemişlerdir. Sadece bir öğretmen adayı eğer fonksiyonun grafiği bir noktada sürekli değilse o noktada fonksiyonun tanımsız olduğunu, tanım kümesini sorgulamadan söylemiştir:

Bekir: Orada tanımlı değildir diyebiliriz. Fonksiyon olabilir ama her noktada tanımlı olması gerekiyor muydu? Fonksiyonun; yok gerekmiyor şey fonksiyon olabilir ama o noktada tanımsızdır.

4. sorunun ikinci kısmında öğretmen adaylarına yatay ve düşey doğru testlerinin arkasında yatan sebepler sorulmuştur. Öğretmen adaylarının hemen hemen hepsi yatay ve düşey doğru testlerini aşağı yukarı tarif etmişler ve ne için kullanıldığını söyleyebilmişlerdir. Yatay doğru testinde bütün öğretmen adayları bunun 1-1 liği kontrol ettiğini belirtmiş ancak üç öğretmen adayı örtenliği de bu testle kontrol etmeye çalışmışlardır:

Gül: Fonksiyon örten de olabilir içine doğru yani şurada mesela bu doğru her yerde kesiyorsa o da örten oluyor.

Elif: ... örtenlik için zaten birebir değil ise bu şekilde zaten örten de olmaz... örtenliği tam anlayamadım yani.

Bekir: Yatay o da birebir ve örtenliği hakkında bilgi veriyordu galiba. Örtenlik hakkında daha doğrusu.

Tablo 4.5: Soru 5'e verilen cevaplara ait kategori

Soru 5: Bir fonksiyonun tanım ve değer kümesini onun grafiğini çizmeden nasıl bulursunuz?		
Tanım ve değer kümesi verilmeden fonksiyon verilemez	... fonksiyonu tanımlı yapan değerler zaten tanım kümesinde olması lazım. Tanımsız yapan değer tanım kümesinde ... olmaması lazım zaten. <i>Elif</i>	
Tanımsız olduğu noktaları çıkarırım	ve tanım kümesini istediğim gibi seçerim	... tanım kümesini istediğimiz gibi seçebiliriz ya. Eğer yani şeyse fonksiyonu tanımsız yapmıyorsa istediğimiz gibi seçebiliriz .Yani mesela paydayı sıfır yapacak bir değer yoksa. <i>Bekir</i>
	ve en geniş tanım aralığını seçerim	... bize bir fonksiyon verildiği zaman onun öncelikle tanımsız olduğu noktaları , tanım kümesinden çıkardığımız zaman diğer yerlerde tanımlı olacaktır. <i>Öğretmen adayı 6</i>
		... rasyonel ifade içeriyorsa o zaman diyeceğiz ki işte payda sıfır olamaz. Hangi noktalarda tanımsız hangi noktalarda tanımlanabilir onlara dikkat ediyoruz. <i>Ayşe</i>
Grafiği verilmeden tanım kümesini kesin olarak bulamayız	... tanım kümesi bulunmaz gibi bana göre. Çünkü fonksiyon yani eğer grafiği verilirse bulunur da sadece fonksiyon verilirse yani kesin bir şey söyleyemeyiz. ... ama şimdi şöyle bir şey var tanım kümesini kısıtlayabiliriz de. Biz böyle aldık ama mesela bir A kümesi tanımlanır, elemanlar bunun içerisinde seçilebilir. <i>Serkan</i>	
	Tanım kümesi verilmezse ikisinden birinin verilmesi lazım. Lazım mı? $f(x)$ 'e $x-2$ ise x nedir $f(x)+2$ dir. ... hiçbir şey verilmiyor tanım ve değer kümesini bulacağız öyle mi hocam? ... kendimiz bir şeyler üretebilir miyiz acaba? Doğal sayı mesela doğal sayılar için desek? <i>Ali</i>	
Öğrencilerin çalıştığı en geniş tanım aralığına göre belirlerim	Eğer lisedeki öğrenci, lisedeki öğrencilerin bildiği en geniş tanım kümesi reel sayılar kümesidir. Onun tanım kümesini R olarak kabul ederim. Sonra fonksiyonunun türüne bakarım. Fonksiyonun tanımsız olduğu noktalar var mı? Ondan sonra o noktaları tanım kümesinden çıkarırım. <i>Gül</i>	

5. soruya öğretmen adaylarının verdiği cevaplara genel olarak bakıldığında öğretmen adaylarından biri hariç hepsi bir fonksiyonun tanım ve değer kümesini bulurken fonksiyonu tanımsız yapan noktaları çıkarmaktan bahsetmişlerdir:

Ayşe: Tanımsız olup olmadığına dikkat ediyoruz.

Arda: Tanımsız olduğu noktaları tanım kümesinden çıkardığımız zaman diğer yerlerde tanımlı olacaktır.

Serkan: En geniş tanım kümesinde bir defa bir belirsizlik olmaması lazım.

Gül: Fonksiyonun tanımsız olduğu noktalar var mı? Ondan sonra o noktaları tanım kümesinden çıkartırım.

Ali: Mesela $\frac{1}{x-2}$ dediğimiz zaman da x 'in farklı 2 olması lazım.

Bekir: ... tanımsız olduğu noktaları çıkarmamız lazım.

“Fonksiyonun tanım kümesini bulurken tanımsız olduğu noktaları çıkarırım” diyen bu öğretmen adayları tanımsız olabilecek noktaları rasyonel ifadelerin paydasını sıfır yapan değerlerde ve karekökün (ya da çift dereceli köklü ifadelerin) içini negatif yapan değerlerde aramışlardır:

Ayşe: Rasyonel ifade içeriyorsa o zaman diyeceğiz ki işte payda sıfır olamaz.

Serkan: Yani paydanın sıfırdan farklı olması lazım ... köklülerde derecesi çift ise içi negatif olamaz çünkü iki sayının çarpımı negatif olamayacağına göre.

Gül: Rasyonel fonksiyon ise paydayı 0 yapan değer var mı? Ya da köklü bir ifade ise işte içerisi pozitif mi negatif mi?

Ali: Mesela şurada $\sqrt{x-2}$ ya, $x-2$ nin büyük eşit sıfır olması lazım ... şey var mesela $\frac{1}{x-2}$ dediğimiz zaman da x 'in farklı 2 olması lazım.

Bekir: Paydayı sıfır yapan değer birincisi bunlar. Başka bir içerisinde negatif yapan bir değer eğer varsa tabi o da tanımsız olur.

Tanımsız olan noktalarda aşağı yukarı hemfikir olan öğretmen adayları tanım kümelerini belirlerken farklı fikirler öne sürmüşlerdir. Örneğin “*tanımsız olduğu noktaları çıkarırım*” diyen Bekir, sonrasında tanım kümesini istediği gibi seçebileceğini söylemiştir.

Yine aynı şekilde “*tanımsız olduğu noktaları çıkarırım*” şeklinde cevap veren Arda ve Ayşe, bu noktaları çıkardıktan sonra en geniş tanım aralığını tanım kümesi olarak seçeceklerini ifade etmişlerdir.

Gül ise soruya farklı bir bakış açısından yaklaşmış ve bu konuyu anlatacağı- çalışacağı öğrencilere göre tanım kümesini belirleyeceğini belirtmiştir. Bu

öğrencilerin genelde lise öğrencisi olabileceğini ve bundan dolayı tanım kümesini en geniş reel sayılar alıp tanımsız olduğu noktaları çıkaracağını söylemiştir.

Serkan ve Ali ise bu soruya daha farklı cevap vererek, kendilerine fonksiyonun grafiği ya da tanım veya değer kümesinden biri verilmeden tanım ve değer kümesini net olarak söyleyemeyeceklerini belirtmişlerdir. Onlara göre tanımsız olduğu noktalar çıkarıldıktan sonra tanım kümesi istenildiği gibi kısıtlanmış veya tanım kümesi olarak özel bir küme seçilmiş olabilir.

Ancak bu öğretmen adayları tanım kümesini genel olarak belirleyebileceklerini, bunun için de en geniş tanım aralığını bulmaya çalışacaklarını söylemişlerdir. Fakat yine de en geniş tanım aralığını bulsalar bile tanım kümesinin bundan farklı olabileceği söylemişlerdir.

Yukarıda fikirlerine yer verilen bu öğretmen adayları aslında aynı çıkış noktasından başlamışlar (fonksiyonun tanımsız olduğu noktaları çıkarmaktan başlamışlar) ancak daha sonra tanım ve değer kümeleri ile ilgili farklı uygulamaların etkisiyle (mesela zihinlerinde $f:A \rightarrow B$, $f(x)=x+3$ şeklinde tanımlanmış olan bir fonksiyon düşüncesiyle) tanım ve değer kümeleri için farklı fikirler öne sürmüş olabilirler.

Elif ise bütün bu öğretmen adaylarından farklı olarak tanım ve değer kümesi verilmeden fonksiyonun verilemeyeceğini ifade etmiştir. Bunu, verilen bir bağıntının fonksiyon olup olmadığını kontrol etmek için tanım ve değer kümesinin verilmesi gerektiğini düşündüğü için söylemiş olabilir. Yahut fonksiyon olma şartından dolayı zaten “*tanım kümesi, fonksiyonu tanımsız yapan noktaları içeremez*” şeklinde de düşünmüş olabilir:

Elif: ... tanım kümesine göre zaten fonksiyon ... fonksiyonu tanımlı yapan değerler zaten tanım kümesinde olması lazım. Tanımsız yapan değerler tanım kümesinde yoksa? Olmaması lazım zaten.

Tanım kümesini belirttikleri şekilde bulduktan sonra öğretmen adayları değer kümesini, buldukları tanım kümesine göre belirleyeceklerini söylemişlerdir:

Serkan: Tanım kümesi verilmişse değer kümesini bulmamız kolay çünkü noktaları eşleştiririz.

Bekir: Değer kümesini de buna göre buluyoruz yani tanım kümesine ...

Bu soruya verilen cevaplara genel olarak bakıldığında öğretmen adayları başarılı cevaplar vermişlerdir.

Tablo 4.6: Soru 6'ya verilen cevaplara ait kategori

Soru 6: Eğer bir fonksiyon paydası sıfır olmayacak şekilde tekrar düzenlenebiliyorsa neden hala orijinal fonksiyon o noktada tanımsız olarak ele alınıyor? Mesela $f(x) = \frac{x(x-1)}{x-1}$ fonksiyonu $f(x)=x$ olarak tekrar düzenlenebiliyorsa neden hala 1 noktasında tanımsızdır deniyor?	
Çünkü belirsizlik durumunda sadeleştirme yapamayız	Şimdi mesela orada $(x-1)$ ler gidiyor ama sıfır durumunda $(x-1)$ leri götüremeyiz. Çünkü $\frac{0}{0}$ belirsizliği var. Onun için orda yani $x=1$ için sadeleştirmeyi yapamayız. <i>Arda</i>
	$\frac{x-1}{x-1}$, burada sıfırdan farklıysa sadeleştirme yaparız eğer sıfır olursa $\frac{0}{0}$ ki bu da bir belirsizlik ... payda sadeleştirmeyi sıfırdan farklı değerler için yapabiliyoruz. <i>Serkan</i>
Fonksiyonun orijinalini bozamayız	Çünkü ilk baştaki orijinal şey geçerli değil mi fonksiyonda ? Yani eğer fonksiyonun orijinali buysa biz bunu bozamayız ki! <i>Ayşe</i>
	Önemli olan o fonksiyonun ilk kısmı. Biz onu tamam sadeleştirebiliriz $f(x)=x$ diyebiliriz. Ama oradaki $f(x)=x$ fonksiyonu ile bizim ifade ettiğimiz rasyonel fonksiyon aslında aynı fonksiyon değil. O yine paydasında $x-1$ olan $x=1$ de tanımsız olan fonksiyondur. Ama $f(x)=x$ fonksiyonu reel sayılar kümesinin hepsinde tanımlıdır. <i>Gül</i>
Sadeleştirmeden önceki fonksiyon ile sadeleştirme yaparak elde ettiğimiz fonksiyon, paydayı 0 yapan değer için farklı değerler aldığı için sadeleştiremeyiz	$f(x)=x$ denildiğinde demeyiz $x=1$ noktasında tanımsız . Şimdi değerinde bile farklılık oluyor. Mesela $f(x)=x$ 'de 1 oluyor ama $f(x)=\frac{x^2-x}{x-1}$ 'de yani $\frac{0}{0}$ gibi bir şey oluyor ... 1 noktasında farklı değerler aldığı için sadeleştiremeyiz. <i>Elif</i>
Böyle bir sadeleştirme yapılır ve fonksiyon $x=1$ için tanımlıdır	Sadeleşip sadeleşmediğine bakarız hocam. Yani en sade biçimde ifade ederiz. ... yani $f(x)=x$ olarak alabiliriz. Tanım kümeleri de aynı olur. ... En sade biçimde yazmak lazım. <i>Ali</i>
	... tanımsızlık kaldırılmış oluyor orada galiba ... mesela $\frac{x^2+5x-6}{x-3}$ mesela bu fonksiyon $x=3$ 'te tanımsızdır ama burada sadeleştirme yapıldıktan sonra $x+2$ kalıyor. Şu durumda şu fonksiyon tanımlıdır. <i>Bekir</i>

Yukarıdaki tabloda öğretmen adaylarının 6. soruya verdikleri cevaplar kategorize edilmeye çalışılmıştır. Öğretmen adaylarının çoğunluğu böyle bir sadeleştirmenin olamayacağı konusunda hem fıkirdir. Ancak sebep olarak farklı gerekçeler sunmuşlardır. Arda ve Serkan paydayı sıfır yapan değer için sadeleştirmenin yapılamayacağını, çünkü bu değer için, $\frac{0}{0}$ belirsizliğinin oluştuğunu ve belirsizlik durumunda sadeleştirmenin gerçekleştirilemeyeceğini söylemişlerdir. Sadeleştirme onlara göre paydayı sıfır yapan değer ya da değerler haricinde yapılabilir.

Ayşe ve Gül ise böyle bir sadeleştirmenin ya da düzenlemenin fonksiyonun orijinalinin bozulmaması gerektiği için yapılamayacağını belirtmişlerdir:

Ayşe önce bu sadeleştirmenin yapılabileceğini söylemiş ancak daha sonra tanım kümesinden paydayı 0 yapan 1 noktası çıkarılsa bile bu fonksiyonun $f(x)=x$ olarak alınamayacağını söylemiştir:

Ayşe: $R-\{1\}$ de tanımlı $f(x)=x$ fonksiyonu çok garip bir şey oldu. O zaman biz bunun orijinalini bozamayız yani bence sadeleştirmeyiz onları.

Elif ise örnekte verilen $f(x) = \frac{x^2 - x}{x - 1}$ fonksiyonu ile sadeleştirmeden sonraki $f(x)=x$ fonksiyonunun birbirine eşit olmadığını çünkü $x=1$ için iki fonksiyonun farklı değerler aldığını ve bu yüzden sadeleştirmenin yapılamayacağını söylemiştir.

Ancak Elif gerekçesine bağlı olarak (Ayşe'nin aksine) paydayı sıfır yapan değer tanım kümesinden çıkarıldığı zaman bu sadeleştirmenin yapılabileceğini ve fonksiyonun $R-\{1\}$ de tanımlı $f(x)=x$ fonksiyonu olarak alınabileceğini söylemiştir:

Elif: Tanım kümesinden 1'i çıkaracağız.

Araştırmacı: 1'i çıkaracağız? $f(x)=x$ olarak alabiliriz o zaman?

Elif: Evet o zaman problem olmaz ... sorun çıkaran noktayı çıkardığımız zaman eşit olur herhalde. Diğer noktalarda problem olmaz.

Ali ve Bekir ise diğerlerinden farklı olarak böyle bir düzenlemenin yapılabileceğini söylemişlerdir. Bu öğretmen adayları eğer fonksiyon sadeleşebilecek ifadeler içeriyorsa sadeleştirilmesi gerektiğini ve böylece fonksiyonun paydayı sıfır yapan değerde tanımsız olmayacağını belirtmişlerdir:

Ali: Sadeleşip sadeleşmediğine bakarız hocam yani en sade biçimde ifade ederiz. ... 1'de ($x=1$ 'de) şu x parantezinde $\frac{x-1}{x-1}$ dediğimiz zaman bununla bu sadeleşiyor hocam işte x kalıyor $x=1$ için $f(x)$ nedir 1 olur.

Bekir: O zaman biz şey diyebiliriz; fonksiyonu her noktada tanımsız yapan değerler var diyebiliriz. Yani mesela şöyle diyebiliriz: Bu $x-3$ leri sadeleştirdik ya, şu fonksiyonun yanına ben $x-2$ ye $x-2$ derim. ($f(x)=x+2$ 'nin payını ve paydasını $(x-2)$ ile çarparak $f(x)=\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}$ elde ediyor). Bir de mesela 2 için de tanımsızdır derim. Şu durumda mesela $x=2$ için ... yani ondan dolayı şöyle diyebiliriz en sade haline bakmak lazım.

Bekir neden sadeleştirmek gerektiğini açıklarken yukarıda da belirttiği gibi eğer fonksiyonun en sade hale bakılmazsa, payını ve paydasını aynı ifadeyle çarparak fonksiyonu sonsuz noktada tanımsız yapabileceklerini bu yüzden en sade haline bakmak gerektiğini söylemiştir. Ali de en sade haline bakılması gerektiğini şöyle açıklamıştır:

Ali: ... en sade biçimde yazmamız lazım ... niçin diyeceksiniz? Hayattan bir örnek vereyim: (düşünüyor) şimdi aklıma gelmiyor ama kompleks şey en sade biçimde ... Mesela, $\frac{8}{10}$ ama bu nedir? $\frac{4}{5}$ belki asal hani ... yani biz asal polinomu bulmaya çalışıyoruz.

Ali, payda sıfırken bu sadeleştirmeyi nasıl yapacağı sorulduğunda ise “Ama sadeleştirmeden önce söylüyorsunuz, yani $\frac{8}{10}$ 'u işleme katıyoruz biz ama bize $\frac{4}{5}$ lazım mesela ...” demiş ve sadeleştirmeyi en başta yapacağı için böyle bir problemin olmayacağını söylemiştir.

Sonuç olarak Ali ve Bekir; ilk verilen fonksiyonun sadeleştirme yapıldıktan sonraki fonksiyonla aynı olduğunu söylemişlerdir. Bu iki öğretmen adayının verdikleri cevaplara ve gerekçelerine bakıldığında rasyonel ifadeli fonksiyonlar ile

ilgili “pay ve paydada sadeleşen ifadeler varsa sadeleştirilmesi gerektiği” gibi kavram yanlışlarına veya bilgi eksikliklerine sahip oldukları görülmektedir.

Tablo 4.7: Soru 7’ye verilen cevaplara ait kategori

Soru 7: x^x ’in tanım ve değer kümesi nedir?	
Tanım kümesi: $\mathbb{Z} - \{0\}$ Değer kümesi: $\mathbb{Z} - \{0\}$	... sıfırda tanımsız bir kere ... Şurada sorun var; $-2^{\frac{1}{2}}$. Kök içinde -2 ama teklerde sorun yok var mı ki? Paydası çift ve negatif olanlarda sorun var ... fonksiyonu o zaman negatif reel sayılarda tanımlayamıyorum gibi. Tamsayılarda tanımlayım. ... $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$? Yok ben bunu tanımlayamadım. Hesaplayabilir miyim? Üslü ifadelerde burası doğal sayı diye hatırlıyorum. Niye doğal sayı? Tamsayı pardon. Yok ben bunu tanım... $\mathbb{R}^+$ ’da da tanımlayamadım. <i>Ayşe</i>
Tanım kümesi: $\mathbb{C} - \{0\}$ Değer kümesi: $\mathbb{C} - \{0\}$	$\mathbb{R} - \{0\}$ ’dan $\mathbb{R} - \{0\}$ ’a ... x negatif rasyonelse 0 ile -1 arasında ... o zaman kompleks bir değer çıkar. Reel sayılı cevabımız reel olmaz kompleks olur ... $\mathbb{C} - \{0\}$ ’dan $\mathbb{C} - \{0\}$ ’a olduğu o zaman? ... Ama şu $(a + bi)^{a+bi}$ böyle bir şey? <i>Arda</i> ... karmaşık sayı oluyorlar tanım ve değer kümesi karmaşık sayı çıktı. <i>Elif</i>
$\mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$	x^x ’in tanım kümesini en geniş reel sayılar olarak düşünelim: $x=0$ alı(n)ırsa 0^0 tanımsız. Tanım kümesinden 0’ı çıkartabilirim. Onun dışında tüm reel sayılar için ben x^x ’i bulabilirim. Tanım kümesi $\mathbb{R} - \{0\}$, değer kümesi $\mathbb{R}$ <i>Gül</i>
Tanım kümesi: $\mathbb{R} - \{0\}$ Değer Kümesi: $[-1, 0) \cup (0, \infty)$	Tanım kümesi, 0 hariç tüm sayılar için tanımlıdır. Değer kümesinde de yine sıfır olamaz ... Şöyle bir şey oluyor: Üssü negatif olunca negatif olarak aldığımızda hep 1 bölü bir şey gelecek. Ondan dolayı -1 ile sonsuz yani -1 ’den sonsuza kadar. <i>Bekir</i>
Tanım kümesinden tanımsız olan; payı tek paydası çift negatif rasyonel sayıları çıkarınız	... bunu köklü halde yazarsam buraya yine karekök geliyor ve derecesi 2 oluyor; $\left(\sqrt{\frac{2}{7}}\right)^7$. Bu durumda eğer şurası çift ise burayı pozitif yapar sorun çıkmaz eğer burası tekse yine bu ifade tanımsız olur. ... Şimdi $\mathbb{R}^+$ da tanımlarsak tanım kümesini kısıtlamış oluruz çünkü $\mathbb{R}^-$ ’de de sağlayan yerler var. Hem en geniş tanım kümesi diyoruz ya ! Q’dan, neyi çıkaracağız ki Q’dan $(2n-1)/a$ ları çıkarsak böyle ki n tamsayı ve a sıfırdan farklı olabilir mi böyle? <i>Serkan</i> $\mathbb{R}^-$ de problem var ... payda çiftken problem olur ... ya da şey mi desek $\mathbb{R}^+$ de $Q - \frac{1}{2}$. $Q - \frac{1}{2}$ ’ye takıldım ya nedir? $-\frac{n}{2k}$ mı desek ... <i>Ali</i>

Tablo 7’de öğretmen adaylarının 7. soruya verdikleri cevaplar kategorize edilmeye çalışılmıştır. Bu soruya öğretmen adaylarının verdiği cevaplara genel

olarak bakıldığında hiçbir öğretmen adayının cevabından emin olmadığı ya da net bir cevap vermediği görülmüştür. Öğretmen adayları soru sorulunca ilk olarak $x=0$ olamayacağını ve diğer noktalar için fonksiyonun tanımlı olacağını söylemişlerdir:

Ayşe: x^x ? Sıfırda tanımsız oluyor bir kere, sıfır gibi bir değerde alamıyor hiçbir zaman.

Araştırmacı: peki başka değerler için problem var mı? mesela x negatifken?

Ayşe: cık.

Arda: 0^0 tanımsız olduğu için sıfırı çıkarıyoruz diğer yerlerde? Negatif sayılarda -2 için -2^{-2} tanımlıdır herhalde ...

Serkan: İkisinden de sıfırı çıkardığımız zaman tanımlı oluyor ...

Elif: ... yine problem şeyde; belirsizlik 0^0 vardı değil mi?

Gül: Tanım kümesinden 0 'ı çıkartabilirim onun dışında bütün reel sayılar için ben x^x 'i bulabilirim.

Ali: ... bir şeyde herhalde $\frac{0}{0}$ da, 0^0 'da problem oluyor ...

Araştırmacı: ... yoktur problem diyorsunuz negatif sayılarda?

Ali: Problem yok.

Bekir: Tanım kümesi sıfır hariç tüm sayılar için tanımlıdır. Değer kümesinde de yine sıfır yoktur. Diğer tüm sayılar da vardır değer kümesinde.

Öğretmen adaylarının yukarıda zikredilen cevaplarına bakıldığında yüzeysel düşünme alışkanlığına sahip oldukları ya da başka bir ifadeyle derinlemesine düşünme alışkanlığına sahip olmadıkları söylenebilir. Yönlendirilme yapılarına kadar hepsi verdikleri cevaplardan emindi. Mesela bu öğretmen adaylarından Gül böyle bir yönlendirme olmadığı için tanım kümesini $\mathbb{R}-\{0\}$ olarak belirtmiş ve cevabını bu şekilde tamamlamıştır:

Gül: ... $x=0$ alırsam 0^0 tanımsız ve tanım kümesi $\mathbb{R}-\{0\}$, değer kümesi $\mathbb{R}$.

Ayşe, x^x fonksiyonunun hem negatif ve çift rasyonel sayılar için hem de irrasyonel sayılar için tanımsız olduğunu bunun için de fonksiyonu tamsayılardan tamsayılara tanımlayabileceğini söylemiştir:

Ayşe: ... $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$? Yok ben bunu tanımlayamadım. ... Tamsayı pardon.

Ayşe'nin bu cevabında; x pozitif irrasyonel bir sayı iken x^x değeri hakkında birşey hatırlamamasının rolü büyüktür.

Arda ve Elif ise; payı tek paydası çift olan negatif rasyonel sayıların tanımsız olması gerekçesiyle bu fonksiyonu kompleks sayılarda tanımlamaları gerektiğini söylemişler ve belki de işin kolayına kaçmışlardır :

Arda: O zaman kompleks bir değer çıkar. Reel sayılı cevabımız reel olmaz, kompleks olur

Elif: karmaşık sayı oluyorlar.

Ancak Arda karmaşık sayı cevabından da tam olarak emin olamamıştır:

Arda: ama şu $(a+bi)^{a+bi}$ böyle bir şey?

Bekir diğerlerinden farklı olarak değer kümesinin $[-1,0) \cup (0,\infty)$ olacağını bunun gerekçesi olarak da negatif sayıların üssü alındığında sonucun hep payı 1 olan bir rasyonel sayı çıkmasını söylemiştir:

Bekir: ... üssü negatif olunca, hep 1 bölü bir şey gelecek ya ondan dolayı -1 ile sonsuza.

Ancak daha sonra kendisine $-\frac{1}{2}$ için x^x 'in değeri sorulduğunda sonucun karmaşık sayı olduğunu söylemiş, i 'nin değerini hesaplamaya çalışmış ve verdiği cevaptan emin olamamıştır:

Bekir: Evet -2 'nin $\frac{1}{2}$ 'inci kuvvet oluyor de mi? $-\frac{1}{2}$ 'ydi herhalde. ... $\sqrt{-2}$ karmaşık sayı çıkıyor ... düşünüyorum da şimdi reel sayılar karmaşık sayıları kapsıyordu değil mi? ... yani bence; $R-\{0\}$ tanım kümesi, değer kümesinden de işte -1 'den ... sonuçta burada yani köklü bir sayı çıktığından dolayı nedir?... Vallahi matematikler hep kaçamak yol bulmuşlar. Bir şeye yani hiç bir şey bulamadıklarında ondan sonra i demişler ... i olarak? i rakamsal değer olarak birşeye denk geliyor mu? ... $R-\{0\}$ olsun öyle olsun bari ama ... inanmadan diyorum çünkü çok karışık şeyler var. Ya şimdi mesela i'nin karşılığını bilmiyorum şu anda ...

Bekir'in verdiği cevaba bakıldığında; reel sayılar kümesinin kompleks sayılar kümesini kapsadığı, i ifadesinin reel bir karşılığı olduğu gibi ciddi kavram yanılgılarına sahip olduğu görülmektedir. Zaten tanım kümesini de reel sayıların kompleks sayıları kapsadığına inandığı için $R-\{0\}$ olarak ifade etmiştir. Aslında $C-\{0\}$ 'ı kastetmektedir.

Ali ve Serkan ise tanım kümesinden tanımsız olan; payı tek paydası çift negatif rasyonel sayıları çıkarmaya çalışmışlar ancak bunu başaramamışlardır:

Serkan: $-\frac{2}{7}$? Şimdi aslında matematik düşüncelerini kâğıt üzerine dökemedir. Ben bunu sınıfta da söylemiştim. Şimdi nelerin olmadığını buluyorsun ama onu kâğıt üzerinde gösterilemiyorsun. İşte o da bir sorun şimdi. Q 'dan $-\frac{2}{7}$ 'yi... şimdi paydası tek olamaz onu nasıl söyleyeceğiz ki? Bundan sonra bir şey diyemeyeceğim çünkü çıkmıyor yani ... Negatif rasyonel sayılardan negatif tamsayıları çıkaracağız diyeyim o da olmayacak. ... onu da çıkaracağız onu da çıkaracağız, bunu ifade etmek? Yani şey olarak yazılı olarak biraz zor gerçi sözlü olarak da söyleyemiyoruz da ...

Ali: $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ bu nedir? Reel sayılarda tanımsızdır ... ya da şey mi desek R 'de $Q-\left\{\frac{1}{2}\right\}$, $Q-\left\{\frac{1}{2}\right\}$ 'ye takıldım ya nedir? ... $m/2k$ mı desek ...

Araştırmacı: tanımsız olduğu noktaları çıkarıyoruz?

Ali: çıkarıyoruz ... m/k ya da $-m$ olur. $m>0$ deriz o da olur ... k 'ıyı da? Z değil $k>0$ ($k \notin Z$ demek istiyor).

Ancak Ali tanımsız olan noktaları çıkarmaya çalışmadan önce bu noktaları fonksiyona hiç dahil etmeyecek şekilde yeni bir parçalı fonksiyon tanımlamaya çalışmıştır:

Ali: ... ya da en geniş tanım kümesini yazmaya çalışalım: Sıfır olamaz dedik. $f(x) \neq 0$, $x-1$ ise ya da $x=\frac{a}{b}$ gibi bir rasyonel sayıysa, $a<0$ ise $b \neq a$ şeklinde ifade edebiliriz. ... demek ki o zaman o şeyleri çıkaralım diyeceğim ama yine sonuçta bir şey tanımlamak lazım.

Bu soruya verilen cevaplara genel olarak bakıldığında öğretmen adaylarının başarısız olduğu ve tanım ve değer kümelerini belirlemede sıkıntı çektikleri görülmektedir. Hatta bu soruda bazı öğretmen adaylarının en geniş tanım aralığı olarak kompleks sayıları seçmeleri onların 5. soruda (“bir fonksiyonun tanım ve değer kümesini grafiğini çizmeden nasıl bulursunuz?” sorusunda) doğru olduğunu düşündüğümüz “*en geniş tanım aralığını bulmaya çalışırız*” (bu ifade ile reel sayılar kümesini kastettikleri sanılmıştı) cevapları konusunda bizi şüpheye düşürmüştür. Hitt (1998) yaptığı çalışmada öğretmen adaylarının, tanım ve değer kümesi ve kartezyen eksenlerde grafiksel gösterim gibi alt kavramları tanımlamakta zorluk çektiklerini ifade etmektedir. Yine aynı şekilde yapılan bazı çalışmalar öğretmen adaylarının tanım ve değer kümesi ile ilgili zorluklarını ortaya koymuştur. (Adams, 1997; Harrell, 2001; Markovits, Eylon ve Bruckheimer, 1998; akt: Thangata, 2003)

8. soruya öğretmen adaylarının verdikleri cevaplara genel olarak bakıldığında; hiçbir öğretmen adayının, x pozitif bir irrasyonel sayı iken x^x değerini tanımlayamadığı ya da hesaplayamadığı görülmüştür. 4 öğretmen adayı bu konu ile ilgili net bir bilgi hatırlamadıklarını ancak x^x değerinin farklı bir şekilde tanımlanmış olabileceğini söylemişlerdir:

Ayşe: Tanımsız demek de istemiyorum ama hiç $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ diye bir şey görmedim.

Arda: Tanımsız olabilir veya emin değilim ama veya değişik bir tanımı vardır. Üslü sayılardan farklı bir tanımı olabilir.

Elif: ... yok hatırlamıyorum ki ... logaritmayı kullanmıyor muyduk?

Ali: ... üniversite notlarını tekrar etmek lazım ...

Tablo 4.8: Soru 8'e verilen cevaplara ait kategori

Soru 8: x bir pozitif irrasyonel sayı iken x^x değeri için ne söyleyebilirsiniz? Nasıl tanımlar, nasıl hesaplanır?	
Bir şey söyleyemem	Bu değer için ben hiçbir şey söyleyemem ... irrasyonel değer veremiyorum, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ çünkü hesaplanamıyormuş gibi geliyor ... valla tanımsız mıdır? Tanımsız demek de istemiyorum ... ama hiç $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ diye bir şey görmedim. <i>Ayşe</i>
	Ya şimdi üslü sayıların kullanımında şu yapılıyor; üssümüz mesela 2^3 dediğimiz zaman 3 tane 2'nin çarpılması ama burada irrasyonel bir sayı? Tanımsız olabilir veya emin değilim ama veya değişik bir tanımı vardır. Üslü sayılardan farklı bir tanımı olabilir. <i>Arda</i>
	Bunlar için işte logaritmayı kullanmıyormuyorum muyduk? a eşittir olsa? Yok hatırlamıyorum ki! x miydi? <i>Elif</i>
	... yani sonuç bir reel sayı. ... sonuç? Üniversite notlarını tekrar etmek lazım. <i>Ali</i>
Logaritma cetveli yardımıyla hesaplayabiliriz	$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Bunun logaritmasını alsak? Çünkü üstel fonksiyonlar da genelde logaritma almak faydalı oluyor da. $\log y=x$, $\log x$ oluyor. Şimdi logaritmanın tanımına baksak; bunlar zaten 10 tabanında. Logaritmanın tanımında tanım kümesi bir defa pozitif, pozitif sayılar olması lazım çünkü negatifte sorun çıkıyordu ... irrasyonel olup olmaması önemli değil. Şuranın $\mathbb{R}^+$ olması önemli çünkü logaritma fonksiyonu üstel fonksiyonun ters fonksiyondur ... o halde logaritma cetveli ile hesaplanır. <i>Serkan</i>
İrrasyoneldir	$\sqrt{2}$ irrasyonel bir sayı işte. İrrasyonel sayı nedir? $\sqrt{2}$ 'yi 1,... neyse işte 1,4... devam edip duruyor. Devam eden kısımları devretmiyor ve sonsuza kadar götürülebiliyor. Bunun $\sqrt{2}$ 'inci kuvvetini alıyoruz, yine irrasyonel bir sayı olur diye düşünüyorum. <i>Gül</i>
	... ya sonuçta irrasyonel bir sayı çıkar yine ya, nasıl hesaplayabiliriz? ... valla yaklaşık değerini bulabiliriz. <i>Bekir</i>

Diğer üç öğretmen adayından ikisi, sonucun yine bir irrasyonel sayı olacağını söylemişler ama tanımı ya da nasıl hesaplanacağı konusunda net bir şey ifade edememişlerdir:

Bekir: ... sonuçta irrasyonel bir sayı çıkar yine ... nasıl hesaplayabiliriz? Valla yaklaşık değerini bulabiliriz.

Gül: Yine irrasyonel bir sayı olur diye düşünüyorum.

Serkan ise diğerlerinden farklı olarak " x pozitif bir (irrasyonel) sayı olduğu için $\log x$ 'in tanımlı olduğunu ve x^x değerini logaritma cetveli yardımıyla

bulabileceğini söylemiştir. Bunun için x^x 'i y 'ye eşitlemiş ve her iki tarafın logaritmasını alarak işleme devam etmiştir.

Yine bu soruya genel olarak bakıldığında öğretmen adaylarının x bir pozitif irrasyonel sayı iken x^x değerini hesaplamayı ya da tanımlamayı hatırlamadıkları görülmüştür. Verdikleri cevaplar yorum niteliğindedir.

Tablo 4.9: Soru 9'a verilen cevaplara ait kategori

Soru 9: e^π nasıl tanımlanır?		
Hatırlamıyorum	e^x 'in Taylor açılımıyla tanımlanabilir	Şu şekilde olabilir; $e^{i\pi} + 1 = 0$ matematikteki mükemmel denklem e^π de kompleks olarak tanımlanabilir. <i>Arda</i>
		e^π ? Bu aslında biraz e^x 'in taylor açılımına benziyor da burada x 'e bağlı değer yok. $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ idi. Şu ix 'i π 'ye eşitlesek x yerine $\frac{\pi}{i}$ yazmamız lazım. Şurası e^π oluyor. e^π olursa şurası ne oluyor? $\cos(\frac{\pi}{i}) + i \sin(\frac{\pi}{i})$... şurası yarım açı formülleri miydi? O neydi? Toplam çarpım birşeyler vardı ama orda işte $\cos(a/b)$ nin açılımı? ... <i>Serkan</i>
		$e^{i\pi}$ şuydu hocam; $\cos(\pi) + i \sin(\pi)$. O zaman i 'si olmadığına göre burayı i 'ye böleceğiz, burayı da $1/i$ ile çarpacağız (i. dereceden kök almayı kastediyor) o zaman ... $e^\pi = i \sqrt{\cos \pi + i \sin \pi}$ $\cos \pi$ neydi hocam -1 , şurası da sıfır ($\sin \pi$ 'nin değerini kastediyor) . Şimdi e^π ne bulmuştuk? -1 şurası, kökün derecesi de i . Tanımlı olması için neydi burası negatif olduğuna göre i 'nin tek olması lazım ... böyle bir şey olabilir miydi? Olmaz ... <i>Ali</i>
		Hiçbir şey hatırlamıyorum. Bununla ilgili sadece $e^{i\pi} = \cos \theta$ falan vardı ya onu hatırlıyorum. <i>Ayşe</i>
	Rasyonel sayıların kuvveti olarak ifade edilebilir	Mesela 2,71 ondalık sayı. Bunu rasyonel hale getirip π 'yi de rasyonel hale getirip en azından virgülden kurtarıp daha görsel bir hale getirebiliriz ... ama tam olarak nasıl ifade ederiz ona bir şey diyemeyeceğim. <i>Gül</i>
	Logaritmayla hesaplanabilir	... logaritmayı kullanarak, $\ln$ fonksiyonu falan vardı ya! Oradan $\ln e$ 'nin grafiğini kullanarak bulabiliriz sanırım hayır çünkü hatırlamıyorum yani yanlış yaparım. <i>Elif</i>
	Karmaşık	e^π ? ... nasıldı şöyle miydi? Yok bunlar karmaşık şeyler ya! Bunları ben üniversitede birazcık görüyorum da bunlar? <i>Bekir</i>

Öğretmen adaylarına 9. soruda “ e^π değeri nasıl tanımlanır?” diye sorulmuştur. Herbir öğretmen adayı, bu soru ile ilgili farklı yorumlar yapmış ve e^π değerini tanımlamak için farklı yollar tarif etmişlerdir. Ancak söyledikleri bu farklı yolları, tam olarak hatırlamadıkları için net ifade edememişlerdir. Hiçbir öğretmen adayı bu soruya tam cevap verememiştir. Ancak bu soru ile ilgili birçok fikir yürütmüşlerdir.

Bu öğretmen adaylarından Ali, e^π değerini önce $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi$ açılımıyla hesaplamaya çalışmış daha sonra i . dereceden kök alması gerekince vazgeçmiştir:

Ali: $e^{i\pi}$ şuydu hocam; $\cos(\pi) + i \sin(\pi)$ kökün derecesi de i . Tanımlı olması için neydi burası negatif olduğuna göre i 'nin tek olması lazım ... böyle bir şey olabilir miydi? Olmaz ...

Ali sonrasında ise e değerini limit yardımıyla hesaplamaya çalışmıştır. Ancak hatırlayamadığı ve e^π 'yi hesaplamada kullanamayacağı için vazgeçmiştir:

Araştırmacı: e diyorsun $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{n}$ 'dır.

Ali: hıhı

Daha sonra logaritmayla , türevle ve serilerle e^π değerini bulamaya çalışmış ancak sonuca ulaşamamıştır.

Arda ise e^π değerini önce logaritma yardımıyla hesaplamaya çalışmış daha sonra logaritma cetveli kullanmadan hesaplaması istendiği için bundan vazgeçmiştir:

Arda: e^π 'ye x dedim. Sonra $\ln$ logaritma $\ln$ 'i aldığım zaman o zaman $\ln x = \pi$ çıktı. π 'nin değerini biliyoruz. 3,14 eşittir $\ln x$. Şimdi burada da yine şunu bilmemiz lazım; $\ln$ nerde 3 ile 4 arasında olur?

Daha sonra e^π değerini, $e^{i\pi} + 1 = 0$ denklemi yardımıyla kompleks olarak tanımlanabileceğini ve $\cos \theta + i \sin \theta$ ifadesinde yer alan θ açısını ve yarıçapı hesaplayarak bulabileceğini söylemiştir:

Arda: Bunun tanımlandığını biliyorum ama yani nasıl tanımlandığı? Şu şekilde olabilir; $e^{i\pi} + 1 = 0$. e^π de kompleks olarak tanımlanabilir ... o da şöyle olsa gerek $\cos\theta + i\sin\theta$, bu da kompleks olarak tanımlanır ve buradan bu açığı θ açısını?... açılarla θ açısını hesaplayabiliriz. Orada yarıçapı ve açığı hesaplayarak kompleks olarak tanımlanabilir.

Elif de bu soruya hatırlamadığı için net bir cevap veremeyeceğini ancak logaritma yardımıyla hesaplanabileceğini söylemiştir:

Elif: ... işte yine logaritmayı falan kullanarak değerlerini bulur ... hani $x, y = x^a$ mıydı öyle birşey

Serkan ise e^π değerini Taylor açılımıyla hesaplamaya çalışmıştır:

Serkan: e^π ? Bu aslında biraz e^x 'in Taylor açılımına benziyor da burada x 'e bağlı değer yok. $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ idi. Şu ix 'i π 'ye eşitlesek ...

Bekir ve Ayşe'ye “ e^π değeri nedir?” diye sorulduğunda bu konu ile ilgili hiçbir şey hatırlamadıklarını söylemişlerdir:

Bekir: e^π ? ... nasıldı şöyle miydi? Yok bunlar karmaşık şeyler ya.

Ayşe: Hiçbir şey hatırlamıyorum.

Gül ise e^π değerini $e=2,71$ ve $\pi=3,14$ olarak yaklaşık hesaplamaya çalışmış daha doğrusu öğrencilerin kafasında somutlaştırmaya çalışmıştır:

Gül: Bunu rasyonel hale getirip π 'yi de rasyonel hale getirip en azından virgülden kurtarıp daha görsel bir hale getirebiliriz.

Bu sorunun devamında öğretmen adaylarına “ e^π mi yoksa π^e mi daha büyük?” diye sorulmuştur. Öğretmen adayları bu değerlerden herhangi biri hakkında net bir bilgiye sahip olmadıkları ya da kendilerini kesin sonuca götürecek bir çözüm yolu akıllarına gelmediği için bu soruya da tutarlı bir cevap verememişlerdir. Bazı öğretmen adayları hangisinin büyük olduğu hakkında hiçbir şey söyleyememeyi

tercih ederken bazıları bu soruya cevap vermişler ancak verdikleri cevapları sağlam bir zemine oturtamadıkları için bu cevaplar tahmin olarak kalmıştır.

Bu öğretmen adaylarından Gül'e " e^π mi yoksa π^e mi daha büyüktür?" diye sorulunca e^π 'nin daha büyük olduğunu söylemiş ve ispatını da π^e 'yi daha büyük kabul edip çelişki bularak yapmaya çalışmıştır:

Gül: e^π mi daha büyük π^e mi? 2,71-3,14. Herhalde e^π daha büyük. İspatını nasıl yaparım? e^π yi daha küçük kabul edip çelişki kurarım eğer düşüncem doğruysa.

Bekir ise bu soruyu cevaplamak için $e=2$, $\pi=3$ almış ama bu şekilde sağlıklı sonuç bulunamayacağını da belirtmiştir.

Bekir: yani mesela şu 2^3 'le 3^2 'ye baktım ben. Birisi 8 çıkıyor öbürü 9 çıkıyor. ... sonuçta büyük olan altta olduğu zaman daha büyük bir sayı çıkıyor. ... herşey için sağlamıyor, herşey için sağlasa bunu diyeceğim ama yani ... sağlamadı.

Ali'ye " e^π mi yoksa π^e mi daha büyüktür?" diye sorulduğunda ise e 'yi 2 ile 3 arasında, π 'yi de 3 ile 4 arasında almış, e^π değerini en büyük $2^4=16$, π^e değerini ise en büyük $3^3=27$ alabileceği için π^e nin daha büyük olacağını söylemiştir:

Araştırmacı: π^e , 27'ye kadar olabilme ihtimali var ama e^π en fazla 16 olabilir. O yüzden π^e daha büyüktür diyorsunuz?

Ali: Evet

Ayşe'ye " e^π mi yoksa π^e mi daha büyüktür?" diye sorulduğunda bu değerleri yaklaşık hesaplamaya çalışmıştır. Bunun için e 'nin değerini yaklaşık 2,5, π 'nin değerini de yaklaşık 3 olarak almış ve e^π ve π^e değerlerini bulmaya çalışmıştır. Ancak hesaplamaları sonlandıramadığı için hangisinin daha büyük olduğu konusunda birşey söyleyememiştir.

Arda'ya ise e^π nin ve π^e nin tanımlarından yola çıkılarak bu sorunun cevaplanabileceğini ancak kendisinin bu konuyla ilgili birşey söyleyemeceğini ifade etmiştir:

Arda: İkisini de kompleks olarak yazmak lazım ve tam kesin bilemeyeceğim. Yani hangisi daha büyük olduğunu ...

Serkan'a " e^π mi yoksa π^e mi daha büyüktür?" diye sorulduğunda bu soruya $\ln$ fonksiyonun grafiğini kullanarak cevap vermeye çalışmış ama net bir sonuç bulamamış ve dolayısıyla net bir cevap verememiştir. Ancak sezgisel olarak π^e 'nin daha büyük olduğunu söylemiştir:

Serkan: Burası 1, $\ln(\pi)$, $\ln(\pi)$ 1'den büyük bir sayı o halde burası da e 'den büyük bir sayı ama π 'yi geçer mi ona kesin birşey diyemeyeceğim ama şu büyük 1 gibi gözüküyor ki yani şeyden sayılardan.

Elif de hatırlamadığı için bu soruyu cevaplamamıştır:

Elif: hayır çünkü hatırlamıyorum yani yanlış yaparım.

Bu soruya verilen cevaplara genel olarak bakıldığında öğretmen adaylarının net bir bilgi hatırlamadıkları görülmüştür. Bu öğretmen adayları cevaplama sırasında bazen ciddi hatalar yapmış (i. dereceden kök almak ya da $\cos\left(\frac{\pi}{i}\right)$ değerini yarım açılı formülleriyle hesaplamaya çalışmak gibi) ancak daha sonra farkedip vazgeçmişlerdir.

Öğrencilerin 10. soruya verdikleri cevaplar incelendiğinde hemen hemen aynı cevabı verdikleri görülmüştür. Elif hariç bütün öğretmen adayları bağımlı değişkeni; bağımsız değişkene bağlı olarak değişen değişken olarak tanımlamıştır. Yine Elif hariç diğer öğretmen adaylarından Serkan ve Ali bağımsız değişkeni; hiçbir şeyden etkilenmeyen, hiçbir şarta bağlı olmayan olarak tanımlarken diğerleri bağımsız değişkeni: "*istediğimiz gibi değiştirebileceğimiz değişken*" olarak tanımlamışlardır. Bu öğrencilerden Arda hariç hepsi bağımlı ve bağımsız değişkeni fonksiyon kavramı yardımıyla tanımlamaya ya da örneklendirmeye çalışmışlardır. Bekir ve Ayşe bağımsız değişkeni, ayrıca tanım kümesinin elemanı olarak da tanımlamışlardır.

Tablo 4.10: Soru 10'a verilen cevaplara ait kategori

Soru 10: Bağımlı ve bağımsız değişken kavramların tanımını yapar mısınız?	
Bağımsız değişken, hiç bir şeyden etkilenmeyen, bağımlı değişken ise bağımsız değişkene göre değişen değişkendir	Bağımsız değişken yani istediğimiz değeri verebildiğimiz değişkenler. Yani istediğimiz değeri vermek değil de hani bir şeye bağlı olmadan ... yani tanım kümesinden tabiki de o istediğimiz değerleri verebildiğimiz değişkenler. Bağımlı değişken de değişkene göre bağımsız değişkenin aldığı değere göre değişen değişkenler. <i>Ayşe</i>
	Bağımlı değişken şu bağımsız değişkenin durumuna göre değişen o arttığı zaman artan veya azalan ... başka bir değişkene bağlı olan değişken. Bağımsız değişkene başka bir değere bağımsız olarak artırıp veya azaltabildiğimiz değişken. <i>Arda</i>
	Bağımsız değişken hiçbir şeye yan etkide kalmadan yani dış etkilere kalmadan fonksiyonun gidişatını belirleyen değişkendir, bağımlı değişken ise bağımsız değişkene göre belirlenen değişkendir. <i>Serkan</i>
	Bağımsız değişken işte adından anlaşılacağı gibi hiçbir şeye bağlı değil, o değişkeni istediğimiz şekilde değiştirebiliriz. Ama bağımlı değişken bağımsız değişkene bağlıdır. $f(x)$ bağımlı değişken, x bağımsız değişken ... <i>Gül</i>
	Bağımlı değişken birşeye bağlı olarak değişen adı üzerinde, bağımsız da kendimizin seçtiği yani tanım kümesi bağımsız oluyor tanım kümesi onun içerisinden istediğimizi seçebiliriz. <i>Bekir</i>
	$f(x)$ gibi bir fonksiyon olsun, şimdi bu fonksiyon x 'e göre değişeceği için ama x bağımsız değişken yani herhangi birşeye bağlı olarak değişmiyor, fonksiyonda bağımlı değişken oluyor ... bir kural olacak veya bağımsız değişken hiçbir şart ama şart, yanıt bir şeyin etkisinde kalmadan değişen. <i>Ali</i>
Bağımsız değişken sabittir	Yani mesela fonksiyonda nasıl diyeyim her zaman aynı kalan olabilir her değer içi aynı değeri alan (bağımsız değişken için bahsediyor) ... sabit mi? Evet değişmiyordur. <i>Elif</i>

Elif ise bunların hepsinden farklı olarak bağımsız değişken için “fonksiyonda nasıl diyeyim? Her zaman aynı kalan olabilir, her değer için aynı değeri alan... sabit mi? Evet değişmiyor” cevabını vererek farklı bir tanım yapmıştır. Değişken kavramı için ise “değişken derken hani bilinmeyen şöyle bir şeydir” diyerek değişkeni bilinmeyen olarak kabul etmiştir.

Bu soruya verilen cevaplara genel olarak bakıldığında öğretmen adaylarının fonksiyon kavramına bağımlı değişken olarak baktıkları görülmektedir. Meel (1995) araştırmasında, öğrencilerin fonksiyon kavramını; x 'in (ya da bağımsız değişkenin) aldığı değerlere göre değişen bir bağımlı değişken olarak açıklamaya çalışmalarının, öğrencilerin tarihi tanımın etkisinde kaldıklarının bir kanıtı olduğunu söylemektedir.

Tablo 4.11: Soru 11'e verilen cevaplara ait kategori

Soru 11: Bir eşitlikte y yerine $f(x)$ kullanmanın gerekçesi nedir?	
x'in f altındaki görüntüsü olduğunu daha çok vurguluyor	... $f(x)$, x'in görüntüsü olduğunu daha çok vurguluyor. y'dense işte $f(x)$ deyince x'in görüntüsüymiş ama y biraz daha şey kalıyor burda; sönük kalıyor gibi. <i>Ayşe</i>
	Bence y yerine $f(x)$ kullanması daha güzel. Çünkü x'in f altındaki görüntüsü işte neyse fonksiyon olduğunu söylüyor. <i>Gül</i>
	Yani x yerine $f(x)$ ne demek; f fonksiyonunda x yerine koyduğunuz zaman bir sonuca götürecek işte y'yi bulacak. <i>Bekir</i>
$f(x)$ yerine y yazınca sanki iki ayrı bilinmeyen varmış gibi oluyor, karışıyor	$f(x)$ 'i kullanıyorum çünkü yani y'yi kattığımız zaman sanki iki tane ayrı bilinmeyen varmış gibi gözüküyor. Ama sonra $f(x)$ dediğimiz zaman işlem biraz daha sade oluyor çünkü x'ler ve $f(x)$ 'ler var. Ama burada y dediğimiz zaman sanki başka birşeymiş gibi geliyor. <i>Serkan</i>
x'i bağımsız değişken ve fonksiyonun da x'e bağlı bir bağımlı değişken olduğu daha çok vurguluyor	$f(x)=x^2+5x$ dediğimiz zaman oradaki x'e bağlı olarak x^2+5x 'in değişeceğini görüyoruz. <i>Arda</i>
	x'e bağlı olduğu için herhalde ... y'ler x'e bağlı olduğu için onun için kullanıyoruz. <i>Elif</i>
	x'e bağlı olduğu göstermek için. <i>Ali</i>
fonksiyon olduğu daha çok vurguluyor	Çünkü fonksiyon olduğu için. $F(x)$ eşittir diye ayrı söylüyoruz. <i>Ali</i>
	$f(x)$ 'i bilirsek işlemi daha doğru yaparız çünkü hani az önceki vardı ya tanımlı tanımsız problemi, onun için $f(x)$ herhalde $f(x)$ kullanmak daha iyi ... <i>Elif</i>

Yukarıdaki tabloda, öğretmen adaylarının 11. soruya verdikleri farklı cevaplar kategorize edilmeye çalışılmıştır. Öğretmen adayları, bu soruya verdikleri cevaplarda $f(x)$ kullanmanın birbiriyle bağlantılı farklı gerekçelerini vurgulamışlardır.

Ayşe ve Gül, $f(x)$ fonksiyonunu x'in görüntüsü olarak ele almışlar ve bir eşitlikte y yerine $f(x)$ kullanıldığında; bunun x'in f altındaki görüntüsünden bahsedildiğini daha çok vurguladığını söylemişlerdir. Gül ayrıca iki notasyonun aslında aynı olduğunu ancak $f(x)$ 'in daha kullanışlı olduğunu, y'nin belki sadelik açısından tercih edilebileceğini de ifade etmiştir:

Gül: Bence şey için daha kolay; aslında ikisi de aynı şey ama ... bence y yerine $f(x)$ kullanılması daha güzel ... y yazdığımızda herhalde sadelik açısından ...

Serkan ise önce $f(x)$ notasyonunun kullanım gerekçesi olarak x'in f altındaki görüntüsü anlamına gelmesini söylemiştir.

Ancak daha sonra kendisinin y yerine $f(x)$ notasyonunu tercih ettiğini ve

bunun sebebinin de $f(x)$ yerine y yazıldığında sanki iki ayrı bilinmeyen varmış gibi algılanması olduğunu söylemiştir:

Serkan: $f(x)$ 'i kullanıyorum çünkü yani y 'yi kattığımız zaman sanki iki tane ayrı bilinmeyen varmış gibi gözüküyor ...

Arda, Elif ve Ali; $f(x)$ notasyonunun; fonksiyonun x 'e bağlı bir bağımlı değişken olduğunu daha iyi vurguladığı için tercih edildiğini belirtmişlerdir:

Arda: $f(x)=x^2+5x$ dediğimiz zaman oradaki x 'e bağlı olarak x^2+5x 'in değişeceğini görüyoruz.

Elif: x 'e bağlı olduğu için herhalde ...

Ali: x 'e bağlı olduğunu göstermek için ...

Ancak Arda, y ya da $f(x)$ kullanmanın fark etmeyeceğini, kendisinin ise y 'yi tercih ettiğini söylemiştir. Gerekçe olarak ise y kullanmanın daha kolay, $f(x)$ kullanmanın ise karışık olduğunu ifade etmiştir:

Arda: Koordinat düzleminde gösterirken kolaylık oluyor. x,y koordinatları dediğimiz için. Ayrıca doğru denklemi elde etmek için, eğri denklemi elde etmek için... ikisi de duruma göre hangisi daha kolayımıza geliyorsa... fark etmiyor aslında... bazı durumlarda y 'yi kullanmamız bizim için daha kolay oluyor. Mesela tersini alırken $f(x)$ yazıp onunla uğraşmak yerine y ile uğraşmak daha kolay geliyor bizim için çünkü $f(x)$ yazdığımızda karışabiliyor.

Ali ve Elif ise yukarıdaki sebebin yanısıra $f(x)$ notasyonunun fonksiyon olma özelliğini de daha çok vurguladığını ifade etmişlerdir.

Bekir ayrıca $f(x)$ notasyonunun üniversitede zorlaştırmak amaçlı kullanıldığını ama gerçekte y 'nin tercih edildiğini ifade etmiştir:

Bekir: y yerine $f(x)$ bunu üniversitede genelde karıştırmak için derlerdi herhalde. Her zaman kolay y 'ye kaçılır da ...

Bu soruya verilen cevaplara bakıldığında öğretmen adaylarının $f(x)$ notasyonunun kullanım gerekçelerine “fonksiyon olduğunu daha çok vurguluyor”, “ x 'e bağlı olduğunu gösteriyor” ve “daha net” gibi gerekçeler sundukları ancak bunun yanında mesela türev alırken $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ bölümünün hesaplanması gibi y 'nin kullanılamayacağı durumlara örnek veremedikleri görülmüştür. Bazı öğretmen adaylarının ise (Arda ve Bekir gibi) $f(x)$ notasyonunu karışık bulmaları, King'in

(2002) 1. sınıf cebir öğrencileriyle yaptığı çalışma sonucunda bu öğrencilerin de $f(x)$ notasyonu ile zorluk yaşadıklarının görülmesi sonucuyla uyum göstermektedir. Hatta King (2002), öğrencilerinin bu notasyonu çarpma işareti ile karıştırdıklarını belirtmektedir.

Tablo 4.12: Soru 12'ye verilen cevaplara ait kategori

Soru 12: Bir harfin ne zaman bir değişken ne zaman bir fonksiyonu temsil ettiğine nasıl karar verirsiniz?		
Değişken, tek başına eşitliğin bir tarafında ise fonksiyon gözüyle bakarız ama diğer değişkenlerle ya da ifadelerle yan yana eşitliğin aynı tarafında ise değişken gözüyle bakarız	O harfi yalnız vermişse y gibi yani a gibi, a^2 gibi veya $2a$, $3a$ gibi herhangi bir şey vermemişse o zaman o $f(x)$ gibi bir fonksiyondur diyebiliriz. Yani y değil de $a=x^2+5x$ dediğimiz zaman a , x 'e bağlı olarak değişen bir fonksiyon gözüyle bakabiliriz. <i>Arda</i>	
	Araştırmacı: $y=x^2$ diye bir kural verilmişse? Ali: y, x'e bağlıdır dememiz lazım ... Araştırmacı: Yani y fonksiyonu temsil ediyor diyebilir miyiz? Ali: diyebiliriz çünkü verdiğimiz x değerleri için farklı x değerleri için sonuçta y'ler değişecek gibi. Yani bir bağıntı oluşacak, bu ikisi arasında bir bağıntı oluşacak ... Araştırmacı: x ve y aynı taraftaysa bunlar bağımsız değişken, y karşıdaysa tek başına o zaman bu bir fonksiyonu ifade eder, bağımlı değişkendir? Ali: Bağımlı değişken evet ... <i>Ali</i>	
Fonksiyondur	... fark etmez bence. O zaman ya yani fonksiyon tanımına göre fonksiyon bir değişkeni başka birşeye götürüyordu ya, bu (y harfini kastediyor) değişken olsa da olmasa da yine yani fonksiyon gibidir bence. <i>Bekir</i>	
Karar veremeyiz, belirtilmesi lazım	Fonksiyon diye belirtilmeli veya tanım ve değer kümeleri verilmeli	O zaman bize x ... x 'in o zaman bağımsız değişken olduğu söylenmesi lazım ... y diyeceğiz bağımlı değişken, demek ki x 'in görüntüsü diyeceğiz y 'ye. <i>Ayşe</i>
		Değişken olarak bakardım, burada da değişken olarak bakarım ama fonksiyon olduğu belirtildiği zaman? ... belirtmesi gerekir en azından fonksiyondur veya tanım kümesinden-değer kümesinden bahsetmesi gerekir. <i>Arda</i>
		Baştan tanımlanırsa $y=f(x)$ diye ona göre y 'nin $f(x)$ olduğunu bilip düşünebilirim ama baştan tanımlanmadan hiçbir şey bilmiyorum, benim karşıma $y=3x$ getiriliyor. Ben bunun hangisinin değişken olduğu söyleyemem. <i>Gül</i>
	Tanım ve değer kümeleri verilmeli ve fonksiyon olma şartı aranmalı	Araştırmacı: $y=3x+5$ dendi, bir eşitlik veriliyor. Bu y'nin fonksiyon olup olmadığını nasıl anlarız? Elif: Bakınca belirli bir değer için tek değer için tek bir hani değer veriliyormuş gibi görünüyor. f'yi kullanırsak yani fonksiyon ... değişken değil de fonksiyon olduğu ... yani x'in bir değeri için y'nin bir değerini elde ederiz. ... tanım ve değer kümelerinin verilmesi lazım. <i>Elif</i> Fonksiyon mu olduğuna şöyle karar veririm: Yine fonksiyonun tanımına bakarım. Fonksiyonun tanımı işte şurası değer kümesi ise pardon tanım kümesindeki eleman, şurası görüntü kümesindeki elemanlar oluyor fonksiyon şartlarını sağlıyorsa eğer fonksiyon diyebilirim. <i>Serkan</i>

12. soruya öğretmen adaylarının verdiği cevaplar doğrultusunda 3 kategori oluşturulmuştur. Bu kategorilerden üçüncüsü kendi içinde ayrıca iki kategoriye ayrılmıştır. İlk kategoride; “eğer değişken tek başına eşitliğin bir tarafında ise bu değişkene fonksiyon diyebiliriz” diyen Arda ve Ali’in görüşleri yer almaktadır.

Bu iki öğretmen adayının verdikleri cevaplara bakıldığında önceki tecrübelerinde fonksiyonların $y = f(x)$ ($f(x)$ yerinde cebirsel ifade de olabilir) şeklinde verilmiş olmasının etkisi görülmektedir. Burada da bu durumun bir genellemesini yapma hatasına düştükleri söylenebilir.

Bekir ise, verilen herhangi bir eşitlikte, bir değişkenin aldığı değerlere göre ya da eşitliğin durumuna göre diğer değişken değişeceği ya da şekilleneceği için bu değişkene fonksiyon gözüyle bakabileceğini söylemiştir:

Bekir: Bu (y harfini kastediyor) değişken olsa da olmasa da yine yani fonksiyon gibidir bence.

Diğer dört öğretmen adayı ise bir harfin fonksiyon olup olmadığına karar vermek için önceden belirtilmiş olması gerektiğini ifade etmişlerdir. Hatta bunlardan ikisi (Elif ve Serkan) tanım ve değer kümelerinin de verilip fonksiyon olup olmadığının araştırılması gerektiğini söylemişlerdir.

Bu dört öğretmen adayının yanında Arda da önce “eğer harf tek başına eşitliğin bir tarafındaysa buna fonksiyon gözüyle bakabiliriz” demiş ancak farklı eşitlik örnekleri verildiğinde bu defa “fonksiyon olup olmadığı belirtilmeli” demiştir:

Arda: $a = \sqrt{x}$ mi?

Araştırmacı: Hı hı. Mesela bu defa nasıl fonksiyon mu değişken mi olarak bakardınız, fonksiyon olması için?

Arda: Değişken olarak bakardım. Burada değişken olarak bakardık ama fonksiyon olduğunu belirttiği zaman ...

Araştırmacı: Belirttiği zaman?

Arda: Belirtmesi gerekir en azından fonksiyondur veya tanım kümesinden değer kümesinden bahsetmesi gerekir.

Bu soruya cevap veren öğretmen adaylarından üçü; soru, $y=3x+5$ gibi veya benzer bir eşitlikle örneklendirildiğinde, bu zamana kadar fonksiyon kavramını temsil etmesi için hep y harfini kullandıkları ve bunun için de y harfini gördüklerinde buna fonksiyon diyebileceklerini söylemişlerdir:

Ayşe: Ama işte dediğim gibi yani her zaman $y, f(x)$ olduğu için bizim, biz de yani $y=f(x)$ hep böyle gördük. O yüzden böyle diyorum yoksa yani çok zor bunun işte görüntü kümesi mi ne olduğunu bilememek.

Gül: Burada $f(x)=y$ diye öyle alırız. Burada bence anlaşılmaz aslında.

Ali: Fonksiyonlarda kullanılan notasyonlar bellidir zaten y, x şey için kullanılır mesela y, y' nin diğer $f(x)$ 'dir.

Burada öğretmen adaylarının önceki tecrübelerinin etkisi altında kaldıkları görülmektedir. Başka bir ifadeyle öğretmen adaylarının, önceki tecrübelerinde $y=f(x)$ olarak alınmış olmasını (fonksiyonu temsil etmesi için genelde y harfinin kullanılmış olmasını) böyle olmayan ya da böyle olduğu belirtilmeyen durumlara da taşıdıkları söylenebilir. Thangata (2003); öğrencilerin harflerle ilgili (cebirsal semboller gibi) önceki tecrübelerinin sembollerin farklı kullanımlarını anlamalarını zorlaştırdığını söylemektedir.

Tablo 4.13: Soru 13'e verilen cevaplara ait kategori

Soru 13: Parametre ile sabit arasındaki fark nedir?	
“Parametre değişkendir” diyenler	Ayşe: Parametre değişir, değişkendir. Bağımsız değişkenlerin ... Araştırmacı: Parametreye değişken diyorsunuz? Ayşe: hı hı ... evet bağımsız değişken ... Ayşe
	Bekir: Parametre ve sabit, parametre değişkendir ... $y=3x$... Burada parametre x değil mi? Yani değişken oluyor. Bekir
Parametreyi, parametrik fonksiyon yardımıyla tanımlamaya çalışanlar	Ali: Mesela $x=2t-3, y=3t+4$ olsun ... Burada t parametre ... Bir tane bağımsız değişkenden biden çok bağımlı değişken etkileniyorsa o parametre oluyor. Ali
	Arda: Parametrede ise parametrik fonksiyonlarda olduğu gibi mesela zaten oradan geliyor sanırım. Aynı t parametresi hem x cinsinden bir fonksiyon oluyor hem y 'nin değişkeni olarak ifade ediliyor ve bu x ve y 'nin değerleri, farklı değerleri için aynı değeri alıyor. Yani yine parametre dediğimiz zaman parametremiz yine değişebiliyor. Arda
	Parametre bir değişkendir yani sabit bir değeri yoktur, mesela bir fonksiyonda parametrik bir fonksiyonda parametrenin aldığı değerlere göre fonksiyon değişir sürekli. Yani aldığı daha doğrusu aldığı değerler değişir nokta halinde birkaç tane noktayı gösterebilir. Serkan
“Bilmiyorum” diyenler	Hatırlamıyorum parametre fonksiyonlarda nasıl diyorduk yani bilgim yok. Elif
	Sanki değişken gibi işin aslı parametre kavramını bilmiyorum. Gül

13. soruya öğretmen adaylarının verdiği cevaplara genel olarak bakıldığında iki öğretmen adayı parametre kavramını bilmediklerini söylemiş diğer bütün öğretmen adayları ise parametrenin bir değişken olduğunu söylemişlerdir:

Ayşe: Parametre değişir, değişkendir.

Bekir: Parametre değişkendir.

Serkan: Parametre bir değişkendir.

Arda: Parametre dediğimiz zaman parametremiz yine değişebiliyor.

Ali: Parametre bir değişken ... bağımsız değişken.

Bu kavramı bilmediğini söyleyen Gül’ de “sanki değişken gibi” diyerek parametreyi değişken gibi algıladığını belirtmiştir. Parametrenin bir değişken olduğunu söyleyen bu 5 öğretmen adayının 3’ü bu kavramı parametrik fonksiyon yardımıyla tanımlamaya çalışmışlardır. Ancak bu öğretmen adaylarından hiçbiri bunu başaramamıştır.

Parametre ile ilgili bu cevaplara bakıldığında öğretmen adaylarının bu kavramı bilmedikleri hatta çoğunun bu kavramı değişken kavramı ile karıştırdıkları ya da bu kavrama değişken gözüyle baktıkları görülmektedir. Hundhausen (1993), matematik derslerinde parametrenin kullanılması gerektiğini savunur. Parametre ve değişkenlerin rolleri arasındaki farkların bilinmesinin, öğrencilerin analitik düşüncelerinin gelişiminde ve matematiksel kavramları transfer etmelerinde önemli olduğuna inanır. (Duvall, 2005)

Bütün öğrenciler sabit için aynı şeyi söylemişler ve sabitin parametreden farklı olarak değişemeyeceğini, sabit olduğunu söylemişlerdir:

Ayşe: Sabitte 5 gibi bir sayıdır mesela sabit yani tam tersi.

Bekir: ... yani sabit değişmez aynı şey ... $3x+c$ ’de c de sabit.

Serkan: Şurası sabittir bunu sabit bir değeri vardır değiştiremeyiz yani.

Arda: Sabit zaten adı üstünde sabit yani hiç değişmeyen olduğu yerde duruyor.

Ali: Sabitte adı üstünde sabittir mesela sabit fonksiyon var hatta $f(x)=a$ 'dır. Yani f , siz bir trilyon da alsanız sabit, sonuçta yine a 'dır değişmez sabit bir değer.

Yine Sedivy (1976); parametre kavramını anlamının öğrenciler için önemli olmasına rağmen öğrencilerin parametre ile ilgilenirken sabite göre daha rahatsız olduklarını tespit etmiştir (Duvall, 2005).

Tablo 4.14: Soru 14'e verilen cevaplara ait kategori

Soru 14: Ters fonksiyon nedir? Nasıl çalışır?	
Değer kümesinin elemanlarını tanım kümesine götüren fonksiyon ters fonksiyondur	Bir fonksiyonun değer kümesindeki bir değerinin tanım kümesinde hangi değere karşılık geldiğini gösterir. Ayşe
	Değer kümesindeki elemanların yine aynı şekilde fonksiyon şartlarını sağlayacak şekilde iki tane fonksiyon şartımız var onlar sağlanacak şekilde bu sefer tanım kümesine götüren fonksiyon ters fonksiyondur. f fonksiyon a 'yı b 'ye götürüyorsa ve fonksiyonun tersi de b 'yi a 'ya, b elemanını a elemanına götürmek zorunda. Arda
	... f eşittir birebir ve örtense onun tersi vardır yani A 'dan B 'ye gidiyorsa B 'den A 'ya gelebilir. ... Yani mesela 2 'yi 4 'e götürüyorsa 4 'ü 2 'ye götürür. Bekir
	f fonksiyonu A 'dan B 'ye. A kümesinden x elemanını B kümesinde y elemanını aldım. Bunu ben (x,y) sıralı ikilisi şeklinde ifade edebiliyorum. O zaman ben ters fonksiyonu şu şekilde tanımlayabilirim: (y,x) sıralı ikilisi öyle ki $(x, y) \in f$. Gül
Ters fonksiyon yol gibidir. Gidişiniz f fonksiyonu ise dönüşünüz tersidir	f , A 'nın elemanlarını B 'ye taşıyordu şimdi bunun ters fonksiyonu da f^{-1} aynı bir yol gibi mesela bir yola gidiyorsunuz tekrar döndüğünüz zaman gidişiniz bir fonksiyonsa ters gelişiniz onun tersi yani ters fonksiyonu ... Serkan
Bir fonksiyonun tersi, o fonksiyonla bileşkesi alındığında birim fonksiyonu veren fonksiyondur	Ters fonksiyon? İlk önce işlem konusuna değinmek lazım herhalde ... f fonksiyonu ile bileşkeye girdiği zaman sonuç birim fonksiyon çıkıyorsa ... ters fonksiyon olur evet. Ali
Net cevap vermeyen	$y=f(x)$ 'ken mesela A 'dan B 'ye bir fonksiyonumuz var B 'den A 'ya. Elif

Yukarıdaki tabloda öğretmen adaylarının “Ters fonksiyon nedir? Nasıl çalışır?” sorusuna verdikleri cevaplar gösterilmeye çalışılmıştır. Öğretmen adaylarının hemen hepsi bu soruya cevap verirken, ters fonksiyonu tanımlayabilmek için fonksiyonun 1-1 ve örten olması gerektiğini vurgulamışlar. Eğer tersini tanımlayacağımız fonksiyon 1-1 ve örten değilse tersinin, fonksiyon olma şartlarını sağlamayacağını söylemişlerdir:

Ayşe: evet 1-1 ve örten olması gerekiyor, çünkü şunun için sağlanan özellik bunun için de sağlanacağı için, yani 1-1 ve örtenlik gerekiyor.

Serkan: ... f^{-1} de B'den A'ya çalışıyor. Tabi bunun fonksiyon olup olmadığı tartışılıyor çünkü o f'nin şeylerine bağlı özelliklerine bağlı eğer 1-1 ve örten değilse ... tersi vardır ama ... fonksiyon değildir.

Arda: ... ters fonksiyon bir fonksiyon, eğer 1-1 ve örtense tersi vardır.... ters olması için 1-1 ve örten olması lazım

Gül: Bir fonksiyon önce 1-1 ve örten olması lazım. 1-1 ve örtense ve o fonksiyonun tersini tanımlıyoruz. Eğer bir fonksiyon 1-1 ve örten olmazsa ... ters fonksiyon bir fonksiyon olmaz bağıntı olur.

Elif: A'dan B'ye birebir ve örten bir fonksiyon olması gerekiyor. Özel hani ters fonksiyon olması için çünkü 1-1 ve örten olmasa hani bir fonksiyon özelliklerini ters fonksiyon da sağlamaz.

Bekir: f eşittir birebir örtense onun tersi vardır.

Bu öğretmen adaylarından Serkan, diğerlerinden farklı olarak fonksiyon 1-1 ve örten değilse tersinin yine tanımlanabileceğini ancak bunun fonksiyon olmayacağını ifade etmiştir:

Serkan: tersi? Fonksiyonun tersi vardır ama fonksiyon değildir.

Lucus (1996), 10 öğrenci ve 8 tecrübeli öğretmenle, bileşke ve ters fonksiyon ile ilgili bir çalışma yapmış ve bu çalışma sonucunda; öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının hazırladıkları ders planında ters fonksiyonun olma şartını göz ardı ettikleri ortaya koymuştur. Bu çalışmada ise öğretmen adaylarının bu şartları özellikle vurguladıkları görülmüştür.

Kategorilere bakıldığında ise ilk kategoride düşünceleri yer alan öğretmen adayları, önce f fonksiyonunu tanımlamışlar, daha sonra f fonksiyonuna göre ters fonksiyonu tarif etmişlerdir. f fonksiyonun değer kümesinin ters fonksiyon tanım kümesi; tanım kümesinin de ters fonksiyonun değer kümesi olduğunu kaydetmişler

ve eğer f fonksiyonu bir a elemanını değer kümesinde b elemanı ile eşliyorsa, tersinin de b elemanını a ile eşleyerek çalıştığını ifade etmişlerdir.

Serkan, ters fonksiyonu yol örneği ile açıklamaya çalışmış ve fonksiyonu bir yolu gitmeye, tersini de dönmeye benzetmiştir:

Serkan: f^{-1} aynı bir yol gibi. Mesela bir yolu gidiyorsunuz tekrar döndüğünüz zaman gidişiniz bir fonksiyonsa ; gelişiniz onun tersi yani ters fonksiyondur. ... mesela Ankara İstanbul arası bir sürü yol vardır. İstanbul'dan Ankara'ya gelirken farklı bir yolu kullandığınız zaman o tersi değildir. Ne olması lazım nokta şeması yapmamız lazım. Şimdi burada nedir x 'in görüntüsü y 'dir. Burada iki tarafın tersini aldığımızda f 'nin tersinde y 'nin görüntüsünün x olması lazım yani bu şartı sağlaması lazım.

Serkan'ın bu ifadesinden ters fonksiyon ile ilgili yalnız kavram imajına (fonksiyonu ve ters fonksiyonu şematik gösterimdeki oklarla özdeşleştirmek gibi) sahip olduğu görülmektedir.

Ali ise ters fonksiyonu diğerlerinden farklı bir şekilde işlem konusundan yola çıkarak tarif etmiştir:

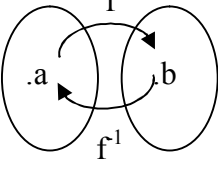
Ali: Ters fonksiyon? İlk önce işlem konusuna değinmek lazım herhalde. ... Mesela toplama işlemini alalım. ... ilk önce bize birim eleman lazım ki tersini bulabilelim. ... Şimdi fonksiyonlara girdiğimiz zaman fonksiyonlar arasında da nasıl bir işlem var; bileşke işlemi var. Fonksiyonda yine e diyelim ya da I diyelim daha şeydir. ... Birim fonksiyon yine sonuçta f olacak. Dolayısıyla ... buradaki ifade birim fonksiyon ... yani f fonksiyonu ile bileşkeye girdiği zaman sonuç birim fonksiyon çıkıyorsa ... ters fonksiyondur evet.

Ali'nin bu ifadesinden ters fonksiyonu; verilen bir fonksiyonu ya da yapılan bir işi sıfırlayan ya da nötürleyen bir fonksiyon olarak algıladığı görülmektedir. Çünkü bir fonksiyonun, tersiyle bileşkeye girmesi sonucu birim fonksiyon elde edilecektir.

Elif ise ters fonksiyon hakkında net birşeyler söylememiş ancak ters fonksiyonun olabilmesi için fonksiyonun birebir ve örten fonksiyon olması gerektiğini vurgulamıştır.

Bu soruya verilen cevaplara genel olarak bakıldığında öğretmen adaylarının ters fonksiyonun tanımını yapmada zorlandıkları görülmüştü. Lucus'un da (2005) yaptığı araştırmada, öğretmen ve öğretmen adaylarının sadece birkaçının ters fonksiyona doğru bir tanım verebildiklerini ya da bir fonksiyonla tersi arasındaki ilişkiyi doğru tarif edebildiklerini belirtmiştir.

Tablo 4.15: Soru 15'e verilen cevaplara ait kategori

Soru 15: Ters fonksiyonun günlük hayatta nasıl kullanıldığına dair örnekler verir misiniz?	
 Eşleme odaklı örnekler	Metro hattını söyleyebiliriz. Hani ters yönden geliyor ya yolun aynı olması lazım dedik. Şimdi metro sabit bir yol üzerinden gittiğine göre işte Beşevlerden Kızılay'a gidiyorsunuz dönüşünüz tekrar Kızılay'dan Beşevler'e. Bu bir ters fonksiyondur diyebiliriz. Yani bir taşınma fonksiyonu. <i>Serkan</i>
	Ankara'yı İstanbul'a bağlayan karayolu f fonksiyonu, İstanbul'u Ankara'ya bağlayan karayolu da f^{-1} fonksiyonu olabilir belki. <i>Gül</i>
	Elimizde bir grubumuz olsun 10 kişilik.... o grupta eğer Ahmet Ayşe'yle eviyse veya Ahmet'i Ayşe'ye götüren fonksiyon $f(x)$ fonksiyonu ise Ayşe'den de Ahmet'e geldiğimizde ve genellersek bayanlardan erkeklere ve erkeklerden bayanlara fonksiyonlarımız birbirinin tersi olur. <i>Arda</i>
	Mesela top örneği verelim, yani sonuçta ters fonksiyon olması için yine birebir ve örtenlik var... yani 4 kişi 2 topu alsın ters fonksiyondur işte . 2 top nasıl olacak.... olmaz 2 4 oluyor.. 4 top 4 kişi tarafından işte seçilecek falan gibi ... <i>Elif</i>
Örnek vermeyen	Hiç gelmiyor aklıma... aynı şekilde.... bulamıyorum <i>Ayşe</i>
Yapılan bir işi geri bozma odaklı örnekler	İadeli mağazalarda var mesela... ben paramı verdim kazak aldım.. $f(\text{param}) = \text{kazak}$ dolayısıyla ben kazağı beğenmedim tekrar iade etmek istiyorum. Ben iyade olduğunu biliyorum yani tersinin olduğunu biliyorum fonksiyonun. Dolayısıyla kazağı verdiğimiz zaman onlar da paramı verecekler. <i>Ali</i>
	Paramla kuyumcuya gittik altın aldık diyelim. Param tanım kümemiz, altınlar da değer kümemiz olsun. Daha sonra altınları kuyumcuya bırakıp bozdurup tekrar para haline getirebiliriz. <i>Gül</i>
	Poşet! Ekmeği poşetten çıkartması olabilir... yani şunu parçalayıp (masadan bahsediyor) geri yani tek tek parçalara ayrılmış o suntaı tek koymak vidalarına ayırma olabilir. <i>Bekir</i>
	... işe gidip tekrar gelme olabilir belki <i>Arda</i>

Tabloya bakıldığında öğretmen adaylarının ters fonksiyon ile ilgili günlük hayattan verdikleri örneklerin 3 kategoride toplandığı görülecektir. 1. kategoride eşleme odaklı örnekler vardır. Bu örneklerde; eğer fonksiyon tanım kümesinde bir elemanı değer kümesinde başka bir elemanla eşliyorsa tersinin de değer kümesindeki elemanı tanım kümesinde aynı elemana eşlediği bilgisi hakimdir. Örneklerle bakıldığında bu bilginin şematik gösterimi hissedilmektedir. Öğretmen adaylarının bu örnekleri verirken bu gösterimi dikkate aldıkları söylenebilir. Ancak bu örneklerde öğretmen adaylarının fonksiyonu ya da fonksiyonun tersini şematik

gösterimdeki oklarla özdeşleştirdikleri görülmektedir. Çünkü örneklere bakıldığında fonksiyonu ya da ters fonksiyonu, metro hattına ya da İstanbul'u Ankara'ya bağlayan karayoluna benzettikleri görülmüştür. Bu örnekler, öğretmen adaylarının ters fonksiyon ile ilgili yanlış kavram imajına sahip olduklarını göstermektedir.

2. kategoride hiç örnek veremeyen Ayşe yer almaktadır.

3. kategoride ise ters fonksiyonla ilgili günlük hayattan daha işlevsel örnekler yer almaktadır. Bu örnekler daha ziyade yapılan bir işi sıfırlayan ya da başa döndüren, bozan örnek tipleri olmuşlardır. Bu kategorideki öğretmen adaylarının verdiği örneklerde, bir fonksiyonun tersi ile bileşkesi alındığında birim fonksiyonu verdiği bilgisi sezilmektedir:

Ali: Dolayısıyla kazağı verdiğim zaman onlar da paramı geri verecekler.

Bekir: şu masayı parçalarına geri ayırmak, ekmeği poşetten çıkarmak.

Gül: kuyumcuya gidip aldığım altını bozdurmak.

15. soruya genel olarak bakıldığında öğretmen adaylarının ters fonksiyona günlük hayattan örnek vermede zorlandıkları görülmektedir.

Tablo 4.16: Soru 16'ya verilen cevaplara ait kategori

Soru 16: Bileşke fonksiyonun tanım ve değer kümesini nasıl bulursunuz?	
Bileşke fonksiyona yeni bir fonksiyon gözüyle bakar tanım ve değer kümesini yeniden buluruz	Ali: o zaman şey yaparız fog'a bakarız. fog neydi? g'yi x'in yerinde yazacağız... $1/3(x+3)+5$ o da neydi $1/3x+14$. fog artık nereden nereye A'dan C'ye tanımlı... o zaman A'dan $-14/3$'ü çıkaracağız... Araştırmacı: Yani diyorsun ki bileşke fonksiyona yeni bir fonksiyon gözüyle bakarım Ali: Evet ... Ali: Değer kümesine nasıl karar veriyoruz? Tanım kümesinde zaten tanımsız olan noktayı-elemanı çıkarttığımız için nedir bileşke C'de tanımlıdır artık. <i>Ali</i> Eğer fonksiyonlar verilmişse bize, ikisini yazarız sonra bileşkesini ... ona yeni bir fonksiyon gözüyle bakıp da o şekilde işlem.... <i>Arda</i>
f: $A \rightarrow B$ g: $B \rightarrow C$ olsun gof: $A \rightarrow C$ 'dir (gof'nin tanım kümesi f'nin tanım kümesi değer kümesi g'nin değer kümesidir)	gof'un tanım kümesini burada f'nin tanım kümesi, bunun tanım kümesi olur. Şu fonksiyonun da ... tanım kümesi A kümesidir. ... değer kümesi C'dir. <i>Bekir</i> f fonksiyonunun değer kümesi g fonksiyonunun tanım kümesi oluyor...o zaman bileşke fonksiyonun tanım kümesi eğer gof den bahsediyorsak f fonksiyonunun tanım kümesi olur ... birinin tanım kümesini, diğerrinin değer kümesini alıyorum. <i>Gül</i>
Tanım kümesi f'nin tanım kümesidir. Görüntü kümesi, tanım kümesine bağlı olarak gof'un aldığı değerler olur	Tanım kümesini işte ikisinin f fonksiyonun tanım kümesi olur, görüntü kümesi de işte f fonksiyonun tanım kümesine bağlı g bileşke f'nin aldığı değerler olur. f'nin ve g'nin x'in tüm değerleri için tanımlı olması lazım gerekiyor o zaman. Ama yani zaten f ve g bir fonksiyondur diyorlar ya... <i>Elif</i>
f: $A \rightarrow B$, g: $A \rightarrow B$ 'ye olsun. gof: $A \rightarrow C$ 'dir ancak $f(x) = B$ olmalı	O halde birinin tanım kümesi diğerrlerini değer kümesine eşit olması lazım ki bileşke yapalım....çünkü sorun çıkıyordu. O halde birinin değer kümesini kısıtlarız yani sorun olmayacak şekilde ... <i>Serkan</i> Şimdi tanım kümesi bunun, x'in $f(x)$ için tanımlı olduğu yerler, ama $f(x)$ aynı zamanda $g(x)$'de de tanımlı olmalı. ... Yani $f(x)$ g fonksiyonu için... genelde $f(x)$'in aldığı değerler tanımlı değilse o zaman yeni bir bileşkeyi oluşturamıyoruz. <i>Ayşe</i>

16. soruda öğretmen adaylarına “bileşke fonksiyonun tanım ve değer kümesini nasıl bulursunuz?” diye sorulmuş ve verdikleri cevaplar doğrultusunda 4 kategori oluşturulmuştur. Bu soru ilk sorulduğunda Elif hariç bütün öğretmen adayları bileşke fonksiyonunun tanım ve değer kümesinin; f: $A \rightarrow B$, g: $B \rightarrow C$ ise gof: $A \rightarrow C$ olacağını söylemişlerdir:

Ayşe: ... $f(x)$ 'i mesela A'dan B'ye tanımlı. O zaman $g(x)$, $f(x)$ 'in aldığı değerler.. $g(x)$ o zaman B'den C'ye tanımlanmalı. $gof(x)$, A'dan B'ye, B'den C'ye, o zaman $gof(x)$, A'dan C'ye tanımlanıyor.

Serkan: ... şurası f 'nin tanım kümesi, şurası g 'nin değer kümesi. O halde birinin tanım kümesini birinin değer kümesini alıyorum.

Arda: ... f , A 'dan B 'ye g de B 'den C 'ye... bileşke fonksiyonun tanım kümesini- tanım kümemiz A , değer kümemiz C 'dir.

Gül: ... o zaman bileşke fonksiyonun tanım kümesi eğer $g \circ f$ 'dan bahsediyorsak f fonksiyonun tanım kümesi olur.

Ali: ... g , A 'dan B 'ye; f , B 'den C 'ye tanımlayabiliriz. ... $f \circ g$ 'un tanım kümesi A 'dan C 'ye oldu.

Bekir: ... tanım kümesi A kümesinden ... değer kümesi C 'dir.

Ancak bu öğretmen adaylarına, tanımsız nokta ya da noktalara sahip iki fonksiyonun bileşkesinin tanım ve değer kümesi sorulduğunda cevapları buna bağlı olarak farklılaşmıştır ve yukarıdaki kategoriler oluşmuştur: (öğretmen adaylarının bu soruyu cevaplarkenki tepkilerinden daha önce bu konu hakkında hiç düşünmedikleri ya da böyle bir soruyla ilk kez karşılaştıkları görülmüştür)

İlk kategoride yer alan Ali'ye; "fog'nin tanım ve değer kümesini bulurken $g(x)=x+3$ ve $f(x)=\frac{1}{3x+5}$ olarak alsak bileşke fonksiyonunun tanım ve değer kümesi nasıl olur?" diye sorulduğunda f fonksiyonunun $\frac{-5}{3}$ 'te tanımsız olduğunu bu değer f 'nin tanım kümesinden ve g 'nin de değer kümesinden çıkarılması gerektiğini söylemiştir:

Ali: g A 'dan B 'ye gitsin. Bu sefer f , B 'den $\frac{-5}{3}$ 'ü çıkaracağız, C 'ye diyeceğiz bileşke işlemi

kuracağımız için $(f:B \rightarrow C)$ tanımlıyor ve tanım kümesinden fonksiyonu tanımsız yapan $\frac{-5}{3}$

değerini çıkarıyor). Bileşke işlemi kurdun mu mesela $x'e$, $x+3=\frac{-5}{3}$ dersek buradan şuraya -

3 diyelim $\frac{-14}{3}$. Şimdi g 'nin tanım kümesinden $\frac{-14}{3}$ aldığım zaman değer kümesinde $\frac{-5}{3}$ gibi

bir ifade belirecek dolayısıyla $\frac{-5}{3}$ artık hani f 'nin tanım kümesi de g 'nin değer kümesiydi ya.

Araştırmacı (Ali'ye): Tanımsız olacağı için onu oradan çıkardım diyorsunuz?.

Ali: Evet ...

Ancak g 'nin değer kümesinden $\frac{-5}{3}$ değeri çıkarıldığı zaman g 'nin tanım kümesinde $\frac{-14}{3}$ değerinin görüntüsünün olmayacağı, açıkta eleman kalacağı söylendiği zaman da $f \circ g$ 'ye yeni bir fonksiyon gözüyle bakıp ona göre işlem yapılması gerektiğini söylemiştir:

Araştırmacı: Peki A' 'da $\frac{-14}{3}$ 'ün görüntüsü yok açıkta eleman kaldı?

Ali: O zaman şey yaparız direk $f \circ g$ 'a bakarız. $f \circ g$ neydi g 'yi x 'in yerinde yazacağız;

$\frac{1}{3(x+3)+5}$ o da neydi $\frac{1}{3x+14}$... o zaman A' dan $\frac{-14}{3}$ 'ü çıkaracağız.

Bu kategoride yer alan Arda da bileşke fonksiyona yeni bir fonksiyon gözüyle bakarak; “bir fonksiyonun tanım ve değer kümesini nasıl belirliyorsak elde ettiğimiz bileşke fonksiyonunun da tanım ve değer kümesini öyle belirleriz” demiştir.

2. kategoride yer alan Bekir ve Gül'e bu soru sorulmuş ve başka hiçbir yönlendirme yapılmamıştır ve onlar da $g \circ f$ fonksiyonu için tanım kümesi olarak f 'nin tanım kümesini, değer kümesi olarak da g 'nin değer kümesini söylemişlerdir.

3. kategoride yer alan Elif'e aynı şekilde tanımsız noktalara sahip iki fonksiyonun bileşkesi sorulduğunda zaten fonksiyon olma şartından dolayı tanım kümesinde tanımsız noktaların olmayacağını ve bileşkenin tanım kümesinin bileşkesi alınan ilk fonksiyonun tanım kümesiyle aynı olacağını söylemiştir:

Elif: Tanım kümesini işte ikisinin f fonksiyonun tanım kümesi olur, görüntü kümesi de işte f fonksiyonun tanım kümesine bağlı g bileşke f 'nin aldığı değerler olur.

Aynı soru Ayşe ve Serkan'a da sorulmuş ve Ali'ninkine benzer yönlendirilmeler yapılmıştır. Bu defa öğretmen adayları daha farklı cevaplar vermişler ve bileşke fonksiyonun tanımlanabilmesi için ($g \circ f$ fonksiyonundan bahsediliyorsa) f 'nin görüntü kümesinin g 'nin tanım kümesiyle aynı olması gerektiği ve böyle olursa sorun çıkmayacağını söylemişlerdir.

Ancak Serkan eğer rastgele iki fonksiyonun bileşkesi illa da alınmalıysa o zaman tanım ve değer kümelerinde ona göre düzenlemelerin yapılması gerektiğini

ifade etmiştir:

Serkan: Sorunlu f'leri çıkarırız yani değer kümesini diğerinin tanım kümesine eşitleriz ki aralarında kopukluk olmasın.

Bu soruya verilen cevaplara bakıldığında öğretmen adaylarının buradakine benzer bir durumla daha önce karşılaşmadıkları farkedilmiştir. Sadece iki öğretmen adayı istenilen şekilde cevap vermiştir. Diğer öğretmen adayları ise ders kitaplarında hep $f:A \rightarrow B$, $g:B \rightarrow C$ ise $g \circ f : A \rightarrow C$ şeklinde tanımlandığı için bu soruda da bu bilgiyi doğrulamaya çalışmışlardır. Yani bileşkenin alınabilmesi için f fonksiyonunun görüntü kümesinin g fonksiyonunun tanım kümesine eşit olması gerektiğini belirtmişlerdir. Lucus (2005) yaptığı çalışmada katılımcıların hiç birinin hazırladıkları ders planında bileşke fonksiyonun tanım kümesine ve bu konunun önemine değinmediklerini ortaya koymuştur.

Tablo 4.17: Soru 17'e verilen cevaplara ait kategori

Soru 17: Bir fonksiyonu tanımlarken üzerine ile içine olması arasındaki fark nedir?	
Hatırlamıyorum	Üzerine şey mi ilk defa duyuyorum ya ... Hiç üzerine diye birşeyle karşılaşmadım üzerine fonksiyon? <i>Arda</i>
	Hatırlamıyorum bunu ya, gördüm de! Üzerine içine hatırlamıyorum. <i>Bekir</i>
	... yok ayrıca üzerine diye bir şey duydum da orasını hatırlamıyorum şu anda. Üzerine neydi? Örtten değil galiba, üzerine fonksiyon başka bir şey gibi. <i>Serkan</i>
Üzerine →örtten içine→örtten değil	Üzerine içine şey üzerine örtten değil mi içine de örtten olmayan ... <i>Ali</i>
	Üzerine örtten değil mi? ... şöyleyse her zaman işte B'deyse örtten ,değilse içine. <i>Elif</i>
	Eğer değer kümesinde açıkta eleman kalmıyorsa üzerine -örtten fonksiyon denir, kalıyorsa içine. <i>Gül</i>
	İçine dendiği zaman sanki örttenlik yokmuş gibi duruyor ama üzerine dendiği zaman örttenlik varmış gibi oluyor, öyle algıladım. <i>Ayşe</i>

Öğretmen adaylarının 17. soruya verdikleri cevaplar; “üzerine” kavramı hakkında söyledikleri esas alınarak iki gruba ayrılmıştır. Bu öğretmen adaylarından üçü; Serkan, Arda ve Bekir, üzerine kavramını hatırlamadıklarını hatta Arda bu kavramı daha önce hiç duymadığını söylemişlerdir. Diğer dördü ise bir fonksiyonu üzerine diye tanımlamanın, o fonksiyonun örtten olduğu anlamına geldiğini ifade etmişlerdir. Öğretmen adaylarının tamamı Bekir hariç içine fonksiyonu örtten olmayan fonksiyon şeklinde tarif etmiştir:

Ali: İçine de ?Örten olmayan fonksiyon içine fonksiyondur.

Elif: ... her elemanı işte B'deyse örten değilse içinedir.

Gül: Örten olmayan fonksiyonlara içine.

Serkan: Şimdi içine olması şuydu: yine f A 'dan B 'ye bir fonksiyon olsun. f altında A 'nın görüntüsü B 'nin alt kümesi ise yani burada açıkta eleman kalıyorsa buna içine fonksiyon deniyordu.

Ayşe: İçine dendiği zaman sanki örtenlik yokmuş gibi deniyor.

Bekir ise üzerine kavram gibi içine kavramını da hatırlamadığını söylemiştir:

Bekir: Ne yani içine fonksiyon? Üzerine? Hatırlamıyorum. Bunu ya gördüm de üzerine?

İçine?

Bu soruya verilen cevaplara bakıldığında öğretmen adaylarının yarısının üzerine kavramını hatırlamadıkları ya da bilmedikleri yarısının ise bu kavramı örtenlik olarak algıladıkları görülmüştür. Bu öğretmen adaylarının hemen hemen hepsi ise içine kavramını, örten olmayan olarak tarif etmişlerdir.

Tablo 4.18.1:Soru 18'e verilen cevaplara ait kategori

Soru 18: Lineer fonksiyonun tanımını yapar mısınız?	
y=ax+b şeklindeki fonksiyonlardır (Birinci dereceden polinom fonksiyonlardır)	lineer? Doğrusal fonksiyon deniyor. $f(x)=ax+b$ oluyor yani 1. dereceden olan fonksiyonlara lineer fonksiyon denebilir, doğrusal fonksiyon denebilir. <i>Bekir</i>
	Lineer fonksiyon ? $f(x)=ax+b$ şeklinde ifade edilen ... <i>Ali</i>
	Doğrusal ... birinci dereceden ... <i>Elif</i>
	Doğrusal fonksiyon? $y=mx+n$ şeklindeki fonksiyonlara biz doğrusal fonksiyon diyoruz. <i>Gül</i>
	Doğrusal fonksiyon? Doğrusal fonksiyon birinci dereceden fonksiyonlara, birinci dereceden polinom fonksiyonlara lineer- doğrusal ... fonksiyon denir. $f(x)=ax+b$. <i>Arda</i>
	 $f(x)$ eşittir birinci dereceden bir fonksiyon olması lazım o da $ax+b$. <i>Serkan</i>
	Lineer fonksiyon; 1. dereceden x 'in artık karıştırıyorum x in derecesinin 1 olduğu fonksiyon. <i>Ayşe</i>

Bu soruya öğretmen adaylarının hepsi aşağı yukarı aynı tanımları yaparak cevap vermişler ve lineer fonksiyonun ya da diğer adıyla doğrusal fonksiyonun 1. dereceden $f(x)=ax+b$ şeklindeki fonksiyonlar olduğunu söylemişlerdir:

Serkan’la Ayşe bu tanımlara ilaveten lineer fonksiyonları; grafiği doğru olan fonksiyonlar olarak da ifade etmişlerdir:

Serkan: ... yani grafiği bir doğru belirten fonksiyon.

Ayşe: Bunlar işte doğrular yani grafiğini çizdiğimiz zaman grafiği doğru çıkan fonksiyonlar.

Buraya kadar ki cevaplara bakıldığında öğretmen adaylarının hepsinin lineer fonksiyon için “ $y=ax+b$ şeklindeki fonksiyonlardır” tanımını yaptıkları görülmüştür.

Tablo 4.18.2: Soru 18’in devamına verilen cevaplara ait kategori

Soru 18’in devamı: Gerçek hayatta önemi nedir, ne için kullanılır?	
Gerçek hayatta bir işe yaramaz	Gerçek hayatta hiç birşeye yaramaz desem? a b neye yarar bilmiyorum. Ya hiç araştırmadım... Hayattan örnek bulmak biraz kolay da bilmiyorum bir işe yarıyor mu ya bence yaramıyor. <i>ğretmen adayı 5</i>
Aklıma bir şey gelmiyor	Mesela bizim ...büyük eksiklerimiz günlük hayatla matematiği bağdaştıramamak. Bu yüzden öğrenciler matematikten nefret ediyor. <i>Gül</i>
Matematikte kullanılır	... genellikle akla ilk gelen yol hız hani problemleri olarak. <i>Elif</i>
	Bunlar birçok şey için kullanılır; eğimi falan buluruz, yani doğrunun analitiğinde mesela kullanılır. Ayşe
Gerçek hayatta farklı yerlerde kullanılır	Maketteki ve gerçek evin her yerinde oranla aynı olacak. Yani doğru şimdi eğim aynı olduğu için yani ölçeği aynı olduğu için oranlar hep sabit kalacak. <i>Ali</i>
	Ekonomide mesela arz talep doğrularımız doğrusal fonksiyonlardır. ... fiyat arttığı zaman malın talebinin azaldığını görüyoruz veya talep artınca fiyatın arttığını görüyoruz, doğrusal bir ilişki var aralarında ... <i>Arda</i>
	Günlük hayattan mesela şu; bir aracın yakıt miktarı olsun. Yakıt miktarı azaldıkça yani ... aldığı yol da artıyor. <i>Serkan</i>

Öğretmen adayları, 18. sorunun devamında yer alan “Bu fonksiyonların gerçek hayatta önemi nedir, ne için kullanılır?” sorusuna farklı cevaplar vermişler ve bu cevaplar sonucunda dört kategori oluşturulmuştur. Verilen cevaplara genel olarak bakıldığında öğretmen adaylarının bu soruyu cevaplama da sıkıntı çektikleri ve lineer fonksiyonun gerçek hayattaki önemine dair etkin cevap veremedikleri görülmektedir. Son kategoride cevapları yer alan öğretmen adayları (Ali, Arda ve Serkan) bu soruyu cevaplarken doğrusal fonksiyonlarda bağımlı ve bağımsız değişken arasında sabit bir oran olmasından ya da bu fonksiyonun grafiğinin eğiminin sabit olmasından yararlandıkları görülmüştür:

Ali: Hani eğimler sabittir ... eğim değişmiyorsa ikisinin birbirine oranı, ikisini bir oranlayacağımız bir ne olabilir? Mesela şey olabilir mi diyeceğim de buradan hareketle bir bina yapacağız ya hocam maket yapacağız.

Arda: ... bir değişken artarken bağımsız değişkenimiz artarken bağımlı değişken de ona göre doğrusal olarak artarken aynı oranda artıyorsa veya azalırken aynı oranda azalıyorsa ... mesela arz talep doğrularımız.

Serkan: ... bunun yine grafiğine baktığımız zaman artan mı azalan mı? x artarken bu azalıyor.

Bu soruda da yine öğretmen adaylarının günlük hayattan örnek vermede sıkıntı çektikleri görülmektedir.

Tablo 4.19.1: Soru 19'a verilen cevaplara ait kategori

Soru 19: Bir fonksiyon ile matematiksel ifade arasındaki ilişkiyi açıkla mısınız?	
Her fonksiyon bir matematiksel ifadedir ancak her matematiksel ifade bir fonksiyon değildir.	Ayşe: Fonksiyon matematiksel ifadedir Araştırmacı: Peki bir matematiksel ifade her zaman fonksiyon mudur? Ayşe: ... değildir. ... mesela demin bağıntılardan bahsettik her bağıntı fonksiyon değildir dedik. Bağıntı da bir matematiksel ifadedir ama fonksiyon olamaz. <i>Ayşe</i>
	Şu iki özellik vardı ya oradan fark etmez mi? Oradan fark eder herhalde. Yani onları sağlamazsa fonksiyon... yani kabaca matematiksel ifadedir deriz. <i>Elif</i>
	Her fonksiyon bir defa matematiksel ifadedir ama her matematiksel ifade fonksiyon değildir. Yani o fonksiyon olma kurallarını sağlıyorsa o zaman fonksiyondur denebilir. <i>Bekir</i>
	Her fonksiyon matematiksel ifade derim ama her matematiksel ifadeye fonksiyon diyemem mesela bunu $(a^3 - b^3)$ şey olarak düşünebiliriz $f(a,b)$. Böyle düşünüyoruz, o iki şartı sağlıyor mu sağlamıyor mu ona da bakmak lazım... sağlıyorsa ona fonksiyon diyebiliriz, sağlamıyorsa fonksiyon değildir. <i>Ali</i>
	Arda: Bir fonksiyon her zaman bir matematiksel ifadedir. Sonuçta fonksiyonda yaptığımız işlemlerde hepsinde toplama, çıkarma, karekök alma, üs alma veya trigonometrik bir işlemler olduğu için matematiksel ifadedir. Fakat her matematiksel bir ifadeye fonksiyon gözüyle bakmak ne derece doğru olur? Olmaz sanırsam ya... Araştırmacı: O şartları mı sağlaması gerekiyor? Arda: Evet. <i>Arda</i>
	Buna fonksiyon diyemeyiz. Fonksiyon olması için bir defa bir işlevinin olması lazım. Yani bir elemanı başka elemana taşıması lazım. O halde her matematiksel ifadeye fonksiyon diyemeyiz. $f(x)=x+2$; burada hem matematiksel terimler kullanılmış işte fonksiyon gösterimi, toplama çıkarma, dört işlem var, eşitlik var. O halde her fonksiyon bir matematiksel ifade diyebiliriz.... işte kümeler var sıralı ikililer var veya kartezyen çarpım, bağıntı bunların hepsi sonuçta matematiksel bir ifade, gösterim. <i>Serkan</i>
	Bana bir matematiksel ifade verilirse ilk önce onun fonksiyon şartları sağlayıp sağlanmadığına bakarım. Eğer sağlamıyorsa matematiksel ifadedir. <i>Gül</i>

Öğretmen adayları 19. sorunun ilk kısmı olan; “Bir fonksiyon ile matematiksel ifade arasındaki ilişkiyi açıklayınız?” sorusuna hemen hemen benzer cevaplar vermişlerdir. Bütün öğretmen adayları, bir fonksiyonun matematiksel ifade olduğu ancak bir matematiksel ifadenin her zaman fonksiyon olmayacağı konusunda hemfikirdirler. Sadece birkaç öğretmen adayının sunduğu gerekçelerde farklılık vardır. Mesela bütün öğretmen adayları aşağı yukarı bir matematiksel ifadenin fonksiyon olabilmesi için fonksiyon olma şartlarını sağlaması gerektiğini söylemişler sadece Serkan, bir matematiksel ifadenin fonksiyon olabilmesi için bir işlevinin olması gerektiğini, bir elemanı başka bir eleman taşıması gerektiğini söylemiştir.

Yine Serkan ve Arda neden bir fonksiyonun matematiksel ifade olduğunu açıklarken fonksiyonun içerdiği ifadelerin, gösterimlerin ya da fonksiyonu tanımlarken yapılan işlemlerin hep birer matematiksel ifade olduğunu söylemişlerdir:

Serkan: İşte kümeler var, sıralı ikililer var veya kartezyen çarpım, bağıntı bunların hepsi sonuçta matematiksel ifade, gösterim.

Arda: Fonksiyonla yaptığımız işlemlerde toplama, çıkarma, karekök alma, üs alma veya trigonometrik işlemler olduğu için matematiksel ifadedir.

“Bir matematiksel ifadenin fonksiyon olması için fonksiyon olma şartlarını sağlaması gerekir.” diyen öğretmen adayları verilen herhangi bir matematiksel ifadeyi bir fonksiyonun cebirsel kuralı ya da ifadesi gibi algılıyor olabilirler:

Araştırmacı(Gül’e): Mesela bir ifade şöyle bir şey olabilir: $2x+1$. Bu bir ifade. Buna göre aralarındaki ilişki?

Gül: $2x+1$, R ’den R ’ye tanımlı bir fonksiyondur.

Araştırmacı (Ali’ye): $\sqrt{a-2}$?

Ali: Mesela $a=1$ için ...

Araştırmacı: Hı hı fonksiyon olmaz diyorsun?

Ali: Fonksiyon olmaz mesela tanımlı değil.

Araştırmacı: Yani şimdi sen burada $f(a) = \sqrt{a-2}$ aldın. Peki ben sana şunu söylüyorum; tek başına $\sqrt{a-2}$ olsa bu bir matematiksel ifade mi?

Ali: Matematiksel ifade.

Araştırmacı: Peki buna neye göre fonksiyondur ya da değildir diyeceğiz?

Ali: Tanım ve değer kümesine göre ... tanım ve değer kümesine bakacağız ve o tanım ve değer kümesindeki o bağıntıya ... onlar eğer fonksiyon olma şartını sağlıyorsa fonksiyondur diyeceğiz. Bu durumda bütün matematiksel ifadelerin en azından fonksiyon olup olmadığına bakabilirim.

Öğretmen adaylarının bu soruya verdikleri cevaplara genel olarak bakıldığında ; bir fonksiyonun daima matematiksel bir ifade olduğunu, bir matematiksel ifadenin ise fonksiyon olma şartlarını sağlıyorsa (bir bağıntının fonksiyon olması için sağlaması gereken şartlar) fonksiyon olduğunu zannetme gibi ciddi kavram yanılgılarına sahip oldukları görülmüştür. Ayrıca öğretmen adaylarının bu iki kavram arasındaki ilişkiyi doğru olarak ortaya koymaktan ve bu iki kavrama sahip oldukları anlamların tamamını yükleyerek bakmaktan uzak oldukları görülmüştür. Ayrıca “bir fonksiyon her zaman bir matematiksel ifadedir, bir matematiksel ifadenin ise fonksiyon olma şartlarını sağlıyorsa fonksiyondur” ve “verilen ifadenin tanım ve değer kümesinin de verilmesi lazım” gibi ifadeler öğretmen adaylarının verilen bir matematiksel ifadeyi sanki fonksiyonun cebirsel ifadesi gibi ele aldıklarını, fonksiyonu bir formül gibi algıladıklarını ve fonksiyonun keyfi bir eşleme olabileceğini göz ardı ettiklerini göstermiştir. Meel (1995); bunun sebebinin; fonksiyon kavramına tarihi tanımın etkisinde kalarak bakmakla ilgili olduğunu söylemektedir. (Fonksiyon kavramının kavramlaştırılması; 17.yy’ da eğriyi tarif etmekle başlarken 18.yy’ da değişkenlerin formüsel bir kuralla birleştirilmesi olarak anlaşılmıştır). Meel (1995) bu yanılgının başka muhtemel bir sebebinin de; öğrencilerin ya da öğretmen adaylarının genellikle fonksiyonları bir formülle verilen eşleme kuralı olarak inşa etmeleri (Even, 1993; Vinner & Dreyfus, 1989) olduğunu söylemiştir. Buradaki cevaplara genel olarak bakıldığında öğretmen adaylarının bu iki kavramın etkin bir anlamasına sahip olmadıkları görülmüştür.

Tablo 4.19.2: Soru 19'un devamına verilen cevaplara ait kategori

Soru 19'un devamı: Bir fonksiyon ile eşitlik arasındaki ilişkiyi açıkla mısınız? Bütün fonksiyonlar bir eşitlik ile mi verilir? Ne zaman bir eşitlik bir fonksiyondur? Bir fonksiyonun bir eşitlikten farkı nedir?	
Bütün fonksiyonlar eşitliklerdir ama bütün eşitlikler fonksiyon değildir	Fonksiyonlar eşitliklerdir ama eşitlikler fonksiyon olmayabilir. Biraz önce dediğiniz gibi fonksiyonun şartlarını ... <i>Ayşe</i>
	Yani fonksiyonlar eşitliklerdir. Bu yani tamamı eşitliklerdir ama tüm eşitlikler fonksiyon değildir. O fonksiyonun tanım kümesini sağlaması lazım yani. <i>Bekir</i>
	Araştırmacı: Bu durumda her eşitliğe fonksiyon ...? Elif: Diyemeyiz. Araştırmacı: Diyemeyiz. Her fonksiyon eşitlik midir? Elif: Öyledir yani ... <i>Elif</i>
Bir fonksiyon her zaman eşitlik değildir, bir eşitlik her zaman fonksiyon değildir	Bir kere her zaman bir fonksiyon bir eşitlik değildir. Fonksiyonun tanım ve değer kümesi var. Tanım kümesi bizim için önemlidir. Ama eşitliğin bir tanım kümesi yok. Eşitliği her zaman istediğim gibi kullanabilirim. O yüzden her fonksiyon bir eşitlik değil. <i>Gül</i>
Bir eşitlik fonksiyon formunda verilirse ve fonksiyon olma şartını sağlarsa fonksiyondur diyebiliriz ama "her fonksiyona eşitliklerdir" diyebiliriz çünkü tanım kümesindeki elemanların aldığı değerlere göre bir eşiti vardır.	Serkan: Bir eşitliğe fonksiyon diyemeyiz her zaman. Araştırmacı: Ne zaman fonksiyon deriz? Serkan: Fonksiyon olma şartını sağladığı zaman. Araştırmacı: Yani tanım ve değer kümesi mi lazım yine? Serkan: Hıhı ... Tanım ve değer kümesi? Ama tanım ve değer kümesi de yetmiyor. Tabi bir bağıntı olacak ve bağıntının iki şartının olması lazım. Araştırmacı: Bütün fonksiyonlara eşitlik diyebilir miyiz? Serkan: Hıhı eşitlik diyebiliriz. ... Mesela $x = \frac{\pi}{2}$ için y değeri ne olur? 1 olur. ... Şunun aldığı değerlere göre sonuçta bir karşılığı vardır yani bir eşiti vardır. O halde eşitlik diyebilirim. <i>Serkan</i>
Eğer bir eşitlik fonksiyon olma şartını sağlıyorsa fonksiyondur ama her fonksiyon bir eşitlik içerir	Arda: Şimdi her zaman fonksiyon gözüyle her eşitliğe de yine aynı şekilde bir fonksiyon gözüyle bakmak yanlış olur ama her fonksiyon içerisinde de bir eşitlik vardır. Araştırmacı: Her fonksiyon eşitlik olarak ifade edilebilir mi diyorsun? Arda: ... evet. <i>Arda</i>

19. sorunun devamında sorulan "Fonksiyon ile eşitlik arasındaki ilişkiyi açıkla mısınız?" sorusuna öğretmen adaylarının verdiği cevaplara bakıldığında öğrencilerin farklı şeyler söylediği görülmektedir.

1. kategoride düşünceleri yer alan öğretmen adayları; bütün fonksiyonların eşitlik olduğunu ancak bütün eşitliklerin fonksiyon olmadığını söylemişlerdir. Buna gerekçe olarak da fonksiyon olma şartını sağlayan (açıkta eleman kalmaması ve her elemanın en az en fazla bir elemanla eşleşmesi) eşitliklerin fonksiyon olabileceklerini söylemişlerdir.

Bu kategoride yer alan Bekir ayrıca "*Fonksiyonun eşitlikten farkı tanım kümesinin olma durumu, diğer türlü eşitlikler fonksiyondur*" cevabını da vermiş; fonksiyonun, tanım kümesi olması itibarıyla eşitlikten farklı olduğunu söylemiştir.

İkinci kategoride yer alan Gül; bir fonksiyonun her zaman bir eşitlik, bir eşitliğin de her zaman bir fonksiyon olamayacağını söylemiştir.

Ancak daha sonra bir eşitliğin fonksiyon olmama durumuna yine fonksiyon olma şartlarını sağlayıp sağlamamasına göre örnek vermiştir:

Gül: Mesela ben $N \Rightarrow N'$ ye bir fonksiyon düşünürsem $f(x)=x-5$ fonksiyonu olsun. Bu aslında bir fonksiyon değildir çünkü 1,2,3,4,0 yazdığımda bulduğum sonuç doğal sayı değil.

Gül de 1. kategoride ki öğrenciler gibi “bir eşitliğin fonksiyon olabilmesi için fonksiyon olma şartlarını sağlaması gerektiği” fikrini ortaya koymuştur. Bunun yanında eşitliğin fonksiyon olabilmesi için tanım kümesi ile verilmesi gerektiğini belirtmiştir:

Gül: ... illa tanım kümesi olması mı gerekiyor? Bence olması gerekiyor. Çünkü ben bu fonksiyonu ve tanım kümesini R alırsam sorun çıkmıyor.

Serkan ise daha farklı bir cevap vermiş ve eğer bir eşitlik fonksiyon belirtecek bir bağıntı kuralı ve tanım ve değer kümeleri ile birlikte verilirse fonksiyon olacağını ifade etmiştir. Bir fonksiyonun ise her zaman bir eşitlik olduğunu çünkü fonksiyona değerler verdikçe, bu değerlerin görüntülerini yazarken bir eşitlik kullanılacağını söylemiştir:

Serkan: Mesela $x=\frac{\pi}{2}$ için y değeri ne olur? 1 olur.

Arda ise 1. kategorideki öğrencilere benzer olarak bir eşitliğin fonksiyon olması için fonksiyon olma şartını sağlaması gerektiğini söylemiştir. Ancak bir fonksiyonun eşitlik değil de eşitlik içerdiğini söylemiş ve Serkan'ın bahsettiği konuya değinmiştir.

Ali ise yine eşitliklerin fonksiyon olma konusunda “eğer fonksiyon olma şartını sağlıyorsa eşitlikler fonksiyondur” demiştir. Ayrıca eşitliklerde bağımlı ve bağımsız değişkenlerin olduğunu ve bu bağımlı değişkenlerin fonksiyonu temsil ettiğini söylemiştir:

Ali: Eşitlik verildiği zaman fonksiyon deriz çünkü bağımsız değişkeni ve bir bağımlı değişkeni var.

Ancak bir fonksiyonun eşitlik olma konusunda diğerlerinden farklı cevap vererek eğer örneğin $\sin$ fonksiyonundan bahsediyorsak bunun bir eşitlik olmayacağını ama $\sin x$ fonksiyonundan bahsediyorsak bunun bir eşitlik olacağını çünkü x 'e vereceğimiz her değer için bir eşitlik elde edeceğimizi söylemiştir.

Burada da yine öğretmen adaylarının bu sorunun ilk kısmında olduğu gibi fonksiyon ve eşitlik kavramları arasındaki bağlantıyı kuramadıkları görülmektedir. Yine burada da öğrencilerin bir fonksiyonun bir formülle tarif edilebilir ya da açıklanabilir olma gereksinimini muhafaza ettikleri görülmüştür (Graham&Ferrini Mundy, 1990: akt. Meel, 1995). Dede (2006) benzer bir çalışma yapmış ve öğrencilere “fonksiyon ve denklem kavramları arasındaki fark nedir?” diye sormuştur. Bu çalışmanın sonucunda burada olduğu gibi öğrencilerin bu iki kavramı ayırt edemediklerini, verdikleri cevaplarda ikisini aynı kavram gibi algıladıklarını ortaya koymuştur. Bunun ise bu kavramların yüzeysel olarak öğrenildiği, anlamlı bir öğrenmenin gerçekleşmediği anlamına geldiğini söylemiştir. Ayrıca burada öğretmen adaylarının hiçbir fonksiyon kavramının farklı gösterimlerinden bahsetmemesi de ilginçtir.

Tablo 4.20: Soru 20' ye verilen cevaplara ait kategori

Soru 20: Bir doğru denkleminin $ax+by=c$ standart formu ile $y=mx+n$ formu arasında ne fark vardır? Neden bu iki forma birden ihtiyaç duyulmuştur? Siz hangisine daha yakınsınız?		
$y=mx+n$ formuna daha yakınım	Çünkü daha Sade	Şu $y=mx+n$ ' e daha yatkınım. ... Ya şu daha kalabalık görünüyor çünkü. Bu biraz daha sade gibi. <i>Ayşe</i>
		Daha kolay bir şekilde görebiliyorum. Şeyde $ax+by+c$ ' de o fonksiyon aynı fonksiyon. Biraz karıştırılmış başka bir şey yok. Orda ki y 'yi yalnız bıraktığımız zaman yine aynı şey. <i>Arda</i>
	Çünkü eğimi daha kolay görebiliyorum	Ben genelde şunu alıyorum çünkü burada çünkü doğru deyince genelde eğim akla geliyor. Yani eğimi bulmamız gerekiyor. Burada eğimi, x 'in katsayısı oluyor. Onun için direk x ' in katsayısını aldığımızda eğimi buluyor. <i>Serkan</i>
		 doğru denklemi için şu daha doğru. ... çünkü eğimini daha kullanışlı, m falan eğimi verildiğinden dolayı bunu kullanabiliriz. <i>Bekir</i>
	Çünkü bu forma daha aşınayım	Ya bunu böyle gösteriyoruz sürekli bunu kullanıyoruz. Herhalde ondan. <i>Elif</i>
$Ax+by+c=0$ formuna daha yakınım	Çünkü doğru denkleminin en genel hali budur.	Niye çünkü en genel hali budur, ve özele inmek kolay olur. ... şimdi ($y=mx+n$ formunda) y ' nin katsayısı 2,3 ise öğrenciye söylediğimiz zaman tereddüt yaşayabilir. Ama şu yukarıdaki ifadede y 'yi çektirebilirsiniz. <i>Ali</i>

20. soruya öğretmen adaylarının verdiği cevaplar incelendiğinde bir öğretmen adayı hariç hepsinin $y=mx+n$ formuna daha yatkın oldukları gözlenmiştir. Bunun sebebi olarak bu formun daha sade, daha sık kullanılan bir form olması ya da bu formda eğimi daha rahat görebilmeleri zikredilmiştir. Ali ise diğerlerinden farklı olarak $ax+by+c=0$ standart formunu tercih etmiş ve gerekçe olarak da bu formun daha genel olmasını söylemiştir. Hatta Ali öğrencilere bu doğru denklemlerini ilk verilirken önce $ax+by+c=0$ standart formundan başlayıp bunun y' yi çekerek $y=mx+n$ formuna dönüştüğünü anlatmanın daha faydalı olacağını söylemiştir:

Ali: Mesela şurada m' nin $-b/a$ olduğunu bilemez öğrenci. Siz ilk verdiğimiz zaman, n' nin de $-c/a$ olduğunu bilemez.....mesela orada $by=-ax-c$ ' dir. Ha yine $y=$ tarzında gösterecekse öğretmen $y=(-a/b)x-c/b$ tarzında yazar.....der ki şuraya m der şuraya n der işte ... $mx+n$ şurada eğim der yani

Hangi formu tercih ederse etsin bütün öğretmen adayları iki formun da aslında aynı olduğunu ifade etmişlerdir.

$y=mx+n$ formunu tercih eden Ayşe, Serkan, Bekir; neden diğer forma ihtiyaç duyulmuş olabileceğine dair yorumlar yapmışlar ancak diğer öğretmen adayları bunun için bir sebep gösterememişlerdir:

Ayşe sebep olarak, “ $ax+by+c=0$ standart formunu $y=mx+n$ formuna dönüştürdüğümüzde m' nin katsayısının karışık bir ifade olabileceğini” söylemiştir.

Ayşe:işte y' yi yalnız bıraktığımız zaman bölü b olacak şu mesela çok karışık bir ifade çıkar çok büyük.

Serkan ise birden fazla doğru denklemi verilmişse, iki doğrunun birbirine göre durumlarını karşılaştırırken standart formun daha kullanışlı olduğunu söylemiştir:

Serkan: ...birden fazla doğru olduğu zaman doğrular arasındaki ilişkiye bakıyoruz. Genelde işte bunlar paralel midir, tek noktada kesişir mi veya çakışık mıdır? Şimdi şu gösterimde ($y=mx+n$ gösteriminde) fazla bir şey yapamayız ama şu gösterimde ($ax+by+c=0$ gösteriminde) işte katsayılar arasındaki bağıntıya bakarız.

Bekir ise standart forma doğrunun denklemini eğimi kullanmadan bulmak istediğimizde ihtiyaç duyabileceğimizi söylemiştir:

Bekir: Eğimi kullanmadan bulmak için denebilir belki ya eğim kullanmadan.

Öğretmen adaylarına “bütün doğru denklemini $y=mx+n$ formunda yazıp yazamayacaklarını” sorduğumuzda sadece Serkan ve Ali hayır cevabını vermiş diğerleri evet cevabını vermişlerdir. Serkan ve Ali ise eğimin tanımsız olduğu ya da $ax+by+c=0$ formunda b ’nin 0 olduğu durumlarda $y=mx+n$ formunun kullanılamayacağını söylemişlerdir:

Ali: Yazamama şartımız nedir? b’nin sıfır olmasıdır. b sıfır olsa o zaman ne olur $ax+c=0$ olur.

Serkan:edemeyiz çünkü eğim tanımsız oluyor.

Bu soruyu sorana kadar hiçbir öğretmen adayı sebep olarak “her doğrunun $y=mx+n$ formunda yazılamayacağını” söylememiştir. Bu soru sorulduğunda ise sadece iki öğretmen adayı doğru cevap vermiş diğerleri hiç düşünmeden “evet” cevabını vermişlerdir. Burada yine öğrencilerin anlamlı bir öğrenmeye sahip olmadıkları ve yüzeysel düşünme alışkanlığını devam ettirdikleri görülmektedir.

Tablo 4.21: Soru 21’ e verilen cevaplara ait kategori

Soru 21: $y=\sqrt{x}-4$ ve $y=\sqrt{x}-8$ gibi iki fonksiyonun grafiğini birlikte çizdiğimizde elde ettiğimiz grafikte aynı grafiği veren tek bir eşitlik var mıdır?		
Yoktur	Çünkü kesişmiyorlar	$\sqrt{x}-4=\sqrt{x}-8$ ortak çözümleri yok.bulamayız çünkü bir defa kesişmiyorlar yani ikisini birlikte sağlayan bir denklem diyorsunuz veya eşitlik şu durumda yok. <i>Serkan</i>
		yoktur ...çünkü $y=\sqrt{x}-4$ birisi, $y=\sqrt{x}-8$ birbirine eşitlediğimiz zaman hani ortak noktalarda olmak için, $\sqrt{x}$ ile $\sqrt{x}$ gidiyor. Ortak noktaları yok hocam, ortak noktaları olmayınca nasıl bir grafikte beraber çizilebilir ki, ayrı ayrı çizersiniz de ikisini üretecek bir şey yoktur hocam. <i>Ali</i>
		Neden? Kesişimleri yok çünkü, nedir? Kesişimleri yoksa paraleldir bunlar? <i>Bekir</i>
	Çünkü bir noktanın iki görüntüsü oluyor.	Yok olmaz. .. bu ikisinin grafiğini verecek... Ya nasıl bir şey yazılabilir ki? Nasıl?... böyle gidiyor. Çünkü x ’ in bir değeri için iki farklı değer yazmış olacağız o zaman. <i>Ayşe</i> Sanmıyorum yani yoktur diye, kesin diyemiyorum çünkü ikisini de üreteceği zaman bu noktadaki iki tane değeri olması lazım. x ’ in bir tane değerine karşılık y ’ nin iki tane farklı değeri çıkacağı için böyle bir eşitlik bilmiyorum ya. <i>Arda</i>
Olabilir	Araştırmacı: $\sqrt{x}+c$ şeklinde bir şeydir diyorsunuz Elif: hıhı eğer bunlar doğruysa (çizdiği grafikleri kasediyor) tam emin değilim de. <i>Elif</i>	
	Parçalı fonksiyon olabilir. Parçalı fonksiyon kullanıp iki fonksiyonu... Sonuçta her iki fonksiyon da aynı değişkeni verdiği yani her iki fonksiyon $\sqrt{x}$ ’ li ifade içeriyor. x ’ in sıfırdan büyük olduğu durumlarda biz bu fonksiyonları tanımlayabiliyoruz. Her ikisi içinde aynı durum söz konusu olduğu için bu örnek için bir problem çıkmaz. <i>Gül</i>	

21. soruda öğretmen adaylarına $y = \sqrt{x} - 4$ ve $y = \sqrt{x} - 8$ gibi iki fonksiyonun grafiğini birlikte çizdiğimizde elde edilecek grafiği üretecek bir eşitliğin olup olmadığı sorulmuştur. 2 öğretmen adayı hariç diğerleri çizilemeyeceğini farklı gerekçelerle ifade etmişlerdir. Bu 2 öğretmen adayı ise böyle bir eşitliğin olabileceğini söylemişler ancak kendileri net bir eşitlik verememişlerdir.

1. kategoride, böyle bir eşitliğin olamayacağını söyleyen öğretmen adayları iki farklı neden ifade etmişlerdir. Bu kategorinin 1. grubundaki öğretmen adaylarının söylediği neden; bu iki fonksiyonun grafiğinin kesişmiyor olmasıdır. Bu öğretmen adayları, bu iki fonksiyonun ortak çözümü olmadığı için ikisinin grafiğini birlikte üretecek bir eşitliğin olamayacağını söylemişlerdir.

Yine böyle bir eşitliğin olamayacağını söyleyen bu kategorinin 2. grubundaki Ayşe ve Arda, farklı bir gerekçe belirtmişler ve eğer böyle bir eşitlik olursa, x ' in bir değerine karşılık y 'nin iki değeri olacağını ya da x ' in iki farklı görüntüsü olacağını, bunun ise mümkün olmadığını söylemişlerdir.

2. kategoride ise istenilen şartlara uygun bir eşitliğin çizilebileceğini söyleyen Elif ve Gül vardır. Elif, $y = \sqrt{x} + c$ şeklinde bir eşitliğin, bu iki fonksiyonun grafiğini birden sağlayacağını söylemiş ancak “bunun daha ziyade bir genelleme gibi olduğu, bu eşitliğin grafiğinin yine buradaki fonksiyonların grafiklerinden birine benzeyeceği” söylenince de mutlak değerle böyle bir eşitlik bulunabileceğini söylemiş ama devamını getirememiştir:

Araştırmacı: $\sqrt{x} + c$ şeklinde birşeydir diyorsunuz.

Elif: hıhı eğer şunlar doğruysa tam emin değilim de

Araştırmacı: $\sqrt{x} + c$ dediğinizden hani bir genelleme yapmış olur onun yerine bu iki grafiği verecek tek bir eşitlik?....,

Elif: ...mutlak değer mi?

Gül ise $y = -\sqrt{x} - 4$ ve $y = \sqrt{x} - 8$ fonksiyonlarının her ikisinde de $\sqrt{x}$ li ifade olduğu ve $\sqrt{x}$ ' in katsayısı aynı olduğu için böyle bir eşitliğin parçalı fonksiyon yardımıyla bulunabileceğini söylemiştir:

Gül: ... parçalı fonksiyon olabilir. ... sonuçta bu örnek üzerinden gidersem tanım kümesini ayarlama da sorun çıkmaz. Sonuçta burada bize sorun çıkartan köklü ifade. ... x'in sıfırdan büyük olduğu durumlarda biz bu fonksiyonları tanımlayabiliyoruz.

Bu soruya verilen cevaplara bakıldığında öğretmen adaylarının hiçbirinin doğru cevap veremediği görülmüştür. Öğretmen adaylarının hepsi bu soruda istenilen eşitliği fonksiyon gibi algılamışlar ve bu cevaplarına da yansımıştır. Burada ayrıca öğretmen adaylarının, grafik çizme ile ilgili önceki tecrübelerinin de (ortak çözüm bulmaya çalışmak, parçalı fonksiyon olarak ifade etmeye çalışmak gibi) etkisi görülmektedir. İlaveten öğretmen adaylarının bu tip sorulara pek alışkın olmamaları da etki etmiş olabilir. Grafik oluşturmak ve yorumlamak matematik ve fen öğreniminde önemli bir yetenek olarak tarif edilir (Gallagher,1979). Bununla birlikte araştırmalar öğrencilerin bu yeteneklerde pek başarılı olmadığını göstermiştir (Padilla, McKenzie ve Show, 1986: akt. Thangata, 2003).

Tablo 4.22: Soru 22'ye verilen cevaplara ait kategori:

Soru 22: Grafikleri birlikte çizildiğinde bir çember oluşturacak şekilde iki fonksiyon bulabilir miyiz? Ya da grafiği yarım çember olacak şekilde bir fonksiyon tanımlayabilir miyiz?	
$x^2+y^2=r^2$ fonksiyonun tanım kümesini kısıtlayarak bulabiliriz.	..daha doğrusu $x^2+y^2=1$ olsun. Birim çember. Eğer birim çemberi çizersem hepsi olur.....eğer ben bunu x' i kısıtlarsam, fonksiyonun tanım kümesini kısıtlarsam yalnızca pozitif olan, o zaman böyle bir fonksiyon çizebilirim. Eğer ben x' i $\mathbb{R}$ değil $\mathbb{R}^+$ olarak alırsam o zaman x' in pozitif olduğu yerlerde bu grafiği çizerim. <i>Gül</i> Acaba tanım kümeleriyle mi ilgili? Yani kısıtlasak? <i>Elif</i>
Özel bir çember için parabol bulabiliriz ama genel olarak bulamayız.	Parabol olarak yapabilirim ama çember tam çember olması için bir defa elips denklemine girmemiz lazım. Orada işte baskınlığı falan vardır, $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{2} = 1$ olması lazım. 1,2 noktasından geçiyor, şimdi özel fonksiyon yazıp bunu sağlatabiliriz ama genel olarak söyleyemeyiz. Çünkü yarıçaplarının eşit olması lazım. Her parabol sonuçta fonksiyon belirtmez. Şu işte köklerini ayarlarım işte tepe noktasını ayarlarım ona göre bunun tabi bir de eksilisini alırım ters simetri için. Yani özel bir fonksiyon olması için yapabilirim ama genel olarak söyleyemem. <i>Serkan</i>
Sinüs fonksiyonu olabilir.	Sinüs fonksiyonunu! Eğer tanım kümesinden bir parçasını aldığımız zaman yarım çember olur. ...eğer tanım kümemizi şu şekilde alırsak; 0 eşittir π' den reel sayılara $f(x)=\sin x$ olarak alırsa bir yarım çember olur. <i>Arda</i>
$y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$ fonksiyonu olur.	...eğer fonksiyonu şu şekilde tanımlarsam, $\sqrt{1-x^2}$ diye tanımlarsam bu ilk grafiğim olacak, O böyle çıkacak. İkincisi de y' leri $-\sqrt{1-x^2}$ diye tanımlarsak bu sefer x' leri yine -1' e 1'den tanımlamış olacağım, bu sefer y' ler negatif olduğu için -1'e 0 aralığına geçecek. <i>Ayşe</i> Kürenin üst kapağının denklemi şu: $z=\pm\sqrt{1-x^2-y^2}$...artılısı üst kapak, eksilisi alt kapak ...şöyle yapalım; $y^2=x^2-a^2$ burada $y=\pm\sqrt{x^2-a^2}$...şimdi tamam şimdi. <i>Ali</i>
Çizilir ama bilmiyorum.	Bekir: Ama büyük ihtimal oluşturuluyordur yani Araştırmacı: Yani oluşturuluyordur uğraşabilirsiniz eğer aklınıza birşeyler gelir... Bekir: Yok yok yapamam öyle uğraşmakla yapılmaz yani bence doğru denklemleri falan baya iyi bilmek lazım, iyi çizmek lazım yani. <i>Bekir</i>

22. soruya bakıldığında öğretmen adaylarının yarım çember denklemi için farklı fikirler öne sürdüğü görülmektedir. Hatta çoğu öğretmen adayı yarım çember denklemi için bir değil birden fazla fonksiyon çeşidi söylemiş ancak sonra bu söylediklerinden birinde karar kılmışlardır.

İlk kategoride yer alan Elif ve Gül, grafikleri yarım çember olan ve birlikte çizildiklerinde bir çemberi veren fonksiyonların, $x^2+y^2=r^2$ fonksiyonunun tanım kümesini kısıtlayarak elde edebileceklerini söylemişlerdir.

Elif öncesinde parabol denklemiyle yarım çemberi (ya da tam bir çemberi) elde etmeye çalışmış ama olmadığını görünce vazgeçmiştir:

Elif: ... $f(x)=x^2$. Yani pek çembere benzemiyor ama şöyle düşündüm; sonuçta bunun hani şu işaretini değiştirirsem....yanlış mı? Yerlerine koysak hani şurada birşey oluyor $-x^2$ ama ben bunu $y, +c$ değerini versek şuradan ... şöyle nasıl böyle iç merkezli mi diyorlar. .. tam çember olmuyor ama.

Parabolü denedikten sonra tanım kümesini kısıtlamaya çalışmış ama bunun da sorunun cevabı olmayacağını düşünerek vazgeçmiştir.

Gül ve Elif'in; soruda istenen yarım çemberin zihinde canlandırıldığında (ki genelde akla ilk merkezci çember gelir) en dikkat çekici özelliğinin x 'in ya da y 'nin hep pozitif ya da hep negatif olmasından etkilenecek böyle bir cevap vermiş olmaları muhtemeldir.

2. kategori de yer alan Serkan ise önce çember denkleminde yola çıkmış, çemberin üst yarısını $y > \sqrt{r^2 - x^2}$, eşitsizliği ile elde etmeye çalışmıştır:

Serkan: Buradan y 'yi çekersem $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ şimdi şu durumda işte merkezi $(0,0)$ yarıçapı r birim olan çemberi şu koordinat ekseninde gösteriyoruz. Mesela şurayı y büyük yapsam y 'nin büyük olduğu değerler.. bir de y küçük aynı şekilde şu ifadeye.... değeri büyük olduğu değerler küçük dersem de aşağıyı verir ikisini birleştirdiğimiz zaman da çember oluşur.

Ancak bunun yanlış olduğunu fark edince bu sefer $y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$ denklemini denemiş ama bunun da sağlamadığını çünkü fonksiyon olmadığını söyleyip vazgeçmiştir:

Serkan: ... y aslında şey $\pm \sqrt{r^2 - x^2}$ aslında bu da tam sağlamıyor. ... bu zaten şey değil ki fonksiyon değil...

Bunu söylemesinin nedeni x' in değerini önce $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ denklemi için sonra da $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ denklemi için hesaplayıp x' in iki görüntüsü olduğunu düşünmesidir:

Serkan: Bulunamaz çünkü çember grafiği zaten fonksiyon değildir.

Serkan burada aslında doğru düşünmüştür. Ancak soruda sorulan fonksiyon grafiği yarım çember (çember değil) olan fonksiyonudur. Kendisi yukarıda x' in değerini aynı anda her iki yarım çember için de hesapladığı için bu hataya düşmüştür.

Serkan, daha sonra verilen özel bir çember için parabol ayarlanabileceğini ama genel bir çember denklemi için böyle bir fonksiyonun bulunamayacağını söylemiştir.

Arda ise daha farklı cevap vererek sinüs fonksiyonun grafiğinin eğer tanım kümesi kısıtlanırsa yarım çemberi vereceğini söylemiştir:

Arda: ... sinüs fonksiyonunu eğer tanım kümesinden bir parçasını aldığımız zaman yarım çember olur.

Aslında diğer kategorilerde yer alan Ayşe ve Bekir de cevap olarak sinüs fonksiyonunu söylemişler ancak ikisi birlikte çizildiğinde bir çember oluşturacak şekilde sinüs fonksiyonunu (ya da cosinüs) ayarlayamayacakları için vazgeçmişlerdir:

Bekir: Sinüs ve cosinüs olmaz mı? ... mesela şu sinüs olsa sinüs şu şekilde öbürü de cosinüs olsa alttan gelmez mi böyle? Gelir yani şekilde ... grafikleri aynı değerler için değil de fonksiyonların aynı olması şart değil yani ... tanım kümesinin falan aynı olması şart mı?yani tam olarak üst üste örtmüyor.

4.kategoride yer alan Ali ve Ayşe ise yarım çember denklemleri olarak $y=\pm\sqrt{r^2 - x^2}$ yi söylemişlerdir. Ayşe öncesinde yukarıda da bahsedildiği gibi sinüs fonksiyonunu söylemiş bunun olmayacağını görünce Gül ve Elif gibi tanım kümesini kısıtlamayı denemiştir:

Ayşe: Şimdi fonksiyonum $x^2+y^2=1$... ama bunun tanım kümesini değiştirmem lazım fonksiyon olabilmesi için x' leri -1' den 1 tanımlıyorum, y' leri de 0'a 1'den tanımlıyorum.

Ancak daha sonra “bu kısıtlamaları nasıl yapabileceği, x değerlerini $[-1,1]$ aralığında tanımlarsa y değerlerini nasıl 0 ile 1 arasına kısıtlayacağı” sorulunca $x^2+y^2=1$ denkleminde y' yi yalnız bırakarak sonucu bulmuştur.

Ali'de sonuca çember denklemini $x^2+y^2=a^2$ kullanarak ulaşmaya çalışmış ama denkleminde a' yı yalnız bırakınca bir hayli uğraşmıştır. Ancak daha sonra önceden bildiği; kürenin üst kapak denkleminde yola çıkarak yarım çember denklemini bulmuştur.

Son kategoride yer alan Bekir ise yukarıda bahsedildiği gibi sinüs ve cosinüs fonksiyonları ile yarım çemberleri elde etmiş ancak ikisi birleştirildiğinde bir çember oluşmadığı için vazgeçmiştir. Daha sonrası için denklemi bulamayacağını, çok uğraşmak gerektiğini söylemiştir.

Öğrencilerin bu soruya verdikleri cevaplara bakıldığında bir hayli zorlandıkları, sadece iki öğretmen adayının (yönlendirmeler ya da hatırdaki olan yardımcı bilgiler sayesinde) yarım çember denklemini ulaşabildiği, diğerlerinin ise doğru cevap veremedikleri görülmüştür. Bazı öğretmen adaylarının ise parabolle yarım çemberi karıştırdıkları görülmüştür.

Bir önceki sorunun aksine bu soru (çember denkleminin grafiği yarım çember olan fonksiyonlar ya da fonksiyon grafiği çizimi gibi öğretmen adaylarının aşına oldukları alt kavramlar içerdiği için) öğretmen adayları için hayli tanıdık. Buna rağmen çok az doğru cevap gelmesi hatta bazı öğretmen adaylarının cevaba çok yaklaşımlarına rağmen yine de doğru cevaba ulaşamamaları onların grafik çizimi ya da hem cebirsel ifadeyi grafiksel gösterime hem grafiksel gösterimi cebirsel ifadeye

dönüştürmekte zorlandıkları sonucunu ortaya çıkarmıştır. Knuth (2000) öğrencilerin cebirsel ve grafiksel gösterimler arasında bağlantı kurmada zorlandıklarını gözlemlemiştir (akt: Thangata, 2003). Araştırmalar öğrencilerin grafiksel gösterimi cebirsel gösterime çevirmede tersine göre daha çok zorlandıklarını göstermiştir. (Adam, 1993; Eisenberg, 1992; Markovits et al, 1998; akt: Thangata, 2003). Bu sonuç burada bizim öğretmen adaylarının yarım çember denklemini bulamamaları ile örtüşmektedir. Eisenberg(1992), görsel problem çözme yeteneğinin, problemi cebirsel olarak çözmekten daha derin bir anlamayı gösterdiği için grafiksel gösterimin önemini vurgular. (akt: Thangata, 2003) Fonksiyonların farklı gösterimlerini birbirine dönüştürmeleri öğrencilerin matematiksel kavramlar için daha bütünleştirici bir anlam yapılandırmalarına imkan vermektedir (Eisenberg, 1992: (akt: Thangata, 2003). Wilson ve Krapfl (1994) çoklu gösterimleri kullanmanın bir gösterimi diğerine dönüştürmenin ya da yorumlamanın ve gösterimler arasındaki istenilen bağlantıları analiz etmenin fonksiyon kavramını anlama için anahtar olduğunu ifade etmişlerdir (akt: Thangata, 2003). Öğrenciler çeşitli gösterimleri kullandıkları, karşılaştıkları ve ürettikleri takdirde matematiksel kavramları ve ilişkileri daha derin anlayabilirler ve geliştirebilirler (NCTM, 2000).

BÖLÜM 5

TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Matematik eğitimin temelinde matematiksel kavramların öğretimi yatmaktadır. Üstelik matematikte kavramlar aşamalı olarak ve birbirini takip eden sırayla öğretilir. Bu nedenle bir kavramın anlamlı bir şekilde öğrenilmesi çok önemlidir. Hele fonksiyon gibi matematik eğitiminde büyük bir rolü olan kavramların öğrenilmesi daha fazla önem arz etmektedir.

Matematiğin birçok alanında kullanılan fonksiyon kavramı, soyut düzeyde ve farklı gösterimlere sahip çok yönlü bir kavramdır. Bu yüzden öğrencilerin bu kavramı anlamlı bir şekilde öğrenmekte hayli zorlandıkları görülmektedir. Burada kastedilen anlamlı öğrenme; fonksiyon kavramının alt ve üst kavramlarıyla ilişkilerinin ve birbirleriyle olan bağlantılarının ortaya çıkarılarak öğrenilmesidir. Yoksa, kavramın formal tanımını bilme ya da bir fonksiyonun belirli bir noktadaki değerini hesaplama gibi beceriler anlamlı öğrenmenin gerçekleştiği anlamına gelmez (Dede, 2006).

Öğrenciler; çeşitli gösterimleri kullandıkları, karşılaştırdıkları ve ürettikleri takdirde matematiksel kavramları ve ilişkileri daha derin anlayabilirler ve geliştirebilirler (NCTM, 2000).

Araştırmalar çoğu öğrenci ve öğretmen adayının modern fonksiyon kavramını edinemediklerini göstermiştir.(Dreyfus ve Eisenberg, 1983, 1987; Even, 1993; Ferrini-Mundy ve Graham, 1991; Markovits, Eylon ve Bruckheimer, 19983, 1986; Marnyonskii, 1975; Vinner, 1983: akt. Meel, 1995)

Meel (1995) yaptığı çalışma sonucunda, birçok öğretmen adayının fonksiyon kavramının modern tanımıyla ilgilenirken tutarsız olduklarını ortaya koymuştur. Uygulamada, bu çalışmada, öğretmen adaylarının fonksiyon kavramının cebirsel kural temelli yorumuna sahip olduklarını göstermiştir. Bunun muhtemel bir sebebi,

öğrencilerin ya da öğretmen adaylarının genellikle fonksiyonları bir formülle verilen eşleme kuralı olarak inşa etmeleridir. (Even, 1993: akt. Meel, 1995; Vinner&Dreyfus, 1989). Meel (1995); bunun başka bir sebebinin de; öğrencilerin ve öğretmen adaylarının tarihi tanımın etkisinde kalmalarının olabileceği söylemiştir. Öğretmenlerin matematiksel dilin ve sembollerin gelişimi ve bunların matematiksel fikirlerin aktarımına nasıl etki ettiğini tecrübe etmeye ihtiyaçları olduğunu söylemiştir.

Knuth (2000), öğrencilerin cebirsel ve grafiksel gösterimler arasında bağlantı kurmakta zorlandıklarını gözlemlemiştir. Bazı araştırmalar, fonksiyonların geleneksel sırayla öğretilmesinin (cebirsel ifadeden değerler tablosuna oradan da grafiğe) birçok öğrencide bu kavramı geliştirmek için en etkili yol olmadığını ifade etmiştir (akt. Duvall, 2005).

Bu çalışmanın sonucunda öğretmen adaylarının ;

- fonksiyon, bir fonksiyonun grafiği, lineer fonksiyon ve ters fonksiyon gibi matematiksel kavramları günlük hayatla bağdaştırmada,
- bir fonksiyonun cebirsel gösterimini grafiksel gösterime dönüştürme ya da tam tersi bir dönüşümü yapmada,
- herhangi bir fonksiyonun tanım kümesini belirlemede ve aynı şekilde bileşke fonksiyonun tanım kümesini belirlemede,
- fonksiyon, eşitlik ve matematiksel ifade kavramları arasındaki farkı ortaya koymada ya da bu kavramlar arasındaki ilişkileri belirlemede,
- pozitif irrasyonel bir sayının irrasyonel kuvvetini(özel olarak e^{π} ifadesini) tanımlamada,
- $f(x)$ notasyonunun kullanım gerekçelerini söylemede ve
- doğru denkleminin $ax+by+c=0$ formunun, $y=mx+n$ formuna göre avantajlı olduğu durumları tarif etmede zorluklar yaşadıkları görülmüştür.

Bunun yanında öğretmen adaylarının bir bağıntının fonksiyon olması için gereken şartlara bir hayli vurgu yaptığı ve bu şartları tam olarak ifade ettikleri, ama yine de fonksiyon kavramının anlamlı bir öğrenimine sahip olmadıkları; buna bağlı

olarak bu kavramın farklı gösterimlerini etkin kullanamadıkları ve bu kavramı günlük hayatla bağdaştıramadıkları görülmüştür.

Yapılan literatür çalışmasında; ters fonksiyon, bileşke fonksiyon, tanım ve değer kümesi, parametre, lineer fonksiyon, bağımlı-bağımsız değişken gibi konularda yeterli kaynak bulunamamış ve dolayısıyla bazı sorularda güçlü karşılaştırmalar ve yorumlar yapılamamıştır. Varolan araştırmaların daha ziyade fonksiyon kavramının nasıl öğrenildiği, nasıl öğretildiği, nasıl kavramlaştırıldığı gibi konulara yoğunlaştığı görülmüştür.

Bulunan bu sonuçların ışığında fonksiyon kavramı ile ilgili eğitim programlarını hazırlayanlara ve uygulayanlara aşağıdaki öneriler sunulmaktadır:

Fonksiyon kavramının öğretimine-öğrenimine daha fazla zaman ayrılabilir ve bu süre fonksiyon kavramını kavramsal düzeyde tartışmaya harcanabilir.

Bu kavram öğrencilere ilk tanıtılırken günlük hayattan örneklerle sunulabilir. Böylece kavramı daha iyi anlamaları ve günlük hayatla bağdaştırmaları sağlanabilir.

Fonksiyon kavramı verilirken tarihi gelişiminden ve sembollerin oluşumundan bahsedilebilir. Böylece bu kavramın ve bu kavramla ilgili sembollerin arkasında yatan fikirler ve ifade ettikleri anlamlar daha iyi kavranabilir.

Bu kavramın farklı gösterimleri ve gösterimler arasındaki ilişkiler ve dönüşümler üzerinde daha fazla durulabilir.

Fonksiyon kavramı ile ilgili öğrencilerin sahip olduğu kavram yanılgıları önceden araştırılıp bunların ışığında ders planları tasarlanarak öğrencilerin bu yanılgılara düşmesi engellenebilir.

Bir fonksiyonun grafiği, grafik çizimi, bilgiyi grafikten okuma gibi fonksiyon ve grafik ilgili kavramlar üzerinde daha çok durulabilir ve böylece daha anlamlı bir öğrenme ve grafiği etkin kullanma sağlanabilir.

Ayrıca öğretmen adaylarının fonksiyon kavramı ile ilgili kavram yanlışlarının giderilmesi, bu kavramın derinlemesine öğrenilebilmesi ve öğretmenlik yaşamlarında anlamlı bir öğretimin sağlanabilmesi için matematik öğretmeni yetiştiren eğitim kurumlarında bu kavramın öğretilmesine (özellikle kavramsal düzeyde) daha fazla zaman ayırılabilir. Bunun yanında fonksiyon kavramının nasıl daha iyi öğretilbileceği ile ilgili öğretmen adaylarına çalışmalar yaptırılabilir.

Bu konu ile ilgili öğretmen adaylarının kavram yanlışlarının belirlenebilmesi için bulunan sonuçlar ışığında daha fazla öğretmen adayı içeren nicel çalışmalar yapılabilir. Bulunan kavram yanlışlarının giderilebilmesi için değişik yöntem ve tekniklerin kullanıldığı deneysel araştırmalar uygulanabilir.

BÖLÜM 6

KAYNAKÇA

Ashworth, P. and Lucas, U. (1998). What is the “World” of Phenomenography. *Scandinavian Journal of Educational Research*. **42 (4)**, 415-431.

Bell, D. I. (2001). **An Inquiry Into the Emergence of Transformative Leadership in Higher Education in South Africa : A Phenomenographic Study**. USA: University of Massachusetts Amherst (Yayınlanmamış Doktora Tezi).

Clement, L. (2001). What do Student Really Know About Functions. *The Mathematics Teacher*, **94 (9)**, 745.

Davidenko, S. (1997). Building the Concept of Function from Student Everyday Activities. *The Mathematics Teacher*, **90 (2)**, 144-149.

Dede, Y. (2006) Mathematics Educational Values Of College Students' Towards Function Concept. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, **2(1)**, 82-102. <http://www.ejmste.com>

Doğan, A., Sulak, H. ve Cihangir, A. (2002). **İlköğretim Matematik Eğitimi Anabilim Dalı Öğrencilerinin Özel Fonksiyonlarda Limit, Türev ve Türev Uygulamaları Konularındaki Yeterlilikleri Üzerine Bir Araştırma**, V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, 975-982 :Ankara.

Duvall, S. A. (2005). **A Case Study Two Students' Concept Images of Parameter in a Multi-representational Differential Equations Course**. University of Northern Colorado (Yayınlanmamış Doktora Tezi).

Dyke, F. (2003). Using Graph to Introduce Functions. *The Mathematics Teacher*, **96 (2)**, 126-137.

Eisenberg, T. (1991). Functions And Associated Learning Difficulties. David Tall (Eds.) **Advanced Mathematical Thinking**. London: Kluwer Academic Publishers.

Felix, A. (2004). **The Adult Heritage Spanish Speaker in the Foreign Language Classroom: A Phenomenography**. Capella University (Yayınlanmamış Doktora Tezi).

Eklund-Myrskog, G. (1996). **Students' Choice Of Different Conceptions Of Learning In Theoretical Studies And Practice Within Teacher Education**. Proceedings HERDSA Conference 1996. Perth, Western Australia, 8-12.

Güveli, H. ve Güveli, E. (2002). **Bağıntı, Fonksiyonun Tanımı, Birebir Fonksiyon ve Örten Fonksiyon Konularında Lise-1 Düzeyinde Kavram Yanılgılarının Tespiti**. V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, 1019-1025 :Ankara.

Hanycz, C. M. (2003). **Through the Looking Glass: Mediator Conceptions of Philosophy, Process and Power**. USA: York University(Yayınlanmamış Doktora Tezi).

Hitt, F. (1998). Difficulties in the Articulation of Different Reprsentations Linked to the Concept of Function. *Journal of Mathematical Behavior*, 17 (1), 123-134.

Hanycz, C. M. (2003). **Through the Cooking Glass: Mediator Conceptions of Philosophy, Process and Power**. Canada: York University (Yayınlanmamış Doktora Tezi).

Jafari, M. and Iturralde, J. (2004). **Physics Didactics**.

<http://www.fysik.uu.se/kurser/fy600/rapporter2004/GrpB/gr75ij/rep.htm>

King, S. (2002). Function Notation. *The Mathematics Teacher*, 95 (8), 636.

Lowrey, K. A. (2002). **How Chemistry Students for an Exam: A Phenomenographic Analysis**. Purdue Univeristy (Yayınlanmamış Doktora Tezi).

Lucus, C. A. (2005). **Composition of Funtions and Inverse Funtion of a Funtion : Main Ideas, As Perceived by Teachers and Presevice Teachers.** Simon Fraser Universty (Yayınlanmamış Doktora Tezi).

Marton, F. (1981). Phenomenography - Describing Conceptions of the World Around us. *Instructional Science*. **10**, 177-200.

McDonald, P. (2000). The Nature of Algorithm Understanding A Phenomenographic Investigation.

Meel, D. E. (1995). Prospective Teachers' Understandings: Function and Composite Function. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers*.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Professional standarts for Teaching Mathematics. VA: NCTM.

Orgill, M. (2000). **Phenomenography**. www.minds.may.ie/~Edez/phenom.html

Ponte, J. P. (1990). The History of the Concept of Function and Some Educational Implications. *Journal Educação e Matemática* (of the Portuguese Association of Teachers of Mathematics), **15**, 3-9.

Sajka, M. (2003). A secondary School Student's Understanding of the Concept Function-A case Study. *Educational Studies in Mathematics*, **53**: 229-254.

Sánchez, V. and Llinares, S. (2003). Four Student Teachers' Pedagogical Reasoning on Functions. *Journal of Mathematics Teacher Education*. **6**: 5-25.

Thangata, F. (2003). **The Calculator Based Ranger and Students' Understanding of Motion Graphs and Funtions.** University of Florida (Yayınlanmamış Doktora Tezi).

Trigwell, K. (2000). **Phenomenography: Discernment & Variation.** In C.Rust (ed) **Improving Student Learning.** Proceedings of the 1999 7th International Symposium, Oxford Centre for Staff & Learning Development: Oxford.

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. David Tall (Eds.) **Advanced Mathematical Thinking.** London: Kluwer Academic Publishers.

Vinner, S. and Dreyfus, T. (1989). Images and Definations for Concept of Function. **Journal for Research in Mathematics Education.** 20(4), 356-366.