

FOURIER İNTEGRALİNİN BAŞLANGIÇ
VE SINIR-DEĞER PROBLEMLERİNE
UYGULANMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
(MATEMATİK)

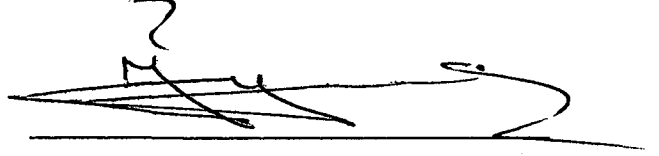
Mustafa YILDIZ

Şubat 1989

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

T. C.
Yükseköğretim Kurulu
Dokümantasyon Merkez

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.



Danışman

Yrd.Doç.Dr. İrfan Baki YAŞAR

Sınav Jürisi

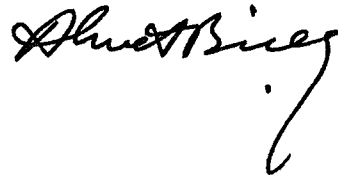
Başkan : Prof. Dr. Muhsin MERT

Üye : Yrd.Doç.Dr.İrfan B. YAŞAR

Üye : Doç.Dr.Erdoğan ESİN



Bu Tez Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Tez Yazım Esaslarına uygundur.



İÇİNDEKİLER

ÖZ	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SEMBOLLER	v

BÖLÜM I

TEMEL KAVRAMLAR	1
1.1. Öklidyen Uzaylar Arasındaki Dönüşüm	1
1.2. İntegraller İçin Ortalama Değer Teoremleri	4
1.3. Düzgün Yakınsaklık	6
1.4. Fourier Serileri	9
1.5. Fonksiyonların Ortogonalliği ve Ortonormallliği	11
1.6. Karakteristik Fonksiyonların Ortogonalliği	12
1.7. Fourier İntegrali	15
1.8. Fourier İntegral Teoreminin Eşdeğer Formları	16
1.9. Bessel Denklemi ve Bessel Fonksiyonları ..	17
1.10. Lommel İntegralleri	21
1.11. Fourier-Bessel Açılımı	24

BÖLÜM II

YARDIMCI FORMÜL VE TEOREMLER	28
2.1. Fourier İntegralinin Varlığı	28
2.2. İntegrallerin Toplanabilirliği	29
2.3. Fourier İntegralinin Toplanabilirliği	33
2.4. Belirli Cauchy İntegrali	41
2.5. Weierstrass'ın Belirli İntegrali	42
2.6. Genel Toplanabilirlik	43
2.7. Çekirdek Fonksiyonu	44
2.8. Fourier Formülünün İntegre Edilmiş Formu .	46
2.9. Mellin Formülü	47

BÖLÜM III	
STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ	49
3.1. Ortogonal Fonksiyonlar	49
3.2. Dik Fonksiyonların Seriyeye Açılımı	53
3.3. Sturm-Liouville Denkleminin Çözümü	56
BÖLÜM IV	
STURM-LIOUVILLE DENKLEMİNİN HOMOGEN OLMAYAN BİR DİFERENSİYEL DENKLEM İÇEREN SINIR-DEĞER PROBLEMİNE UYGULAMASI	70
4.1. Problemin Varlığı	70
4.2. Stodola ve Vianello Metodu	74
KAYNAKLAR	83



FOURIER İNTEGRALİNİN BAŞLANGIÇ VE SINIR-DEĞER
PROBLEMLERİNE UYGULANMASI

(Yüksek Lisans Tezi)

Mustafa YILDIZ
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Şubat 1989

ÖZ

Bu çalışmada, başlangıç ve sınır-değer problemlerinin çözümündeki Fourier İntegralleri yöntemi ve buna bağlı olarak gerekli integral dönüşümleri ele alınıp, bu yöntemin ileri bir aşaması olan Sturm-Liouville problemi incelenerek uygulama alanına aktarılması, sonuçlara daha sağlıklı yaklaşılması ana hedef seçilmiştir.

APPLICATION OF FOURIER INTEGRALS TO INITIAL AND
BOUNDARY VALUES PROBLEM

(M.Sc. Thesis)

Mustafa YILDIZ
GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
February 1989

ABSTRACT

In this study, the Fourier Integrals method has been used in the solution of initial and boundary-value problems and according to this, necessary integral transformations have been considered and used. Main purpose of this work is to analyse the Sturm-Liouville problem which is an advanced stage of Fourier Integrals and to put into practice so that obtained results will be more precise .

TEŞEKKÜR

Uygulamalı Matematik dalında çalışma yapmama vesile olan, Anabilim Dalı Başkanımız Prof.Dr.Muhsin MERT hocama, her adımda bilgilerinden yararlandığım ve değerli vakitlerini esirgemedi bana yardımcı olan danışman hocam Sayın Yrd.Doç.Dr. İrfan Baki YAŞAR'a şükranlarımı arz ederim.



SEMBOLLER

<u>Sembol</u>	<u>Anlam</u>
$\mathcal{L}$	Laplace operatörü
$\mathcal{L}^{-1}$	Ters Laplace operatörü
$N(t)$	Boş fonksiyon
$D = \frac{d}{dx}$	Türev operatörü
$\varphi_1(x)$	Karakteristik fonksiyon
$J_n(x)$	n'inci mertebeden Bessel fonksiyonu
$\Gamma(x)$	Gama fonksiyonu
$\beta(m,n)$	Beta fonksiyonu
$K(x,y,\delta)$	Çekirdek fonksiyonu
$\rightarrow \infty$	x'in sonsuzdaki limiti
(C,α)	Toplanabilirlik
$F(s)$	Mellin formülü
$O(x^n)$	$f(x) = O(x^n)$ ise
	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left \frac{f(x)}{x^n} \right = \text{Sonlu}$

BÖLÜM 1

TEMEL KAVRAMLAR

1.1. TANIM. (Öklidyen Uzaylar Arasındaki Dönüşüm)

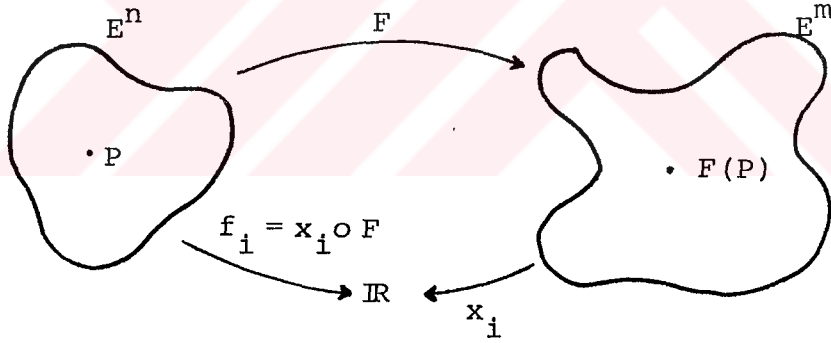
Bir $F: E^n \rightarrow E^m$ fonksiyonu verilmiş olsun. $\forall p \in E^n$ için

$$F(p) = (f_1(p), \dots, f_m(p))$$

olacak şekilde

$$f_1, \dots, f_m: E^n \rightarrow \mathbb{R}$$

reel değerli fonksiyonlarına F nin Öklid koordinat fonksiyonları denir ve $F = (f_1, \dots, f_m)$ şeklinde gösterilir.



Şekil 1. Öklid koordinat fonksiyonları.

F fonksiyonlarının koordinat fonksiyonları olan f_i 'ler diferensiyellenebilir iseler F fonksiyonuna da diferensiyellenebilirdir denir. Eğer,

$$F: E^n \rightarrow E^m$$

diferensiyellenebilir bir fonksiyon ise F ye dönüşüm denir.

Yukarıdaki diyagramda $F = (f_1, \dots, f_m)$ ve E^m de $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ koordinat sistemi için

$$f_i = x_i \circ F : E^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (1 \leq i \leq m)$$

şeklindedir [1].

1.1.1. TANIM. (Laplace dönüşümü)

$F(t)$ t nin $t \geq 0$ için tanımlanmış fonksiyonu olsun. $t < 0$ için $F(t) = 0$ kabul edilebilir. $s > 0$ reel veya kompleks bir parametre olmak üzere, t reel değişkenin bir fonksiyonu e^{-st} olduğuna göre;

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (1.1)$$

integrali var olacak şekilde bir s parametresini bulmak mümkün ise $F(t)$ nin $\mathcal{L}\{F(t)\}$ ile gösterilen Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt \quad (1.2)$$

ile tanımlanır.

(1.2) integrali s nin bir s_0 değeri için yakınsak ise $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$ olan her s için yakınsaktır. Bu ise $F(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünün varlığını ifade eder. $F(t)$ ile $f(s)$ çiftine dönüşüm çifti adı verilir.

t nin bir fonksiyonu $F(t)$, $G(t)$ gibi büyük harflerle gösterilmiş ise bunların Laplace dönüşümleri sırasıyla $f(s)$, $g(s)$ ile gösterilir [2].

1.1.2. TANIM. (Ters Laplace Dönüşümü)

$F(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü $f(s)$ olsun.
 $F(t)$ belli iken $\mathcal{L}\{f(t)\} = f(s)$ işlemine $F(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü adı verilir.

Buna göre $f(s)$ Laplace dönüşümünün var olması halinde $F(t)$ yi bulma işlemine ters Laplace dönüşümü denir ve

$$F(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} \quad (1.3)$$

ile gösterilir.

$s, a + ib$ şeklinde bir parametre olmak üzere $f(s)$ belli iken $F(t)$ fonksiyonu

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{st} f(s) ds$$

integrali ile hesaplanır. $\mathcal{L}^{-1}$ operatörüne ters Laplace operatör denir [3].

1.1.3. Laplace dönüşümünün tekliği ve varlığı

$N(t)$ boş fonksiyonunun Laplace dönüşümü boş olduğundan,

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s) \Rightarrow \mathcal{L}\{F(t) + N(t)\} = f(s)$$

yazılabilir. Tersini düşünürsek,

$$\begin{aligned} f(s) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(t) + N(t)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(t)\} + \mathcal{L}^{-1}\{N(t)\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\{F(t)\} \end{aligned}$$

olarak ifade edilir.

Bir fonksiyonun Laplace dönüşümünün tekliği ve varlığı o fonksiyonun ters Laplace dönüşümündeki teklik ve varlığı garanti altına almaktadır. Bir fonksiyonun tersi varsa kendisinde vardır. Ancak karşıtı doğru değildir[3].

1.2. TEOREM. (İntegraller İçin Ortalama Değer Teoremleri)

1.2.1. Birinci ortalama değer teoremi

Eğer $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ise (a,b) de

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a)f(\xi) \quad (1.4)$$

olacak şekilde bir ξ noktası vardır [4].

1.2.2. Genelleştirilmiş birinci ortalama değer teoremi

$f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları $[a,b]$ de sürekli olmak üzere, $g(x)$ bu aralıkta işaret değiştirmiyorsa (a,b) de

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx \quad (1.5)$$

şeklinde bir ξ noktası bulunabilir. Bu teorem $g(x) = 1$ olduğunda (1.4) e indirgenir [4].

1.2.3. İkinci ortalama değer teoremi

$f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları $[a,b]$ de sürekli iseler ve $g(x)$ monoton azalan bir fonksiyon ise, (a,b) de,

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = g(a) \int_a^{\xi} f(x) dx \quad (1.6)$$

eşitliğini sağlanacak şekilde bir ξ noktası bulunabilir.

Şayet $g(x)$ monoton artan bir fonksiyon ise, (a,b) de,

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = g(b) \int_{\xi}^b f(x) dx \quad (1.7)$$

olacak şekilde bir ξ noktası vardır.

1.2.4. Genelleştirilmiş ikinci ortalama değer teoremi

$f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları $[a,b]$ de sürekli iseler ve $g(x)$ fonksiyonu (1.2.3) de olduğu gibi daima pozitif olmak zorunda bulunmaksızın, monoton artan veya monoton azalan bir fonksiyon ise, (a,b) de,

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = g(a) \int_a^{\xi} f(x) dx + g(b) \int_{\xi}^b f(x) dx \quad (1.8)$$

olacak şekilde bir ξ noktası bulunabilir. Süreklilik yerine integrallenebilme koşulu konulursa bu sonuç yine geçerlidir [4].

1.3. TANIM. (Düzgün Yakınsaklık)

Bir $[a,b]$ aralığında tanımlanmış fonksiyonlardan oluşan dizi $\{U_n(x)\}$, $(n = 1,2,\dots)$ olsun. Eğer $\forall \epsilon > 0$ ve $[a,b]$ de tüm x değerleri için, $n > N$ olmak üzere

$$|U_n(x) - F(x)| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $N > 0$ sayısı bulunabiliyorsa dizi $f(x)$ e yakınsar veya $F(x)$ limitine yaklaşır denir. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(x) = F(x)$$

yazılır.

N sayısı x e bağımlı olduğu kadar ϵ na da bağılıdır. Eğer N sadece ϵ na bağılı ve x e bağılı değilse dizi $[a,b]$ aralığında düzgün yakınsaktır veya aynı aralıkta $F(x)$ e düzgün olarak yakınsar denir. Şimdi,

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) = U_1(x) + U_2(x) + \dots \quad (1.9)$$

fonksiyon serisini göz önüne alalım.

$$S_n(x) = U_1(x) + U_2(x) + \dots \quad (1.10)$$

olmak üzere, $\{S_n(x)\}$ $(n = 1,2,3,\dots)$ kısmi toplamlar

dizizi $[a,b]$ aralığında yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ serisi-

de $[a,b]$ aralığında yakınsaktır. O zaman,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = s(x)$$

yazılır ve $s(x)$ e serinin toplamı denir. Görülüyorki, eğer $\forall \epsilon > 0$ ve $[a,b]$ de tüm x değerleri için $n > N$ olmak üzere $|S_n(x) - s(x)| < \epsilon$ olacak şekilde bir $N > 0$ bulunabiliyorsa $\sum U_n(x)$ serisi $[a,b]$ aralığında $s(x)$ e yakınsar.

N yalnız ϵ sayısına bağlı ve x e bağlı değilse $\sum U_n(x)$ serisine $[a,b]$ aralığında düzgün yakınsaktır denir [4].

1.3.1. TANIM. (İntegrallerin düzgün yakınsaklığı)

$$\phi(\alpha) = \int_a^{\infty} f(x, \alpha) dx \quad (1.11)$$

integralini göz önüne alalım. (1.11) integralinin $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ veya $[\alpha_1, \alpha_2]$ aralığında yakınsak olduğunu varsayalım.

$\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde, eğer ϵ sayısına bağlı ve α dan bağımsız bir N sayısı bulunabiliyor ise yani $\forall u > N$ ve $[\alpha_1, \alpha_2]$ da her α için

$$|\phi(\alpha) - \int_a^u f(x, \alpha) dx| < \epsilon \quad (1.12)$$

yazılabiliyorsa (1.11) integrali $[\alpha_1, \alpha_2]$ aralığında düzgün yakınsaktır [4].

1.3.2. TANIM. (Weierstrass M testi)

Eğer $|f(x, \alpha)| \leq M(x)$, $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$, $x > a$ ve

$\int_a^\infty M(x) dx$ integrali yakınsak olacak şekilde bir

$|M(x)| \geq 0$ fonksiyonu bulunabiliyorsa

$$\int_a^b f(x, \alpha) dx$$

integrali $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ aralığında düzgün ve mutlak yakınsaktır [4].

1.3.3. TANIM. (Dirichlet testi)

$\psi(x)$ pozitif monoton artan bir fonksiyon olmak üzere $x \rightarrow \infty$ için sifıra yaklaşıyorsa ve bütün $u > a$ lar için

$$\left| \int_a^u f(x, \alpha) dx \right| < p$$

ise

$$\int_a^\infty f(x, \alpha) \psi(x) dx$$

integrali söz konusu aralıkta düzgün yakınsaktır [4].

1.3.4. TEOREM.

(x, α) fonksiyonu $x \geq a$ ve $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ için sürekli ise ayrıca $\int_a^\infty f(x, \alpha) dx$ integrali aynı aralıkta düzgün yakınsak ise

$$\phi(x) = \int_a^\infty f(x, \alpha) dx$$

integrali $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ aralığında sürekli'dir. Özel olarak $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ aralığının herhangi bir noktası α_0 ise,

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \phi(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_a^{\infty} f(x, \alpha) dx = \int_a^{\infty} \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} f(x, \alpha) dx \quad (1.13)$$

yazılabilir. Eğer α_0 uç noktalarından birisi ise sağdan ve soldan limit kavramları kullanılır [4].

1.4. TANIM. (Fourier Serileri)

$f(x)$ fonksiyonu $(-L, L)$ aralığında tanımlı; başka bir ifadeyle $f(x + 2L) = f(x)$ fonksiyonunun periyodu $2L$ olsun. Bu durumda Fourier serileri veya Fourier açılımları

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (1.14)$$

olarak ifade edilir. Burada a_0 , a_n ve b_n ler Fourier katsayılarıdır. $(-L, L)$ aralığında Fourier katsayıları $(n = 0, 1, 2, \dots)$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

şeklinde yazılır. (1.14) ifadesi

$$f(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \right) \cos \frac{n\pi x}{L} + \left(\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right) \sin \frac{n\pi x}{L} \right\}$$

(0,2L) aralığında ise Fourier katsayıları,

$$a_n = \frac{1}{L} \int_C^{C+2L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_C^{C+2L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

ile belirlidir. Burada C reel bir sayıdır. Görüleceği gibi C = -L alındığında daha önce verilen birimlere dönüşür.

Fourier serilerindeki söz konusu f(x) fonksiyonu aşağıdaki Dirichlet şartlarını gerçekler.

i) f(x) fonksiyonu (-L,L) aralığının bir kaç sonlu noktası hariç tek değerli ve belirlidir.

ii) f(x) fonksiyonu (-L,L) aralığının dışında da 2L ile periyodiktir.

iii) f(x) ve f'(x) fonksiyonu (-L,L) aralığında parçalı süreklidir. Bu şartları sağlayan fonksiyonun Fourier açılımı vardır.

(1.14) ifadesi göz önüne alındığında katsayılar, eğer x bir süreklilik noktası ise f(x) e, x bir süreklilik noktası ise f(x) e,

sizlik ise $\frac{1}{2} \{f(x+0) + f(x-0)\}$ değerine yakınsar.
 $f(x+0)$ ve $f(x-0)$; $f(x)$ in x deki sağ ve sol limetle-
ridir. Bunlar,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(x + \epsilon) = f(x + 0)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} f(x - \epsilon) = f(x - 0)$$

olarak ifade edilir.

$f(x)$ in sürekliliği Fourier serilerinin yakınsaklı-
ğını gerektirmez. Fourier serisine açmak istediğimiz bir
 $f(x)$ fonksiyonunun tek veya çift oluşunun önemi büyük-
tür [5].

1.5. Fonksiyonların Ortogonalliği ve Ortonormal- liği

1.5.1. Ortogonal fonksiyonlar

$\varphi_m(x)$ ve $\varphi_n(x)$ fonksiyonlarını göz önüne alalım.
Elemanlar arasında $m \neq n$ üzere, (a,b) aralığında

$$\int_a^b \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = 0 \quad (1.15)$$

özelliliği bulunan $\{\varphi_k(x)\}$, $(k = 0,1,2,...)$ fonksiyonlar
kümesine ortogonal fonksiyonlar denir. Örneğin, $(-a,a)$
aralığında $1, \sin \frac{\pi x}{a}, \cos \frac{\pi x}{a}, \sin \frac{2\pi x}{a}, \cos \frac{2\pi x}{a}, ...$ or-
togonal fonksiyonlardır.

1.5.2. Ortonormal fonksiyonlar

$$\int_a^b \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx \quad (1.16)$$

integralinde $m = n$ olmak üzere

$$\int_a^b [\varphi_m(x)]^2 dx = 1$$

ise, fonksiyonlar kümesine ortonormal fonksiyonlar denir. Örneğin, $(-a, a)$ aralığında $\frac{1}{\sqrt{2a}}, \frac{1}{\sqrt{a}} \sin \frac{\pi x}{a},$

$\frac{1}{\sqrt{a}} \cos \frac{\pi x}{a}, \frac{1}{\sqrt{a}} \sin \frac{2\pi x}{a}, \frac{1}{\sqrt{a}} \cos \frac{2\pi x}{a}, \dots$ ortonormal fonksiyonlardır.

1.6. Karakteristik Fonksiyonların Ortogonalliği

$$\int_a^b r(x) \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = 0$$

ise $\varphi_m(x)$ ve $\varphi_n(x)$ fonksiyonları ağırlık fonksiyonu $r(x)$ e göre (a, b) aralığında ortogonaldır. Eğer kümedeki farklı fonksiyon çiftleri (a, b) aralığında ortogonal ise bu fonksiyonlar kümesine ortogonaldır denir.

Sınır değer probleminin en belirgin özelliği, karakteristik fonksiyonların bazı problemlere ağırlık fonksiyonu olarak uygulanmasıdır. İkinci mertebeden lineer homogen

$$\frac{d}{dx} [p(x) \frac{dy}{dx}] + [q(x) + \lambda r(x)] y = 0 \quad (1.17)$$

diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Burada p, q, r reel fonksiyonlar olmak üzere

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y$$

ifadesi

$$L = \frac{d}{dx} \left[p \frac{dy}{dx} \right] + q = p \frac{d^2}{dx^2} + \frac{dp}{dx} \cdot \frac{d}{dx} + q$$

şeklinde yazılırsa (1.17) denklemi

$$Ly + \lambda r(x)y = 0 \quad (1.18)$$

olarak kısaltılır.

$$a_0(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + [a_2(x) + \lambda a_3(x)] y = 0$$

denklemi de

$$p = e^{\int (a_1/a_0) dx}, \quad q = \frac{a_2}{a_0} p, \quad r = \frac{a_3}{a_0} p$$

dönüşümleri altında (1.17) ye dönüşür.

λ_1 ve λ_2 nin verilen problemin farklı iki kökü ve bunlara karşılık gelen karakteristik fonksiyonlar da $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ olsun. O zaman,

$$\frac{d}{dx} \left(p \frac{d\varphi_1}{dx} \right) + (q + \lambda_1 r) \varphi_1 = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left(p \frac{d\varphi_2}{dx} \right) + (q + \lambda_2 r) \varphi_2 = 0$$

eşitlikleri yazılır.

Yukarıdaki denklemlerde birincisi $\varphi_2(x)$, ikincisinde $\varphi_1(x)$ ile çarpılıp taraf tarafa çıkarılırsa ve (a,b) üzerinden integre edildiğinde

$$(\lambda_2 - \lambda_1) \int_a^b r \varphi_1 \varphi_2 dx = \int_a^b \left[\varphi_2 \frac{d}{dx} \left(p \frac{d\varphi_1}{dx} \right) - \varphi_1 \frac{d}{dx} \left(p \frac{d\varphi_2}{dx} \right) \right] dx$$

yazılır. Eşitliğin sağ tarafı integre edilirse,

$$\begin{aligned} (\lambda_2 - \lambda_1) \int_a^b r \varphi_1 \varphi_2 dx = & \left[\varphi_2 \left(p \frac{d\varphi_1}{dx} \right) - \varphi_1 \left(p \frac{d\varphi_2}{dx} \right) \right]_a^b \\ & - \int_a^b \left[\frac{d\varphi_2}{dx} \left(p \frac{d\varphi_1}{dx} \right) - \frac{d\varphi_1}{dx} \left(p \frac{d\varphi_2}{dx} \right) \right] dx \end{aligned}$$

bulunur. Son integralin sağındaki ikinci terim sıfıra eşitlenirse

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b r \varphi_1 \varphi_2 dx = \left[p(x) \left(\varphi_2(x) \frac{d\varphi_1(x)}{dx} - \varphi_1(x) \frac{d\varphi_2(x)}{dx} \right) \right]_a^b \quad (1.19)$$

elde edilir. $\varphi_1(x)$ ve $\varphi_2(x)$ fonksiyonları (1.17) denklemi ile ilişkili olup $x = a$ ve $x = b$ noktalarında şartları sağlar (1.19) denkleminin sağındaki terimler sıfıra eşitlenirse $x = a$ ve $x = b$ sağlanmak üzere uç noktasındaki sınır şartları

$$y = 0 \quad (1.20)$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad (1.21)$$

$$y + \gamma \frac{dy}{dx} = 0 \quad (1.22)$$

olarak ifade edilebilir. (1.19) denkleminin sağında sıfıra eşitlenen $\varphi_1(x)$ ve $\varphi_2(x)$ fonksiyonları uç noktalarında (1.22) yi, γ nın herhangi bir değer içinde sağlar ve

$$\varphi_2 \varphi_1' - \varphi_1 \varphi_2' \equiv (\varphi_2 + \gamma \varphi_2') \varphi_1' - (\varphi_1 + \gamma \varphi_1') \varphi_2'$$

özdeşliği yazılır. Ayrıca $x = a$ ve $x = b$ iken $p(x) = 0$ ise y nin yada $\frac{dy}{dx}$ in sonlu bir değer olması ve $p \frac{dy}{dx}$ in sıfır olması şartıyla (1.19) denkleminin sağ tarafı sıfırdır.

Sonuç olarak, $p(a) = p(b)$ iken (1.19) denkleminin sağındaki terimler sıfır ise

$$y(a) = y(b)$$

$$y'(a) = y'(b)$$

şartları sağlanır. Özellikle $\varphi_1(x)$ ve $\varphi_2(x)$ fonksiyonlarının çözümlerinin $b - a$ arasında periyodik olması gerekir. Bu durumda $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olmak üzere,

$$\int_a^b r(x) \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx = 0 \quad (1.23)$$

gerçeklenir [6].

1.7. Fourier Integrali

$f(x)$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlamak üzere;

i) $f(x)$ ve $f'(x)$ fonksiyonları her sonlu aralıkta sürekli ve

$$ii) \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

integrali mutlak integrallenebilir olsun. Bu durumda Fourier integrali

$$f(x) = \int_0^{\infty} \{A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \sin \alpha x\} d\alpha \quad (1.24)$$

ile ifade edilir. Burada

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \alpha u du$$

$$B(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin \alpha u du$$

dır. Buna göre (1.24) denklemi

$$f(x) = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \alpha u \cos \alpha x du + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin \alpha u \sin \alpha x du \right\} d\alpha \quad (1.25)$$

formunda yazılır. Eğer x noktası $f(x)$ in bir süreklilik noktası ise (1.12) geçerlidir. Şayet x bir süreksizlik noktası ise $f(x)$ Fourier serilerinde olduğu gibi

$$\frac{1}{2} \{f(x+0) + f(x-0)\}$$

ile belirlenir [4].

1.8. Fourier Integral Teoreminin Eşdeğer Formları

Fourier integral teoreminin eşdeğer formları aşağıdaki gibi sıralanabilir.

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha=0}^{\infty} \int_{u=-\infty}^{\infty} f(u) \cos \alpha (x-u) du d\alpha \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\alpha u} du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\alpha (u-x)} du d\alpha \end{aligned} \quad (1.27)$$

$f(x)$ fonksiyonu x noktasında sürekli değilse (1.26) ve (1.27) nin sol tarafında $f(x)$ yerine $\frac{1}{2} \{f(x+0) + f(x-0)\}$ konulmalıdır.

$f(x)$ fonksiyonunun tek veya çift fonksiyon olması halinde bu sonuçlar biraz daha sadeleştirilebilir. Eğer $f(x)$ çift fonksiyon ise

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \alpha x d\alpha \int_0^{\infty} f(u) \cos \alpha u du \quad (1.28)$$

ve $f(x)$ tek fonksiyon ise

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \alpha x d\alpha \int_0^{\infty} f(u) \sin \alpha u du \quad (1.29)$$

olarak yazılırlar [4].

1.9. Bessel Denklemi ve Bessel Fonksiyonları

Bessel denklemi ikinci mertebeden lineer bir denklem olup, en genel şekilde

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2) y = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.30)$$

formunda yazılır. n herhangi bir sabit ve $x = 0$ noktası

bir regüler singüler noktadır.

$$y(x) = x^r \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k$$

şeklinde çözüm arayalım. y, y', y'' değerleri denklemde yerine konulursa

$$\begin{aligned} x^2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+r)(k+r-1) C_k x^{k+r-2} + x \sum_{k=0}^{\infty} (k+r) C_k x^{k+r-1} \\ + (x^2 - n^2) \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+r} = 0 \end{aligned}$$

ve x^{k+r} katsayılarını bir araya getirerek

$$[(r+k)^2 - n^2] C_k + C_{k-2} = 0 \quad (1.31)$$

bulunur. $k=0$ için bu denklem

$$r^2 - n^2 = 0 \text{ veya } r_1 = n, r_2 = -n \quad (1.32)$$

sonuçlarını verir. $n \geq 0$ farzedelim. $k=1$ için

(1.31) den $[(r+1)^2 - n^2] C_1 = 0$ çıkar. Köşeli farantez içindeki ifade sıfır olmadığından $C_1 = 0$ elde edilir.

$r_1 = n$ için (1.31) denkleminde,

$$C_k = \frac{-C_{k-2}}{k(2n+k)} \quad (1.33)$$

bulunur. $C_1 = 0$ olmasından dolayı tek indisli katsayıların hepsi sıfırdır. O halde çift indisli katsayıları hesaplırsak, (1.33) den,

$$C_{2k} = \frac{C_{2k-2}}{2^2 k(n+k)} \quad (1.34)$$

yazılır. k ya $k-1, k-2, \dots, 1$ değerleri verilerek çift indisli katsayılar aşağıdaki gibi elde edilir.

$$C_{2k} = \frac{(-1)}{2^2 k(n+k)} \cdot \frac{(-1)}{2^2 (k-1)(n+k-1)} \cdot \frac{(-1)}{2^2 (k-2)(n+k-2)} \dots \frac{(-1)}{2^2 1(n+1)} C_0$$

$C_0 = 1$ alınır

$$C_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! (n+1)(n+2) \dots (n+k)}$$

bulunur. O halde $r_1 = n$ köküne ait çözüm,

$$y_1(x) = x^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! (n+1)(n+2) \dots (n+k)} x^{2k} \quad (1.35)$$

dır. n sabitinin bazı değerleri hariç bu çözüm, hiçbir elemanter fonksiyonun açılımı değildir. $y_1(x)$ in sabit

$\frac{1}{2^n n!}$ çarpımı ile elde edilen açılıma n -inci mertebeden

Bessel fonksiyonu denir ve

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \frac{x^n}{2^n n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! (n+1)(n+2) \dots (n+k)} x^{2k} \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^n \left[\frac{1}{n!} - \frac{(x/2)^2}{1!(n+1)!} + \frac{(x/2)^4}{2!(n+2)!} - \frac{(x/2)^6}{3!(n+3)!} + \dots \right] \end{aligned} \quad (1.36)$$

formunda elde edilir. (1.36) Bessel denkleminin bir çözümüdür. 0 ve 1 nci mertebeden Bessel fonksiyonlarına

uygulamada sıkça rastlanır. Bu fonksiyonlar

$$J_0(x) = 1 - \frac{(x/2)^2}{1!^2} + \frac{(x/2)^4}{2!^2} - \frac{(x/2)^6}{3!^2} + \dots \quad (1.37)$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{(x/2)^3}{1!2!} + \frac{(x/2)^5}{2!3!} - \frac{(x/2)^7}{3!4!} + \dots$$

ile belirtilir. Şimdi de $r_2 = -n$ kökü için (1.33) formülü yerine bu defa

$$C_k = \frac{(-1)}{k(-2n+k)} C_{k-2}$$

elde ederiz. Bu eşitliğin (1.33) den farkı n yerine $-n$ alınmasıdır. n nin pozitif bir tam sayı olması halinde (1.37) sağlanmaz. Söz konusu durum hariç olmak üzere n yerine $-n$ alındığında

$$J_{-n}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \frac{1}{(-n)!} - \frac{(x/2)^2}{1!(-n+1)!} + \frac{(x/2)^4}{2!(-n+2)!} - \frac{(x/2)^6}{3!(-n+3)!} + \dots \quad (1.38)$$

Şayet $n = 0$ ise bu çözüm (1.37) nin ilk çözümüne yani $J_0(x)$ e eşittir. Bu durum dışında $J_n(x)$ ve $J_{-n}(x)$ lineer bağımsızdırlar. Böylece, n nin bir tam sayı olması hariç, Bessel denkleminin en genel çözümü

$$y(x) = AJ_n(x) + BJ_{-n}(x)$$

şeklindedir. n sayısı 1,2,3 sayılarından birine eşit ise, $J_n(x)$ mevcut, ancak $J_{-n}(x)$ mevcut değildir. $n = 0$ için $J_n(x)$ ve $J_{-n}(x)$ lineer bağımlı olacak şekilde mevcuttur [7].

1.10. Lommel İntegralleri

k_1, k_2 pozitif reel iki sayı olmak üzere $u = J_p(k_1 x)$,
 $v = J_p(k_2 x)$ olsun.

$$x^2 y'' + xy' + (\lambda^2 x^2 - n^2)y = 0$$

diferensiyel denklemi u ve v fonksiyonları için aşağıdaki eşitlikleri gerçekler.

$$\begin{aligned} xu'' + u' + (k_1^2 x - \frac{p^2}{x}) u &= 0 \\ xv'' + v' + (k_2^2 x - \frac{p^2}{x}) v &= 0 \end{aligned} \quad (1.39)$$

(1.39) denklemleri sırası ile v , u ile çarpılıp taraf tarafa çıkarılırsa

$$x(uv'' - vu'') + uv' - vu' + x(k_2^2 - k_1^2)uv = 0$$

bulunur. Bu denklem;

$$(k_1^2 - k_2^2)uvx = \frac{d}{dx} [x(uv' - vu')]$$

$a > 0$ olmak üzere her iki tarafın $(0, a)$ üzerinden integrali alındığında,

$$(k_1^2 - k_2^2) \int_0^a uvx dx = [x(uv' - vu')]_0^a$$

ifadesi elde edilir. Bu ise,

$$\begin{aligned} (k_1^2 - k_2^2) \int_0^a x J_p(k_1 x) J_p(k_2 x) dx \\ = a(k_2 J_p(k_1 a) J_p'(k_2 a) - k_1 J_p(k_2 a) J_p'(k_1 a)) \end{aligned} \quad (1.40)$$

dir.

$$ak_2 J_p'(k_2 a) = p J_p(k_2 a) - ak_2 J_{p+1}(k_2 a)$$

$$ak_1 J_p'(k_1 a) = p J_p(k_1 a) - ak_1 J_{p+1}(k_1 a)$$

olduğundan (1.40) bağıntısının ikinci tarafı;

$$\begin{aligned} a(\dots) &= J_p(k_1 a) (p J_p(k_2 a) - ak_2 J_{p+1}(k_2 a) \\ &\quad - J_p(k_2 a) (p J_p(k_1 a) - ak_1 J_{p+1}(k_1 a)) \\ &= a(k_1 J_p(k_2 a) J_{p+1}(k_1 a) - k_2 J_p(k_1 a) J_{p+1}(k_2 a)) \end{aligned}$$

şeklindedir. O zaman (1.40) bağıntısı iki şekilde yazılabilir.

$$(k_1^2 - k_2^2) \int_0^a x J_p(k_1 x) J_p(k_2 x) dx = \begin{cases} a(k_2 J_p(k_1 a) J_p'(k_2 a) \\ - k_1 J_p(k_2 a) J_p'(k_1 a)) \\ a(k_1 J_p(k_2 a) J_{p+1}(k_1 a) \\ - k_2 J_p(k_1 a) J_{p+1}(k_2 a)) \end{cases} \quad (1.41)$$

Bu integrale birinci Lommel integrali denir. $k_1 = k_2$ ise ifadenin her iki tarafıda sıfır olacağından;

$$\int_0^a x J_p(k_1 x) J_p(k_2 x) dx$$

integrali belirsiz kalır. Belirli hale getirebilmek için önce $k_1 \neq k_2$ varsayarak

$$\int_0^a x J_p(k_1 x) J_p(k_2 x) dx = \frac{a(k_2 J_p(k_1 a) J_p'(k_2 a) - k_1 J_p'(k_1 a) J_p(k_2 a))}{k_1^2 - k_2^2}$$

yazılıp $k_2 \rightarrow k_1$ için limit hesaplanırsa,

$$\int_0^a x J_p^2(k_1 x) dx = \frac{a(J_p(k_1 a)J_p'(k_1 a) + ak_1 J_p(k_1 a)J_p''(k_1 a) - ak_1 (J_p'(k_1 a))^2)}{-2k_1}$$

olur, yada

$$\begin{aligned} \int_0^a x J_p^2(k_1 x) dx &= \frac{a^2}{2} ((J_p'(k_1 a))^2 - J_p(k_1 a)J_p''(k_1 a) \\ &\quad - \frac{1}{ak_1} J_p'(k_1 a)J_p(k_1 a)) \end{aligned} \quad (1.42)$$

bulunur.

$$k_1^2 a^2 J_p''(k_1 a) + k_1 a J_p'(k_1 a) + (k_1^2 a^2 - p^2) J_p(k_1 a) = 0$$

olduğundan;

$$\begin{aligned} J_p(k_1 a) \left(\frac{p^2}{k_1^2 a^2} J_p(k_1 a) - J_p(k_1 a) - \frac{1}{k_1 a} J_p'(k_1 a) \right) \\ = -J_p^2(k_1 a) \left(1 - \frac{p^2}{k_1^2 a^2} \right) - \frac{1}{k_1 a} J_p(k_1 a)J_p'(k_1 a) \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece (1.42) denklemi

$$\int_0^a x J_p^2(k_1 x) dx = \frac{a^2}{2} ((J_p'(k_1 a))^2 + (1 - \frac{p^2}{k_1^2 a^2}) J_p(k_1 a)) \quad (1.43)$$

formuna dönüşür. (1.43) ifadesine ikinci Lommel integrali denir. Lommel integralleri $p > -1$ için geçerlidir [8].

1.1.1. Fourier-Bessel Açılımı

(1.41) eşitliğinin sağındaki

$$k_2 J_p(k_1 a) J_p'(k_2 a) - k_1 J_p(k_2 a) J_p'(k_1 a) \quad (1.44)$$

ifadesini göz önüne alalım. $k_1 = k_2$ ise bu ifade sıfırdır. Fakat $k_1 \neq k_2$ dışında bile şu üç halde de (1.44) yine sıfırdır.

$$J_p(k_1 a) = J_p(k_2 a) = 0 \quad (1.45)$$

$$J_p'(k_1 a) = J_p'(k_2 a) = 0 \quad (1.46)$$

$$k_2 J_p(k_1 a) J_p'(k_2 a) = k_1 J_p(k_2 a) J_p'(k_1 a) \quad (1.47)$$

$k_1 \neq k_2$ olmak üzere (1.44) denklemi sıfır ise (1.41) den

$$\int_0^a x J_p(k_1 x) J_p(k_2 x) dx = 0$$

eşitliği elde edilir.

$$\int_0^a \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = 0$$

ise $\varphi_n(x)$ ve $\varphi_m(x)$ fonksiyonlarına $[0, a]$ aralığında ortogonaldır denir. Buna göre $(x)^{1/2} J_p(k_1 x)$ ve $(x)^{1/2} J_p(k_2 x)$ fonksiyonları ortogonaldır.

Eğer $r(x)$ x in $[a, b]$ aralığında tanımlı integral-lenibilir bir fonksiyonu ise ve

$$\int_0^a r(x) \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = 0$$

mevcut ise, bu durumda $\varphi_n(x)$ ve $\varphi_m(x)$ fonksiyonları $r(x)$ e göre ortogonaldır. O halde (1.45), (1.46) ve (1.47) koşullarından biri gerçeeklendiğinde $J_p(k_1 a)$ ve $J_p(k_2 x)$ fonksiyonları $r(x) = x$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldır.

$$J_p(ka) = 0 \quad (1.48)$$

$$J'_p(ka) = 0 \quad (1.49)$$

denklemlerinin sonsuz sayıda pozitif kökleri vardır.

Bu kökler k_m ($m = 1, 2, \dots$) ile gösterilsin ve

$k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ şeklinde sıralansın. O zaman

$J_p(k_m x) \sqrt{x}$ ortogonal fonksiyon takımı elde edilir.

$r(x) = x$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan

$J_p(k_m x)$ ($m = 1, 2, \dots$) fonksiyon takımından da söz edilebilir. $r(x) = x$ e göre ortogonal olan bu fonksiyonlar göz önüne alınarak $p \geq -\frac{1}{2}$ kabul edilebilir.

Bir takım koşullar altında herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunun Fourier serisine açılımı yapılabilirdiği gibi, bu fonksiyonların Bessel fonksiyonlarına göre de açılımı yapılabilir. Gerçekte, bu teorik bir problem olmayıp Bessel fonksiyonlarının fiziğe uygulamasında sık sık karşılaşılan bir sorundur.

$J_p(ka) = 0$ fonksiyonunun $k_1, k_2, k_3, \dots$ kökleri yardımıyla tanımlanan $J_p(k_1 x), J_p(k_2 x), \dots$ fonksiyon sistemini göz önüne alalım. Verilen bir $[0, a]$ aralığında $f(x)$ fonksiyonunun $J_p(k_m x)$ sistemine göre;

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m J_p(k_m x) \quad (1.50)$$

olabildiği ve serinin düzgün yakınsak olduğu kabul edilsin. Bu durumda C_m katsayıları kolayca hesaplanabilir. Bunun için (1.50) nin her iki tarafı $x J_p(k_n x)$ ile çarpılıp $[0, a]$ aralığı üzerinden integrali alınır-
sa;

$$\begin{aligned} \int_0^a x f(x) J_p(k_n x) dx &= \int_0^a \sum_{m=1}^{\infty} C_m x J_p(k_m x) J_p(k_n x) dx \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} C_m \int_0^a x J_p(k_m x) J_p(k_n x) dx \end{aligned}$$

elde edilir. $m \neq n$ ise (1.41) ve (1.48) den dolayı;

$$\int_0^a x J_p(k_m x) J_p(k_n x) dx = 0$$

dır. Bu durumda $m = n$ alınarak,

$$C_m = \frac{\int_0^a x f(x) J_p(k_m x) dx}{\int_0^a x J_p^2(k_m x) dx}$$

ve (1.43) ve (1.48) göz önünde tutularak;

$$C_m = \frac{\int_0^a x f(x) J_p(k_m x) dx}{\frac{a^2}{2} (J_p'(k_m a))^2} = \frac{2 \int_0^a x f(x) J_p(k_m x) dx}{a^2 (J_{p+1}(k_m a))^2}$$

(1. 51)

yazılır. Bu durumda (1.50) gibi bir açılım varsa ve seri düzgün yakınsak ise C_m in değeri hesaplanabilir. Yukarıdaki açılıma Fourier-Bessel açılım denir.

(1.49) fonksiyonunun $k_1, k_2, \dots$ kökleri ile tanımlanan $J_p(k_m x)$ fonksiyonları ele alındığında $f(x)$ fonksiyonu buna görede seriye açılabilir.

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m J_p(k_m x)$$

serisinde $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ dür. O zaman C_m katsayıları benzer şekilde,

$$\begin{aligned} C_m &= \frac{\int_0^a x f(x) J_p(k_m x) dx}{\frac{a^2}{2} \left(1 - \frac{p^2}{k_m^2 a^2}\right) (J_p(k_m a))^2} \\ &= \frac{2k_m^2 a^2 \int_0^a x f(x) J_p(k_m x) dx}{a^2 (k_m^2 a^2 - p^2) (J_p(k_m a))^2} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu açılıma $f(x)$ fonksiyonunun ikinci türden Bessel açılımı denir [8].

BÖLÜM 2

YARDIMCI FORMÜL VE TEOREMLER

Bu bölümde Fourier integrallerinin daha ayrıntılı incelenmesi aşağıdaki teoremler yardımıyla yapılacaktır. Dolayısıyla (1.26) formülünden diğer bağıntılara geçme kolaylığı sağlanacaktır.

2.1. TEOREM.

$$f(x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin \lambda (x-t)}{x-t} dt \quad (2.1)$$

integralini göz önüne alalım. Eğer;

i-a) $f(x)/(1 + |x|)$ fonksiyonu $L(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlı

i-b) $f(x)/x$, (a, ∞) ve $(-\infty, -a)$ aralığında a nın bazı pozitif değerleri için sınırlı olup sonsuzda sıfıra gider,

i-c) $\frac{1}{x} \int_1^{\infty} f(t) dt$ integrali (a, ∞) aralığında sınırlıdır ve sonsuzda sıfıra yaklaşır. Benzer şartlar $(-\infty, -a)$ içinde sağlanır.

ii) $f(t)$ fonksiyonu x 'i ihtiva eden herhangi bir aralıkta sınırlı olup Fourier serilerinin veya integrallerinin var olabilmesi için yukarıdaki şartlardan biri sağlanır ise

$$\frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)] = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin \lambda (x-t)}{x-t} dt \quad (2.2)$$

integrali geçerlidir [9] .

2.2. İntegrallerin Toplanabilirliği

Eğer,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^{\lambda} \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right)^{\alpha} f(x) dx = I \quad (2.3)$$

ise $\int_0^{\infty} f(x) dx$ integrali (C, α) aralığında ve $\alpha \geq 0$ olacak şekilde I ile toplanabilir. $\alpha = 0$ durumunda integral yakınsaktır. $\alpha = 1$ için

$$\int_0^{\lambda} \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right) f(x) dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} dx \int_0^x f(y) dy$$

eşitliğini, serinin $(C, 1)$ toplanabilirliği tanımından

$$\frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n}$$

formunda elde ederiz. Burada önemli noktalar şu şekilde sıralanabilir.

i) İşlem keyfi yakınsaklıkta daha geneldir. Örneğin,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^{\lambda} \sin ax dx \quad (a > 0)$$

integralini hesaplayamayız. Ancak söz konusu integrali

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^{\lambda} \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right) \sin ax \, dx$$

olarak yazarsak

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^{\lambda} \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right) \sin ax \, dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\lambda a^2} \sin a\lambda \right) = \frac{1}{a}$$

şeklinde bir çözümünü bulabiliriz.

ii) İşlem keyfi yakınsaklıkla uyum içerisindedir.

Başka bir ifadeyle bir integral yakınsak ise tüm $\alpha > 0$ için (C, α) aynı değere sahiptir. Bu aşağıdaki teoremin özel bir durumudur [9].

2.2.1. TEOREM.

Bir integral, $\alpha \geq 0$ ve (C, α) için toplanabilir ise $\beta > \alpha$ olmak üzere (C, β) içinde toplanabilirdir.

İSPAT : Kabul edelimki,

$$\phi(\lambda, \alpha) = \int_0^{\lambda} \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right)^{\alpha} f(x) \, dx$$

olsun. O zaman $\beta > \alpha$ ise

$$\begin{aligned} & \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^{\beta-\alpha-1} \lambda^{\alpha} \phi(\lambda, \alpha) \, d\lambda \\ &= \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^{\beta-\alpha-1} \lambda^{\alpha} \, d\lambda \int_0^{\lambda} \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right)^{\alpha} f(x) \, dx \\ &= \int_0^{\mu} f(x) \, dx \int_0^{\lambda} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^{\beta-\alpha-1} \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right)^{\alpha} \, d\lambda \end{aligned}$$

yazılabilir.

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq \lambda \leq \mu \\ 0 \leq x \leq \mu \end{array} \right\} \text{integrasyon bölgesinde sınır de\u0131i\u015fimi yapı-} \\ \text{lırsa}$$

$$\int_{\lambda=0}^{\mu} \int_{x=0}^{\lambda} f(x, \lambda) dx d\lambda = \int_{x=0}^{\mu} \int_{\lambda=x}^{\mu} f(x, \lambda) d\lambda dx$$

$$\int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^{\beta-\alpha-1} \lambda^{\alpha} \phi(\lambda, \alpha) d\lambda$$

$$= \int_0^{\mu} f(x) dx \int_x^{\mu} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^{\beta-\alpha-1} \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right)^{\alpha} \lambda^{\alpha} d\lambda$$

bulunur. \u015eimdi dı\u015ftaki integralin \u00e7\u00f6z\u00fcm\u00fcn\u00fc ara\u015ftıralım.

$$\int_x^{\mu} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^{\beta-\alpha-1} \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right)^{\alpha} \lambda^{\alpha} d\lambda = \frac{1}{\mu^{\beta-\alpha-1}} \int_x^{\mu} (\mu - \lambda)^{\beta-\alpha-1} (\lambda - x)^{\alpha} d\lambda$$

$$u = \frac{\lambda - x}{\mu - x} \text{ de\u0131i\u015fken d\u00f6n\u00fc\u015f\u00fcm\u00fc yapılırsa,}$$

$$\int_x^{\mu} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^{\beta-\alpha-1} \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right)^{\alpha} \lambda^{\alpha} d\lambda$$

$$= \frac{1}{\mu^{\beta-\alpha-1}} \int_0^1 [\mu - x - (\lambda - x)]^{\beta-\alpha-1} (\lambda - x)^{\alpha} d\lambda$$

$$= \frac{1}{\mu^{\beta-\alpha-1}} \int_0^1 (\mu - x)^{\beta-\alpha-1} (1-u)^{\beta-\alpha-1} (\mu-x)^{\alpha} u^{\alpha} (\mu-x) du$$

$$= \frac{1}{\mu^{\beta-\alpha-1}} \left(1 - \frac{x}{\mu}\right)^{\beta} \int_0^1 (1-u)^{\beta-\alpha-1} u^{\alpha} du$$

elde edilir.

$$\int_0^1 (1-u)^{\beta-\alpha-1} u^\alpha du = \beta (\beta-\alpha, \alpha+1) \quad \text{olup}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^\mu \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^{\beta-\alpha-1} \lambda^\alpha \phi(\lambda, \alpha) d\lambda \\ &= \int_0^\mu f(x) \mu^{\alpha+1} \left(1 - \frac{x}{\mu}\right)^\beta \beta (\beta-\alpha, \alpha+1) dx \\ &= \mu^{\alpha+1} \frac{\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)} \int_0^\mu \left(1 - \frac{x}{\mu}\right)^\beta f(x) dx \end{aligned} \quad (2.4)$$

dır.

$$\phi(\mu, \beta) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{\mu^{\alpha+1}} \int_0^\mu \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^{\beta-\alpha-1} \lambda^\alpha \phi(\lambda, \alpha) d\lambda$$

ifadesi

$$\phi(\mu, \beta) - I = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{\mu^{\alpha+1}} \int_0^\mu \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^{\beta-\alpha-1} \lambda^\alpha [\phi(\lambda, \alpha) - I] d\lambda$$

olarak yazılabilir. $\phi(\lambda, \alpha) \rightarrow I$ ise tüm λ değerleri için,

$$|\phi(\lambda, \alpha) - I| \leq M$$

ve $\lambda \geq \Delta$ için,

$$|\phi(\lambda, \alpha) - I| < \varepsilon$$

olduğunu kabul edelim. O zaman

$$\begin{aligned} |\phi(\mu, \beta) - I| &\leq \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(\alpha+1)} \left\{ \frac{\varepsilon}{\mu^{\alpha+1}} \int_\Delta^\mu \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^{\beta-\alpha-1} \lambda^\alpha d\lambda \right. \\ &\quad \left. + \frac{M}{\mu^{\alpha+1}} \int_0^\Delta \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^{\beta-\alpha-1} \lambda^\alpha d\lambda \right\} \end{aligned}$$

yazılabilir. Birinci terim $\Delta = 0$ ise $\leq \varepsilon$ tür. İkinci terim sabit bir Δ için $O(\mu^{-\alpha-1})$ dir. Önce Δ yı sonra μ yü seçip $\phi(\mu, \beta) \rightarrow I$ istenen gerçekleşir [9].

2.3. Fourier İntegralinin Toplanabilirliği

Formül olarak,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \left(1 - \frac{u}{\lambda}\right) du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u(x-t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \int_0^\lambda \left(1 - \frac{u}{\lambda}\right) \cos u(x-t) du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \lambda (x-t)}{\lambda (x-t)^2} dt \quad (2.5) \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Bu integral Fourier serileri teorisindeki Fejer integrali ile benzerlik gösterir. Aşağıdaki teoremlerle özel durumlara geçiş sağlanabilir.

2.3.1. TEOREM.

α nın bazı pozitif değerleri için,

$$K(x, y, \delta) = O\left(\frac{1}{\delta}\right) \quad (|x-y| \leq \delta) \quad (2.6)$$

$$K(x, y, \delta) = O\left(\frac{\delta^\alpha}{|x-y|^{\alpha+1}}\right) \quad (|x-y| > \delta) \quad (2.7)$$

ve

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_x^\infty K(x, y, \delta) dy = \frac{1}{2}, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^x K(x, y, \delta) dy = \frac{1}{2}$$

eşitliklerini göz önüne alalım. Ayrıca $f(x)/(1+|x|^{\alpha+1})$

fonksiyonu $L(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlı olsun. Bu durumda $h \rightarrow +0$ için,

$$\int_0^h |f(x+t) - \phi(x)| dt = o(h) , \quad (2.8)$$

$$\int_0^h |f(x-t) - \psi(x)| dt = o(h)$$

sağlanmak üzere

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y, \delta) f(y) dy = \frac{1}{2} [\phi(x) + \psi(x)] \quad (2.9)$$

dir. Bu sonuç,

$$i) \quad \phi(x) = f(x+0)$$

$$\psi(x) = f(x-0)$$

$$ii) \quad f \text{ sürekli olmak üzere } \phi(x) = \psi(x) = f(x)$$

iken ve

$$iii) \quad x \text{ in hemen hemen tüm değerleri için}$$

$$\phi(x) = \psi(x) = f(x)$$

içinde sağlanır.

İSPAT :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_x^{\infty} K(x, y, \delta) \{f(y) - \phi(x)\} dy = 0$$

eşitliğini ispatlamak yeterlidir. Şayet,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_x^{x+\delta} |f(y) - \phi(x)| dy = 0$$

ve

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^\alpha \int_{x+\delta}^{\infty} \frac{|f(y) - \phi(x)|}{|x-y|^{\alpha+1}} dy = 0$$

ise (2.6) ve (2.7) den bu değerlerin doğru olduğu görülür. Bunlardan ilki (2.8) in birinci kısmından gerçekleştirilir. $h \leq \eta$ için

$$\chi(h) = \int_0^h |f(x+t) - \phi(x)| dt \leq \epsilon h$$

olur. 0 zaman,

$$\delta^\alpha \int_{x+\delta}^{x+\eta} \frac{|f(y) - \phi(x)|}{|x-y|^{\alpha+1}} dy = \delta^\alpha \int_\delta^\eta \frac{|f(x+t) - \phi(x)|}{t^{\alpha+1}} dt$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \chi(x) \right|_{t=0}^h &= |f(x+t) - \phi(x)| \\ &= \delta^\alpha \int_\delta^\eta \frac{\frac{d}{dt} |\chi(t)|_\delta^\eta}{t^{\alpha+1}} dt \end{aligned}$$

$$u = \frac{1}{t^{\alpha+1}}, \quad v = \chi(x) \Big|_\delta^\eta$$

alınıp kısmi integral uygulanırsa,

$$\begin{aligned} &= \delta^\alpha \left| \frac{\chi(t)}{t^{\alpha+1}} \right|_\delta^\eta + (\alpha+1) \delta^\alpha \int_\delta^\eta \frac{\chi(t)}{t^{\alpha+2}} dt \\ &\leq \epsilon + \epsilon(\alpha+1) \int_\delta^\eta \frac{dt}{t^{\alpha+1}} < \epsilon \left(1 + \frac{\alpha+1}{\alpha} \right) \end{aligned}$$

yazılır. Sabit η değeri için

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^\alpha \int_{x+\eta}^{\infty} \frac{|f(y) - \phi(x)|}{|x-y|^{\alpha+1}} dy = 0$$

eşitliği vardır. Benzer işlemler $\psi(x)$ içinde gerçekleştirilir. Özel olarak,

$$\delta = \frac{1}{\lambda} \text{ ve } K(x,y,\delta) = \frac{2\sin^2 \frac{1}{2} \lambda (x-y)}{\pi \lambda (x-y)^2}$$

olsun. $\alpha = 1$ için yukarıdaki teoremin şartları sağlanır. Böylece Fejer teoremini Fourier serilerine uygulamış oluruz [9].

2.3.2. TEOREM.

$f(t)$ fonksiyonu, $L(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlı olmak üzere,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos u(x-t) dt$$

integrali x süreksizlik noktası ise

$\frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]$ a, x süreklilik noktası ise $f(x)$ e ve hemen hemen her x için $f(x) \in (C,1)$ ile toplanabilir.

İSPAT : Eğer $f(t)$ fonksiyonu $L(-\infty, \infty)$ da tanımlı ve

$$a(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos ut dt, \quad b(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(t) \sin ut dt \quad (2.10)$$

integralleri bütün u değerleri için sıfır ise hemen hemen her x için $f(x) = 0$ dır. Diğer özel durumda,

$$\begin{aligned}
K(x, y, \frac{1}{\lambda}) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\lambda} (1 - \frac{u}{\lambda})^{\alpha} \cos u(x - y) du \\
&= \frac{\lambda}{\pi} \int_0^1 (1 - v)^{\alpha} \cos \lambda v(x - y) dv \quad (2.11)
\end{aligned}$$

$$= \frac{\alpha}{\pi(x - y)} \int_0^1 (1 - v)^{\alpha - 1} \sin \lambda v(x - y) dv$$

$$v = 1 - \frac{w}{\lambda |x - y|}$$

değişken dönüşümü yapılırsa,

$$K(x, y, \frac{1}{\lambda}) = \frac{\alpha}{\pi \lambda^{\alpha} |x - y|^{\alpha + 1}} \int_0^{\lambda |x - y|} \frac{\sin\{\lambda |x - y| - w\}}{w^{1 - \alpha}} dw \quad (2.12)$$

olarak elde edilir.

$K(x, y, \frac{1}{\lambda})$ (2.11) den $O(\lambda)$ ve (2.12) den $O(\lambda^{-\alpha} |x - y|^{-\alpha - 1})$ dir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\int_x^{\infty} K(x, y, \frac{1}{\lambda}) dy &= \frac{\alpha}{\pi} \int_x^{\infty} \frac{dy}{y - x} \int_0^1 (1 - v)^{\alpha - 1} \sin \lambda v(y - x) dv \\
&= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 (1 - v)^{\alpha - 1} dv \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda vt}{t} dt \\
&= \frac{1}{2} \alpha \int_0^1 (1 - v)^{\alpha - 1} dv = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

dir. [9].

2.3.3. TEOREM.

$f(t)$ fonksiyonu $L(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlı olmak üzere,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u(x-t) dt$$

integrali, x süreksizlik noktası ise $\frac{1}{2} |f(x+0) + f(x-0)|$ a
 x bir süreklilik noktası ise $f(x)$ e ve hemen hemen her
 x için $f(x)$ e $0 < \alpha < 1$ için (C, α) ile toplanabilir.

İSPAT : Bunun için,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u(x-t) dt \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\lambda} \left(1 - \frac{u}{\lambda}\right)^{\alpha} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u(x-t) dt \end{aligned}$$

$0 < \alpha < 1$ yazılabileceğini göz önüne alırsak sağ yan-
daki,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\lambda} \left(1 - \frac{u}{\lambda}\right)^{\alpha} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u(x-t) dt \quad (2.13)$$

integrali Fourier integrallerinin toplanabilirliği ta-
nımından $0 < \alpha < 1$ için (C, α) toplanabilirdir. Şimdi
(2.13) integralinin hangi değerlerine (C, α) toplanabi-
leceğini araştıralım.

$$K(x, t, \frac{1}{\lambda}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\lambda} \left(1 - \frac{u}{\lambda}\right)^{\alpha} \cos u(x-t) du \quad (2.14)$$

seçerek $K(x, t, \frac{1}{\lambda})$ nin Teorem 2.3.1 in şartlarının sağ-
lanıp sağlanmadığını kontrol edelim. (2.14) de $\frac{u}{\lambda} = v$
değişken dönüşümü yapılırsa,

$$K(x, t, \frac{1}{\lambda}) = \frac{\lambda}{\pi} \int_0^1 (1-v)^{\alpha} \cos \lambda v(x-t) dv \quad (2.15)$$

elde edilir. (2.15) integralini dahada geliştirirsek kısmi integrasyon yöntemi ile,

$$\begin{aligned}
 K(x, t, \frac{1}{\lambda}) &= \frac{\lambda}{\pi} \{ (1-v)^\alpha \frac{1}{\lambda |x-t|} \sin \lambda v (x-t) \Big|_{v=0}^1 \\
 &\quad + \frac{\alpha}{\lambda |x-t|} \int_0^1 (1-v)^{\alpha-1} \sin \lambda v (x-t) \} dv \\
 &= \frac{\alpha}{\pi |x-t|} \int_0^1 (1-v)^{\alpha-1} \sin \lambda v (x-t) dv
 \end{aligned}$$

ve $v = 1 - \frac{w}{\lambda |x-t|}$ dönüşümünden,

$$K(x, t, \frac{1}{\lambda}) = \frac{\alpha}{\pi \lambda^\alpha |x-t|^{\alpha+1}} \int_0^{\lambda |x-t|} \frac{\sin\{\lambda |x-t| - w\}}{w^{1-\alpha}} dw \quad (2.16)$$

$0 < \alpha < 1$ yazılır. O zaman $K(x, t, \frac{1}{\lambda})$ ile tanımlanan fonksiyon (2.15) den $O(\lambda)$ ve (2.16) dan

$O(\frac{1}{\lambda^\alpha |x-t|^{\alpha+1}})$ dır. Yani,

$$K(x, y, \frac{1}{\lambda}) = \begin{cases} O(\lambda) & |x-t| \leq \frac{1}{\lambda} \\ O(\frac{1}{\lambda^\alpha |x-t|^{\alpha+1}}) & |x-t| > \frac{1}{\lambda} \end{cases}$$

dir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
 \int_x^{\infty} K(x, t, \frac{1}{\lambda}) dt &= \frac{\alpha}{\pi} \int_x^{\infty} \frac{dt}{(t-x)} \int_0^1 (1-v)^{\alpha-1} \sin \lambda v (t-x) dv \\
 &= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dy}{Y} \int_0^1 (1-v)^{\alpha-1} \sin \lambda v y dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 (1-v)^{\alpha-1} dv \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda v y}{y} dy \\
&= \frac{1}{2} \alpha \int_0^1 (1-v)^{\alpha-1} dv = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

olur. O halde (2.14) ile tanımlanan $K(x, t, \frac{1}{\lambda})$ fonksiyonu Teorem 2.3.1 in şartlarını sağlar ve

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t, \frac{1}{\lambda}) f(t) dt = \frac{1}{2} [\phi(x) + \psi(x)]$$

şeklinde yazılır.

$\phi(x) = f(x+0)$, $\psi(x) = f(x-0)$ fonksiyonları anlamlı iken,

$$\begin{aligned}
&\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t, \frac{1}{\lambda}) f(t) dt \\
&= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\lambda} (1 - \frac{u}{\lambda})^{\alpha} \cos u(x-t) f(t) du dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u(x-t) dt
\end{aligned}$$

olarak ifade edilebilir. O zaman,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u(x-t) dt \quad (2.17)$$

integrali $\frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]$ a (C, α) ile toplanabilir. Eğer f sürekli bir fonksiyon olmak üzere $\phi(x) = \psi(x) = f(x)$ ise (2.17) integrali $f(x)$ e (C, α) ile

toplanabilirdir ve x in bütün değerleri içinde $f(x)$
 (C, α) ile toplanabilirdir [9].

2.4. Belirli Cauchy İntegrali

(2.17) denklemi limit formunda

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \phi(\delta u) du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u(x-t) dt \quad (2.18)$$

olarak tanımlanabilir. (C, α) toplanabilirliği için

$$\phi(u) = \begin{cases} (1-u)^\alpha & (0 < u < 1) \\ 0 & (u \geq 1) \end{cases} \quad (2.19)$$

fonksiyonunu ele alalım. $\phi(u) = e^{-u}$ olmak üzere (2.18)
 deki integral;

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \int_0^{\infty} e^{-\delta u} \cos u(x-t) du \quad (2.20)$$

formunda yazılabilir.

$$\int_0^{\infty} e^{-\delta u} \cos u(x-t) du \quad \text{integraline} \quad e^{-\delta u} = k,$$

$dv = \cos u(x-t) du$ değişken dönüşümü yapılırsa kısmi
 integrasyon yönteminden,

$$\int_0^{\infty} e^{-\delta u} \cos u(x-t) du = \frac{\delta}{\delta^2 + (x-t)^2}$$

elde edilir. O halde (2.20) integrali

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \int_0^{\infty} e^{-\delta u} \cos u(x-t) du \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\delta}{\delta^2 + (x-t)^2} dt
\end{aligned} \tag{2.21}$$

formuna dönüşür. Burada

$$K(x, y, \delta) = \frac{1}{\pi} \frac{\delta}{\delta^2 + (x-y)^2} \tag{2.22}$$

dir ve Teorem 2.3.1 in şartları $\alpha = 1$ için sağlanır [9].

2.5. Weierstrass'ın Belirli İntegrali

Tekrar (2.18) integralini göz önüne alalım ve $\phi(u) = e^{-u^2}$ olsun. Bu durumda (2.18) integralini

$$\begin{aligned}
& \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \phi(\delta u) du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u(x-t) dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \int_0^{\infty} e^{-\delta^2 u^2} \cos u(x-t) du \\
&= \frac{1}{2\delta \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp \left[-\frac{(x-t)^2}{4\delta^2} \right] dt
\end{aligned}$$

olarak yazmak mümkündür. Burada da

$$K(x, y, \delta) = \frac{1}{2\delta \sqrt{\pi}} \exp \left[-\frac{(x-y)^2}{4\delta^2} \right] \tag{2.23}$$

dir ve (2.23) ifadesine Weierstrass'ın belirli integrali denir [9].

2.5.1. TEOREM.

$K(x,y,\delta)$, (2.23) deki gibi tanımlansın. Eğer C nin bazı pozitif değerleri için $e^{-cx^2} f(x)$ fonksiyonu $L(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlı ise Teorem 2.3.1 in şartları sağlanır.

2.6. Genel Toplanabilirlik

Burada sadece $f(x+0)$ ve $f(x-0)$ in mevcut olması durumunu ele alacağız. Kullanacağımız teoremler aşağıdaki gibi sıralanabilir.

2.6.1. TEOREM.

$K(x,y,\delta) \geq 0$ için,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_x^b K(x,y,\delta) dy = \frac{1}{2}, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_a^x K(x,y,\delta) dy = \frac{1}{2} \quad (2.24)$$

ve $|x-y| \geq \epsilon > 0$ olacak şekilde tüm x, y değerleri

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} K(x,y,\delta) = 0 \quad (2.25)$$

eşitliğini sağlasın. O zaman $a = -\infty$, $b = \infty$ ve $\epsilon > 0$ sayısı için

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{x-\epsilon} K(x,y,\delta) dy = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{x+\epsilon}^{\infty} K(x,y,\delta) dy = 0 \quad (2.26)$$

integralleri mevcuttur [9].

2.6.2. TEOREM.

$\phi(x)$ fonksiyonu $L(0,\infty)$ aralığında tanımlı ve sadece $(0,\infty)$ aralığında sonlu sayıda max ve min noktalarına sahip, $\phi(+0) = 1$ ve $\phi(x), \phi'(x)$ in negatif azalmayan integrali olsun. $f(x), L(-\infty,\infty)$ aralığında tanımlı ise sağ tarafın var olması halinde

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \phi(\delta u) du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u(x-t) dt \\ = \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)] \end{aligned}$$

dır.

$$K(x,y,\delta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \phi(\delta u) \cos u(x-y) du$$

istenen özelliklere sahip ise Teorem 2.6.1 i içerir [9].

2.7. Bütün özel durumlar göz önüne alındığında $K(x,y,\delta) = K(x-y,\delta)$ eşitliği yazılabilir. $K(u,\delta), u$ nun çift bir fonksiyonu olmak üzere,

$$\int_0^{\infty} K(u,\delta) du = \frac{1}{2}$$

ve her $\eta > 0$ sayısı için,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\eta}^{\infty} K(u,\delta) du = 0$$

olur. Bu şartlarla,

$$\chi(x, \delta) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y, \delta) f(y) dy$$

eşitliği sadece özel noktalarda $f(x)$ 'e yaklaşmaz. Yukarıdaki koşullar Teorem 2.7.1 içinde geçerlidir [9].

2.7.1. TEOREM.

$K(u, \delta)$ pozitif fonksiyonu 2.7 de belirtilen koşulları gerçeklesin ve $f(x)$ fonksiyonu $L(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlı ise,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} |\chi(x, \delta) - f(x)| dx = 0$$

dır.

İSPAT :

$$\chi(x, \delta) - f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(u, \delta) \{f(x-u) - f(x)\} du$$

için

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |\chi(x, \delta) - f(x)| dx &\leq \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} K(u, \delta) |f(x-u) - f(x)| du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} K(u, \delta) du \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-u) - f(x)| dx \end{aligned}$$

yazılabilir. Ayrıca,

$$\psi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-u) - f(x)| dx$$

integrali tüm u değerleri için sınırlıdır. $|u| \leq \eta$ için

$|\psi(u)| \leq \varepsilon$ olsun. O zaman

$$\left| \int_{-\eta}^{\eta} K(u, \delta) \psi(u) du \right| \leq \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} K(u, \delta) du$$

ve eğer $|\psi(u)| \leq M$ ise

$$\left| \int_{\eta}^{\infty} K(u, \delta) \psi(u) du \right| \leq M \int_{\eta}^{\infty} K(u, \delta) du$$

olurki bu da hipotezden $\delta \rightarrow 0$ a yaklaşır, $(-\infty, -\eta)$ içinde benzer işlemler yapılabilir. Dolayısıyla istenen gerçekleştirilmiş olur. Örneğin $(C, 1)$ toplanabilirliği durumunda,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{1 - \cos \lambda (x - y)}{\lambda (x - y)^2} dy$$

integrali $\lambda \rightarrow \infty$ için ortalama olarak $f(x)$ e yaklaşır [9].

2.8. Fourier Forlümünün İntegre Edilmiş Formu

Verilen serinin yakınsaklığı irdelenerek Fourier serilerinin terim terime integre edilebilir olmasından dolayı yardımcı teoremler ile daha genel ifadelerle geçiş sağlanabilir.

2.8.1. TEOREM.

$f(x)$ fonksiyonu $L(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlı ve tüm ξ değerleri için,

$$\int_0^{\xi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{du}{u} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \{ \sin u(\xi-t) + \sin ut \} dt \quad (2.27)$$

$$\int_0^{\xi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{e^{-i\xi u} - 1}{-iu} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iut} dt \quad (2.28)$$

ve $\xi \geq 0$ için,

$$\int_0^{\xi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \xi u}{u} du \int_0^{\infty} f(t) \cos ut dt \quad (2.29)$$

$$\int_0^{\xi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos \xi u}{u} du \int_0^{\infty} f(t) \sin ut dt \quad (2.30)$$

dir [9].

2.9. Mellin Formülü

Mellin formülü, Fourier formülünün değişken değişiminin bir sonucu olarak karşımıza çıkar. Uygun argümanlar seçiminde Fourier ve Laplace dönüşümleri ile Mellin dönüşümü arasında çift yönlü geçiş sağlanabilir. Mellin formülü;

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(x) x^{s-1} dx \quad (s = k + it) \quad (2.31)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) x^{-s} ds \quad (2.32)$$

olarak ifade edilebilir. (2.32) eşitliği ters Mellin formülü olarak tanımlanır.

2.9.1. TEOREM.

$y^{k-1} f(y)$ fonksiyonu $L(0, \infty)$ aralığında tanımlı, $y = x$ noktası komşuluğunda $f(y)$ sınırlı salınımlı ve

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(x) x^{s-1} dx \quad (s = k + it)$$

olsun. O zaman,

$$\frac{1}{2} \{f(x+0) + f(x-0)\} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{k-iT}^{k+iT} F(s) x^{-s} ds \quad (2.33)$$

dır [9].

2.9.2. TEOREM.

$F(k + iu)$, $L(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlı, $u = t$ noktasının bir komşuluğunda sınırlı salınımlı ve

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} F(s) x^{-s} ds \quad (2.34)$$

olur. Bu durumda,

$$\frac{1}{2} \{F\{k + i(t+0)\} + F\{k + i(t-0)\}\} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{1/\lambda}^{\lambda} f(x) x^{k+it-1} dx \quad (2.35)$$

dır [9].

BÖLÜM 3

STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ

3.1. Ortogonal Fonksiyonlar

Belirli bir $[a,b]$ aralığında tanımlanmış ve karelerinin integralleri alınabilen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$, gibi sonlu ya da sonsuz sayıda bir takım fonksiyonları gözönüne alalım. Eğer bunların ikişer ikişer çarpımlarının tanım bölgeleri üzerinden integralleri

$$\int_a^b \varphi_i^*(x) \varphi_k(x) dx = (\varphi_i, \varphi_k) = \gamma \delta_{ik} = \begin{cases} \gamma & \text{eğer } i=k \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } i \neq k \text{ ise} \end{cases} \quad (3.1)$$

bağıntılarını gerçekleştiriyorsa $\varphi_i(x)$, ($i = 1, 2, \dots$) fonksiyonları sözkonusu bölgede dik bir fonksiyon ailesi meydana getirir ve bu fonksiyon ailesi $\{\varphi_i(x)\}$ ile gösterilir.

Eğer,

$$\psi_i(x) = \frac{\varphi_i(x)}{\sqrt{\gamma}}$$

kabul edilirse (3.1) formülünden

$$\int_a^b \psi_i^*(x) \psi_k(x) dx = (\psi_i, \psi_k) = \delta_{ik} \quad (3.2)$$

bulunur. Bu takdirde $\{\psi_i(x)\}$ dik fonksiyon ailesine normlanmış bir dik fonksiyon ailesi ya da ortonormal bir fonksiyon sistemi denir.

$[a,b]$ aralığında tanımlanmış ve bu aralıkta karelerinin integralleri bir anlama sahip, fakat aralarında diklik bağıntıları bulunmayan $x_1(x), x_2(x), \dots$ gibi fonksiyonlar verilmiş ise bu takdirde

$$\varphi_1(x) = x_1(x)$$

$$\varphi_2(x) = \lambda_{21}x_1(x) + x_2(x) \quad (3.3)$$

$$\varphi_3(x) = \lambda_{31}x_1(x) + \lambda_{32}x_2(x) + x_3(x)$$

.

$$\varphi_i(x) = \sum_{k=1}^{i-1} \lambda_{ik} x_k(x) + x_i(x)$$

.

gibi $x_k(x)$ fonksiyonlarının lineer kombinasyonları olan $\varphi_i(x)$ fonksiyonlarının dik fonksiyon olmalarını sağlayacak şekilde λ_{ik} katsayılarını seçmenin mümkün olacağını gösterelim.

Bunun için önce ilk iki denkleme gözönüne alalım.

$\varphi_1(x)$ ile $\varphi_2(x)$ birbirine dik iseler

$$0 = (\varphi_1, \varphi_2) = \lambda_{21}(\varphi_1, x_1) + (\varphi_1, x_2) = \lambda_{21}(\varphi_1, \varphi_1) + (\varphi_1, x_2)$$

yani,

$$\lambda_{21} = - \frac{(\varphi_1, x_2)}{(\varphi_1, \varphi_1)} = - \frac{(\varphi_1, x_2)}{\gamma}$$

ve dolayısıyla

$$\varphi_2(x) = x_2(x) - \frac{(\varphi_1, x_2)}{\gamma} x_1(x) = x_2(x) - \frac{(\varphi_1, x_2)}{\gamma} \varphi_1(x)$$

yazılabilir.

Benzer olarak, $\varphi_3(x)$ in $\varphi_1(x)$ ve $\varphi_2(x)$ 'e dik olduğu yazılabilir. Bu iki şarttan da λ_{31} ve λ_{32} katsayıları belirlenir. Böylece genel olarak $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{i-1}(x)$ 'e dik olan

$$\varphi_i(x) = x_i(x) - \frac{1}{\gamma} \sum_{k=1}^{i-1} (\varphi_k, x_i) \varphi_k(x) \quad (3.4)$$

şeklindeki $\varphi_i(x)$ fonksiyonu da hesaplanabilir.

$[a, b]$ aralığında tanımlanmış $x_k(x)$ fonksiyonlarından hareketle $\{\varphi_i(x)\}$ dik fonksiyon dizisini kurmaya Schmidt dikleştirme işlemi denir.

Bir örnek olmak üzere $[-1, 1]$ aralığında $x_k(x) = x^k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) fonksiyon dizisinden dik fonksiyon ailesini kurmak istersek, uygunluğu sağlamak için k yı sıfırdan başlatmalıyız. Buna göre;

$$\varphi_0(x) = 1, \lambda_{10} = - \frac{(\varphi_0, x_1)}{(\varphi_0, \varphi_0)} = - \frac{\int_{-1}^1 x \, dx}{\int_{-1}^1 dx} = 0$$

$$\varphi_1(x) = x$$

bulunur. Dizinin üçüncü teriminin

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

dördüncü ve beşinci terimlerinde

$$\varphi_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$\varphi_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

olduğu görülür. Böylece meydana gelen polinomlara Legendre polinomları adı verilir.

Fonksiyonların dikliği kavramını daha da genelleştirmek mümkündür. $P(x)$ ile $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ gibi bir fonksiyon dizisinin tanım bölgesi olan $[a, b]$ aralığında negatif değerler almayan ve integrallenebilir bir fonksiyonu göstermek üzere

$$\int_a^b P(x) \varphi_i(x) \varphi_k(x) dx = \gamma_{ik} = \begin{cases} \gamma & \text{eğer } i = k \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } i \neq k \text{ ise} \end{cases} \quad (3.5)$$

bağıntıları geçerli ise $\varphi_i(x)$ fonksiyonlarının $P(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre dik bir fonksiyon ailesi teşkil ettiği söylenebilir.

Schmidt dikleştirme yöntemi $P(x) \neq 1$ olsa da geçerlidir ve yukarıdaki örnekte olduğu gibi yine $\chi_p(x) = x^k$ olmak üzere fakat 1 den farklı $P(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre diklik şartları kabul edilmek üzere, Schmidt dikleştirme işlemi ile dik polinom aileleri kurulabilir.

Schmidt dikleştirme işlemiyle türetilmiş olan bu dik polinom ailelerine başka örneklerde verilebilir. Söz gelimi,

$$\left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right] \text{ aralığında, } \left\{ \cos \frac{(2k+1)\pi x}{a} \right\} \\ \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \cos \frac{(2i+1)\pi x}{a} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{a} dx = \frac{a}{2} \delta_{ik}$$

ve $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ bölgesinde $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ küresel harmonik fonksiyonlardan oluşan dik fonksiyonlar ailesi (Küresel harmonik fonksiyonlar, küresel koordinatlar için yazılmış olan Laplace denkleminin değişken ayırışımında ortaya çıkan açılara bağlı kısmını inceleyen fonksiyonlardır) :

Bu fonksiyonlar $p = \sin\theta$ ağırlık fonksiyonlarına göre diktirler,

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta Y_{l,m}^*(\theta,\varphi) Y_{lm}(\theta,\varphi) d\theta = d_{ll}, d_{mm},$$

3.2. Dik Fonksiyonların Seriyeye Açılımı

Belirli bir B bölgesinde geçerli olan $\{\varphi_k(\vec{r})\}$ dik fonksiyon ailesi ve yine B de tanımlamış olan $f(\vec{r})$ fonksiyonu verilsin. $f(\vec{r})$ nin B de $\{\varphi_l(\vec{r})\}$ cinsinden

$$f(\vec{r}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(\vec{r}) \quad (3.6)$$

şeklinde bir seriyeye açılıp açılmadığını inceleyelim.

(3.6) açılımının $f(\vec{r})$ yi en iyi bir şekilde temsil edebilmesi için acaba a_k katsayılarını nasıl seçmek gerekir? Önce bu serideki terimlerin sayısının sonlu bir n sayısı olduğunu farzedelim.

$$\Delta(\vec{r}, a_k) = f(\vec{r}) - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(\vec{r})$$

farkını gözönüne alırsak bu bize $f(\vec{r})$ nin $\varphi_k(\vec{r})$ lerle gösterilişindeki hatayı verir. Bunun minimum olması için en küçük kareler metodunda olduğu gibi

$$M_n = \int_B |f(\vec{r}) - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(\vec{r})|^2 dr \quad (3.7)$$

diye tanımlanan ortalama hatanın minimum olması gerektiği gösterilir. M_n ifadesi ($k = 1, 2, \dots$) olmak üzere n tane a_k parametresinin fonksiyonudur. Fakat a_k açılım katsayıları kompleks de olabileceğinden M_n ifadesi n tane a_k ve n tane de a_k^* parametresine, yani toplam olarak

2n parametreye bağılıdır. Bu nedenle M_n yi minimum yapabilmek ancak M_n nin a_k ve a_k^* lara göre kısmi türevlerini sıfıra eşitlemekle mümkündür.

$$\begin{aligned}
M_n &= \int_B |f(\vec{r}) - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(\vec{r})|^2 d\vec{r} \\
&= \int_B [f^*(\vec{r}) - \sum_{k=1}^n a_k^* \varphi_k^*(\vec{r})] \times [f(\vec{r}) - \sum_{m=1}^n a_m \varphi_m(\vec{r})] d\vec{r} \\
&= \int_B f^*(\vec{r}) f(\vec{r}) d\vec{r} - \sum_{k=1}^n [a_k \int_B f^*(\vec{r}) \varphi_k(\vec{r}) d\vec{r} + \int_B \varphi_k^*(\vec{r}) f(\vec{r}) d\vec{r}] \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n a_k^* a_m \int_B \varphi_k^*(\vec{r}) \varphi_m(\vec{r}) d\vec{r} \\
&= (f, f) - \sum_{k=1}^n [(f, \varphi_k) a_k + (\varphi_k, f) a_k^*] + \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n (\varphi_k, \varphi_m) a_k^* a_m \\
&= (f, f) - \sum_{k=1}^n [(f, \varphi_k) a_k + (\varphi_k, f) a_k^* - \gamma a_k^* a_k] \quad (3.8)
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\frac{\partial M_n}{\partial a_k} = - (f, \varphi_k) + \gamma a_k^* = 0, \quad a_k^* = \frac{1}{\gamma} (f, \varphi_k) \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial M_n}{\partial a_k^*} = - (\varphi_k, f) + \gamma a_k = 0, \quad a_k = \frac{1}{\gamma} (\varphi_k, f) \quad (3.10)$$

bulunur. (3.9) ve (3.10) birbirlerinin kompleks eşleniğidir. Buna göre her iki formülü de, $\gamma = (\varphi_k, \varphi_k)$ olduğunu da gözönünde tutarak,

$$a_k = \frac{\int_B \varphi_k^*(\vec{r}) f(\vec{r}) d\vec{r}}{\int_B \varphi_k^*(\vec{r}) \varphi_k(\vec{r}) d\vec{r}} \quad (3.11)$$

şeklinde yazabiliriz.

(3.9) ve (3.10) dan yararlanarak (3.8) in son satırını yeniden yazarsak,

$$\begin{aligned}
M_n &= (f, f) - \sum_{k=1}^n \{ (f, \varphi_k) a_k + (\varphi_k, f) a_k^* - \gamma a_k^* a_k \} \\
&= (f, f) - \sum_{k=1}^n \{ \gamma a_k^* a_k + \gamma a_k a_k^* - \gamma a_k^* a_k \} \\
&= (f, f) - \sum_{k=1}^n \gamma |a_k|^2
\end{aligned}$$

olur. Tanım dolayısıyla $M_n \geq 0$ dır. Bundan dolayı son bağıntıdan

$$\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \leq \frac{1}{\gamma} (f, f) = \frac{1}{\gamma} \int_B |f(\vec{r})|^2 d\vec{r} \quad (3.12)$$

bulunur ki eğer $\{\varphi_k(\vec{r})\}$ ortonormal bir fonksiyon ailesi ise $\gamma = 1$ olacağından (3.12) ifadesi,

$$\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \leq \int_B |f(\vec{r})|^2 d\vec{r} \quad (3.13)$$

biçimine indirgenir. Buna Bessel eşitsizliği adı verilir. Eğer $n \rightarrow \infty$ için $M_n \rightarrow 0$ ise yani,

$$\sum_{k=1}^n |a_k|^2 = \int_B |f(\vec{r})|^2 d\vec{r} \quad (3.14)$$

ise bu, $\{\varphi_k(\vec{r})\}$ sonsuz ortonormal fonksiyon ailesinin

$$a_k = (\varphi_k, f) = \int_B \varphi_k^*(\vec{r}) f(\vec{r}) d\vec{r} \quad (3.15)$$

olmak üzere $f(\vec{r})$ fonksiyonunu B de

$$f(\vec{r}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(\vec{r}) \quad (3.16)$$

serisi yardımıyla ortalama olarak temsil ettiğini ifade eder. (3.14) eşitliğine Parseval eşitliği denir.

$f(\vec{r})$ nin $\{\varphi_k(\vec{r})\}$ lerle seri halinde temsilindeki

a_k katsayıları Parseval eşitliğini gerçekleştirirlerse $\{\varphi_k(\vec{r})\}$ ye tam bir ortonormal fonksiyon takımı adı verilir [10].

3.3. Sturm - Liouville Denklemi

Teorik fiziğin pek çok dalında sık sık lineer diferensiyel denklemle karşılaşılır. Bu denklem λ' bir parametre olmak üzere

$$\nabla^2 \Psi(\vec{r}, t) + \lambda' \Psi(\vec{r}, t) = A(\vec{r}, t) + B(t) \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} + C(t) \frac{\partial^2 \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (3.17)$$

biçimindedir. λ' , $A(\vec{r}, t)$, $B(t)$ ve $C(t)$ nin özel değerleri için (3.17) denklemi bazı özel isimler alır.

- 1) Eğer $A(\vec{r}, t) \equiv 0$, $B \equiv \text{Sabit}$, $C \equiv \text{Sabit}$ ise denkleme telgrafçılar denklemi,
- 2) $A \equiv C \equiv 0$ ise difüzyon denklemi,
- 3) $\lambda' \equiv B \equiv C \equiv 0$ ise Poisson denklemi,
- 4) $\lambda' \equiv A \equiv B \equiv 0$ ise Dalga denklemi,
- 5) $A \equiv B \equiv C \equiv 0$ ise Helmholtz denklemi,
- 6) $\lambda' \equiv A \equiv B \equiv C \equiv 0$ ise Laplace denklemi denir.

$A(\vec{r}, t)$ fonksiyonunun sıfırdan farklı olduğu hallerde $A \equiv 0$ için elde edilen özel homogen denklemin genel çözümü ile homogen olmayan denklemin özel bir çözümünün lineer kombinasyonu, gözönüne alınan denklemin genel çözümünü oluşturur.

Homojen denklemin genel çözümünü bulduktan sonra homogen olmayan denklemin özel çözümünü bulmak için, örneğin, analiz derslerinden bilinen Lagrange'ın katsayıların değişimi metodu gibi bir metod uygularsak sonuca kolaylıkla gidilebilir. Bu nedenle, homogen denklemin genel çözümünün bulunması ön planda gelmektedir. O halde,

$$\nabla^2 \Psi(\vec{r}, t) + \lambda' \Psi(\vec{r}, t) = B(t) \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} + C(t) \frac{\partial^2 \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (3.18)$$

denkleminin genel çözümünü bulmak için,

$$\Psi(\vec{r}, t) = U(\vec{r}) \cdot T(t) \quad (3.19)$$

şeklinde değişken ayrışımı yapalım.

(3.19) ifadesinin (3.18) denkleminde yerine yazıp her iki tarafı $U(\vec{r}) \cdot T(t)$ ile bölersek

$$\begin{aligned} \frac{\Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} &= \frac{\partial (U(\vec{r}) \cdot T(t))}{\partial t} = U(\vec{r}) \cdot \frac{\partial T(t)}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} \right) = U(\vec{r}) \cdot \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} \\ \nabla^2 U(\vec{r}) \cdot T(t) + \lambda' U(\vec{r}) \cdot T(t) &= B(t) U(\vec{r}) \frac{\partial T(t)}{\partial t} + C(t) U(\vec{r}) \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} \\ \frac{1}{U(\vec{r})} \nabla^2 U(\vec{r}) + \lambda' &= \frac{B(t)}{T(t)} \frac{\partial T(t)}{\partial t} + \frac{C(t)}{T(t)} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.20)$$

elde edilir. Bu takdirde iki durum vardır.

1) (3.20) denkleminin sol tarafı $f(\vec{r})$ ve sağ tarafında $g(t)$ gibi sırasıyla $\vec{r}$ ve t nin açık birer fonksiyonudur.

2) Her iki yanı aynı bir μ sabitine eşittir. Birinci halde denklem,

$$f(\vec{r}) = g(t) \text{ ya da } f(\vec{r}) - g(t) = F(\vec{r}, t) = 0$$

şeklinde olurduki bu fonksiyonel bağıntı, $\vec{r}$ ve t nin birinden birinin fonksiyonu olur. Bu ise $\vec{r}$ ve t nin bağımsız değişkenler olması keyfiyetiyle çelişir. Bu çelişki ancak, (3.20) nin her iki yanı aynı bir μ ayrışım sabitine eşit ise ortadan kalkar.

Bu nedenle $\lambda' - \mu = \lambda$ kabul edilirse (3.20) denkleminden

$$\nabla^2 U(\vec{r}) + \lambda U(\vec{r}) = 0 \quad (3.21)$$

$$C(t) \frac{d^2 T(t)}{dt^2} + B(t) \frac{dT(t)}{dt} - \mu T(t) = 0 \quad (3.22)$$

bulunur. (3.22) denklemi ikinci dereceden adi diferensiyel denklem olup ∇^2 nin ifadesine bağlı değildir.

(3.21) denklemi ise Helmholtz tipi bir diferensiyel denklem olup aynı zamanda Laplace denkleminin öz değer probleminin bazı olarak da kabul edilebilir. Burada Laplace operatörü, denklemin geçerli olduğu koordinat sistemine bağlıdır. Örneğin, küresel koordinatlarda $U = U(r, \theta, \phi)$ olmak üzere

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + \lambda U = 0 \quad (3.23)$$

şeklini alır. Burada yine

$$U(r, \theta, \phi) = U(r) V(\theta) W(\phi)$$

kabul ederek değişkenlere ayrışım yöntemi ile

$$\frac{d}{dr} [r^2 \frac{dU}{dr}] + \lambda r^2 U - \alpha U = 0 \quad (3.24)$$

$$\frac{d}{d\theta} [\sin\theta \frac{dV}{d\theta}] + (\alpha \sin\theta) V - \frac{\beta}{\sin\theta} V = 0 \quad (3.25)$$

$$\frac{d^2 W}{d\phi^2} + \beta^2 W = 0 \quad (3.26)$$

biçiminde üç denklem elde edilir.

Böylece kısmi türevli (3.23) denkleminin çözümü bu üç adi diferensiyel denklemin çözümüne indirgenmiş olur. Eğer α , β ve λ ayrışım sabitlerinin, bu denklemlerin çözümlerini mümkün kılacak değerleri varsa,

$$U(r, \theta, \phi) = U(r; \lambda, \alpha) V(\theta; \alpha, \beta) W(\phi, \beta) \quad (3.27)$$

fonksiyonu Laplace operatörünün küresel koordinatlardaki bir öz fonksiyonu olur. Bu denklemlerle birlikte sınır şartlarının da belirtilmesi gerekir. Aslında α , β ve λ nın kabul edilebilir değerlerini tayin eden de bu sınır şartlarıdır. Örneğin, (3.23) Helmholtz denklemini $r = R$ yarıçaplı bir kürenin içi için çözüp, bu çözümü $r = R$ için,

$$\left. \begin{aligned} U &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial r} + \sigma U &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

sınır şartlarından birine uygularsak bu şartlar,

$$\left. \begin{aligned} U(R) &= 0 \\ U'(R) &= 0 \\ U'(R) + \sigma U(R) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

olmasını gerektirir.

$U(r)$ nin $R = 0$ da sürekli olması ve birinci mertebeden sürekli türeve sahip olmasını şart koşarsak bu, $U(0)$ ın sonlu olması gerektiğini gösterir. Eğer $U(r, \theta, \phi)$ kürenin içinde sürekli ise ve sürekli türevi var ise

$$W(0) = W(2\pi), W'(0) = W'(2\pi)$$

olurki n bir tam sayı olmak üzere bu, $\beta = n$ olması demektir. Çünkü $U(r, \theta, \phi)$ nin kürenin kutup ekseninde sürekli olması ve sürekli türevlerinin varolması isteniyorsa $V(0), V'(0), V(\pi), V'(\pi)$ sonlu kalmaları şarttır.

Gerek (3.24), gerek (3.25) ve gerekse (3.26) denklemlerinin $P(x), Q(x)$ ve $R(x)$ reel fonksiyonlar olmak üzere,

$$\frac{d}{dx} \left[P(x) \frac{dy(x)}{dx} \right] + Q(x) y(x) + \lambda R(x) y(x) = 0 \quad (3.30)$$

şeklindeki bir denklemin özel halleri olduğu bir gerçektir. Bu denkleme STURM-LIOUVILLE denklemi denir. Söz konusu denklemin aşağıdaki tiplerden bir sınır şartına bağlı olarak çözülmesi Sturm-Liouville problemini meydana getirir.

Sturm-Liouville probleminin sınır şartları $a \leq x \leq b$ olmak üzere şunlar olabilir :

- 1) $y(a) = 0$ veya $y(b) = 0$
- 2) $y'(a) = 0$ ve $y'(b) = 0$
- 3) $\sigma_1 > 0; \sigma_2 > 0$ olmak üzere

$$y'(a) - \sigma_1 y(a) = 0 \text{ ve } y'(b) + \sigma_2 y(b) = 0$$

- 4) $y(a) = y(b)$ ve $P(a) y'(a) = P(b) y'(b)$

5) $P(a) = 0$ olmak üzere $y(a)$ ve $y'(a)$ nın ve
 $P(b) = 0$ olmak üzere $y(b)$ ve $y'(b)$ nin sonlu
kalmaları.

Bunlardan ilk üçü sınırlara uygulanan şarttır. Dördüncüsü periyodiklik şartı olup beşinci şart da $y(x)$ 'in gözönüne alınan bölgede uyumlu olması sağlayan şarttır. İlk üç sınır şartına homojen sınır şartları adı verilir. Homojen sınır şartlarına bağlı olarak kabul edilen probleme de homojen bir problem denir. Homojen bir problem ise genellikle homojen olmayan bir diferensiyel denklem ya da homojen olmayan sınır şartlarına bağlı olarak kabul edilen problem olarak karşımıza çıkar.

Belirli bir λ_i öz değeri için (3.30) denklemini gerçekleşen öz fonksiyon $y_i(x)$ olsun. O zaman,

$$\frac{d}{dx} \left[P(x) \frac{dy_i}{dx} \right] + Q(x) y_i(x) + \lambda_i R(x) y_i(x) = 0 \quad (3.31)$$

yazılabilir. Aynı denklemin başka bir öz değeri λ_j ve buna karşılık gelen özfonksiyon da $y_j^*(x)$ olmak üzere, (3.31) denklemini $y_i(x)$ ile çarpıp $a \leq x \leq b$ aralığında x değişkenine göre integre edelim.

$$\int_a^b \left[y_j^* \frac{d}{dx} \left(P(x) \frac{dy_i}{dx} \right) + Q(x) y_j^* y_i + \lambda_i R(x) y_j^* y_i \right] dx = 0 \quad (3.32)$$

Bu ifade de bir kere i ile j yi aralarında yer değiştirip, ifadenin kompleks eşleniğini (3.32) den çıkarırsak,

$$\int_a^b [y_j^*(x) \frac{d}{dx} (P(x) \frac{dy_i}{dx}) - y_i(x) \frac{d}{dx} (P(x) \frac{dy_j^*}{dx})] dx$$

$$+ (\lambda_i - \lambda_j^*) \int_a^b R(x) y_j^*(x) y_i(x) dx = 0$$

veya sınır şartlarını da gözönünde tutarak,

$$(\lambda_i - \lambda_j^*) \int_a^b R(x) y_j^*(x) y_i(x) dx$$

$$= [P(x) y_j^*(x) \frac{dy_i(x)}{dx} - P(x) y_i(x) \frac{dy_j^*(x)}{dx}]_a^b = 0$$

bulunur. Yani $\lambda_i \neq \lambda_j^*$ için (3.30) denkleminin öz fonksiyonları $R(x)$ ağırlık fonksiyonlarına göre birbirlerine diktirler. Eğer $i \neq j$ alınırsa,

$$(\lambda_i - \lambda_j^*) \int_a^b R(x) [y_i(x)]^2 dx = 0$$

eşitliğinden, integralin $\neq 0$ olması nedeniyle $\lambda_i = \lambda_j^*$ yani Strum-Liouville denkleminin öz değerlerinin ancak reel olabilecekleri ortaya çıkar. Şu halde $y_i(x)$ fonksiyonları için

$$\int_a^b R(x) y_i^*(x) y_j(x) dx = \gamma \delta_{ij} \quad (3.33)$$

olacaktır. γ normalize edilmiş sabittir. Buraya kadar (3.17) denkleminin $A \equiv 0$ halinde (homojen hal) (3.21) ve (3.22) şeklinde iki denkleme indirgendiğini ve bunlardan ikisininde seçilen koordinat sistemine göre, değişkenlerine ayrışım metodu yardımıyla (3.30) şeklinde Strum-Liouville denklemlerine paraçalanabildiğini ve bu sonuçların özfonksiyonlarının da dik fonksiyonlar olduklarını ve normlaştırılabilirdiklerine gördük.

Acaba (3.30) şeklindeki denklemlere ayrışan (3.21) denkleminin genel çözümü (3.30) denklemlerine karşılık gelen özfonksiyonlar yardımıyla nasıl ifade olunabilir? Şimdi bu soruyu daha yakından inceleyelim. Bu nedenle,

$$\vec{r} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_N \vec{e}_N$$

olmak üzere, $U(\vec{r})$ fonksiyonunun (3.21) şeklinde ve N boyutlu uzaydaki bir koordinat sistemine göre ifade edilen Helmholtz denklemini gerçeklediğini farzedelim. $U(\vec{r})$ nin tanım bölgesi olan B

$$a_1 \leq x_1 \leq b_1; \dots; a_N \leq x_N \leq b_N$$

eşitsizlikleriyle belirlenmiş olsun. Bu takdirde,

$$U(\vec{r}) = U(x_1, x_2, \dots, x_N) = \prod_{i=1}^N U_i(x_i) \quad (3.34)$$

değişken ayrışımı yapmak suretiyle (3.21) denklemi, yukarıda belirtildiği üzere,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [P_i(x_i) \frac{dU_i(x_i)}{dx_i}] + Q_i(x_i) U_i(x_i) \\ + \lambda^{(i)} R_i(x_i) U_i(x_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (3.35)$$

şeklinde N tane Sturm-Liouville denklemine parçalanmış olacaktır. Bu türlü tipik bir denklemin $U_m^{(i)}(x_i)$ özfonksiyonları, (3.32) ye göre

$$\int_{a_i}^{b_i} R_i(x_i) U_m^{(i)}(x_i) U_n^{(i)}(x_i) dx_i = \gamma_{mn}^{\delta}$$

bağıntılarını gerçeklemektedir. Fakat eğer,

$$\sqrt{\frac{R_i(x_i)}{\gamma}} U_k^{(i)}(x_i) = \varphi_{ik}(x_i) \quad (3.36)$$

kabul edilirse,

$$\int_{a_i}^{b_i} \varphi_{im}^*(x_i) \varphi_{in}(x_i) dx_i = \delta_{mn} \quad (3.37)$$

bağıntısı yazılır. Şimdi,

$$\left[\prod_{i=1}^N \sum_{k_i=1}^n \right] \star = \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n \dots \sum_{k_N=1}^n$$

olmak şartıyla $U(x_1, x_2, \dots, x_N)$ nin

$$U(x_1, x_2, \dots, x_N) = \left[\prod_{i=1}^N \sum_{k_i=1}^n \right] \star \prod_{i=1}^N a_{ik_i} \varphi_{ik_i}(x_i) \quad (3.38)$$

şeklinde bir seri yardımıyla en iyi şekilde temsil edilebilmesi için a_{ik_i} katsayılarının nasıl seçilmesi gerektiğini araştıralım. Bunun için yine benzer şekilde,

$$M_N = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_N}^{b_N} \left| \prod_{i=1}^N U_i(x_i) - \left[\prod_{i=1}^N \sum_{k_i=1}^n \right] \star \prod_{i=1}^N a_{ik_i} \varphi_{ik_i}(x_i) \right|^2 dx_1 \dots dx_N$$

ifadesini gözönüne alalım. Buna bağlı olarak ve formalizmi ağırlaştırmamak için sadece bu hesaplamalarda geçerli olmak üzere kompleks eşleniği, $\star$ yerine, ifadenin üzerine konulan bir çizgiyle gösterirsek,

$$M_N = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_N}^{b_N} \left\{ \prod_{i=1}^N \bar{U}_i(x_i) - \left[\prod_{i=1}^N \sum_{k_i=1}^n \right] \star \prod_{i=1}^N \bar{a}_{ik_i} \bar{\varphi}_{ik_i}(x_i) \right\} \times \left\{ \prod_{j=1}^N U_j(x_j) - \left[\prod_{j=1}^N \sum_{k_j=1}^n \right] \star \prod_{j=1}^N a_{jk_j} \varphi_{jk_j}(x_j) \right\} dx_1 \dots dx_N$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_N}^{b_N} \left\{ \prod_{i=1}^N \bar{U}_i(x_i) \prod_{j=1}^N U_j(x_j) - \prod_{i=1}^N \bar{U}_i(x_i) \times \left[\prod_{m=1}^N \sum_{k_m=1}^n \right] \star \right. \\
&\quad \left. \prod_{j=1}^N a_{jk_m} \varphi_{jk_m}(x_j) - \left[\prod_{i=1}^N \sum_{k_i=1}^n \right] \star \prod_{i=1}^N \bar{a}_{ik_i} \bar{\varphi}_{ik_i}(x_i) \times \prod_{j=1}^N U_j(x_j) \right. \\
&\quad \left. + \left[\prod_{i=1}^N \sum_{k_i=1}^n \right] \left[\prod_{m=1}^N \sum_{k_m=1}^n \right] \star \left[\prod_{i=1}^N \bar{a}_{ik_i} \bar{\varphi}_{ik_i}(x_i) \prod_{j=1}^N a_{jk_m} \varphi_{jk_m}(x_j) \right] \right\} dx_1 \dots dx_N \\
&= \int_B \vec{U}(\vec{r}) U(\vec{r}) d\vec{r} - \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_N}^{b_N} \left[\prod_{i=1}^N \sum_{k_i=1}^n \right] \star \prod_{i=1}^N \bar{a}_{ik_i} \bar{U}_i(x_i) \varphi_{ik_i}(x_i) dx_1 \dots dx_N \\
&\quad - \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_N}^{b_N} \left[\prod_{i=1}^N \sum_{k_i=1}^n \right] \star \prod_{i=1}^N \bar{a}_{ik_i} \bar{\varphi}_{ik_i}(x_i) U_i(x_i) dx_1 \dots dx_N \\
&\quad + \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_N}^{b_N} \left[\prod_{i=1}^N \sum_{k_i=1}^n \right] \star \left[\prod_{m=1}^N \sum_{k_m=1}^n \right] \star \prod_{i=1}^N \bar{a}_{ik_i} a_{ik_m} \bar{\varphi}_{ik_i}(x_i) \varphi_{ik_m}(x_i) dx_1 \dots dx_N \\
&= \int_B |\vec{U}(\vec{r})|^2 d\vec{r} - \left[\prod_{i=1}^N \sum_{k_i=1}^n \right] \star \left\{ \prod_{i=1}^N \bar{a}_{ik_i} \int_{a_i}^{b_i} \bar{U}_i(x_i) \varphi_{ik_i}(x_i) dx_i \right. \\
&\quad \left. + \prod_{i=1}^N \bar{a}_{ik_i} \int_{a_i}^{b_i} \bar{\varphi}_{ik_i}(x_i) U_i(x_i) dx_i \right\} \\
&\quad + \left[\prod_{i=1}^N \sum_{k_i=1}^n \right] \star \left[\prod_{m=1}^N \sum_{k_m=1}^n \right] \star \left\{ \prod_{i=1}^N \bar{a}_{ik_i} a_{ik_m} \int_{a_i}^{b_i} \bar{\varphi}_{ik_i}(x_i) \varphi_{ik_m}(x_i) dx_i \right\}
\end{aligned}$$

dir. Fakat son terimdeki integralin değeri diklik bağıntısından dolayı sadece $\delta_{k_i k_m}$ dir. Bu yüzden,

$$\begin{aligned}
&\left[\prod_{i=1}^N \sum_{k_i=1}^n \right] \star \left[\prod_{m=1}^N \sum_{k_m=1}^n \right] \star \prod_{i=1}^N \bar{a}_{ik_i} a_{ik_m} \delta_{k_i k_m} \\
&= \left[\prod_{i=1}^N \sum_{k_i=1}^n \right] \star \prod_{i=1}^N \bar{a}_{ik_i} a_{ik_i}
\end{aligned}$$

olur. Son ifadeyi gözönüne alırsak,

$$M_n = (U, U) - \left[\prod_{i=1}^N \sum_{k_i=1}^n \right] \star \left\{ \prod_{i=1}^N a_{ik_i}(U_i, \varphi_{ik_i}) + \prod_{i=1}^N \bar{a}_{ik_i}(\varphi_{ik_i}, U_i) - \prod_{i=1}^N \bar{a}_{ik_i} a_{ik_i} \right\} \quad (3.39)$$

yazılır. M_n nin minimum olabilmesi için açılım katsayıları,

$$\frac{\partial M_n}{\partial a_{ik_i}} = 0 \text{ ve } \frac{\partial M_n}{\partial \bar{a}_{ik_i}} = 0$$

şartlarını gerçeklemelidirler. İlk şart,

$$- \frac{\prod_{i=1}^N a_{ik_i}(U_i, \varphi_{ik_i})}{a_{ik_i}} + \frac{\prod_{i=1}^N \bar{a}_{ik_i} a_{ik_i}}{a_{ik_i}} = 0$$

şeklinde yazılabilir. Yahut da

$$\prod_{i=1}^N a_{ik_i}(U_i, \varphi_{ik_i}) = \prod_{i=1}^N \bar{a}_{ik_i} a_{ik_i} \quad (3.40)$$

biçiminde ifade edilebilir. Benzer şekilde ikinci şarttan da

$$\prod_{i=1}^N \bar{a}_{ik_i}(\varphi_{ik_i}, U_i) = \prod_{i=1}^N \bar{a}_{ik_i} a_{ik_i} \quad (3.41)$$

elde edilir. Buna bağlı olarak (3.40) ve (3.41)'i (3.39) da yerine yazarsak tanımdan dolayı $M_n \geq 0$ olduğundan,

$$\text{Min}(M_n) = (U, U) - \left[\prod_{i=1}^N \sum_{k_i=1}^n \right] \star \prod_{i=1}^N |a_{ik_i}|^2 \geq 0 \quad (3.42)$$

bulunur . (3.42) Bessel eşitsizliğinin genel halidir.

Eğer $n \rightarrow \infty$ için $\text{Min}(M_n) \rightarrow 0$ ise limitte

$$(U, U) = \left[\prod_{i=1}^N \sum_{k_i=1}^{\infty} \right] \star \prod_{i=1}^N |a_{ik_i}|^2 \quad (3.43)$$

olur ki bu da Parseval eşitliğinin veya tamlık bağıntısının genel şeklini oluşturur. (3.40) ve (3.41) bağıntıları,

$$a_{ik_i} = (\varphi_{ik_i}, U_i) = \int_{a_i}^{b_i} \bar{\varphi}_{ik_i}(x_i) U_i(x_i) dx_i \quad (3.44)$$

$$\bar{a}_{ik_i} = (U_i, \varphi_{ik_i}) = \int_{a_i}^{b_i} \bar{U}_i(x_i) \varphi_{ik_i}(x_i) dx_i \quad (3.45)$$

olduğunu gösterir. Buda a_{ik_i} katsayılarının $U_i(x_i)$ nin

$$U_i(x_i) = \sum_{k_i=1}^{\infty} a_{ik_i} \varphi_{ik_i}(x_i) \quad (3.46)$$

şeklindeki bir açılımın katsayıları olduğunu ifade eder.

O halde $n \rightarrow \infty$ için $U(x_1, x_2, \dots, x_N)$ de

$$U(\vec{r}) = U(x_1, x_2, \dots, x_N) = \left[\prod_{i=1}^N \sum_{k_i=1}^{\infty} \right] \star \prod_{i=1}^N a_{ik_i} \varphi_{ik_i}(x_i) \quad (3.47)$$

ifadesiyle verilecektir. Eğer,

$$\begin{aligned} \psi_{k_1 k_2 \dots k_N}(\vec{r}) &= \psi_{k_1 k_2 \dots k_N}(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ &= \prod_{i=1}^N \varphi_{ik_i}(x_i) = \varphi_{1k_1}(x_1) \varphi_{2k_2}(x_2) \dots \varphi_{Nk_N}(x_N) \end{aligned} \quad (3.48)$$

kabul edersek,

$$U(\vec{r}) = \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \dots \sum_{k_N=1}^{\infty} a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{Nk_N} \psi_{k_1 k_2 \dots k_N}(\vec{r}) \quad (3.49)$$

olur. Örneğin,

$$U\left(\pm \frac{A}{2}, x_2, x_3\right) = U\left(x_1, \pm \frac{B}{2}, x_3\right) = U\left(x_1, x_2, \pm \frac{C}{2}\right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)_{x_1=0} = 0 \quad \left(\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)_{x_2=0} = 0 \quad \left(\frac{\partial U}{\partial x_3}\right)_{x_3=0} = 0$$

şartları altında,

$$\frac{\partial^2 U(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3^2} + \lambda U(x_1, x_2, x_3) = 0$$

denklemini gerçekleyen $U(x_1, x_2, x_3)$ fonksiyonunun

$$U(x_1, x_2, x_3) = u_1(x_1) u_2(x_2) u_3(x_3)$$

değişken ayırışımı sonucunda ve $\lambda = \alpha + \beta + \gamma$ olmak üzere elde edilen,

$$\frac{d^2 U_1}{dx_1^2} + \alpha U_1 = 0, \quad \frac{d^2 U_2}{dx_2^2} + \beta U_2 = 0, \quad \frac{d^2 U_3}{dx_3^2} + \gamma U_3 = 0$$

ın özfonksiyonları cinsinden ve (3.32) ifadesine uygun olarak

$$U(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \sum_{k_3=1}^{\infty} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} \cos \frac{(2k_1+1)\pi x_1}{A} \\ \times \cos \frac{(2k_2+1)\pi x_2}{B} \times \cos \frac{(2k_3+1)\pi x_3}{C}$$

şeklinde bir seri ile temsil edildiği görülür.

Üçüncü bölümün sonucunu derli toplu olarak şu şekilde ifade edebiliriz.

N boyutlu uzayda yazılmış olan (3.21) Helmholtz denkleminin ortonormal fonksiyon aileleri yardımıyla sonsuz bir seri şeklindeki çözümü, bu denklemi

$$U(\vec{r}) = U(x_1, x_2, \dots, x_N) = \prod_{i=1}^N U_i(x_i)$$

değişken ayrışımıyla N tane

$$\frac{d}{dx_i} \left[P_i(x_i) \frac{du_i}{dx_i} \right] + Q_i(x_i) u_i(x_i) + \lambda_i R_i(x_i) u_i(x_i) = 0$$

gibi Sturm-Liouville denkleminde parçaladıktan sonra,

$u_{ik_i}(x_i)$ bu denklemin λ_{ik_i} özdeğerine karşılık gelen öz-fonksiyonu olmak üzere ve

$$(\varphi_{im}, \varphi_{in}) = \delta_{mn}$$

olacak şekilde

$$\varphi_{ik_i}(x_i) = \sqrt{\frac{R_i(x_i)}{\gamma}} u_{ik_i}(x_i)$$

kabul edilmek suretiyle elde edilen ve katsayılarıda

$$a_{ik_i} = (\varphi_{ik_i}, u_i)$$

bağıntılarıyla verilen

$$U_i(x_i) = \sum_{k_i=1}^{\infty} a_{ik_i} \varphi_{ik_i}(x_i)$$

şeklindeki açılımların fonksiyonu olarak,

$$U(\vec{r}) = u(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \dots \sum_{k_N=1}^{\infty} a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{Nk_N}$$

$$\times \varphi_{1k_1}(x_1) \varphi_{2k_2}(x_2) \dots \varphi_{Nk_N}(x_N)$$

açılımıyla elde edilir [10].

BÖLÜM 4

STURM-LIOUVILLE DENKLEMİNİN HOMOGEN OLMAYAN BİR DİFERENSİYEL DENKLEM İÇEREN SINIR DEĞER PROBLEMİNE UYGULAMASI

4.1. PROBLEMİN VARLIĞI

Homogen sınır şartlarını sağlayan homogen olmayan diferensiyel denklemlerin çözümünün varlığının araştırılması bizi bir Sturm-Liouville problemine götürebilmektedir. Bu nedenle Λ bir sabit olmak üzere

$$\left[\frac{d}{dx} \left(p \frac{dy}{dx} \right) + qy \right] + \Lambda y = h(x) \quad (4.1)$$

denklemini gözönüne alalım.

$$L = \frac{d}{dx} \left(p \frac{d}{dx} \right) + q = p \frac{d^2}{dx^2} + \frac{dp}{dx} \cdot \frac{d}{dx} + q \quad (4.2)$$

notasyonu kullanılarak (4.1) denklemini

$$Ly + \Lambda y = h(x) \quad (4.3)$$

şekilde yazabiliriz. Burada en önemli olan özel durum $\Lambda = 0$ olmasıdır. Bu durumda $Ly = h(x)$ denkleminin çözümünün gerekliliği ortaya çıkmaktadır. Herhangi bir durumda $r(x)$ fonksiyonu seçilebilir.

Verilen problemle,

$$Ly + \Lambda y = 0 \quad (4.4)$$

homogen diferensiyel denklemin sınır değerleri problemi-

nin sınır şartlarını belirtebiliriz. Bu problem $\{\psi_n(x)\}$ ortogonal karakteristik fonksiyonların bir cümlesini teşkil eder, öyleki n ci $\psi_n(x)$ fonksiyonu yerine λ_n karakteristik sayısı karşılık gelir ve

$$L\psi_n(x) + \lambda_n r(x)\psi_n(x) = 0 \quad (4.5)$$

denklemini verir.

(4.3) denkleminin çözümünün var olduğunu kabul edersek bunun, a_n belirlenecek sabitler olmak üzere,

$$y = \sum a_n \psi_n(x) \quad (4.6)$$

şeklinde bir seri olduğu açıktır. Bu amaç için (4.3) diferensiyel denkleminin çözümü içinde (4.6)'yı açıklamaktır. Bundan sonra (4.5) denkleminin

$$L\psi_n = -\lambda_n r\psi_n$$

durumundan dolayı (4.3) denkleminin

$$r(x) \sum (\lambda - \lambda_n) a_n \psi_n(x) = h(x) \quad (4.7)$$

biçiminde yazılabildiğini görmekteyiz. Böylece

$$A_n \int_a^b r(x) [\psi_n(x)]^2 dx = \int_a^b r(x) f(x) \psi_n(x) dx$$

ifadesinden A_n katsayısı hesap edilebilir. $\frac{h(x)}{r(x)}$ in kısmi diferensiyelenebilir olduğu farzedilerek

$$f(x) = \frac{h(x)}{r(x)} = \sum A_n \psi_n(x) \quad (4.8)$$

de yazılırsa, (4.7) ve (4.8) nin karşılaştırılmasından

$$(\Lambda - \lambda_n) a_n = A_n \quad (4.9)$$

denkleminin çözümlerine benzer şekilde a_n sabitlerinin belirlenmesi gerekir. Bu durumda sağlanan Λ , karakteristik sayılarının bir olmadığı ortaya çıkar, bu nedenle homogen olmayan probleminin (4.6) çözümü

$$y = \sum \frac{A_n}{\Lambda - \lambda_n} \psi_n(x) = \frac{A_0}{\Lambda - \lambda_0} \psi_0(x) + \frac{A_1}{\Lambda - \lambda_1} \psi_1(x) + \dots \quad (4.10)$$

haline dönüşür.

(4.7) ye götüren (4.6) nın terim terim diferensiyellenme işlemi gerçeği Sturm-Liouville problemine uygun olduğu zaman referans olarak verilebilir. (4.6) daki y fonksiyonu uygun sınır şartları ile birlikte

$$\frac{Ly}{r} = -\Lambda y + \frac{h}{r} \quad (4.11)$$

denklemini sağlar. Burada $\frac{h}{r}$ kısmi diferensiyellenebilir-
dir. Daha sonraki durumlarda karşılaşılabilecek olan istisnai durumlarda, özel bir yol takip edilmesi gerekebilir. Bunu tekrar doğrulamak mümkündür. Gerçekte (4.10) nun paydasındaki $\Lambda - \lambda_n$ faktörünün $n \rightarrow \infty$ dan dolayı büyümesi nedeniyle (4.8) serisi olmasa bile (4.10) nun çözüm serisinin yakınsaklığı ortaya çıkar. Yukarıda istenen sonuç doğrulanmıştır. Eğer (4.1) denklemini

$$\frac{d^2}{dx^2} [s(x) \frac{dy}{dx}] + \frac{d}{dx} [p(x) \frac{dy}{dx}] + [q(x) + \lambda r(x)] = 0 \quad (4.12)$$

biçiminde 4 üncü dereceden alınır, bu durumla L operatörü

$$L = \frac{d^2}{dx^2} [s(x) \frac{d^2}{dx^2}] + \frac{d}{dx} [p(x) \frac{d}{dx}] + q(x) \quad (4.13)$$

şeklinde ifade edilerek

$$y = 0 \quad , \quad \frac{dy}{dx} = 0$$

$$y = 0 \quad , \quad s(x) \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad , \quad \frac{d}{dx} [s(x) \frac{d^2 y}{dx^2}] = 0$$

($x = a$ veya $y = b$) homogen sınır şartları ile birlikte yine bir sınır değer problemine geçilebilir.

Bu genel sonuçlardan, kesin önemli sonuçlar, problemin özel uygulamalarında görülebilir. Özel olarak $h(x)$ sıfır alınak (4.1) i içeren denklem ve homogen sınır şartların varlığı altında Λ karakteristik değeri $\Lambda = \lambda_k$ ise önemli sonuçlara gidildiği görülmektedir. (4.10) serisi göstermektedirki eğer $h(x) \neq 0$ ise buna karşılık gelen problemin genelde bir çözümü vardır. Ancak Λ homogen problemin bir karakteristik değeri olamaz. Çok özel olarak $\Lambda \rightarrow \lambda_k$ için (4.10) çözümünün varlığı zorlaşır ve çözümsüz hale gelebilir.

$$\int_a^b r(x)f(x)\psi_k(x)dx = \int_a^b h(x)\psi_k(x)dx = 0 \quad (4.14)$$

ise $h(x)$ fonksiyonu $\psi_k(x)$ e ortogonaldır. Bu özel durumda (4.9) denkleminde (4.6) daki $\psi_k(x)$ in a_n katsayı sabitlerinin keyfi olduğu söylenebilir.

Yukarıdaki çeşit problemlerin fiziksel uygulamaları olarak, dönen bir shaftın ve sicimin fiziksel problemleri ile ilgili problemlerde diferensiyel denklemini sınır ko-

şulları altında çözümünde karşımıza çıkar. Kritik olmayan dönme hızlarına ait belirli sapma ve kritik bir hızla yaklaştıkça sapmanın büyüklüğünün sınırsız olarak artacağını gösterir [6].

4.2. Stodola ve Vianello Metodu

Stodola ve Vianello metodu ard arda yapılan işlemler olarak bilinir. Genellikle, karakteristik değer ve fonksiyonların sınır değer problemlerinin yaklaşık hesaplamalarında kullanılır. Bu işlem uygulamasına ana hatlarına geçmeden önce, onun daha evvel çözümlenmiş problemlerinin genel tiplerini tanımlayalım.

İki ucu sabit eksen etrafında dönen sicim için sınır-değer problemi

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0 \quad (4.15)$$

şeklinde diferansiyel denklem meydana gelir. Bu denkleme ait sınır şartları

$$y(0) = 0 , \quad y(1) = 0 \quad (4.16)$$

biçimindedir. Karakteristik değerler,

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{1^2} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (4.17)$$

olarak bulunur. Bunlara karşılık gelen karakteristik fonksiyonlarda,

$$\psi_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{1} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (4.18)$$

biçimindedir.

Var olacak metod, ardışık yaklaşımları en küçük karakteristik değer ve buna karşılık gelen karakteristik fonksiyonlar için yaklaşık açıklamalar getiren bir metod-tur. Bu metod herhangi bir yolla değişikliğe uğradığı zaman daha yüksek modlar elde edilebilir.

(4.15) denkleminde λ yı içeren terim sağ tarafa atılırsa,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\lambda y \quad (4.19)$$

elde edilir. (4.19) un sağındaki bilinmeyen y fonksiyonu yerine daha kullanışlı olabilecek $y_1(x)$ i seçelim. Bu fonksiyon uç şartlarının gereklerine uygun olarak tercih edilir. Sonuç denklemi,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\lambda y_1(x) \quad (4.20)$$

direkt olarak çözülebilir ve iki integrasyon sabiti ile belirlenir. Öyleyse uç şartlarını gerektiren uygun çözüm bulunabilir. Şuda açıktırki çözüm λ parametresini çarpan olarak içinde bulundurur ve bu yüzden

$$y = \lambda f_1(x) \quad (4.21)$$

formunda yazılır.

Şimdi, $y_1(x)$ olarak kabul edilen fonksiyon, gerçekten problemin karakteristik fonksiyonu ise (4.21) de verilen $y_1(x)$ fonksiyonu kabul edilen $y(x)$ fonksiyonunun özdeşi olur. λ karakteristik değeri sabit bir oran olan

$$\lambda = \frac{y_1(x)}{f_1(x)}$$

ile verilir. Eğer, $y_1(x) = \sin \frac{\pi x}{1}$ alınırsa (4.20) denkleminin çözümü, $y(0) = y(1) = 0$ için

$$y(x) = \lambda \frac{1^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{1}$$

olur. $y(x) = y_1(x)$ olduğu zaman $\lambda = \frac{\pi^2}{1^2}$ alınır ve

$$\psi_n = \sin \frac{n\pi}{1} x \quad (n = 1, 2, \dots)$$

denklemleri belli bir uyum içerisinde olur.

$y_1(x)$ genel olarak bir karakteristik fonksiyon olmadığı zaman $y_1(x)$ ve $y(x)$ fonksiyonları da genelde sabit bir oran olmayacaktır. Eğer $f_1(x)$ in uygun bir çarpanı $y_1(x)$ olarak alınırsa ve işlem n-defa tekrarlandığında

$$\frac{y_n(x)}{f_n(x)}$$

oranı çevrim alanı içerisinde n arttıkça (0,1) aralığı üzerinden sabit bir değere gider. Burada en küçük karakteristik değer λ_1 dir. Neticede birbirinin ardışığı olan $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ fonksiyonlar dizisi ilgili karakteristik fonksiyona yakınsar.

λ_1 karakteristik değerlerinin ardışık yaklaşımları, (0,1) aralığı boyunca $y_n(x)$ ve $y(x) = \lambda f_n(x)$ fonksiyonlarının uygunluğunu gerektirmek suretiyle her bir çevrimden sonra elde edilir.

Özellikle, (0,1) aralığı boyunca integral alınması λ nın belirlenmesi için yeterlidir. Buda n-inci yaklaşımdan

$$\lambda_1^{(n)} = \frac{\int_0^1 y_n(x) dx}{\int_0^1 f_n(x) dx} \quad (4.22)$$

şeklinde yazılır. Şimdi problemde bu işlemi tanımlamak için, $y(0) = y(1) = 0$ uç şartlarını sağlayan fonksiyonu

$$y_1(x) = x(1 - x)$$

olarak seçelim. Eğer, y , $y_1(x)$ ile (4.19) da yer değiştirilirse sonuçlar,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \lambda(x^2 - 1x)$$

ve denklemin çözümü uç şartlarına uygun olarak direkt integral alınarak hesaplanabilir. Yani

$$y = \frac{\lambda}{12} (x^4 - 21x^3 + 13x) \equiv \lambda f_1(x)$$

biçimindedir. Eğer, $(0,1)$ aralığı boyunca $y_1(x)$ ve $y(x) = \lambda f_1(x)$ in integralleri eşit ise,

$$\lambda_1^{(1)} = \frac{10}{1^2}$$

bulunur.

$$\lambda_1^{(1)} = \frac{\pi^2}{1^2}$$

eşitliğinden

$$\frac{\pi^2}{1^2} = \frac{9.870}{1^2}$$

eşitliğinin gerçek değeri ile yapılan karşılaştırma hatanın yaklaşık % 1.3 olduğunu gösterir.

Şimdide,

$$y_2(x) = x^4 - 21x^3 + 1^3x$$

eşitliğini gelecek çevrimin ilk yaklaşım olarak alırsak,

$$y = \lambda f_2(x) = -\frac{\lambda}{30} (x^6 - 31x^5 + 51^3x^3 - 31^5)$$

sonucunu buluruz. (4.22) denklemi λ_1 in ikinci yaklaşımını verir. (4.22) de yerine konulursa

$$\lambda_1^{(2)} = \frac{9.882}{1^2}$$

elde edilir. Buna gerçek değerinden % 12 ile farklıdır. Problemde gösterildiği gibi bu işlem esaslı bir değişiklik olmaksızın bir dereceye kadar sınır-değer probleminin gerektirdiği şekilde uygulanır. Örneğin, uygun homogen sınır şartları ile,

$$\frac{d}{dx} [p(x) \frac{dy}{dx}] + \lambda r(x)y = 0 \quad (4.23a)$$

veya

$$\frac{d^2}{dx^2} [p(x) \frac{d^2y}{dx^2}] + \lambda r(x)y = 0 \quad (4.23b)$$

şeklinde bir diferensiyel denkleme sahip oluruz. Eğer, λ yı ihtiva eden terim sağ tarafa alınırsa ve y çarpanı uygun bir $y_1(x)$ ile yer değiştirirse, diferensiyel denklemin sonucu yeni formdaki $y = \lambda f_1(x)$ fonksiyonu için direkt olarak integralle çözülebilir ve kalan işlem ana hatlarıyla direkt olarak uygulanabilir.

λ yaklaşımlarının belirlenebilmesi için (4.22) denkleminin kullanılması yerine aşağıdaki formüllerin

herbiri tercih edilebilir.

$$\lambda_1^{(n)} = \frac{\int_a^b r(x) [y_n(x)]^2 dx}{\int_a^b r(x) f_n(x) y_n(x) dx} \quad (4.24a)$$

$$\lambda_1^{(n)} = \frac{\int_a^b r(x) f_n(x) y_n(x) dx}{\int_a^b r(x) [f_n(x)]^2 dx} \quad (4.24b)$$

Herbir formül λ_1 in gerçek değerine daha iyi bir yaklaşım verir. (4.24b) eşitliği genelde daha doğru olarak bilinir. Tanımlamada, işlemsel örnekler içerisinde $l^2 \lambda_1$ in tanımlanması için bu üç formülün kullanılış sonuçları listelenebilir.

Daha ileri safhada bir örnek olarak, l uzunluklu bir kolonun Euler yükünü araştırabiliriz. Bu şekilde inşa edilmiş bir kolonun eğilme rijitlik faktörü olan EI

$$EI(x) = C \frac{x}{l}$$

formundadır. Burada C, $x = l$ ucundaki maksimum rijitlik faktörünü ifade eder. Kolonun her iki ucunda hareketli olduğunu düşünürsek, rijitlik momenti $M(x)$, x-eksenindeki P yüküne bağlıdır ve

$$M = -Py(x)$$

olarak verilir.

$$M = EI \frac{d^2 y}{dx^2}$$

denkleminde,

$$C \frac{x}{l} \frac{d^2 y}{dx^2} + P y(x) = 0 \quad (4.25)$$

boyutsuz parametre olarak

$$\mu^2 = \frac{P l^2}{C} \quad (4.26)$$

alınırsa (4.25) denklemi

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\mu^2}{l} y(x) = 0 \quad (4.27)$$

biçiminde yazabiliriz. Sınır şartları, $y(0) = 0$, $y(l) = 0$ formundadır ve (4.27) nin genel çözümü

$$y = \sqrt{x} z_1 \left(2\mu \sqrt{\frac{x}{l}} \right)$$

veya

$$y = C_1 \sqrt{x} J_1 \left(2\mu \sqrt{\frac{x}{l}} \right) + C_2 \sqrt{x} Y_1 \left(2\mu \sqrt{\frac{x}{l}} \right)$$

şeklindedir. x in küçük değerleri için,

$$\sqrt{x} J_1 \left(2\mu \sqrt{\frac{x}{l}} \right) \sim \frac{\mu}{\sqrt{l}} x, \quad \sqrt{x} Y_1 \left(2\mu \sqrt{\frac{x}{l}} \right) \sim -\frac{\sqrt{l}}{\pi \mu},$$

dir. $y(0) = 0$ şartından dolayı $C_2 = 0$ dır ve kalan şart olarakta μ nün $J_1(2\mu) = 0$ denkleminin bir çözümü olması için $y(l) = 0$ olması gerekir. Denklemin en küçük pozitif kökünün yaklaşık değeri $\mu_1 = 1.916$ dır. Euler yükü (4.26) den,

$$P_1 = \mu_1^2 \frac{C}{l^2}$$

$$P_1 = 3.670 \frac{C}{l^2}$$

olarak bulunur ve gerçek bükülme modu

$$\psi(x) = \sqrt{x} J_1 \left(3.832 \sqrt{\frac{x}{l}} \right)$$

şeklinde ifade edilir. μ nün yaklaşık değerini bulmak için ilk yaklaşım fonksiyonu olan $y_1(x) = x(1 - x)$ ve (4.27) denkleminde,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\mu^2}{1} (x - 1) \quad (4.28)$$

yazılır. (4.28) denkleminin çözümü sonucunda

$$y = \frac{\mu^2}{61} (x^3 - 31x^2 + 21^2x) \equiv \mu^2 f_1(x)$$

bulunur. Şart,

$$\int_0^1 y_1(x) dx = \mu^2 \int_0^1 f_1(x) dx$$

yaklaşımını verir ve

$$\mu_1^{(1)} = 2$$

elde edilir. Buda,

$$P_1^{(1)} = 4 \cdot \frac{C}{1^2}$$

eşitliğini verir. Euler yükü için ikinci yaklaşım

$$\mu_1^{(2)} = 1.936$$

$$P_1^{(2)} = 3.748096 \frac{C}{1^2}$$

$$P_1^{(2)} = 3.750 \frac{C}{1^2}$$

sonucunu verir. Eğer şart,

$$\int_0^1 r(x) [y_n(x)]^2 dx = \mu^2 \int_0^1 r(x) f_n(x) y_n(x) dx$$

ve

$$r(x) = \frac{1}{x}$$

eşitlikleri (4.24a) nın yerine karşılık gelirse, μ_1 in yaklaşımlarında

$$\mu_1^{(1)} = 1.936$$

ve

$$\mu_1^{(2)} = 1.917$$

değerleri elde edilir [6].



KAYNAKLAR

- 1- Hacısalihoğlu, H.H., Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları Mat. No.2, 1983.
- 2- Yaşar, İ.B., Diferensiyel Denklemler, Gazi Üniversitesi Yayın No:89, Ankara, 1987.
- 3- Spiegel, R.M., Laplace Transformation, Rensselaer Polytechnic Institute Ocak, 1965.
- 4- Spiegel, R.M., Advanced Calculus, Great Britain, 1963.
- 5- Wylie, C.R., Barrett, C.L., Advanced Engineering Mathematics, 2nd.ed, Mc Graw-Hill, Inc., Singapare, 1965.
- 6- Hildebrand, F.B., Advanced Calculus for Applications, 2nd.ed, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1976.
- 7- Churchill, V.R., Brown, W.J., Fourier Series and Baunday Value Problems, Mc Graw-Hill 8th Printing, 1985.
- 8- Koçer, M., Bessel Fonksiyonları ve Fourier-Bessel Açınımı, Doktora tezi, İstanbul, 1974.
- 9- E.C.Titchmarsh., Introduction to the theory of Fourier Integrals, Oxford University Press, Amen House, London, 1962.
- 10- Özemre, A.Y., Fizikte Matematik Metotlar, İstanbul Teknik Üniversitesi Sayı: 826, İstanbul, 1971.
- 11- Çelebi, O., Erkif, A., Asral, B., Tubitak Yaz Okulu Ders Notları, Gebze, 1985.

ÖZGEÇMİŞ

Mustafa YILDIZ, 16.10.1956 yılında Zonguldak'ta doğdu. 1974'de Zonguldak Kilimli Lisesinden mezun oldu. 1979'da Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünü bitirdi. 1980-1984 yılları arasında Zonguldak Mehmet Çelikel Lisesinde Matematik Öğretmenliği yaptı. Vatani görevini Manisa'da tamamladıktan sonra 1984 yılı Kasım ayında H.Ü. Zonguldak Mühendislik Fakültesine Uzman olarak atandı. 1988'de Öğretim Görevlisi olup, halen bu görevi sürdürmektedir.