



**T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



DOKTORA TEZİ

**FORMEL KUVVET SERİLERİ CİSİMLERİNDE TRANSANDANT
SAYILAR**

Büşra CAN

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

DANIŞMAN

Doç. Dr. Gülcan KEKEÇ

Temmuz, 2022

İSTANBUL

Bu alışma 05.07.2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Doç. Dr. Gülcan KEKEÇ (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. Serap ÖZTOP KAPTANOĞLU
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Doç. Dr. Kağın KURŞUNGÖZ
Sabancı Üniversitesi
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi

Prof. Dr. İsmail Şuayip GÜLOĞLU
Doğuş Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi

Prof. Dr. Erhan ÇALIŞKAN
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi



- **İntihal Programı Beyanı**

20.04.2016 tarihli resmi gazetede yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

- **Tezden Üretilmiş Yayınların Künye Bilgileri**

[B. Can and G. Kekeç, 2022, On transcendental continued fractions in fields of formal power series over finite fields, *Bull. Aust. Math. Soc.*, 105, 392-403]

ÖNSÖZ

Yüksek lisans ve doktora çalışmalarım boyunca bilgisini, tecrübesini ve desteğini benden esirgemeyen, insani yönünü ve çalışma ahlakını da örnek aldığım değerli danışman hocam Doç. Dr. Gülcan Kekeç'e gösterdiği emek ve özveriden dolayı en içten dileklerle teşekkür ederim.

Öğrenim süresince ve tüm hayatım boyunca manevi desteğini benden esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

Temmuz, 2022

Büşra CAN



İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖNSÖZ	iv
İÇİNDEKİLER	v
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ	vi
ÖZET	vii
SUMMARY	viii
1. GİRİŞ	1
2. GENEL KISIMLAR	3
2.1. SONLU BİR CİSİM ÜZERİNDEKİ FORMEL KUVVET SERİLERİ CİSMİ	3
2.1.1. Formel Kuvvet Serilerinin Mahler ve Koksma Sınıflandırmaları	4
2.1.2. $\mathbb{K}$ Cisminde Sürekli Kesirler	7
2.2. LEMMALAR	10
3. MALZEME VE YÖNTEM	14
4. BULGULAR	15
4.1. SONLU CİSİMLER ÜZERİNDEKİ FORMEL KUVVET SERİLERİ CİSİMLERİNDE TRANSANDANT SÜREKLİ KESİRLER	15
4.2. SONLU CİSİMLER ÜZERİNDEKİ FORMEL KUVVET SERİLERİ CİSİMLERİNDE MAHLER'İN U_M –SAYILARI	30
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	47
KAYNAKLAR	48
ÖZGEÇMİŞ	51

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
K	: q elemanlı sonlu bir cisim
$K[x]$	: K üzerindeki x değişkenine bağlı polinomlar halkası
$K(x)$	: $K[x]$ in kesirler cismi
$\mathbb{K}$	: K cismi üzerindeki formel kuvvet serileri cismi
$\widehat{\mathbb{K}}$	: $\mathbb{K}$ cisminin cebirsel kapanışının $ \cdot $ değerlendirmesine göre tamamlanışı
$K[x][y]$	: $K[x]$ halkası üzerindeki y değişkenine bağlı polinomlar halkası
$\deg(P)$	: $P(y) \in K[x][y]$ polinomunun y ye göre derecesi
$H(P)$	: $P(y) \in K[x][y]$ polinomunun katsayılarının mutlak değerlerinin maksimumu
$\deg(\alpha)$	: α cebirsel formel kuvvet serisinin derecesi
$H(\alpha)$	: α cebirsel formel kuvvet serisinin yüksekliği
$ \overline{\alpha} $	: α cebirsel formel kuvvet serisinin $K(x)$ üzerindeki eşleniklerinin mutlak değerlerinin maksimumu

ÖZET

DOKTORA TEZİ

FORMEL KUVVET SERİLERİ CİSİMLERİNDE TRANSANDANT SAYILAR

Büşra CAN

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Gülcan KEKEÇ

Mahler reel transandant sayıları ayrık üç sınıfa ayırmıştır. Bundschuh bu sınıflandırmayı sonlu bir K cismi üzerindeki formel kuvvet serileri cismi $\mathbb{K}$ ya taşımış ve $\mathbb{K}$ da benzer bir sınıflandırma oluşturmuştur. Böylece transandant formel kuvvet serilerini ayrık üç sınıfa ayırmıştır. Bu sınıflardan birini U -sayıları oluşturur. U -sayıları ise her bir $m = 1, 2, \dots$ için U_m alt sınıflarına ayrılmıştır. Bu tez çalışmasında $\mathbb{K}$ cismindeki U_m -sayıları üzerine incelemeler yapılmıştır. İlk olarak formel kuvvet serileri cismi $\mathbb{K}$ da, m . dereceden cebirsel formel kuvvet serilerinin $\mathbb{K}$ da sürekli kesir açılımları kullanılarak, U_m -sayıları elde etmemizi sağlayacak bir sonuç inşa edilmiştir. Daha sonra, katsayıları $K(x)$ in m . dereceden bir genişlemesinden alınmış polinomların $\mathbb{K}$ cismindeki bazı U_1 -sayıları için aldığı değerlerin U_m -sayıları olduğu gösterilmiştir.

Temmuz 2022, 60 sayfa.

Anahtar kelimeler: Sonlu bir cisim üzerindeki transandant formel kuvvet serilerinin Mahler sınıflandırması, U -sayısı, sürekli kesir.

SUMMARY

Ph.D. THESIS

TRANSCENDENTAL NUMBERS IN FIELDS OF FORMAL POWER SERIES

Büşra CAN

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Gülcan KEKEÇ

Mahler divided the real transcendental numbers into three disjoint classes. Bundschuh carried over this classification to the field $\mathbb{K}$ of formal power series over a finite field K and introduced a similar classification. So he separated transcendental formal power series into three disjoint classes. U -numbers are one of these classes. U -numbers are subdivided into U_m -subclasses ($m = 1, 2, \dots$). We work on U_m -numbers in the field $\mathbb{K}$. Firstly, we establish a result which enables us to construct explicit examples of U_m -numbers by using continued fraction expansions of algebraic formal power series of degree m in $\mathbb{K}$. Next, we show that the values of some polynomials whose coefficients belong to a field extension of degree m over $K(x)$ at some U_1 -numbers in $\mathbb{K}$ are U_m -numbers.

July 2022, 60 pages.

Keywords: Mahler's classification of transcendental formal power series over a finite field, U -number, continued fraction.

1. GİRİŞ

K , sonlu bir cisim olsun. $K(x)$ ile K cismi üzerindeki rasyonel fonksiyonlar cismini ve $\mathbb{K}$ ile K cismi üzerindeki formel kuvvet serileri cismini gösterelim. $\xi \in \mathbb{K}$ formel kuvvet serisi, $K(x)$ üzerinde cebirsel ise ξ 'ye bir cebirsel formel kuvvet serisi denir. Aksi takdirde, ξ 'ye bir transandant formel kuvvet serisi denir.

1978 yılında Bundschuh [2], Mahler [1] in 1932 yılında reel transandant sayılar için verdiği sınıflandırmayı $\mathbb{K}$ ya taşıyarak, $\mathbb{K}$ da bir sınıflandırma oluşturdu. Bundschuh [2], $\mathbb{K}$ cismindeki transandant formel kuvvet serilerini ayrık üç sınıfa ayırdı ve bu sınıflardaki transandant formel kuvvet serilerini S-sayıları, T-sayıları ve U-sayıları olarak adlandırdı. U-sayıları da U_m ($m = 1, 2, 3, \dots$) alt sınıflarına ayrılmaktadır.

$\mathbb{K}$ cisminde ilk U_m -sayısı örneklerini, 1980 yılında Oryan [3] vermiştir. Oryan [3], katsayıları $K(x)$ in m . dereceden sonlu bir genişlemesinden alınmış bazı boşluk serilerini düşünmüş ve $K(x)$ deki sıfırdan farklı argümanlar için bu serilerin değerlerinin U_m -sayıları olduğunu göstermiştir. Son zamanlarda, Kekeç [4], [5], [6], $\mathbb{K}$ cisminde U-sayıları elde edilmesine katkıda bulunmuştur.

Bu tez çalışmasında $\mathbb{K}$ cismindeki transandant sayılar (transandant formel kuvvet serileri), özellikle de U_m -sayıları üzerinde çalışılmıştır.

Çalışmanın ikinci bölümü olan Genel Kısımlar Bölümünde, ilk olarak Arşimedyen olmayan değerlendirmenin tanımı verilmiş ve formel kuvvet serileri cismi $\mathbb{K}$ tanıtılmıştır. Daha sonra Mahler ve Koksma'nın reel transandant sayılar için verdikleri sınıflandırmaların $\mathbb{K}$ cismine taşınmış halleri ifade edilmiştir. Bu bölümde ayrıca, bu çalışmada elde edilen teoremlerin ispatlarında sıkça kullanılacak olan, $\mathbb{K}$ cismindeki sürekli kesirler teorisi hakkında bilgi verilmiştir. Son olarak, çalışmada elde edilen teoremlerin ispatlarında kullanılacak olan bazı lemmalar ifade edilmiş ve Alniaçık [7, Lemma IV] ün $\mathbb{K}$ -benzeri olan Lemma 2.2.3 ispatlanmıştır.

Çalışmanın üçüncü bölümü olan Malzeme ve Yöntem bölümünde, bu tez çalışmasında elde edilen sonuçların ispatlarında kullanılan matematiksel tekniklerinden bahsedilmiştir.

Tezin dördüncü bölümü olan Bulgular iki kısma ayrılmıştır. İlk kısımda öncelikle, Teorem 4.1.1 de, İçen [8] in bir kompleks cebirsel sayının yüksekliği için bir üst sınır verdiği ünlü lemması, formel kuvvet serileri cismi $\mathbb{K}$ ya taşınmıştır ve bu lemmanın $\mathbb{K}$ –benzeri inşa edilmiştir. Daha sonra bu teoremden yararlanılarak, Teorem 4.1.2 de, Alnıaçık [7, Theorem] ve ispatında verilen yöntem $\mathbb{K}$ cismine taşınmıştır ve Alnıaçık [7]’ın bu ilginç teoreminin $\mathbb{K}$ –benzeri kurulmuştur. Böylece formel kuvvet serileri cismi $\mathbb{K}$ da, m . dereceden cebirsel formel kuvvet serilerinin $\mathbb{K}$ da sürekli kesir açılımlarını kullanarak, yeni U_m -sayıları elde etmemizi sağlayacak bir sonuç ispatlanmıştır. Ayrıca bu sonuç (Teorem 4.1.2) için bir örnek oluşturulmuştur.

Bulgular Bölümünün ilk kısmında elde edilen teoremler Teorem 4.1.1 ve Teorem 4.1.2, Can ve Kekeç [9] makalesinde yayınlanmıştır.

Bulgular Bölümünün ikinci kısmında Teorem 4.2.1 ve Teorem 4.2.2 de ise, Alnıaçık [10, Chapter I] deki Teorem I ve Teorem III ve ispatlarında verilen yöntemler $\mathbb{K}$ cismine aktarılmıştır ve bu teoremlerin $\mathbb{K}$ –benzerleri inşa edilmiştir. Böylece, $\mathbb{K}$ daki bir U_1 –sayısının cebirsel formel kuvvet serisi katsayılı tam kombinasyonlarının bazı koşullar altında U_m –sayıları olduğu ispatlanmıştır.

Tez çalışmasının son bölümü olan Tartışma ve Sonuç’ta, Bulgular Bölümünün genel bir değerlendirmesi yapıp ileride üzerinde çalışılabilecek bazı problemler ifade edilmiştir.

2. GENEL KISIMLAR

2.1. SONLU BİR CİSİM ÜZERİNDEKİ FORMEL KUVVET SERİLERİ CİSMİ

Tanım 2.1.1. K bir cisim olsun. Bu durumda aşağıdaki koşulları sağlayan bir $|\cdot| : K \rightarrow \mathbb{R}$ mutlak değer fonksiyonuna K cisminin bir değerlendirme denir:

Her $a, b \in K$ için

- $|a| \geq 0$ ve $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$,
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$,
- $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Eğer K cismi yukarıdaki üç koşula ek olarak

$$|a + b| \leq \max\{|a|, |b|\}$$

koşulunu da sağlıyorsa $|\cdot|$ mutlak değer fonksiyonuna bir Arşimedyen olmayan değerlendirme denir.

K , q elemanlı sonlu bir cisim olsun. $K[x]$ ile K üzerindeki x değişkenine bağlı polinomlar halkasını, $K(x)$ ile $K[x]$ in kesirler cismini ve $\deg(a)$ ile sıfır polinomdan farklı bir $a(x) \in K[x]$ polinomunun x e göre derecesini gösterelim. $a(x)$ ve $b(x)$, K üzerinde sıfır polinomdan farklı polinomlar olmak üzere,

$$|0| = 0 \quad \text{ve} \quad \left| \frac{a(x)}{b(x)} \right| = q^{\deg(a) - \deg(b)}$$

ile $K(x)$ üzerinde Arşimedyen olmayan bir $|\cdot|$ mutlak değer fonksiyonu tanımlanır. $K(x)$ in arşimedyen olmayan bu $|\cdot|$ değerlendirmeye göre tamamlanışına K sonlu cismi üzerindeki formel kuvvet serileri cismi denir ve bu cisim $\mathbb{K}$ ile gösterilir. $K(x)$ üzerindeki $|\cdot|$ mutlak

değer fonksiyonunun $\mathbb{K}$ ya genişlemesi de yine $|\cdot|$ ile gösterilir. Sıfırdan farklı herhangi bir $\xi \in \mathbb{K}$,

$$\xi = \sum_{n=r}^{\infty} a_n x^{-n}$$

şeklinde tek türlü belirli bir biçimde yazılabilir, burada $n = r, r+1, \dots$ için $a_n \in K$, $a_r \neq 0$; r , $|\xi| = q^{-r}$ olacak şekildeki tam sayıdır. $\mathbb{K}$ cisminin elemanlarına formel kuvvet serileri denir.

Bir $\xi \in \mathbb{K}$ formel kuvvet serisi, $K(x)$ üzerinde cebirsel ise ξ ye bir cebirsel formel kuvvet serisi denir. Aksi takdirde, ξ ye bir transandant formel kuvvet serisi denir. $K[x]$, $K(x)$ ve $\mathbb{K}$ sırasıyla, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ ye benzer olarak düşünülebilir.

$P(y) = a_0 + a_1 y + \dots + a_n y^n$, $K[x]$ üzerinde sıfır polinomdan farklı bir polinom olsun. Burada $a_i \in K[x]$ ($i = 0, 1, \dots, n$) olduğuna dikkat edelim. $P(y)$ polinomunun y değişkenine göre derecesi, $\deg(P)$ ile gösterilir. $P(y)$ polinomunun yüksekliği $H(P)$ ise, $H(P) = \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_n|\}$ ile tanımlanır. α bir cebirsel formel kuvvet serisi ve $P(y)$ onun $K[x]$ üzerindeki minimal polinomu olsun. Bu durumda, α nın derecesi $\deg(\alpha)$ ve yüksekliği $H(\alpha)$, sırasıyla, $\deg(P)$ ve $H(P)$ ile tanımlanır. Ayrıca, $P(y)$ polinomunun köklerine α nın $K(x)$ üzerindeki eşlenikleri denir.

2.1.1. Formel Kuvvet Serilerinin Mahler ve Koksma Sınıflandırmaları

Mahler [1], 1932 yılında reel sayılar için bir sınıflandırma vermiş ve reel transandant sayıları S -, T - ve U -sayıları gibi ayrık üç sınıfa ayırmıştır. U -sayıları sınıfı da U_m ($m = 1, 2, 3, \dots$) alt sınıflarına ayrılır. LeVeque [11], 1953 yılında, ilk reel U_m -sayısı örneklerini vererek her $m = 1, 2, \dots$ için U_m kümesinin boştan farklı olduğunu göstermiştir.

Bundschuh [2], 1978 yılında, Mahler [1] in sınıflandırmasının benzerini formel kuvvet

serileri cismi $\mathbb{K}$ da oluşturdu. Byylece, $\mathbb{K}$ cismindeki transandant formel kuvvet serilerini ayırık  sınıfa ayırarak aşağıdaki şekilde adlandırdı.

ξ , bir transandant formel kuvvet serisi ve n ile H , iki doğal sayı olsun. Aşağıdaki fonksiyonları tanımlayalım:

$$w_n(H, \xi) = \min \{ |P(\xi)| : P(y) \in K[x][y] - \{0\}, \deg(P) \leq n, H(P) \leq H \},$$

$$w_n(\xi) = \limsup_{H \rightarrow \infty} \frac{-\log w_n(H, \xi)}{\log H}, \quad w(\xi) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{w_n(\xi)}{n}.$$

Bundschuh [2],

$$w_n(H, \xi) < H^{-n} q^n (\max\{1, |\xi|\})^n$$

eşitsizliğini ispat etmiştir. Bu eşitsizlikten $w_n(\xi) \geq n$ ($n = 1, 2, \dots$) ve dolayısıyla $w(\xi) \geq 1$ elde edilir. Eğer $w_n(\xi) = \infty$ olacak şekilde n doğal sayıları varsa, bu n doğal sayılarının en küçüğü $\mu(\xi)$ ile gösterilir. Eğer her n doğal sayısı için $w_n(\xi) < \infty$ ise, bu durumda $\mu(\xi) = \infty$ yazılır. $w(\xi)$ ve $\mu(\xi)$ değerleri aynı anda sonlu olamaz. O halde, ξ için aşağıdaki üç durumdan yalnızca biri geçerlidir. ξ transandant formel kuvvet serisine

- $1 \leq w(\xi) < \infty$ ve $\mu(\xi) = \infty$ ise bir S -sayısı,
- $w(\xi) = \infty$ ve $\mu(\xi) = \infty$ ise bir T -sayısı,
- $w(\xi) = \infty$ ve $\mu(\xi) < \infty$ ise bir U -sayısı

denir. Ayrıca, ξ bir U -sayısı ve $\mu(\xi) = m$ ise ξ ye bir U_m -sayısı denir. $\mathbb{K}$ cisminde ilk U_m -sayısı örneklerini, 1980 yılında, Oryan [3] elde etmiştir.

Koksmay [12], 1939 yılında, reel sayılar için başka bir sınıflandırma vermiş ve reel transandant sayıları S^* -, T^* - ve U^* -sayıları gibi ayırık  sınıfa ayırmıştır. Bugeaud

[13, Section 9.4], Koksma sınıflandırmasını $\mathbb{K}$ cisminde taşımıştır. $\mathbb{K}$ daki Koksma sınıflandırmasına göre, transandant formel kuvvet serileri aşağıdaki şekilde ayrık üç sınıfa ayrılmıştır.

ξ , bir transandant formel kuvvet serisi ve n ile H , iki doğal sayı olsun. Aşağıdaki fonksiyonları tanımlayalım:

$$w_n^*(H, \xi) = \min\{|\xi - \alpha| : \alpha \text{ bir cebirsel formel kuvvet serisi, } \deg(\alpha) \leq n, H(\alpha) \leq H\},$$

$$w_n^*(\xi) = \limsup_{H \rightarrow \infty} \frac{-\log(H w_n^*(H, \xi))}{\log H} \quad \text{ve} \quad w^*(\xi) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{w_n^*(\xi)}{n}.$$

Eğer $w_n^*(\xi) = \infty$ olacak şekilde n doğal sayıları varsa, bu n doğal sayılarının en küçüğü $\mu^*(\xi)$ ile gösterilir. Eğer her n doğal sayısı için $w_n^*(\xi) < \infty$ ise, bu durumda $\mu^*(\xi) = \infty$ yazılır. ξ transandant formel kuvvet serisine

- $0 < w^*(\xi) < \infty$ ve $\mu^*(\xi) = \infty$ ise bir S^* -sayısı,
- $w^*(\xi) = \infty$ ve $\mu^*(\xi) = \infty$ ise bir T^* -sayısı,
- $w^*(\xi) = \infty$ ve $\mu^*(\xi) < \infty$ ise bir U^* -sayısı

denir. Ayrıca ξ bir U^* -sayısı ve $\mu^*(\xi) = m$ ise ξ ye bir U_m^* -sayısı denir.

Ooto [14, 15], $\mathbb{K}$ cismindeki Mahler ve Koksma sınıflandırmalarıyla ilgili önemli sonuçlar elde etmiştir. Ooto [14], cebirsel bağlı iki transandant formel kuvvet serisinin Mahler sınıflandırmasındaki aynı sayı sınıfına ait olduğunu göstermiştir, yani, herhangi iki ξ ve η transandant formel kuvvet serileri için $F(\xi, \eta) = 0$; $F(s, t) \in (K[x])[s, t] - \{0\}$ ise ξ ve η , Mahler'in aynı sayı sınıfındadır. Ayrıca Ooto [15], U_m -sayıları kümesi ile U_m^* -sayıları kümesinin birbirinin aynı olduğunu ispat etmiştir. $\mathbb{R}$ daki ve $\mathbb{K}$ daki Mahler ve Koksma sınıflandırmaları ile ilgili daha ayrıntılı bilgi için Bugeaud [13] ya başvurunuz.

$\mathbb{K}$ cisminin cebirsel kapanışının $|\cdot|$ değerlendirmesine göre tamamlanışı $\widehat{\mathbb{K}}$ ile gösterilir.

O halde, bir $P(y) \in \widehat{\mathbb{K}}[y]$ polinomunun yüksekliği $H(P)$; $K(x)$ üzerinde cebirsel olan bir $\alpha \in \widehat{\mathbb{K}}$ nın yüksekliği $H(\alpha)$, derecesi $\deg(\alpha)$ ve α nın eşlenikleri yine Bölüm 2.1. deki gibi tanımlanır. Bundschuh [2] ve Bugeaud [13] den dolayı, Mahler ve Koksma sınıflandırmaları $\mathbb{K}$ dan $\widehat{\mathbb{K}}$ cismine taşınabilir. Sadece başlangıçta fonksiyonları tanımlarken $\xi \in \mathbb{K}$ yerine $\xi \in \widehat{\mathbb{K}}$ alınması yeterlidir. Dolayısıyla, $\widehat{\mathbb{K}}$ cismindeki $S-, T-, U-, U_m-, S^*-, T^*-, U^*-$ ve U_m^*- sayıları tam olarak Bölüm 2.1. deki gibi tanımlanır.

2.1.2. $\mathbb{K}$ Cisminde Sürekli Kesirler

$\mathbb{R}$ deki bir çok kavram formel kuvvet serileri cismi $\mathbb{K}$ ya aktarılmıştır. Bunlardan biri de herhangi bir $\xi \in \mathbb{K}$ nın bir sürekli kesir olarak yazılabilesidir.

$|\xi| \geq 1$ olacak şekilde bir $\xi \in \mathbb{K}$ alalım. ξ aşağıdaki şekilde tek türlü bir biçimde yazılabilir:

$$\xi = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 + a_{-1} x^{-1} + a_{-2} x^{-2} + \cdots,$$

burada her $i = m, m-1, \dots$ için $a_i \in K$, $a_m \neq 0$ ve $m, |\xi| = q^m$ olacak şekildeki negatif olmayan tam sayıdır.

$$\xi = [\xi] + (\xi)$$

yazılabilir öyleki

$$[\xi] := a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad (\xi) := a_{-1} x^{-1} + a_{-2} x^{-2} + \cdots.$$

Şimdi $b_0 := [\xi] \in K[x]$ diyelim. Dikkat edilirse $|b_0| = |\xi| \geq 1$ dir. Eğer $(\xi) = 0$ ise işlem durur. Eğer $(\xi) \neq 0$ ise

$$\xi = b_0 + \frac{1}{\xi_1}$$

yazılır, burada $\xi_1 = 1/(\xi) \in \mathbb{K}$ ve $|\xi_1| > 1$ dir. Şimdi $b_1 := [\xi_1] \in K[x]$ diyelim. Dikkat

edilirse $|b_1| = |\xi_1| > 1$ dir. Eğer $(\xi_1) = 0$ ise işlem durur. Eğer $(\xi_1) \neq 0$ ise

$$\xi = b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{\xi_2}}$$

yazılır, burada $\xi_2 = 1/(\xi_1) \in \mathbb{K}$ ve $|\xi_2| > 1$ dir. Şimdi $b_2 := [\xi_2] \in K[x]$ diyelim. Yine $|b_2| = |\xi_2| > 1$ dir. Eğer $(\xi_2) = 0$ ise işlem durur. Eğer $(\xi_2) \neq 0$ ise yine aynı şekilde devam edilir.

Böylece aşağıdaki şekilde tek türlü belirli bir gösteriliş elde edilir:

$$\xi = \langle b_0, b_1, \dots, b_{n-1}, \xi_n \rangle := b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{\frac{\cdot \cdot \cdot 1}{b_{n-1} + \frac{1}{\xi_n}}}},$$

burada $i = 1, 2, \dots, n-1$ için $b_i = [\xi_i] \in K[x]$, $|b_i| = |\xi_i| > 1$ ve $i = 0, 1, \dots, n-1$ için $\xi_{i+1} = 1/(\xi_i) \in \mathbb{K}$, $\xi_0 := \xi$ dir.

Eğer herhangi bir n için $(\xi_n) = 0$ ise ξ nin sürekli kesir açılımı sonludur ve ξ , aşağıdaki şekilde tek türlü belirli bir biçimde yazılır:

$$\xi = \langle b_0, b_1, \dots, b_n \rangle := b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{\frac{\cdot \cdot \cdot 1}{b_n}}}$$

Bir formel kuvvet serisinin $K(x)$ in elemanı olması için gerek ve yeter koşul onun sürekli kesir açılımının sonlu olmasıdır.

ξ nin sürekli kesir açılımı sonsuz olsun. Başka bir ifadeyle, $(\xi_n) \neq 0$ ($n = 0, 1, \dots$) olsun. $p_{-1} = 1$, $p_0 = b_0$, $q_{-1} = 0$, $q_0 = 1$ olsun ve p_n ve q_n dizilerini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$p_n = b_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad q_n = b_n q_{n-1} + q_{n-2} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Tümevarımla kolayca görülür ki

$$\frac{p_n}{q_n} = \langle b_0, b_1, \dots, b_n \rangle$$

dir ve $\frac{p_n}{q_n}$, ξ nin sürekli kesre açılımının n . yaklaşım kesri olarak adlandırılır. Ayrıca, yine tümevarımla aşağıdaki özellikler kolayca gösterilebilir:

$$(1) \text{ Herhangi bir } \beta \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \text{ için, } \frac{\beta p_n + p_{n-1}}{\beta q_n + q_{n-1}} = \langle b_0, b_1, \dots, b_n, \beta \rangle \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$(2) \quad p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$(3) \quad |q_n| > |q_{n-1}| \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$(4) \quad |q_n| = |b_1 b_2 \cdots b_n| \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$(5) \quad |p_n| = |b_0 b_1 b_2 \cdots b_n| = |b_0| |q_n| \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$(6) \quad \xi - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n(\xi_{n+1} q_n + q_{n-1})} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$(7) \quad \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{|b_{n+1}| |q_n|^2} < \frac{1}{|q_n|^2} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

(3) ve (7) den $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = \xi$ elde edilir. Dolayısıyla,

$$\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle b_0, b_1, b_2, \dots, b_n \rangle =: \langle b_0, b_1, b_2, \dots \rangle$$

yazabiliriz.

$\mathbb{R}$ deki quadratik irrasyonel sayıların sürekli kesir açılımları ile ilgili sonucun benzeri $\mathbb{K}$ cisminde de gösterilmiştir. Buna göre; bir α formel kuvvet serisinin sürekli kesir açılımının sonsuz ve periyodik olması için gerek ve yeter koşul α nın $K(x)$ üzerinde cebirsel ve $\deg(\alpha) = 2$ olmasıdır (Chaichana T., Laohakosol V., Harnchoowong A. [16]). $\mathbb{K}$ cismindeki sürekli kesirler ile ilgili daha ayrıntılı bilgi, sonuçlar ve ispatlar için [16], [15] ve [17] numaralı kaynaklara bakınız.

2.2. LEMMALAR

Bu bölümde, Bulgular Bölümünde yer alan teoremlerin ispatlarında kullanılacak olan bazı lemmalar verilmiştir.

Lemma 2.2.1 (Müller [18], sayfa 291). $P(y)$ ve $Q(y)$ katsayıları $\widehat{\mathbb{K}}$ cisminden alınmış sıfırdan farklı iki polinom olsun. Bu takdirde,

$$H(P \cdot Q) = H(P) \cdot H(Q)$$

dır.

Lemma 2.2.2 (Müller [18], sayfa 293). $\alpha, \beta \in \widehat{\mathbb{K}}$, $K(x)$ üzerinde cebirsel ve birbirinden farklı iki eleman olsun. Bu takdirde,

$$|\alpha - \beta| \geq H(\alpha)^{-\deg(\beta)} H(\beta)^{-\deg(\alpha)}$$

dır.

Aşağıdaki Lemma Alınacak [7, Lemma IV] ün $\mathbb{K}$ benzeridir.

Lemma 2.2.3. $P_1/Q_1, P_2/Q_2 \in K(x)$ sürekli kesir açılımları sırasıyla

$$\frac{P_1}{Q_1} = \langle a_0, a_1, \dots, a_n \rangle, \quad \frac{P_2}{Q_2} = \langle b_0, b_1, \dots, b_n \rangle \quad (|a_0| \geq 1, |b_0| \geq 1)$$

şeklinde olan iki eleman olsun. Ayrıca S_1 ve S_2 sabit iki pozitif tamsayı olmak üzere

$$|b_j| \leq S_1 |a_j|^{S_2} \quad (j = 0, 1, \dots, n) \tag{2.1}$$

olsun. Bu takdirde,

$$\max\{|P_2|, |Q_2|\} \leq S_1 \max\{|P_1|, |Q_1|\}^{S_2 + \log_2 S_1} \tag{2.2}$$

dir.

İspat. Sürekli kesirler teorisinden,

$$\left| \frac{P_2}{Q_2} \right| = \left| b_0 + \frac{1}{\langle b_1, \dots, b_n \rangle} \right|, \quad \left| \frac{1}{\langle b_1, \dots, b_n \rangle} \right| < 1 \leq |b_0|$$

olduğundan ve Arşimedyen olmayan değerlendirmenin özelliğinden,

$$\left| \frac{P_2}{Q_2} \right| = |b_0| \Rightarrow |P_2| = |b_0| |Q_2| = \prod_{j=0}^n |b_j|$$

elde edilir. O halde, $|Q_2| = |b_1 \cdots b_n| < \prod_{j=0}^n |b_j|$ olması ile birlikte (2.1) i kullanırsak,

$$\max\{|P_2|, |Q_2|\} = \prod_{j=0}^n |b_j| \leq S_1^{n+1} \left(\prod_{j=0}^n |a_j| \right)^{S_2} \quad (2.3)$$

olur. Öte yandan $|P_1| = |a_0| |a_1| \cdots |a_n|$ ve $|Q_1| \geq 2^n$ olduğundan, (2.3) den,

$$\max\{|P_2|, |Q_2|\} \leq 2^{(n+1)\log_2 S_1} \left(\prod_{j=0}^n |a_j| \right)^{S_2} \leq (2|Q_1|)^{\log_2 S_1} |P_1|^{S_2}$$

elde edilir. Böylece (2.2) ispatlanmış olur.

Schneider [19, Hilfssatz 1, sayfa 5], kompleks sayılar cisminde bir α cebirsel sayısı için

$$|\alpha| \leq \frac{H(\alpha)}{|a|} + 1$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermiştir. Burada $H(\alpha)$, α nın yüksekliğini; a , α nın minimal polinomunun baş katsayısını ve $|\cdot|$, $\mathbb{C}$ cismindeki alışılmış mutlak değeri göstermektedir. Aşağıdaki lemma bu iyi bilinen sonucun $\widehat{\mathbb{K}}$ benzeridir. Lemmanın ispatı, Schneider [19, Hilfssatz 1] in ispatından yararlanarak ve Arşimedyen olmayan değerlendirmenin özelliği kullanılarak yapılmıştır.

Lemma 2.2.4. $\alpha \in \widehat{\mathbb{K}}$, $K(x)$ üzerinde cebirsel ve a , α nın $K[x]$ üzerindeki minimal polinomunun baş katsayısı olsun. Bu durumda,

$$|\alpha| \leq \frac{H(\alpha)}{|a|}.$$

İspat. $\alpha = 0$ ise $0 = |\alpha| \leq \frac{H(\alpha)}{|a|}$ daima doğrudur. $\alpha \neq 0$ olsun. O halde, iki durum söz konusudur.

1. $0 < |\alpha| \leq 1$ ise $|a| \leq H(\alpha)$ olduğundan,

$$|\alpha| \leq 1 \leq \frac{H(\alpha)}{|a|}$$

elde edilir.

2. $|\alpha| > 1$ ise, α nın minimal polinomu $ay^s + a_1y^{s-1} + \dots + a_s$ ($a, a_1, \dots, a_s \in K[x]$) olsun. O halde,

$$\begin{aligned} a\alpha^s + a_1\alpha^{s-1} + \dots + a_{s-1}\alpha + a_s &= 0 \\ \Rightarrow a\alpha^s &= -a_1\alpha^{s-1} - \dots - a_{s-1}\alpha - a_s \\ \Rightarrow |a||\alpha|^s &= |-a_1\alpha^{s-1} - \dots - a_{s-1}\alpha - a_s| \\ &\leq \max\{|a_1||\alpha|^{s-1}, \dots, |a_{s-1}||\alpha|, |a_s|\} \\ &\leq H(\alpha) \max\{|\alpha|^{s-1}, \dots, |\alpha|, 1\} = H(\alpha)|\alpha|^{s-1} \quad (s \geq 1) \\ \Rightarrow |a||\alpha|^s &\leq H(\alpha)|\alpha|^{s-1} \quad (\alpha \neq 0) \\ \Rightarrow |a||\alpha| &\leq H(\alpha) \\ \Rightarrow |\alpha| &\leq \frac{H(\alpha)}{|a|} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Lemma 2.2.4 ispatlanmış olur.

Lemma 2.2.5 (Müller [18], sayfa 291). $\alpha \in \widehat{\mathbb{K}}$, $K(x)$ üzerinde cebirsel; $P(y)$, sıfırdan farklı ve katsayıları $K[x]$ ten alınmış y nin bir polinomu olsun. Eğer $P(\alpha) \neq 0$ ise,

$$|P(\alpha)| \geq H(P)^{1-\deg(\alpha)} H(\alpha)^{-\deg(P)}$$

dir.

Lemma 2.2.6 (Ooto [20], Lemma 3.2). $\alpha, \beta \in \widehat{\mathbb{K}}$ ve $P(y) = \alpha_0 + \alpha_1 y + \cdots + \alpha_k y^k \in \widehat{\mathbb{K}}[y]$ ($\alpha_k \neq 0$) sabitten farklı bir polinom olsun. Ayrıca $C \geq 0$, $|\alpha - \beta| \leq C$ olacak şekilde bir reel sayı olsun. Bu durumda,

$$|P(\alpha) - P(\beta)| \leq \max_{i=1, \dots, k} \{C, |\alpha|\}^{i-1} |\alpha - \beta| \max_{i=1, \dots, k} \{|\alpha_i|\}$$

dir.

Lemma 2.2.7 (Kekeç [6], Lemma 2.1). $\alpha_0, \dots, \alpha_k$ ($k \geq 1, \alpha_k \neq 0$) $\widehat{\mathbb{K}}$ ya ait ve $K(x)$ üzerinde cebirsel elemanlar olsun. O halde, sonlu sayıda θ dışında her $\theta \in K(x)$ için, $\alpha_0 + \alpha_1 \theta + \cdots + \alpha_k \theta^k \in \widehat{\mathbb{K}}$, $K(x)(\alpha_0, \dots, \alpha_k)$ cisminin $K(x)$ üzerindeki bir pirimitif elemanıdır.

3. MALZEME VE YÖNTEM

Bu çalışmada Kaynaklar kısmında belirtilen makale ve kitaplardan yararlanılarak Bulgular Bölümünde verilen dört özgün teorem Teorem 4.1.1, Teorem 4.1.2, Teorem 4.2.1 ve Teorem 4.2.2 elde edilmiştir. Teoremlerin ispatında İçen [21] ve Alnıaçık [7, 10] ın kullandığı ispat tekniklerinden yararlanılmış ve bu teknikler Arşimedyen olmayan duruma uyarlanmıştır. Ayrıca Teorem 4.1.2 nin ispatında Koksma sınıflandırmasından yararlanılarak bir formel kuvvet serisine cebirsel formel kuvvet serileriyle yaklaşmıştır. Teorem 4.2.1 ve Teorem 4.2.2 nin ispatlarında ise Mahler sınıflandırması kullanılmış katsayıları $\hat{\mathbb{K}}$ cisminde ait olan polinomlarla çalışılmıştır.

4. BULGULAR

Bu çalışmada bu bölümde verdiğimiz dört özgün teorem Teorem 4.1.1, Teorem 4.1.2, Teorem 4.2.1 ve Teorem 4.2.2 elde edilmiştir.

4.1. SONLU CİSİMLER ÜZERİNDEKİ FORMEL KUVVET SERİLERİ CİSİMLERİNDE TRANSANDANT SÜREKLİ KESİRLER

Bu bölümde iki özgün teorem Teorem 4.1.1 ve Teorem 4.1.2 ispatlanmıştır. Teorem 4.1.1’de İçen [8, sayfa 25] Lemmasının $\widehat{\mathbb{K}}$ – benzeri inşa edilmiştir. Teorem 4.1.1’in ispatında İçen [21, Lemma 1, sayfa 71] in ispatındaki yöntem $\widehat{\mathbb{K}}$ cismine uyarlanmıştır. Teorem 4.1.2’de Alnıaçık [7, Theorem] in $\mathbb{K}$ – benzeri kurulmuştur. Teorem 4.1.2’nin ispatında Alnıaçık [7, Theorem] in ispatındaki yöntem $\mathbb{K}$ ya uyarlanmıştır. Bu bölümde elde edilen sonuçlar, Can ve Kekeç [9] makalesinde yayınlanmıştır.

Teorem 4.1.1. L , $K(x)$ in m . dereceden bir genişlemesi; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in L$ olsun. $\eta \in \widehat{\mathbb{K}}$, $K(x)$ üzerinde cebirsel bir eleman ve $F(y, y_1, \dots, y_k)$, katsayıları $K[x]$ ten alınmış y ye göre derecesi en az 1 olan bir polinom olsun. Ayrıca, η ile α_j ($j = 1, \dots, k$) arasında $F(\eta, \alpha_1, \dots, \alpha_k) = 0$ bağıntısı geçerli olsun. $F(y, y_1, \dots, y_k)$ polinomunun y ye göre derecesini d , $F(y, y_1, \dots, y_k)$ polinomunun y_j ($j = 1, \dots, k$) ye göre derecesini l_j ve $F(y, y_1, \dots, y_k)$ polinomunun katsayılarının mutlak değerlerinin maksimumunu H ile gösterelim. Bu takdirde,

$$\deg(\eta) \leq dm$$

ve

$$H(\eta) \leq H^m H(\alpha_1)^{l_1 m} \dots H(\alpha_k)^{l_k m}$$

dir.

İspat. α_j ($j = 1, \dots, k$) nin $K[x]$ üzerindeki minimal polinomunun baş katsayısı a_j olsun. α_j ($j = 1, \dots, k$) nin L için cisim eşleniklerini $\alpha_j = \alpha_j^{(1)}, \dots, \alpha_j^{(m)}$ ile gösterelim. Bunlar α_j nin $K(x)$ üzerindeki eşleniklerinin her birinin $m/\deg(\alpha_j)$ kez tekrar etmesinden oluşur.

$$G(y) = \prod_{i=1}^m [a_1^{l_1} \cdots a_k^{l_k} F(y, \alpha_1^{(i)}, \dots, \alpha_k^{(i)})] \quad (4.1)$$

alalım. Dikkat edilirse $G(y)$, $1 \leq \deg(G) \leq dm$ olacak şekilde, katsayıları $K[x]$ e ait olan, y ye bağlı bir polinomdur. Ayrıca $F(\eta, \alpha_1, \dots, \alpha_k) = 0$ olduğundan, $G(\eta) = 0$ dır. Dolayısıyla, $\deg(\eta) \leq dm$ dir.

Öte yandan, herhangi bir $i \in \{1, \dots, m\}$ için

$$F(y, \alpha_1^{(i)}, \dots, \alpha_k^{(i)}) = \sum_{i_0=0}^d \sum_{i_1=0}^{l_1} \cdots \sum_{i_k=0}^{l_k} f_{i_0 i_1 \dots i_k} y^{i_0} (\alpha_1^{(i)})^{i_1} \cdots (\alpha_k^{(i)})^{i_k}; \quad f_{i_0 i_1 \dots i_k} \in K[x]$$

şeklindedir. Dolayısıyla,

$$H\left(F(y, \alpha_1^{(i)}, \dots, \alpha_k^{(i)})\right) \leq H \max\{1, |\overline{\alpha_1}|\}^{l_1} \cdots \max\{1, |\overline{\alpha_k}|\}^{l_k} \quad (4.2)$$

dır. Burada

$$|\overline{\alpha_j}| = \max\{|\alpha_j^{(1)}|, \dots, |\alpha_j^{(m)}|\} \quad (j = 1, \dots, k)$$

dir. (4.1), (4.2) ve Lemma 2.2.1 den,

$$\begin{aligned} H(G) &= |a_1|^{l_1 m} \cdots |a_k|^{l_k m} H\left(F(y, \alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_k^{(1)})\right) \cdots H\left(F(y, \alpha_1^{(m)}, \dots, \alpha_k^{(m)})\right) \\ \Rightarrow H(G) &\leq H^m \left(|a_1| \max\{1, |\overline{\alpha_1}|\}\right)^{l_1 m} \cdots \left(|a_k| \max\{1, |\overline{\alpha_k}|\}\right)^{l_k m} \end{aligned} \quad (4.3)$$

olur. Lemma 2.2.4 den,

$$|\overline{\alpha_j}| \leq \frac{H(\alpha_j)}{|a_j|} \quad (j = 1, \dots, k)$$

elde edilir ve dolayısıyla

$$|a_j| \max\{1, |\overline{\alpha_j}|\} \leq H(\alpha_j) \quad (j = 1, \dots, k) \quad (4.4)$$

olur. (4.3) ve (4.4) ü birleştirirsek,

$$H(G) \leq H^m H(\alpha_1)^{l_1 m} \dots H(\alpha_k)^{l_k m}$$

bulunur. $G(y) \in K[x][y]$ ve $G(\eta) = 0$ olduğundan; η nın $K[x]$ üzerindeki minimal polinomu, $G(y)$ yi böler. Dolayısıyla, Lemma 2.2.1 den, $H(\eta) \leq H(G)$ olup, buradan

$$H(\eta) \leq H^m H(\alpha_1)^{l_1 m} \dots H(\alpha_k)^{l_k m}$$

elde edilir. Böylece Teorem 4.1.1 ispatlanmış olur.

Teorem 4.1.2. $\alpha \in \mathbb{K}$ ($|\alpha| \geq 1$) m . dereceden ($m > 1$) bir cebirsel formel kuvvet serisi, α nın sürekli kesir açılımı

$$\alpha = \langle a_0, a_1, \dots, a_n, \dots \rangle \quad (4.5)$$

ve (4.5) sürekli kesrinin n . yaklaşım kesri $\frac{p_n}{q_n}$ ($n = 0, 1, \dots$) olsun. $\{r_j\}_{j=0}^\infty$ ve $\{s_j\}_{j=0}^\infty$ aşağıdaki koşulları sağlayan, negatif olmayan tam sayıların iki alt dizisi olsun:

$$0 = r_0 < s_0 < r_1 < s_1 < r_2 < s_2 < r_3 < s_3 < \dots \quad (r_{n+1} - s_n \geq 2),$$

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |q_{s_n}|}{\log |q_{r_n}|} = \infty, \quad (b) \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |q_{r_{n+1}}|}{\log |q_{s_n}|} < \infty. \quad (4.6)$$

Ayrıca $b_j \in K[x]$ ($j = 0, 1, \dots$) aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$b_j = \begin{cases} a_j, & r_n \leq j \leq s_n \quad (n = 0, 1, \dots), \\ v_j, & s_n < j < r_{n+1} \quad (n = 0, 1, \dots), \end{cases} \quad (4.7)$$

burada $v_j \in K[x]$, $\sum_{j=s_n+1}^{r_{n+1}-1} |a_j - v_j| \neq 0$, $1 < |v_j| \leq S_1 |a_j|^{S_2}$ dir ve S_1 ile S_2 pozitif tam

sayılardır. O halde, sürekli kesir açılımı

$$\xi = \langle b_0, b_1, \dots, b_n, \dots \rangle$$

olan $\xi \in \mathbb{K}$, bir U_m -sayısıdır.

İspat. Aşağıdaki cebirsel formel kuvvet serilerini tanımlayalım:

$$\alpha_{r_n} := \langle b_0, \dots, b_{r_n}, a_{r_n+1}, a_{r_n+2}, \dots \rangle \quad (n = 0, 1, \dots),$$

$$\beta_{r_n} := \langle a_{r_n+1}, a_{r_n+2}, \dots \rangle \quad (n = 0, 1, \dots).$$

$\mathbb{K}$ daki sürekli kesirler teorisinin özelliklerinden,

$$\alpha = \langle a_0, a_1, \dots, a_{r_n}, \beta_{r_n} \rangle = \frac{p_{r_n} \beta_{r_n} + p_{r_n-1}}{q_{r_n} \beta_{r_n} + q_{r_n-1}}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Dikkat edilirse, } \alpha \in K(x)(\beta_{r_n}) \text{ ve } \beta_{r_n} \in K(x)(\alpha) \text{ dir. O halde,} \\ \deg(\alpha) \leq \deg(\beta_{r_n}) \text{ ve } \deg(\beta_{r_n}) \leq \deg(\alpha) = m \text{ olup } \deg(\beta_{r_n}) = m \text{ dir.} \end{array} \right)$$

dir ve dolayısıyla

$$\alpha q_{r_n} \beta_{r_n} + \alpha q_{r_n-1} - p_{r_n} \beta_{r_n} - p_{r_n-1} = 0 \quad (n = 0, 1, \dots)$$

olur. Teorem 4.1.1 i

$$F(y, y_1) = q_{r_n} y_1 y + q_{r_n-1} y_1 - p_{r_n} y - p_{r_n-1} \in K[x][y, y_1], \quad \eta = \beta_{r_n}, \quad \alpha_1 = \alpha$$

ile uygulayalım, buradan

$$\begin{aligned} H(\beta_{r_n}) &\leq H(\alpha)^m \max\{|q_{r_n}|, |q_{r_n-1}|, |p_{r_n}|, |p_{r_n-1}|\}^m \\ &\leq H(\alpha)^m \max\{|p_{r_n}|, |q_{r_n}|\}^m \quad (n = 0, 1, \dots) \end{aligned}$$

$$(|q_{r_n}| > |q_{r_n-1}| \quad (n = 0, 1, \dots); \quad |a_0| \geq 1 \text{ den, } |p_{r_n}| > |p_{r_n-1}| \quad (n = 0, 1, \dots) \text{ dir.})$$

$$\Rightarrow H(\beta_{r_n}) \leq H(\alpha)^m \max\{|p_{r_n}|, |q_{r_n}|\}^m \quad (n = 0, 1, \dots)$$

elde edilir. $\frac{p_{r_n}}{q_{r_n}} = \langle a_0, a_1, \dots, a_{r_n} \rangle$ ve $|a_0| \geq 1$ olduğundan, Arşimedyen olmayan değerlendirmenin özelliğinden, $|p_{r_n}| = |a_0||q_{r_n}| \quad (n = 0, 1, \dots)$ bulunur. Bunu yukarıdaki eşitsizlikde kullanırsak,

$$H(\beta_{r_n}) \leq c_1 |q_{r_n}|^m \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (4.8)$$

olur, burada $c_1 = H(\alpha)^m |a_0|^m$ dir. Şimdi

$$\frac{p'_n}{q'_n} := \langle b_0, b_1, \dots, b_n \rangle \quad (n = 0, 1, \dots)$$

diyelim. O halde, yine $\mathbb{K}$ daki sürekli kesirler teorisinin özelliklerinden,

$$\alpha_{r_n} = \langle b_0, b_1, \dots, b_{r_n}, \beta_{r_n} \rangle = \frac{p'_{r_n} \beta_{r_n} + p'_{r_n-1}}{q'_{r_n} \beta_{r_n} + q'_{r_n-1}}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Dikkat edilirse, } \alpha_{r_n} \in K(x)(\beta_{r_n}) \text{ ve } \beta_{r_n} \in K(x)(\alpha_{r_n}) \text{ dır. O halde,} \\ \deg(\alpha_{r_n}) \leq \deg(\beta_{r_n}) = m \text{ ve } \deg(\beta_{r_n}) \leq \deg(\alpha_{r_n}) \text{ olup } \deg(\alpha_{r_n}) = m \text{ dir.} \end{array} \right)$$

dir ve böylece

$$\alpha_{r_n} q'_{r_n} \beta_{r_n} + \alpha_{r_n} q'_{r_n-1} - p'_{r_n} \beta_{r_n} - p'_{r_n-1} = 0 \quad (n = 0, 1, \dots)$$

bulunur. Tekrar Teorem 4.1.1 i

$$F(y, y_1) = q'_{r_n} y_1 y + q'_{r_n-1} y - p'_{r_n} y_1 - p'_{r_n-1} \in K[x][y, y_1], \quad \eta = \alpha_{r_n}, \quad \alpha_1 = \beta_{r_n}$$

ile uygularsak,

$$H(\alpha_{r_n}) \leq H(\beta_{r_n})^m \max\{|p'_{r_n}|, |q'_{r_n}|\}^m \quad (n = 0, 1, \dots)$$

olur. Bunu (4.8) ile birleştirirsek,

$$H(\alpha_{r_n}) \leq c_1^m |q_{r_n}|^{m^2} \max\{|p'_{r_n}|, |q'_{r_n}|\}^m \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (4.9)$$

elde edilir. (4.7) den,

$$|b_j| \leq S_1 |a_j|^{S_2} \quad (j = 0, 1, \dots)$$

olduğunu biliyoruz. O halde, Lemma 2.2.3 ü $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{p_{r_n}}{q_{r_n}}, \quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{p'_{r_n}}{q'_{r_n}}$ ile uygularsak,

$$\max\{|p'_{r_n}|, |q'_{r_n}|\} \leq S_1 \max\{|p_{r_n}|, |q_{r_n}|\}^{S_2 + \log_2 S_1}$$

bulunur. Yukarıdaki eşitsizliği ve $|p_{r_n}| = |a_0| |q_{r_n}|$ ilişkisini (4.9) da kullanırsak,

$$H(\alpha_{r_n}) \leq c_2 |q_{r_n}|^{c_3-1} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

elde ederiz, burada

$$c_2 = c_1^m S_1^m |a_0|^{mS_2 + m \log_2 S_1}, \quad c_3 = 1 + m^2 + mS_2 + m \log_2 S_1$$

dir. $\lim_{n \rightarrow \infty} |q_{r_n}| = \infty$ olduğundan, bir n_1 pozitif tam sayısı vardır öyleki her $n \geq n_1$ için

$|q_{r_n}| \geq c_2$ dir, buradan her $n \geq n_1$ için

$$H(\alpha_{r_n}) \leq |q_{r_n}|^{c_3} \quad (4.10)$$

olur.

Şimdi $\mu^*(\xi) = m$ olduğunu gösterelim. Bunun için ξ ye α_{r_n} cebirsel formel kuvvet serileri ile yaklaşalım. (4.7) den (yani ξ ve α_{r_n} in tanımından) ve $\mathbb{K}$ daki sürekli kesirlerin özelliklerinden,

$$|\xi - \alpha_{r_n}| \leq \max \left\{ \left| \xi - \frac{p'_{s_n}}{q'_{s_n}} \right|, \left| \alpha_{r_n} - \frac{p'_{s_n}}{q'_{s_n}} \right| \right\} < \frac{1}{|q'_{s_n}|^2} \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (4.11)$$

dir.

$$\frac{R_n}{S_n} := \langle a_{r_n+1}, a_{r_n+2}, \dots, a_{s_n} \rangle$$

yazalım $(R_n/S_n \in K(x))$. O halde,

$$\frac{p_{s_n}}{q_{s_n}} = \langle a_0, a_1, \dots, a_{r_n}, \frac{R_n}{S_n} \rangle = \frac{p_{r_n}R_n + p_{r_n-1}S_n}{q_{r_n}R_n + q_{r_n-1}S_n}$$

ve

$$\frac{p'_{s_n}}{q'_{s_n}} = \langle b_0, b_1, \dots, b_{r_n}, \frac{R_n}{S_n} \rangle = \frac{p'_{r_n}R_n + p'_{r_n-1}S_n}{q'_{r_n}R_n + q'_{r_n-1}S_n}$$

olur. Bu eşitlikler ile birlikte $|R_n| = |a_{r_n+1}||S_n| > |S_n|$ ilişkisini kullandığımızda,

$$|q_{s_n}| = |q_{r_n}R_n + q_{r_n-1}S_n| = |q_{r_n}||R_n| = |q_{r_n}||a_{r_n+1}||S_n|$$

ve

$$|q'_{s_n}| = |q'_{r_n}R_n + q'_{r_n-1}S_n| = |q'_{r_n}||R_n| > |S_n|$$

($|q_{r_n}R_n| > |q_{r_n-1}S_n|$, $|q'_{r_n}R_n| > |q'_{r_n-1}S_n|$ olduğundan ve Arşimedyen olmayan değerlendirmenin özelliğinden) elde edilir. O halde,

$$|q_{s_n}| < |a_{r_n+1}||q_{r_n}||q'_{s_n}| \quad (4.12)$$

dir. Şimdi $|q_{s_n}|$ için bir üst sınır verelim. Lemma 2.2.2 yi $\alpha = \alpha$, $\beta = \frac{p_{r_n}}{q_{r_n}} \in \mathbb{K}$ ile uygularsak ve $|p_{r_n}| = |a_0||q_{r_n}|$ eşitliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned} \left| \alpha - \frac{p_{r_n}}{q_{r_n}} \right| &\geq H(\alpha)^{-1} H\left(\frac{p_{r_n}}{q_{r_n}}\right)^{-m} \\ \left(H\left(\frac{p_{r_n}}{q_{r_n}}\right) = \max\{|p_{r_n}|, |q_{r_n}|\} = |a_0||q_{r_n}| \right) \\ \Rightarrow \left| \alpha - \frac{p_{r_n}}{q_{r_n}} \right| &\geq \frac{1}{c_4 |q_{r_n}|^m} \end{aligned} \quad (4.13)$$

olur, burada $c_4 = |a_0|^m H(\alpha)$ dır. Öte yandan,

$$\left| \alpha - \frac{p_{r_n}}{q_{r_n}} \right| = \frac{1}{|a_{r_n+1}| |q_{r_n}|^2} \quad (4.14)$$

olduğunu biliyoruz. (4.12), (4.13) ve (4.14) den,

$$\begin{aligned} |a_{r_n+1}| |q_{r_n}|^2 &\leq c_4 |q_{r_n}|^m \quad \Rightarrow \quad |a_{r_n+1}| \leq c_4 |q_{r_n}|^{m-2} \\ \Rightarrow |q_{s_n}| &< c_4 |q_{r_n}|^{m-1} |q'_{s_n}| \end{aligned} \quad (4.15)$$

elde edilir. (4.15) ve (4.6)(a) dan dolayı bir n_2 pozitif tamsayısı vardır öyleki her $n \geq n_2$ için

$$|q_{s_n}| < |q'_{s_n}|^2 \quad (4.16)$$

eşitsizliği geçerlidir. Çünkü

$$\begin{aligned}
 (4.15) \Rightarrow \log |q_{s_n}| &< \log c_4 + \log |q_{r_n}|^{m-1} + \log |q'_{s_n}| \\
 \Rightarrow \frac{\log |q_{s_n}|}{\log |q_{r_n}|} &< \frac{\log c_4}{\log |q_{r_n}|} + (m-1) + \frac{\log |q'_{s_n}|}{\log |q_{r_n}|} \quad (\lim_{n \rightarrow \infty} |q_{r_n}| = \infty) \\
 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |q'_{s_n}|}{\log |q_{r_n}|} &= \infty \\
 \Rightarrow \exists n_2 \in \mathbb{N}; \forall n \geq n_2 \text{ için } \log |q'_{s_n}| &> \log c_4 |q_{r_n}|^{m-1} \\
 \Rightarrow |q'_{s_n}| &> c_4 |q_{r_n}|^{m-1}
 \end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak (4.10), (4.11) ve (4.16) dan,

$$|\xi - \alpha_{r_n}| < \frac{1}{|q'_{s_n}|^2} < \frac{1}{|q_{s_n}|} \leq \frac{1}{H(\alpha_{r_n})^{\log |q_{s_n}| / (c_3 \log |q_{r_n}|)}} \quad (n \geq \max\{n_1, n_2\})$$

elde edilir. (4.7) den, her $n = 0, 1, \dots$ için $\xi \neq \alpha_{r_n}$ olduğunu biliyoruz. (4.6)(a) şartı sağlandığından, yeteri kadar büyük n ler için,

$$0 < |\xi - \alpha_{r_n}| < \frac{1}{H(\alpha_{r_n})^{w_n}} \quad \left(w_n = \frac{\log |q_{s_n}|}{c_3 \log |q_{r_n}|}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \infty \right) \quad (4.17)$$

bulunmuş olur. Burada α_{r_n} ($n = 0, 1, \dots$) cebirsel formel kuvvet serileri için $\deg(\alpha_{r_n}) = m$ olduğunu biliyoruz. Öte yandan, $\{H(\alpha_{r_n})\}$ dizisi üstten sınırsızdır. Aksi taktirde, bu dizi üstten sınırlı olsa; yeteri kadar büyük n ler için $H(\alpha_{r_n}) \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ reel sayısı var olur. O halde, $H(\alpha_{r_n})$ in alabileceği sonlu sayıda tam sayı değeri olur. α_{r_n} ($n = 0, 1, \dots$) cebirsel formel kuvvet serilerinin minimal polinomlarının katsayıları $K[x]$ in elemanı ve K sonlu bir cisim olduğundan, bu şekilde (derecesi $= m$ ve yüksekliği $\leq M$ olan) birbirinden farklı ancak sonlu sayıda α_{r_n} cebirsel formel kuvvet serisi vardır. (Çünkü

örneğin bir α_{r_n} in minimal polinomu $P(y) = x_0 + x_1 y + \dots + x_m y^m$ ($x_0, x_1, \dots, x_m \in K[x]$) olsa; $H(\alpha_{r_n}) = \max\{|x_0|, |x_1|, \dots, |x_m|\} = q^{\max\{\deg(x_0), \dots, \deg(x_m)\}} \leq M$ olur, yani $|x_i| \in K[x]$ ($i = 0, \dots, m$) polinomlarının dereceleri için sonlu sayıda tam sayı değeri vardır. Bu polinomların katsayıları K nın elemanları olduğundan sonlu sayıda $P(y)$ polinomu vardır.) Ancak bu, α_{r_n} ($n = 0, 1, \dots$) cebirsel formel kuvvet serilerinin tanımı ile çelişir ((4.7) den, birbirinden farklı sonsuz sayıda α_{r_n} ($n = 0, 1, \dots$) cebirsel formel kuvvet serisi vardır.) O halde, $\{H(\alpha_{r_n})\}$ dizisi üstten sınırsızdır. Dolayısıyla,

$$1 < H(\alpha_{r_{n_1}}) < H(\alpha_{r_{n_2}}) < \dots, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} H(\alpha_{r_{n_i}}) = \infty$$

olacak şekilde bir $\{H(\alpha_{r_{n_i}})\}$ alt dizisi vardır. $H(\alpha_{r_{n_i}}) = H_i$ ($i = 0, 1, \dots$) diyelim. O halde, (4.17) den,

$$w_m^*(H_i, \xi) = \min\{|\xi - \alpha| : \alpha \text{ bir cebirsel formel kuvvet serisi, } \deg(\alpha) \leq m, H(\alpha) \leq H_i\}$$

$$\leq |\xi - \alpha_{r_{n_i}}| \leq \frac{1}{H(\alpha_{r_{n_i}})^{w_{n_i}}} = \frac{1}{H_i^{w_{n_i}}} < 1$$

$$\Rightarrow 0 < H_i w_m^*(H_i, \xi) \leq \frac{1}{H_i^{w_{n_i}-1}}$$

$$\Rightarrow \log(H_i w_m^*(H_i, \xi)) \leq \log(H_i^{-(w_{n_i}-1)})$$

$$\Rightarrow \frac{-\log(H_i w_m^*(H_i, \xi))}{\log H_i} \geq \frac{-\log(H_i^{-(w_{n_i}-1)})}{\log H_i}$$

$$\Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{-\log(H_i w_m^*(H_i, \xi))}{\log H_i} \geq \lim_{i \rightarrow \infty} (w_{n_i} - 1) = \infty$$

$$\Rightarrow \limsup_{H \rightarrow \infty} \frac{-\log(H w_m^*(H, \xi))}{\log H} = \infty \Rightarrow w_m^*(\xi) = \infty$$

dur. O halde, $\xi \in \mathbb{K}$,

$$\mu^*(\xi) \leq m \quad (4.18)$$

olan bir U – sayısıdır.

Teoremin ispatını tamamlamak için $\mu^*(\xi) \geq m$ olduğunu gösterelim. $\beta \in \mathbb{K}$, yüksekliği $H(\beta)$ yeteri kadar büyük olan ve $1 \leq \deg(\beta) \leq m-1$ koşulunu sağlayan bir cebirsel formel kuvvet serisi olsun. O halde, Lemma 2.2.2 den,

$$|\beta - \alpha_{r_n}| \geq \frac{1}{H(\beta)^m H(\alpha_{r_n})^{m-1}} \quad (4.19)$$

dir. (4.10) u (4.19) da kullanırsak,

$$|\beta - \alpha_{r_n}| \geq \frac{1}{H(\beta)^m |q_{r_n}|^{c_5}} \quad (n \geq n_1) \quad (4.20)$$

olur, burada $c_5 = c_3(m-1) > 1$ dir. (4.6)(b) den dolayı,

$$|q_{s_n}|^T \geq |q_{r_{n+1}}| \quad (4.21)$$

olacak şekilde bir $T > 1$ reel sayısı vardır. Çünkü (4.6)(b) den,

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\log |q_{r_{n+1}}|}{\log |q_{s_n}|} \right\} \text{ dizisi sınırlı} &\Rightarrow \exists T > 0 \text{ reel sayısı; } \forall n = 0, 1, \dots \text{ için } 0 < \frac{\log |q_{r_{n+1}}|}{\log |q_{s_n}|} \leq T \\ &\Rightarrow \log |q_{r_{n+1}}| \leq \log |q_{s_n}|^T \Rightarrow |q_{r_{n+1}}| \leq |q_{s_n}|^T \end{aligned}$$

dir. Burada $T > 1$ alınırsa işlemler yine doğru olur. Şimdi (4.11), (4.16), (4.20) ve (4.21) i

$$|\xi - \beta| \geq |\beta - \alpha_{r_n}| - |\xi - \alpha_{r_n}|$$

eşitsizliğinde kullanırsak,

$$|\xi - \beta| \geq \frac{1}{H(\beta)^m |q_{r_n}|^{c_5}} - \frac{1}{|q_{r_{n+1}}|^{1/T}} \quad (n \geq \max\{n_1, n_2\}) \quad (4.22)$$

elde edilir. $\beta \in \mathbb{K}$ için

$$H(\beta) \geq \max\{|q_{r_{\max\{n_1, n_2\}}}|, 2\}$$

olduğunu kabul edelim. j , ($j \geq \max\{n_1, n_2\}$)

$$|q_{r_j}| \leq H(\beta) < |q_{r_{j+1}}|$$

eşitsizliğini sağlayan tek türlü belirli pozitif tam sayı olsun. Bu durumda eğer $|q_{r_j}| \leq$

$H(\beta) < |q_{r_{j+1}}|^{1/(T(m+c_5+1))}$ ise, (4.22) de $n = j$ alınır. O halde,

$$\begin{aligned} |\xi - \beta| &\geq \frac{1}{H(\beta)^m |q_{r_j}|^{c_5}} - \frac{1}{|q_{r_{j+1}}|^{1/T}} \\ &\geq \frac{1}{H(\beta)^{m+c_5}} - \frac{1}{H(\beta)^{m+c_5+1}} \\ &\geq \frac{1}{H(\beta)^{m+c_5}} - \frac{1}{2H(\beta)^{m+c_5}} \quad (H(\beta) \geq 2) \\ &\Rightarrow |\xi - \beta| \geq \frac{1}{2H(\beta)^{m+c_5}} \end{aligned} \quad (4.23)$$

elde edilir. Eğer $|q_{r_{j+1}}|^{1/(T(m+c_5+1))} \leq H(\beta) < |q_{r_{j+1}}|$ ise, (4.22) de $n = j+1$ alınır ve

$$|\xi - \beta| \geq \frac{1}{H(\beta)^{m+c_5T(m+c_5+1)}} - \frac{1}{H(\beta)^{(\log |q_{r_{j+2}}| / \log |q_{r_{j+1}}|)(1/T)}} \quad (4.24)$$

olur. (4.6)(a) dan, $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\log |q_{s_j}|}{\log |q_{r_j}|} = \infty$ ve $|q_{s_j}| < |q_{r_{j+1}}|$ olduğundan, $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\log |q_{r_{j+1}}|}{\log |q_{r_j}|} = \infty$

dur. Bunu (4.24) de kullanırsak,

$$|\xi - \beta| \geq \frac{1}{2H(\beta)^{m+c_5T(m+c_5+1)}} \quad (4.25)$$

elde edilir. Çünkü (4.24) den (4.25) e geçmek için

$$\begin{aligned} -\frac{1}{H(\beta)^{(\log|q_{r_{j+2}}|/\log|q_{r_{j+1}}|)(1/T)}} &\geq -\frac{1}{2H(\beta)^{m+c_5T(m+c_5+1)}} \\ \Leftrightarrow H(\beta)^{(\log|q_{r_{j+2}}|/\log|q_{r_{j+1}}|)(1/T)} &\geq 2H(\beta)^{m+c_5T(m+c_5+1)} \\ \Leftrightarrow H(\beta)^{(\log|q_{r_{j+2}}|/\log|q_{r_{j+1}}|)} &\geq 2^T H(\beta)^{T(m+c_5T(m+c_5+1))} \end{aligned}$$

dir. Bu son eşitsizlik mümkündür, çünkü $H(\beta)$ yeteri kadar büyük alındığından (4.24) de j yeteri kadar büyük alınabilir ve yeteri kadar büyük j ler için

$$\log|q_{r_{j+2}}|/\log|q_{r_{j+1}}| > T + T(m + c_5T(m + c_5 + 1)) \quad \text{ve} \quad H(\beta) \geq 2$$

dir. O halde, (4.23) ve (4.25) den, derecesi $\leq m - 1$ olan ve yüksekliği yeteri kadar büyük olan her $\beta \in \mathbb{K}$ cebirsel formel kuvvet serisi için

$$|\xi - \beta| \geq \frac{1}{2H(\beta)^{m+c_5T(m+c_5+1)}}$$

eşitsizliği geçerlidir. Dolayısıyla $H > 1$ tam sayı olmak üzere,

$$w_{m-1}^*(H, \xi) = \min\{|\xi - \alpha| : \alpha \text{ bir cebirsel formel kuvvet serisi, } \deg(\alpha) \leq m-1, H(\alpha) \leq H\}$$

ifadesindeki minimuma katılan bütün $\beta \in \mathbb{K}$ cebirsel formel kuvvet serisi için

$$\begin{aligned}
|\xi - \beta| &\geq \frac{1}{2H(\beta)^{m+c_5T(m+c_5+1)}} \geq \frac{1}{2H^{m+c_5T(m+c_5+1)}} \\
\Rightarrow w_{m-1}^*(H, \xi) &\geq \frac{1}{2H^{m+c_5T(m+c_5+1)}} \\
\Rightarrow \log H w_{m-1}^*(H, \xi) &\geq \log 1 - \log 2 - \log H^{m-1+c_5T(m+c_5+1)} \\
\Rightarrow \frac{-\log H w_{m-1}^*(H, \xi)}{\log H} &\leq \frac{\log 2}{\log H} + m - 1 + c_5T(m+c_5+1) \\
\Rightarrow \limsup_{H \rightarrow \infty} \frac{-\log H w_{m-1}^*(H, \xi)}{\log H} &\leq \limsup_{H \rightarrow \infty} \left(\frac{\log 2}{\log H} + m - 1 + c_5T(m+c_5+1) \right) \\
\Rightarrow w_{m-1}^*(\xi) &\leq m - 1 + c_5T(m+c_5+1)
\end{aligned}$$

olur. Bu ise,

$$\mu^*(\xi) \geq m \quad (4.26)$$

olması demektir. O halde, (4.18) ve (4.26) dan $\mu^*(\xi) = m$ olur. Dolayısıyla, $\xi \in \mathbb{K}$ bir U_m^* -sayısıdır. $\mathbb{K}$ cisminde, U_m -sayıları kümesi ile U_m^* -sayıları kümesi çakıştığından, ξ , bir U_m -sayısıdır. Böylece Teorem 4.1.2 ispatlanmış olur.

Teorem 4.1.2 için aşağıdaki örneği oluşturduk.

Örnek 4.1. α , sürekli kesir açılımı

$$\alpha = \langle a_0, a_1, a_2, a_3, \dots \rangle = \langle 1, x, x, x, \dots \rangle$$

olan bir cebirsel formel kuvvet serisi olsun. Dikkat edilirse, α nın sürekli kesir açılımı periyodik olduğundan, $\deg(\alpha) = 2$ dir. $\{r_j\}_{j=0}^{\infty}$ ve $\{s_j\}_{j=0}^{\infty}$ tam sayı dizileri aşağıdaki gibi tanımlı olsun:

$$r_0 = 0, r_j = 2^{2^j} + 2 \quad \text{ve} \quad s_j = 2^{2^{j+1}} \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Dikkat edilirse, $r_j < s_j < r_{j+1}$ ($j = 1, 2, \dots$) ve $r_{j+1} = s_j + 2$ dir. Ayrıca sürekli kesirler teorisinden

$$|q_j| = |a_1 \cdots a_j| = q^{\deg(a_1) + \cdots + \deg(a_j)}$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla, $|q_j| = |x \cdots x| = q^j$ dir. Bundan,

$$\frac{\log |q_{s_j}|}{\log |q_{r_j}|} = \frac{\log q^{s_j}}{\log q^{r_j}} = \frac{s_j}{r_j} = \frac{2^{2^{j+1}}}{2^{2^j} + 2} = \frac{2^{2^{j+1}}}{2^{2^j} \left(1 + \frac{2}{2^{2^j}}\right)} = \frac{2^{2^j}}{1 + \frac{2}{2^{2^j}}}$$

$$\Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\log |q_{s_j}|}{\log |q_{r_j}|} = \infty$$

ve

$$\frac{\log |q_{r_{j+1}}|}{\log |q_{s_j}|} = \frac{\log q^{r_{j+1}}}{\log q^{s_j}} = \frac{r_{j+1}}{s_j} = \frac{s_j + 2}{s_j} = 1 + \frac{2}{s_j}$$

$$\Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\log |q_{r_{j+1}}|}{\log |q_{s_j}|} = 1 < \infty$$

olur, yani bu şekilde tanımlı $\{r_j\}$ ve $\{s_j\}$ dizileri Teorem 4.1.2 nin koşullarını sağlar.

Ayrıca, $j = 0, 1, \dots$ için $b_j \in K[x]$

$$b_j = \begin{cases} a_j, & r_n \leq j \leq s_n \quad (n = 0, 1, \dots), \\ x^2 + x, & j = s_n + 1 \quad (n = 0, 1, \dots) \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Burada $1 < |v_j| = |x^2 + x| = q^2 \neq |a_j|$ dir. Dolayısıyla, $b_j \in$

$K[x]$ de Teorem 4.1.2 nin koşullarını sağlar. Öyleyse, Teorem 4.1.2 den dolayı, $\xi = <$

$b_0, b_1, b_2, \dots >$ formel kuvvet serisi bir U_2 -sayısıdır.

4.2. SONLU CİSİMLER ÜZERİNDEKİ FORMEL KUVVET SERİLERİ CİSİMLERİNDE MAHLER'İN U_m -SAYILARI

Bu bölümde iki özgün teorem Teorem 4.2.1 ve Teorem 4.2.2 elde edilmiştir. Teorem 4.2.1 ve Teorem 4.2.2'de, sırasıyla, Alniaçık [10, Chapter I]'deki Theorem I ve Theorem III'ün $\widehat{\mathbb{K}}$ -benzerleri inşa edilmiştir. Teorem 4.2.1 ve Teorem 4.2.2 nin ispatlarında, sırasıyla, Alniaçık [10, Chapter I]'deki Theorem I ve Theorem III'ün ispatlarındaki yöntemler $\widehat{\mathbb{K}}$ cisminde uyarlanmıştır.

Teorem 4.2.1. $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ ($k \geq 1, \alpha_k \neq 0$), $\widehat{\mathbb{K}}$ cisminde ait, $K(x)$ üzerinde cebirsel elemanlar ve ξ , bir U_1 -sayısı olsun. ξ nin sürekli kesir açılımındaki yaklaşım kesirleri $\frac{p_n}{q_n}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) aşağıdaki koşulu sağlasın:

$$\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| = |q_n|^{-\omega_n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \infty.$$

Bu durumda $\alpha_0 + \alpha_1 \xi + \dots + \alpha_k \xi^k$, bir U_m -sayısıdır. Burada m , $K(x)(\alpha_0, \dots, \alpha_k)$ nin $K(x)$ üzerindeki derecesini göstermektedir.

İspat. Teoremin hipotezinden dolayı,

$$\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| = |q_n|^{-\omega_n} \leq 1 \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (4.27)$$

dir. Lemma 2.2.6 yı

$$P(y) = C(y) := \alpha_0 + \alpha_1 y + \dots + \alpha_k y^k \in \widehat{\mathbb{K}}[y], \quad \alpha = \xi, \quad \beta = \frac{p_n}{q_n} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

ile uygularsak,

$$\begin{aligned} \left| C(\xi) - C\left(\frac{p_n}{q_n}\right) \right| &\leq \max_{i=1, \dots, k} \{1, |\xi|\}^{i-1} \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| \max_{i=1, \dots, k} \{|\alpha_i|\} \\ \Rightarrow \left| C(\xi) - C\left(\frac{p_n}{q_n}\right) \right| &\leq c_1 \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| \end{aligned} \quad (4.28)$$

elde edilir, burada $c_1 = \max_{i=1,\dots,k} \{1, |\xi|\}^{i-1} \max_{i=1,\dots,k} \{|\alpha_i|\}$ dir. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = \xi$ olduğundan, bir n_0 pozitif tam sayısı vardır öyleki her $n \geq n_0$ için

$$\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| < |\xi| \quad (\xi, \text{ bir } U_1 - \text{sayısı olduğundan transandant, } |\xi| \neq 0 \text{ dir.})$$

$$\Rightarrow \left| \frac{p_n}{q_n} \right| < 2|\xi| \quad (4.29)$$

dir. $P_n(y)$, $n > n_0$ için $C\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ in $K[x]$ üzerindeki minimal polinomu olsun. Her $n > n_0$ için $\frac{p_n}{q_n} \in K(x)$ olduğundan, Lemma 2.2.7 den, sonlu sayıda n hariç her $\frac{p_n}{q_n} \in K(x)$ için $C\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$, $K(x)(\alpha_0, \dots, \alpha_k)$ cisminin bir pirimitif elemanıdır. Dolayısıyla, $n_1 > n_0$ olacak şekilde bir n_1 pozitif tam sayısı vardır öyleki her $n \geq n_1$ için $\deg\left(C\left(\frac{p_n}{q_n}\right)\right) = \deg(P_n) = m$ dir. (4.27) ve (4.28) den,

$$\left| C(\xi) - C\left(\frac{p_n}{q_n}\right) \right| \leq c_1$$

bulunur. O halde, Lemma 2.2.6 yı

$$P(y) = P_n(y) \in K[x][y], \quad \alpha = C(\xi), \quad \beta = C\left(\frac{p_n}{q_n}\right) \quad (n \geq n_1)$$

ile uygularsak,

$$\left| P_n(C(\xi)) - P_n\left(C\left(\frac{p_n}{q_n}\right)\right) \right| \leq c_2 \left| C(\xi) - C\left(\frac{p_n}{q_n}\right) \right| H(P_n) \quad (n \geq n_1) \quad (4.30)$$

elde edilir, burada $c_2 = \max_{i=1,\dots,m} \{c_1, |C(\xi)|\}^{i-1}$ dir. Dikkat edilirse, $P_n\left(C\left(\frac{p_n}{q_n}\right)\right) = 0$ dir. (4.28) i (4.30) da kullanırsak,

$$|P_n(C(\xi))| \leq c_3 H(P_n) |q_n|^{-\omega_n} \quad (n \geq n_1) \quad (4.31)$$

olup, burada $c_3 = c_2 c_1$ dir. Şimdi $H(P_n)$ için bir üst sınır verelim.

$$\gamma_n := C \left(\frac{p_n}{q_n} \right) \quad (n \geq n_1)$$

diyelim. O halde,

$$F(y, y_0, y_1, \dots, y_k) = q_n^k y - q_n^k y_0 - p_n q_n^{k-1} y_1 - \dots - p_n^k y_k$$

polinomu $y = \gamma_n$ ve $y_i = \alpha_i$ ($i = 0, \dots, k$) için sıfırdır. $F(y, y_0, y_1, \dots, y_k)$ polinomunun katsayılarının mutlak değerlerinin maksimumuna H denilirse, (4.29) dan,

$$\begin{aligned} H &= \max\{|q_n|^k, |q_n|^{k-1}|p_n|, \dots, |p_n|^k\} \\ &\leq \max\{|q_n|^k, |q_n|^{k-1}(2|\xi||q_n|), \dots, (2|\xi||q_n|)^k\} \\ &\leq |q_n|^k \max\{1, 2|\xi|, \dots, (2|\xi|)^k\} \\ \Rightarrow H &\leq |q_n|^k \max\{1, (2|\xi|)^k\} \end{aligned} \quad (4.32)$$

elde edilir. O halde, Teorem 4.1.1 i; $\eta = \gamma_n$, $d = 1$, $l_i = 1$ ($i = 0, \dots, k$) ve $F(y, y_0, y_1, \dots, y_k)$ ile uygularsak,

$$H(\gamma_n) \leq H^m H(\alpha_0)^m H(\alpha_1)^m \dots H(\alpha_k)^m$$

olur. (4.32) yi ve $H(\gamma_n) = H(P_n)$ olmasını yukarıdaki eşitsizlikte kullanırsak,

$$H(P_n) \leq c_4 |q_n|^{km} \quad (n \geq n_1) \quad (4.33)$$

olur, burada $c_4 = (\max\{1, (2|\xi|)^k\} H(\alpha_0) \dots H(\alpha_k))^m$ dir. $\lim_{n \rightarrow \infty} |q_n| = \infty$ olduğundan, $n_2 > n_1$ olacak şekilde bir n_2 pozitif tam sayısı vardır öyleki her $n \geq n_2$ için $|q_n| > c_4$ dür.

O halde, her $n \geq n_2$ için,

$$H(P_n) \leq |q_n|^{km+1} \quad (4.34)$$

eşitsizliği geçerlidir. (4.31) ve (4.34) ü birleştirirsek,

$$0 < |P_n(C(\xi))| \leq \frac{c_3}{H(P_n)^{\frac{\omega_n}{km+1}-1}} \quad (n \geq n_2) \quad (4.35)$$

olur. Burada dikkat edilirse ξ , bir transandant formel kuvvet serisi olduğundan, $P_n(C(\xi)) \neq 0$ dir. $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \infty$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla, $\{H(P_n)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi üstten sınırsızdır. Çünkü aksi taktirde $\{H(P_n)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi üstten sınırlı olsa; derecesi $\leq m$ olan $P_n(y)$ polinomlarının katsayılarının mutlak değerlerinin alabileceği sonlu sayıda tam sayı değeri olurdu. $P_n(y)$ polinomlarının katsayıları $K[x]$ in elemanı ve K sonlu bir cisim olduğundan, $P_n(y)$ polinomlarının yalnızca sonlu tanesi birbirinden farklı olurdu, yani $\{P_n(y)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin elemanları arasında tekrar eden bir polinom olurdu. Bu polinoma $\tilde{P}(y)$ diyelim. O halde, $\{P_n(y)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin $\{P_{n_j}(y)\}_{j=0}^{\infty}$ gibi bir alt dizisi olurdu öyleki her $j = 0, 1, \dots$ için $P_{n_j}(y) = \tilde{P}(y)$ dir. Öte yandan; $P_n(y)$, $n > n_0$ için $C(p_n/q_n)$ in $K[x]$ üzerindeki minimal polinomu olduğundan, belli bir j_0 pozitif tam sayısından büyük her j için

$$P_{n_j} \left(C \left(\frac{p_{n_j}}{q_{n_j}} \right) \right) = \tilde{P} \left(C \left(\frac{p_{n_j}}{q_{n_j}} \right) \right) = 0$$

olurdu. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = \xi$ olduğundan, $j \rightarrow \infty$ için limit alınırsa, $\tilde{P}(C(\xi)) = 0$ elde edilir ki bu da ξ nin bir U_1 -sayısı olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $\{H(P_n)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi üstten sınırsızdır. O halde bu dizinin

$$1 < H(P_{n_1}) < H(P_{n_2}) < H(P_{n_3}) < \dots, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} H(P_{n_j}) = \infty$$

olacak şekilde bir $\{H(P_{n_j})\}_{j=1}^{\infty}$ alt dizisi vardır. Bundan ve (4.35) den, yeteri kadar büyük

j ler için

$$0 < |P_{n_j}(C(\xi))| \leq c_3 H(P_{n_j})^{-\theta_{n_j}} \quad \left(\theta_{n_j} = \frac{\omega_{n_j}}{km+1} - 1, \lim_{j \rightarrow \infty} \theta_{n_j} = \infty, \lim_{j \rightarrow \infty} H(P_{n_j}) = \infty \right) \quad (4.36)$$

elde edilir. $\deg(P_{n_j}) = m$ olduğunu biliyoruz. $H(P_{n_j}) =: H_j$ diyelim. Dolayısıyla (4.36) dan,

$$w_m(H_j, \xi) = \min \{ |P(\xi)| : P(y) \in K[x][y] - \{0\}, \deg(P) \leq m, H(P) \leq H_j \}$$

$$\leq |P_{n_j}(C(\xi))| \leq c_3 H_j^{-\theta_{n_j}} < 1$$

$$\Rightarrow 0 < w_m(H_j, \xi) \leq c_3 H_j^{-\theta_{n_j}}$$

$$\Rightarrow \log(w_m(H_j, \xi)) \leq \log(c_3 H_j^{-\theta_{n_j}})$$

$$\Rightarrow \frac{-\log w_m(H_j, \xi)}{\log H_j} \geq \frac{-\log c_3 H_j^{-\theta_{n_j}}}{\log H_j} = \frac{-\log c_3}{\log H_j} + \theta_{n_j}$$

$$\Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{-\log(w_m(H_j, \xi))}{\log H_j} \geq \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{-\log c_3}{\log H_j} + \theta_{n_j} \right) = \infty$$

$$\Rightarrow \limsup_{H \rightarrow \infty} \frac{-\log(w_m(H, \xi))}{\log H} = \infty \Rightarrow w_m(\xi) = \infty$$

dur. O halde, $C(\xi)$,

$$\mu(C(\xi)) \leq m \quad (4.37)$$

olacak şekilde bir U -sayısıdır.

Şimdi ise ispatı tamamlamak için $\mu(C(\xi)) \geq m$ olduğunu gösterelim. Eğer $m = 1$ ise $\mu(C(\xi)) = m$ olduğu zaten açıktır. O halde, $m > 1$ alalım. Ayrıca $P(y)$ polinomu; $K[x]$ üzerinde, $1 \leq \deg(P) \leq m-1$ olan ve yüksekliği yeteri kadar büyük olan bir polinom olsun.

(4.30) dakine benzer şekilde, Lemma 2.2.6 yı bu kez $P(y)$ ile uygularsak,

$$|P(C(\xi)) - P(\gamma_n)| \leq c_2 |C(\xi) - \gamma_n| H(P) \quad (n \geq n_2) \quad (4.38)$$

bulunur. (4.27) ve (4.28) i, (4.38) de kullanırsak,

$$\begin{aligned} |P(C(\xi)) - P(\gamma_n)| &\leq c_3 |q_n|^{-\omega_n} H(P) \\ \Rightarrow |P(C(\xi))| &\geq |P(\gamma_n)| - c_3 |q_n|^{-\omega_n} H(P) \quad (n \geq n_2) \end{aligned} \quad (4.39)$$

olur. $\deg(\gamma_n) = m$ ($n \geq n_2$) ve $\deg(P) < m$ olduğundan, $n \geq n_2$ için $P(\gamma_n) \neq 0$ dır.

Öyleyse, Lemma 2.2.5 i $\alpha = \gamma_n$ ($n \geq n_2$) ile uygulayabiliriz ve bundan,

$$|P(\gamma_n)| \geq H(P)^{1-m} H(\gamma_n)^{1-m} \quad (n \geq n_2) \quad (4.40)$$

elde edilir. (4.33) ve $H(P_n) = H(\gamma_n)$ olmasını (4.40) da kullanırsak,

$$|P(\gamma_n)| \geq \frac{c_5}{H(P)^{m-1} |q_n|^{km(m-1)}} \quad (n \geq n_2)$$

olup, burada $c_5 = c_4^{1-m}$ dir. Bunu (4.39) ile birleştirirsek,

$$|P(C(\xi))| \geq \frac{c_5}{H(P)^{m-1} |q_n|^{km(m-1)}} - \frac{c_3 H(P)}{|q_n|^{\omega_n}} \quad (n \geq n_2) \quad (4.41)$$

olur. $\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| = |q_n|^{-\omega_n}$ eşitliğini ve $\mathbb{K}$ daki sürekli kesirlerin özelliklerini kullanırsak,

$$|q_n|^{\omega_n} = |q_{n+1}| |q_n| \quad (4.42)$$

elde edilir. $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \infty$ olduğundan, $n_3 > n_2$ olacak şekilde bir n_3 pozitif tam sayısı vardır öyleki

$$\omega_n > km(m-1)[(km+1)(m-1)+2] + m+1 \quad (n \geq n_3) \quad (4.43)$$

dir. Öte yandan v ,

$$|q_v| \leq H(P) < |q_{v+1}|$$

eşitsizliği sağlayan tek türlü belirli pozitif tam sayı olsun. (4.42) ve (4.43) den,

$$|q_v| < |q_{v+1}|^{\frac{1}{(km+1)(m-1)+2}} \quad (v \geq n_3)$$

bulunur. Eğer $|q_v| \leq H(P) < |q_{v+1}|^{1/[(km+1)(m-1)+2]}$ ise, (4.41) ve (4.42) de $n = v$ alalım. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} |P(C(\xi))| &\geq \frac{c_5}{H(P)^{m-1}|q_v|^{km(m-1)}} - \frac{c_3 H(P)}{|q_v|^{\omega_v}} \quad (|q_v| \leq H(P), |q_v|^{\omega_v} > |q_{v+1}|) \\ &\geq \frac{c_5}{H(P)^{m-1}H(P)^{km(m-1)}} - \frac{c_3 H(P)}{H(P)^{(km+1)(m-1)+2}} \\ \Rightarrow |P(C(\xi))| &\geq \frac{c_5}{H(P)^{(km+1)(m-1)}} - \frac{c_3}{H(P)^{(km+1)(m-1)+1}} \end{aligned}$$

elde edilir. $H(P)$ yeteri kadar büyük olduğundan, $H(P) > \frac{2c_3}{c_5}$ alınabilir ve bu, yukarıdaki eşitsizlikle birleştirildiğinde,

$$|P(C(\xi))| \geq \frac{c_5}{2H(P)^{(km+1)(m-1)}} \quad (4.44)$$

olur. Eğer $|q_{v+1}|^{1/[(km+1)(m-1)+2]} \leq H(P) < |q_{v+1}|$ ise, bu kez (4.41) da $n = v + 1$ alalım. O halde,

$$\begin{aligned} |P(C(\xi))| &\geq \frac{c_5}{H(P)^{m-1}|q_{v+1}|^{km(m-1)}} - \frac{c_3 H(P)}{|q_{v+1}|^{\omega_{v+1}}} \\ &\geq \frac{c_5}{H(P)^{km(m-1)[(km+1)(m-1)+2]+m-1}} - \frac{c_3}{H(P)^{\omega_{v+1}-1}} \end{aligned}$$

elde edilir. (4.43) ve $H(P) > \frac{2c_3}{c_5}$ i yukarıdaki eşitsizlikte kullanırsak,

$$|P(C(\xi))| \geq \frac{c_5}{2H(P)^{km(m-1)[(km+1)(m-1)+2]+m-1}} \quad (4.45)$$

bulunur. Sonuç olarak, (4.44) ve (4.45) den, $1 \leq \deg(P) \leq m-1$ olacak şekilde ve yüksekliği yeteri kadar büyük olan her $P(y) \in K[x][y]$ için,

$$|P(C(\xi))| \geq \frac{c_5}{2H(P)^{km(m-1)[(km+1)(m-1)+2]+m-1}}$$

eşitsizliği geçerlidir. Dolayısıyla $H > 1$ tam sayı olmak üzere,

$$w_{m-1}(H, C(\xi)) = \min \{ |P(C(\xi))| : P(y) \in K[x][y] - \{0\}, \deg(P) \leq m-1, H(P) \leq H \}$$

ifadesindeki minimuma katılan bütün $P(y) \in K[x][y]$ polinomları için

$$|P(C(\xi))| \geq \frac{c_5}{2H(P)^{km(m-1)[(km+1)(m-1)+2]+m-1}} \geq \frac{1}{2H^{km(m-1)[(km+1)(m-1)+2]+m-1}}$$

$$\Rightarrow w_{m-1}(H, C(\xi)) \geq \frac{1}{2H^{km(m-1)[(km+1)(m-1)+2]+m-1}}$$

$$\Rightarrow \log(w_{m-1}(H, C(\xi))) \geq \log 1 - \log 2 - \log H^{km(m-1)[(km+1)(m-1)+2]+m-1}$$

$$\Rightarrow \frac{-\log(w_{m-1}(H, C(\xi)))}{\log H} \leq \frac{\log 2}{\log H} + km(m-1)[(km+1)(m-1)+2]+m-1$$

$$\Rightarrow \limsup_{H \rightarrow \infty} \frac{-\log(w_{m-1}(H, C(\xi)))}{\log H} \leq \limsup_{H \rightarrow \infty} \left(\frac{\log 2}{\log H} + km(m-1)[(km+1)(m-1)+2]+m-1 \right)$$

$$\Rightarrow w_{m-1}(C(\xi)) \leq km(m-1)[(km+1)(m-1)+2]+m-1$$

olur. Bu ise

$$\mu(C(\xi)) \geq m \quad (4.46)$$

olması demektir. O halde, (4.37) ve (4.46) dan, $\mu(C(\xi)) = m$ olur. Dolayısıyla $C(\xi) \in \widehat{\mathbb{K}}$, bir U_m -sayısıdır. Böylece Teorem 4.2.1 ispatlanmış olur.

Teorem 4.2.2. $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ ($k \geq 1, \alpha_k \neq 0$), $\widehat{\mathbb{K}}$ cisminde ait, $K(x)$ üzerinde cebirsel elemanlar; $\xi \in \mathbb{K} \setminus K(x)$ ve $\{p_n/q_n\}_{n=0}^{\infty}$ ($p_n, q_n \in K[x], |q_n| > 1$) aşağıdaki koşulları sağlayan bir dizi olsun:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |q_{n+1}|}{\log |q_n|} = \infty$,
2. $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |q_{n+1}|}{\log \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right|^{-1}} < \infty$.

Bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = \xi$ dir ve ξ , bir U_1 -sayısıdır. Dahası $\alpha_0 + \alpha_1 \xi + \dots + \alpha_k \xi^k$, bir U_m -sayısıdır. Burada m , $K(x)(\alpha_0, \dots, \alpha_k)$ nın $K(x)$ üzerindeki derecesini göstermektedir.

İspat. Teoremin ilk şartından dolayı, $\lim_{n \rightarrow \infty} |q_n| = \infty$ dur. 2. yi 1. e bölersek,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right|^{-1}}{\log |q_n|} = \infty \quad (4.47)$$

elde edilir. Buradan, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = \xi$ ve $\xi \in \mathbb{K}$ nın bir U_1 -sayısı olduğu elde edilir.

Çünkü, (4.47) den,

$$\text{Her } \omega > 0 \text{ reel sayısı için } \exists n_\omega \in \mathbb{N}; \forall n \geq n_\omega \text{ için } \frac{\log \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right|^{-1}}{\log |q_n|} > \omega$$

$$\Rightarrow \log \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right|^{-1} > \log |q_n|^\omega$$

$$\Rightarrow \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right|^{-1} > |q_n|^\omega$$

$$\Rightarrow \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{|q_n|^\omega}$$

elde edilir. Ayrıca $\xi \in \mathbb{K} \setminus K(x)$ ve $|q_n| > 1$ olmasını kullanırsak,

Her $\omega > 0$ reel sayısı için $\exists n_\omega \in \mathbb{N}; \forall n \geq n_\omega$ için

$$0 < \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{|q_n|^\omega} \leq \frac{1}{2^\omega}$$

olur. Herhangi bir ω_n pozitif terimli reel sayı dizisi alalım öyleki $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n + 1 = \infty$ olsun.

O halde yukarıdaki eşitsizlikten, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$0 < \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{|q_n|^{\omega_n+1}} \leq \frac{1}{2^{\omega_n+1}} < 1$$

elde edilir. Dolayısıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = \xi$ dir. Öte yandan, ξ bir U_1 -sayısı ise $-\xi$ ve $\frac{1}{\xi}$

de birer U_1 -sayısıdır. O halde, $0 < |\xi| < 1$ olduğunu kabul edebiliriz. Böylece, bundan

ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = \xi$ olmasından dolayı, $\left| \frac{p_n}{q_n} \right| < 1$ kabul edebiliriz. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}
0 < |q_n \xi - p_n| < \frac{1}{|q_n|^{\omega_n}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \infty, \quad |q_n| > 1 \\
\lim_{n \rightarrow \infty} |q_n| = \infty, \quad |p_n| < |q_n|
\end{aligned} \tag{4.48}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$P_n(y) = q_n y - p_n; \quad p_n, q_n \in K[x], \quad q_n \neq 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

polinomlarını düşünürsek, (4.48) den,

$$\begin{aligned}
0 < |P_n(\xi)| < \frac{1}{H(P_n)^{\omega_n}}, \quad 1 < H(P_n), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} H(P_n) = \infty \\
(|p_n| < |q_n| \Rightarrow H(P_n) = \max\{|q_n|, |-p_n|\} = |q_n|)
\end{aligned}$$

bulunur ki bu da $w_1(\xi) = \infty$ olması demektir. Böylece $\xi \in \mathbb{K}$, bir U_1 -sayısıdır.

Teoremin ikinci iddiasını ispatlamak için $C(y) := \alpha_0 + \alpha_1 y + \dots + \alpha_k y^k$ diyelim ve öncelikle $\mu(C(\xi)) \leq m$ olduğunu gösterelim.

$$\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| = |q_n|^{-\omega_n}$$

olsun. (4.47) den,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \infty \tag{4.49}$$

dur. Şimdi

$$\gamma_n := C\left(\frac{p_n}{q_n}\right) \in \widehat{\mathbb{K}}$$

diyelim. $P_n(y)$ polinomu, Teorem 4.2.1 in ispatında olduğu gibi, γ_n in $K[x]$ üzerindeki minimal polinomu olsun. Lemma 2.2.7 den, yeteri kadar büyük n ler için, $\deg(\gamma_n) = \deg(P_n) = m$ dir. O halde, Lemma 2.2.6 yı

$$P(y) = C(y) \in \widehat{\mathbb{K}}[y], \quad \alpha = \xi, \quad \beta = \frac{p_n}{q_n} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

ile uygulayalım. Teorem 4.2.1 in ispatındaki, (4.28) ve (4.35) arasındaki adımlar kullanılırsa,

$$0 < |P_n(C(\xi))| \leq \frac{c_6}{H(P_n)^{\frac{\omega_n}{km+1}-1}} \quad (n \geq N_1) \quad (4.50)$$

olur, burada N_1 bir pozitif tam sayı ve c_6 bir reel sabittir. Teorem 4.2.1 in ispatında olduğu gibi, (4.49) ve (4.50) den, $C(\xi)$ nin

$$\mu(C(\xi)) \leq m \quad (4.51)$$

olacak şekilde bir U –sayısı olduğu bulunmuş olur.

Şimdi $\mu(C(\xi)) \geq m$ olduğunu gösterelim. Eğer $m = 1$ ise, $\mu(C(\xi)) = m$ olduğu açıktır. $m > 1$ olduğunu kabul edelim. Teorem 4.2.1 in ispatında, (4.28) ve (4.33) arasındaki adımlarda olduğu gibi,

$$\left| C(\xi) - C\left(\frac{p_n}{q_n}\right) \right| \leq c_7 \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| \quad (n \geq N_2) \quad (4.52)$$

ve

$$H(P_n) \leq c_8 |q_n|^{km} \quad (n \geq N_2) \quad (4.53)$$

olacak şekilde c_7 ve c_8 pozitif reel sabitleri vardır. Burada N_2 , $N_2 > N_1$ olacak şekilde bir pozitif tam sayıdır. $P(y) \in K[x][y]$, $1 \leq \deg(P) \leq m-1$ olacak şekilde ve

yüksekliği yeteri kadar büyük olan bir polinom olsun. (4.38) de olduğu gibi, Lemma 2.2.6'yı uygularsak,

$$|P(C(\xi)) - P(\gamma_n)| \leq c_9 |C(\xi) - \gamma_n| H(P) \quad (n \geq N_2)$$

elde edilir. (4.52) yi yukarıdaki eşitsizlikte kullanırsak,

$$|P(C(\xi))| \geq |P(\gamma_n)| - c_{10} \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| H(P) \quad (n \geq N_2) \quad (4.54)$$

bulunur. Burada $c_{10} = c_7 c_9$ dur.

$$\lambda := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |q_{n+1}|}{\log \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right|^{-1}}$$

diyelim. Teoremin ikinci şartından dolayı, λ negatif olmayan bir reel sayıdır (çünkü $|q_{n+1}| > 1$ ve $\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right|^{-1} > 1$ dir). O halde,

$$t > \lambda$$

olacak şekilde bir t pozitif tam sayısı vardır. Dolayısıyla,

$$\frac{\log |q_{n+1}|}{\log \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right|^{-1}} < t \quad (n \geq N_3)$$

$$\left(\begin{array}{l} \lambda \text{ üst limit olduğundan bir } \varepsilon > 0 \text{ verildiğinde yeteri kadar büyük } n \text{ ler için} \\ \frac{\log |q_{n+1}|}{\log \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right|^{-1}} < \lambda + \varepsilon \text{ dur. } \varepsilon = t - \lambda \text{ alırsak yukarıdaki eşitsizlik elde edilir.} \end{array} \right)$$

olup, burada $N_3, N_3 > N_2$ olacak şekilde bir tam sayıdır. Bundan,

$$\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{|q_{n+1}|^{1/t}} \quad (n \geq N_3) \quad (4.55)$$

elde edilir. (4.54) ve (4.55) i birleştirirsek,

$$|P(C(\xi))| \geq |P(\gamma_n)| - \frac{c_{10}H(P)}{|q_{n+1}|^{1/t}} \quad (n \geq N_3) \quad (4.56)$$

olur. $\deg(\gamma_n) = m$ ($n \geq N_3$) ve $\deg(P) < m$ olduğundan, $P(\gamma_n) \neq 0$ ($n \geq N_3$) dir. O halde, Lemma 2.2.5 uygulanabilir ve

$$|P(\gamma_n)| \geq H(P)^{1-m} H(P_n)^{1-m} \quad (n \geq N_3) \quad (4.57)$$

elde edilir. (4.53), (4.56) ve (4.57) yi birleştirirsek,

$$|P(C(\xi))| \geq \frac{c_{11}}{H(P)^{m-1} |q_n|^{km(m-1)}} - \frac{c_{10}H(P)}{|q_{n+1}|^{1/t}} \quad (n \geq N_3) \quad (4.58)$$

olur. Burada $c_{11} = c_8^{1-m}$ dir. Teoremin ilk şartından dolayı, $N_4 > N_3$ olacak şekilde bir N_4 pozitif tam sayısı vardır öyleki her $n \geq N_4$ için

$$\frac{\log |q_{n+1}|}{\log |q_n|} > \mu \quad (4.59)$$

eşitsizliği sağlar. Burada

$$\mu = km(m-1)[(km+1)(m-1)+2]t^2 + (m+1)t$$

dir. j tam sayısı,

$$|q_j| \leq H(P) < |q_{j+1}|$$

eşitsizliği sağlayan tek türlü belirli pozitif tam sayı olsun. Eğer $|q_j| \leq H(P) <$

$|q_{j+1}|^{1/t[(km+1)(m-1)+2]}$ ise, (4.58) da $n = j$ alalım. Bundan,

$$\begin{aligned}
|P(C(\xi))| &\geq \frac{c_{11}}{H(P)^{m-1}|q_j|^{km(m-1)}} - \frac{c_{10}H(P)}{|q_{j+1}|^{1/t}} \\
&\geq \frac{c_{11}}{H(P)^{km(m-1)+m-1}} - \frac{c_{10}}{H(P)^{[(km+1)(m-1)+1]}}
\end{aligned}$$

elde edilir. $H(P)$ yeteri kadar büyük olduğundan, $H(P) > \frac{2c_{10}}{c_{11}}$ alınabilir ve bu, yukarıdaki eşitsizlikle birleştirildiğinde,

$$|P(C(\xi))| \geq \frac{c_{11}}{2H(P)^{km(m-1)+m-1}} \quad (4.60)$$

bulunur. Eğer $|q_{j+1}|^{1/t[(km+1)(m-1)+2]} \leq H(P) < |q_{j+1}|$ ise, (4.58) da $n = j+1$ alalım. O halde,

$$\begin{aligned}
|P(C(\xi))| &\geq \frac{c_{11}}{H(P)^{m-1}|q_{j+1}|^{km(m-1)}} - \frac{c_{10}H(P)}{|q_{j+2}|^{1/t}} \\
\Rightarrow |P(C(\xi))| &\geq \frac{c_{11}}{H(P)^{km(m-1)t[(km+1)(m-1)+2]+m-1}} - \frac{c_{10}H(P)}{|q_{j+2}|^{1/t}} \quad (4.61)
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi (4.59) da $n = j+1$ alalım. Dolayısıyla,

$$|q_{j+2}|^{1/t} > |q_{j+1}|^{km(m-1)t[(km+1)(m-1)+2]+m+1}$$

olur. $H(P) < |q_{j+1}|$ eşitsizliğini yukarıdaki eşitsizlikte kullanırsak,

$$|q_{j+2}|^{1/t} > H(P)^{km(m-1)t[(km+1)(m-1)+2]+m+1} \quad (4.62)$$

bulunur. (4.61), (4.62) ve $H(P) > \frac{2c_{10}}{c_{11}}$ olmasından,

$$|P(C(\xi))| > \frac{c_{11}}{2H(P)^{km(m-1)t[(km+1)(m-1)+2]+m-1}} \quad (4.63)$$

olur. Sonuç olarak, (4.60) ve (4.63) den, $1 \leq \deg(P) \leq m-1$ olacak şekildeki ve yüksekliği yeteri kadar büyük olan her $P(y) \in K[x][y]$ için

$$|P(C(\xi))| > \frac{c_{11}}{2H(P)^{km(m-1)t[(km+1)(m-1)+2]+m-1}}$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu ise,

$$\mu(C(\xi)) \geq m \quad (4.64)$$

sonucunu vermektedir. (4.51) ve (4.64) ü birleştirirsek, $\mu(C(\xi)) = m$ olur. Böylece $C(\xi) \in \widehat{\mathbb{K}}$, bir U_m -sayısıdır. Dolayısıyla Teorem 4.2.2 ispatlanmış olur.

Teorem 4.2.2 için aşağıdaki örneği oluşturduk.

Örnek 4.2. Teorem 4.2.2 de

$$\xi = \sum_{i=0}^{\infty} x^{-3^i!}, \quad p_n = x^{3^{n!}} \sum_{i=0}^n x^{-3^i!} \quad \text{ve} \quad q_n = x^{3^{n!}} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

alalım. O halde,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |q_{n+1}|}{\log |q_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |x|^{3^{(n+1)!}}}{\log |x|^{3^{n!}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{(n+1)!}}{3^{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^{nn!} = \infty \end{aligned}$$

olup Teorem 4.2.2 nin ilk şartı sağlanır. Ayrıca,

$$\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| = \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{x^{3^i!}} \right| = \frac{1}{|x|^{3^{(n+1)!}}} = \frac{1}{|q_n|^{\frac{3^{(n+1)!}}{3^{n!}}}} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

($|x| > 1$ olduğundan ve Arşimedyen olmayan değerlendirmenin özelliğinden)

ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{(n+1)!}}{3^{n!}} = \infty$ olduğundan Teorem 4.2.2 nin ikinci şartı da sağlanır. O halde, Teorem 4.2.2 den dolayı, ξ , bir U_1 -sayısı olur ve $1 + \xi + \dots + \xi^{k-1} + \sqrt[m]{x}\xi^k$ bir U_m -sayısıdır. Burada m , herhangi bir pozitif tam sayı; $1, K$ nın birim elemanı ve $\sqrt[m]{x}$ de $y^m - x$ polinomunun bir kökü olarak tanımlıdır.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada ilk olarak Teorem 4.1.1 de, İçen [8] in ünlü lemmasının $\widehat{\mathbb{K}}$ -benzeri inşa edilmiştir. Daha sonra Teorem 4.1.2 de, formel kuvvet serileri cismi $\mathbb{K}$ da, m . dereceden cebirsel formel kuvvet serilerinin $\mathbb{K}$ da sürekli kesir açılımlarını kullanarak, yeni U_m -sayıları elde etmemizi sağlayacak bir sonuç ispatlanmıştır. Teorem 4.2.1 ve Teorem 4.2.2 de, $\mathbb{K}$ daki bir U_1 -sayısının cebirsel formel kuvvet serisi katsayılı tam kombinasyonlarının bazı koşullar altında U_m -sayıları olduğu gösterilmiştir.

Daha sonraki çalışmalarda $\mathbb{K}$ daki bir U_1 -sayısının cebirsel formel kuvvet serisi katsayılı rasyonel kombinasyonlarının hangi sayı sınıfına düşeceği incelenebilir.

Teorem 4.2.1 ve Teorem 4.2.2 de, tek bir ξ almak yerine $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ şeklinde k tane U_1 -sayısı alınarak $\alpha_0 + \alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_k \xi_k$ ifadesinin hangi sayı sınıfına düşeceği araştırılabilir.

KAYNAKLAR

- [1]. Mahler K., 1932, Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus. I, II, *J. Reine Angew. Math.* 166, 118-150.
- [2]. Bundschuh P., 1978, Transzendenzmasse in Körpern formaler Laurentreihen, *J. Reine Angew. Math.*, 299/300, 411-432.
- [3]. Oryan M. H., 1980, Über die Unterklassen U_m der Mahlerschen Klasseneinteilung der transzendenten formalen Laurentreihen, *İstanbul Üniv. Fen Fak. Mecm. Ser. A*, 45, 43-63.
- [4]. Kekeç G., 2020, U -numbers in fields of formal power series over finite fields, *Bull. Aust. Math. Soc.*, 101, 218-225.
- [5]. Kekeç G., 2020, On transcendental formal power series over finite fields, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie (N.S.)*, 63/111, 349-357.
- [6]. Kekeç G., 2022, On Mahler's classification of formal power series over a finite field, *Math. Slovaca*, 72, 265-273.
- [7]. Alınışık K., 1982, On U_m -numbers, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 85, 499-505.
- [8]. İçen O. Ş., 1973, Anhang zu den Arbeiten "Über die Funktionswerte der p -adisch elliptischen Funktionen I, II", *İstanbul Üniv. Fen Fak. Mecm. Ser. A*, 38, 25-35.
- [9]. Can B. ve Kekeç G., 2022, On transcendental continued fractions in fields of formal power series over finite fields, *Bull. Aust. Math. Soc.*, 105, 392-403.
- [10]. Alınışık K., 1979, On the subclasses U_m in Mahler's classification of the transcendental numbers, *İstanbul Üniv. Fen Fak. Mecm. Ser. A*, 44, 39-82.
- [11]. LeVeque W. J., 1953, On Mahler's U -numbers, *J. London Math. Soc.*, 28, 220-229.
- [12]. Koksma J. F., 1939, Über die Mahlersche Klasseneinteilung der transzendenten Zahlen und die Approximation komplexer Zahlen durch algebraische Zahlen, *Monatsh. Math. Phys.*, 48, 176-189.
- [13]. Bugeaud Y., 2004, *Approximation by Algebraic Numbers*, Cambridge Tracts in Mathematics, 160 (Cambridge University Press, Cambridge).
- [14]. Ooto T., 2019, The existence of T-numbers in positive characteristic, *Acta Arith.*, 189, 179-189.
- [15]. Ooto T., 2017, Quadratic approximation in $\mathbb{F}_q((T^{-1}))$, *Osaka J. Math.*, 54, 129-156.
- [16]. Chaichana T., Laohakosol V., Harnchoowong A., 2006, Linear independence of continued fractions in the field of formal series over a finite field, *Thai J. Math.*, 4, 163-177.

- [17]. Schmidt W. M., 2000, On continued fractions and Diophantine approximation in power series fields, *Acta Arith.*, 95, 139–166.
- [18]. Müller R., 1993, Algebraische Unabhängigkeit der Werte gewisser Lückenreihen in nicht-archimedisch bewerteten Körpern, *Results Math.*, 24, 288–297.
- [19]. Schneider T., 1957, *Einführung in die transzendenten Zahlen*, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg.
- [20]. Ooto T., 2018, On Diophantine exponents for Laurent series over a finite field, *J. Number Theory*, 185, 349–378.
- [21]. İçen O. Ş., 1971, Über die Funktionswerte der p -adisch elliptischen Funktionen I, *İstanbul Üniv. Fen Fak. Mecm. Ser. A*, 36, 53–87.





ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Büşra CAN
Doğum Yeri	-
Doğum Tarihi	-
Uyruğu	☒ T.C. ☐ Diğer:
Telefon	-
E-Posta Adresi	-
Web Adresi	http://



Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Fakülte	Fen Fakültesi
Bölümü	Matematik
Mezuniyet Yılı	2014

Yüksek Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Programı	Matematik Programı
Mezuniyet Tarihi	2017

Doktora	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Programı	Matematik Programı
Mezuniyet Tarihi	2022

Makale ve Bildiriler	
Makaleler	
B. Can and G. Kekeç, 2022, On transcendental continued fractions in fields of formal power series over finite fields, <i>Bull. Aust. Math. Soc.</i> , 105, 392-403	

