

ÖZET

FRAKTAL GEOMETRİ ve UYGULAMALARI

Bu çalışmada yirminci yüzyılın başlarında matematik literatürüne önceleri tesadüfi veya kaotik olduğu iddiasıyla göz ardı edilen fakat günümüzde gerek fiziksel gerek biyolojik fenomenlerdeki düzenin ortaya koyduğunun açıklanmasıyla giderek artan bir öneme sahip olmaya başlayan ve fraktallar olarak adlandırılan, Öklid uzayında tanımlanan bazı kümeler ve kümelerin özellikleri incelenecektir. Bu nokta kümelerinin şekillerde olduğu gibi insanı etkileyen birer yapıya sahip oldukları ve bu nedenle son yıllarda önemle ele alındıkları görülmektedir. Özellikle farklı bir boyut kavramı ile yepyeni bir geometriye konu olan fraktallar için çalışmanın ikinci bölümünde matematiksel anlamda temel kavramlar verilecek, çalışmanın üçüncü bölümünde ise fraktal kümelerin bulunduğu uzay kurulacak, çalışmanın dördüncü bölümünde fraktalların özellikleri ve kaos hakkında bilgi verilecek, çalışmanın beşinci bölümünde ise Fraktal Boyutun teorik ve uygulamalı hesaplamaları yapılacak, altıncı bölümde ise fraktallar ve doğadaki uygulamalarına örnekler verilecektir.

ANAHTAR KELİMELEER: Fraktal, Fraktal Boyut, Kompakt, İterasyon

ABSTRACT

FRACTAL GEOMETRY and APPLICATIONS

In this study, some quaternions in the Euclidean space and the proprieties of these quaternions named as fractals and gaining importance with the explanations put forward by both physical and biological phenomena today. These fractals were neglected in early 20th century in mathematics literature, claimed to have been coincidental and chaotic. It has been found out that these quaternions of dots has a nature infwencing people like shapes, so they are given great importance in recent years. For the fractals being subject to a brand-new geometry with a different dimentional concept; basic concepts in mathematical sense will be given in Chapter II, the space where the fractal quaternions dwell will be set up in Chapter III, information about the proprieties of fractals and chaos will be given in Chapter IV, theorical and practical calculations of Fractal Dimension will be performed in Chapter V and finally examples regarding fractals and their applications in nature will be given in Chapter VI.

KEY WORDS : Fractal, Fractal Dimension, Compact, Iteration

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
TEZ JÜRİSİ VE ENSTİTÜ ONAYI.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	2
3. FRAKTAL UZAYI.....	23
4. FRAKTALLAR.....	38
4.1 Fraktal Geometri Nerede Kullanılır?.....	39
4.2 Fraktal Geometrinin Özellikleri ve Klasik Geometri.....	39
4.3 Fraktal Algoritmalar.....	40
4.3.1 Deterministik Fraktallar.....	40
4.3.2 Rastgele Fraktallar.....	41
5. KENDİNE BENZERLİK ve FRAKTAL BOYUT.....	44
5.1 Kendine Benzerlik.....	44
5.1.1 Tam Kendine Benzerlik.....	44
5.1.2 İstatistiksel Kendine Benzerlik.....	44
5.2 Topolojik Boyut.....	45
5.3 Fraktal Boyut.....	46
5.4 Fraktalların Geometrik Modelleri.....	49
5.5 Fraktal Boyutun Teorik Olarak Hesaplanması.....	52
5.6 Kutu Sayma (Box Counting) Teoremi.....	53
5.7 Hausdorff Boyutu ve Fraktal Boyut.....	53

6. FRAKTAL GEOMETRİ UYGULAMALARI.....	56
6.1 Von Koch Eğrisi.....	56
6.2 Ters Kar Tanesi.....	58
6.3 Sierpinski Üçgeni.....	59
6.4 Paskal Üçgeni ve Sierpinski Üçgeni Arasındaki İlişki.....	60
6.5 Sierpinski Halısı.....	61
6.6 Cantor Orta Üçlülere Kümesi.....	62
6.7 İnsan Vücudu.....	63
6.7.1 Akciğerler.....	63
6.7.2 Akciğerlerdeki Gözeler (Alveol).....	64
6.7.3 Kan Damarları.....	65
6.7.4 Beyin.....	65
6.8 Bitkiler.....	66
6.8.1 L-Sistemleri.....	66
6.8.2 Pisagor Ağacı.....	66
6.9 Bulutun Fraktal Boyutunun Hesaplanması.....	70
KAYNAKLAR.....	73
TEŞEKKÜR	
ÖZGEÇMİŞ	

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$B(x, r)$	x merkezli r yarıçaplı açık yuvar
$\bar{B}(x, r)$	x merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar
$S(x, r)$	x merkezli r yarıçaplı yuvar yüzeyi
$\mathcal{T}_d$	(X, d) metrik uzayının bütün açık alt kümelerinin ailesi
A_d	Geometrik çarpan
ρ	Parçacık yoğunluğu
D	Fraktal Boyut
D_T	Topolojik Boyut
b_H	Hausdorff Boyutu
$\aleph_0$	Sayılabılır sonsuzluğun kardinal sayısı (alef sıfır)
$d \sim p$	d metriği denk p metriğine
$\{a_n\}$	Genel terimi a_n olan dizi
$P(X)$	X kümesinin alt kümelerinin ailesi, kuvvet kümesi
$ A $	A kümesinin kardinal sayısı
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$	Aileler
$\inf A$	A 'nın infimumu
$\sup A$	A 'nın supremumu
$\mathbb{R}^\infty$	Sonsuz boyutlu öklid uzayı
(X, d)	X kümesi ve d metriğinin oluşturduğu metrik uzay
$d(x, y)$	d metriğine göre x ve y noktaları arasındaki uzaklık
$(X, \mathcal{T})$	X kümesi ve $\mathcal{T}$ topolojisinin oluşturduğu topolojik uzay
$\bigcup \mathcal{A}$	$\mathcal{A}$ ailesinin birleşimi
$A, B, \dots, X, Y, \dots$	Kümeler

KISALTMALAR DİZİNİ

Kısaltmalar	Açıklama
IFS	Yinelenmiş Fonksiyon Sistemi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil		Sayfa
5.1	Doğru Parçası ve Kendine Benzer Şekiller..	46
5.2	Kare ve Kendine Benzer Şekiller.....	46
5.3	Küp ve Kendine Benzer Şekiller.....	47
5.4	Koch Eğrisi ve Kendine Benzer Şekiller.....	47
5.5	Von Koch Eğrisi.....	49
5.6	Cantor Tozu.....	51
6.1	Von Koch Eğrisi.....	56
6.2	Ters Kar Tanesi.....	58
6.3	Ters Kar Tanesi.....	58
6.4	Sierpinski Piramiti.....	59
6.5	Sierpinski Üçgeni.....	59
6.6	Paskal Üçgeni.....	60
6.7	Paskal Üçgeni ve Sierpinski Üçgeni.....	60
6.8	Sierpinski Halısı.....	61
6.9	Menger Süngeri.....	61
6.10	Cantor Orta Üçlülükleri Kümesi.....	62
6.11	Küçülen Kutularla Cantor Kümesi.....	62
6.12	Akciğerler.....	64
6.13	Akciğerler ve Alveoller.....	64
6.14	Kılcal Damarlar.....	65
6.15	İnsan Beyni ve Kıvrımlar.....	65
6.16	Pisagor Ağacı.....	66
6.17	Bitki Fraktalları.....	67
6.18	Karalahana Bitkisi.....	67
6.19	Eğretili Otu.....	67
6.20	Doğru Parçası.....	68
6.21	Kare.....	68
6.22	Küp.....	68

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge	Sayfa
Grafik 2.1 $x = (x_1, x_2)$ noktası birinci bölgede olduğunda grafik	3
Grafik 2.2 $x = (x_1, x_2)$ noktası ikinci bölgede olduğunda grafik	4
Grafik 2.3 $x = (x_1, x_2)$ noktası birinci bölgede olduğunda grafik	4
Grafik 2.4 $\mathbb{R}^3$ içinde $B(x, r)$	4
Grafik 6.1 Doğrunun eğimi ve fraktal boyut	72
Çizelge 6.1 Boyutu tamsayı olan şekillerde boyut, kopya sayısı ilişkisi	69
Çizelge 6.2 Boyutu tamsayı olmayan şekillerde boyut, kopya sayısı	70
Çizelge 6.3 ε değerine karşı gelen çember sayısının gösterimi	70
Çizelge 6.4 Çizelge 6.3'te bulunan verilerin logaritmaları	71

1. GİRİŞ

İlk matematiksel fraktal kavramı 1861 de keşfedildi. Karl Weierstrass sürekli fakat hiçbir noktada diferensiyellenebilir olmayan, yani köşe noktalarından oluşan bir eğri üzerindeki değişimleri araştırırken, hiçbir noktada değişim oranının bulunamayacağını görmüştür. Fraktal kelimesini Weierstrass bu cins eğriler için ilk defa kullanmıştır. Doğadaki pek çok yapı düzensiz ve parçalı bir görünüme sahiptir. Doğa bu açıdan yüksek seviyeli ve oldukça farklı bir karmaşa gösterir. Bazı fraktal kümeleri eğriler ve yüzeyler biçimindeyken bir kısımda bağlantısız tozlar halindedir. Matematik alanında ilk çalışılan fraktal, Cantor Kümesidir. Cantor (1845-1918) matematiğin temel konularından olan ve günümüzde Küme Teorisi olarak adlandırılan alanı kuran bir Alman matematikçidir.

Cantor kümesi ile ilgili ilk çalışma 1883 de basıldı [G. Cantor, Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten V, Mathematische Annalen 21 (1883) 545-591] ve yapılan bu çalışma bazı özel kümeler için örnek olarak gösterilmiştir. Cantor kümesi hiçbir yerde yoğun olmayan, mükemmel (perfect) alt kümelere bir örnektir. Fraktalların tarihi gelişiminde Cantor, Sierpinski, Von Koch, Peano gibi matematikçiler tarafından oluşturulan fraktallar matematiksel canavarlar olarak adlandırılır. İlk fraktalların ortaya çıktığı zamanlarda Cantor kümesi görünüş açısından diğerlerinden daha az gösterişli olmasına ve diğerlerine göre doğal yoruma daha uzak olmasına rağmen oldukça önemlidir. Cantor kümesinin, matematiğin pek çok alanında özellikle Kaotik Dinamik Sistemlerde önemli rol oynadığı ve pek çok fraktallar için de gerekli bir model olduğu görülmektedir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmaya esas olan tanım ve teoremler verilmiştir. Fraktal geometride çeşitli basit geometrik yapıdaki uzayların alt kümeleri ile ilgilenilmiş ve bu uzay X şeklinde ifade edilmiştir. Uzay fraktallerin çizelebileceğinin düşünüldüğü bir uzaydır. Fraktal nedir? Bu durumda sadece bir uzayın alt kümesidir. Uzay basit bir uzay olmasına rağmen, fraktal alt kümesi geometrik olarak, karmaşık bir yapıda olabilir.

Tanım 2.1 : X boş olmayan bir küme olsun. Bu küme üzerinde reel değerli, negatif olmayan bir $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu için

M1. Her $x, y \in X$ için $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M2. Her $x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$

M3. Her $x, y, z \in X$ için $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ üçgen eşitsizliği, önermeleri doğru ise d fonksiyonuna X kümesi üzerinde metrik denir. (X, d) ikilisine metrik uzay adı verilir.

Yukardaki önermelerin sonucu olarak her $x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$ olduğu gösterilebilir. *M3* önermesine göre $x = z$ alınırsa

$$d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x)$$

$$0 \leq d(x, y) + d(x, y)$$

$$0 \leq 2.d(x, y)$$

sonucu elde edilir. Her $x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$ bulunur.

Tanım 2.2 : Bir (X, d) metrik uzayı ile $x \in X$ ve $r > 0$ sayısı alınsın.

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

kümesine x merkezli r yarıçaplı açık yuvar denir.

$$\bar{B}(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$$

kümesine x merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar denir ve

$$S(x, r) = \{y \in X : d(x, y) = r\}$$

kümesine x merkezli r yarıçaplı yuvar yüzeyi denir, (Kılıç ve Erdem 1999).

Örnek 2.1 : $\mathbb{R}$ üzerinde $d_1(x, y) = |x - y|$ metriği ile $\bar{B}(x, r) = [x - r, x + r]$, $B(x, r) = (x - r, x + r)$ ve $S(x, r) = \{x - r, x + r\}$ olur.

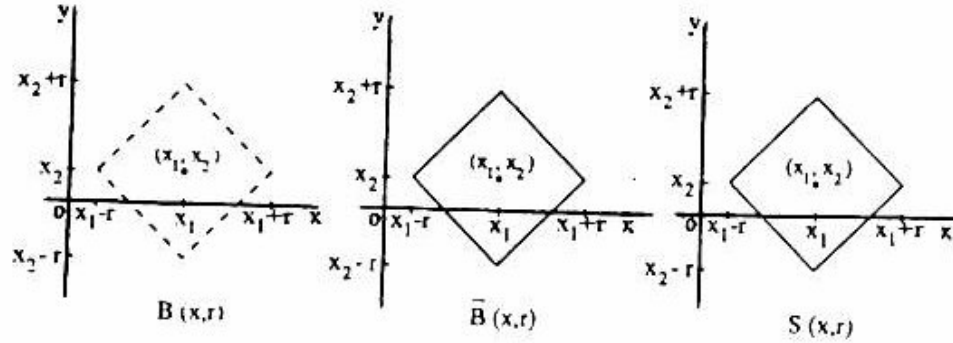
Örnek 2.2 : $\mathbb{R}^2$ üzerindeki $d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ metriğine göre;

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| < r\}$$

$$\bar{B}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \leq r\}$$

$$S(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = r\}$$

olur. Eğer $x = (x_1, x_2)$ noktası birinci bölgede ve $r < \min\{x_1, x_2\}$ ise grafikleri aşağıdaki gibidir



Grafik 2.1: $x = (x_1, x_2)$ noktası birinci bölgede olduğunda grafik

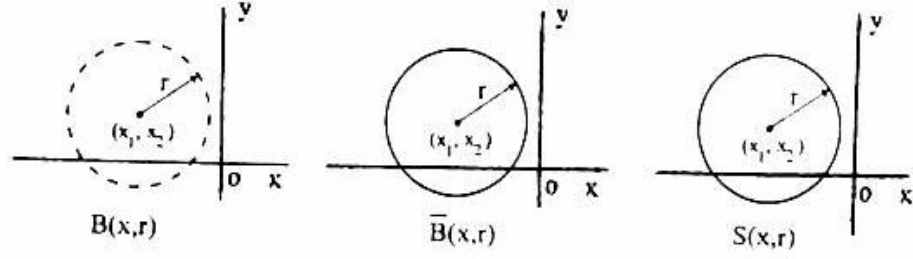
Örnek 2.3 : $\mathbb{R}^2$ üzerindeki d_2 metriğine göre;

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 < r^2\}$$

$$\bar{B}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \leq r^2\}$$

$$S(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = r^2\}$$

olur. Eğer $x = (x_1, x_2)$ noktası ikinci bölgede ve $x_2 < r < |x_1|$ ise grafikleri aşağıdaki gibidir.



Grafik 2.2 : $x = (x_1, x_2)$ noktası ikinci bölgede olduğunda grafik

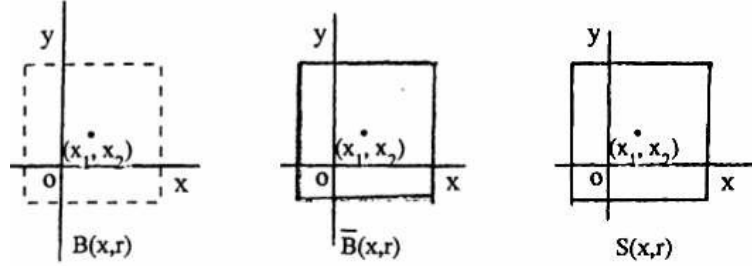
Örnek 2.4 : $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ metrik uzayında

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : |x_1 - y_1| < r \text{ ve } |x_2 - y_2| < r\}$$

$$\bar{B}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : |x_1 - y_1| \leq r \text{ ve } |x_2 - y_2| \leq r\}$$

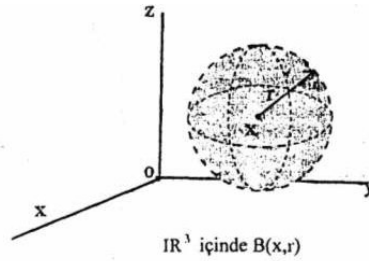
$$S(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : |x_1 - y_1| = r \text{ ve } |x_2 - y_2| = r\}$$

olur. Eğer $x = (x_1, x_2)$ noktası birinci bölgede ise grafikleri aşağıdaki gibidir.



Grafik 2.3 : $x = (x_1, x_2)$ noktası birinci bölgede olduğunda grafik

Örnek 2.5 : $(\mathbb{R}^3, d_2)$ metrik uzayında $B(x, r)$ açık yuvarı $x = (x_1, x_2, x_3)$ merkezli r yarıçaplı kürenin içi, $\bar{B}(x, r)$ kapalı yuvarı x merkezli r yarıçaplı küre ve $S(x, r)$ ise x merkezli r yarıçaplı kürenin yüzeyidir.



Grafik 2.4 $\mathbb{R}^3$ içinde $B(x, r)$

Tanım 2.3 : Bir (X, d) metrik uzayı ile (X, d) metrik uzayının boş olmayan S alt kümesi verilsin. Eğer her $x \in S$ için

$$B(x, r_x) \subset S$$

olacak biçimde bir $0 < r_x$ sayısı varsa S kümesine (X, d) metrik uzayında açık küme ya da d -açık küme denir, (Kılıç ve Erdem 1999).

Teorem 2.1 : Bir (X, d) metrik uzayında X ve ϕ açık birer kümedir, (Kılıç ve Erdem 1999).

İspat : X kümesinin açık olduğu her $x \in X$ ve her $r > 0$ için $B(x, r) \subset X$ olduğundan hemen söylenir. ϕ kümesinin açık olduğunu görebilmek için bir $x \in \phi$ ve $r > 0$ sayısı alınsın. ϕ küme içinde böyle bir x noktası var olmadığından $B(x, r) = \phi \subset \phi$ olur. Bu da ϕ kümesinin açık olduğunu verir.

Teorem 2.2 : Bir (X, d) metrik uzayında her bir açık yuvar açık bir kümedir, (Kılıç ve Erdem 1999).

İspat : (X, d) metrik uzayının bir açık yuvarı $B(x_0, r_0)$ ve $x \in B(x_0, r_0)$ olsun. $d(x_0, x) < r_0$ olduğundan, $r_x = r_0 - d(x_0, x)$ denirse $r_x > 0$ olur. Buradan $B(x, r_x) \subset B(x_0, r_0)$ olduğu görülür.

Teorem 2.3 : (X, d) metrik uzayında açık iki kümenin kesişimi de açıktır, (Kılıç ve Erdem 1999).

İspat : (X, d) metrik uzayının açık iki kümesi S_1, S_2 olsun. Eğer $S_1 \cap S_2 = \phi$ ise Teorem 2.1 den, $S_1 \cap S_2$ açık olur. $S_1 \cap S_2 \neq \phi$ varsayalım ve $x \in S_1 \cap S_2$ olsun. S_1 ve S_2 açık olduğundan

$$B(x, r_1) \subset S_1 \text{ ve } B(x, r_2) \subset S_2$$

olacak biçimde $r_1 > 0$ ve $r_2 > 0$ sayıları vardır. $r_x = \min\{r_1, r_2\}$ olsun. Bu durumda,

$$B(x, r_x) \subset S_1 \cap S_2$$

olur. Bu ise Tanım 2.3 gereğince, $S_1 \cap S_2$ kümesinin açık olduğunu verir.

Teorem 2.4 : Bir (X, d) metrik uzayında sonlu sayıda açık kümenin kesişimi de açıktır, (Kılıç ve Erdem 1999).

Teorem 2.5 : Bir (X, d) metrik uzayında keyfi sayıda açık kümenin birleşimi de açıktır, (Kılıç ve Erdem 1999).

İspat : (X, d) metrik uzayına açık kümelerin bir ailesi $\{S_i : i \in I\}$ olsun.

$$S = \bigcup_{i \in I} S_i$$

denilsin ve bir $x \in S$ alınsın. Bu durumda $x \in S_{i_0}$ olan bir $S_{i_0} \in \{S_i : i \in I\}$ açık kümesi vardır. S_{i_0} açık olduğundan;

$$B(x, r_x) \subset S_{i_0} \subset S$$

olacak biçimde bir $r_x > 0$ sayısı vardır. Bu ise Tanım 2.3 gereğince, S kümesinin açık olduğunu verir.

Tanım 2.4 : Bir X kümesinin alt kümelerinin bir ailesi $\mathcal{T}$ olsun. Eğer

(T₁) $X \in \mathcal{T}$ ve $\emptyset \in \mathcal{T}$

(T₂) $\mathcal{T}$ ailesinin herhangi bir sonlu alt ailesinin kesişimi $\mathcal{T}$ içinde ve

(T₃) $\mathcal{T}$ ailesinin herhangi bir alt kümesinin birleşimi $\mathcal{T}$ içinde kalıyorsa $\mathcal{T}$ ailesine X üzerinde bir topoloji ve $(X, \mathcal{T})$ ikilisine de bir topolojik uzay denir. Bir (X, d) metrik uzayının bütün açık alt kümelerinin ailesi, $\mathcal{T}_d$ ile gösterilir, (Kılıç ve Erdem 1999).

Tanım 2.5 : Bir X kümesi üzerinde tanımlı d ve p metrikleri göz önüne alınsın. Bu metriklerin ürettiği topolojiler aynı, ya da başka bir deyişle

$$\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_p$$

ise d ve p metriklerine (topolojik olarak) denk metrikler denir ve denklik $d \sim p$ biçiminde yazılır.

Bir X kümesi üzerindeki metriklerin denkliği bağıntısı bir denklik bağıntısıdır, (Kılıç ve Erdem 1999).

Teorem 2.6 : Bir X kümesi üzerinde iki metrik d ve p olsun. d metriğinin p metriğine denk olması için gerekli ve yeterli koşul keyfi bir $x \in X$ için x merkezli her d -açık yuvarının x merkezli bir p açık yuvarını ve x merkezli her p açık yuvarının x merkezli bir d açık yuvarını içermesidir, (Kılıç ve Erdem 1999).

İspat : $d \sim p$ olsun. Tanım gereği $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_p$ olur. Keyfi bir $x \in X$ ve keyfi $r > 0$ sayısı için $B_d(x, r)$ yuvarı göz önüne alınsın.

$$B_d(x, r) \in \mathcal{T}_d = \mathcal{T}_p$$

olduğundan Tanım 2.3 gereğince;

$$B_p(x, s) \subset B_d(x, r)$$

olacak şekilde bir $s > 0$ sayısı vardır. x merkezli bir p -açık yuvarının x merkezli bir d yuvarını içerdikçe benzer biçimde gösterilebilir.

Tersine olarak, keyfi bir $x \in X$ için x merkezli her d -açık yuvarının x merkezli bir p -açık yuvarı ve x merkezli her p -açık yuvarında x merkezli bir d -açık yuvarı içerdikçe varsayalım ve $S \in \mathcal{T}_d$ alınsın. Eğer $S = \emptyset$ ise Tanım 2.4 den dolayı $S \in \mathcal{T}_p$ olur. $S \neq \emptyset$ varsayılp bir $x \in S$ alınsın.

S kümesi d -açık olduğundan

$$B_d(x, r_x) \subset S$$

olacak biçimde $r_x > 0$ sayısı ve hipotez gereğince

$$B_p(x, s_x) \subset B_d(x, r_x)$$

olacak biçimde bir $s_x > 0$ sayısı vardır. Buradan

$$B_p(x, s_x) \subset S$$

elde edilir ve S kümesinin p -açık olduğu görülür. Başka bir deyişle $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_p$ olur. $\mathcal{T}_p \subset \mathcal{T}_d$ olduğuda benzer biçimde ispatlanır.

Teorem 2.7 : Bir X kümesi üzerinde d ve p metrikleri verilmiş olsun. Eğer her $x \in X$ ve her $y \in X$ için;

$$ad(x, y) \leq p(x, y) \leq bd(x, y)$$

olacak biçimde $a > 0$ ve $b > 0$ sayıları varsa d ve p metrikleri denktir, (Kılıç ve Erdem 1999).

İspat : $x \in X$ elemanı ile bir $r > 0$ sayısı alınır

$$B_p(x, ra) \subset B_d(x, r)$$

ve

$$B_d(x, r/b) \subset B_p(x, r)$$

olduğu görüleceğinden yukarıdaki Teorem 2.6 gereğince d ve p metrikleri denk olur.

Örnek 2.6 : $1 < p < \infty$ ve her $x, y \in \mathbb{R}^n$ için;

$$d_\infty(x, y) \leq d_p(x, y) \leq d_1(x, y) \leq nd_\infty(x, y)$$

ve metriklerin denkliği bağıntısı denklik bağıntısı olduğundan $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere, $\mathbb{R}^n$ üzerindeki bütün d_p metrikleri denk metriklerdir.

Topolojik uzaylarda kompaktlık kavramı, “ $\mathbb{R}^1$ de kapalı ve sınırlı bir kümenin her örtüsünün sonlu bir alt örtüsü vardır” şeklindeki Heine-Borel Teoreminin bir soyutlaması olarak ortaya çıkmıştır. Reel Analizde, hem kapalı hemde sınırlı olan kümeler ve bu kümeler üzerinde oluşturulan bağıntı ve fonksiyonların önemli uygulama alanları bulunmaktadır. Örnek olarak, kapalı ve sınırlı kümelerde tanımlı gerçel değerli tüm sürekli fonksiyonların aynı zamanda sınırlı ve düzgün sürekli oldukları bilinmektedir. O halde bu kullanışlı kavramları, topolojik uzaylara genişletmek yerinde olacaktır, (Güney 2003).

Tanım 2.6 : $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzay $A \subset X$, $\mathcal{A} \subset P(X)$ olmak üzere, eğer $A \subset \bigcup \mathcal{A}$ ise $\mathcal{A}$ ailesine A kümesinin bir örtüsü denir. Bu örtü yalnızca açık kümelerden oluşmuşsa buna bir açık örtü denir. Bir A kümesinin bir örtüsünün bir alt ailesi A kümesi için yine bir örtü ise, bu alt aileye, bir alt örtü denir, (Güney 2003). Buna göre,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}, A \text{nın örtüsü:} & \Leftrightarrow A \subset \bigcup \mathcal{A} \Leftrightarrow [x \in A \Rightarrow (\exists B) (x \in B \in \mathcal{A})] \\ \mathcal{A}, X \text{in örtüsü:} & \Leftrightarrow X = \bigcup \mathcal{A} \Leftrightarrow [x \in X \Rightarrow (\exists B) (x \in B \in \mathcal{A})] \\ \mathcal{A}, A \text{nın açık örtüsü:} & \Leftrightarrow (\mathcal{A} \subset \mathcal{T}) (A \subset \bigcup \mathcal{A}) \\ \mathcal{A}, X \text{in açık örtüsü:} & \Leftrightarrow (\mathcal{A} \subset \mathcal{T}) (X = \bigcup \mathcal{A}) \\ \mathcal{B}, \text{alt örtü:} & \Leftrightarrow (\mathcal{A}, A \text{nın örtüsü}) (\mathcal{B} \subset \mathcal{A}) (A \subset \bigcup \mathcal{B}) \text{ 'dür.} \end{aligned}$$

Örnek 2.7 : $X = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{T} = \{\phi, X, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}, \{b, c\}\}$ ve $A = \{c, d\}$ olsun, $(X, \mathcal{T})$ uzayında, A kümesinin bazı örtüleri:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \{A\} \\ \mathcal{A}_2 &= \{\{c\}, \{d\}\} \\ \mathcal{A}_3 &= \{\{c\}, \{d\}, \{a\}\} \\ \mathcal{A}_4 &= \{\{a, c\}, \{c, d\}\} \end{aligned}$$

A nın bazı açık örtüleri:

$$\mathcal{A}_5 = \{X\}$$

$$\mathcal{A}_6 = \{\{b, c, d\}\}$$

$$\mathcal{A}_7 = \{\{b, c, d\}, X\}$$

$$\mathcal{A}_8 = \{\{a, b, c\}, \{b, c, d\}\}$$

$\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ 'ün alt örtüsüdür. $\mathcal{A}_5$ ve $\mathcal{A}_6, \mathcal{A}_7$ nin alt örtüleridir.

Tanım 2.7 : $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzay $A \subset X$ olmak üzere, eğer A nın her açık örtüsünün bir sonlu alt örtüsü varsa A 'ya $(X, \mathcal{T})$ uzayının bir kompakt alt kümesi denir. Buna göre, A nın $(X, \mathcal{T})$ de kompakt olması için gerek ve yeter şart $[(\mathcal{A} \subset \mathcal{T}) (A \subset \cup \mathcal{A}) \Rightarrow (\exists \mathcal{B} \subset \mathcal{A}) (|\mathcal{B}| < \aleph_0) (A \subset \cup \mathcal{B})]$ olmasıdır, (Güney 2003).

Tanım 2.8 : Bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayında, eğer X 'in her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa, yani, X (X 'in bir alt kümesi olarak kompakt ise), $(X, \mathcal{T})$ 'ya bir kompakt topolojik uzay denir. $(X, \mathcal{T})$ 'nun bir $(Y, \mathcal{T}_Y)$ alt uzayı eğer bir topolojik uzay olarak kompakt ise, buna $(X, \mathcal{T})$ 'nun bir kompakt alt uzayı denir, (Güney 2003).

$$(X, \mathcal{T}) \text{ kompakt} \Leftrightarrow [(\mathcal{A} \subset \mathcal{T}) (X = \cup \mathcal{A}) \Rightarrow (\exists \mathcal{B} \subset \mathcal{A}) (|\mathcal{B}| < \aleph_0) (X = \cup \mathcal{B})]$$

Tanım 2.9 : $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzay $A \subset X$ olmak üzere, eğer A daki her dizinin A 'nın bir noktasına yakınsayan bir alt dizisi varsa A kümesine $(X, \mathcal{T})$ uzayının bir dizisel kompakt (d-kompakt) alt kümesi denir, (Güney 2003).

Teorem 2.8 : Bir metrik uzayın her sonlu alt kümesi d-kompakttır, (Güney 2003)

$$((X, \mathcal{T}) \text{ topolojik uzay}) (A \subset X) (|A| < \aleph_0) \Rightarrow (A, \text{ d-kompakt})$$

İspat :

$$(|A| < \aleph_0) (\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset A) \Rightarrow \\ \Rightarrow (\exists a \in \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}) (\{a, a, a, \dots\} \subset A) \Rightarrow A, d\text{-kompakttır.}$$

Tanım 2.10 : $\mathbb{R}$ nin bazı alt kümelerinin bir $\mathcal{A}$ sınıfı göz önüne alın-sın. Bir $A \subset \mathbb{R}$ kümesi için $A \subset \bigcup_{\lambda \in \beta} A_\lambda$, $A_\lambda \in \mathcal{A}$ yazılabiliyorsa $\mathcal{A}$ sınıfına A kümesinin bir örtüsü adı verilir. Bu durumda A kümesinin her noktası $\mathcal{A}$ sınıfındaki bir kümenin içinde bulunur. $\mathcal{A}$ daki bütün kümeler açıksa bu sınıf bir açık örtü adını alır. $\mathcal{A}$ sınıfı $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ gibi kümelerin oluşturduğu sayılabilir bir sınıfsa ve $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ yazılabiliyorsa $\mathcal{A}$ sınıfına A nın bir sayılabilir örtüsü denir.

$\mathcal{A}$ sınıfı, $A \subset \mathbb{R}$ kümesinin bir örtüsü olsun. $\mathcal{B}$ her üyesi $\mathcal{A}$ nın içinde olan bir alt kümeler sınıfıysa ve $\mathcal{B}$ sınıfı da A kümesinin bir örtüsü ise $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ alt sınıfı A nın bir alt örtüsü adını alır. Bir $A \subset \mathbb{R}$ kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa A bir kompakt kümedir. Yani A kümesi kompakt ise her $\mathcal{A}$ açık örtüsünün sonlu sayıda, örneğin n tane açık kümeden oluşan bir $\{A_i \in \mathcal{A} : i = 1, \dots, n\}$ alt sınıfı vardır ve $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i$ yazılabilir, (Şuhubi 2001).

Tanım 2.11 : (X, d) bir metrik uzay, S kümesi (X, d) metrik uzayının bir alt kümesi olsun. Bir $x \in X$ noktasının S kümesine uzaklığı x noktasının S nin tüm noktalarına uzaklıklarının infimumudur.

$$d(x, S) = \inf\{d(x, y) : y \in S\}$$

$x, y \in X$ noktası ve S alt kümesi göz önüne alınsın. Bir $\varepsilon > 0$ için;

$$d(x, z) \leq d(x, S) + \varepsilon$$

olacak biçimde $z \in S$ noktası vardır.

$$d(x, S) = \inf\{d(x, y) : y \in S\}$$

tanımından yararlanarak

$$d(y, S) \leq d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) \leq d(y, x) + d(x, S) + \varepsilon$$

$$d(y, S) - d(x, S) \leq d(y, x) + \varepsilon$$

y ve x noktalarının yerleri değiştirilirse;

$$d(x, S) - d(y, S) \leq d(x, y) + \varepsilon$$

$$|d(x, S) - d(y, S)| \leq d(x, y) + \varepsilon$$

bulunur. Buradan da her $x, y \in X$ için

$$|d(x, S) - d(y, S)| \leq d(x, y)$$

bulunur. S ve B kümesinin birbirine uzaklığı

$$d(S, B) = \inf\{d(x, y) : x \in S, y \in B\}$$

biçiminde tanımlanır, (Şuhubi 2001).

Tanım 2.12 : Bir S alt kümesinin çapı;

$$D(S) = \sup\{d(x, y) : x, y \in S\}$$

bağıntısı ile tanımlanır. $D(S) < \infty$ ise S sınırlı bir küme, $D(S) = \infty$ ise S sınırsız küme olarak adlandırılır. $D(\emptyset) = 0$ kabul edilecektir. X kümesinin çapı $D(X)$ biçiminde alınırsa $Z \subseteq Y \subseteq X$ ise $D(Z) \leq D(Y) \leq D(X)$ eşitsizliğinin olduğu görülür, (Şuhubi 2001).

Tanım 2.13 : Bir (X, d) metrik uzayında $\{x_n\}$ dizisi, her $\varepsilon > 0$ sayısına karşı gelen $N(\varepsilon)$ pozitif tam sayısı $m, n \geq N$ eşitsizliğini sağlayan tüm m ve n tam sayıları için $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak biçimde bulunabiliyorsa Cauchy dizisidir denir, (Barnsley 1988).

Tanım 2.14 : (X, d) metrik uzayında $\{x_n\}$ dizisi ve $x \in X$ verilsin. Ancak ve ancak bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık gelen bir $N(\varepsilon)$ doğal sayısı her $n \geq N$ için $d(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bulunabiliyorsa, $\{x_n\}$ alt kümesinin bir yığılma noktası olan böyle bir x noktasına dizinin limit noktası denir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

biçiminde gösterilir, (Barnsley 1988).

Teorem 2.9 : Yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir.

İspat : $\{x_n\}$ dizisinin limiti bir x noktası ise $n \geq N$ için $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Dolayısıyla $m, n \geq N$ için;

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \varepsilon$$

bulunur. Yani yakınsak bir $\{x_n\}$ dizisi Cauchy dizisidir. Ancak bu özelliğin tersi her zaman doğru değildir ve bir dizinin Cauchy dizisi olması her zaman yakınsadığı anlamına gelmez, (Şuhubi 2001).

Tanım 2.15 : (X, d) metrik uzayının bir alt kümesi olarak $S \subset X$ alınsın. S nin kapanışı $\bar{S}$ ile gösterilir ve $\bar{S} = S \cup \{S \text{ nin limit noktaları}\}$ olarak tanımlanır. $S = \bar{S}$ ise tüm limit noktalarını içeriyordur ve S kapalıdır, (Barnsley 1988).

Teorem 2.10 : Bir $S \subseteq X$ boş olmayan alt kümesi, ancak ve ancak X de yakınsak her $\{x_n\} \subset S$ dizisinin limiti S de ise kapalıdır, (Barnsley 1988).

İspat : Bir $x \in \bar{S}$ noktası alındığında her $n \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$ olacak biçimde $x_n \in S$ noktaları bulunmalıdır. x noktasının $\{x_n\}$ dizisinin limiti olduğu açıktır. X uzayında yakınsak her $\{x_n\} \subset S$ dizisinin limitinin S de olduğunu kabul edersek $x \in S$ ve $\bar{S} \subseteq S$ sonucuna varılır. Diğer yandan $S \subseteq \bar{S}$ olduğundan $S = \bar{S}$ bulunur. Dolayısıyla S , kapalı olur. Tersine S kapalı ise tüm yığılma noktaları içinde bulunduğundan yakınsak her $\{x_n\} \subset S$ dizisinin limiti de S de olacaktır.

Teorem 2.11 : Her $\{x_n\}$ Cauchy dizisi için X uzayında $x \in X$ limit noktası varsa (X, d) metrik uzayı tamdır, (Barnsley 1988).

Tanım 2.16 : (X, d) bir metrik uzay ve $B \subseteq X$ bir alt kümesi olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $b \in B$ noktası için $d(b, b_i) < \varepsilon$ olacak biçimde bir $b_i(\varepsilon) \in B_\varepsilon$ noktası bulunabiliyorsa sonlu bir $B_\varepsilon \subset B$ alt kümesi B nin bir $\varepsilon - ağız$ adını alır. Yani B_ε alt kümesi B alt kümesinin bir $\varepsilon - ağız$ ise $n(\varepsilon)$ bir doğal sayı olmak üzere

$$B_\varepsilon = \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subset B$$

için

$$B \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(b_i)$$

yazılabilir. Buna göre B nin bir $\varepsilon - ağız$ varsa her noktası ε yarıçaplı bir açık yuvarın içindedir ve bu yuvarların sayısı sonludur. Bir $B \subseteq X$ alt kümesi her $\varepsilon > 0$ sayısı için $B_\varepsilon \subset B$ olan bir $\varepsilon - ağız$ içerirse tam sınırlı bir kümedir denir, (Barnsley 1988).

Teorem 2.12 : Tam sınırlı bir küme sınırlıdır, (Barnsley 1988).

İspat : Bir (X, d) metrik uzayının tam sınırlı bir alt kümesi B ve kümenin $\varepsilon - ağırlı$, $B_\varepsilon = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ ve $M(\varepsilon) = \max \{d(b_i, b_j) : i, j = 1, \dots, n\}$ olsun. $x_1, x_2 \in B$ noktalarına

$$d(x_1, b_{i_1}) < \varepsilon$$

$$d(x_2, b_{i_2}) < \varepsilon$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde $b_{i_1}, b_{i_2} \in B_\varepsilon$ noktaları karşı gelecektir. Üçgen eşitsizliğinden;

$$d(x_1, x_2) \leq d(x_1, b_{i_1}) + d(b_{i_1}, b_{i_2}) + d(b_{i_2}, x_2) \leq M(\varepsilon) + 2\varepsilon$$

bulunur. Bu nedenle

$$D(B) = \sup_{x_1, x_2 \in B} d(x_1, x_2) \leq M(\varepsilon) + 2\varepsilon$$

olacağından B kümesi sınırlıdır.

Teorem 2.13 : (X, d) metrik uzay olsun. X dizisel kompakt ise tamdır, (Barnsley 1988).

İspat : $\{x_n\} \subset X$ bir Cauchy dizisi olsun. X dizisel kompakt ise bu dizinin yakınsak bir alt dizisi bulunacaktır. $\{x_n\}$ Cauchy dizisinin yakınsak bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi bulunsun. $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$ alınsın. Bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde $m, n \geq N_1$ alınırsa $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ ve $n_k \geq N_2$ alındığında $d(x, x_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde N_1 ve N_2 tam sayıları vardır. $N = \max \{N_1, N_2\}$ olsun, $n, n_k \geq N$ için,

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$$

elde edilir. Bu nedenle $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ dir ve Cauchy dizisi de yakınsayacağından X tamdır.

Teorem 2.14 : (X, d) metrik uzay olsun. X ancak ve ancak tam ve tam sınırlı ise dizisel kompakttır, (Barnsley 1988).

İspat : Önce yeterlilik gösterilsin ve X tam ve sınırlı olsun. Herhangi bir $\{x_n\} \subset X$ dizisini ve $\{\frac{1}{m} - ağı : m = 1, 2, \dots\}$ ailesi alındığında, $1 - ağı$ nda X uzayını örten sonlu sayıda 1 yarıçaplı açık yuvar ve dizide sonsuz sayıda nokta bulunduğundan bu yuvarlardan biri örneğin; A_1 , dizinin bir sonsuz $\{x_n^{(1)}\}$ alt dizisini içerir. $\frac{1}{2} - ağı$ nda sonlu sayıda $\frac{1}{2}$ yarı çaplı yuvar bulunduğundan $\{x_n^{(1)}\}$ dizisinin bir sonsuz $\{x_n^{(2)}\}$ alt dizisini bu yuvarlardan biri, örneğin $A_{1/2}$ içerir. Böyle devam edilirse $\frac{1}{m} - ağı$ nda sonlu sayıda $\frac{1}{m}$ yarı çaplı açık yuvar bulunacağından $\{x_n^{(m-1)}\}$ dizisinin bir $\{x_n^{(m)}\}$ sonsuz alt dizisini bu yuvarlardan bir tanesinin, örneğin $A_{1/m}$ yuvarının içermesi gerektiği sonucuna varılır. Üretilen alt dizilerle elde edilen sonuçlar:

$$\begin{aligned} A_1 & : \quad \left\{ x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}, \dots \right\}, \left\{ x_n^{(1)} \right\} \quad \subset \quad \{x_n\} \\ A_{\frac{1}{2}} & : \quad \left\{ x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}, \dots \right\}, \left\{ x_n^{(2)} \right\} \quad \subset \quad \left\{ x_n^{(1)} \right\} \quad \subset \quad \{x_n\} \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ A_{\frac{1}{m}} & : \quad \left\{ x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}, \dots \right\}, \left\{ x_n^{(m)} \right\} \quad \subset \quad \dots \quad \subset \quad \{x_n\} \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \end{aligned}$$

$\{x_n\}$ dizisinin yukarıdaki sonuçlara göre asal köşegen üzerindeki dizi noktalarından seçilen $\left\{ x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, x_3^{(3)}, \dots, x_m^{(m)}, \dots \right\}$ alt dizileri için dizinin $n \geq m$ olan tüm elemanları $A_{1/m}$ açık yuvarı içindedir, bu durumda $n \geq m$ için $d(x_m^{(m)}, x_n^{(n)}) < \frac{1}{m}$ bulunur. Bir $\varepsilon > 0$ seçildiğinde $N > \frac{1}{\varepsilon}$ olan en küçük tam

sayı N ise $m, n \geq N$ için $d(x_m^{(m)}, x_n^{(n)}) < \varepsilon$ olur. Yani $\{x_n^{(n)}\}$ bir Cauchy dizisidir. X tam olduğundan bu alt dizi yakınsaktır. Dolayısıyla X de her sonsuz dizinin yakınsak bir alt dizisi bulunabilmektedir. Yani X dizisel kompakttır.

Gerekliğin gösterilmesi için X in dizisel kompakt olduğu varsayalım. (X, d) metrik uzay olsun, Teorem 2.13'den dolayı X tamdır. X 'in tam sınırlı olmadığı kabul edilsin. Bu durumda, en az bir $\varepsilon_0 > 0$ sayısı için X in bir $\varepsilon_0 - ağı$ yoktur. X 'in herhangi bir x_1 noktası alınsın. X de sonlu sayıda $x_2, x_3, \dots, x_n$ noktaları $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon_0, 1 \leq i < j \leq n$ olacak biçimde seçilsin. ε_0 için bir $\varepsilon_0 - ağı$ olmadığı için

$$X \neq \bigcup_{i=1}^n A_{\varepsilon_0}(x_i)$$

olacaktır. Dolayısıyla en az bir tane $x_{n+1} \in X - \bigcup_{i=1}^n A_{\varepsilon_0}(x_i)$ noktası bulunabilecektir. $m = 1, \dots, n$ için $d(x_{n+1}, x_m) \geq \varepsilon_0$ olduğu açıktır. Böylece bütün elemanları arasındaki uzaklıklar ε_0 dan küçük olmayan bir $\{x_n\}$ dizisi oluşturulur. Bu dizinin hiç bir alt dizisi Cauchy dizisi, dolayısıyla yakınsak olamaz. Bu da dizisel kompaktlık varsayımı ile çelişir. Bu çelişkiyi gidermek için ε_0 sayısına da bir $\varepsilon_0 - ağı$ ın karşı gelmesi yani X in tam sınırlı olması gerekir.

Teorem 2.15 : (X, d) metrik uzay olsun. X dizisel kompaktsa $S \subset X$ alt uzayı ancak ve ancak S kapalı ise dizisel kompakttır, (Barnsley 1988).

İspat : $S \subset X$ alt uzayı dizisel kompakt olsun. Buna göre S deki her yakınsak dizi kendisinin alt dizisi olarak yorumlanacağından S içinde bir limit noktasına sahiptir ve Teorem 2.10'dan S kapalıdır. Şimdi S kapalı olsun. S deki sonsuz bir dizinin X de yakınsak bir alt dizisi bulunacaktır. Fakat tanımdan dolayı bu alt dizinin limiti S de yer alacaktır yani S dizisel kompakttır.

Teorem 2.16 : Bir metrik uzay ancak ve ancak dizisel kompakt ise kompaktır, (Şuhubi 2001).

İspat : (X, d) bir metrik uzay olsun. Bir metrik uzayının herhangi bir S alt kümesi X üzerinde tanımlı metrik ile bir metrik uzay yapısı kazanır. Dolayısıyla bir metrik uzayın her alt kümesi aynı metriğe göre bir alt uzaydır. X bir metrik uzay ve $x \in X$ olsun. $B_{1/n}(x), n = 1, 2, \dots$ açık yuvarları x noktasının bir temel komşuluklar sistemini oluşturur. Bu durumda x noktasını içine alan her açık küme bu sistemin bir elemanını içerir. Temel sistem sayılabilir olduğundan her metrik uzay birinci sayılabilir bir uzaydır ve birinci sayılabilir bir uzayda kompaktlık aynı zamanda dizisel kompaktlık anlamına da geldiğinden X uzayı kompakt olduğu takdirde, dizisel kompaktlık özelliğinin taşıyacaktır.

Şimdi X uzayının dizisel kompakt yani tam ve tam sınırlı olduğunu ancak kompakt olmadığı kabul edilsin. Buna göre X metrik uzayının sonlu bir alt örtüsünü içermeyen en az bir $\mathcal{A}$ açık örtüsü bulunur. Varsayımına göre X de $\{u_1, \dots, u_{m_1}\}$ gibi bir $1 - ağı$ vardır. $X = \bigcup_{i=1}^{m_1} B_1(u_i)$ sonlu sayıda kümenin birleşimi olduğundan en az bir $B_1(u_j), 1 \leq j \leq m_1$ gibi bir açık yuvar $\mathcal{A}$ nın sonlu bir alt sınıfı ile örtülemez. Bu tür birden fazla açık yuvar varsa j böyle en küçük tamsayı seçilsin ve $x_1 = u_j$ yazılsın. Tam sınırlı bir kümenin boş olmayan bir alt kümesi de tam sınırlı olduğundan $B_1(x_1)$ alt kümesi de tam sınırlıdır. Dolayısıyla bu kümenin içinde $\{y_1, \dots, y_{m_2}\}$ gibi bir $1/2 - ağı$ vardır ve $B_1(x_1) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m_2} B_{1/2}(y_i)$ yazılabilir. Buna göre en az bir tane $B_{1/2}(y_j), 1 \leq j \leq m_2$ gibi bir açık yuvar $\mathcal{A}$ nın sonlu bir alt sınıfı ile örtülemez. Bu tür birden fazla açık yuvar varsa j böyle en küçük tamsayı seçilir ve $x_2 = y_j$ yazılır. $x_2 \in B_1(x_1)$ olduğuna göre $d(x_1, x_2) < 1$ eşitsizliği sağlanacaktır. Tümevarım yoluyla aşağıdaki özellikleri taşıyan bir $\{x_n\} \subset X$ dizisi oluşturulsun.

$$(a) d(x_{n-1}, x_n) < \frac{1}{2^{n-2}}, n \geq 2,$$

(b) $B_{1/2^{n-1}}(x_n)$, $n \geq 1$ açık yuvarı $\mathcal{A}$ nın sonlu bir alt sınıfı ile örtülemez.

$n = 1$ için bu koşulları gerçekleyen x_1 ve x_2 noktalarının bulanabileceği görülür. Aynı koşulları sağlayan $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dizisinin oluşturulduğu kabul edilsin. $B_{1/2^{n-1}}(x_n)$ tam sınırlı olduğundan $\{z_1, \dots, z_{m_n}\}$ gibi bir $\frac{1}{2^n} - a\tilde{g}$ içerir ve (b) koşulu nedeniyle $B_{1/2^n}(z_j)$, $1 \leq j \leq m_n$ gibi bir açık yuvar $\mathcal{A}$ nın sonlu bir alt sınıfı ile örtülemez. j böyle en küçük tamsayı seçilsin ve $x_{n+1} = z_j$ yazılsın. x_{n+1} noktası $B_{1/2^{n-1}}(x_n)$ yuvarını içinde olduğuna göre $d(x_n, x_{n+1}) < \frac{1}{2^{n-1}}$ koşulu sağlanır ve $\{x_n\}$ dizisinin belirlenmesi tamamlanmış olur. Bu dizi bir Cauchy dizisidir. $n \geq m$ olmak üzere

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \dots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} = \frac{1}{2^{m-2}} \left(1 - \frac{1}{2^{n-m}}\right) \leq \frac{1}{2^{m-2}} \end{aligned}$$

yazılabilir. Bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $N(\varepsilon)$ ile $2 - \left(\frac{\log \varepsilon}{\log 2}\right)$ den büyük en küçük doğal sayı gösterilirse $m, n \geq N$ alındığında $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ elde edilir. X tam olduğundan $\{x_n\}$ dizisi bir $x \in X$ noktasına yakınsar. $\mathcal{A}$ sınıfı X in bir örtüsü olduğu için x noktası bir $A \in \mathcal{A}$ açık kümesi içindedir ve $r > 0$ için $B_r(x) \subseteq A$ açık yuvarı vardır. N_1 ve N_2 doğal sayıları $n \geq N_1$ için $2^{-n+1} < \frac{r}{2}$ ve $n \geq N_2$ için $d(x_n, x) < \frac{r}{2}$ olacak şekilde bulunur. $N = \max \{N_1, N_2\}$ olsun. $y \in B_{1/2^{N-1}}(x)$ ise

$$d(y, x) \leq d(y, x_N) + d(x_N, x) < \frac{1}{2^{N-1}} + \frac{r}{2} < r$$

olduğundan $y \in B_r(x)$ ve dolayısıyla $B_{1/2^{N-1}}(x) \subseteq B_r(x) \subseteq A$ bulunur. Bu sonuç ise (b) koşulu ile çelişir. Çelişkiyi gidermek için $\mathcal{A}$ nın sonlu bir alt örtüsünün varlığının kabullenilmesi gerekir. Yani X kompakt olur.

Teorem 2.17 : X boş olmayan bir kompakt uzaysa $f \in C(X)$ fonksiyonu sınırlıdır ve infimumla supremumuna X üzerinden ulaşır, (Şuhubi 2001).

İspat : X kompakt ve f sürekli olduğundan $f(X) \subset \mathbb{R}$ kümesi de kompakttır. Bu nedenle $f(X)$ kapalı ve sınırlı olmak zorundadır. $f(X)$ kümesi sınırlı ise f fonksiyonunda sınırlı olur ve kümenin $\delta = \inf(f(X))$ infimum ve $\gamma = \sup(f(X))$ supremum noktaları bulunur. Fakat $f(X)$ aynı zamanda kapalı olduğundan δ ve γ sayıları $f(X)$ kümesinin içindedir. X uzayına x_1 ve x_2 noktaları $x_1 \in f^{-1}\{\delta\}$, $x_2 \in f^{-1}\{\gamma\}$ seçildiğinde $f(x_1) = \delta$ ve $f(x_2) = \gamma$ elde edilir. Yani fonksiyon infimum ve supremumuna X uzayında x_1 ve x_2 noktalarında ulaşır.

Tanım 2.17 : Elemanları nokta olarak adlandırılan X kümesini kendi içine dönüştüren $f : X \rightarrow X$ fonksiyonu alınsın. $x^* \in X$ noktası $f(x^*) = x^*$ bağıntısını sağlıyorsa, $x^* \in X$ noktasına f fonksiyonunun sabit noktasıdır denir, (Şuhubi 2001).

Tanım 2.18 : (X, d) bir metrik uzay olsun ve $f : X \rightarrow X$ fonksiyonu bu uzayı kendi içine dönüştürsün. Her $x, y \in X$ nokta çifti ve $0 < k < 1$ koşulunu sağlayan bir k reel sayısı için,

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$$

koşulu sağlanıyorsa f bir büzülme dönüşümü ya da sadece bir büzülme denir. k reel sayısı da büzülme sabiti adını alır, (Şuhubi 2001).

Teorem 2.18 : (Banach Teoremi) (X, d) bir tam metrik uzay ve f bir büzülme dönüşümü ise f fonksiyonunun tek bir sabit noktası vardır, (Şuhubi 2001).

İspat : f fonksiyonunun sabit noktası varsa tek olduğu gösterilsin. $x^*, x^{**} \in X$ sabit noktası varsa bu noktalar $f(x^*) = x^*$ ve $f(x^{**}) = x^{**}$ bağıntılarını sağlamalıdır. Bu durumda,

$$d(x^*, x^{**}) = d(f(x^*), f(x^{**})) \leq kd(x^*, x^{**})$$

yazılabileceğinden $d(x^*, x^{**}) \neq 0$ ise $k \geq 1$ çelişkisine varılır. Dolayısıyla $d(x^*, x^{**}) = 0$ ve $x^* = x^{**}$ bulunur. Şimdi tek olan sabit noktanın varlığı gösterilebilir. Herhangi bir $x_0 \in X$ noktası seçilsin. $f(x_0) = x_0$ ise sorun kalmamıştır. Ancak genellikle $x_1 = f(x_0)$ bulunacaktır. Bir $\{x_n\} \subset X$ dizisi $x_n = f(x_{n-1})$, $n \geq 1$ biçiminde oluşturulsun. Bu dizinin elemanlarını iteratif olarak $x_n = (f \circ \dots \circ f)(x_0) = f^n(x_0)$ biçiminde belirleneceği açıktır. $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. Bu özelliği görebilmek için önce

$$d(x_m, x_n) = d(f(x_{m-1}), f(x_{n-1})) \leq kd(x_{m-1}, x_{n-1})$$

işlemi örneğin r kez yinelensin. Kolaylıkla

$$d(x_m, x_n) \leq k^r d(x_{m-r}, x_{n-r})$$

bağıntısı elde edilir. Yukardaki ifade de $r = m$ ve $n = m + 1$ alındığında

$$d(x_m, x_{m+1}) \leq k^m d(x_0, x_1)$$

elde edilir. Genellikten kaybetmeksizin $n > m$ seçmek koşuluyla üçgen eşitsizliğinden ardışık olarak yararlanarak

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \dots + d(x_{n-1}, x_n)$$

veya

$$d(x_m, x_n) \leq (k^m + \dots + k^{n-1}) d(x_0, x_1) = k^m \frac{1 - k^{n-m}}{1 - k} d(x_0, x_1)$$

ve $n \geq m$ için

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{k^m}{1 - k} d(x_0, x_1)$$

sonucuna varılır. Bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık gelen $\frac{\left(\log \frac{\varepsilon(1-k)}{d(x_0, x_1)}\right)}{\log k}$ sayısından büyük en küçük doğal sayı $N(\varepsilon)$ ile gösterilirse $m, n \geq N$ olduğunda $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ bulunur. Bu da $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. X metrik uzayı tam olduğundan bu dizinin bir $x^* \in X$ limiti var olacaktır. f sürekli olduğundan

$$f(x^*) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + 1 = x^*$$

elde edilecektir. Buna göre x^* noktası f fonksiyonunun sabit noktasıdır.

3. FRAKTAL UZAYI

(X, d) bir tam metrik uzay olsun. X in boş olmayan tüm kompakt alt kümeleri sınıfı $\mathcal{H}(X)$ ile gösterilsin. $A, B \in \mathcal{H}(X)$ ise $A \cup B \in \mathcal{H}(X)$ dir. Ancak genel olarak $A \cap B$ kümesi $\mathcal{H}(X)$ sınıfının içinde bulunmayabilir. İki kompakt kümenin arakesiti tam sınırlı olsa bile kapalı olmayabilir. $x \in X$ noktasının $A \in \mathcal{H}(X)$ kümesine uzaklığı

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y), \quad y \in A$$

ile tanımlanır. Bir $f_x : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f_x(y) = d(x, y), \quad y \in A$$

olarak belirlensin.

$$|f_x(y_1) - f_x(y_2)| \leq d(y_1, y_2)$$

olduğundan f_x fonksiyonu A kompakt kümesi üzerinde süreklidir. Düzgün sürekli olan bu fonksiyon Teorem 2.17 'den dolayı sınırlıdır, infimum ve supremumuna A kümesi üzerinde ulaşır. Yani;

$$d(x, A) = d(x, y')$$

eşitliğini sağlayan ve tek olmayan bir $y' \in A$ noktası vardır. İki $A, B \in \mathcal{H}(X)$ kümeleri için A kümesinin B kümesine uzaklığı

$$d(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y)$$

olarak alınsın. Genellikle $d(A, B) \neq d(B, A)$ dir. Yukarda belirtilen f_A gibi fonksiyonlar cinsinden $d(A, B) = \sup_{x \in A} f_B(x)$ yazılabilir. f_B sürekli fonksiyonunun A kompakt kümesi üzerinde kısıtlaması da sürekli olacağından bu fonksiyon A üzerindeki supremumuna A kümesinin tek olarak bulunamayabilen bir noktasında ulaşacaktır. Bu nedenle

$$d(A, B) = d(x', y') , \quad x' \in A , \quad y' \in B$$

yazılabilir. $d(A, A) = 0$ olduğu açıktır. $B \subseteq C$ ise $d(x, C) \leq d(x, B)$ eşitsizliğinin sağlanacağı görülür. Dolayısıyla $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$ ve $B \subseteq C$ alındığında

$$d(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y)$$

tanımından $d(A, C) \leq d(A, B)$ bulunur. $B \subseteq A$ ise $d(B, A) = 0$ fakat $d(A, B) \neq 0$ olur. Bu durumda $A \neq B$ ise ya $d(A, B) \neq 0$ ya da $d(B, A) \neq 0$ olmalıdır. $x, y \in \mathbb{R}$ 'nin maksimumu $x \vee y$ şeklinde alınırsa $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$ kümeleri için;

$$d(A \cup B, C) = d(A, C) \vee d(B, C)$$

sonucuna ulaşılır.

$$d(A \cup B, C) = \sup_{x \in A \cup B} d(x, C) = \sup_{x \in A} d(x, C) \vee \sup_{x \in B} d(x, C) = d(A, C) \vee d(B, C)$$

dir. $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$ kümeleri; $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$ bağıntısını sağlar. Her $z \in C$ noktası için

$$d(A, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y) \leq \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} [d(x, z) + d(z, y)] \leq \sup_{x \in A} d(x, z) + \inf_{y \in B} d(z, y)$$

her $z \in C$ yazılabilir ve yukarıdaki bağıntının sağ tarafındaki her iki terimde de C kümesinin her z noktası yerleştirildiğinde geçerli olduğundan, birinci terimde $d(x, z)$ uzaklığını minimum, ikinci terimde ise $d(z, y)$ uzaklığını maksimum yapan z noktaları kullanılırsa

$$d(A, B) \leq \sup_{x \in A} \inf_{z \in C} d(x, z) + \sup_{z \in C} \inf_{y \in B} d(z, y) = d(A, C) + d(C, B)$$

bulunur, (Şuhubi 2001).

Tanım 3.1 : (X, d) bir tam metrik uzay olsun. X in boş olmayan tüm kompakt alt kümeleri sınıfı $\mathcal{H}(X)$ olmak üzere $\mathcal{H}(X)$ üzerinde tanımlı bir $h : \mathcal{H}(X) \times \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu için her $A, B \in \mathcal{H}(X)$ olmak üzere

$$h(A, B) = d(A, B) \vee d(B, A)$$

eşitliği vardır, (Şuhubi 2001).

Teorem 3.1 : $\mathcal{H}(X)$ üzerinde bir $h: \mathcal{H}(X) \times \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonunu her $A, B \in \mathcal{H}(X)$ için h fonksiyonu $\mathcal{H}(X)$ üzerinde bir metriktir, (Barnsley 1988).

İspat:

- i. $d(A, B) \geq 0$ olduğundan $h(A, B) \geq 0$ dır.
- ii. $d(A, A) = 0$ olduğundan $h(A, A) = 0$ dır. $A \neq B$ olduğunda $d(A, B)$ ile $d(B, A)$ nın en az bir tanesi sıfır olamayacağından $h(A, B) \neq 0$ çıkar.
- iii. $h(A, B) = h(B, A)$ dır.
- iv. Üçgen eşitsizliğini göstermek için $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$ olmak üzere,

$$h(A, B) = d(A, B) \vee d(B, A)$$

tanımından yararlanarak

$$h(A, B) \leq [d(A, C) + d(C, B)] \vee [d(B, C) + d(C, A)]$$

alınsın. A 'dan C 'ye ve C 'den B 'ye uzaklıkların toplamı ile B 'den C 'ye ve C 'den A 'ya uzaklıkların toplamının en büyüğü $d(A, C)$ ile $d(C, A)$ nın en büyüğü ile $d(C, B)$ ile $d(B, C)$ nin en büyüğünün toplamından küçük ya da en fazla ona eşit olacağından

$$h(A, B) \leq d(A, C) \vee d(C, A) + d(C, B) \vee d(B, C)$$

veya

$$h(A, B) \leq h(A, C) + h(C, B)$$

bulunur. Yani h küme fonksiyonu gerçekten bir metrik olup Hausdorff metriği adını alır.

Tanım 3.2 : Üyeleri X 'in kompakt kümeleri olan $(\mathcal{H}(X), h)$ metrik uzayına fraktallar uzayı denir, (Şuhubi 2001).

Tanım 3.3 : X 'in aralarındaki uzaklık h metriği ile belirlenmiş kompakt alt kümelerine yani $\mathcal{H}(X)$ uzayının noktalarına fraktallar denir, (Şuhubi 2001).

Tanım 3.4 : $A \subset X$ ve $\varepsilon \geq 0$ olsun. $A_\varepsilon = \{y \in X : d(x, y) \leq \varepsilon, \forall x \in A\}$ kümesine A kümesinin ε yarıçaplı bir yuvarla genişmesi denir. $A = A_0$ dır. A kompakt bir küme olduğunda A_ε kapalıdır. Kompakt bir A kümesi tam sınırlı olduğundan A_ε kümesini belirlemek için A da sonlu sayıda nokta yeterli olacaktır. Bu durumda yakınsak bir $\{y_n\} \subset A_\varepsilon$ dizisinin limit noktası A_ε da bulunacaktır.

Yardımcı Teorem 3.2 : $A, B \in \mathcal{H}(X)$ ve $\varepsilon > 0$ verilen bir sayı olsun. Ancak ve ancak $h(A, B) \leq \varepsilon$ ise $A \subseteq B_\varepsilon$ ve $B \subseteq A_\varepsilon$ olur, (Barnsley 1988).

İspat : Önce ancak ve ancak $d(A, B) < \varepsilon$ ise $A \subseteq B_\varepsilon$ olduğu verilsin.

- i. $d(A, B) \leq \varepsilon$ alınsın $d(A, B) = \sup_{a \in A} d(a, B) \leq \varepsilon$ olduğundan her $a \in A$ için $d(a, B) \leq \varepsilon$ elde edilir. B kompakt olduğundan $d(a, B) \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $b \in B$ noktası vardır. Bu nedenle her $a \in A$ noktası bir $b \in B$ merkezli ve ε yarıçaplı kapalı yuvar içinde bulunur, yani $a \in B_\varepsilon$ olur ve $A \subseteq B_\varepsilon$ dur.
- ii. $A \subseteq B_\varepsilon$ bağıntısı geçerli olsun.

$$d(A, B) = \sup_{a \in A} d(a, B)$$

küme fonksiyonu alınsın. Varsayım gereğince her $a \in A$ için $d(a, b) \leq \varepsilon$ olacak bir $b \in B$ noktası vardır. Bu nedenle her $a \in A$ için $d(a, B) \leq d(a, b) \leq \varepsilon$

olur ve $d(A, B) \leq \varepsilon$ bulunur. A ve B kümelerinin yerleri değiştirildiğinde ancak ve ancak $d(B, A) \leq \varepsilon$ ise $B \subseteq A_\varepsilon$ olduğu görülür buradan

$$h(A, B) = d(A, B) \vee d(B, A) \leq \varepsilon \Leftrightarrow d(A, B) \leq \varepsilon$$

ve

$$d(B, A) \leq \varepsilon \Leftrightarrow A \subseteq B_\varepsilon \text{ ve } B \subseteq A_\varepsilon$$

sonucuna varılır.

Yardımcı Teorem 3.3 : $\{A_n\} \in \mathcal{H}(X)$, $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ bir Cauchy dizisi olsun. $\{n_i\}$, $i = 1, 2, 3, \dots$ artan bir tam sayı dizisi ($0 < n_1 < n_2 < \dots$) olmak üzere $x_{n_i}^! \in A_{n_i}$ noktalarının $\{x_{n_i}^!\} \subset X$, $i = 1, 2, \dots$ dizisi bir Cauchy dizisi ise her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in A_n$ olacak şekilde $x_{n_i} = x_{n_i}^!$ koşulunu sağlayan bir $\{x_n\} \subset X$ Cauchy dizisi vardır, (Şuhubi 2001).

İspat : Böyle bir Cauchy dizisinin varlığı dizi oluşturularak gösterilebilir. Gösterim için her $n \in \{1, 2, \dots, n_1\}$ ve $x_n \in \{x \in A_n : d(x, x_{n_1}^!) = d(x_{n_1}^!, A_n)\}$ alınsın. Yani x_n noktası A_n kümesinde $x_{n_1}^!$ noktasına en yakın noktalardan biri olarak seçilmiştir. A_n kompakt olduğu için böyle en az bir $x_n \in A_n$ noktası vardır. $n = n_1$ için $x_{n_1} = x_{n_1}^!$ olacağı açıktır. Benzer şekilde her $n \in \{n_{i-1} + 1, n_{i-1} + 2, \dots, n_i\}$ $i = 1, 2, 3, \dots$ pozitif tam sayısına karşı gelecek bir $x_n \in A_n$ noktasını $\{x \in A_n : d(x, x_{n_i}^!) = d(x_{n_i}^!, A_n)\}$ kümesinin, en azından bir tanesinin var olduğu bilinen bir elemanı seçilerek $\{x_n\} \subset X$ dizisi oluşturulsun. $x_{n_i} = x_{n_i}^!$ olduğu tanımdan görülür.

Bu dizinin bir Cauchy dizisi olduğunu göstermek için Cauchy dizilerinin bilinen özellikleri ile verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısı ve $n_i, n_j \geq N_1$ olduğunda $d(x_{n_i}^!, x_{n_j}^!) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ ve $m, n \geq N_2$ ise $h(A_m, A_n) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ olacak şekilde $N_1(\varepsilon)$ ve $N_2(\varepsilon)$ pozitif tam sayıları bulunabilir. $N(\varepsilon) = \max\{N_1, N_2\}$ alınsın ve

$m, n \geq N$ seçilsin. Diğer yandan m ve n sayıları bir n_i ve n_j sayısı için $m \in \{n_{i-1} + 1, n_{i-1} + 2, \dots, n_i\}$ ve $n \in \{n_{j-1} + 1, n_{j-1} + 2, \dots, n_j\}$ koşulunu sağlayacağından bu seçim nedeniyle $n_i, n_j \geq N$ olacaktır.

Bu nedenle $m, n \geq N$ için $d(x'_m, x'_n) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ bulunur. Ayrıca $h(A_m, A_{n_i}) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ olduğundan $A_m \subseteq (A_{n_i})_{\varepsilon/3}$ ve buradan da $d(x_m, x'_{n_i}) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ alınabilir. Benzer şekilde $d(x'_{n_i}, x'_{n_j}) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ bulunur. Üçgen eşitsizliğinden bu sonuçlar kullanılarak $m, n \geq N$ için

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x'_{n_i}) + d(x'_{n_i}, x'_{n_j}) + d(x'_{n_j}, x_n) \leq \varepsilon$$

elde edilir $\{x_n\} \subset X$ bir Cauchy dizisidir.

Teorem 3.4 : (X, d) bir tam metrik uzay ise $(\mathcal{H}(X), h)$ metrik uzayı da tamdır. $\{A_n\} \in \mathcal{H}(X)$ bir Cauchy dizisi olduğunda diziye ait olan A limiti, $A = \{x \in X : x \text{ noktasına yakınsayan } \{x_n \in A_n\} \text{ Cauchy dizisi var}\}$ kuralı ile belirlenir, (Barnsley 1988).

İspat : İspat aşağıda belirtilen parçalara ayrılın.

- i. $A \neq \phi$
- ii. A kümesi kapalıdır.
- iii. A kümesi tam sınırlıdır.
- iv. $\{A_n\}$ dizisinin limiti A kümesidir.

i. A kümesi boş değildir. $\{A_n\} \in \mathcal{H}(X)$ bir Cauchy dizisi olduğuna göre bir $0 < n_1 < n_2 < \dots$ pozitif tam sayılar dizisi

$$m, n \geq n_i, h(A_m, A_n) \leq \frac{1}{2^i}, i = 1, 2, 3, \dots$$

olacak şekilde belirlenebilir. Bir $x_{n_1} \in A_{n_1}$ noktası seçilsin. Yukarıda $i = 1$ alındığında $h(A_{n_1}, A_{n_2}) \leq \frac{1}{2}$ olduğundan bir $x_{n_2} \in A_{n_2}$ noktası $d(x_{n_1}, x_{n_2}) \leq \frac{1}{2}$ olacak şekilde seçilebilir. Burada aynı yöntem ile sonlu bir

$x_{n_i} \in A_{n_i}$, $i = 1, 2, \dots, k$ dizisinin $d(x_{n_{i-1}}, x_{n_i}) \leq \frac{1}{2^{i-1}}$ olacak şekilde belirlendiği varsayılın. $h(A_{n_k}, A_{n_{k+1}}) \leq \frac{1}{2^k}$ ve dolayısıyla $\sup_{x \in A_{n_k}} d(x, A_{n_{k+1}}) \leq \frac{1}{2^k}$ yazılabilir. $x_{n_{k+1}} \in A_{n_{k+1}}$ noktası A_{n_k} kümesine en yakın nokta olarak seçilsin. Bu durumda,

$$d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) \leq \frac{1}{2^k}$$

olur. Buna göre tümevarım yoluyla bir $\{x_{n_i} \in A_{n_i}\} \subset X$, $i = 1, 2, 3, \dots$ dizisi

$$d(x_{n_i}, x_{n_{i+1}}) \leq \frac{1}{2^i}$$

olacak şekilde belirlenebilir. $\{x_{n_i}\}$ bir Cauchy dizisidir. Bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşı gelen pozitif $N(\varepsilon)$ tam sayısı

$$\sum_{i=N}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon$$

olacak şekilde seçilsin. $q > p \geq N$ alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\begin{aligned} d(x_{n_p}, x_{n_q}) &\leq d(x_{n_p}, x_{n_{p+1}}) + d(x_{n_{p+1}}, x_{n_{p+2}}) + \dots + d(x_{n_{q-1}}, x_{n_q}) \\ &\leq \sum_{i=N}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon \end{aligned}$$

$\{A_n\} \in \mathcal{H}(X)$, $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ bir Cauchy dizisi olsun. $\{n_i\}$, $i = 1, 2, 3, \dots$ artan bir tam sayı dizisi ($0 < n_1 < n_2 < \dots$) olmak üzere $x_{n_i}^! \in A_{n_i}$ noktalarının $\{x_{n_i}^!\} \subset X$, $i = 1, 2, \dots$ dizisi bir Cauchy dizisi ise her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in A_n$ olacak şekilde $x_{n_i} = x_{n_i}^!$ koşulunu sağlayan bir $\{x_n\} \subset X$ Cauchy dizisi varolduğundan dolayı X de bir $\{a_n \in A_n\}$ Cauchy dizisi $a_{n_k} = x_{n_k}$ koşulu sağlayacak şekilde vardır. X tam olduğundan $\{a_n\}$ dizisi bir $a \in X$ noktasına yakınsar. Tanıma göre $a \in A$ dır ve A kümesi boş değildir.

ii. A kümesi kapalıdır. Bunu görmek için herhangi bir $\{a_n\} \subset A$ yakınsak dizisinin $a \in X$ limit noktasının A da bulunduğunun gösterilmesi yeterlidir.

Dizinin her a_i noktası A da olduğundan bu kümenin tanımı nedeniyle

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{(i)} = a_i$$

olacak şekilde bir $\{x_n^{(i)} \in A_n\}$, ($i = 1, 2, 3, \dots$) bir Cauchy dizisi vardır ve $i = 1, 2, 3, \dots$ için $d(a_{n_i}, a) \leq \frac{1}{i}$ olacak şekilde artan bir n_i pozitif tam sayılar dizisi oluşturulsun. Öte yandan her n_i için $d(x_{m_i}^{(n_i)}, a_{n_i}) \leq \frac{1}{i}$ olacak şekilde bir m_i pozitif tam sayısı vardır. Dolayısıyla

$$d(x_{m_i}^{(n_i)}, a) \leq d(x_{m_i}^{(n_i)}, a_{n_i}) + d(a_{n_i}, a) \leq \frac{2}{i}, \quad i = 1, 2, \dots$$

elde edilir. $y_{m_i} = x_{m_i}^{(n_i)}$ olarak tanımlanırsa $y_{m_i} \in A_{m_i}$ ve $\lim_{i \rightarrow \infty} y_{m_i} = a$ olur. $\{A_n\} \in \mathcal{H}(X)$, $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ bir Cauchy dizisi olsun. $\{n_i\}$, $i = 1, 2, 3, \dots$ artan bir tam sayı dizisi ($0 < n_1 < n_2 < \dots$) olmak üzere $x_{n_i}^l \in A_{n_i}$ noktalarının $\{x_{n_i}^l\} \subset X$, $i = 1, 2, \dots$ dizisi bir Cauchy dizisi ise her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in A_n$ olacak şekilde $x_{n_i} = x_{n_i}^l$ koşulunu sağlayan bir $\{x_n\} \subset X$ Cauchy dizisi olduğundan dolayı $\{y_{m_i}\}$ dizisini alt dizi olarak içeren bir $\{z_i \in A_i\}$ Cauchy dizisi vardır. Bir Cauchy dizisi bir alt dizisinin yakınsadığı noktaya yakınsayacağından $\lim_{i \rightarrow \infty} z_i = a$ bulunur. $a \in A$ olduğundan A kümesi X tam uzayının kapalı, dolayısıyla da bir tam alt uzayıdır.

iii. A kümesi tam sınırlıdır. Önce her $\varepsilon > 0$ sayısına, $n \geq N$ koşulu sağlandığında $A \subseteq (A_n)_\varepsilon$ olacak şekilde bir $N(\varepsilon)$ pozitif tam sayısına karşı geldiği gösterilsin. $\varepsilon > 0$ alındığında, $m, n \geq N_1(\varepsilon)$ için $h(A_m, A_n) \leq \varepsilon$ yazılabildiğinden $m \geq n$ ve $n \geq N_1$ için $A_m \subseteq (A_n)_\varepsilon$ olur. Bir $a \in A$ noktası alındığında bu nokta bir $\{a_i \in A_i\}$ dizisinin limitidir. Bu nedenle $m \geq N_2(\varepsilon)$ için $d(a_m, a) \leq \varepsilon$ olur. $N(\varepsilon) = \max\{N_1, N_2\}$ alındığında, $a_m \in A_m$ ve $m \geq N$ için $a_m \in (A_n)_\varepsilon$ olur. A_n kümeleri kompakt olduğundan $(A_n)_\varepsilon$ kümeleri kapalıdır. Dolayısıyla a_m dizisinin a limit noktası da $(A_n)_\varepsilon$ içinde bulunmalı yani $n \geq N$ için $A \subseteq (A_n)_\varepsilon$ olmalıdır.

A nın tam sınırlı olmadığı kabul edildiğinde en az bir $\varepsilon_0 > 0$ sayısına karşılık gelen bir ε_0 -ağı yoktur. Bu durumda $i \neq j$ için $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon_0$ olacak şekilde bir $\{x_i\} \subset A$ dizisi bulunabilir. Öte yandan yeter derecede büyük n sayısı için $A \subseteq (A_n)_{\frac{\varepsilon_0}{3}}$ olacaktır. Buna göre her $x_i \in A$ noktasına karşılık gelen ve $d(x_i, y_i) \leq \frac{\varepsilon_0}{3}$ koşulunu sağlayan bir $y_i \in A_n$ noktası vardır. A_n kompakt olduğundan $\{y_i\} \subset A_n$ dizisinin yakınsak bir $\{y_{n_i}\}$ alt dizisi bulunacaktır. Yeter derecede büyük n_i ve n_j için $d(y_{n_i}, y_{n_j}) < \frac{\varepsilon_0}{3}$ olur. Dolayısıyla

$$d(x_{n_i}, x_{n_j}) \leq d(x_{n_i}, y_{n_i}) + d(y_{n_i}, y_{n_j}) + d(y_{n_j}, x_{n_j}) < \varepsilon_0$$

yazılabilir. $\{x_i\}$ dizisi tüm elemanları arasındaki uzaklık ε_0 dan küçük olmayacak şekilde oluşturulduğu için bu sonuç bir çelişkidir. Yani A tam sınırlıdır, A kompakttır ve $A \in \mathcal{H}(X)$ bulunur.

iv. $\{A_n\}$ dizisinin limiti A kümesidir. $A \in \mathcal{H}(X)$ ve verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısı ile yeter derecede büyük n için $A \subseteq (A_n)_\varepsilon$ olduğu bilindiğine göre $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ yani, $n \geq N(\varepsilon)$ iken $h(A_n, A) \leq \varepsilon$ olduğunu görebilmek için Yardımcı Teorem 3.2 'den ; $A_n \subseteq A_\varepsilon$ olduğunun gösterilmesi yeterlidir. Bir $N(\varepsilon)$ sayısını $m, n \geq N$ için $h(A_m, A_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ sağlayacak, yani $A_n \subseteq (A_m)_{\frac{\varepsilon}{2}}$ olacak şekilde belirlensin. $n \geq N$ olmak üzere $n < n_1 < n_2 < \dots$ artan tamsayılar dizisi; $j = 1, 2, \dots$ için $m, k \geq n_j$ olduğunda

$$A_m \subseteq (A_k)_{\frac{\varepsilon}{2^{j+1}}}$$

bağıntısı gerçekleşecek şekilde seçilsin. $A_n \subseteq (A_{n_1})_{\frac{\varepsilon}{2}}$ olduğu açıktır. A_n içinde bir y noktası alınsın. Dolayısıyla $d(y, x_{n_1}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde bir $x_{n_1} \in A_{n_1}$ noktası bulunabilir.

$$A_{n_1} \subseteq (A_{n_2})_{\frac{\varepsilon}{2^2}}$$

yazılabileceğinden

$$d(x_{n_1}, x_{n_2}) \leq \frac{\varepsilon}{2^2}$$

olacak şekilde bir $x_{n_2} \in A_{n_2}$ noktası bulunacaktır. Buna göre tümevarım yoluyla bir $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_j}, \dots$ dizisini $x_{n_j} \in A_{n_j}$ ve $d(x_{n_j}, x_{n_{j+1}}) \leq \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$ koşulları gerçekleşecek şekilde oluşturulduğunda

$$\begin{aligned}
d(y, x_{n_j}) &\leq d(y, x_{n_1}) + d(x_{n_1}, x_{n_2}) + \dots + d(x_{n_{j-1}}, x_{n_j}) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \dots + \frac{\varepsilon}{2^j} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{j-1}}) \\
&= \varepsilon (1 - \frac{1}{2^j}) \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

sonucu bulunur ve $\{x_{n_j} \in A_{n_j}\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. Dolayısıyla $\{x_{n_j}\}$ dizisinin bir $x \in A$ noktasına yakınsayacağı görülür.

$$d(y, x) \leq d(y, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, x)$$

bağıntısında $\lim_{j \rightarrow \infty} d(x_{n_j}, x) = 0$ ve $\lim_{j \rightarrow \infty} d(y, x_{n_j}) \leq \varepsilon$ olduğundan $d(y, x) \leq \varepsilon$ bulunur. Dolayısıyla $A_n \subseteq A_\varepsilon$ sonucuna varılır ve $(\mathcal{H}(X), h)$ uzayı tamdır.

Teorem 3.5 : (X, d) bir tam metrik uzay ve $w : X \rightarrow X$ fonksiyonu sabiti $0 < k < 1$ olan bir büzülme dönüşümü olsun. $W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ küme dönüşümü

$$W(A) = \{w(x) : x \in A\}, \forall A \in \mathcal{H}(X)$$

olarak tanımlansın. $(\mathcal{H}(X), h)$ uzayında W fonksiyonu sabiti k olan bir büzülme dönüşümüdür.

İspat : Bu tanıma göre W fonksiyonu bir A kümesindeki değeri bu kümenin $w(A)$ görüntüsüdür. w sürekli olduğu için A kompaktsa $w(A)$ kümesi de kompakttır. Dolayısıyla $W(A) = w(A)$ olarak tanımlanan fonksiyon; $W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ şeklindedir. $A, B \in \mathcal{H}(X)$ ise

$$d(W(A), W(B)) = d(w(A), w(B)) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(w(x), w(y))$$

$$\sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(w(x), w(y)) \leq \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y) = kd(A, B)$$

bulunur dolayısıyla

$$d(W(A), W(B)) \leq kd(A, B), \quad 0 < k < 1$$

sonucu elde edilir. Benzer şekilde $d(W(B), W(A)) \leq kd(B, A)$ eşitsizliği de bulunur. Buna göre,

$$\begin{aligned} h(W(A), W(B)) &= d(W(A), W(B)) \vee d(W(B), W(A)) \\ &\leq kd(A, B) \vee d(B, A) \\ &= kh(A, B) \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Her $A, B \in \mathcal{H}(X)$ için

$$h(W(A), W(B)) \leq kh(A, B), \quad 0 < k < 1$$

bağıntısı sağlandığından W bir büzülme dönüşümüdür, (Şuhubi 2001).

Tanım 3.5 : $\mathcal{H}(X)$ de bir büzülme dönüşümünün sabit noktası olan kompakt kümeye fraktal denir, (Şuhubi 2001).

Yardımcı Teorem 3.6 : $A, B, C, D \in \mathcal{H}(X)$ kümeleri için

$$h(A \cup B, C \cup D) \leq h(A, C) \vee h(B, D)$$

bağıntısı geçerlidir.

İspat :

$$h(A \cup B, C \cup D) = d(A \cup B, C \cup D) \vee d(C \cup D, A \cup B)$$

eşitliği için

$$\begin{aligned} d(A \cup B, C) &= d(A, C) \vee d(B, C) \\ d(A \cup B, C \cup D) &= d(A, C \cup D) \vee d(B, C \cup D) \end{aligned}$$

yazılabilir. Fakat $C \subset C \cup D$ ve $D \subset C \cup D$ olduğundan

$$d(A, C \cup D) \leq d(A, C) \text{ ve } d(B, C \cup D) \leq d(B, D)$$

olur ve

$$d(A \cup B, C \cup D) = d(A, C) \vee d(B, D)$$

sonucuna varılır. Benzer şekilde,

$$d(C \cup D, A \cup B) = d(C, A) \vee d(D, B)$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} h(A \cup B, C \cup D) &\leq d(A, C) \vee d(B, D) \vee \\ &\quad d(C, A) \vee d(D, B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(A, C) \vee d(B, D) \vee (C, A) \vee d(D, B) &= d(A, C) \vee d(C, A) \vee \\ &\quad d(B, D) \vee d(D, B) \end{aligned}$$

$$d(A, C) \vee d(C, A) \vee d(B, D) \vee d(D, B) = h(A, C) \vee h(B, D)$$

sonucuna varılır, (Şuhubi 2001).

Teorem 3.7 : (X, d) bir tam metrik uzay $w_1, w_2, \dots, w_n$ fonksiyonlarının X üzerinde sabitleri sırasıyla $k_1, k_2, \dots, k_n$ sayılarıyla verilmiş büzülme dönüşümleri olsun. $i = 1, 2, \dots, n$ olacak şekilde seçildiğinde $W_i : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ fonksiyonu, $w_i : X \rightarrow X$ büzülme dönüşümünün ürettiği sabiti k_i olan büzülme dönüşümünü gösterebilir. Her $A \in \mathcal{H}(X)$ için

$$W(A) = \bigcup_{i=1}^n W_i(A) = \bigcup_{i=1}^n w_i(A)$$

kuralıyla tanımlanan $W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ küme fonksiyonu bir büzülme dönüşümü olup büzülme sabiti $k = \max \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$, $0 < k < 1$ ile verilir, (Şuhubi 2001).

İspat : $n = 2$ için ile verilen sonuç bir n sonlu sayısına erişilebilir. Bu özel durumda Yardımcı Teorem 3.6 kullanılarak; $A, B \in \mathcal{H}(X)$ kümeleri için

$$\begin{aligned} h(W(A), W(B)) &= h(W_1(A) \cup W_2(A), (W_1(B) \cup W_2(B))) \\ &\leq h(W_1(A) \cup W_1(B)) \vee h(W_2(A), W_2(B)) \\ &\leq k_1 h(A, B) \vee k_2 h(A, B) \leq kh(A, B) \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $k = \max \{k_1, k_2\}$ olarak tanımlanır. Bu yaklaşımla eğer;

$$W_1(A) \cup W_2(A) \cup \dots \cup W_{i-1}(A) = \max \{k_1, k_2, \dots, k_{i-1}\}$$

bir büzülme dönüşümü ise büzülme sabiti $k = \max \{k_1, k_2, \dots, k_i\}$ olarak değiştirilmesi koşuluyla

$$W_1(A) \cup W_2(A) \cup \dots \cup W_{i-1}(A) \cup W_i(A)$$

fonksiyonu da bir büzülme dönüşümüdür.

Tanım 3.6 : Bir (X, d) tam metrik uzayı ile üzerinde tanımlanmış olan $w_i : X \rightarrow X$ büzülme dönüşümleri $\{w_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ sonlu kümesine Yinelemiş (itere) Fonksiyon Sistemi (IFS) adı verilir. w_i fonksiyonu büzülme sabiti k_i ise $(X, \{w_i\})$ sisteminin büzülme sabiti $k = \max \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ olur. $W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ bir büzülme dönüşümü ise sabit noktasını bulmak için keyfi bir $A_0 \in \mathcal{H}(X)$ kümesi ile başlanan bir ardışık yaklaşım işleminin $A_n = W(A_{n-1}) = W^n(A_0)$ şeklinde sürdürülmesi gerekir. W^n ile W nin kendisi ile n kere kompozisyonu ifade edilir. Dönüşümün sabit noktası olan $A \in \mathcal{H}(X)$ kümesi

$$W(A) = A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} W^n(A_0)$$

olarak belirlenir. Tanım olarak A bir fraktaldır. W büzülme dönüşümü bir yinelenmiş fonksiyon sistemi aracılığıyla tanımlanmışsa A sabit noktasına sistem için çekici adı verilir. Yinelenmiş fonksiyon sistemleri ile özellikle dinamik sistemler bağlamında karşılaşılır. Bu sistemlerde başlangıç

koşullarına aşırı duyarlı bir çekici, Garip Çekici olarak adlandırılır, (Şuhubi 2001).

Örnek 3.1 : Doğal metriği ile $\mathbb{R}$ reel sayılar tam metrik uzayı alınsın $w_1(x) = \frac{1}{3}x$ ve $w_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ fonksiyonları ile iki tane $w_1, w_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü tanımlansın. $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için

$$|w_i(x_1) - w_i(x_2)| = \frac{1}{3} |x_1 - x_2|, \quad i = 1, 2$$

olduğundan bu fonksiyonlar büzülme dönüşümleri olup büzülme sabitleri $k = k_1 = k_2 = \frac{1}{3}$ ile verilir. $\mathcal{H}(\mathbb{R})$ ile $\mathbb{R}$ nin kompakt, yani kapalı ve sınırlı kümelerinin sınıfı gösterilir. Bu küme üzerindeki h metriği $\mathbb{R}$ deki $d(x, y) = |x - y|$ metriği aracılığı ile belirlenir. $W : \mathcal{H}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{R})$ büzülme dönüşümü her $B \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$ için $W(B) = W_1(B) \cup W_2(B)$ olarak tanımlanır. Sabit noktayı bulmak amacıyla herhangi bir kompakt küme, örneğin bir $B_0 = [0, 1]$ kümesi ile yinelemeye başlanabilir.

$$B_1 = W(B_0) = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{3}\right]$$

olur. Burada W fonksiyonu $[0, 1]$ aralığının orta üçtebirini boşaltma işlemini görmektedir.

$$B_2 = W(B_1) = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, \frac{9}{9}\right]$$

kümesi ise B_1 deki iki kapalı aralığın orta üçtebirleri boşaltılarak elde edilen dört kapalı kümenin birleşimidir. Ardışık yaklaşıma devam edilecek olursa büzülme dönüşümü $(n + 1)$. adımımda n . adımdaki kapalı kümelerin her birinin orta üçte birini boşaltıp iki kat sayıda yeni kapalı kümeye yol açtığı sonucuna varılır. Bu nedenle,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B$$

kümesi Cantor kümesidir. Bu durumda, Cantor kümesi bir fraktaldır. Fraktallar kompakt kümeler olmalarına karşın genelde çok karmaşık geometrik

yapılara sahiptir. Ancak bu karmaşıklık içinde aynı fonksiyonun ardışık uygulanması yoluyla elde edilmelerinden kaynaklanan ilginç özellikler taşır-
lar.

4. FRAKTALLAR

Standart geometriden farklı olarak, doğadaki pek çok yapı düzensiz ve parçalı bir görünüme sahiptir. Doğa bu açıdan, yüksek seviyeli ve oldukça farklı bir karmaşa gösterir. Yeterince küçük ölçeklerde doğa paternlerin tümü pratik açıdan sonsuz kabul edilebilecek uzunluktadır. Bu formlar öklid geometrisi açısından biçimsiz, morfoloji açısından amorfudur. Ancak özellikle bilgisayar teknolojisindeki gelişmeler sayesinde bu düzensiz ve parçalı yapılar matematiğin ve fiziğin araştırma sahasına girmiştir. Bu eğriler ailesi fraktallar olarak adlandırılmıştır. Bazı fraktal kümeleri, eğriler ve yüzeyler biçimindeyken bir kısmı bağlantısız tozlar biçiminde veya bilimin ve sanatın adlandıramayacağı kadar karmaşık biçimli olabilirler. Durum geçişleri (katı - sıvı, sıvı - gaz veya tersi), türbülans, hidrodinamik, kimyasal tepkimeler, kristaller (örneğin kar kristalleri), gezegenlerin yörüngeleri, kalp, akciğerlerdeki bronşlar, kan damarları, deri, dünya yüzeyi, sahil şeritleri, atmosferik olaylar, nükleer tepkimeler, beyin, brown hareketi, yapraklar, ağaç dalları, ... fraktal yapılardan oluşmuştur veya bunların davranışlarının fraktal yapıları ile doğrudan ilişki vardır.

Fraktal geometri, klasik Öklid geometrisinin bir uzantısıdır. Yapraklardan galaksilere kadar uzanan fiziksel yapıları tanımlamada kullanılan yeni bir dildir. Öklid geometrisine göre bir doğru parçası tek bir boyuta sahiptir: uzunluk. Bir kağıt eğri bükürü çizgilerle karalandığında elde edilen şekiller Öklid geometrisine göre yine tek boyutludur. Olay bir de farklı bir açıdan incelensin. Karalama işi tüm kağıt doluncaya kadar sürdürülürse sonuç olarak iki boyutlu bir düzlem elde edilir. Matematikçiler yüz yıl kadar önce bu başlangıç noktasından yola çıkarak yeni bir boyut kavramı ortaya attılar. Fraktal Boyut adı verilen bu kavram bir eğrinin tam sayı olmayan,

ondalıklı bir boyutu olduğunu gösterir. Cantor, Von Koch, Hausdorff, Besicovitch gibi ünlü matematikçiler bu kavrama dayanarak klasik matematikçilerin canavar(monster) olarak adlandırdıkları eğriler çizdiler. Hızlı sayısal bilgisayarların ortaya çıkmasına kadar geçen süre içinde bu tür eğrilerin çizilmesi oldukça fazla zaman aldı ve fraktal geometri oldukça yavaş gelişti. B.Madelbroth sayısal bilgisayar kullanarak fraktal nesneleri derinlemesine inceleyen ve çalışmalarını izleyen diğer matematikçilerin takdirini kazanan ilk kişi oldu, (Gleick 2003).

4.1 Fraktal Geometri Nerelerde Kullanılır?

Klasik geometri sadece insan yapımı nesneleri tanımlamada kullanılır. Fraktal geometri ise doğada bulunan nesneleri tanımlamak için kullanılan bir yöntemdir. Fraktal eğriler hem doğanın simülasyonunda kullanılır, hem de sanatsal değer taşırlar. Meteoroloji, akışkan dinamiği, ekonomi, biyoloji vb. dinamik sistemlerin açıklanmasında önemli rol oynarlar. Fraktal geometrinin ilginç uygulamalarından biri de görüntü sıkıştırma. Fraktal ne işe yarar? sorusuna verilecek en iyi yanıt şudur: Fraktallar çeşitli bilim dalları ile ilgili henüz çözilemeyen problemlere yanıt aramada kullanılan bir araçtır, (Stevens 1990).

4.2 Fraktal Geometrinin Özellikleri ve Klasik Geometri

1. Öklid geometrisinin kökeni 2000 yıl öncesine dayanırken, fraktal geometri alanında çalışmalar bilgisayar teknolojisinin gelişimi ile hızlanmıştır.
2. Öklid geometrisi insan yapımı nesneleri tanımlar, fraktal geometri ise doğadaki nesneleri tanımlar.
3. Fraktallar kendine benzerdirler (self similaritiy). Fraktallar yapılarında kendilerinin pek çok küçük kopyalarını barındırırlar.
4. Fraktalların çok detaylı yapıları vardır. Bir fraktal büyütülecek olursa bu detaylar belirginleşir.

5. Detaylı yapılarına rağmen fraktalları tanımlamak kolaydır. Klasik geometri elemanları formüllerle ifade edilir. Fraktallar ise özyineleme metodları ile oluşturulurlar.
6. Bir fraktalın bütünü ya da bir parçası klasik geometri terimleri ile ifade edilemez. Fraktalların özellikleri basit geometrik ifadeler ile tanımlanamaz. Fraktallar basit denklemlerin çözüm kümesi değildir.
7. Fraktalların büyüklüğü, uzunluk gibi alışlagelmiş ölçülerle tanımlanamaz. Fraktallar, fraktal boyuta sahiptirler ve bu boyut fraktalların topolojik boyutundan büyüktür, (Falconer 1990).

4.3 Fraktal Algoritmaları

Matematikçiler 2, 3 ve daha yüksek boyutlardaki eğri ve yüzeylerle ilgili teoriler ortaya koymuşlardır. Bu eğri ve yüzeyler bir bütün olarak incelendiklerinde oldukça karmaşık bir yapıya sahiptirler. Fakat bu eğri ve yüzeyler küçük parçalar halinde incelenirlerse her bir parçanın çevredeki komşulukları ile doğrusal ya da yüzeysel ilişkide olduğu görülür. Eğri ve yüzeylerin bu tür özellikleri ile ilgilenen bilim dalına Diferansiyel Geometri denir. Fraktallar ise bunun tam tersine düzgün olmayan yüzey ve eğriler ile ilgilidirler. Düzgün objeler büyütüldüklerinde yeni detaylar ortaya çıkmaz. Fraktallarda ise durum tam tersidir. Fraktallar doğayı taklit etmede kullanılır. Fraktallar ne kadar karmaşık olsalarda onları oluşturan algoritmalar kısa ve basittirler. Fraktallar oluşturuldukları algoritmalara göre Deterministik ve Rastgele olmak üzere iki alt başlıkta incelenebilir.

4.3.1 Deterministik Fraktallar

Sierpinsky Gasket, Von Koch eğrisi gibi kendi kendilerinin küçültülmüş ve döndürülmüş kopyalarını kapsayan fraktallar bu gruba girer. Bu tür fraktallar özel bir kurala bağlı olarak iteratif veya özyinelemeli olarak tasarlanan algoritmalarca üretilir, (Falconer 1990).

4.3.2 Rastgele Fraktallar

Genelde doğayı simüle etmede kullanılan ve yapılarında gelişigüzellik barındıran metodlarla Rasgele Fraktallar elde edilirler. Midpoint Displacement, Fourier Filtering, Random Cut metodu gibi metodlar rastgele fraktallar üretmek için idealdir. Genelde bu metodlar özyinelemeli algoritmalar kullanılarak bilgisayar programı haline dönüştürülür, (Falconer 1990).

Fraktallar sonsuz detaya sahip oldukları için tam ve doğru olarak hesaplanamazlar. O yüzden bilgisayar uygulamalarında belli bir duyarlılık hesaba katılarak fraktallara yaklaşım sağlanabilir. İstenen çözünürlük seviyesi, ekran üzerindeki piksellerin sayısı ve işlemde geçen zaman vb. kısıtlamalar çerçevesinde belirlenir, (Peitgen ve Saupe 1988). Belli koşullar altında insan kalbinin atışı kaotik bir davranış ortaya koyar. Kalbin atış hızı, ritmik etkinliği denetleyen organca belirlenir. Ancak bazı durumlarda bu organla kalbin uyumlu çalışmaması nedeni ile kalp atışları arasında birbirini izleyen uzun ve kısa boşluklar ortaya çıkar. Daha ekstrem koşullarda ise kalp atış ritmi düzensiz bir hal alır. Kalbin herhangi bir atışının zamanlamasında meydana gelen çok küçük bir değişiklik, bir sonraki kalp atışında büyük bir değişikliğe yol açar. Kalp atışları kaotik bir hale gelir ve yaşamı tehdit eder. Bu durum düzenli bir davranışın başlangıç koşulları değiştiğinde nasıl kaosa dönüştüğünü gösteren ilginç bir örnektir. Bu şekilde düzenli davranıştan kaotik davranışa geçişe, damlayan bir musluğun sesi dinlenirken de tanık olunur. Musluğun altına bir parça alüminyum folyo yerleştirilirse, damlamanın çok yavaş olması durumunda, folyodan düzenli bir ses duyulur. Eğer musluk çok az açılırsa, damlamalar, birbirini izleyen uzun ve kısa zaman aralıklarında meydana gelmeye başlar. Musluk biraz daha açılırsa düzenli, kararlı davranış tümüyle ortadan kalkar ve kaotik davranışa geçilir. Kaotik davranış, evrende daha büyük ölçekte kendini gösteren düzenlilikle çelişmektedir. İnsanlar tarih boyunca, mevsimlerin, gece ve gündüzün

birbirini izlemesindeki düzeni, gezegen ve yıldızların hareketindeki kesinliğini anlamaya çalışmıştır. Bu tür göksel olaylar Isaac Newton' un hareket yasaları ve evrensel çekim yasasında belirtildiği gibi Dünya'nın ve diğer gezegenlerin hareketlerindeki düzenlilikten kaynaklanır. Bu yasalara göre Güneş'in ve gezegenlerin konumu ve hızı, bütün geçmiş ve gelecek zamanlardaki konumu ve hızı da belirler.

Geleceğin geçmiş tarafından tam olarak belirlendiği Newton'un hareket yasaları determinizmin klasik bir örneğidir. Bilim adamları genellikle evrende bu tür düzenlilikleri arama eğilimindedirler. Ancak düzenlilik evrensel değildir. Dolayısıyla düzensizlik, üzerinde önemle durulması gereken bir olgu olarak karşımıza çıkmaktadır. Düzensizlik konusunda ilk çalışan matematikçiler Simon ve Laplace dir. Laplace evrene tamamen Newton gibi bakar. Bununla birlikte Laplace, olayların bireysel olarak öngörülemez olmasına karşın, çok sayıda olayın ayırıcı davranışını açıklayan düzensizlik ya da olasılık teorisinin ortaya konmasına yardımcı olmuştur.

19. yüzyıl boyunca, biri deterministik (belirleyimci), diğeri olasılık kuramı olmak üzere birbirine karşıt iki kuram egemen olmuştur. Bu kuramların karşısına 1920 ve 1930 larda önce kuantum kuramı, daha sonrada kaos kuramı çıkmıştır. Basit matematiksel çözümlemeler, Newton'un hareket yasalarına uyan çok basit sistemlerde bile bir sonraki adımın öngörüle-meyeceğini ortaya koymaktadır. Bunun nedeni başlangıç koşullarına hassas bağımlılıktır. Bir cisim üzerine birden fazla kuvvetin etki etmesi durumunda, bu davranış biçimi ile sıklıkla karşılaşılır. Buna klasik bir örnek olarak, altına yerleştirilmiş iki adet mıknatıs tarafından eşit olarak çekilen bir sarkaç verilebilir.

Sarkaç, mıknatıslar arasındaki mesafenin ortasına doğru yavaşca ilerlerken, mıknatıslar tarafından sarkacın ucundaki metal ağırlığa hemen hemen eşit

bir kuvvet uygulanır. Sarkacın ilerleyen zaman içindeki davranışı, o anki konum ve hız koşullarına son derece duyarlı bir hale gelir. Diğer bir deyişle sarkacın davranışı kaotik olur. Ancak bu, sarkacın davranışı hakkında hiç birşey söylenemeyeceği anlamına gelmez. Bazı başlangıç koşulları için sarkacın davranışı düzenli ve uzun bir süre için öngörülebilirdir. Öte yandan sarkacın kaotik davranışı ile ilgili pek çok özellikleri olasılık teorisi ile anlaşılabilir.

Belirleyimci kaos kuramı, belirleyimcilik ve olasılığın paradoksal birlikteliğinin kuramıdır. Kaosun gerisindeki mekanizmaların anlaşılması yalnızca suda yüzen bir yaprağın davranışı, düzensiz kalp atışları ve damlayan bir muslukta değil; evrenin küçük ve büyük ölçekte pek çok görünümünü anlamamızda yardımcı olacaktır. Bu özelliği nedeni ile kaos teorisi bütün bilim dallarında yerini almıştır.

Biyologlar kaosu böcek ve kuş nüfusunun değişiminde, salgın hastalıkların yayılmasında ve hücre metabolizmasında görmektedir. Fizikçiler elektronun hareketinde, moleküllerin atomlarında, gazlarda ve temel parçacıklar teorisinde yine kaosa karşılaşmaktadır. Diğer taraftan değişik alanlarda çalışan mühendisler de artık yapmış oldukları dizaynlarda kaosu dikkate almaktadır. Kaosun en güzel örneklerini matematikte bulmak mümkündür. Görünüşte çok basit problemlerin çözümü son derece karmaşık davranışlar ortaya koymaktadır. Basit olmasına karşın lineer olmayan bu tür problemlerin çözümü ancak bilgisayarların devreye girmesi ile kolaylaşmıştır. Bu nedenle kaos, bilgisayar çağının bilimi olarak adlandırılabilir, (Gleick 2003).

5. KENDİNE BENZERLİK VE FRAKTAL BOYUT

Bu bölümde fraktal geometrinin temel ve birbiriyle ilişkili iki temel kavramı olan Kendine Benzerlik ve Fraktal Boyut incelenecektir.

5.1 Kendine Benzerlik (Self Similarity)

5.1.1 Tam Kendine Benzerlik

Kendine benzer bir nesne, dönme ve transformasyonlarla elde edilmiş, kendisinin belli bir oranda küçültülmüş N kopyasından oluşmaktadır. E boyutlu bir uzayda $x = (x_1, x_2, \dots, x_E)$ konumunda bulunan noktalar kümesi S ile gösterilsin. Bu kümeye $0 < r < 1$ olacak şekilde belirlenen bir r küçültme oranı ile benzerlik transformasyonu uygulanırsa S kümesi $rx = (rx_1, rx_2, \dots, rx_E)$ noktalarında oluşan rS kümesi haline dönüşür. S kümesi N tane birbirinden farklı rS kümelerinin birleşiminden oluşuyorsa tam olarak kendine benzer bir kümedir, (Peitgen ve Saupe 1988).

5.1.2 İstatistiksel Kendine Benzerlik

Bir segment büyütülüp incelendiğinde elde edilen segmentlerin orijinali ile aynı olmadığı görülür. Bütünün küçük bir parçası büyük bir parçasına benzer ama onun bir eşi değildir. Segmentler farklı ölçeklerde büyütülüp küçültülmüşlerdir. Bu durum İstatistiksel Kendine Benzeme olarak adlandırılır. Değişik ölçeklerde pek çok detaylar içeren objelerin istatistiksel kendine benzer olma özelliği doğadaki fraktalların ortak özellikleridir. Detayların belirlenmesi ölçek büyüyüp küçüldükçe değişir.

Fraktalların bulundukları metrik uzay içinde ne kadar yoğun oldukları kişiden kişiye değişebilir. Fraktal boyut, bu özel yaklaşımları nesnel yaklaşımlar haline dönüştürerek fraktalları karşılaştırabilme çabasının sonucu olarak

ortaya çıkmıştır. Fraktal boyut gerçek dünya ile bağlantılı olarak tanımlanabilir. Örneğin İngiltere kıyılarının fraktal boyutu 1,3 olarak ölçülmüştür. Bulutları, ağaçların, kıyıların, kuş tüylerinin vücuttaki nöronların birer fraktal boyutu vardır. Bu sayılar gerçek dünyaya ilişkin kümelerin karşılaştırılmasında kullanılır, (Barnsley 1988).

5.2 Topolojik Boyut (D_T) :

Topolojik boyutun temelleri Öklid'in düzlem geometrisi üzerine yazdığı bir kitapla anlatılır.

1. Bir nokta kendinden küçük bir ögeye ayrıştırılamaz.
2. Bir doğrunun genişliği yoktur; ama uzunluğu vardır.
3. Bir doğru parçasının uçları birer noktadır.
4. Bir yüzeyin eni ve boyu vardır.
5. Yüzeylerin sınırları doğrulardır.
6. Bir cismin eni, boyu ve derinliği vardır.
7. Bir cismin kapladığı alanın sınırları ise yüzeylerdir.

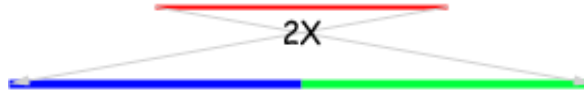
Poincare ise topolojik boyutu şöyle tanımlar: Bir geometrik cismin topolojik boyutu o geometrik objeyi parçalara ayırmak için kullanılan diğer geometrik objelerin topolojik boyutlarından 1 fazladır, Uzayı bölmek için yüzeyler, yüzeyleri bölmek için eğriler, eğrileri bölmek için noktalar kullanılır. Noktalar ise parçalara ayrılmaz. Bu nedenle noktaların topolojik boyutu 0 dir. Eğrileri bölmek için noktalar kullanıldığından eğrilerin topolojik boyutu 1 dir. Yüzeyleri bölmek için doğrular kullanıldığından yüzeylerin topolojik boyutu 2 dir. Uzayı bölmek için yüzeyler kullanıldığından uzayın topolojik boyutu 3 dür. Tüm adaların kıyıları topolojik olarak bir çembere özdeştir. Tüm çemberlerin topolojik boyutları 1 dir. Bu durumda kıyıları birbirinden ayırmak için topolojik boyut kullanılamaz, (Mandelbrot 1983).

5.3 Fraktal Boyut (D)

Fraktal boyut topolojik değil, metrik bir kavramdır. Uzayda iki nokta arasındaki uzaklığın tanımlanabiliyor olması temelinden yola çıkılarak ortaya konmuştur. Fraktal boyutun temeli Hausdorff ve Besicovitch tarafından atılmıştır. Topolojik ve fraktal boyut arasında şu şekilde bir ilişki söz konusudur. İçinde bulunulan $\mathbb{R}^E$ uzayında D_T ve D en az 0, en çok E olabilir. D_T her zaman bir tamsayıdır ama D tamsayı olmak zorunda değildir. Öklid geometrisine bağlı kalınarak oluşturulan objeler için $D = D_T$ dir. Diğer durumlar içinse $D > D_T$ dir.

Buradan yola çıkılarak fraktallar: Hausdorff-Besicovitch boyutunun topolojik boyutundan büyük olan kümeler fraktal kümeler denir, (Mandelbrot 1983).

Fraktal Boyut ve kendine benzerlik arasında önemli bir ilişki vardır. Bir doğru parçası tek boyutludur. N eşit parçaya bölerek $r = \frac{1}{N}$ oranında küçültülebilir.



Şekil 5.1 Doğru Parçası ve Kendine Benzer Şekiller

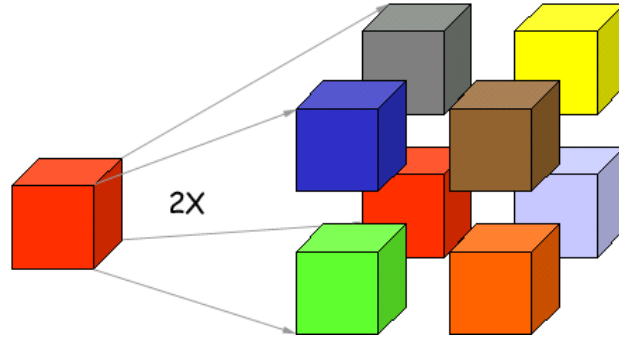
Kare gibi iki boyutlu bir obje de $r = \frac{1}{\sqrt{N}}$ oranında küçültülerek kendine benzeyen N eşit parçaya bölünebilir.



Şekil 5.2 Kare ve Kendine Benzer Şekiller

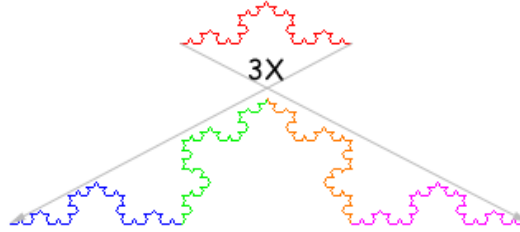
Üç boyutlu bir küp ise $r = \frac{1}{\sqrt[3]{N}}$ oranında küçültülerek N küçük kübe

bölünebilir.



Şekil 5.3 Küp ve Kendine Benzer Şekiller

Genel olarak D boyutlu kendine benzeyen bir nesne $r = \frac{1}{\sqrt[p]{N}}$ oranında küçültülerek N tane kendisinin küçük bir kopyası elde edilebilir.



Şekil 5.4 Koch Eğrisi ve Kendine Benzer Şekiller

Bu ifadeden benzerlik veya fraktal boyut olarak adlandırılan D çekilebilir:

$$N = \frac{1}{r^D} \Rightarrow D = \frac{\log(N)}{\log \frac{1}{r}}$$

Bu şekilde elde edilen D , Benzerlik ya da Fraktal Boyutu olarak adlandırılır. Fraktal Boyut, Öklit boyutundan farklı olarak tam sayı olmak zorunda değildir.

Fraktalın orjinal tanımı Mandelbrot tarafından aşağıdaki gibi yapılmıştır, (Feder 1988): “Bir fraktal, boyutu topolojik boyuttan farklı olan kendi kendine benzer (ölçekteki değişme anlamında) bir kümedir.”

Büyüklüğü R olan bir oluşumda parçacık sayısı N ;

$$N \propto R^d$$

bağıntısı ile verilir. Burada d , uzayın boyutudur. Oluşumun hacmi de aynı formdadır ve

$$V = A_d R^d$$

ile verilir. Burada A_d , geometrik biçimin hesaba katıldığı geometrik çarpanıdır (eş eksenli biçim için $A_1 = 2\pi, A_2 = 4\pi, A_3 = 4\pi/3$ dır). Dolayısıyla kompakt oluşumlarda $\rho = \frac{N}{V}$ biçiminde ifadedilen parçacık yoğunluğu, oluşumun büyüklüğünden bağımsızdır.

Kompakt olmayan oluşumlar için tamamen farklı bir durum gözlenmektedir. Oluşumun R büyüklüğü artarken parçacık sayısı

$$N \propto R^D$$

çok yavaş bir biçimde artar. D üsteli, fraktalın temel nicel karakteristiğidir ve fraktal boyutu denir. D fraktal boyutu, yoğunluk oluşumu için verilen $N \propto R^d$ bağıntısındaki fiziksel uzayın d boyutundan farklı olduğu için $N \propto R^D$ bağıntısı anormal bir karaktere sahiptir. Bu nedenle;

$$\rho \propto R^{-(d-D)}, \quad d > D$$

şeklinde verilen fraktalın yoğunluğu, fraktalın kompakt olmayan karakterini yansıtan büyüklüğün azalan bir fonksiyonudur. Sonuç olarak d topolojik ve D fraktal boyutları arasındaki fark ne kadar büyükse fraktal nesne o kadar belirginleşir, (Olemskoi and Flat 1993).

Fraktal kavramı ile ilk olarak sahil şeritlerinin uzunluğunun ölçümünde karşılaşılmıştır. Sezgisel olarak sahil şeridinin L uzunluğunun, ölçüm ölçeğinin ($\ell \rightarrow 0$) seçimine bağlı olmaması gerektiği halde ölçümler gerçekte

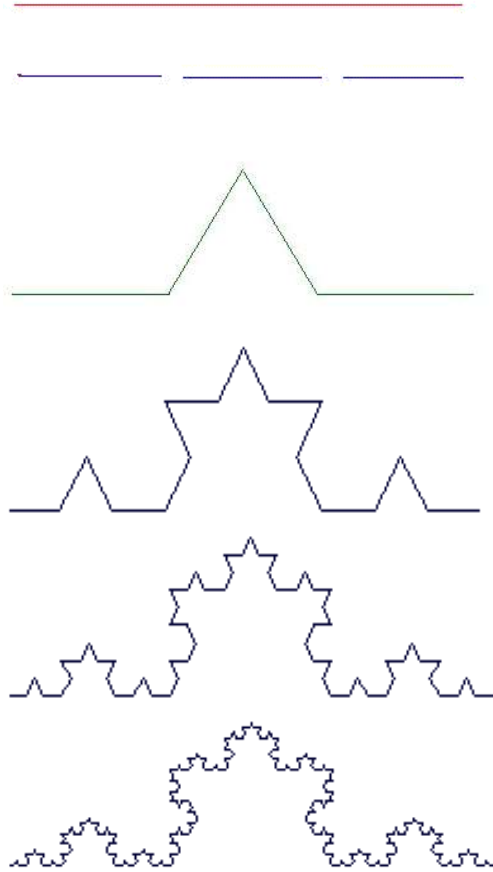
$$L \propto \ell^{1-D}$$

bağıntısının geçerli olduğunu göstermiştir. Sahil şeridi ölçümünde fraktal boyutun $D > 1$ olduğu bulunmuştur (İngiltere adaları için $D \approx 1,3$) bu

durum, sahil şeridinin doğru ($d = 1$) ve yüzey ($d = 2$) arasında bir küme olduğunu gösterir ve $1 < D < 2$ niceliği ne kadar büyükse sahil şeridi o kadar düzensizdir, (Feder 1988).

Bir fraktalın temel karakteristik boyutu D dir. Bir sonraki kısımda D 'nin tek değeri ile karakterize edilen ideal monofraktal hali incelenecektir. İlk önce sezgisel anlamda D boyutunu kullanabilmeyi mümkün kılan uygun geometrik modeller verilecek sonra keyfi bir monofraktal için D 'yi analitik olarak belirleyebilmeyi mümkün kılan bir algoritma formüle edilecektir.

5.4 Fraktalların Geometrik Modelleri



Şekil 5.5 Von Koch Eğrisi

Koch'un üçgenel (triadic) şekli göz önüne alınsın. Bu şekli oluşturmak için

$n = 0$ adımında birim uzunluklu bir parça (segment) alınır. Bir sonraki $n = 1$ adımında $1/3$ uzunluklu orta (iç) parça asıl parçanın merkezinden kesilerek çıkartılır ve tabanı olmayan eşit kenarlı üçgen parçanın üzerinde oluşturulur. Daha sonraki adımda $(1/3)^2$ uzunluklu iç parça, elde edilen dört parçanın herbiri üzerinden kesilerek çıkartılır ve yukarıda yapılan oluşum aynen tekrarlanır. Daha sonra bu işlem $n \rightarrow \infty$ kez tekrarlanır.

Elde edilen fraktalın uzunluğu L olsun. Her adımdan sonra uzunluk $4/3$ kez artacağından n 'inci adımda $L_n = (4/3)^n$ olacaktır. Her bir bölümün uzunluğu $\ell_n = (1/3)^n$ olduğundan $n = -\ln(\ell_n)/\ln 3$ elde edilir ve L_n toplam uzunluğu ile ℓ_n temel uzunluğu arasında $L\alpha\ell^{1-D}$ bağıntısı geçerlidir.

Burada fraktal boyut

$$D = \ln 4 / \ln 3 = 1,263$$

bulunur ve parça sayısı $N_n = L_n/\ell_n$

$$N(\ell)\alpha\ell^{-D}$$

bağıntısı ile belirlenir (n indisi alınmamıştır). Koch eğrisi için $n \rightarrow \infty$ limitinde bir doğru ile bir yüzey arasında kalan bir şekildir. Bu nedenle fraktal boyutu $1 < D < 2$ aralığındadır.

Fraktal, kendi kendine benzer bir kümedir. Bu durum üçgenel Koch şeklinin oluşturulmasında indirgenilen bir ölçekte özdeş küme oluşturma'nın her n adımda yapılmaktadır bu nedenle Koch şeklinin her parçası, bileşenlerinin her biri gereken ölçeğe kadar basitçe artırılarak elde edilebilir. Temel kesim-in ℓ uzunluğu λ kadar azaltılırsa parça sayısı olan $N(\ell)$ artar. Bu durum $L\alpha\ell^{1-D}$ bağıntısı kullanılarak

$$N(\lambda\ell) = \lambda^{-D}N(\ell)$$

$$\lambda < 1$$

elde edilir. Yukardaki denklemi sağlayan $N(\ell)$ fonksiyonu, değeri fraktal boyutuna eşit olan D mertebeli homojen bir fonksiyondur. Homojen $N(\ell)$

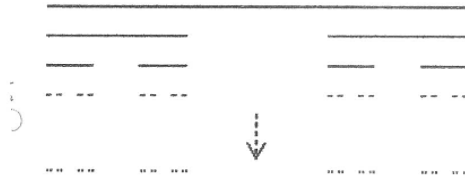
fonksiyonlarının karakteristik fonksiyonu ℓ argümanının ölçüm ölçeğinin λ kadar azalması N fonksiyonunun λ^{-D} kadar artmasına eşdeğerdir. Kendine benzerlik özelliği tüm fraktal oluşumların karakteristiğidir.

$$\begin{aligned} N(\lambda\ell) &= \lambda^{-D} N(\ell) \\ \lambda &< 1 \end{aligned}$$

benzerlik bağıntısı üçgenel Koch şekli için verilen $D = \ln 4 / \ln 3 = 1,263$ ve $N(\ell)\alpha\ell^{-D}$ ifadelerinden daha geneldir. $N(\lambda\ell) = \lambda^{-D} N(\ell)$ ifadesinde λ benzerlik parametresi $\lambda\ell = 1$ koşulu yardımıyla sabitlenerek $N(\ell)\alpha\ell^{-D}$ bağıntısı elde edilir. Diğer taraftan keyfi λ ölçeğine sahip $\ell_n = \lambda^n$ temel uzunluğu $(1/3)^n$ değerine indirgenemez ve $D = \ln 4 / \ln 3 = 1,263$ sonucu

$$D = \ln 4 / \ln \lambda^{-1}$$

şeklinde genelleştirilmelidir. Burada $\lambda < \ell^{-1}$ benzerlik parametresi, Koch şeklini oluşturan bloğun dört parçasının her birinin kısalma miktarını gösterir, (Feder 1988).



Şekil 5.6 Cantor Tozu

$D < 1$ boyutlu (Cantor tozu) fraktal kümenin oluşumu için Koch eğrisinden farklı olarak n 'inci adımda boyu $\ell_n = (1/3)^n$ olan n aralık eklemek yerine bu aralıkların çıkarılmasıdır. Dolayısıyla kalan kümenin uzunluğu $L_n = (2/3)^n$ dir ve her bir bölümün ℓ_n uzunluğu yine $\ell_n = (1/3)^n$ dir. Sonuç olarak

$L_n(\ell_n)$ bağıntısı daha önce verilen $L\alpha\ell^{1-D}$ fonksiyonu ile ifade edilebilir. Burada fraktal boyut

$$D = \ln 2 / \ln 3 = 0,631$$

dir. $D < 1$ koşulu, Cantor tozunun nokta ve doğru arasında kalan bir ara oluşum olduğunu belirtir. Koch şeklinde olduğu gibi oluşumun her n adımından sonra parçaların ℓ_n uzunluğu $(1/3)$ yerine λ olacak şekilde alınırsa ($D = \ln 2 / \ln 3$) paydasındaki $\ln 3$ terimi $\ln \lambda^{-1}$ ile değiştirilmelidir. γ fraktalın oluşturulmasına katılan blok sayısı olmak üzere (Koch eğrisi ve Cantor tozu için sırasıyla $\gamma = 4$ ve $\gamma = 2$ alınmıştır) genel halde $\ln \gamma$ terimi kullanılmalıdır. Böylece verilen fraktal boyut denklemleri genelleştirilerek fraktal boyut ifadesinin

$$D = \frac{\ln \gamma}{\ln \lambda^{-1}}$$

şeklinde olması gerektiği sonucu elde edilir. Burada γ , fraktalın elemanter parçasını temsil eden blok sayısı, λ ise blok büyüklüğünün oluşumunun her adımında kaç kat küçüldüğünü tanımlayan benzerlik indisidir, (Feder 1988).

5.5 Fraktal Boyutun Teorik Olarak Hesaplanması

Tanım 5.1 : $N(A, \varepsilon)$ fraktal özellik gösteren A kümesini kaplayan ε yarı çapına sahip topların minimum sayısını gösterebilir. C bir sabit olmak üzere

$$N(A, \varepsilon) \cong C \cdot \varepsilon^{-D}$$

koşulunu sağlayan D ' ye fraktal boyut adı verilir. D , bu ifadeden çekilirse,

$$D \approx \frac{\ln(N(A, \varepsilon)) - \ln C}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \quad (1)$$

$$\frac{\ln C}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0 \quad (2)$$

(1) ve (2) den dolayı $D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(N(A, \varepsilon))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \right\}$ değeri A kümesinin fraktal boyutunu verir. Bu kümeyi örten minimum sayıda topun yerleştirilmesi zor olabilir bu durumda fraktal boyutun hesaplanması için Kutu Sayma Teoreminden yararlanılabilir, (Barnsley 1988).

5.6 Kutu Sayma (Box Counting) Teoremi

Fraktal özellik gösteren B kümesini kaplayan kenarı $\frac{1}{2^n}$ uzunluğuna sahip, birbirine değen karelerin sayısı $N_n(B)$ ile gösterilsin. Fraktal boyutu belirlemek için şu formül kullanılır, (Barnsley 1988).

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(N_n(B))}{\ln(2^n)} \right\}$$

5.7 Hausdorff Boyutu ve Fraktal Boyut

Bir (X, d) metrik uzayının Hausdorff Boyutu aşağıdaki özelliği sağlayan k sayılarının infimumu olarak tanımlanır. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $\delta > 0$ sayısı ve X 'in B örtüsü her $B \in \mathcal{B}$ kümesi için, $D(B) < \delta$ ve $\sum_{B \in \mathcal{B}} [D(B)]^k < \varepsilon$ olacak şekilde vardır. $D(B) > 0$ sayısı B kümesinin çapını gösterir. Hausdorff Boyutu $b_H = \inf k$ dır. Bu durumda X kümesinin tamamı δ çaplı açık yuvarlar ile örtülürse uzayın Hausdorff Boyutu b_H olmak üzere açık yuvarların sayısı yaklaşık olarak

$$N(\delta) \approx \delta^{-b_H}$$

mertebede olur. Hausdorff Boyutu X in bir alt uzayının içinde tanımlanabilir dolayısıyla bu uzayın uygun bir örtüsünün dikkate alınması gerekir, (Şuhubi 2001).

Örnek 5.1 : $X \subset \mathbb{R}^n$ birim küp olsun. Yani $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$

ise $0 \leq x_i \leq 1$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ alınsın. Metrik,

$$d(x, y) = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

olarak tanımlansın. Belirtilen metriğe göre δ çaplı yuvar kenar uzunluğu δ olan bir küptür. m pozitif tamsayısı için $\delta = \frac{1}{m}$ alınsın. X kümesini örten δ kenarlı küplerin sayısı m^n olduğundan k sayıları $m^n (\frac{1}{m})^k < \varepsilon$ veya $m^{n-k} < \varepsilon$ koşulunu sağlamalıdır. ε değeri istenildiği kadar küçük seçilebilir, $k \geq n$ olmalıdır. k sayılarının infimumu n dir. Bu durumda X alt uzayının Hausdorff boyutu, vektör uzayının boyutu ile aynıdır ve aşağıda verilen sonuca ulaşılır.

$$b_H = n$$

Örnek 5.2 : X Cantor kümesi olmak üzere n . adımdan sonra kümede herbirinin uzunluğu $(\frac{1}{3})^n$ olan, 2^n sayıda kapalı aralığın birleşimi olur. Bu durumda her n pozitif tam sayısı için k sayıları;

$$2^n (\frac{1}{3})^{nk} < \varepsilon$$

koşulunu sağlamalıdır. Bu durum

$$e^{n(\log 2 - k \log 3)} < \varepsilon$$

olarak alındığında eşitsizliğin sol tarafının küçük olabilmesi için k sayılarının

$$k \geq \frac{\log 2}{\log 3}$$

eşitsizliğini sağlaması gerekir ve bu sayıların infimumunu aşağıda verilen sonuçtur.

$$b_H = \frac{\log 2}{\log 3} = 0,63093$$

Tanım 5.2 : (X, d) tam metrik uzay ve $B \in \mathcal{H}(X)$ uzayın kompakt alt kümesi olmak üzere $N(B, \delta)$ ile B kümesini örten δ yarıçaplı en az sayıda kapalı yuvar sayısını gösterebilir. B alt kümesinin fraktal boyutu

$$D = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N(B, \delta)}{\log(\frac{1}{\delta})}$$

olarak tanımlanır. Burada $\delta \rightarrow 0$ için $N(B, \delta) \approx \delta^{-D}$ yazılabilir, (Şuhubi 2001).

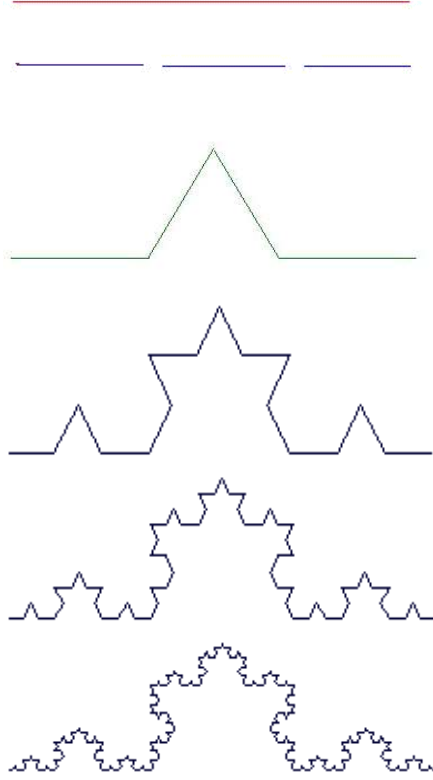
Örnek 5.3 : X Cantor kümesi, n . adımdan sonra kümede herbirinin uzunluğu $(\frac{1}{3})^n$ olan, 2^n sayıda kapalı aralığın birleşimi olarak yazılabilir. Cantor kümesinin fraktal boyutu $\delta = (\frac{1}{3})^n$ ve $N(B, \delta) = 2^n$ alındığında, $\delta \rightarrow 0$ limiti $n \rightarrow \infty$ limitini karşılayacağından

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 2^n}{\log 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log 2}{n \log 3} = \frac{\log 2}{\log 3}$$

bulunur.

6. FRAKTAL GEOMETRİ UYGULAMALARI

6.1 Von Koch Eğrisi



Şekil 6.1 Von Koch Eğrisi

Burada bir doğru parçası ile başlanır. Doğru parçası üç eşit parçaya ayrılır, ortadaki parça alınır ve bir eşkenar üçgen şeklinde dışa doğru tamamlanır. Böylece dört eş doğru parçasından oluşan bir kırık çizgi oluşturulur. Buna motif veya oluşturucu denir. Eğer öncü doğru parçası 1 birim uzunluğunda seçilirse, motif her biri $\frac{1}{3}$ uzunluklu dört parçadan oluşur. Dolayısıyla oluşan motifin toplam uzunluğu $\frac{4}{3}$ olur.

Benzer biçimde dört parçadan her biri öncü kabul edilirse aynı işlemle birer motif haline getirilir. Böylece ikinci adımdaki şekil elde edilir. Bu son halde

$4 \times 4 = 16$ eş doğru parçası yer alır.

Bu eğrinin toplam uzunluğu $\frac{16}{9} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$ olur. Benzer şekilde bir adım daha devam edilirse üçüncü adımda $4^3 = 64$ doğru parçası elde edilir. Her birinin uzunluğu $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$ olan eş doğru parçasından oluşan bir eğridir.

Bu eğrinin toplam uzunluğu $64 \cdot \frac{1}{27} = \left(\frac{4}{3}\right)^3$ olur.

Bu fraktalın boyutu: Boyut D ile gösterilirse $D = \frac{\log N}{\log \left(\frac{1}{a}\right)}$ ile hesaplanır.

Burada N fraktalın oluşumundaki parça sayısını ve a da her parçanın uzunluğunu göstermektedir. İkinci şekle göre $N = 4$ dür

1. şekle göre $a = \frac{1}{3}$ olduğundan

$$D = \frac{\log 4}{\log 3}$$

olur.

3. şekle göre $N = 16 = 4^2$ ve $a = \frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$ olduğundan

$$D = \frac{\log 4^2}{\log 3^2} = \frac{\log 4}{\log 3}$$

olur.

4. şekle göre $N = 64 = 4^3$ ve $a = \frac{1}{27} = \frac{1}{3^3}$ olduğundan

$$D = \frac{\log 4^3}{\log 3^3} = \frac{\log 4}{\log 3}$$

olur. Bu durumda;

$$D = \frac{\log 4}{\log 3} = \frac{\log 4^2}{\log 3^2} = \frac{\log 4^3}{\log 3^3} = \dots$$

veya

$$D = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.26...$$

bulunur. Limit halinde, öncü doğru parçasının bütün orta parçaları hızla uzaklaşacak ve geriye tam bir Cantor kümesi kalacaktır. Bu durumda Koch eğrisi kendine benzerdir. Her bir küçük parça bütünün bir minyatür kopyası olacaktır. Bu nedenle Koch eğrisi de bir Cantor kümesi olacaktır, (Hacısalihoglu ve Yaz 2002).

6.2 Ters Kartanesi

Büyük bir eşkenar üçgenle başlanır.



Şekil 6.2 Ters Kartanesi

1.Adım: Üçgenin bir kenarı üç eşit parçaya bölünür ve ortadaki parça alınır. Bu parçalardan bir tane daha bularak V şeklinde ekleyip çıkararak yeni üçgen içine doğru doldurulur, üçgenin geride kalan iki kenarına da aynı işlem uygulanır. Böylece bir fırıldak şekli elde edilir.

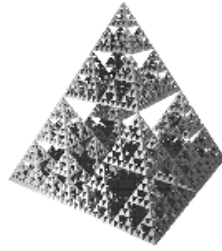
2.Adım: Bu metod fırıldakta yer alan yeni üçgenlerle tekrarlanır böylece aşağıdaki şekiller dizisi elde edilir, (Hacısalihoglu ve Yaz 2002).



Şekil 6.3 Ters Kartanesi

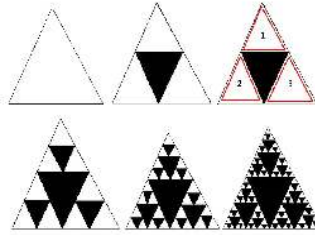
6.3 Sierpinski Üçgeni

Polonyalı matematikçi Vaclav Sierpinski (1882-1969), 1916 yılında, daha sonra kendi adıyla anılan ve Sierpinski Üçgeni veya Sierpinski şapkası veya Sierpinski Kalburu (Sierpinski Sieve) da denen bir fraktal tanıttı. Üçgen gibi alışılmış bir geometrik şekil alınır ve üzerinde daha karışık bir yeni şekil elde edecek biçimde belirli bir işlem yapılır. Bu işlem, aynen uygulanmaya devam edildikçe daha karışık olan ve aşağıda şekli görünen, Sierpinski Üçgeni denilen fraktal ve Sierpinski Piramiti elde edilir, (Hart 2005).



Şekil 6.4 Sierpinski Piramiti

I. Adım : Kenar uzunluğu 2 birim olan bir eşkenar üçgen çizilir. Her kenarının orta noktaların işaretlenip bu orta noktalar birleştirilir. Böylece dört tane yeni eşkenar üçgen oluşur. Merkezde kalan üçgen karalanır ve sonra da merkezdeki kesip atılır.



Şekil 6.5 Sierpinski Üçgeni

II. Adım: Kenar uzunluğu 4 birim olan eşkenar üçgen çizilir. Kenarlarının orta noktaları birleştirilince oluşan dört yeni eşkenar üçgenden merkezdeki, birinci adımda olduğu gibi karalanır. Sonra köşelerde yer alan ve karalanmamış olan üç adet üçgenin her biri aynı işleme tabi tutulur.

III. Adım : Kenar uzunluğu 8 birim olan eşkenar üçgen çizilir. Yukarıdaki işlemler aynen tekrar edilerek Sierpinski Üçgeni tamamlanır. Benzer şekilde boyama işi yapıp, boyanmış olanlar kesip çıkarılır. Böylece 1 adet büyük, 3 adet ortanca ve 9 adet küçük ve boyanmış eşkenar üçgen elde edilir. Sierpinski Üçgeni pür matematik alanında bir zihinsel üründür. Benzer şekilleri deniz kabuğunda ve hücre çoğalmalarında da görülebilir. Bu fraktalın boyutu: $N = 3$ ve $a = \frac{1}{2}$ olduğundan boyut formülüne göre;

$$D = \frac{\log N}{\log \left(\frac{1}{a}\right)} = \frac{\log 3}{\log 2} = 1.5850$$

bulunur, (Hacısalıhoğlu ve Yaz 2002).

6.4. Paskal Üçgeni ve Sierpinski Üçgeni Arasındaki İlişki

Pascal üçgenindeki küçük üçgenlerden içinde çift sayı bulunanlar boyansın.



Şekil 6.6 Paskal Üçgeni

Ortaya çıkan Pascal Üçgeni, aşağıdaki üçgenle karşılaştırılsın.

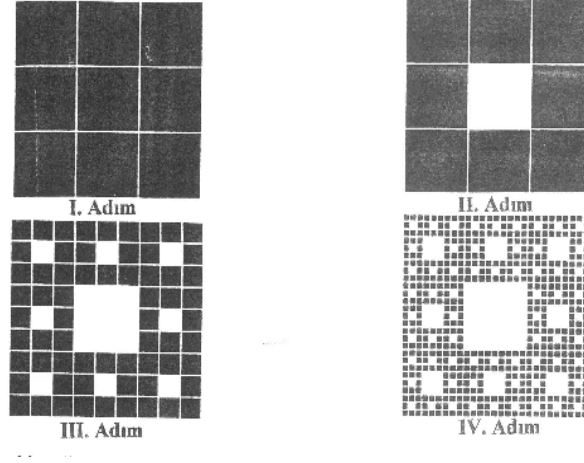


Şekil 6.7 Paskal Üçgeni ve Sierpinski Üçgeni

Böylece Pascal Üçgeninden Sierpinski Üçgeni elde edilmiş olunur.

6.5 Sierpinski Halısı

I. Adım: Kenar uzunluğu 9 birim olan bir kare alınır. Kenarların her biri üçer eşit parçaya ayrılıp karşılıklı olarak bu ayırım noktalar birleştirilir.

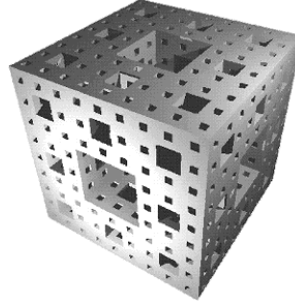


Şekil 6.8 Sierpinski Halısı

II. Adım: Oluşan dokuz eş kareden merkezdeki kesilip çıkartılır.

III. Adım: Geri kalan sekiz eş karenin her biri için aynı iş tekrarlanır.

IV. Adım: Elde edilen şekle aynı metod tekrar uygulanır.



Şekil 6.9 Menger Sünger

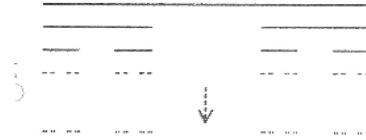
Sonuçta elde edilen şekil çoğu zaman Cantor kümesinin bir genellemesi olarak görülür. Bu fraktalın boyutu: I. Adıma göre $N = 8$ ve $a = 3$ olduğundan aşağıda verilen sonuç bulunur,

$$D = \frac{\log 8}{\log 3} = 1,8928$$

Yirminci yüzyılın başlarında, birkaç matematikçi sonsuzca çok sayıda parçalar ekleme ya da çıkartma tekniği ile yapılmış nesneler tasarlamışlardır. Bu şekillerin biriside Sierpinski Halısı ve Sierpinski Halısının üç boyutlu analogu Menger Süngeridir; bu da sonsuz yüzeyi fakat sıfır hacmi olan sağlam görünümlü bir kafestir, (Hart 2005).

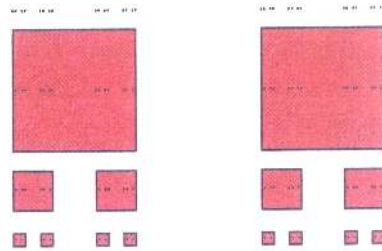
6.6 Cantor Orta Üçlülere Kümesi

Cantor Orta Üçlülerinin Kümesi, birim doğru parçasının üç eşit parçaya bölünmesi ve ortadaki üçte bir parçasının atılması, daha sonra geriye kalan iki parçanın da aynı işleme tabi tutulup ortalarındaki üçte birlik parçalarının atılması ve tekrar geriye kalan dört parçanın her biri için aynı işlemden sonra ortadaki parçalarının atılması ve bu işleme devam edilmesiyle oluşturulur.



Şekil 6.10 Cantor Orta Üçlüler Kümesi

Cantor kümesinin kutu-sayma boyutunu hesaplamak için, gitgide küçülen kutularla Cantor kümesi örtülür.



Şekil 6.11 Küçülen Kutularla Cantor Kümesi

Bu fraktalın boyutu:

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{a}} = \frac{\log 2}{\log 3} = 0,62989$$

bulunur. Diğer bir kutu sayma hesabına göre:

$$r_1 = \frac{1}{3}, N(r_1) = 2 \quad N\left(\frac{1}{3}\right) = 2$$

$$r_2 = \frac{1}{9}, N(r_2) = 4 \quad N\left(\frac{1}{9}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 4 = 2^2$$

$$r_3 = \frac{1}{27}, N(r_3) = 8 \quad N\left(\frac{1}{27}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 8 = 2^3$$

ve genel olarak

$$N\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = 2^n$$

bulunur. Fraktalın kutusayma boyutunu hesaplamak için ;

$$D = \frac{\log\left(N\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{\log\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^n}\right)} = \frac{\log(2^n)}{\log(3)^n} = \frac{n \log(2)}{n \log(3)} = \frac{\log(2)}{\log(3)}$$

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log\left(N\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{\log\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^n}\right)} = \frac{\log(2)}{\log(3)} = 0,62989$$

fraktal boyutu olarak hesaplanır, (Hacısalıhoğlu ve Yaz 2002).

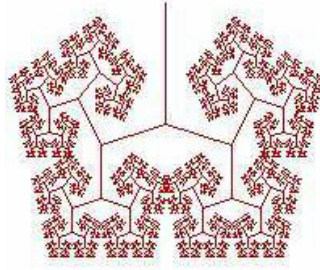
6.7 İnsan Vücudu

Her ne kadar fraktallar birer matematik konusu ise de gerçek hayatta da çok önemlidirler. Örneğin vücudumuz bile fraktallardan oluşmuştur.

6.7.1 Akciğerler

Nefes alıp vermekte kullanılan akciğerler sistemi fraktalları bilen herkes için vücudumuzdan bir frakta örneğidir. Bu sistem tüplerden oluşmaktadır. Bu alandan hava mikroskobik torbacıklara geçer. Bu torbacıklar bir petektaki

gözenin çok küçültülmüş halidir. Akciğer sistemini esas nefes borusudur, bu borular daha küçük iki başka boruya ayrılır ve borular akciğerlere giderler. Akciğerin içinde de daha küçük borulara ayrılarak bronşçuklar denilen en küçük torbalara kadar devam ederler. Bronşlarda bir cins gözeler olan daha küçük tüplere ayrılan ve böylece devam eden bir yapıya sahiptirler. Bu durumu daha iyi ifade edebilmek için bir cins çatlaklardan oluşmuş bir fraktal saçağı olarak da ifade edilebilir.

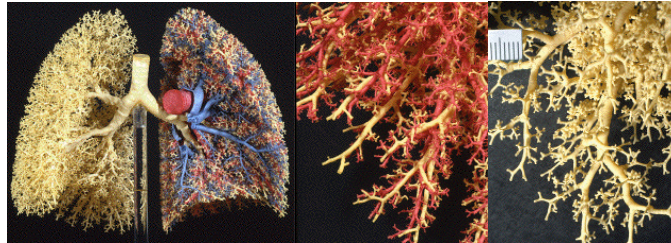


Şekil 6.12 Akciğerler

Akciğer sistemindeki tüplerin uç noktaları birer petek gözü şeklinde olup birbirlerine son derece yakındırlar ve noktaların fraktal saçağı ile içten içe bağlantılıdırlar.

6.7.2 Akciğerlerdeki Gözeler (Alveol)

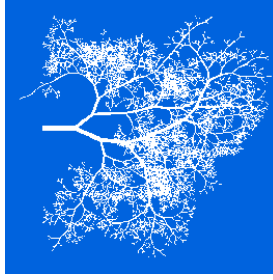
Akciğerlerin birer fraktal olduklarına dair bir diğer delil de gözelerin alanının ölçüsü ile ilgilidir. Bu alan ışık mikroskopuyla ölçülebilen $80m^2$ ve elektron mikroskopuyla ölçüldüğünde de $140m^2$ kadardır. Geometrik metodlardan bilindiği gibi alan ölçüsünün gittikçe büyük bir şekilde artışı fraktalların özelliğidir, (Hacısalıhoğlu ve Yaz 2002).



Şekil 6.13 Akciğerler ve Alveoller

6.7.3 Kan Damarları

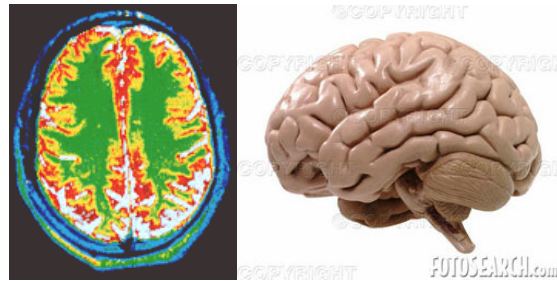
Bronşlara ait tüplere benzer şekilde kan damarlarında da giderek daha küçük çatlara ayrılırcasına şekillenme görülmektedir. Atar damarlar aort ile başlar ve giderek daha küçük kan damarlarına ayrılır. Bu ayrılarak devam eden kanalcıklar kılcal damarlar denilen daha inceleri ile devam ederler ve birbirine çok yakın birer gözecikle son bulurlar. Bu nedenle kan damarları fraktal saçakları olarak ifade edilirler, (Sandau 2000).



Şekil 6.14 Kılcal Damarlar

6.7.4 Beyin

Beyin yüzeyi tamamen bir manifold yapısı özelliği gösterir ve çok sayıda katlanmalardan oluşur. En gelişmiş canlı kabul edilen insanın beyninin yüzeyi diğer hayvanlara göre daha çok katlanmalardan oluşur. Beynin yüzeyi bir diferansiyellenebilir yüzeydir ve fraktal boyut ikiden büyüktür. İnsanlarda bu boyutu 2,73 ile 2,79 arasında değişir. Böylece anatomik yapıların hepsinin fraktal boyutları birer kesirdir, sonucu çıkarılabilir.



Şekil 6.15 İnsan Beyni ve Kıvrımlar

6.8 Bitkiler

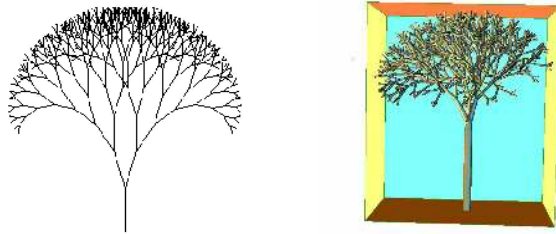
Bitkilerin çoğu dallanmış birer yapı arz ederler. Bu durum, esas bitki gövdesinin çok sayıda dallara ayrılması ile oluşur. Sonra bu dallar da daha küçük dallara ayrılır ve bu ayrılma işi en küçük dala kadar devam eder. Hemen herkes kolayca farkedebilirki bir ağacın dalı kendisine benzerdir. Örneğin bir eğriti otunu yaprakları esas eğrelti otunun aynısıdır. Bu özellik fraktalların en önemli özelliği olan kendine benzerliktir.

6.8.1 L-Sistemleri

Lindenmayer tarafından keşfedilen fraktal, bitkilerin oluşumuna ait klasik yoldur. Bu yolu kendisi bitkilerin Algoritmik Güzelliği (The Algorithmic Beauty of Plants) adlı kitabında vermektedir. Bu kitapta ilk olarak bitkilerin oluşum modellerini ele almıştır. Bazı klasik bitki fraktalları aşağıda verilmiştir, (Hacısalıhoğlu ve Yaz 2002).

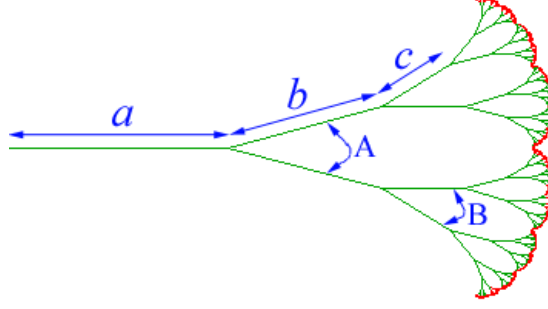
6.8.2 Pisagor Ağacı

Bitki fraktallarının oluşumuna ait bir yöntem Pisagor Ağacıdır, bu yola fraktal gölgelik de denir. Bu yöntem, doğruların ayrılmasından ibarettir ve dallanmaya çok benzerdir. Doğrular yerine kareler ve üçgenler kullanılarak aşağıdaki şekle benzer bir oluşum ortaya çıkar.



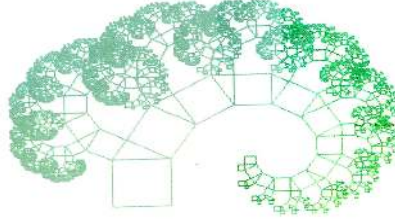
Şekil 6.16 Pisagor Ağacı

Aşağıdaki şekilde $A = B$ ve $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ dir.



Şeki 6 17 Bitki Fraktalları

Uç noktalarındaki bağlantılar da kırmızı ile gösterilmiştir. Bu cins bitki fraktallarının en önemli özeliği uç noktalarının irtibatlı oluşudur. Dalların uç noktaları bir yüzey üzerinde birleşirler, tıpkı kara lahanada olduğu gibidir.



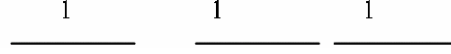
Şekil 6.18

Bir diğer yol da tekrarlayan fonksiyon fraktallarında olduğu gibi, bir eğrelti otunu oluşturan yoldur.



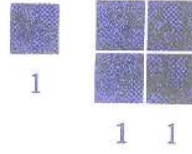
Şekil 6.19

Fraktallar kesirsel boyutlara sahip olabilirler. Örneğin fraktal 1,6 veya 2,4 boyutlu olabilir, bunun neden ve nasıl böyle olabileceği gösterilsin. Burada ilk fraktal örneği olan Sierpinski Üçgenini ele alınsın. Fraktallar sonsuz adımlardan oluşan bir algoritmanın sonucu olarak ortaya çıkar. Fraktalların kesirli boyutlara nasıl sahip olduklarını görebilmek için önce genel olarak boyut demekle ne ifade edildiği incelensin.



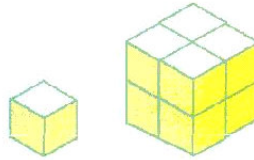
Şekil 6.20

Bir doğru parçası ve onun uzunluğunun iki katındaki diğer bir doğru parçasından oluşan bir kendine benzer şekil alınsın. Uzunluğu iki katı almakla esas doğru parçasının iki kopyası alınmış olur.



Şekil 6.21

Diğer bir kendine benzer şekil olarak 1x1 tipinde bir kare ile onun uzunluğunun ve genişliğinin ikişer katlarından oluşan diğer bir kare ele alınsın, böylece esas karenin dört kopyası elde edilmiş olunur. Demek oluyor ki, kenarları katlama işi dört kopya verdi.



Şekil 6.22

1x1x1 tipinde bir küp alınsın. Uzunluğuna, genişliğine ve yüksekliğine katlansın. Böylece esas küptün 8 kopyası elde edilmiş olur. Demek ki bu defa katlama işi sekiz kopya vermiş oldu. Bu bilgiler bir tabloda toplandığında bir model görülür, boyut üst tür. Demek ki kopya sayısı biliniyorsa onu ikinin üstel kuvveti olarak ifade ederiz ve bu üst bize boyut olarak gelmiş olur, (Hacısalıhoğlu ve Yaz 2002).

Çizelge 6.1 Boyutu tam sayı olan şekillerde boyut, kopya sayısı ilişkisi

Şekil	Boyut	Kopya Sayısı
Doğru Parçası	1	$2=2^1$
Kare	2	$4=2^2$
Küp	3	$8=2^3$
Herhangi bir kendine benzer Şekil	D	$N = 2^D$

Şimdi artık, Sierpinski üçgeni denilen fraktalın boyutu verilebilir. Kenar uzunlukları 1 cm olan bir Sierpinski üçgeni ile başlansın. Kenarların uzunlukları katlansın. Atılan üçgenler Sierpinski üçgeninin bir parçası olmadıklarından (onlar birer deliktirler) bu katlama işi üç kopya verecektir. Bu durumda $3 = 2^D$ yazılabilir, burada D boyuttur. Buradan

$$D = \frac{\log 3}{\log 2}$$

bulunur. $2 = 2^1$ ve $4 = 2^2$ olduğuna göre $3 = 2^D$ eşitliğinde D değeri 1 ile 2 arasında bir değerdir. O halde Sierpinski üçgeninin boyutu 1 ile 2 arasındaki bir sayıdır. Hesap makinası yardımı ile $3=2^D$ eşitliğinde D ye 1,1 verilirse 3 yerine 2,143547 ve 3 değerine daha yakın bir değer için D ye 1,2 verilirse 3 yerine 2,2974 elde edilir. İkinci değer 3'e daha yakındır. Böyle devam edilirse D ye daha uygun bir değer bulunabilir. 3' e yakın değeri veren D sayısı Sierpinski üçgeni denen fraktalın boyutudur. Bazı şekillerin boyutlarının tam sayı olduğu bazılarının ise tam sayı olmadığı görülür. Boyutu tam sayı olmayan şekillerin boyut kopya sayısı ilişkisi Çizelge 6.2'de göste-

rilmiştir, (Hacısalıhoğlu ve Yaz 2002).

Çizelge 6.2 Boyutu tam sayı olmayan şekillerde boyut, kopya sayısı

Şekil	Boyut	Kopya Sayısı
Doğru Parçası	1	$2=2^1$
Sierpinski Üçgeni	$D = \frac{\log 3}{\log 2} = 1,5850$	$3 = 2^?$
Sierpinski Halısı	$D = \frac{\log 8}{\log 3} = 1,8928$	$8=3^?$
Kare	2	$4=2^2$
Küp	3	2^3
Kendine Benzer Şekil	D	$N = 2^D$

6.9 Bulutun Fraktal Boyutunun Hesaplanması

Bulutların şekilleri oldukça düzensizdir. Bulutlar doğadaki diğer nesneler gibi şekil olarak fraktaldırlar. Genel olarak bir şeyin fraktal olduğunu ispat etmek için onun fraktal boyutunun bulunması yeterlidir.

Çizelge 6.3 ε değerine karşı gelen çember sayısının gösterimi.

$\varepsilon(cm)$	$N(A, \varepsilon)$
3	2
2	3
1,5	4
1,2	6
1	7
0,75	10
0,5	16
0,4	23
0,3	31
0,015	267

Adım 1: Belli bir ε yarıçapına sahip, bulutu tamamıyla örtecek minimum çember sayısı hesaplanır. Bu işlem değişik ε değerleri için gerçekleştirilir ve her bir ε değerine karşı gelen çember sayısını gösteren bir tablo hazırlanır.

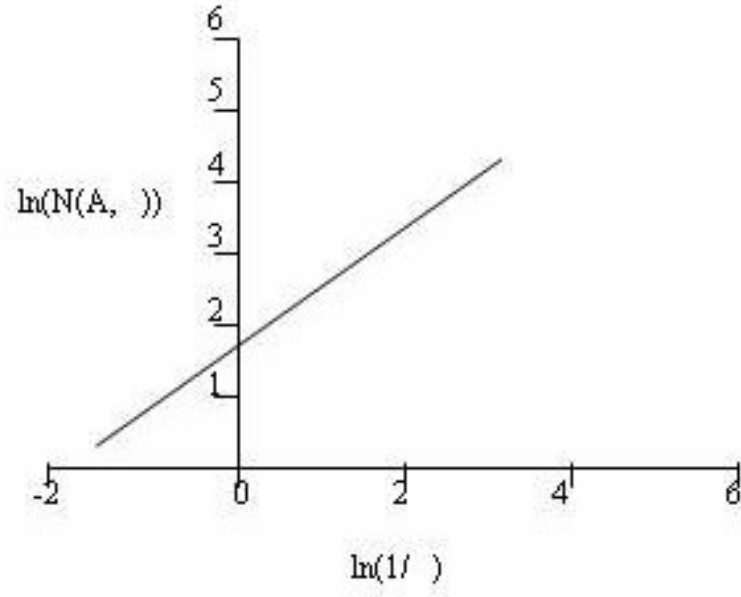
Adım 2 : İlk adımda oluşturulan tablodan yararlanılarak $\ln(\frac{1}{\varepsilon})$ ve buna karşı gelen $\ln N(A, \varepsilon)$ değerlerinden oluşan yeni bir tablo hazırlanır.

Çizelge 6.4 Çizelge 6 3 de bulunan verilerin logaritmlar

$\ln(\frac{1}{\varepsilon})$	$\ln(N(A, \varepsilon))$
-1,1	0,69
-0,69	1,09
-0,405	1,39
-0,182	1,79
0	1,95
0,29	2,30
0,693	2,77
0,916	3,13
1,204	3,43
4,2	5,59

Adım 3: Adım 2’de belirlenen $\ln(\frac{1}{\varepsilon})$ değerleri x eksenine, $\ln(N(A, \varepsilon))$ değerleri y eksenine yerleştirilerek belli bir x değerine karşı gelen y değerleri işaretlenir.

Adım 4: ‘Method of Least Squares’ tekniği kullanılarak bu noktalardan geçen doğru çizilir. Bu doğrunun eğimi fraktal boyutu verir, (Barnsley 1988).



Grafik 6.1 Veriler Çizelge 6.4 den alınmıştır.

Bir bulutun fraktal boyutunun tahminlenmesine ilişkin verilerin grafiği
Doğrunun eğimi fraktal boyutu verir.

KAYNAKLAR

- Barnsley, M., 1988, “Fractals Everywhere”, Academic Press. Inc
- Falconer, K., 1990, “Fractal Geometry Mathematical Foundations and Applications”, Wiley, Newyork, 288p.
- Feder, J., 1988, “Fractals”, Plenum Press, Newyork
- Gleick, J., 2003, “Kaos”, Tübitak Yayınları, ISBN 975-403-029-4
- Güney, Z., 2003, “Metrik ve Topolojik Formüller”, Muğla Üniversitesi Yayınları, ISBN 975-7207-37-3
- Hacısalıhoğlu, H. ve Yaz, N., 2002, “Fraktal Geometri”, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü
- Hart, George W., 2005, “Creating A Mathematical Museum on Your Desk”, Stony Brook University Department of Computer Science 27. No 4 Winter, 2005
- Kılıç, S. ve Erdem, M., 1999, “Metrik Uzaylar ve Topoloji”, Uludağ Üniversitesi Güçlendirme Vakfı Yayın No: 146
- Mandelbrot, B.B., 1983, “Fractal Geometry of Nature”, W.H. Freeman and Company ISBN 0-7167-1186-9
- Olemskoi, A.I and Flat, A. Ya., 1993, “Application of fractals in condensed-matter physics”, Physics-uspekhi 36(12), 1087-1128

Peitgen, H. and Saupe, D., 1988, “The Science of Fractal Images”, Springer Verlag Press, Newyork, 312 p.

Stevens, S., 1990, “Fractal Programming in C ”, M and T Books, Redwood City 443 p.

Sandau, K., 2000, “Fractals in Nature and How to Measure Them”, University of Applied Sciences Faculty of Mathematics and Science Darmstadt, Germany, Santa Fe Institue, 29.11-2.12.2000

Şuhubi, E., 2001, “Fonksiyonel Analiz”, İTÜ Vakfı Yayınları No: 38

<http://www.bath.ac.uk/~ma0cmj/FractalContents.html>

<http://www.fbmn.fh-darmstadt.de/home/sandau/index.html>

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde desteğini ve yardımlarını esirgemeyen sayın Doç. Dr. Emine SOYTÜRK'e ve eşim Çiğdem ÜREY'e teşekkürlerimi sunarım.

ÖZGEÇMİŞ

1979 yılında Afyonkarahisar ilinde doğdu. İlköğrenimini Afyonkarahisar Kasımpaşa İlköğretim Okulu ve Merkez Atatürk Orta Okulunda tamamladı. 1997 yılında orta öğretimini Afyonkarahisar Anadolu Öğretmen Lisesinde tamamladıktan sonra Dokuz Eylül Üniversitesi, Buca Eğitim Fakültesi I. Matematik Öğretmenliğinden 2002 yılında mezun oldu. 2002 yılında Afyon Kocatepe Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans öğrencisi oldu.