



FRAKTAL İNTERPOLASYON FONKSİYONLARI

Yüksek Lisans Tezi

OUMAR DAO

Eskişehir 2020

FRAKTAL İNTERPOLASYON FONKSİYONLARI

Oumar DAO

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Tezli Yüksek Lisans Programı

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Yunus ÖZDEMİR

Eskişehir

Eskişehir Teknik Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Ağustos 2020

ÖZET

FRAKTAL İNTERPOLASYON FONKSİYONLARI

Oumar DAO

Matematik Anabilim Dalı

Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Ağustos 2020

Danışman: Doç.Dr. Yunus ÖZDEMİR

Fraktal geometrinin en önemli araçlarından birisi yinelemeli fonksiyon sistemleridir. 1981 yılında Hutchinson tarafından yayımlanan bir çalışma ile matematik dünyasında yerini alan bu sistemler birçok kümenin matematiksel olarak modellenbilmesine olanak sağlamaktadır. Fraktal olarak bilinen kümelerin büyük bir kısmı da bir yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü olarak ifade edilmektedir.

Bir Öklidyen uzayda, verilen sonlu noktayı interpolate eden bir sürekli fonksiyonun bulunması problemi önemli bir problem olarak güncelliğini korumaktadır. Düzlemde verilen sonlu veri kümesini interpolate eden ve grafiği bir yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü olan sürekli fonksiyonların varlığı 1980'lerde incelenmiş ve ortaya konmuştur. Bu problem, uygulama alanı oldukça geniş olan bir problem olması münasebetiyle son derece önemlidir. Bu nedenle farklı uzaylarda, daha yüksek boyutlu uzaylarda da bu soruya yanıt aramak elbette oldukça anlamlıdır. Daha sonra yapılan çalışmalarda, özellikle uzayda verilmiş olan bir veri kümesini interpolate eden bir sürekli fonksiyonun, grafiği bir yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü olacak şekilde var olduğu, veri kümesine ilişkin bazı kısıtlar altında gösterilmiştir. Bu kısıtlar zamanla yapılan çalışmalarla esnetilmiş ve zamanla çok daha geniş bir veri kümesi için adına fraktal interpolasyon yüzeyleri dediğimiz kümelerin varlığı araştırılmıştır.

Bu tez çalışmasının ilk iki bölümünde yinelemeli fonksiyon sistemleri ve klasik fraktal interpolasyon fonksiyonları tanıtılmış, sonrasında ise fraktal interpolasyon yüzeyleri ile ilgili çalışmalar özetlenip, özellikle de bu teorideki önemli birkaç çalışmalar tüm detayları ile açıklanıp örneklendirilmiştir. Öte yandan, elde edilen fraktal interpolasyon yüzeylerinin fraktal boyutları ile ilgili yapılan çalışmalar ve elde edilen sonuçlar da araştırılmış ve ilgili bölümlerde sunulmuştur.

Anahtar Sözcükler: Yinelemeli Fonksiyon Sistemi, Fraktal İnterpolasyon Fonksiyonu, Fraktal İnterpolasyon Yüzeyi, Fraktal Boyut.

ABSTRACT

FRACTAL INTERPOLATION FUNCTIONS

Oumar DAO

Department of Mathematics

Eskişehir Technical University, Institute of Graduate Programs, August 2020

Supervisor: Assoc.Prof.Dr. Yunus ÖZDEMİR

One of the most important tools of fractal geometry is iterated function systems. These systems, introduced in a study published by Hutchinson in 1981, allow many sets to be modeled mathematically. Most fractals are also expressed as the attractor of an iterated function system.

Finding a continuous function that interpolates a given finite set of points in an Euclidean space is an important and currently studied problem. The existence of continuous functions that interpolate the data set given in the plane and whose graph is the attractor of an iterative function system was first studied and demonstrated in the 1980s. It is extremely important since it is a problem with a wide application area. Therefore, it is of course quite meaningful to seek an answer to this question in different spaces, as well as in higher dimensional spaces. In later studies, the existence of a continuous function that interpolates a given data set in three dimensional Euclidean space has been shown under some constraints regarding the given data set, with its graph being the attractor of an iterated function system. These constraints have been stretched over time and the existence of sets (graphs of a fractal interpolation functions) called fractal interpolation surfaces has been investigated for a much more flexible data sets.

In the first two sections of this thesis, the notions of iterated function systems and (classical) fractal interpolation functions were introduced. Then, studies on fractal interpolation surfaces were summarized and several important studies were explained and exemplified in details. In addition, the studies and the results obtained on the fractal dimensions of the fractal interpolation surfaces obtained were also investigated and presented in the related sections.

Keywords: Iterated Function System, Fractal Interpolation Function, Fractal Surface, Fractal Dimension.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında çok emek sarf eden değerli danışman hocam Doç. Dr. Yunus ÖZDEMİR'e en içten teşekkürlerimi sunarım. Tüm eğitim hayatım boyunca her türlü yanımda olan, gittiğim yolda beni yüreklendiren aileme minnettarım.

Oumar DAO



ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarda bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmamın Eskişehir Teknik Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığımı ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Oumar DAO

İçindekiler

Sayfa

BAŞLIK SAYFASI	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	x
1 GİRİŞ	1
2 YİNELEMELİ FONKSİYON SİSTEMLERİ	3
2.1 Ön Bilgiler	3
2.2 Yinelemeli Fonksiyon Sistemi ve Fraktal Boyut	8
3 FRAKTAL İNTERPOLASYON FONKSİYONLAR	15
3.1 Fraktal İnterpolasyon Fonksiyonlarının Genel Yapısı	15
3.2 Afın Fraktal İnterpolasyon Fonksiyonları	19
3.3 Afın Fraktal İnterpolasyon Fonksiyonların Fraktal Boyutu	25
4 FRAKTAL İNTERPOLASYON YÜZEYLERİ	28
4.1 Dikdörtgensel Latis Üzerinde Fraktal İnterpolasyon Yüzeyleri	29
4.2 Dikdörtgensel Latis Üzerinde Genel Fraktal İnterpolasyon Yüzeyleri	43
4.3 Bilineer Fraktal İnterpolasyon Yüzeyleri	47
4.4 Fraktal İnterpolasyon Yüzeylerin Fraktal Boyutu	63
KAYNAKÇA	67
ÖZGEÇMİŞ	

Şekil Listesi

Şekil 2.1.	Sierpinski Üçgeni	13
Şekil 2.2.	Koch Eğrisi	13
Şekil 3.1.	6 elemanlı bir veri kümesi için bir interpolasyon fonksiyon örneği	16
Şekil 3.2.	$\{(0, 0), (1, 3), (2, -1), (3, 5), (5, 2)\}$ veri kümesine ilişkin FIF grafığı	24
Şekil 3.3.	$\{(0, 0), (1, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 0)\}$ veri kümesine ilişkin FIF grafığı	25
Şekil 3.4.	D_1 veri kümesine karşılık gelen FIF grafığı, $D \approx 1, 29766$	27
Şekil 3.5.	D_2 veri kümesine karşılık gelen FIF grafığı, $D = 1$	27
Şekil 4.1.	Veri kümesi 1'e karşılık gelen fraktal interpolasyon yüzeyi...	34
Şekil 4.2.	Veri kümesi 2'ye karşılık gelen fraktal interpolasyon yüzeyi .	36
Şekil 4.3.	Veri kümesi 3'e karşılık gelen fraktal interpolasyon yüzeyi...	37
Şekil 4.4.	Örnek 4.2.'teki kolinear interpolasyon noktaları.....	38
Şekil 4.5.	Veri kümesi 4'e karşılık gelen sürekli olmayan fraktal inter- polasyon yüzeyi.....	40
Şekil 4.6.	Veri kümesi 4'e karşılık gelen sürekli fraktal interpolasyon yüzeyi	42
Şekil 4.7.	h fonksiyonun grafığı	53
Şekil 4.8.	g fonksiyonun grafığı	53
Şekil 4.9.	s fonksiyonun grafığı	54
Şekil 4.10.	Veri kümesi 6'ya karşılık gelen bilinear fraktal interpolasyon yüzeyi	56
Şekil 4.11.	h fonksiyonun grafığı	58
Şekil 4.12.	g fonksiyonun grafığı	58
Şekil 4.13.	$s_{ij} = 0$ iken s fonksiyonun grafığı	60
Şekil 4.14.	$s_{ij} = 0$ iken Veri kümesi 7'ye karşılık gelen bilinear fraktal interpolasyon yüzeyi	60
Şekil 4.15.	$s_{ij} = S$ iken s fonksiyonun grafığı	62
Şekil 4.16.	$s_{ij} = S$ iken Veri kümesi 7'ye karşılık gelen bilinear fraktal interpolasyon yüzeyi	63

Şekil 4.17. $s_{ij} = \frac{1}{2}$ iken **Veri Kümesi 1**'e karşılık gelen fraktal interpolasyon yüzeyi. $boy(G) \approx 2,3690$ 65



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

YFS	:	Yinelemeli Fonksiyon Sistemi
FIF	:	Fraktal İnterpolasyon Fonksiyonu
h	:	Hausdorff metrik
$\mathcal{H}(X)$	:	X 'in Hausdorff uzayı
d_{std}	:	Öklidyen uzaydaki standart metrik



1. GİRİŞ

Fraktal geometrinin en önemli araçlarından birisi yinelemeli fonksiyon sistemleridir (YFS). 1981 yılında Hutchinson tarafından yayımlanan ünlü çalışması sayesinde ([8]) bu sistemler matematikte birçok kümenin matematiksel olarak modellenemesine olanak sağlamış ve bu nedenle birçok avantajı beraberinde getirmiştir. Fraktal olarak bilinen kümelerin büyük bir kısmı da bir yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü olarak ifade edilmektedir.

Öte yandan, örneğin bir Öklidyen uzayda, verilen sonlu noktayı interpolate eden bir sürekli fonksiyonun bulunması problemi de son derece önemli bir problem olarak güncelliğini korumaktadır. Barnsley tarafından 1986 yılında yapılmış (bkz. [1]) bir çalışma ile, verilen veri kümesini interpolate eden ve grafiği bir yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü olan sürekli fonksiyonların varlığı gösterilmiştir. Bu türden fonksiyonlara, fraktal interpolasyon fonksiyonları (FIF) adı verilmektedir. Bir veri kümesi verildiğinde, bu veri kümesine ilişkin sonsuz yinelemeli fonksiyon sistemi yazılabileceği ortadadır. Bu problem de uygulama alanı oldukça geniş olan bir problem olması münasebetiyle son derece önemlidir. Bu nedenle farklı uzaylarda, daha yüksek boyutlu uzaylarda da bu soruya yanıt aramak elbette oldukça anlamlı olmuştur.

Daha sonra yapılan çalışmalarda, bu durumun genel olarak herhangi bir metrik uzayda nasıl mümkün olduğu araştırılmıştır. 1990'lı yıllara gelindiğinde, $\mathbb{R}^3$ 'te verilmiş olan bir veri kümesini interpolate eden bir sürekli fonksiyonun, grafiği bir yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü olacak şekilde var olduğu, veri kümesine ilişkin bazı kısıtlar altında gösterilmiştir. Bu kısıtlar zamanla yapılan çalışmalarla esnetilmiş ve çok daha geniş bir veri kümesi için adına fraktal interpolasyon yüzeyleri dediğimiz kümelerin varlığı araştırılmıştır.

Bu süreçteki en önemli genellemelerden biri Dalla tarafından 2000'li yılların başında ortaya konmuştur (bkz. [6]). Dalla bu çalışmasında, uzayda bir dikdörtgensel latis üzerinde verilmiş olan veri kümesine ilişkin bir fraktal interpolasyon yüzeyinin varlığını göstermiştir. Zamanla bu veri kümesi ve kullanılan yöntemlerle ilgili iyileştirici çalışmalar yapılmıştır. Son yıllarda ise, bu çalışmalardan biri olan [13] çalışmasında yazarlar, çok daha geniş bir fraktal interpolasyon yüzeyi teorisini ortaya koymuş ve bilineer fraktal interpolasyon yüzeylerin geniş bir ailesini tanıtmıştır.

Bu tez çalışmasının ilk iki bölümünde yinelemeli fonksiyon sistemleri ve klasik fraktal interpolasyon fonksiyonları tanıtılacaktır. 4. bölümde ise, fraktal interpolasyon yüzeyleri ile ilgili çalışmalar özetlenip, özellikle de yukarıda bahsi geçen [6] ve [13] çalışmaları detaylıca incelenip, örneklendirilmeye çalışılacaktır.

Öte yandan, elde edilen fraktal interpolasyon yüzeylerinin bir yinelemeli fonk-

siyon sisteminin atraktörü olması gerçeğinden ve motivasyonundan hareketle, bu türden yüzeylerin fraktal boyutları ile ilgili yapılan çalışmalar ve elde edilen sonuçlar da araştırılmış ve ilgili bölümlerde sunulmuştur.



2. YİNELEMELİ FONKSİYON SİSTEMLERİ

2.1. Ön Bilgiler

Bu bölümde çok temel metrik uzay bilgileri hatırlatılarak, önemli bazı temel teoremler verilecektir.

Tanım 2.1.1. X boştan farklı bir küme olmak üzere,

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

fonksiyonu aşağıdaki özelliklerini sağlıyorsa, d 'ye X üzerinde bir metrik veya bir uzaklık fonksiyonu denir:

1. $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$
3. $\forall x, y, z \in X$ için $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

d metriği ile birlikte X kümesine metrik uzayı denir ve (X, d) ile gösterilir.

Bu tez çalışmasında verilecek örneklerin tamamı, standart metrik ile donatılmış bir Öklidyen uzay olacaktır. Bu nedenle $\mathbb{R}^n$ üzerindeki standart metriği hatırlayalım:

Örnek 2.1.1. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x, y \in \mathbb{R}^n$ olsun. Bu durumda

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

olmak üzere

$$d(x, y) = \left(\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^2 \right)^{1/2}$$

şeklinde tanımlanan d_{std} fonksiyonu bir metrik uzayıdır ve Öklid metriği veya standart metriği olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.2. (X, d) bir metrik uzay olmak üzere (x_n) , X uzayında bir dizi olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ mevcut ise (x_n) dizisi x noktasına yakınsaktır denir. Ayrıca x noktasına da (x_n) dizisinin limiti denir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ veya $x_n \rightarrow x$ olarak gösterilir.

Tanım 2.1.3. (X, d) bir metrik uzay ve $(x_n) \in X$ dizisi verilsin.

$\varepsilon > 0$ verildiğinde $n, m > N_\varepsilon$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N_\varepsilon > 0$ sayısı varsa, (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir.

(X, d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise (yani $x_n \rightarrow x$ ve $x \in X$ ise), (X, d) uzayına tam metrik uzayı denir.

Örnek 2.1.2. Örnek 2.1.1’de tanımlanan metrik ile $\mathbb{R}^n$ uzayı bir tam metrik uzaydır.

Tanım 2.1.4. (X, d) bir metrik uzay ve $S \subset X$ olsun. Eğer S ’deki her dizinin S de yakınsak bir alt dizisi bulunuyorsa S alt kümesine kompakt küme denir.

Tanım 2.1.5. Bir X kümesi üzerinde $f : X \rightarrow X$ fonksiyonu verilsin. $f(x^*) = x^*$ olacak şekilde bir $x^* \in X$ noktası var ise x^* noktasına f fonksiyonun sabit noktası denir.

Tanım 2.1.6. (X, d) metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(f(x), f(y)) \leq s \cdot d(x, y)$$

olacak şekilde bir $0 \leq s < 1$ reel sayısı var ise f fonksiyonuna bir büzülme dönüşümü, s değerine de büzülme katsayısı denir. (Eğer s ’nin 0 ile 1 arasında olma koşulu kaldırılırsa, bu türden dönüşümlere Lipschitz dönüşüm denir. Ayrıca $d(f(x), f(y)) = s \cdot d(x, y)$ koşulu sağlanırsa da f ’ye bir benzerlik dönüşümü denir).

Fraktal geometride son derece önemli bir yere sahip olan, yinelemeli fonksiyon sistemi teorisinin temel taşlarından biri diyebileceğimiz sabit nokta teoremi şu şekilde ifade ve ispat edilebilir.

Teorem 2.1.1. (Banach Sabit Nokta Teoremi)

(X, d) bir tam metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda $f(x^*) = x^*$ olacak şekilde bir tek $x^* \in X$ sabit noktası vardır ve keyfi $x_0 \in X$ için

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)) = f^2(x_0), \dots, f^n(x_0), \dots$$

dizisi x^* noktasına yakınsar.

Kanıt. $x_0 \in X$ için;

$$x_1 = f(x_0)$$

$$x_2 = f(x_1) = f(f(x_0))$$

$$\vdots$$

$$x_n = f(x_{n-1})$$

biçiminde oluşturulan (x_n) dizisini ele alalım. Önce bu dizinin Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. (x_n) dizisinin Cauchy dizisi olması için, $\forall \varepsilon > 0$ için $n, m > N_\varepsilon$ iken

$$d(f^n(x), f^m(x)) = d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

olacak şekilde $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ olmalıdır.

$n = m$ olursa $0 < \varepsilon$ olup eşitsizlik sağlanır.

$n < m$ olsun. Bu durumda d bir metrik olduğundan

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca f büzülme dönüşümü olduğundan her n için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \\ &\leq s d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq s^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) \\ &\vdots \\ &\leq s^n d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

dir. Bu eşitsizlik her n için geçerlidir. Bu ifadeyi bir önceki eşitsizlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq s^n d(x_0, x_1) + s^{n+1} d(x_0, x_1) + \dots + s^{m-1} d(x_0, x_1) \\ &\leq s^n (1 + s + s^2 + \dots + s^{m-1-n}) d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{s^n}{1-s} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde N_ε sayısının $\frac{\log[\varepsilon(1-s)]}{d(x_0, x_1)}$ sayısının tam değerinin bir fazlası seçilirse istenilen eşitsizlik her n, m için sağlanmış olur. Yani (x_n) dizisi bir Cauchy dizisidir. (X, d) tam metrik uzay olduğuna göre (x_n) yakınsak olur ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$$

yazılabilir. Ayrıca $f(x_n) = x_{n+1}$ dizisi (x_n) dizisinin bir alt dizisi olup, f sürekli ve (x_n) yakınsak olduğundan $f(x^*) = x^*$ olacak biçimde bir tek x^* vardır. x^* 'in tek olduğunu gösterelim.

Kabul edelim ki tek olmasın. Bu durumda $x^* \neq y^*$ iken $f(y^*) = y^*$ olmak üzere

$$d(f(x^*), f(y^*)) \leq s d(x^*, y^*) < d(x^*, y^*)$$

olmalıdır. Fakat

$$d(f(x^*), f(y^*)) = d(x^*, y^*)$$

olduğundan bu mümkün değildir. O halde x^* tek olmak zorundadır. □

Bu teoremden uzayın tamlığı sabit noktanın varlığını, fonksiyonun büzülme olması ise tekliğini garanti altında almaktadır.

İyi bilinen Banach sabit nokta teoremi, bir tam metrik uzayı üzerindeki tanımlanan bir büzülme dönüşümünün bir tek sabit noktasına sahip olduğunu belirtir. Bu teorem bir yinelemeli fonksiyon sisteminin çekicisinin varlığını ve tekliğini kanıtlayabilmek için önemli bir katkı sağlayacaktır.

Şimdi Hausdorff metrik kavramını inceleyelim. Amacımız, verilen herhangi bir metrik uzayındaki tüm boştan farklı kompakt alt kümelerinin oluşturduğu küme ailesi üzerinde Hausdorff metriği denilen metriğin incelenmesidir.

(X, d) bir metrik uzay ve $\mathcal{H}(X)$, X kümesinin boştan farklı kompakt alt kümelerinin uzayı olsun, yani

$$\mathcal{H}(X) = \{A \mid A \subset X, A \neq \emptyset \text{ ve } A \text{ kompakt}\}$$

olarak tanımlansın. Bir noktanın bir kompakt kümeye uzaklığı ile başlayalım. $x \in X$ ve $A \in \mathcal{H}(X)$ olmak üzere x noktası ve A kümesinin arasındaki uzaklık

$$d_1(x, A) = \min\{d(x, y) \mid y \in A\}$$

olarak tanımlanabilir. Bu tanımdan yararlanarak, A ve $B \in \mathcal{H}(X)$, X 'in boştan farklı kompakt alt kümelerin arasındaki uzaklığı

$$\begin{aligned} d_2(A, B) &= \max\{d_1(x, B) \mid x \in A\} \\ &= \max\{\min\{d_1(x, y) \mid y \in B\} \mid x \in A\} \end{aligned}$$

şeklinde vermek anlamlı durmaktadır. Fakat bu şekilde tanımlanan d_2 , $\mathcal{H}(X)$ üzerinde bir metrik değildir. Sadece simetri özelliği sağlanmaz (örnek olarak, $X = \mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^2$ 'nin kompakt alt kümeleri olarak da $A = [1, 2]$ ve $B = [0, 3]$ alınırsa $d_2(A, B) = 0$ ve $d_2(B, A) = 1$ olduğu kolayca görülebilir).

Bu simetri problemini gidermek için ufak bir tamirat aşağıdaki gibi yeterli olacaktır.

Tanım 2.1.7. (X, d) bir metrik uzay ve $A, B \in \mathcal{H}(X)$ olmak üzere

$$h(A, B) = \max\{d_2(A, B), d_2(B, A)\}$$

değerine A ile B kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı denir.

Teorem 2.1.2. $(\mathcal{H}(X), h)$ bir metrik uzayıdır.

Kanıt. $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$ olsun. A kompakt bir küme olduğundan

$$d(A, B) = \max\{d(x, B) \mid x \in A\} < \infty$$

yazılabilir. Benzer şekilde $d(B, A) < \infty$ olur. Böylece

$$h : \mathcal{H}(X) \times \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlıdır. Şimdi h fonksiyonun $\mathcal{H}(X)$ üzerinde metrik uzay özelliklerini sağladığını gösterelim.

- $\forall A, B \in \mathcal{H}(X)$ için tanımdan $h(A, B) \geq 0$ olduğu açıktır;

$h(A, B) = 0$ ise $d_2(A, B) = d_2(B, A) = 0$ 'dır.

Her $x \in A$ için $d_2(A, B) = \max\{d(x, y) \mid x \in A\} = 0$ ise $d_1(x, B) = 0$ olmak zorundadır. B sonlu bir küme olduğundan $y \in B$ olacağı açıktır. Buradan $y = x$ yazılabilir ve dolayısıyla $A \subset B$ olur. Benzer şekilde de $B \subset A$ ispatlanır. Sonuç olarak $A = B$ elde edilir.

- $h(A, B) = \max\{d_2(A, B), d_2(B, A)\} = \max\{d_2(B, A), d_2(A, B)\} = h(B, A)$ 'dır

- $d_2(A, B) \leq d_2(A, C) + d_2(C, B)$,

$$\begin{aligned} d_2(A, B) &\leq \max\{d_2(A, C), d_2(C, A)\} + \max\{d_2(C, B), d_2(B, C)\} \\ &= h(A, C) + h(C, B) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} d_2(B, A) &\leq d_2(B, C) + d_2(C, A) \\ &\leq \max\{d_2(B, C), d_2(C, B)\} + \max\{d_2(C, A), d_2(A, C)\} \end{aligned}$$

şeklinde olup sonuç olarak

$$h(A, B) = \max\{d_2(A, B), d_2(B, A)\} \leq h(A, C) + h(C, B)$$

elde edilir.

□

Bir sonraki teorem ise, yinelemeli fonksiyon sistemi ve atraktör kavramlarının varlığı açısından oldukça önem arz etmektedir.

Teorem 2.1.3. (X, d) bir tam metrik uzay ise $(\mathcal{H}(X), h)$ uzayı da bir tam metrik uzaydır (detaylar için bkz. [2]).

2.2. Yinelemeli Fonksiyon Sistemi ve Fraktal Boyut

Yinelemeli fonksiyon sistemleri (YFS) fraktal geometrinin ana dallarından biridir. YFS kavramı, 1981 yılında Hutchinson tarafından yayımlanan bir çalışma ile ([8]) kendine fraktal geometride sağlam bir yer bulmuş, bu teoremin gelişmesine katkıda bulunmuştur.

Bir YFS, (X, d) tam metrik uzayı üzerinde tanımlı $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ şeklinde sonlu tane büzülme katsayısı $0 \leq \alpha_i < 1$ olan büzülme fonksiyonlarından oluşur. Yani YFS'ler, tam bir metrik uzayı üzerindeki sonlu bir büzülme koleksiyonu olarak tanımlanabilir. $(\mathcal{H}(X), h)$ tam metrik uzayının boş olmayan kompakt alt kümelerinin ailesi üzerinde Hausdorff metriği alınarak oluşturulan tam metrik uzay olmak üzere, Hutchinson teoremine göre,

$$\Phi : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$$

$$\Phi(U) = \bigcup_{i=1}^n \varphi_i(U)$$

şeklinde tanımlı fonksiyon büzülme katsayısı $\alpha = \max_{i=1, \dots, n} \{\alpha_i\}$ olan bir büzülme dönüşümüdür ve dolayısıyla bir sabit noktası vardır. Bu sabit noktaya $\{X; \varphi_i, i = 1, \dots, n\}$ şeklinde gösterilen YFS'nin çekicisi denir. YFS'lerin fraktal interpolasyon fonksiyonları, fraktal görüntü sıkıştırma, fraktal antenler, sinyal modelleme gibi birçok farklı uygulaması vardır. Ayrıca, fraktal geometrideki önemli kendine benzer olarak adlandırabileceğimiz fraktalların büyük bir kısmı bu sistemler yardımı ile modellenip çekici olarak karşımıza gelmektedir.

Bu bölümde yinelemeli fonksiyon sistemleri kavramı incelenip örneklendirilecektir.

Teorem 2.2.1. (X, d) bir metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ büzölme katsayısı s olan bir büzölme dönüşümü olsun. $A \in \mathcal{H}(X)$ için

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

olacak şekilde $f \in \mathcal{H}(X)$ fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda f dönüşümü $(\mathcal{H}(X), h)$ Hausdorff uzayında bir büzölme dönüşümüdür ve büzölme katsayısı da s 'dir.

Kanıt. $A, B \in \mathcal{H}(X)$ için

$$\begin{aligned} d(f(A), f(B)) &= \max\{\min\{d(x, y) \mid f(y) \in f(B)\} \mid f(x) \in f(A)\} \\ &= \max\{\min\{d(f(x), y) \mid f(y) \in f(B)\} \mid x \in A\} \\ &= \max\{\min\{d(f(x), f(y)) \mid y \in B\} \mid x \in A\} \\ &\leq \max\{\min\{s d(x, y) \mid y \in B\} \mid x \in A\} \\ &= s d_2(A, B) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Benzer biçimde

$$d(f(B), f(A)) \leq s d_2(B, A)$$

şeklindedir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} h(f(A), f(B)) &= \max\{d(f(A), f(B)), d(f(B), f(A))\} \\ &\leq s \max\{d_2(A, B), d_2(B, A)\} \\ &= s h(A, B) \end{aligned}$$

elde edilir. □

Yani (X, d) tam metrik uzayı üzerinde verilmiş olan bir büzölme dönüşümü $(\mathcal{H}(X), h)$ üzerinde çok doğal bir şekilde yine bir büzölme dönüşümü belirlemektedir.

Yardımcı Teorem 2.2.1. (X, d) bir metrik uzayı olmak üzere

$$\{f_i : X \rightarrow X \mid i = 1, 2, \dots, n\}$$

dönüşümleri büzölme katsayıları sırasıyla s_i olan büzölme dönüşümleri olsun. Bu

durumda $A \in \mathcal{H}(X)$ için

$$F : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$$
$$F(A) = f_1(A) \cup f_2(A) \cup \dots \cup f_n(A) = \bigcup_{i=1}^n f_i(A)$$

olarak tanımlanan F dönüşümü büzülme katsayısı

$$s = \max \{s_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$$

olan bir büzülme dönüşümüdür.

Kanıt. $s = \max \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ olsun. Teoremi kanıtlamak için tümevarım yöntemi kullanalım. $n = 2$ için teoremin doğru olduğunu görelim.

$$F_2 : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$$
$$F_2(A) = f_1(A) \cup f_2(A)$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} h(F_2(A), F_2(B)) &= h(f_1(A) \cup f_2(A), f_1(B) \cup f_2(B)) \\ &\leq \max \{h(f_1(A) \cup f_1(B)), h(f_2(A) \cup f_2(B))\} \\ &\leq \max \{s_1 h(A, B), s_2 h(A, B)\} \\ &\leq s h(A, B) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi $n = m$ için verilen teoremin doğru olduğunu kabul edilip $n = m + 1$ için de doğru olacağını gösterelim.

$$F_m : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$$
$$F_m(A) = f_1(A) \cup f_2(A) \cup \dots \cup f_m(A)$$

için iddia doğru olsun. Yani

$$\begin{aligned} h(F_m(A), F_m(B)) &= h(f_1(A) \cup \dots \cup f_m(A), f_1(B) \cup \dots \cup f_m(B)) \\ &\leq s h(A, B) \end{aligned}$$

olsun. Acaba

$$F_{m+1} : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$$

$$F_{m+1}(A) = f_1(A) \cup f_2(A) \cup \cdots \cup f_{m+1}(A)$$

için

$$h(F_{m+1}(A), F_{m+1}(B)) = h(f_1(A) \cup \cdots \cup f_{m+1}(A), f_1(B) \cup \cdots \cup f_{m+1}(B))$$

$$\leq s h(A, B)$$

eşitsizliği sağlanır mı?

$$\begin{aligned} h(F_{m+1}(A), F_{m+1}(B)) &= h(f_1(A) \cup \cdots \cup f_{m+1}(A), f_1(B) \cup \cdots \cup f_{m+1}(B)) \\ &= h(F_m(A) \cup f_{m+1}(A), F_m(B) \cup f_{m+1}(B)) \\ &\leq \max \{h(F_m(A) \cup F_m(B)), h(f_{m+1}(A) \cup f_{m+1}(B))\} \\ &\leq \max \{s h(A, B), s_{m+1} h(A, B)\} \\ &= s h(A, B) \end{aligned}$$

olarak istenilen sonuç elde edilir. □

Tanım 2.2.1. (X, d) bir tam metrik uzay ve

$$f_1, f_2, \dots, f_n : X \rightarrow X$$

dönüşümleri büzülme katsayıları sırasıyla $s_1, s_2, \dots, s_n$ olan büzülme dönüşümleri olsunlar. Bu durumda

$$\{X; f_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$$

sistemine büzülme katsayısı $s = \max \{s_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ olan yinelemeli fonksiyon sistemi denir ve kısaca YFS ile gösterilir.

Teorem 2.2.2. $\{X; f_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ yinelemeli fonksiyon sistemi ve

$$F : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$$

$$F(A) = f_1(A) \cup f_2(A) \cup \cdots \cup f_n(A) = \bigcup_{i=1}^n f_i(A)$$

olarak tanımlanan F dönüşümü verilsin. Bu durumda F dönüşümünün

$$A = F(A) = \bigcup_{i=1}^n f_i(A)$$

olacak şekilde bir tek $A \in \mathcal{H}(X)$ sabit noktası vardır.

Ayrıca bu sabit nokta, $\forall B \in \mathcal{H}(X)$ için

$$B, F(B), F^2(B), F^3(B), \dots$$

dizisinin limiti olarak elde edilir.

Kanıt. Teoremin birinci kısmı, yani $F(B)$ fonksiyonu $\mathcal{H}(X)$ üzerinde bir büzülme dönüşümü olduğunu Yardımcı Teorem 2.2.1’de kanıtlanmıştır. $F(B)$ ’in bir büzülme dönüşümü olduğundan sabit nokta teoremi gereğince $\mathcal{H}(X)$ uzayında bir tek sabit noktası vardır ve

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(B)$$

ile gösterilir ve dolayısıyla teoremi ispatlanmış olur. □

Tanım 2.2.2.

$$\{X; f_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$$

bir YFS ve $A \in \mathcal{H}(X)$ verilsin. A, F dönüşümünün sabit noktası olsun, yani

$$F(A) = \bigcup_{i=1}^n f_i(A) = A$$

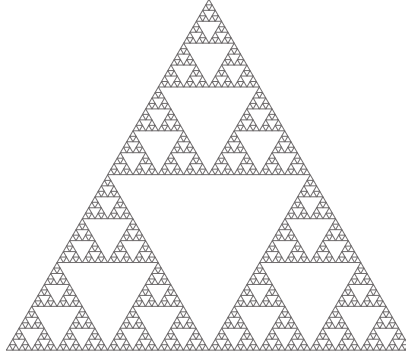
olsun. Bu durumda A noktasına YFS’nin çekicisi denir.

Örnek 2.2.1. $X = \mathbb{R}^2$ olmak üzere $(\mathbb{R}^2, d_{std})$ tam metrik uzayı verilsin.

$i = 1, 2, 3$ için $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) \\ f_2(x, y) &= \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2}\right) \\ f_3(x, y) &= \left(\frac{x+(1/2)}{2}, \frac{y+(\sqrt{3}/2)}{2}\right) \end{aligned}$$

fonksiyonlarından oluşan $\{\mathbb{R}^2; f_1, f_2, f_3\}$ YFS’nin çekicisi en çok bilinen kendine benzer fraktal örneklerinden biri olan Sierpinski üçgenidir (Şekil 2.1).

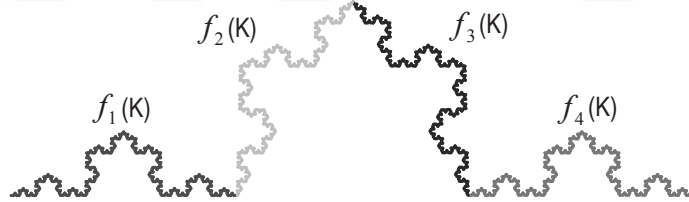


Şekil 2.1. Sierpinski Üçgeni

Örnek 2.2.2. $(\mathbb{R}^2, d_{\text{std}})$ tam metrik uzayı verilsin. $i = 1, 2, 3, 4$ için $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \left(\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y\right) \\ f_2(x, y) &= \left(\frac{1}{6}x - \frac{\sqrt{3}}{6}y + \frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{1}{6}y\right) \\ f_3(x, y) &= \left(\frac{1}{6}x + \frac{\sqrt{3}}{6}y + \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{1}{6}y + \frac{\sqrt{3}}{6}\right) \\ f_4(x, y) &= \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}y\right) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan büzülme dönüşümleri olsunlar. Bu durumda $\{\mathbb{R}^2; f_1, f_2, f_3, f_4\}$ YFS'nin çekicisi K Koch eğrisidir (Şekil 2.2).



Şekil 2.2. Koch Eğrisi

Şimdi fraktal boyut kavramı hatırlatalım. Tamsayı olmayan değerler ile bir kümenin kendine benzerliği ve pürüzlüğü gibi özelliklerini yansıtan önemli bir araçtır kümenin fraktal boyutu. Fraktal boyut denilince akla farklı boyut kavramları gelmektedir. Bunlardan en önemlisi elbette Hausdorff boyut ve Minkowski ya da kutusayma boyutudur. Bu çalışmada fraktal boyut denilince, bahsi geçecek kümelerde zaten aynı bir değer olacak olan Hausdorff boyut veya Minkowski boyutu kastedilecektir.

Bu çalışmada, bu boyut kavramlarının detaylı tanımlarına girilmeyecektir. Sadece, özel tipten bazı yinelemeli fonksiyon sistemlerinin atraktörü olan kompakt kümelerin fraktal boyutlarını hesaplamanın pratik bir yolu olan Moran denkleminden bahsedilecektir.

Eğer verilen bir yinelemeli fonksiyon sistemi, açık küme koşulu denen bir koşulu sağlıyorsa ve eğer sadece benzerlik dönüşümü olan büzülme dönüşümlerinden oluşuyorsa, bu dönüşümlerin benzerlik katsayılarına $s_1, s_2, \dots, s_n$ diyelim, o zaman bu sistemin atraktörünün fraktal boyutu

$$s_1^x + s_2^x + \dots + s_n^x = 1$$

denkleminin var ve tek olan gerçel çözümüdür (detay için bkz. [1]).

Örnek 2.2.3. Önceki alt bölümde verilen ve atraktörü Sierpinski üçgeni olan yinelemeli fonksiyon sistemi, açık küme koşulunu sağlamaktadır ve 3 tane $\frac{1}{2}$ benzerlik katsayısına sahip büzülmeden oluşmaktadır. Bu nedenle bu sistemin atraktörü olan Sierpinski üçgeninin fraktal boyutu (Hausdorff boyutu ve Minkowski boyutu), Moran denkleminde,

$$\frac{1}{2^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{2^x} = 1$$

eşitliğinin tek gerçel kökü olan $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ olarak bulunur.

Bir sonraki bölümde ele alınacak olan fraktal interpolasyon fonksiyonlarının grafiği olan atraktörlerin fraktal boyutu da bu denkleme benzer bir denklem yardımı ile verilmektedir.

3. FRAKTAL İNTERPOLASYON FONKSİYONLAR

Belirli bir veri kümesi verildiğinde bir interpolasyon fonksiyonu oluşturmak için klasik sayısal analizde çok sayıda interpolasyon tekniği bulunmaktadır. Bununla birlikte, doğada bulunan birçok yapı oldukça karmaşık şekillere sahiptir ve dolayısıyla bu yapıların ifade edilmesi ve şekillendirilmesi oldukça zordur. Klasik yöntemler bu tür problemlerin modellenmesi için uygun değildir. Barnsley, Hutchinson teoremine dayanarak ve yinelemeli fonksiyon sistemi (YFS) teorisini kullanarak fraktal interpolasyon fonksiyonunu (FIF) tanıtarak bu sorunları ele almıştır (bkz. [1, 8]).

Günümüzde fraktal interpolasyon fonksiyon teorisi, uygulamalı bilimlerin ve mühendisliğin çeşitli dallarında güçlü bir araç haline gelmiştir.

3.1. Fraktal İnterpolasyon Fonksiyonlarının Genel Yapısı

Tanım 3.1.1. $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ reel sayılar ve $I = [x_0, x_n] \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$D = \{(x_i, F_i) \in I \times \mathbb{R} \mid i = 1, 2, \dots, n\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

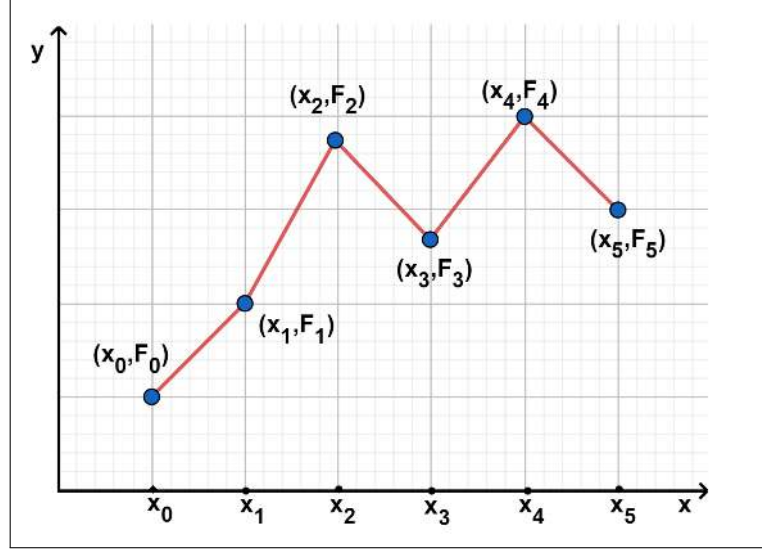
veri kümesi verilsin. Bu noktalardan geçen

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}, f(x_i) = F_i$$

sürekli fonksiyonuna D kümesine karşılık gelen bir interpolasyon fonksiyonu ve $(x_i, F_i) \in \mathbb{R}^2$ noktalarına da interpolasyon noktaları denir. Ayrıca f fonksiyonu bu veri kümesini interpolate eder denir.

Burada açıktır ki bir veri kümesi verildiğinde ona karşılık gelen birçok interpolasyon fonksiyonu vardır. f fonksiyonun grafiği interpolasyon noktalarından geçer. Burada ilk akla gelen fonksiyon, aşağıdaki gibi tanımlanan parçalı-lineer fonksiyon olacaktır:

$$f : [x_0, x_n] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = F_{i-1} + \frac{F_i - F_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} (x - x_{i-1})$$



Şekil 3.1. 6 elemanlı bir veri kümesi için bir interpolasyon fonksiyon örneği

Bir veri kümesi verildiğinde atraktörü bu veri kümesini interpolate eden bir sürekli fonksiyonun grafiği olan bir YFS bulunabilir mi?

$$\{(x_i, F_i) \in \mathbb{R}^2 \mid i = 0, 1, 2, \dots, n\}$$

veri kümesi verilsin. Temel amacımız, bu kümeye karşılık gelen ve bir önceki soruya cevap veren bir YFS bulmaktır.

$i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $I = [x_0, x_n]$ verilsin.

$$L_i : I \rightarrow [x_{i-1}, x_i]$$

homeomorfizma dönüşümü tanımlansın öyle ki

$$L_i(x_0) = x_{i-1}, L_i(x_n) = x_i$$

ve $\forall a, b \in I$ için

$$|L_i(a) - L_i(b)| \leq l_i \cdot |a - b|, \quad l_i \in (0, 1)$$

koşullarını sağlansın. $\forall x \in I$ için, $K = I \times \mathbb{R}$ olmak üzere $\phi_i : K \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\phi_i(x_0, y_0) = F_{i-1}; \quad \phi_i(x_n, y_n) = F_i$$

koşullarını sağlayan sürekli homeomorfizma fonksiyonu verilsin ve ϕ fonksiyonu y bileşenine göre bir büzülme dönüşümü olsun. Yani $x \in [x_0, x_n]$ ve $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ için

$$|\phi_i(x, y_1) - \phi_i(x, y_2)| \leq s_i \cdot |y_1 - y_2|$$

olacak şekilde $s_i \in (0, 1)$ sayısı var olsun. Bu durumda

$$w_i : K \rightarrow K, w_i(x, y) = (L_i(x), \phi_i(x, y))$$

şeklinde tanımlanan w_i sürekli fonksiyonu bir büzülme dönüşümü olur. Böylece

$$\{K; w_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

bir yinelemeli fonksiyon sistemi oluşturur. Diğer yandan Barnsley,

$$G = \bigcup_{i=1}^n w_i(G)$$

olacak şekilde bir tek boş olmayan $G \subseteq K$ kompakt alt kümesinin varlığını kanıtladı öyle ki bu G kümesi

$$\{K; w_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

YFS'nin çekicisi olur. Ayrıca bu G 'nin uygun bir

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}, f(x_i) = F_i$$

sürekli fonksiyonunun grafiği olduğu gösterilmiştir (bkz. [1, 2]).

Teorem 3.1.1. Yukarıda tanımlanmış olan

$$\{K; w_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

YFS'nin bir tek G çekicisi vardır ve ayrıca G ,

$$\{(x_i, F_i) \mid i = 0, 1, 2, \dots, n\}$$

veri kümesini interpolate eden bir $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonunun grafiğidir.

Kanıt. $G, \{K; w_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ YFS'nin atraktörü olsun.

$$\hat{I} = \{x \in I : (x, y) \in G, \exists y \in \mathbb{R}\}$$

seçilsin. $G = \bigcup_i w_i(G)$ olduğundan $\hat{I} = \bigcup_i L_i(\hat{I})$ olur. Fakat

$$\hat{I} = I = [x_0, x_n]$$

alınırsa $\{I, L_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ tek çekicisi I olan bir YFS olur.

G 'nin f fonksiyonunun grafiği olduğunu göstermek için $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ 'den alınan her bir x değeri için yalnız bir tek y_i değerine karşılık geleceğini göstermek yeterlidir.

$$i \in \{0, 1, \dots, n\} \text{ için } S_i = \{(x, y) \in G : x = x_i\}$$

olsun. $i \neq 1$ ise $w_i(S_0) \cap S_0 = 0$ olduğundan $w_1(S_0) = S_0$ olmalıdır. Fakat w_1, S_0 kompakt metriği üzerinde bir büzülme dönüşümüdür, dolayısıyla $S_0 = (x_0, y_0)$ 'dir. Benzer şekilde de $S_n = (x_n, y_n)$ olur.

Dikkat edilirse, $I \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ için S_i ile eşleşebilecek noktaları yalnız $S_0(w_{i-1}$ altında) ve $S_n(w_i$ altında) noktalarıdır ve bu noktalardan

$$S_i = w_{i-1}(S_0) \cup w_i(S_n) = (x_i, F_i)$$

elde edilir.

$$\delta = \max\{|s - t| : (x, s), (x, t) \in G, \exists x \in I\}$$

seçilsin. G kümesi kompakt olduğundan bu maksimuma $\delta = |s - t|$ alınarak bazı $(\hat{x}, s), (\hat{x}, t) \in G$ noktalarında ulaşılır ve bazı i 'ler için $\hat{x} \in (x_{i-1}, x_i)$ olur.

Bu durumda G 'de $(L_i^{-1}(\hat{x}), u)$ ve $(L_i^{-1}(\hat{x}), v)$ iki noktası vardır ki

$$s = F_i(L_i^{-1}(\hat{x}), u) \quad \text{ve} \quad t = F_i(L_i^{-1}(\hat{x}), v)$$

olur. O halde $0 \leq q < 1$ için

$$\begin{aligned} \delta &= |s - t| = |F_i(L_i^{-1}(\hat{x}), u) - F_i(L_i^{-1}(\hat{x}), v)| \\ &\leq q \cdot |u - v| \leq q \cdot \delta \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla $\delta = 0$ olup sonuç olarak $G, f : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonun grafiği olur. G kümesi alınan YFS'nin atraktörü olduğundan tek olur.

Şimdi $f(x)$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterelim. Bunun için, $x \in I$ için normu $|g|_\infty = \max\{|g(x)|\}$ olan $C(I) = \{g : I \rightarrow \mathbb{R}, g \text{ reel değerli ve sürekli fonksiyon}\}$ uzayını ele alalım.

$$C_0(I) = \{g \in C(I), g : I \rightarrow [a, b] \text{ ve } g(x_0) = y_0, g(x_n) = y_n\} \subset C(I)$$

olsun. Bu durumda $C_0(I)$ tam bir metrik uzayı olur ve YFS kavramından $x \in I_i$ için

$$T : C_0(I) \rightarrow C_0(I), (Tg)(x) = F_i(L_i^{-1}(x), g(L_i^{-1}(x)))$$

şeklinde tanımlanan bir T büzülme dönüşümü vardır. Buradan $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$\begin{aligned}
|Th - Tg|_\infty &= \max \{ |F_i(L_i^{-1}(x), h(L_i^{-1}(x))) - F_i(L_i^{-1}(x), g(L_i^{-1}(x)))| : x \in I_i \} \\
&\leq \max \{ q \cdot |h(L_i^{-1}(x)) - g(L_i^{-1}(x))| : x \in I_i \} \\
&\leq q \cdot |h - g|_\infty
\end{aligned}$$

yazılabilir ve dolayısıyla T 'nin $\hat{h} \in C_0(I)$ şeklinde bir tek sabit noktası vardır. $\hat{h}$ 'nin grafiği verilen YFS'nin atraktörü olup $\hat{h} = f$ eşitliği gerçekleşir ve sonuç olarak f sürekli bir fonksiyon olur.

□

3.2. Afın Fraktal İnterpolasyon Fonksiyonları

Bir önceki alt bölümde fraktal interpolasyon fonksiyonların genel yapısında tanımlanan dönüşümlerin afın dönüşümler seçilerek oluşturulan afın fraktal interpolasyon fonksiyonları kavramı inceleyelim.

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$$

olmak üzere

$$\{(x_i, F_i) \in \mathbb{R}^2 \mid i = 0, 1, 2, \dots, n\}$$

veri kümesi verilsin. $w_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$w_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_i & 0 \\ \delta_i & s_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_i \\ \lambda_i \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanan afın dönüşümleri dikkate alalım. Bu türden dönüşümlerle ilgili yinelemeli fonksiyon sistemini oluşturmaya çalışalım.

Verilen $n + 1$ nokta, doğal olarak $[x_0, x_n]$ aralığını n alt aralığa ayırmaktadır. Bu w_i dönüşümlerinin her bir i için $w_i(x_0, F_0) = (x_{i-1}, F_{i-1})$ ve $w_i(x_n, F_n) = (x_i, F_i)$ eşitliklerini sağlamasını istemek son derece anlamlıdır. Her $i = 1, 2, \dots, n$ için bu eşitliklerden $\alpha_i, \delta_i, \beta_i$ ve λ_i sabitleri

$$\begin{aligned}
(\alpha_i x_0 + \beta_i, \delta_i x_0 + s_i F_0 + \lambda_i) &= (x_{i-1}, F_{i-1}) \\
(\alpha_i x_n + \beta_i, \delta_i x_n + s_i F_n + \lambda_i) &= (x_i, F_i)
\end{aligned}$$

denklemlerinin çözümünden belirlenir. Dolayısıyla bu sabitleri s_i parametresine bağlı

olarak

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \frac{x_i - x_{i-1}}{x_n - x_0} \\ \beta_i &= x_i - \alpha_i x_n = \frac{x_n x_{i-1} - x_0 x_i}{x_n - x_0} \\ \delta_i &= \frac{F_i - F_{i-1}}{x_n - x_0} - s_i \frac{F_n - F_0}{x_n - x_0} \\ \lambda_i &= F_i - \delta_i x_n - s_i F_n \\ &= \frac{x_n F_{i-1} - x_0 F_i}{x_n - x_0} - s_i \frac{x_n F_0 - x_0 F_n}{x_n - x_0}\end{aligned}$$

elde edilir. Parametre olarak s_i 'nin seçilmesinin nedeni; w_i dönüşümlerinin y -eksenine paralel doğru parçasını yine y - eksenine paralel bir doğru parçasına resmetmesidir. Yani L , y -eksenine paralel bir doğru parçası iken $w_i(L)$ de y -eksenine paraleldir. Ayrıca $w_i(L)$ 'nin uzunluğunun L doğru parçasının uzunluğuna oranı da s_i 'dir. Yani s_i, x sabit tutulduğunda y -ekseni boyunca değişim oranını vermektedir. s_i 'ye düşey ölçüm çarpımı denilir. O halde s_i 'yi parametre seçerek her bir dönüşümün düşey ölçümü açık olarak belirtilmiş olur.

Sadece üzerine koyduğumuz iki koşul ile ilgili afin fonksiyonların büzülme olmasını garanti edemeyiz elbette. Veri kümesine bağlı olarak muhtemelen bu w_i dönüşümleri standart metriğe göre büzülme olmayacaktır. Bir (hiperbolik) yinelemeli fonksiyon sistemi arandığından bu dönüşümlerin bir tam metrik uzay üzerinde büzülme olmasını istemek gayet doğaldır. Fakat, aşağıdaki teoremden de ifade edildiği üzere, Öklid metriğine denk (ve verilen veri kümesine bağlı) öyle bir metrik vardır ki işte bu metriğe göre bu w_i dönüşümleri büzülme dönüşümü olur.

Yardımcı Teorem 3.2.1. $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$, olmak üzere

$$\{(x_i, F_i) \mid i = 0, 1, \dots, n\}$$

veri kümesine ilişkin $0 \leq s_i < 1$ ve $i = 1, \dots, n$ için

$$\{\mathbb{R}^2; w_i, i = 1, \dots, n\}$$

YFS verilsin.

$$0 < \theta < \min \left\{ \frac{1 - |\alpha_i|}{1 + |\delta_i|} \mid i = 1, \dots, n \right\}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}d_\theta &: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ d_\theta((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= |x_1 - x_2| + \theta |y_1 - y_2|\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan $d_\theta, \mathbb{R}^2$ 'deki Öklid metriğine denk bir metriktir ve w_i dönüşüm-

leri bu metriğine göre büzülme dönüşümleridir (detaylı bilgi ve kanıt için bkz. [2]).

Tam olarak aradığımız, grafiği bir yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü olan ve verilen veri kümesini interpolate eden bir sürekli fonksiyonun varlığını Teorem 3.2.1'den görebiliriz.

Teorem 3.2.1. $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ ve $i = 1, 2, \dots, n$ için $0 \leq s_i < 1$ düşey ölçüm çarpımı olmak üzere

$$\{(x_i, F_i) \mid i = 0, 1, 2, \dots, n\}$$

veri kümesine karşılık gelen

$$\{\mathbb{R}^2; w_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

yinelemeli fonksiyon sistemi verilsin. G , bu YFS'nin çekicisi olsun.

Bu durumda G

$$\{(x_i, F_i) \mid i = 0, 1, 2, \dots, n\}$$

veri kümesini interpolate eden bir $f : [x_0, x_n] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonun grafiğidir.

Kanıt. $d, C([x_0, x_n])$ üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların bir tam metrik uzayı ve

$$\mathcal{F} = \{f \mid f : [x_0, x_n] \rightarrow \mathbb{R} \text{ sürekli ve } f(x_0) = F_0, f(x_n) = F_n\}$$

koşullarını sağlayan $\mathcal{F}$ kümesi verilsin. $\forall g, h \in \mathcal{F}$ için

$$d(g, h) = \max\{|f(x) - g(x)|, x \in [x_0, x_n]\}$$

olsun. Bu durumda, $\mathcal{F}$ kümesi, $C([x_0, x_n])$ 'nin kapalı bir alt kümesi olduğundan $(\mathcal{F}, d)$ bir tam metrik uzayı olur. $i = 1, 2, \dots, n$ ve $x \in [x_{i-1}, x_i]$ için

$$I_i : [x_0, x_n] \rightarrow [x_{i-1}, x_i], \quad I_i(x) = \alpha_i x + \beta_i$$

terslenebilir bir dönüşümü olmak üzere,

$$T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}, \quad (Tf)(x) = \delta_i I_i^{-1}(x) + s_i f(I_i^{-1}(x)) + \lambda_i$$

şeklinde tanımlı T fonksiyonu verilsin. Burada T fonksiyonu iyi tanımlıdır ve d üzerinde bir büzülme dönüşümüdür. Gerçekten de, $i = 1, 2, \dots, n$ ve $x \in [x_{i-1}, x_i]$ için

$f, g \in \mathcal{F}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} |(Tf)(x) - (Tg)(x)| &= |s_i| |f(I_i^{-1}(x)) - g(I_i^{-1}(x))| \\ &\leq |s_i| d(f, g) \text{ dir.} \end{aligned}$$

$$\delta = \max \{|s_i| : i = 1, 2, \dots, n\} < 1$$

seçilirse

$$d(Tf, Tg) \leq \delta.d(f, g)$$

olur. Yani $T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ bir büzülme dönüşümü olur.

Banach sabit nokta teoremine göre T dönüşümün sabit noktası vardır ve tektir. Yani bir tek $f \in \mathcal{F}$ vardır öyle ki $T(f) = f$ olur. Kabul edelim ki

$$G = \{(x, f(x)) : x \in [x_0, x_n]\},$$

f fonksiyonunun grafiği olsun. $(x, f(x)) \in G$ ise, bu durumda öyle bir i_0 vardır ki $x \in [x_{i_0-1}, x_{i_0}]$ olur.

Böylece $x' = \frac{x-b_{i_0}}{a_{i_0}}$ için,

$$\begin{aligned} w_{i_0}(x', f(x')) &= (a_{i_0}x' + b_{i_0}, Tf(a_{i_0}x' + b_{i_0})) \\ &= (x, f(x)) \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $(x, f(x)) \in w_{i_0}(G)$ olup

$$G \subseteq \bigcup_{i=1}^n w_i(G) \text{ olur.}$$

$w_{i_0}(G) \subseteq G$ olduğundan

$$G = \bigcup_{i=1}^n w_i(G)$$

yazılabilir. Bu da G, w_i 'nin sabit noktası olduğu gösterir. Başka bir ifade ile G ,

$$(Tf)(\alpha_i x + \beta_i) = \delta_i x + s_i f(x) + \lambda_i$$

olduğundan,

$$G = \bigcup_{i=1}^n w_i(G)$$

koşulunu sağlayan tek kümedir ve dolayısıyla f fonksiyonun grafiği olur. $\square$

Tanım 3.2.1. Teorem 3.2.1’de ifade edilen f sürekli fonksiyona

$$\{(x_i, F_i) \mid i = 0, 1, 2, \dots, n\}$$

veri kümesine karşılık gelen afin fraktal interpolasyon fonksiyonu denir.

Örnek 3.2.1. $\{(0, 0), (1, 3), (2, -1), (3, 5), (5, 2)\}$ veri kümesini interpolate eden fraktal interpolasyon fonksiyonunu belirleyelim.

$s_1 = \frac{3}{10}$, $s_2 = \frac{1}{4}$, $s_3 = \frac{1}{2}$, $s_4 = \frac{2}{5}$ düşey ölçüm çarpanlarını seçilsin.

$i = 1, 2, 3, 4$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \frac{x_i - x_{i-1}}{x_n - x_0} \\ \delta_i &= \frac{F_i - F_{i-1}}{x_n - x_0} - s_i \frac{F_n - F_0}{x_n - x_0} \\ \beta_i &= \frac{x_n x_{i-1} - x_0 x_i}{x_n - x_0} \\ \lambda_i &= \frac{x_n F_{i-1} - x_0 F_i}{x_n - x_0} - s_i \frac{x_n F_0 - x_0 F_n}{x_n - x_0}\end{aligned}$$

olarak belirlenir. Burada

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \frac{x_i - x_{i-1}}{5} \\ \delta_i &= \frac{F_i - F_{i-1}}{5} - \frac{2}{5} s_i \\ \beta_i &= x_{i-1} \\ \lambda_i &= F_{i-1}\end{aligned}$$

olmak üzere

$$w_i(x, y) = (\alpha_i x + \beta_i, \delta_i x + s_i y + \lambda_i)$$

şeklinde dir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}w_1(x, y) &= \left(\frac{1}{5}x, \frac{12}{25}x + \frac{3}{10}y\right) \\ w_2(x, y) &= \left(\frac{1}{5}x + 1, -\frac{9}{10}x + \frac{1}{4}y + 3\right) \\ w_3(x, y) &= \left(\frac{1}{5}x + 2, \frac{6}{5}x + \frac{1}{2}y - 1\right) \\ w_4(x, y) &= \left(\frac{2}{5}x + 3, -\frac{19}{25}x + \frac{2}{5}y + 5\right)\end{aligned}$$

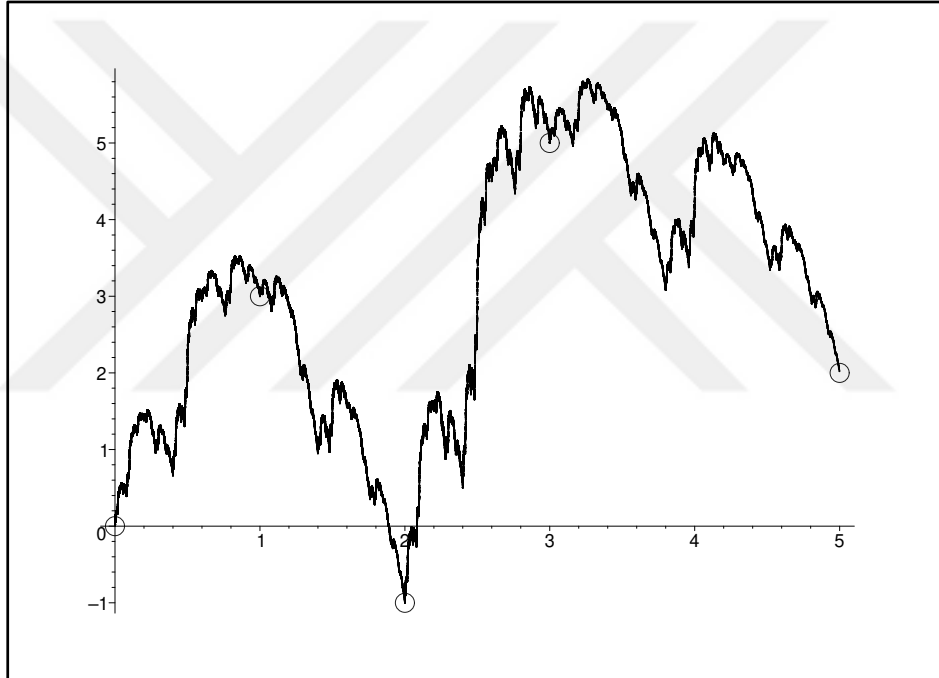
olur. Böylece verilen veri kümesine karşılık gelen $\{\mathbb{R}^2; w_1, w_2, w_3, w_4\}$ yinelemeli fonksiyon sistemi elde edilir. Bu YFS’nin çekicisi olan $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ fraktal interpolasyon fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir (bkz. Şekil 3.2).

Örnek 3.2.2. $\{(0, 0), (1, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 0)\}$ veri kümesi verilsin. $i = 1, 2, 3$ olmak

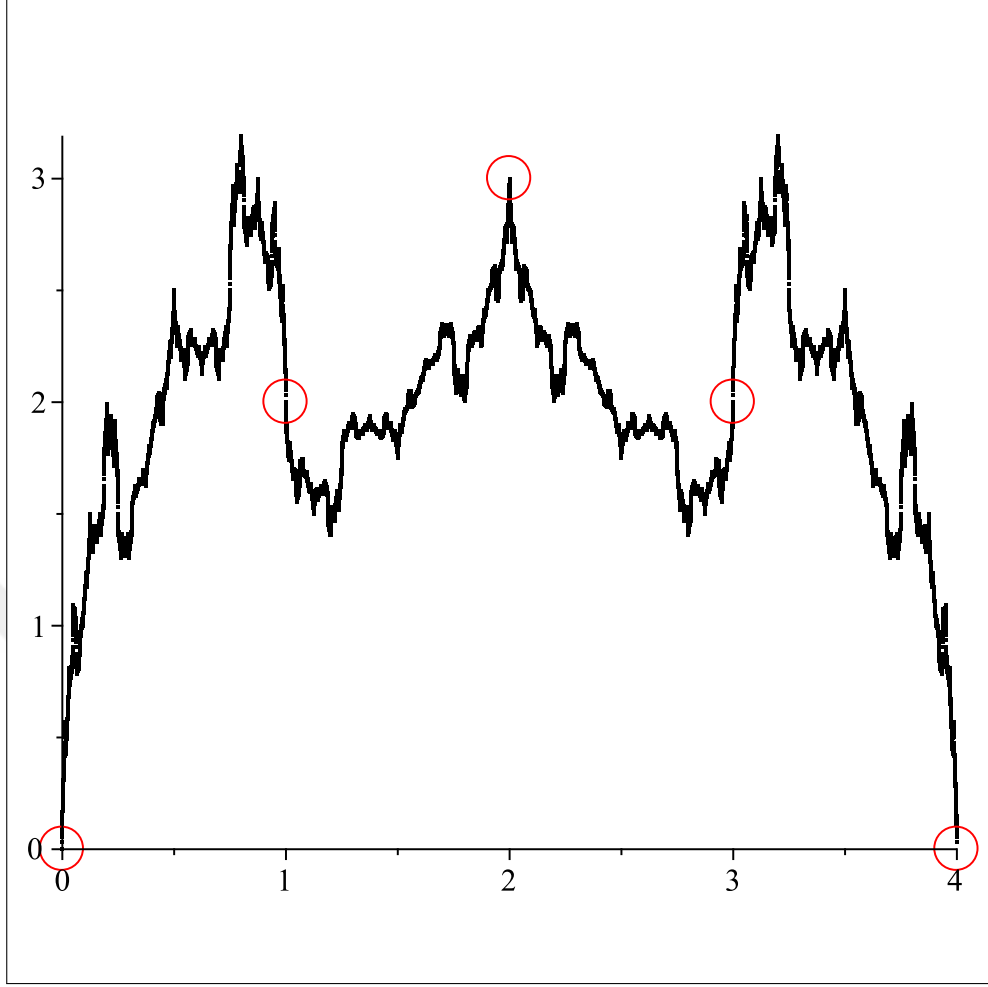
üzere $s_1 = \frac{1}{2}$, $s_2 = -\frac{1}{4}$, $s_3 = -\frac{1}{4}$, $s_4 = \frac{1}{2}$ düşey ölçüm çarpanlarını seçilirse

$$\begin{aligned} w_1(x, y) &= \left(\frac{1}{4}x, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \right) \\ w_2(x, y) &= \left(\frac{1}{4}x + 1, \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y + 2 \right) \\ w_3(x, y) &= \left(\frac{1}{4}x + 2, -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y + 3 \right) \\ w_4(x, y) &= \left(\frac{1}{4}x + 3, -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + 2 \right) \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla $\{\mathbb{R}^2; w_1, w_2, w_3, w_4\}$ sistemi elde edilir.



Şekil 3.2. $\{(0,0), (1,3), (2,-1), (3,5), (5,2)\}$ veri kümesine ilişkin FIF grafiği



Şekil 3.3. $\{(0,0), (1,2), (2,3), (3,2), (4,0)\}$ veri kümesine ilişkin FIF grafiği

3.3. Afın Fraktal İnterpolasyon Fonksiyonların Fraktal Boyutu

Afın FIF'ların fraktal boyutu, Barnsley tarafından verilen aşağıdaki teoremin yardımıyla şu şekilde belirlenebilir (bkz. [2]).

Teorem 3.3.1. $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\{(x_i, F_i) \mid i = 0, 1, 2, \dots, n\}$ veri kümesine ilişkin atraktörü G olan

$$\{\mathbb{R}^2; w_i : i = 1, 2, \dots, n\}$$

yinelemeli fonksiyon sistemi verilsin. $i = 1, 2, \dots, n$ için $\alpha_i, \delta_i, \beta_i, \lambda_i$ sabit olmak üzere

$$w_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_i & 0 \\ \delta_i & s_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_i \\ \lambda_i \end{pmatrix}$$

ve $0 \leq s_i < 1$ düşey ölçüm çarpanı olsun. G , verilen veri kümesini interpolate eden

fraktal interpolasyon fonksiyonun grafiği olmak üzere, eğer

$$\sum_{i=1}^n |s_i| > 1$$

ve interpolasyon noktaları aynı doğru üzerinde değil ise, bu durumda G 'nin fraktal boyutu

$$\sum_{i=1}^n |s_i| \alpha_i^{D-1} = 1$$

denkleminin tek reel çözümü olan D sayısıdır. Diğer durumlarda G 'nin fraktal boyutu 1'dir.

Örnek 3.3.1. $D_1 = \{(0, 0), (1, 2), (2, 3), (3, 2), (5, 0)\}$ veri kümesi verilsin. $s_1 = \frac{1}{2}$, $s_2 = \frac{1}{4}$, $s_3 = \frac{1}{4}$, $s_4 = \frac{1}{2}$ düşey ölçüm çarpanları olmak üzere D kümesine karşılık gelen fraktal interpolasyon fonksiyonun grafiğinin boyutunu hesaplayalım. $n = 4$ için $\sum_{i=1}^4 |s_i| = 1,5 > 1$ olduğundan aranan boyutu $\sum_{i=1}^4 |s_i| \alpha_i^{D-1} = 1$ denkleminin tek kökü olan D sayısına eşittir.

$$\alpha_i = x_i - x_{i-1}x_n - x_0$$

olmak üzere $a_1 = a_2 = a_3 = \frac{1}{5}$, $a_4 = \frac{2}{5}$ elde edilir. Dolayısıyla,

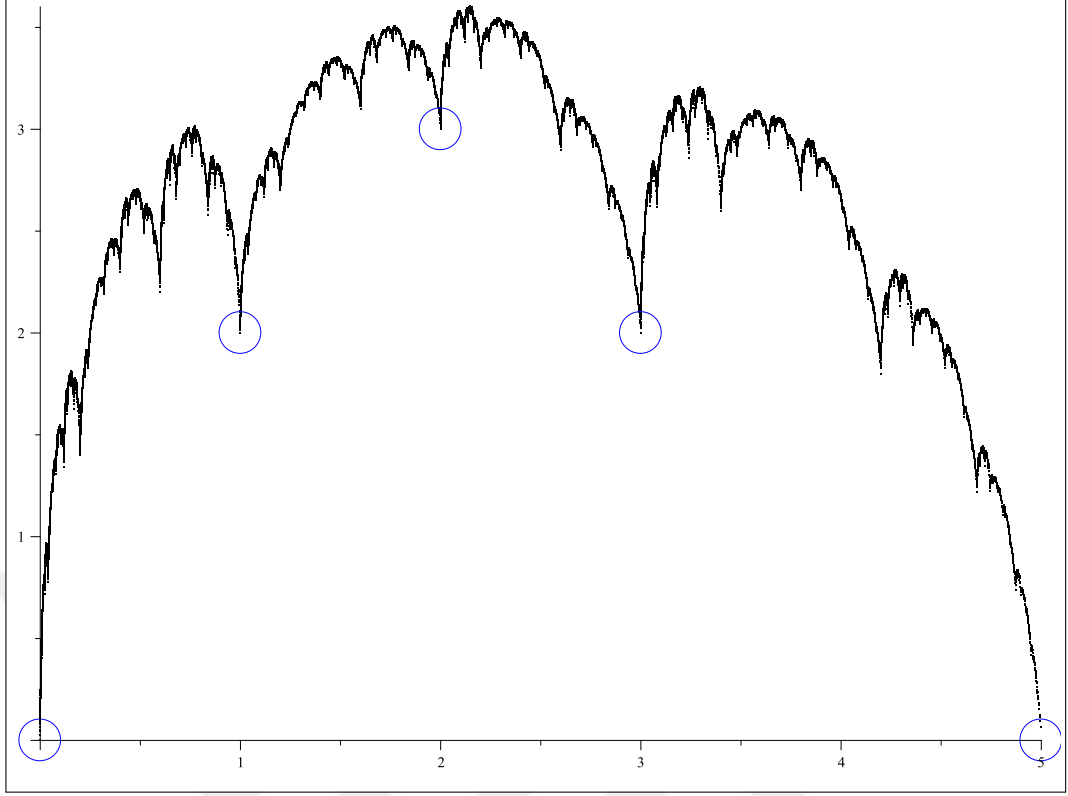
$$\sum_{i=1}^4 |s_i| \alpha_i^{D-1} = 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |s_1| a_1^{D-1} + |s_2| a_2^{D-1} + |s_3| a_3^{D-1} + |s_4| a_4^{D-1} &= 1 \\ \Rightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{5}\right)^{D-1} + \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{2}{5}\right)^{D-1} &= 1 \end{aligned}$$

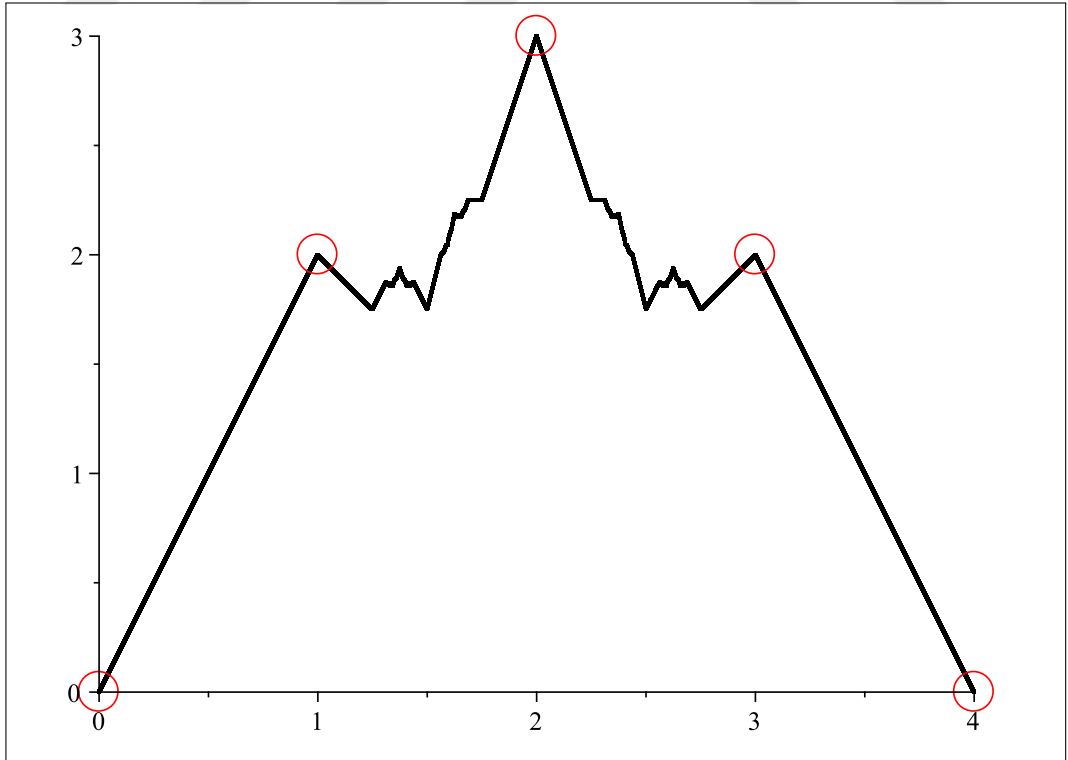
olup $5^{D-1} - 2^{D-2} = 1$ denklemi elde edilir ve buradan $D \approx 1,29766$ olarak bulunur (bkz. Şekil 3.4).

Örnek 3.3.2. $D_2 = \{(0, 0), (1, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 0)\}$ veri kümesini ele alalım.

$s_1 = 0$, $s_2 = -\frac{1}{4}$, $s_3 = -\frac{1}{4}$, $s_4 = 0$ düşey ölçüm çarpanları olmak üzere D kümesine karşılık gelen fraktal interpolasyon fonksiyonun grafiğinin boyutunu bulalım. Burada $\sum_{i=1}^4 |s_i| = -\frac{1}{2} < 1$ olduğundan Teorem 3.3 gereğince D_2 'ye ilişkin fraktal interpolasyon fonksiyonun boyutu 1'dir (bkz. Şekil 3.5).



Şekil 3.4. D_1 veri kümesine karşılık gelen FIF grafiği, $D \approx 1,29766$



Şekil 3.5. D_2 veri kümesine karşılık gelen FIF grafiği, $D = 1$

4. FRAKTAL İNTERPOLASYON YÜZEYLERİ

Fraktal interpolasyon yüzeyleri genellikle bir YFS veya tekrarlayan YFS (recurrent iterated function systems) yardımıyla sürekli fonksiyonların grafikleri olarak inşa edilir (bkz. [5]).

Fraktal interpolasyon fonksiyon yöntemi bilim dünyasında güçlü bir araç haline gelmesiyle birlikte, birçok araştırmacı ve teknoloji uzmanlarından büyük ilgi duymuştur. Tanıtılan bu FIF yöntemi, daha yüksek boyutlarda, bazı keskin şartlar altında uygulanabilse de, bazı problemlerde yetersiz kalmıştır. Bunların en önemlisi doğada bulunan karmaşık ve pürüzlü yüzeylerin simülasyon problemleridir. Bu nedenle, bu tür yüzeylerin daha objektif bir şekilde karakterize edebilmek için, fraktal interpolasyon yüzeyler son derecede önemli ve çalışması gereken bir konu haline gelmiştir.

Yapılan araştırmaların ışığında günümüzde fraktal interpolasyon yüzeyleri yeni bir veri işleme metodu olarak birçok alanda çok yaygın bir şekilde kullanılmakta ve kayalar, araziler, metaller, gezegenler gibi doğal yüzeylerin simülasyon ve modellenmesinde büyük bir katkı sağlamaktadır.

Bu bölümde, tez çalışmamızın esas amacı olan fraktal interpolasyon yüzeylerle ilişkin elde edilen sonuçlarını incelenecektir.

Bir YFS'nin atraktörü olarak kabul edilen fraktal interpolasyon yüzeylerle ilgili ilk çalışma 1990 yılında Alman matematikçi Peter R. Massopust (bkz. [11]) tarafından gerçekleştirildi. Massopust, seçilmiş bir D üçgensel bölge üzerinde, D 'nin sınırındaki interpolasyon noktalarının eş düzlemli olması koşuluyla bir fraktal interpolasyon fonksiyonu tanımladı. Böylece Massopust, bu koşul altında $\mathbb{R}^3$ 'te verilen bir veri kümesini interpolate eden ve grafiği bir YFS'nin atraktörü olan farklı bir sürekli fonksiyonun var olduğunu kanıtladı.

Bu çalışma 1993 yılında Geronimo ve Hardin (bkz. [7]) tarafından genelleştirildi. Burada ilgili fraktal interpolasyon fonksiyonu bir üçgensel bölge yerine herhangi bir çokgen üzerinde verildi ve interpolasyon noktaları da daha genel ve serbest bir şekilde seçilebilir hale gelmiştir. Bu çalışmanın tek kısıtlı yanı alınan tüm düşey ölçüm çarpanlarının eşit olması gerektiği zorunluluğudur.

Bu iki çalışmanın genellemesi olarak Zhao (bkz. [15]) tarafından 1996'da yeni bir metot sunulmuştur. Bu son çalışmada düşey ölçüm çarpanlarının eşit olma sorunu çözüldü. Burada belirtmek gerekir ki [7, 15]'de üçgenleştirme metodunu kullanarak üçgenin sınırındaki interpolasyon noktalarının eş-düzlemli(coplanar) olması koşulu kaldırılmıştır.

Yukarıda belirtilen çalışmalarda genel olarak tanımlanan FIF'ler üçgensel bir

bölgede anlamlandırılmıştır. Bu yaklaşım ise pratik uygulamalar için kısıtlayıcıdır.

Dikdörtgensel latis üzerinde fraktal yüzeyleri inşa edilmesi 1997 yılında Xie ve Sun (bkz. [14]) öncülüğüyle ortaya konulmuştur. Ancak kullandıkları metot ile elde edilen YFS'nin atraktörü sürekli bir fonksiyonun grafiği değildi.

2002 yılında L. Dalla (bkz. [6]), bu oluşturulan yapının sadece veri kümesinin sınırındaki interpolasyon noktalarının kolineer (colinear) olması durumunda geçerli olduğunu kanıtlamış ve dikdörtgensel latis üzerindeki fraktal interpolasyon yüzeylerin en önemli genellemelerinden birini ortaya koymuştur.

Daha sonra R. Malysz (bkz. [10]) 2006'da, düşey ölçüm çarpanlarını eşit olma koşuluyla, verilmiş herhangi keyfi interpolasyon noktaları için Dalla'nın çalışmasının bir genellemesini sunmuştur.

Malysz'in çalışmasının dört yıl ardından Metzler (bkz. [12]) dikdörtgensel latis üzerinde kabul edilen fraktal interpolasyon yüzeylerle ilişkin çalışmaların hiç bir özel koşul olmaksızın bir kısmi genellemesini sunmuştur. Fakat bu çalışmada yer alan fraktal interpolasyon yüzeyi örneklerinde düşey ölçüm çarpanları eşit olarak alınmıştır.

2015 yılında Ruan ve Xu (bkz [13]), dikdörtgensel bir latis üzerinde fraktal interpolasyon yüzeyler için bir genel metot sunmuştur. Öte yandan, yine aynı çalışmada bu yüzeylerin inşasında belirli bazı koşullar seçilerek oluşturulan bilineer (bilinear) fraktal interpolasyon yüzeyleri incelenmiştir.

Aşağıdaki bölümlerde [6] ve [13]'da yapılan çalışmaları özetleyerek fraktal interpolasyon yüzeyi kavramını inceleyeceğiz ve ayrıca bu yüzeylerle ilişkin örnekler tüm detaylarıyla verilecektir.

4.1. Dikdörtgensel Latis Üzerinde Fraktal İnterpolasyon Yüzeyleri

Bu bölümde dikdörtgensel bölgeler üzerinde inşa edilen fraktal interpolasyon yüzeylerle ilgili en etkili çalışmalarından biri olan ve L. Dalla tarafından yapılan [6] çalışması incelenecektir. Bu çalışmanın esas amacı $\mathbb{R}^3$ 'ten alınan belirli bir veri kümesi için bir

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

iki değişkenli fraktal interpolasyon fonksiyonun grafiğini oluşturmaktır. Tanımlanan fraktal interpolasyon fonksiyonun sürekli olması için belirli koşullar da verilecektir. Daha sonra birkaç fraktal interpolasyon yüzey örnekleri verilecektir.

İlk önce $\mathbb{R}^3$ 'ten alınan bir veri kümesini seçip o kümeye karşılık gelen fraktal interpolasyon yüzeyi oluşturalım. Bunun için, $I = [a, b]$ ve $J = [c, d]$ kümeleri verilsin ve $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$; $c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$ olsun. Amacımız oluş-

turulan $D = \{(x_i, y_j, z_{ij}) : i = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, m\}$ veri kümesini interpolate eden ve grafiği bir yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü olan bir

$$f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$$

sürekli fonksiyonu bulmaktır. D veri kümesinin sınırındaki interpolasyon noktaları kolinear (colinear) olsun. Yani

$$\begin{aligned} &\{(x_0, y_j, z_{0j}) : j = 0, 1, \dots, m\} \\ &\{(x_n, y_j, z_{nj}) : j = 0, 1, \dots, m\} \\ &\{(x_i, y_0, z_{i0}) : i = 0, 1, \dots, n\} \\ &\{(x_i, y_m, z_{im}) : i = 0, 1, \dots, n\} \end{aligned} \quad (4.1)$$

noktaları aynı doğru üzerinde olsun. Başka bir deyişle, $\Delta_x = x_n - x_0$ ve $\Delta_y = y_m - y_0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} z_{nj} &= \frac{y_j - y_0}{\Delta_y} z_{nm} - \frac{y_j - y_m}{\Delta_y} z_{n0} \\ z_{0j} &= \frac{y_j - y_0}{\Delta_y} z_{0m} - \frac{y_j - y_m}{\Delta_y} z_{00} \\ z_{im} &= \frac{x_i - x_0}{\Delta_x} z_{nm} - \frac{x_i - x_n}{\Delta_x} z_{0m} \\ z_{i0} &= \frac{x_i - x_0}{\Delta_x} z_{n0} - \frac{x_i - x_n}{\Delta_x} z_{00} \end{aligned}$$

şartlarının sağlanması gerekir. $\alpha_i, \beta_i, \delta_j, \lambda_j, \phi_{ij}, \psi_{ij}, \gamma_{ij}$ ve k_{ij} sabit sayıları için

$$w_{ij} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_i & 0 & 0 \\ \delta_j & 0 & 0 \\ \phi_{ij} & \psi_{ij} & s_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_i \\ \lambda_j \\ \gamma_{ij}xy + k_{ij} \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$w_{ij} : I \times J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

fonksiyonu verilsin. Barnsley'in klasik afin durumuna benzer şekilde verilen koşullardan elde edilen

$$\begin{aligned} \alpha_i x_0 + \beta_i &= x_{i-1}; \quad i = 1, \dots, n \\ \alpha_i x_n + \beta_i &= x_i; \quad i = 1, \dots, n \\ \delta_j y_0 + \lambda_j &= y_{j-1}; \quad j = 1, \dots, m \\ \delta_j y_m + \lambda_j &= y_j; \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

denklemlerinin çözümünden

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \frac{x_i - x_{i-1}}{x_n - x_0}, \\ \beta_i &= \frac{x_{i-1}x_n - x_ix_0}{x_n - x_0} \\ \delta_j &= \frac{y_j - y_{j-1}}{y_m - y_0}, \\ \lambda_j &= \frac{y_{j-1}y_m - y_jy_0}{y_m - y_0}\end{aligned}$$

bulunur. s_{ij} düşey ölçüm çarpanları olmak üzere, s_{ij} parametresine bağlı olarak

$$\begin{cases} \phi_{ij}x_0 + \psi_{ij}y_0 + \gamma_{ij}x_0y_0 + s_{ij}z_{00} + k_{ij} = z_{i-1,j-1} \\ \phi_{ij}x_n + \psi_{ij}y_0 + \gamma_{ij}x_ny_0 + s_{ij}z_{n0} + k_{ij} = z_{i,j-1} \\ \phi_{ij}x_0 + \psi_{ij}y_m + \gamma_{ij}x_0y_m + s_{ij}z_{0m} + k_{ij} = z_{i-1,j} \\ \phi_{ij}x_n + \psi_{ij}y_m + \gamma_{ij}x_ny_m + s_{ij}z_{nm} + k_{ij} = z_{i,j} \end{cases}$$

denklem sisteminden

$$\begin{aligned}\gamma_{ij} &= \frac{z_{ij} + z_{i-1,j-1} - z_{i-1,j} - z_{i,j-1} - s_{ij}(z_{nm} + z_{00} - z_{0m} - z_{n0})}{(y_m - y_0)(x_n - x_0)} \\ \phi_{ij} &= \frac{z_{i-1,j-1} - z_{i,j-1} - s_{ij}(z_{00} - z_{n0}) - \gamma_{ij}y_0(x_0 - x_n)}{x_0 - x_n} \\ \psi_{ij} &= \frac{z_{i-1,j-1} - z_{i-1,j} - s_{ij}(z_{00} - z_{0m}) - \gamma_{ij}x_0(y_0 - y_m)}{y_0 - y_m} \\ k_{ij} &= z_{ij} - \phi_{ij}x_n - \psi_{ij}y_m - s_{ij}z_{nm} - \gamma_{ij}x_ny_m\end{aligned}$$

sabitleri elde edilir.

Şimdi tanımladığımız w_{ij} fonksiyonlarının birer büzülme dönüşümü olduğunu görmek için aşağıdaki teoremi inceleyelim.

Teorem 4.1.1. $\{(x_i, y_j, z_{ij}) \mid i = 0, \dots, n, \text{ ve } j = 0, \dots, m\}$ veri kümesi verilsin ve $0 < |s_{ij}| < 1$ olmak üzere s_{ij} düşey ölçüm çarpanları olsun. Bu durumda $\mathbb{R}^3$ üzerinde Öklid metriğine denk öyle bir metrik vardır ki

$$w_{ij} : I \times J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

dönüşümleri bu metriğe göre büzülme dönüşümü olur. Ayrıca

$$G = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m w_{ij}(G)$$

olacak şekilde bir tek $G \subset \mathbb{R}^3$ kompakt alt kümesi vardır (Detaylı bilgi ve kanıt için bkz. [2]).

Yani, Teorem 4.1.1’de ifade edilen

$$\{[a, b] \times [c, d] \times \mathbb{R}; w_{ij}, i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m\}$$

sistemi atraktörü G olan bir YFS olur.

Elde edilen YFS’nin atraktörü bir fraktal interpolasyon fonksiyonun grafiği olduğu aşağıdaki teoremden ifade edilmektedir.

Teorem 4.1.2. $\{[a, b] \times [c, d] \times \mathbb{R}; w_{ij} : i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m\}$ atraktörü G olan YFS verilsin ve s_{ij} düşey ölçüm çarpanları olsun. Bu durumda

$$f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu $\{(x_i, y_j, z_{ij}) : i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m\}$ veri kümesini interpolate eden ve grafiği G olan sürekli bir fonksiyondur. Ayrıca

$$G = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in [a, b] \times [c, d]\}$$

şeklindedir.

Kanıt. Alınan veri kümesinin sınırındaki interpolasyon noktalarını kolinear olması şartı göz önüne alınarak Teorem 3.2.1’in ispatının benzer yolu izlenir. □

Böylece fraktal interpolasyon yüzeyi inşa edilmiş olur ve tanımı aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

Tanım 4.1.1. Yukarıdaki teoremlerde ifade edilen

$$f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonun grafiği ve $\{(x_i, y_j, z_{ij}) : i = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, m\}$ veri kümesine ilişkin

$$\{[a, b] \times [c, d] \times \mathbb{R}; w_{ij} : i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m\}$$

YFS’nin atraktörü olan G kümesine fraktal interpolasyon yüzeyi denir.

Bu çalışmada ([6]) inşa edilen fraktal interpolasyon yüzeyleri ile ilgili birkaç örnek verip detaylıca inceleyelim.

Örnek 4.1.1.

Veri kümesi 1				
$x \backslash y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	3	0	3	3
2	6	3	0	3
3	9	7	5	3

kümesi verilsin. $i = 1, 2, 3$ ve $j = 1, 2, 3$ için $s_{ij} = \frac{1}{4}$ düşey ölçüm çarpanları için bu veri kümesine karşılık gelen iki değişkenli fraktal interpolasyon fonksiyonun grafiğini bulalım. Burada $i = 1, 2, 3$ ve $j = 1, 2, 3$ için

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \frac{1}{3}(x_i - x_{i-1}), \\ \beta_i &= x_{i-1} \\ \delta_j &= \frac{1}{3}(y_j - y_{j-1}), \\ \lambda_j &= y_{j-1}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\gamma_{ij} &= \frac{1}{9}(z_{ij} + z_{i-1,j-1} - z_{i-1,j} - z_{i,j-1} - s_{ij}(z_{33} + z_{00} - z_{03} - z_{30})) \\ \phi_{ij} &= -\frac{1}{3}(z_{i-1,j-1} - z_{i,j-1} - s_{ij}(z_{00} - z_{30})) \\ \psi_{ij} &= -\frac{1}{3}(z_{i-1,j-1} - z_{i-1,j} - s_{ij}(z_{00} - z_{03})) \\ k_{ij} &= z_{ij} - 3\phi_{ij} - 3\psi_{ij} - s_{ij}z_{33} - 9\gamma_{ij}\end{aligned}$$

olarak bulunur. Öte yandan

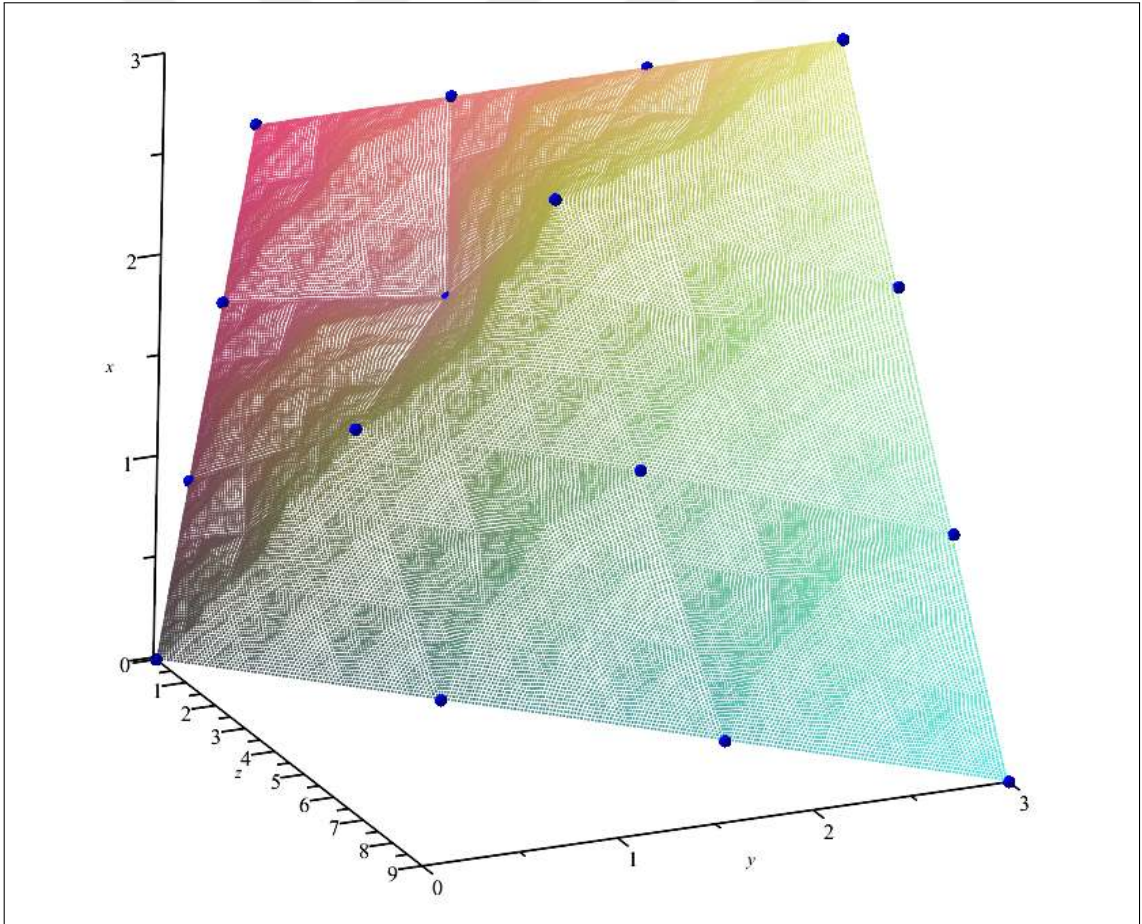
$$\begin{aligned}z_{3j} &= \frac{y_j}{3}z_{33} - \frac{y_j-3}{3}z_{30} \\ z_{0j} &= \frac{y_j-y_0}{3}z_{03} - \frac{y_j-3}{3}z_{00} \\ z_{i3} &= \frac{x_i-x_0}{3}z_{33} - \frac{x_i-3}{3}z_{03} \\ z_{i0} &= \frac{x_i-x_0}{3}z_{30} - \frac{x_i-3}{3}z_{00}\end{aligned}$$

kolinearlik koşulunun sağlanması gerekir.

$$w_{ij}(x, y, z) = (\alpha_i x + \beta_i, \delta_j y + \lambda_j, \phi_{ij} x + \psi_{ij} y + s_{ij} z + \gamma_{ij} xy + k_{ij}) \text{ olduğundan}$$

$$\begin{aligned}
w_{11}(x, y, z) &= \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}, \frac{1}{12} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} - \frac{7xy}{36}\right) \\
w_{12}(x, y, z) &= \left(\frac{x}{3}, \frac{y+6}{3}, -\frac{5x}{4} + \frac{y}{4} + \frac{z}{2} + \frac{xy}{4} + 3\right) \\
w_{13}(x, y, z) &= \left(\frac{x}{3}, \frac{y+12}{3}, -\frac{5x}{4} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} + \frac{13xy}{432} + 6\right) \\
w_{21}(x, y, z) &= \left(\frac{x+6}{3}, \frac{y}{3}, \frac{x}{12} - \frac{13y}{12} + \frac{z}{2} + \frac{17xy}{36} + 1\right) \\
w_{22}(x, y, z) &= \left(\frac{x+6}{3}, \frac{y+6}{3}, \frac{3x}{4} + \frac{y}{4} + \frac{3z}{4} - \frac{5xy}{12}\right) \\
w_{23}(x, y, z) &= \left(\frac{x+6}{3}, \frac{y+12}{3}, -\frac{5x}{4} + \frac{7y}{12} + \frac{z}{2} + \frac{13xy}{36} + 3\right) \\
w_{31}(x, y, z) &= \left(\frac{x+12}{3}, \frac{y}{3}, \frac{x}{12} - \frac{5y}{12} + \frac{z}{4} + \frac{5xy}{36} + 2\right) \\
w_{32}(x, y, z) &= \left(\frac{x+12}{3}, \frac{y+6}{3}, -\frac{x}{12} + \frac{7y}{4} + \frac{z}{2} + \frac{7xy}{12} + 3\right) \\
w_{33}(x, y, z) &= \left(\frac{x+12}{3}, \frac{y+12}{3}, \frac{3x}{4} + \frac{11y}{12} + \frac{z}{4} - \frac{11xy}{36}\right)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece her $(i, j) \in \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ için $\{[0, 3] \times [0, 3] \times \mathbb{R}, w_{ij}\}$ yinelemeli fonksiyon sistemi elde edilir. Bu YFS'ne karşılık gelen fraktal interpolasyon yüzeyi Şekil 4.1'de verilmiştir.



Şekil 4.1. Veri kümesi 1'e karşılık gelen fraktal interpolasyon yüzeyi

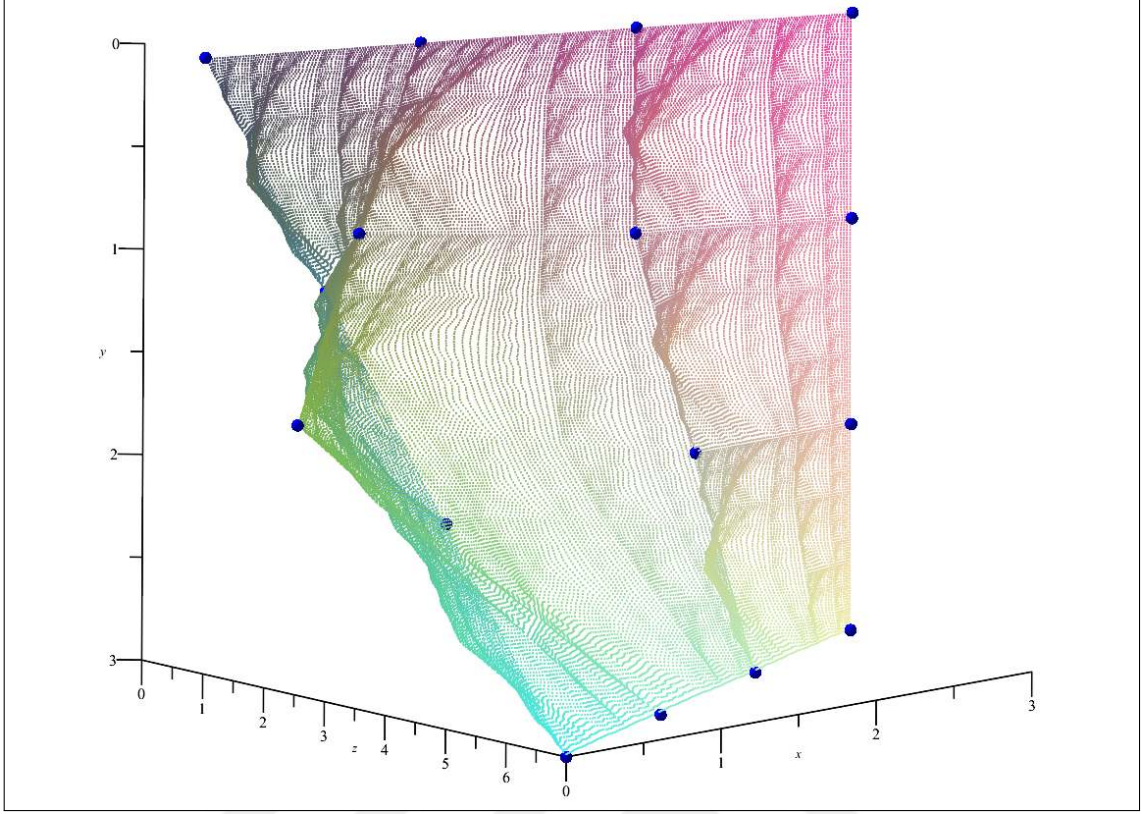
Örnek 4.1.2. $m = n = 3$ olmak üzere

Veri kümesi 2				
$x \backslash y$	0	1	2	3
0	1	2	3	4
1	3	1	3	4
2	5	0	4	4
3	7	6	5	4

verilmiş olsun. $s_{ij} = \frac{1}{4}$ için bu kümeye karşılık gelen fraktal interpolasyon yüzeyini bulalım. Burada alınan verilere göre,

$$\begin{aligned}
w_{11}(x, y, z) &= \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}, \frac{x}{12} + \frac{y}{6} + \frac{z}{4} - \frac{xy}{6} + \frac{3}{4}\right) \\
w_{12}(x, y, z) &= \left(\frac{x}{3}, \frac{y+3}{3}, -\frac{11x}{12} + \frac{y}{6} + \frac{z}{4} - \frac{xy}{6} + \frac{1}{4}\right) \\
w_{13}(x, y, z) &= \left(\frac{x}{3}, \frac{y+6}{3}, -\frac{23x}{12} + \frac{y}{6} + \frac{z}{4} + \frac{11xy}{18} + \frac{19}{4}\right) \\
w_{21}(x, y, z) &= \left(\frac{x+3}{3}, \frac{y}{3}, \frac{x}{12} - \frac{5y}{6} + \frac{z}{4} - \frac{5xy}{18} + \frac{1}{4}\right) \\
w_{22}(x, y, z) &= \left(\frac{x+3}{3}, \frac{y+3}{3}, -\frac{5x}{12} - \frac{5y}{6} + \frac{z}{4} + \frac{7xy}{18} - \frac{3}{4}\right) \\
w_{23}(x, y, z) &= \left(\frac{x+3}{3}, \frac{y+6}{3}, \frac{13x}{12} + \frac{3y}{2} + \frac{z}{4} - \frac{7xy}{18} + \frac{11}{4}\right) \\
w_{31}(x, y, z) &= \left(\frac{x+6}{3}, \frac{y}{3}, \frac{x}{12} - \frac{y}{2} + \frac{z}{4} + \frac{xy}{6} + \frac{11}{4}\right) \\
w_{32}(x, y, z) &= \left(\frac{x+6}{3}, \frac{y+3}{3}, \frac{x}{12} - \frac{y}{6} + \frac{z}{4} + \frac{xy}{18} - \frac{1}{4}\right) \\
w_{33}(x, y, z) &= \left(\frac{x+6}{3}, \frac{y+6}{3}, -\frac{x}{4} - \frac{y}{6} + \frac{z}{4} + \frac{xy}{18} + \frac{15}{4}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece her $(i, j) \in \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ için $\{[0, 3] \times [0, 3] \times \mathbb{R}, w_{ij}\}$ yinelemeli fonksiyon sistemi elde edilir. Bu YFS'ne karşılık gelen fraktal interpolasyon yüzeyi Şekil 4.2'de verilmiştir.



Şekil 4.2. Veri kümesi 2'ye karşılık gelen fraktal interpolasyon yüzeyi

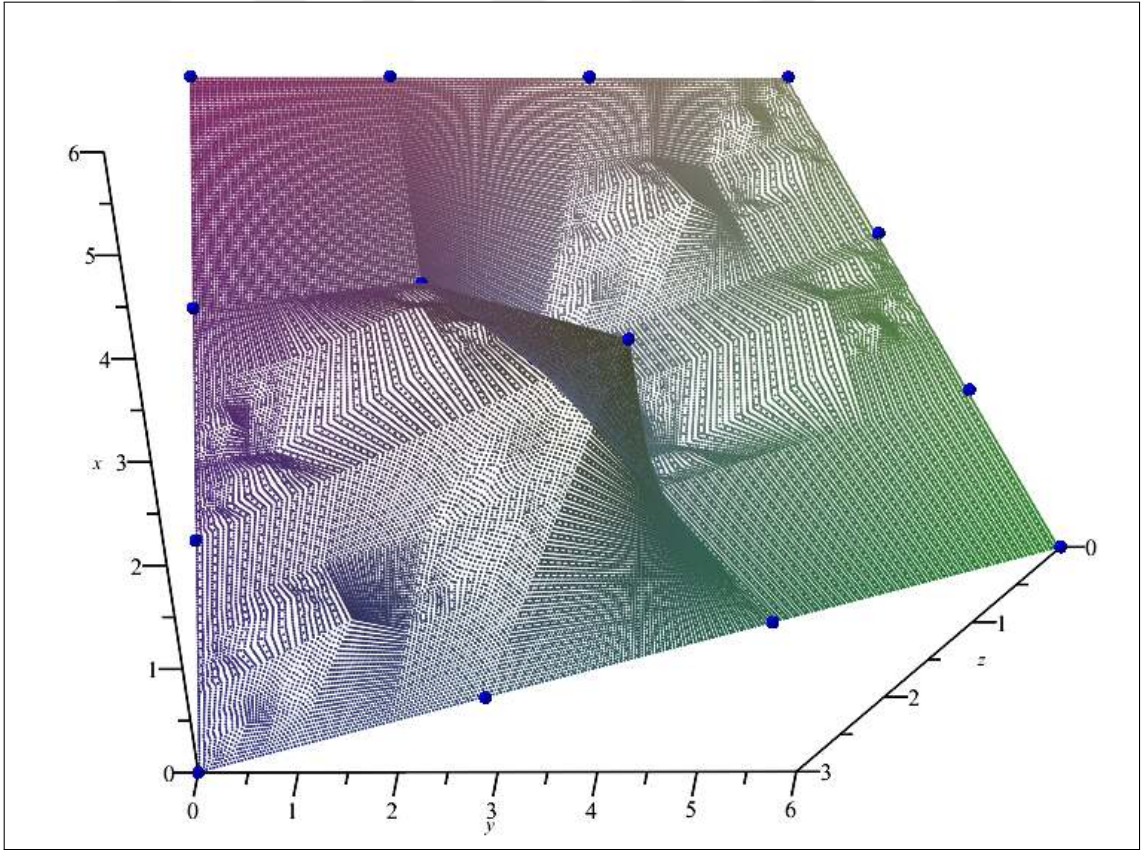
Örnek 4.1.3.

Veri kümesi 3				
$y \backslash x$	0	2	4	6
0	3	$\frac{8}{3}$	$\frac{7}{3}$	2
2	2	0	2	2
4	1	2	3	2
6	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	2

verildiğinde $s_{11} = s_{33} = \frac{1}{4}$, $s_{12}, s_{13} = s_{31} = s_{32} = 0$, $s_{21} = s_{23} = -\frac{1}{4}$ düşey ölçüm çarpanları olmak üzere bu veri kümeyle karşılık gelen fraktal interpolasyon yüzeyini bulalım. Seçilen verileri kullanarak

$$\begin{aligned}
w_{11}(x, y, z) &= \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}, -\frac{1}{72}x - \frac{1}{24}y - \frac{29}{432}xy + \frac{1}{4}z + \frac{9}{4}\right) \\
w_{12}(x, y, z) &= \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3} + 2, -\frac{7}{24}x - \frac{1}{24}y + \frac{1}{16}xy + \frac{1}{4}z + \frac{5}{4}\right) \\
w_{13}(x, y, z) &= \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3} + 4, \frac{5}{24}x - \frac{1}{24}y - \frac{13}{432}xy + \frac{1}{4}z + \frac{1}{4}\right) \\
w_{21}(x, y, z) &= \left(\frac{x}{3} + 2, \frac{y}{3}, -\frac{1}{72}x - \frac{23}{72}y + \frac{19}{432}xy + \frac{1}{4}z + \frac{23}{12}\right) \\
w_{22}(x, y, z) &= \left(\frac{x}{3} + 2, \frac{y}{3} + 2, \frac{3}{8}x + \frac{11}{24}y - \frac{7}{144}xy + \frac{1}{4}z - \frac{3}{4}\right) \\
w_{23}(x, y, z) &= \left(\frac{x}{3} + 2, \frac{y}{3} + 4, \frac{5}{24}x - \frac{7}{72}y - \frac{13}{432}xy + \frac{1}{4}z + \frac{5}{4}\right) \\
w_{31}(x, y, z) &= \left(\frac{x}{3} + 4, \frac{y}{3}, -\frac{1}{72}x + \frac{5}{72}y - \frac{5}{432}xy + \frac{1}{4}z + \frac{19}{12}\right) \\
w_{32}(x, y, z) &= \left(\frac{x}{3} + 4, \frac{y}{3} + 2, \frac{1}{24}x + \frac{7}{24}y - \frac{7}{144}xy + \frac{1}{4}z + \frac{5}{4}\right) \\
w_{33}(x, y, z) &= \left(\frac{x}{3} + 4, \frac{y}{3} + 4, -\frac{1}{8}x - \frac{11}{72}y + \frac{11}{432}xy + \frac{1}{4}z + \frac{9}{4}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece her $(i, j) \in \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ için $\{[0, 6] \times [0, 6] \times \mathbb{R}, w_{ij}\}$ yinelemeli fonksiyon sistemi elde edilir. Bu YFS'ne karşılık gelen fraktal interpolasyon yüzeyi Şekil 4.3'de verilmiştir.



Şekil 4.3. Veri kümesi 3'e karşılık gelen fraktal interpolasyon yüzeyi

Bu metot ile inşa edilen fraktal interpolasyon yüzeylerinin sürekli bir fonksiyonun grafiği olması için alınan veri kümesinin sınırındaki interpolasyon noktaları aynı doğru üzerinde olması gerektiği vurgulanmıştır. Üstteki verdiğimiz örneklerinden birini ele alarak bu koşulun sağlandığını bir şekil ile gösterelim. Bunun için **veri**

kümesi 3 kümesini göz önüne alalım. Gerçekten de, $i = 0, j = 0, 1, 2, 3$ için

$$\begin{cases} (x_0, y_0, z_{00}) = (0, 0, 3) \\ (x_0, y_1, z_{01}) = (0, 2, 2) \\ (x_0, y_2, z_{02}) = (0, 4, 1) \\ (x_0, y_3, z_{03}) = (0, 6, 0) \end{cases}$$

$i = 3; j = 0, 1, 2, 3$ için

$$\begin{cases} (x_3, y_0, z_{30}) = (6, 0, 2) \\ (x_3, y_1, z_{31}) = (6, 2, 2) \\ (x_3, y_2, z_{32}) = (6, 4, 2) \\ (x_3, y_3, z_{33}) = (6, 6, 2) \end{cases}$$

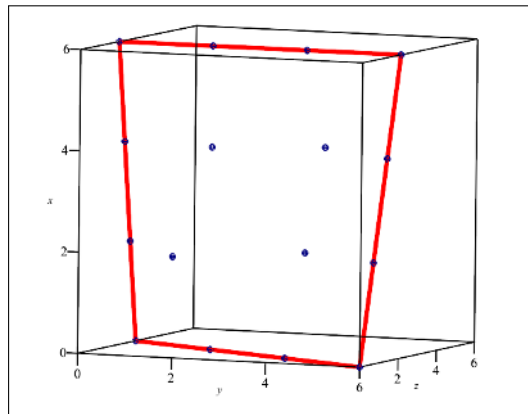
$i = 0, 1, 2, 3; j = 0$ için

$$\begin{cases} (x_0, y_0, z_{00}) = (0, 0, 3) \\ (x_1, y_0, z_{10}) = (2, 0, \frac{8}{3}) \\ (x_2, y_0, z_{20}) = (4, 0, \frac{7}{3}) \\ (x_3, y_0, z_{30}) = (6, 0, 2) \end{cases}$$

$i = 0, 1, 2, 3; j = 3$ için

$$\begin{cases} (x_0, y_3, z_{03}) = (0, 6, 0) \\ (x_1, y_3, z_{13}) = (2, 6, \frac{2}{3}) \\ (x_2, y_3, z_{23}) = (4, 6, \frac{4}{3}) \\ (x_3, y_3, z_{33}) = (6, 6, 2) \end{cases}$$

interpolation noktalarının kolineer olduğu açıkça görülebilir (Şekil 4.4).



Şekil 4.4. Örnek 4.2.'teki kolineer interpolasyon noktaları

Dalla'nın sunmuş olduğu bu yapıda, veri kümesinin sınırındaki interpolasyon noktalarının üzerindeki kolinearlik koşulunu kaldırabileceğimiz bir genelleme, yine aynı çalışmada şu şekilde verilmiştir.

Bunun için,

$$\{(x_i, y_j, z_{ij}) : i = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, m\}$$

veri kümesini ele alalım. $x_{-1} < x_0$, $y_{-1} < y_0$ ve $x_n < x_{n+1}$, $y_m < y_{m+1}$ olmak üzere (x_{-1}, y_{-1}) , (x_{n+1}, y_{-1}) , (x_{-1}, y_{m+1}) ve (x_{n+1}, y_{m+1}) noktaları verilsin. $i = 0, 1, \dots, n$ ve $j = 0, 1, \dots, m$ için $\hat{z}_{ij} = z_{ij}$ olmak üzere

$$\{(x_i, y_j, \hat{z}_{nm}) : i = -1, 0, \dots, n+1; j = -1, 0, \dots, m+1\}$$

veri kümesi verilsin ve bu kümenin sınırındaki interpolasyon noktaları kolinear olsun. Bu durumda Teorem 4.1.2'nin sonuçlarını kullanarak

$$\hat{f} : [x_{-1}, x_{n+1}] \times [y_{-1}, y_{m+1}] \rightarrow \mathbb{R}$$

fraktal interpolasyon fonksiyonu elde edilir.

f fonksiyonu $[x_0, x_n] \times [y_0, y_m]$ üzerinde verilmiş veri kümesini interpolate eden $\hat{f}$ fonksiyonunun kısıtlanmışdır.

Sunulan bu yöntemi ile, herhangi bir veri kümesi verildiğinde, bu kümenin genişletilmiş kümesinin sınırındaki interpolasyon noktaları kolinear olacak şekilde seçilerek sürekli bir fraktal interpolasyon fonksiyonu elde edilir. Daha sonra en baştaki bölgeye kısıtlanarak sonuç elde edilir.

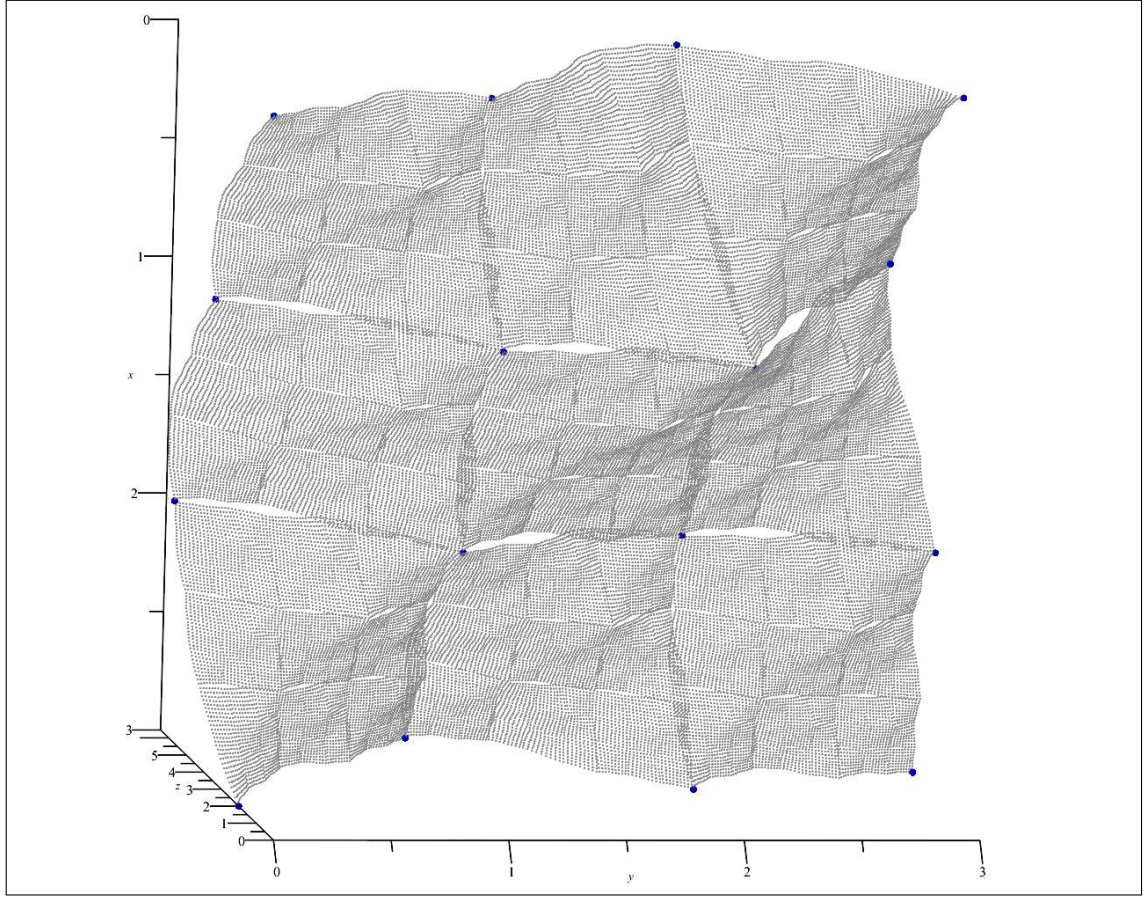
Aşağıdaki örnekte rastgele alınan bir veri kümesi için bu yöntemi uygulanalım.

Örnek 4.1.4. İnterpolasyon noktaları rastgele seçilerek

Veri kümesi 4				
$x \backslash y$	0	1	2	3
0	1	4	6	2
1	2	1	3	6
2	5	0	4	3
3	2	6	3	4

veri kümesini ele alalım. Seçilen sınırdaki interpolasyon noktaları kolinear olmadığından dolayı elde edilen fraktal interpolasyon yüzeyi sürekli olamaz. Gerçekten

de **Veri kümesi 4**'e karşılık gelen interpolasyon yüzeyinin sürekli bir fonksiyonun grafiği olmadığı Şekil 4.5'de açıkça görülebilir.



Şekil 4.5. Veri kümesi 4'e karşılık gelen sürekli olmayan fraktal interpolasyon yüzeyi

Şimdi yukarıda verilmiş olan genelleme metodunu uygulayalım. Bunun için 4.1'de verilen kolinearlık şartını sağlayacak şekilde interpolasyon noktalarını seçilerek var olan veri kümesi 4'ü genişletelim ve bu yeni küme **Veri kümesi 5** olsun.

Veri kümesi 5						
$x \backslash y$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	0	1	4	6	2	5
2	0	2	1	3	6	5
3	0	5	0	4	3	5
4	0	3	6	3	4	5
5	0	1	2	3	4	5

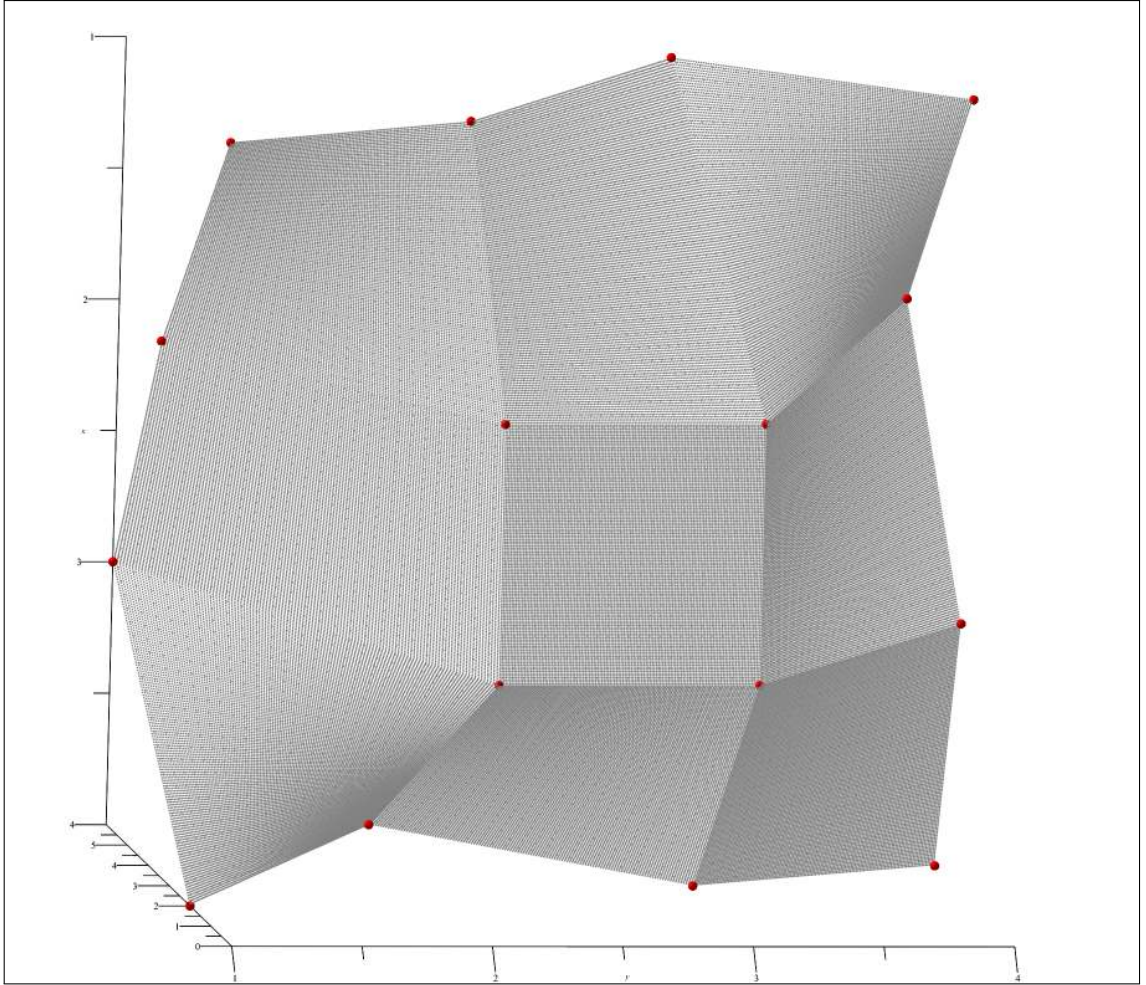
$s_{ij} = 0$ düşey ölçüm çarpanları olmak üzere bu kümenin kısıtlanışı olan **Veri**

kümesi 4'e karşılık gelen fraktal interpolasyon yüzeyini bulalım. Alınan verilere göre,

$$\begin{aligned}
w_{11}(x, y, z) &= \left(\frac{x}{5}, \frac{y}{5}, \frac{x}{5} \right) \\
w_{12}(x, y, z) &= \left(\frac{x}{5}, \frac{y}{5} + 1, \frac{1}{5}x + \frac{1}{25}xy \right) \\
w_{13}(x, y, z) &= \left(\frac{x}{5}, \frac{y}{5} + 2, \frac{2}{5}x + \frac{3}{25}xy \right) \\
w_{14}(x, y, z) &= \left(\frac{x}{5}, \frac{y}{5} + 3, x - \frac{2}{25}xy \right) \\
w_{15}(x, y, z) &= \left(\frac{x}{5}, \frac{y}{5} + 4, \frac{3}{5}x - \frac{2}{25}xy \right) \\
w_{21}(x, y, z) &= \left(\frac{x}{5} + 1, \frac{y}{5}, \frac{1}{5}x + 1 + \frac{2}{25}xy \right) \\
w_{22}(x, y, z) &= \left(\frac{x}{5} + 1, \frac{y}{5} + 1, \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}y - \frac{1}{5}xy + 1 \right) \\
w_{23}(x, y, z) &= \left(\frac{x}{5} + 1, \frac{y}{5} + 2, -\frac{2}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{3}{25}xy + 2 \right) \\
w_{24}(x, y, z) &= \left(\frac{x}{5} + 3, -x - \frac{2}{5}y + \frac{8}{25}xy + 5 \right) \\
w_{25}(x, y, z) &= \left(\frac{3}{5} + 4, \frac{3}{5}x - \frac{2}{5}y - \frac{2}{25}xy + 3 \right) \\
w_{31}(x, y, z) &= \left(\frac{x}{5} + 2, \frac{y}{5}, \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y + \frac{1}{25}xy + 2 \right) \\
w_{32}(x, y, z) &= \left(\frac{x}{5} + 2, \frac{y}{5} + 1, \frac{2}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{2}{25}xy + 4 \right) \\
w_{33}(x, y, z) &= \left(\frac{x}{5} + 2, \frac{y}{5} + 2, 0 \right) \\
w_{34}(x, y, z) &= \left(\frac{x}{5} + 2, \frac{y}{5} + 3, \frac{6}{5}y - \frac{3}{25}xy \right) \\
w_{35}(x, y, z) &= \left(\frac{x}{5} + 2, \frac{y}{5} + 4, -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{4}{25}xy + 6 \right) \\
w_{41}(x, y, z) &= \left(\frac{x}{5} + 3, \frac{y}{5}, \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{1}{5}xy + 3 \right) \\
w_{42}(x, y, z) &= \left(\frac{x}{5} + 3, \frac{y}{5} + 1, -\frac{4}{5}x - \frac{6}{5}y + \frac{2}{5}xy + 6 \right) \\
w_{43}(x, y, z) &= \left(\frac{x}{5} + 3, \frac{y}{5} + 2, \frac{6}{5}x - \frac{3}{25}xy \right) \\
w_{44}(x, y, z) &= \left(\frac{x}{5} + 3, \frac{y}{5} + 3, \frac{3}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{2}{25}xy \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_{45}(x, y, z) &= \left(\frac{x}{5} + 3, \frac{y}{5} + 4, \frac{z}{5} + 3 \right) \\
w_{51}(x, y, z) &= \left(\frac{x}{5} + 4, \frac{y}{5}, \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}y + \frac{2}{25}xy + 4 \right) \\
w_{52}(x, y, z) &= \left(\frac{x}{5} + 4, \frac{y}{5} + 1, \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{4}{25}xy + 2 \right) \\
w_{53}(x, y, z) &= \left(\frac{x}{5} + 4, \frac{y}{5} + 2, -\frac{1}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{3}{25}xy + 6 \right) \\
w_{54}(x, y, z) &= \left(\frac{x}{5} + 4, \frac{y}{5} + 3, \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y - \frac{1}{25}xy + 3 \right) \\
w_{55}(x, y, z) &= \left(\frac{x}{5} + 4, \frac{y}{5} + 4, \frac{z}{5} + 4 \right)
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla **Veri kümesi 5** 'e karşılık gelen fraktal interpolasyon yüzeyi elde edilir (Şekil 4.6).



Şekil 4.6. Veri kümesi 4'e karşılık gelen sürekli fraktal interpolasyon yüzeyi

4.2. Dikdörtgensel Latis Üzerinde Genel Fraktal İnterpolasyon Yüzeyleri

Bu bölümde, Ruan ve Xu tarafından yapılan ve 2015 yılında yayımlanan [13] çalışmasını baz alarak daha genel FIF genellemeleri incelenecektir. Bu çalışma esas olarak dikdörtgensel bir bölge üzerinde fraktal interpolasyon yüzeylerle ilgili yapılan çalışmaların bir özetidir. Aynı zamanda daha genel bir çerçevede fraktal interpolasyon yüzeyleri oluşturmak için genel bir yapı sunulmaktadır. Ayrıca inşa edilen yüzeylerin sürekli olması için sağlanması gereken bazı koşullar da verilmektedir. Bir sonraki bölümde bilineer fraktal interpolasyon yüzeyleri bu bölümde incelenecek genel durumun özel bir sınıfı olarak incelenecektir.

$I_x = [a, b]$ ve $I_y = [c, d]$ $\mathbb{R}^2$ 'den alınan kapalı aralıkları olsun.

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \text{ ve } c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$$

sırasıyla I_x ve I_y aralıklarının bölüntüleri olmak üzere

$$\{(x_i, y_i, f(x_i, y_i)) \in \mathbb{R}^3 \mid i = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, m\}$$

veri kümesi verilsin. $i = 1, 2, \dots, n$ ve $j = 1, 2, \dots, m$ için $I_{x_i} = [x_{i-1}, x_i]$ ve $I_{y_j} = [y_{j-1}, y_j]$ olarak gösterelim ve $L_{x_i} : I_x \longrightarrow I_{x_i}$; $L_{y_j} : I_y \longrightarrow I_{y_j}$ büzülme homeomorfizmaları aşağıdaki şartları sağlasın:

i tek sayı ise, $L_{x_i}(x_0) = x_{i-1}$

$$L_{x_i}(x_n) = x_i$$

i çift sayı ise, $L_{x_i}(x_0) = x_i$

$$L_{x_i}(x_n) = x_{i-1}$$

j tek sayı ise, $L_{y_j}(y_0) = y_{j-1}$

$$L_{y_j}(y_m) = y_j$$

j çift sayı ise, $L_{y_j}(y_0) = y_j$

$$L_{y_j}(y_m) = y_{j-1}$$

şeklinde olsun. L_{x_i} ve L_{y_j} büzülme dönüşümü olduğundan,

$$|L_{x_i}(x_1) - L_{x_i}(x_2)| \leq s_i |x_1 - x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in I_x \text{ için}$$

$$|L_{y_j}(y_1) - L_{y_j}(y_2)| \leq t_j |y_1 - y_2|, \quad \forall y_1, y_2 \in I_y \text{ için}$$

koşullarını sağlayan $s_i, t_j \in (0, 1)$ sayıları vardır. Tanım gereği,

$$\begin{aligned} L_{x_i}^{-1}(x_i) &= L_{x_{i+1}}^{-1}(x_i), \quad i \in \{0, n\} \text{ için} \\ L_{y_j}^{-1}(y_j) &= L_{y_{j+1}}^{-1}(y_j), \quad j \in \{0, m\} \text{ için} \end{aligned}$$

yazılabilir. Yani L_{x_i} ve L_{y_j} dönüşümleri iyi tanımlıdır.

$D = I_x \times I_y \times \mathbb{R}$ olmak üzere her $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, m\}$ için

$$F_{ij} : D \rightarrow \mathbb{R}$$

şekilde verilen bir sürekli fonksiyon olsun. F_{ij} fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlasın:

i ve j tek sayılar ise,

$$\begin{cases} F_{ij}(x_0, y_0, z_{00}) &= z_{i-1, j-1} \\ F_{ij}(x_0, y_m, z_{0m}) &= z_{i-1, j} \\ F_{ij}(x_n, y_0, z_{n0}) &= z_{i, j-1} \\ F_{ij}(x_n, y_m, z_{nm}) &= z_{ij} \end{cases}$$

i ve j çift sayılar ise,

$$\begin{cases} F_{ij}(x_0, y_0, z_{00}) &= z_{ij} \\ F_{ij}(x_0, y_m, z_{0m}) &= z_{i, j-1} \\ F_{ij}(x_n, y_0, z_{n0}) &= z_{i-1, j} \\ F_{ij}(x_n, y_m, z_{nm}) &= z_{i-1, j-1} \end{cases}$$

i tek ve j çift sayılar ise

$$\begin{cases} F_{ij}(x_0, y_0, z_{00}) &= z_{i-1, j} \\ F_{ij}(x_0, y_m, z_{0m}) &= z_{i-1, j-1} \\ F_{ij}(x_n, y_0, z_{n0}) &= z_{ij} \\ F_{ij}(x_n, y_m, z_{nm}) &= z_{i, j-1} \end{cases}$$

i çift ve j tek sayılar ise,

$$\begin{cases} F_{ij}(x_0, y_0, z_{00}) &= z_{i,j-1} \\ F_{ij}(x_0, y_m, z_{0m}) &= z_{ij} \\ F_{ij}(x_n, y_0, z_{n0}) &= z_{i-1,j-1} \\ F_{ij}(x_n, y_m, z_{nm}) &= z_{i-1,j} \end{cases}$$

sağlansın ve F_{ij} fonksiyonu z üçüncü bileşenine göre bir büzülme dönüşümü olsun. Yani $\forall (x, y) \in I_x \times I_y$ ve $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ için

$$|F_{ij}(x, y, z_1) - F_{ij}(x, y, z_2)| \leq s_{ij} \cdot |z_1 - z_2|$$

eşitsizliğini doğrulayan bir $s_{ij} \in (0, 1)$ sayısının var olduğu kabul edilsin.

Şimdi L_{x_i}, L_{y_j}, F_{ij} fonksiyonlarını kullanarak $D = I_x \times I_y \times \mathbb{R}$ üzerinde aradığımız yinelemeli fonksiyon sistemini oluşturacak w_{ij} sürekli dönüşümlerini tanımlayalım. Her bir $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, m\}$ için

$$w_{ij} : D \longrightarrow I_{x_i} \times I_{y_j} \times \mathbb{R}, w_{ij}(x, y, z) = (L_{x_i}(x), L_{y_j}(y), F_{ij}(x, y, z))$$

şeklinde verilsin. Bu durumda $\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, m\}$ için

$$\{D; w_{ij}, (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, m\}\}$$

bir yinelemeli fonksiyon sistemi oluşturur. Bu YFS'nin atraktörü G olsun.

$$\{D; w_{ij}, (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, m\}\}$$

YFS'ne karşılık gelen ve grafiği G olan bir tek sürekli fonksiyonun var olduğunu ve G 'nin aranan fraktal interpolasyon yüzeyi olduğunu aşağıdaki teoremi ile gösterelim.

Teorem 4.2.1. $\{D, w_{ij} : (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, m\}\}$ yukarıdaki tanımlanmış olan YFS olsun ve her $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, m\}$ için F_{ij} fonksiyonları aşağıdaki şartları sağlasın. $z \in \mathbb{R}$ olsun.

1. $\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ ve $y \in I_y$ için $x' = L_{x_i}^{-1}(x_i) = L_{x_{i+1}}^{-1}(x_i)$ olmak üzere,

$$F_{ij}(x', y, z) = F_{i+1,j}(x', y, z)$$

2. $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, j \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ ve $x \in I_x$ için $y' = L_{y_j}^{-1}(y_j) = L_{y_{j+1}}^{-1}(y_j)$ olmak üzere,

$$F_{ij}(x, y', z) = F_{i+1,j}(x, y', z)$$

olsun. Bu durumda $\forall (i, j) \in \{0, 1, 2, \dots, n\} \times \{0, 1, 2, \dots, m\}$ için

$$\begin{aligned} f : I_x \times I_y &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f(x_i, y_j) &= z_{ij} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan ve grafiği $G = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in I_x \times I_y\}$ olan bir tek f sürekli fonksiyonu vardır ve ayrıca

$$G = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m w_{ij}(G)$$

olur. f fonksiyonuna

$$\{D; w_{ij}, (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, m\}\}$$

YFS'ne ilişkin fraktal interpolasyon fonksiyonu denir ve G 'ye de

$$\{(x_i, y_i, f(x_i, y_j)) \in \mathbb{R}^3 \mid i = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, m\}$$

veri kümesine karşılık gelen fraktal interpolasyon yüzeyi adı verilir.

Kanıt. Teoremin kanıtı, klasik durumdakine benzer olarak yapılabilir. Buradaki 1. ve 2. koşul, fraktal interpolasyon fonksiyonunu sabit nokta olarak bize verecek olan operatörün iyi tanımlılığı için gerekmektedir. Detaylı bilgi ve kanıt için bkz. [13]. $\square$

Bu şekilde, dikdörtgensel bir latis üzerinde bir fraktal interpolasyon yüzeyi inşa edilmiş olur. Bilinen yöntemlerde olduğu gibi fraktal interpolasyon yüzeylerini oluşturmak için sıkça karşılaşılan zorluk aranan fraktal fonksiyonun sürekli bir fonksiyon olmasıdır. Öte yandan, oluşturulan YFS hiperpolik olmayabilir. Ancak, buna rağmen, yani sistemi oluşturan dönüşümlerin büzülme olmayabileceğine rağmen, hala ilgili G kümesi bu YFS'nin aşağıdaki teoremden de açıkça tanımlandığı şekilde belirlendiği bir kompakt kümedir! Yani, verilen veri kümesini interpolate eden fonksiyonun grafiği, keyfi bir $A \in \mathcal{H}(D)$ kompakt kümesinin YFS'nin belirlediği Hausdorff dönüşümü altındaki görüntülerinin oluşturduğu kompakt küme dizisinin hausdorff limitidir.

Teorem 4.2.2. f , Teorem 4.2.1’de varlığı gördüğümüz fonksiyon olsun. G , f ’nin grafiği ve $w(A) = \bigcup w_{ij}(A)$ olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} h(w^n(A), G) = 0$ ’dır.

Kanıt. Bkz. [13] □

Sunulan bu genel metot [10, 12] çalışmalarının sonuçlarından faydalanarak geliştirilmiştir. Burada düşey ölçüm çarpanları serbest olarak seçilebilir ve elde edilecek fraktal interpolasyon yüzeyinin sürekli olabilmesi için interpolasyon noktalarının bazı özel koşulları sağlanması gerekir. Bu koşullar, YFS’nin inşasında kullanılan dönüşümler ile ilgili olan ve Teorem 4.2.1’de verilen koşullardır.

Verilen bu genel çerçevenin özel bir durumu olarak, yine [13] çalışmasında, F_{ij} dönüşümleri bir takım bilineer fonksiyonlar yardımıyla tanımlanarak bilineer fraktal interpolasyon fonksiyonlar şu şekilde inşa edilmiştir.

4.3. Bilineer Fraktal İnterpolasyon Yüzeyleri

$\{(x_i, y_i, f(x_i, y_i)) \in \mathbb{R}^3 \mid i = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, m\}$ veri kümesini göz önüne alalım. $i = 1, 2, \dots, n$ ve $j = 1, 2, \dots, m$ için $I_x = [x_0, x_n]$, $I_y = [y_0, y_m]$, $I_{x_i} = [x_{i-1}, x_i]$ ve $I_{y_j} = [y_{j-1}, y_j]$ olmak üzere,

$$L_{x_i} : I_x \longrightarrow I_{x_i} \text{ ve } L_{y_j} : I_y \longrightarrow I_{y_j}$$

Bölüm 4.2’deki gibi tanımlanan dönüşümler olsun. L_{x_i} ve L_{y_j} fonksiyonları ayrıca lineer olsun. $g : I_x \times I_y \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\forall (i, j) \in \{0, n\} \times \{0, m\}$ için

$$g(x_i, y_j) = z_{ij}$$

şartını sağlayan bir bilineer fonksiyon olsun. Bu tanıma denk olarak, bu bilineer fonksiyon açık olarak

$$g(x, y) = \frac{1}{(x_n - x_0)(y_m - y_0)} [(x_n - x)(y_m - y)z_{00} + (x - x_0)(y_m - y)z_{n0} \\ + (x_n - x)(y - y_0)z_{0m} + (x - x_0)(y - y_0)z_{nm}]$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi h ve s sürekli fonksiyonlarını tanımlayalım. Bu fonksiyonları F_{ij} dönüşümleri tanımlanırken kullanılacaktır.

Her $(i, j) \in \{0, 1, 2, \dots, n\} \times \{0, 1, 2, \dots, m\}$ için

$$h : I_x \times I_y \longrightarrow \mathbb{R}, h(x_i, y_j) = z_{ij}$$

fonksiyonu düşünelim. Burada h fonksiyonu her $(i, j) \in \{0, 1, 2, \dots, n\} \times \{0, 1, 2, \dots, m\}$ için aşağıdaki şekilde de ifade edebileceğimiz bilineer bir fonksiyondur.

$$h(x_i, y_j) = \frac{1}{(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})} [(x_i - x)(y_j - y)z_{i-1,j-1} + (x - x_{i-1})(y_j - y)z_{i,j-1} + (x_i - x)(y - y_{j-1})z_{i-1,j} + (x - x_{i-1})(y - y_{j-1})z_{ij}]$$

Her (i, j) için $|s_{ij}| < 1$ olmak üzere $\{s_{ij} \mid (i, j) \in \{0, n\} \times \{0, m\} \subset \mathbb{R}$ alt kümesi verilsin. $(i, j) \in \{0, n\} \times \{0, m\}$ için

$$s : I_x \times I_y \longrightarrow \mathbb{R}, s(x_i, y_j) = s_{ij}$$

ve $\max\{s(x, y) : (x, y) \in I_x \times I_y\} < 1$ olsun.

Verilen h ve s fonksiyonları her $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, m\}$ için $I_{x_i} \times I_{y_j}$ üzerinde bilineer olsun. s fonksiyonu her bir $I_{x_i} \times I_{y_j}$ alt bölgesinde bilineer, yani $I_x \times I_y$ üzerinde parçalı-lineer olsun. Şimdi her bir $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, m\}$ ve $D = I_x \times I_y \times \mathbb{R}$ olmak üzere $F_{ij} : D \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu,

$$F_{ij}(x, y, z) = s(L_{x_i}(x), L_{y_j}(y))(z - g(x, y)) + h(L_{x_i}(x), L_{y_j}(y))$$

şekilde verilsin. Bu durumda,

i ve j tek sayılar ise,

$$\begin{cases} F_{ij}(x_0, y_0, z_{00}) &= h(L_{x_i}(x_0), L_{y_j}(y_0)) &= z_{i-1,j-1} \\ F_{ij}(x_0, y_m, z_{0m}) &= h(L_{x_i}(x_0), L_{y_j}(y_m)) &= z_{i-1,j} \\ F_{ij}(x_n, y_0, z_{n0}) &= h(L_{x_i}(x_n), L_{y_j}(y_0)) &= z_{i,j-1} \\ F_{ij}(x_n, y_m, z_{nm}) &= h(L_{x_i}(x_n), L_{y_j}(y_m)) &= z_{ij} \end{cases}$$

i ve j çift sayılar ise,

$$\begin{cases} F_{ij}(x_0, y_0, z_{00}) &= h(L_{x_i}(x_0), L_{y_j}(y_0)) &= z_{ij} \\ F_{ij}(x_0, y_m, z_{0m}) &= h(L_{x_i}(x_0), L_{y_j}(y_m)) &= z_{i,j-1} \\ F_{ij}(x_n, y_0, z_{n0}) &= h(L_{x_i}(x_n), L_{y_j}(y_0)) &= z_{i-1,j} \\ F_{ij}(x_n, y_m, z_{nm}) &= h(L_{x_i}(x_n), L_{y_j}(y_m)) &= z_{i-1,j-1} \end{cases}$$

i tek ve j çift sayılar ise

$$\begin{cases} F_{ij}(x_0, y_0, z_{00}) &= h(L_{x_i}(x_0), L_{y_j}(y_0)) &= z_{i-1,j} \\ F_{ij}(x_0, y_m, z_{0m}) &= h(L_{x_i}(x_0), L_{y_j}(y_m)) &= z_{i-1,j-1} \\ F_{ij}(x_n, y_0, z_{n0}) &= h(L_{x_i}(x_n), L_{y_j}(y_0)) &= z_{ij} \\ F_{ij}(x_n, y_m, z_{nm}) &= h(L_{x_i}(x_n), L_{y_j}(y_m)) &= z_{i,j-1} \end{cases}$$

i çift ve j tek sayılar ise,

$$\begin{cases} F_{ij}(x_0, y_0, z_{00}) &= h(L_{x_i}(x_0), L_{y_j}(y_0)) &= z_{i,j-1} \\ F_{ij}(x_0, y_m, z_{0m}) &= h(L_{x_i}(x_0), L_{y_j}(y_m)) &= z_{ij} \\ F_{ij}(x_n, y_0, z_{n0}) &= h(L_{x_i}(x_n), L_{y_j}(y_0)) &= z_{i-1,j-1} \\ F_{ij}(x_n, y_m, z_{nm}) &= h(L_{x_i}(x_n), L_{y_j}(y_m)) &= z_{i-1,j} \end{cases}$$

olur. $\max\{s(x, y) : (x, y) \in I_x \times I_j\} < 1$ olduğundan F_{ij} fonksiyonu z üçüncü bileşenine göre bir büzülme dönüşümü olduğu açıktır.

Şimdi $\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, m\}$ için $w_{ij} : D \longrightarrow I_{x_i} \times I_{y_j} \times \mathbb{R}$,

$$w_{ij}(x, y, z) = (L_{x_i}(x), L_{y_j}(y), F_{ij}(x, y, z))$$

şeklinde w_{ij} fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda

$$\{D; w_{ij}, (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, m\}\}$$

bir yinelemeli fonksiyon sistemi olur. Bu YFS'ne karşılık gelen fraktal interpolasyon fonksiyonun varlığı Teorem 4.2.1'in sonucundan faydalanarak ifade edilebilir.

Sonuç 4.3.1. $\{D; w_{ij}, (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, m\}\}$, yukarıda tanımlanmış olan YFS olsun ve her $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, m\}$ için F_{ij} fonksiyonları aşağıdaki koşulları sağlasın:

1. $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ ve $x' = L_{x_i}^{-1}(x_i) = L_{x_{i+1}}^{-1}(x_i)$ verilsin. $y \in I_y$ için ve $z \in \mathbb{R}$ için

$$F_{ij}(x', y, z) = F_{i+1,j}(x', y, z) = s(x_i, L_{y_j}(y))(z - g(x', y)) + h(x_i, L_{y_j}(y))$$

2. $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $j \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ ve $y' = L_{y_j}^{-1}(y_j) = L_{y_{j+1}}^{-1}(y_j)$ olsun. $x \in I_x$ ve $z \in \mathbb{R}$ için,

$$F_{ij}(x, y', z) = F_{i+1,j}(x, y', z) = s(L_{x_i}(x), y_j)(z - g(x, y')) + h(L_{x_i}(x), y_j)$$

olsun. Bu durumda $\forall (i, j) \in \{0, 1, 2, \dots, n\} \times \{0, 1, 2, \dots, m\}$ için

$$f : I_x \times I_y \longrightarrow \mathbb{R} , f(x_i, y_j) = z_{ij}$$

şeklinde tanımlanan ve grafiği $G = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in I_x \times I_y\}$ olan bir tek f sürekli fonksiyonu vardır ve ayrıca

$$G = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m w_{ij}(G)$$

olur (detaylı bilgi için bkz. [13]).

Burada f fonksiyonuna

$$\{D; w_{ij}, (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, m\}\}$$

YFS'ne karşılık gelen bilineer fraktal interpolasyon fonksiyonu denir ve G 'ye de bilineer fraktal yüzeyi adı verilir. s_{ij} fonksiyonlarına f 'nin düşey ölçüm çarpanları denir. Buradan açıktır ki bir fraktal yüzeyinin bilineer olması

$$\{(x, y, z) : (i, j) \in \{0, 1, 2, \dots, n\} \times \{0, 1, 2, \dots, m\}\}$$

interpolasyon noktalarından bağımsız olup, seçilen h , g ve s bilineer fonksiyonları ile belirlenmektedir. Yani, herhangi bir veri kümesi alındığında, düşey ölçüm çarpanları ve ilgili fonksiyonları parçalı-bilineer fonksiyon olarak seçilerek alınan veri kümesine karşılık gelecek bir sürekli bilineer fraktal interpolasyon fonksiyonu elde edilebilir.

Bilineer fraktal interpolasyon yüzeylerle ilgili birkaç örneği ayrıntılı bir şekilde incelenmiş ve aşağıda verilmiştir.

Örnek 4.3.1.

Veri kümesi 6				
$y \backslash x$	0	1	2	3
0	2	1	2	3
1	0	4	0	1
2	2	6	2	2
3	4	2	6	4

veri kümesi verilsin. $i = 0, 1, 2, 3$ ve $j = 0, 1, 2, 3$ için $s_{ij} = \frac{1}{4}$ düşey ölçüm çarpanları olmak üzere **Veri kümesi 6** kümesini interpolate eden fraktal interpolasyon yüzeyini

belirleyelim. İlk olarak g ve h fonksiyonlarını belirleyelim.

$$g(x, y) = \frac{1}{(x_n - x_0)(y_m - y_0)} [(x_n - x)(y_m - y)z_{00} + (x - x_0)(y_m - y)z_{n0} \\ + (x_n - x)(y - y_0)z_{0m} + (x - x_0)(y - y_0)z_{nm}]$$

idi. Verilmiş olan veri kümesini göze alınırsa

$$g(x, y) = \frac{x}{3} + \frac{2y}{3} - \frac{xy}{9} + 2$$

olarak bulunur. Diğer yandan $s_{ij}(x, y) = \frac{1}{4}$ ve

$$h(x, y) = \begin{cases} -x - 2y + 5xy + 2 & ; 0 \leq x \leq 1 \text{ ve } 0 \leq y \leq 1 \\ 4x + 2y - 2 & ; 0 \leq x \leq 1 \text{ ve } 1 \leq y \leq 2 \\ 16x + 2y - 6xy - 2 & ; 0 \leq x \leq 1 \text{ ve } 2 \leq y \leq 3 \\ x + 8y - 5xy & ; 1 \leq x \leq 2 \text{ ve } 0 \leq y \leq 1 \\ -4x + 2y + 6 & ; 1 \leq x \leq 2 \text{ ve } 1 \leq y \leq 2 \\ -20x - 12y + 8xy + 34 & ; 1 \leq x \leq 2 \text{ ve } 2 \leq y \leq 3 \\ x - 2y & ; 2 \leq x \leq 3 \text{ ve } 0 \leq y \leq 1 \\ 2x + 4y - xy - 6 & ; 2 \leq x \leq 3 \text{ ve } 1 \leq y \leq 2 \\ 4x + 8y - 2xy - 14 & ; 2 \leq x \leq 3 \text{ ve } 2 \leq y \leq 3 \end{cases}$$

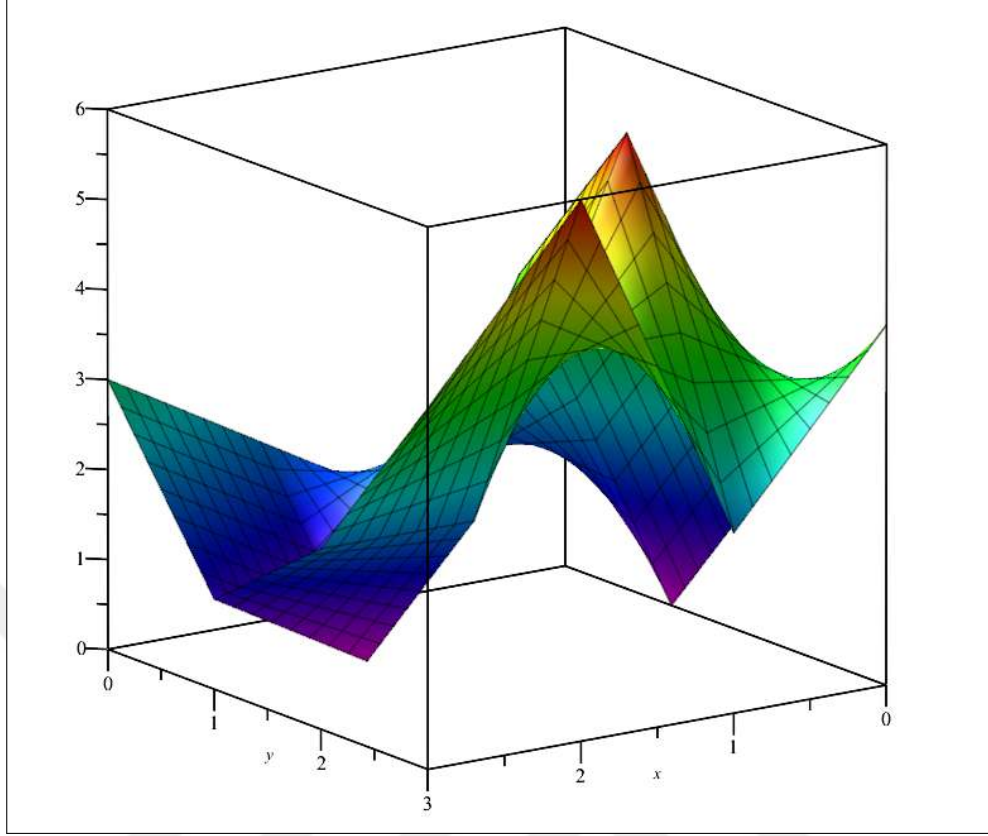
şeklindedir. Dolayısıyla $i = 0, 1, 2, 3$ ve $j = 0, 1, 2, 3$ için

$$\begin{aligned}
h(x_0, y_0) &= -x_0 - 2y_0 + 5x_0y_0 + 2 &= 2 \\
h(x_0, y_1) &= 4x_0 + 2y_1 - 2 &= 0 \\
h(x_0, y_2) &= 16x_0 + 2y_2 - 6x_0y_2 - 2 &= 2 \\
h(x_0, y_3) &= 16x_0 + 2y_3 - 6x_0y_3 - 2 &= 4 \\
h(x_1, y_0) &= -x_1 - 2y_0 + 5x_1y_0 + 2 &= 1 \\
h(x_1, y_1) &= -x_1 - 2y_1 + 5x_1y_1 + 2 &= 4 \\
h(x_1, y_2) &= 4x_1 + 2y_2 - 2 &= 6 \\
h(x_1, y_3) &= 16x_1 + 2y_3 - 6x_1y_3 - 2 &= 2 \\
h(x_2, y_0) &= x_2 + 8y_0 - 5x_2y_0 &= 2 \\
h(x_2, y_1) &= x_2 + 8y_1 - 5x_2y_1 &= 0 \\
h(x_2, y_2) &= -4x_2 + 2y_2 + 6 &= 2 \\
h(x_2, y_3) &= -20x_2 - 12y_3 + 8x_2y_3 + 34 &= 6 \\
h(x_3, y_0) &= x_3 - 2y_0 &= 3 \\
h(x_3, y_1) &= x_3 - 2y_1 &= 1 \\
h(x_3, y_2) &= 2x_3 + 4y_2 - x_3y_2 - 6 &= 2 \\
h(x_3, y_3) &= 4x_3 + 8y_3 - 2x_3y_3 - 14 &= 4
\end{aligned}$$

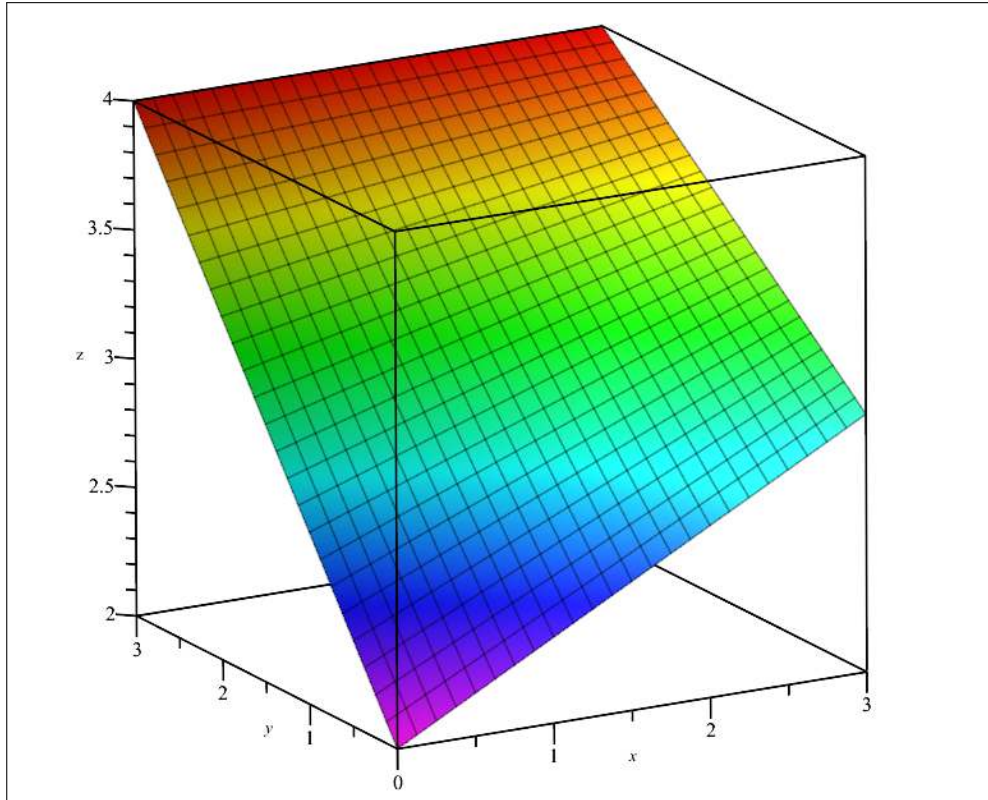
bulunur. Gerçekten de her $(i, j) \in \{0, 1, 2, 3\} \times \{0, 1, 2, 3\}$ için

$$h(x_i, y_j) = z_{ij}$$

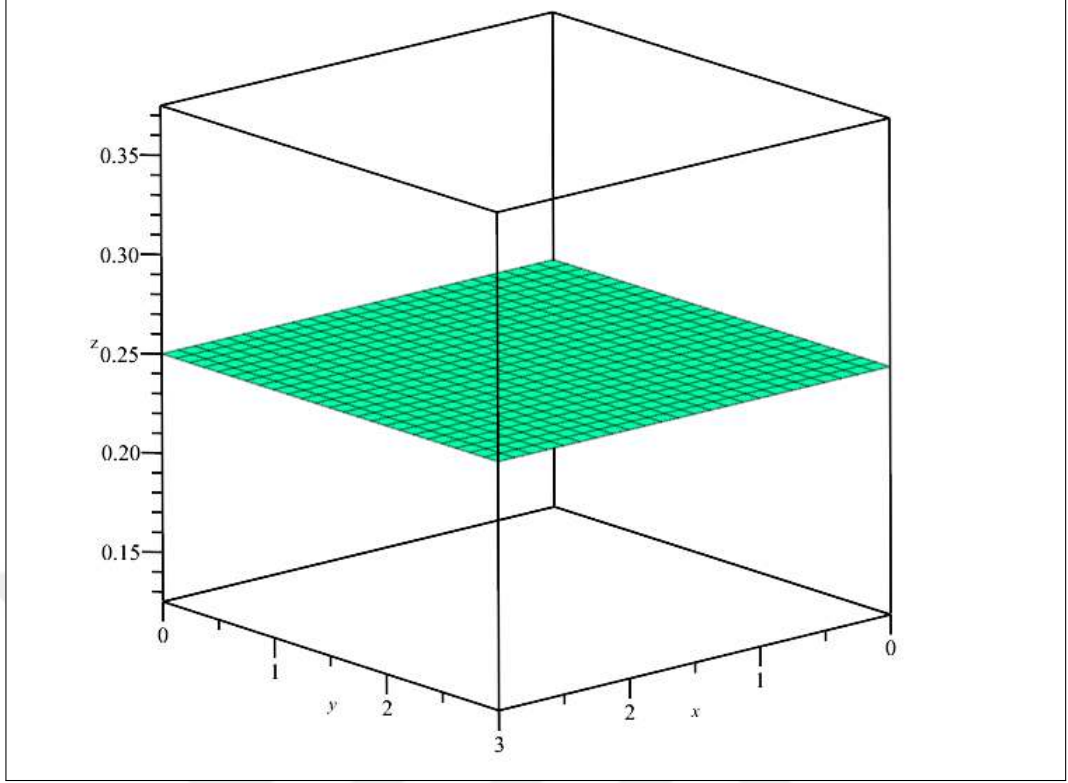
olarak bulunur. h , g ve s bileer fonksiyonların grafikleri aşağıda verilmiştir (bkz. Şekil 4.7, Şekil 4.8, Şekil 4.9).



Şekil 4.7. h fonksiyonun grafiği



Şekil 4.8. g fonksiyonun grafiği



Şekil 4.9. s fonksiyonun grafiği

Şimdi L_{x_i} ve L_{y_j} dönüşümlerini belirleyelim.

$n = m = 3$ olmak üzere $i = 0, 1, 2, 3$ ve $j = 0, 1, 2, 3$ için

$$L_{x_i}(x) = \begin{cases} \frac{x_i - x_{i-1}}{x_n - x_0}(x - x_0) + x_{i-1} ; i \text{ tek} \\ \frac{x_i - x_{i-1}}{x_n - x_0}(x_0 - x) + x_i ; i \text{ çift} \end{cases}$$

$$L_{y_j}(y) = \begin{cases} \frac{y_j - y_{j-1}}{y_m - y_0}(y - y_0) + y_{j-1} ; j \text{ tek} \\ \frac{y_j - y_{j-1}}{y_m - y_0}(y_0 - y) + y_j ; j \text{ çift} \end{cases}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} L_{x_1}(x) &= \frac{x}{3} \\ L_{x_2}(x) &= \frac{6-x}{3} \\ L_{x_3}(x) &= \frac{6+x}{3} \\ L_{y_1}(y) &= \frac{y}{3} \\ L_{y_2}(y) &= \frac{6-y}{3} \\ L_{y_3}(y) &= \frac{6+y}{3} \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi F_{ij} fonksiyonları belirlensin.

$F_{ij}(x, y, z) = s(L_{x_i}, L_{y_j})(z - g(x, y)) + h(L_{x_i}(x), L_{y_j}(y))$ idi. Burada her $i = 1, 2, 3$

ve her $j = 1, 2, 3$ için $s_{ij}(x, y) = \frac{1}{4}$ olduğundan $s(L_{x_i}, L_{y_j}) = \frac{1}{4}$ 'dir. Dolayısıyla $(i, j) \in \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ için

$$\begin{aligned}
F_{11}(x, y, z) &= \frac{1}{4}(z - g(x, y)) + h(L_{x_1}(x), L_{y_1}(y)) = -\frac{5}{12} - \frac{5y}{6} + \frac{z}{4} + \frac{5}{6}xy + \frac{3}{2} \\
F_{12}(x, y, z) &= \frac{1}{4}(z - g(x, y)) + h(L_{x_1}(x), L_{y_2}(y)) = \frac{35x}{12} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} - \frac{19xy}{36} + \frac{3}{2} \\
F_{13}(x, y, z) &= \frac{1}{4}(z - g(x, y)) + h(L_{x_1}(x), L_{y_3}(y)) = \frac{5x}{12} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} - \frac{23xy}{36} + \frac{3}{2} \\
F_{21}(x, y, z) &= \frac{1}{4}(z - g(x, y)) + h(L_{x_2}(x), L_{y_1}(y)) = \frac{-5x}{12} - \frac{5y}{6} + \frac{z}{4} + \frac{7xy}{12} + \frac{3}{2} \\
F_{22}(x, y, z) &= \frac{1}{4}(z - g(x, y)) + h(L_{x_2}(x), L_{y_2}(y)) = \frac{5x}{3} - \frac{5y}{6} + \frac{z}{4} + \frac{7xy}{250} + \frac{3}{2} \\
F_{23}(x, y, z) &= \frac{1}{4}(z - g(x, y)) + h(L_{x_2}(x), L_{y_3}(y)) = \frac{5x}{3} + \frac{7y}{6} + \frac{z}{4} - \frac{31xy}{36} + \frac{3}{2} \\
F_{31}(x, y, z) &= \frac{1}{4}(z - g(x, y)) + h(L_{x_3}(x), L_{y_1}(y)) = \frac{x}{4} - \frac{5y}{6} + \frac{z}{4} + \frac{7xy}{250} + \frac{3}{2} \\
F_{32}(x, y, z) &= \frac{1}{4}(z - g(x, y)) + h(L_{x_3}(x), L_{y_2}(y)) = -\frac{x}{12} - \frac{5y}{6} + \frac{z}{4} + \frac{5xy}{36} + \frac{3}{2} \\
F_{33}(x, y, z) &= \frac{1}{4}(z - g(x, y)) + h(L_{x_3}(x), L_{y_3}(y)) = -\frac{x}{12} + \frac{7y}{6} + \frac{z}{4} - \frac{7xy}{36} + \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

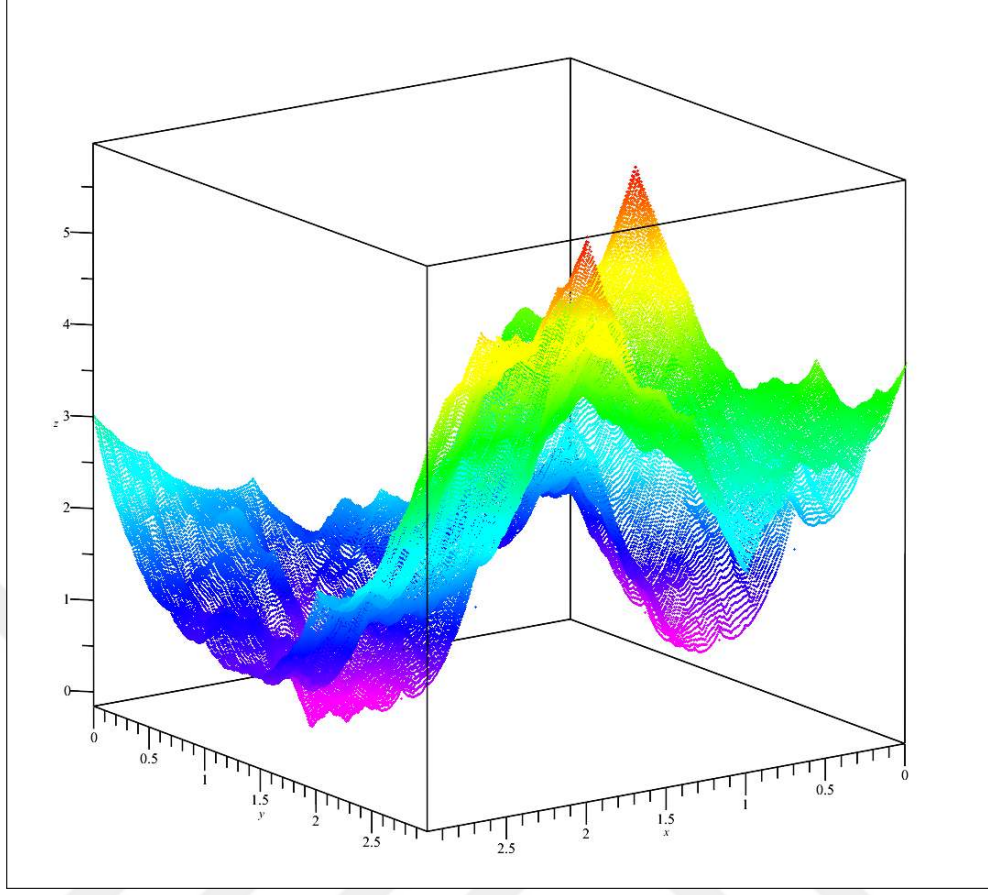
olur. Her $(i, j) \in \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ için $w_{ij}(x, y, z) = (L_{x_i}, L_{y_j}, F_{ij})$ şeklinde ifade edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
w_{11}(x, y, z) &= \left(\frac{x}{6}, \frac{y}{3}, -\frac{5}{12} - \frac{5y}{6} + \frac{z}{4} + \frac{5}{6}xy + \frac{3}{2}\right) \\
w_{12}(x, y, z) &= \left(\frac{x}{3}, \frac{6-y}{3}, \frac{35x}{12} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} - \frac{19xy}{36} + \frac{3}{2}\right) \\
w_{13}(x, y, z) &= \left(\frac{x}{3}, \frac{y+6}{3}, \frac{5x}{12} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} - \frac{23xy}{36} + \frac{3}{2}\right) \\
w_{21}(x, y, z) &= \left(\frac{6-x}{3}, \frac{y}{3}, \frac{-5x}{12} - \frac{5y}{6} + \frac{z}{4} + \frac{7xy}{12} + \frac{3}{2}\right) \\
w_{22}(x, y, z) &= \left(\frac{6-x}{3}, \frac{6-y}{3}, \frac{5x}{3} - \frac{5y}{6} + \frac{z}{4} + \frac{7xy}{250} + \frac{3}{2}\right) \\
w_{23}(x, y, z) &= \left(\frac{6-x}{3}, \frac{y+6}{3}, \frac{5x}{3} + \frac{7y}{6} + \frac{z}{4} - \frac{31xy}{36} + \frac{3}{2}\right) \\
w_{31}(x, y, z) &= \left(\frac{x+6}{3}, \frac{y}{3}, \frac{x}{4} - \frac{5y}{6} + \frac{z}{4} + \frac{7xy}{250} + \frac{3}{2}\right) \\
w_{32}(x, y, z) &= \left(\frac{x+6}{3}, \frac{6-y}{3}, -\frac{x}{12} - \frac{5y}{6} + \frac{z}{4} + \frac{5xy}{36} + \frac{3}{2}\right) \\
w_{33}(x, y, z) &= \left(\frac{x+6}{3}, \frac{y+6}{3}, -\frac{x}{12} + \frac{7y}{6} + \frac{z}{4} - \frac{7xy}{36} + \frac{3}{2}\right)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece

$$\{[0, 3] \times [0, 3] \times \mathbb{R}; w_{11}, w_{12}, w_{13}, w_{21}, w_{22}, w_{23}, w_{31}, w_{32}, w_{33}\}$$

yinelemeli fonksiyon sistemi elde edilmiş olur. Bu YFS'ne karşılık gelen bilineer fraktal interpolasyon yüzeyi aşağıda verilmiştir (bkz. Şekil 4.10).



Şekil 4.10. Veri kümesi 6'ya karşılık gelen bilineer fraktal interpolasyon yüzeyi

Örnek 4.3.2.

Veri kümesi 7				
$x \backslash y$	0	2	4	6
0	0	2	1	2
2	4	3	1	2
4	0	0	2	0
6	2	1	4	2

veri kümesini ele alalım. $i = 0, 1, 2, 3$ ve $j = 0, 1, 2, 3$ için s_{ij} düşey ölçüm çarpanları olmak üzere $s_{ij} = 0$ ve

$$S = \begin{pmatrix} \frac{9}{20} & \frac{1}{4} & \frac{9}{20} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{9}{20} & \frac{7}{20} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

durumları için Veri kümesi 7'ye karşılık gelen fraktal interpolasyon yüzeylerini

belirleyelim. Seçilen verilere göre;

$$g(x, y) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{9}xy ;$$

$$L_{x_1}(x) = \frac{x}{3}$$

$$L_{x_2}(x) = \frac{12-x}{3}$$

$$L_{x_3}(x) = \frac{12+x}{3}$$

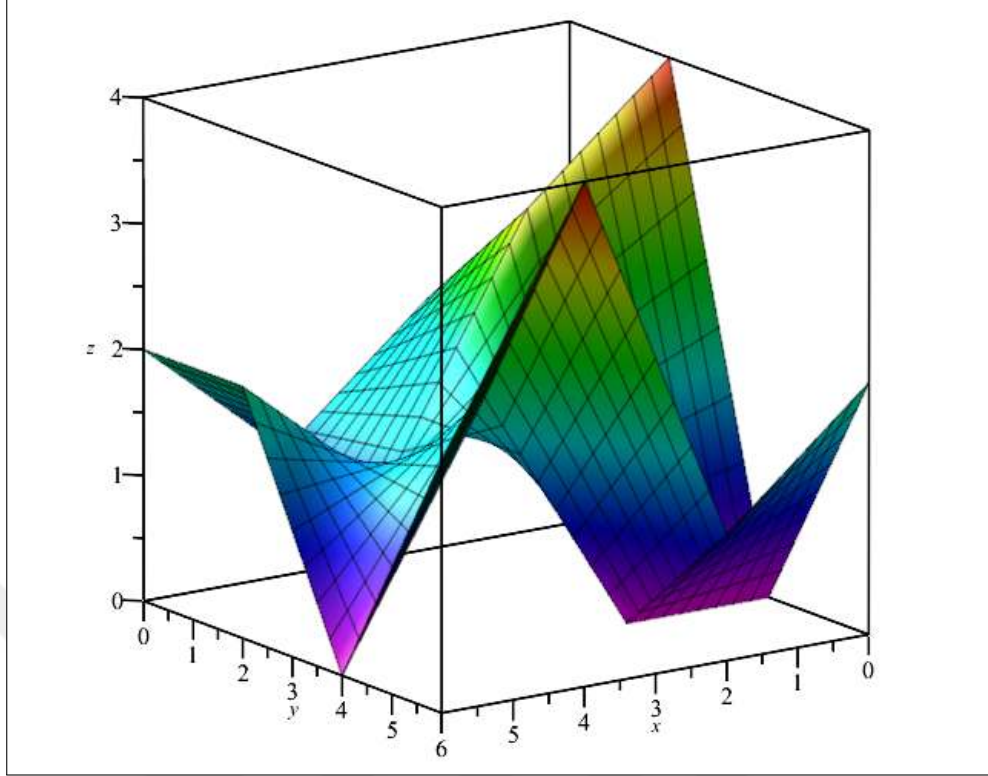
$$L_{y_1}(y) = \frac{y}{3}$$

$$L_{y_2}(y) = \frac{12-y}{3}$$

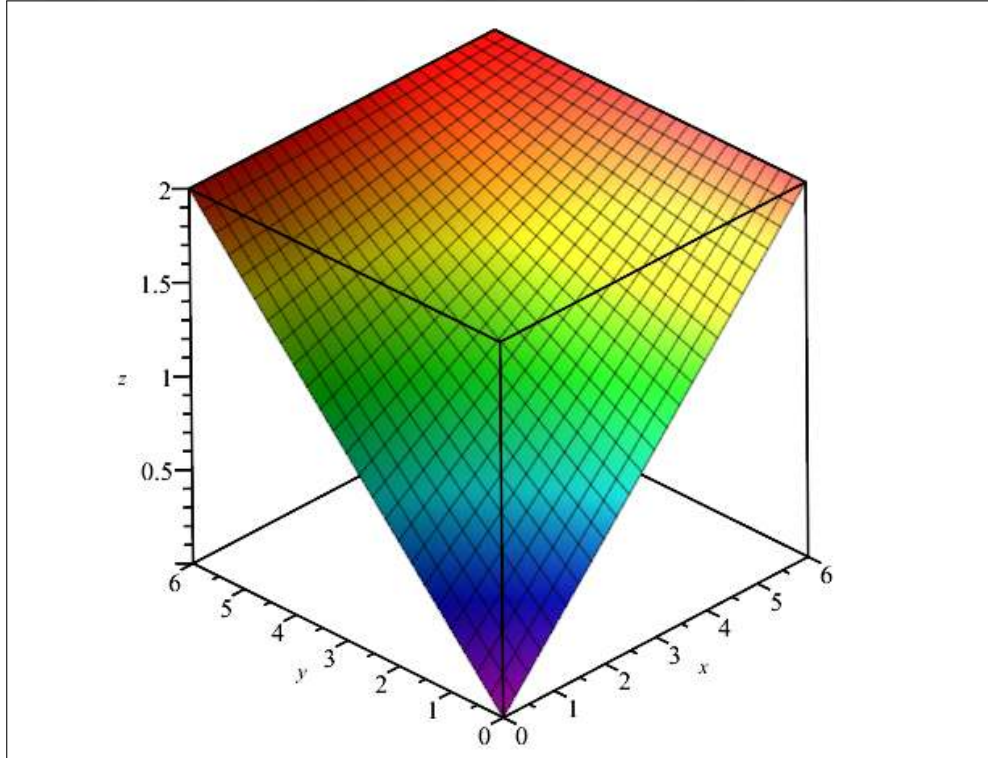
$$L_{y_3}(y) = \frac{12+y}{3}$$

$$h(x, y) = \begin{cases} x + 2y - \frac{3xy}{4} & ; 0 \leq x \leq 2 \text{ ve } 0 \leq y \leq 2 \\ -x - 2y - \frac{x}{y} + 8 & ; 0 \leq x \leq 2 \text{ ve } 2 \leq y \leq 4 \\ x + y - \frac{xy}{4} - 4 & ; 0 \leq x \leq 2 \text{ ve } 4 \leq y \leq 6 \\ -\frac{x}{2} + y - \frac{xy}{4} + 3 & ; 2 \leq x \leq 4 \text{ ve } 0 \leq y \leq 2 \\ -3x - \frac{7y}{2} + xy + 12 & ; 2 \leq x \leq 4 \text{ ve } 2 \leq y \leq 4 \\ \frac{xy}{4} - 2 & ; 2 \leq x \leq 4 \text{ ve } 4 \leq y \leq 6 \\ \frac{x}{2} - 1 & ; 4 \leq x \leq 6 \text{ ve } 0 \leq y \leq 2 \\ 2x + \frac{7y}{2} - \frac{3xy}{4} - 8 & ; 4 \leq x \leq 6 \text{ ve } 2 \leq y \leq 4 \\ -x + y + 2 & ; 4 \leq x \leq 6 \text{ ve } 4 \leq y \leq 6 \end{cases}$$

olur. h ve g bilinear fonksiyonların grafiği Şekil 4.11 ve Şekil 4.12'de gösterilmiştir.



Şekil 4.11. h fonksiyonun grafiği



Şekil 4.12. g fonksiyonun grafiği

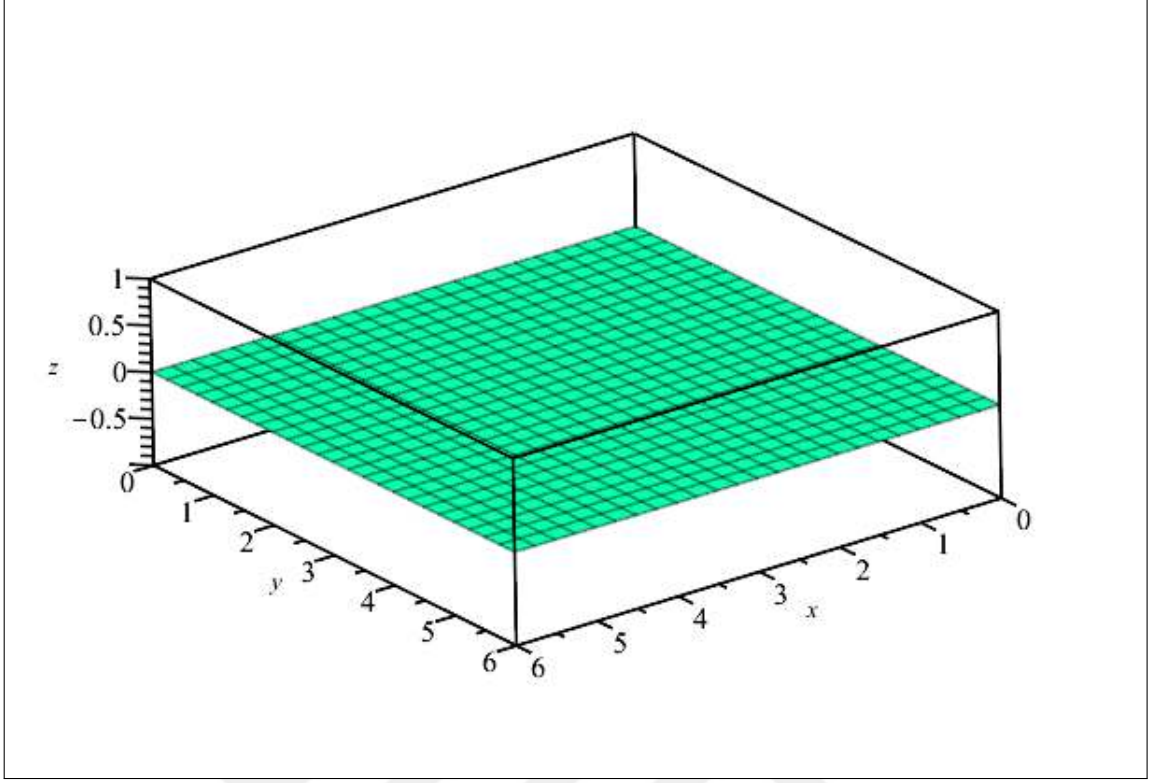
$s_{ij} = 0$ ise her $i = 0, 1, 2, 3$ ve her $j = 0, 1, 2, 3$ için $s(x, y) = 0$ olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
F_{11}(x, y, z) &= \frac{x}{3} + \frac{2y}{3} - \frac{xy}{12} \\
F_{12}(x, y, z) &= \frac{8y}{9} - \frac{xy}{36} \\
F_{13}(x, y, z) &= \frac{y}{3} - \frac{xy}{36} \\
F_{21}(x, y, z) &= \frac{x}{6} + \frac{1}{36}xy + 1 \\
F_{22}(x, y, z) &= -\frac{x}{3} - \frac{y}{6} - \frac{xy}{9} + 2 \\
F_{23}(x, y, z) &= -\frac{x}{3} + \frac{y}{3} - \frac{xy}{36} + 2 \\
F_{31}(x, y, z) &= \frac{x}{6} + 1 \\
F_{32}(x, y, z) &= -\frac{x}{3} - \frac{y}{6} + \frac{xy}{12} \\
F_{33}(x, y, z) &= -\frac{x}{3} + \frac{y}{3} + 2
\end{aligned}$$

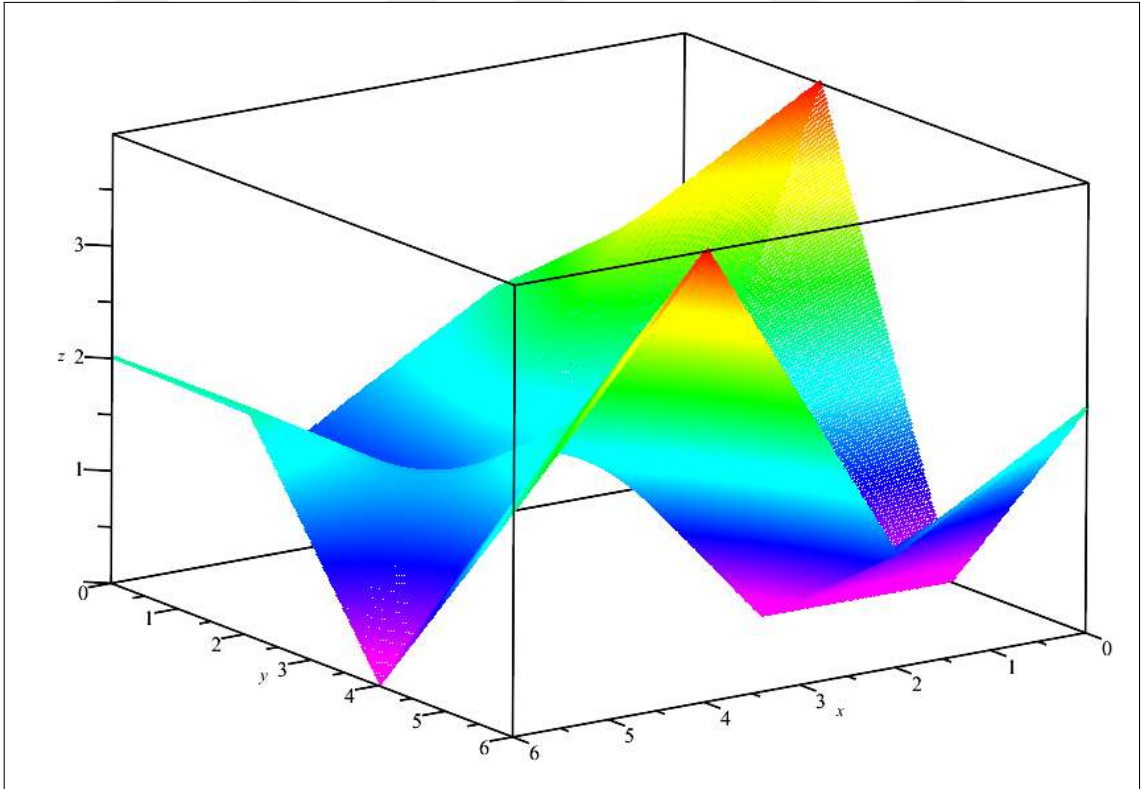
bulunur. w_{ij} dönüşümleri ise

$$\begin{aligned}
w_{11}(x, y, z) &= \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}, \frac{x}{3} + \frac{2y}{3} - \frac{xy}{12} \right) \\
w_{12}(x, y, z) &= \left(\frac{x}{3}, \frac{12-y}{3}, \frac{8y}{9} - \frac{xy}{36} \right) \\
w_{13}(x, y, z) &= \left(\frac{x}{3}, \frac{12+y}{3}, \frac{y}{3} - \frac{xy}{36} \right) \\
w_{21}(x, y, z) &= \left(\frac{12-x}{3}, \frac{y}{3}, \frac{x}{6} + \frac{xy}{36} + 1 \right) \\
w_{22}(x, y, z) &= \left(\frac{12-x}{3}, \frac{12-y}{3}, -\frac{x}{3} - \frac{y}{6} - \frac{xy}{9} + 2 \right) \\
w_{23}(x, y, z) &= \left(\frac{12-x}{3}, \frac{12+y}{3}, \frac{x}{3} + \frac{y}{3} - \frac{xy}{36} + 2 \right) \\
w_{31}(x, y, z) &= \left(\frac{12+x}{3}, \frac{y}{3}, \frac{x}{6} + 1 \right) \\
w_{32}(x, y, z) &= \left(\frac{12+x}{3}, \frac{12-y}{3}, -\frac{x}{3} - \frac{y}{6} + \frac{xy}{12} \right) \\
w_{33}(x, y, z) &= \left(\frac{12+x}{3}, \frac{12+y}{3}, -\frac{x}{3} + \frac{y}{3} + 2 \right)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. $s_{ij} = 0$ (Şekil 4.13) için alınan veri kümesine karşılık gelen fraktal interpolasyon yüzeyi Şekil 4.14'te verilmiştir.



Şekil 4.13. $s_{ij} = 0$ iken s fonksiyonun grafiği



Şekil 4.14. $s_{ij} = 0$ iken **Veri kümesi 7**'ye karşılık gelen bilineer fraktal interpolasyon yüzeyi

$s_{ij} = S$ olsun. Bu durumda,

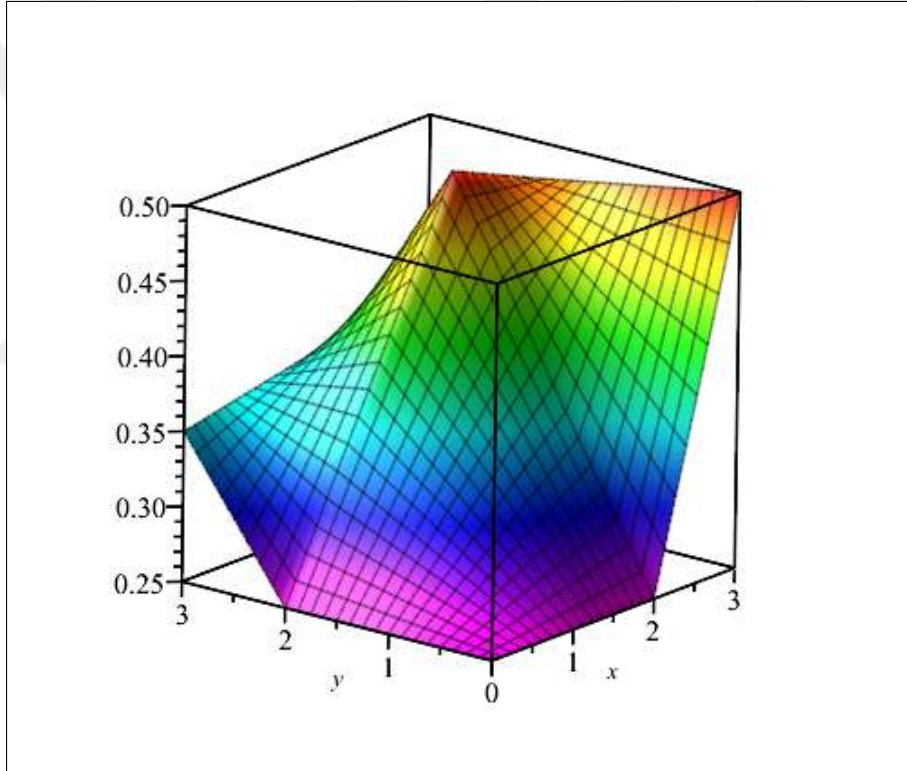
$$s(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{40} - \frac{y}{10} + \frac{1}{20}xy + \frac{9}{20} & ; 0 \leq x \leq 2 \text{ ve } 0 \leq y \leq 2 \\ \frac{7x}{20} + \frac{y}{10} - \frac{9xy}{80} + \frac{1}{20} & ; 0 \leq x \leq 2 \text{ ve } 2 \leq y \leq 4 \\ -\frac{11x}{20} - \frac{y}{10} + \frac{9xy}{80} - \frac{y}{10} + \frac{17}{20} & ; 0 \leq x \leq 2 \text{ ve } 4 \leq y \leq 6 \\ \frac{x}{8} + \frac{3y}{20} - \frac{3xy}{40} + \frac{1}{4} & ; 2 \leq x \leq 4 \text{ ve } 0 \leq y \leq 2 \\ -\frac{x}{10} - \frac{y}{5} + \frac{3xy}{80} + \frac{19}{20} & ; 2 \leq x \leq 4 \text{ ve } 2 \leq y \leq 4 \\ \frac{3x}{20} + \frac{7y}{40} - \frac{1}{40}xy - \frac{11}{20} & ; 2 \leq x \leq 4 \text{ ve } 4 \leq y \leq 6 \\ -\frac{x}{8} - \frac{y}{5} + \frac{xy}{80} + \frac{5}{4} & ; 4 \leq x \leq 6 \text{ ve } 0 \leq y \leq 2 \\ -\frac{11x}{40} - \frac{2y}{5} + \frac{7xy}{80} + \frac{33}{20} & ; 4 \leq x \leq 6 \text{ ve } 2 \leq y \leq 4 \\ \frac{19x}{40} + \frac{19y}{40} - \frac{1}{10}xy - \frac{37}{20} & ; 4 \leq x \leq 6 \text{ ve } 4 \leq y \leq 6 \end{cases}$$

elde edilir ve dolayısıyla F_{ij} fonksiyonları da aşağıdaki şekilde bulunur.

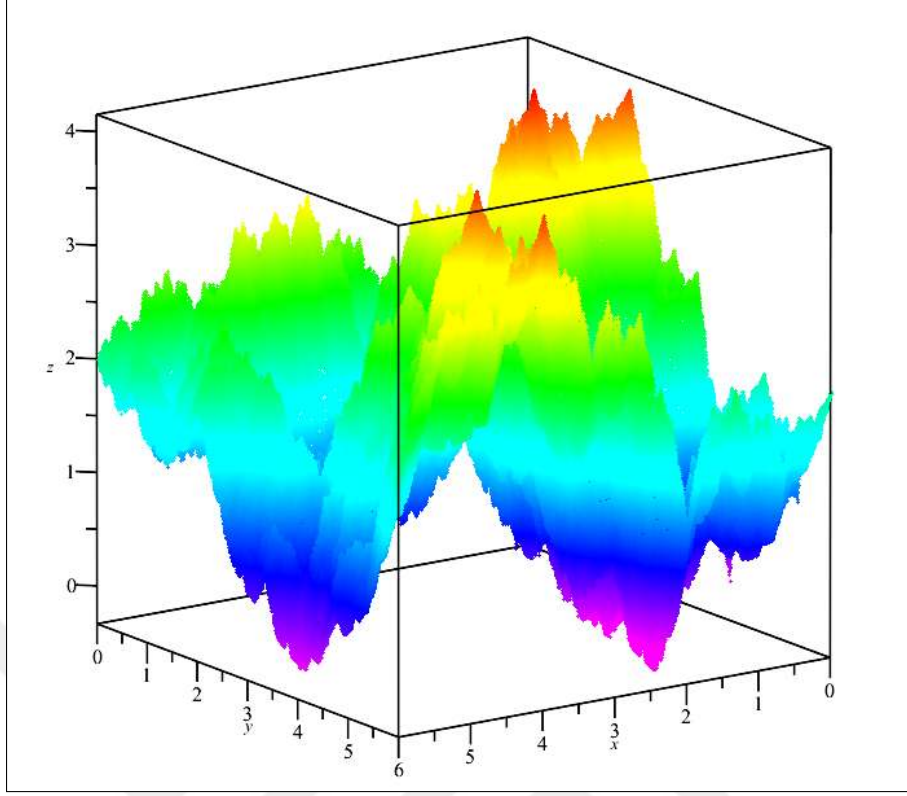
$$\begin{aligned} F_{11}(x, y, z) &= \frac{11}{60}x + \frac{31}{60}y + \frac{9}{20}z + \frac{1}{90}x^2 + \frac{1}{90} + \frac{1}{20}xy + \frac{1}{125}xz - \frac{1}{30}yz \\ &\quad - \frac{1}{170}x^2y - \frac{1}{170}xy^2 + \frac{1}{180}xyz - \frac{1}{3240}x^2y^2 \\ F_{12}(x, y, z) &= -\frac{3}{20}x + \frac{31}{60}y + \frac{9}{20}z + \frac{1}{90}x^2 + \frac{1}{90} + \frac{1}{50}xy - \frac{1}{30}xz - \frac{1}{30}yz \\ &\quad - \frac{13}{2160}x^2y - \frac{13}{2160}xy^2 + \frac{1}{80}xyz + \frac{1}{1440}x^2y^2 \\ F_{13}(x, y, z) &= -\frac{3}{20}x + \frac{11}{60}y + \frac{9}{20}z + \frac{1}{90}x^2 + \frac{1}{90} + \frac{7}{360}xy - \frac{1}{30}xz - \frac{1}{30}yz \\ &\quad - \frac{13}{2160}x^2y - \frac{13}{2160}xy^2 + \frac{1}{80}xyz + \frac{1}{1440}x^2y^2 \\ F_{21}(x, y, z) &= -\frac{2}{25}x + \frac{1}{4}y + \frac{3}{4}z + \frac{1}{72}x^2 + \frac{1}{72} + \frac{1}{10}xy - \frac{1}{24}xz - \frac{1}{20}yz \\ &\quad - \frac{1}{180}x^2y - \frac{1}{180}xy^2 + \frac{1}{120}xyz + \frac{1}{2160}x^2y^2 \\ F_{22}(x, y, z) &= -\frac{9}{20}x - \frac{17}{60}y + \frac{7}{20}z + \frac{1}{180}x^2 - \frac{1}{180} + \frac{47}{360}xy - \frac{1}{60}xz + \frac{1}{60}yz \\ &\quad - \frac{23}{50000}x^2y - \frac{23}{50000}xy^2 + \frac{1}{240}xyz + \frac{1}{4320}x^2y^2 \\ F_{23}(x, y, z) &= -\frac{2}{25}x + \frac{13}{60}y + \frac{7}{4}z + \frac{1}{180}x^2 + \frac{1}{25} - \frac{1}{90}xy - \frac{1}{60}xz + \frac{1}{40}yz \\ &\quad + \frac{23}{50000}x^2y + \frac{23}{50000}xy^2 + \frac{7}{2500}xyz + \frac{1}{6480}x^2y^2 \\ F_{31}(x, y, z) &= -\frac{2}{25}x - \frac{1}{4}y + \frac{3}{4}z + \frac{1}{72}x^2 + \frac{1}{60} + \frac{1}{180}xy - \frac{1}{24}xz - \frac{1}{20}yz \\ &\quad - \frac{7}{2160}x^2y - \frac{7}{2160}xy^2 + \frac{1}{720}xyz + \frac{1}{12960}x^2y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{32}(x, y, z) &= -\frac{9}{20}x - \frac{17}{60}y + \frac{7}{20}z - \frac{2}{25}x^2 - \frac{1}{180} + \frac{4}{45}xy + \frac{1}{40}xz + \frac{1}{40}yz \\
&\quad + \frac{1}{240}y + \frac{1}{240}xy^2 - \frac{7}{720}xyz - \frac{1}{12960}x^2y^2 \\
F_{33}(x, y, z) &= -\frac{9}{20}x - \frac{13}{60}y + \frac{7}{20}z - \frac{2}{25}x^2 + \frac{2}{25}y^2 + \frac{7}{2500}xy + \frac{1}{40}xz + \frac{1}{40}yz \\
&\quad + \frac{11}{2160}x^2y + \frac{11}{2160}xy^2 - \frac{1}{90}xyz - \frac{1}{1620}x^2y^2
\end{aligned}$$

Bu fonksiyonları kullanarak istenilen YFS elde edilir. $s = S$ (Şekil 4.15) için bu YFS'ne ilişkin aranılan bilineer fraktal interpolasyon yüzeyi elde edilir (bkz. Şekil 4.16).



Şekil 4.15. $s_{ij} = S$ iken s fonksiyonun grafiği



Şekil 4.16. $s_{ij} = S$ iken **Veri kümesi 7'**ye karşılık gelen bilineer fraktal interpolasyon yüzeyi

4.4. Fraktal İnterpolasyon Yüzeylerin Fraktal Boyutu

Önceki bölümlerde dikdörtgensel bir latis üzerinde fraktal interpolasyon yüzeyleri oluşturmak için çeşitli metotlar incelendi. Doğal olarak bu yüzeylerin boyutunun ne olabileceğini sormamız gerekir. Dolayısıyla bu bölümde, oluşturulan yüzeylerin boyutlarıyla ilişkin literatürdeki bazı sonuçlar özetlenmiştir.

Dalla tarafından inşa edilen iki değişkenli fraktal interpolasyon fonksiyonlarını ele alalım. 2012 yılında yapılan [4] çalışmasında bu tür fonksiyonların grafiğinin boyutu aşağıdaki şekilde verilmektedir:

$D = \{(x_i, y_j, z_{ij}) : i = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, m\}$ verilen bir veri kümesi olmak üzere, D kümesine ilişkin $\{[x_0, x_n] \times [y_0, y_m] \times \mathbb{R}, w_{ij} : i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m\}$ atraktörü G olan yinelemeli fonksiyon sistemi olsun. Bu YFS'nin atraktörü olan G ,

$$f : [x_0, x_n] \times [y_0, y_m] \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonun grafiği olur ve G 'ye fraktal interpolasyon yüzeyi denir. s_{ij} alınan veri kümesine karşılık gelen düşey ölçüm çarpanları olmak üzere G 'nin Minkowski boyutu aşağıdaki şekilde bulunabilir.

$$\lambda = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |s_{ij}|$$

olmak üzere,

$$boy(G) = \begin{cases} 1 + \log_n \lambda & , \text{ eğer } \lambda > n \\ 2 & , \text{ diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak bulunur (Ayrıntılı bilgi için bkz. [4]).

Örnek 4.4.1. Örnek 4.1.1'deki **Veri Kümesi 1**'i ele alalım. verilen $s_{ij} = \frac{1}{4}$ olup

$$\lambda = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 |s_{ij}| = \frac{9}{4}$$

olur. Dolayısıyla $\lambda < 3$ olduğundan $boy(G) = 2$ 'dir (bkz. Şekil 4.1).

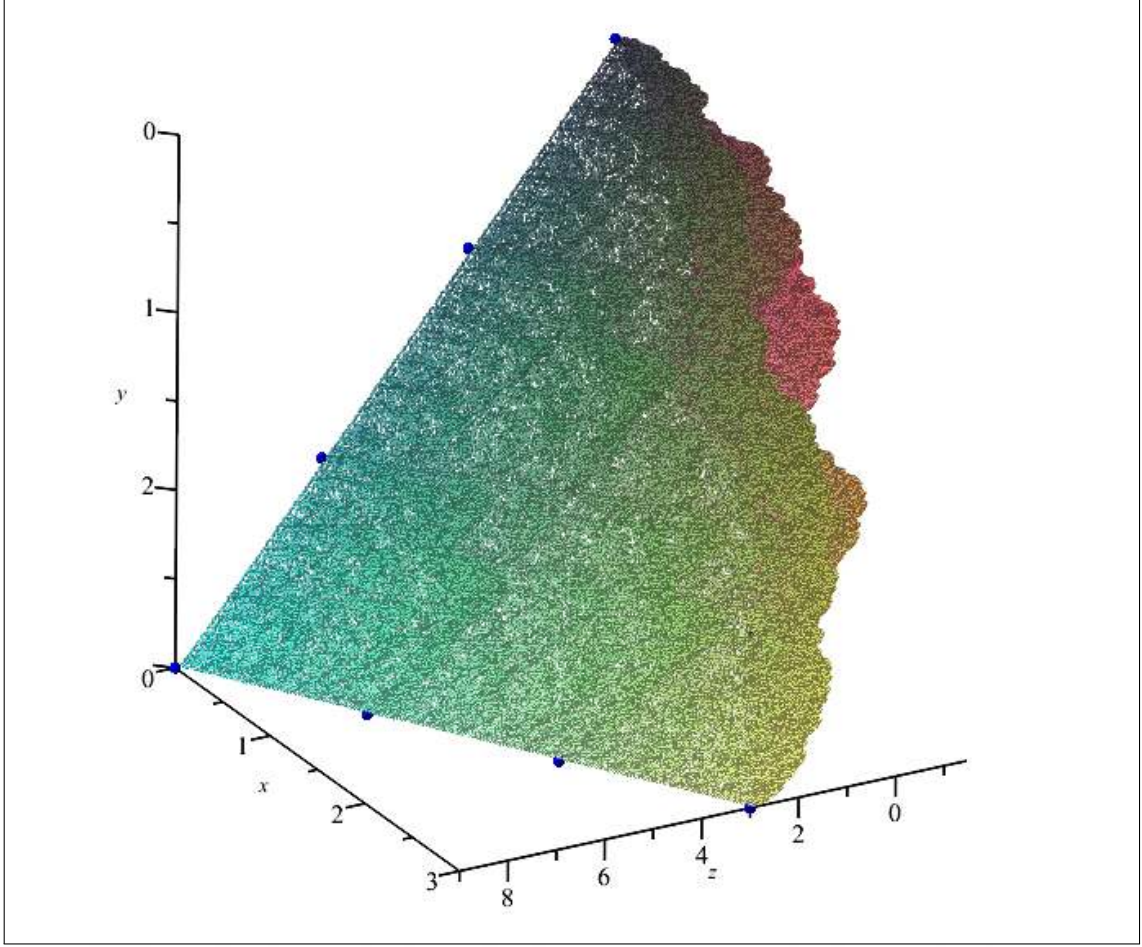
$s_{ij} = \frac{1}{2}$ alınırsa

$$\lambda = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 |s_{ij}| = \frac{9}{2}$$

olup $\lambda > 3$ dir. Dolayısıyla

$$boy(G) = 1 + \log_n \lambda = 1 + \log_3 \left(\frac{9}{2} \right) \approx 2,3690$$

olarak bulunur (Şekil 4.17).



Şekil 4.17. $s_{ij} = \frac{1}{2}$ iken **Veri Kümesi 1**'e karşılık gelen fraktal interpolasyon yüzeyi.
 $boy(G) \approx 2,3690$

Son bölümde etrafıca ele aldığımız bilineer fraktal interpolasyon yüzeylerin Minkowski boyutu aşağıdaki şekilde verilebilir.

Teorem 4.4.1. $n = m$ olmak üzere f fonksiyonu, Bölüm 4.5'te tanımlanan bilineer fraktal interpolasyon fonksiyonu verilsin. f fonksiyonuna karşılık gelen fraktal interpolasyon yüzeyi G olsun. s_{ij} düşey ölçüm çarpanları sabit iken her $i, j = 1, 2, \dots, n$ için

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} |s(L_{x_i}(x_0), L_{y_j}(y_0))| &= \sum_{i,j} |s(L_{x_i}(x_0), L_{y_j}(y_n))| \\ &= \sum_{i,j} |s(L_{x_i}(x_n), L_{y_j}(y_0))| \\ &= \sum_{i,j} |s(L_{x_i}(x_n), L_{y_j}(y_n))| \end{aligned}$$

şartlarını sağlansın. Bu durumda $\forall (x, y) \in [x_0, x_n] \times [x_0, x_n]$ için

$$\sum_{i,j} |s(L_{x_i}(x), L_{y_j}(y))| = \lambda$$

olacak şekilde λ sayısı vardır. Eğer $\lambda > n$ ve $\{(x_i, y_j, z_{ij})\}$ interpolasyon noktaları kolineer değilse, bu durumda

$$boy(G) = 1 + \frac{\log \lambda}{\log n}$$

dir. Diğer durumlarda

$$boy(G) = 2$$

olarak bulunur (kanıt ve ayrıntılı bilgi için bkz. [9]).

Örnek 4.4.2. Yukarıda verilmiş olan **Veri Kümesi 6**'yı ele alalım. $i, j = 0, 1, 2, 3$ olmak $s_{ij} = \frac{1}{4}$ için

$$\begin{aligned} \lambda &= \sum_{i,j} |s(L_{x_i}(x), L_{y_j}(y))| \\ &= \frac{16}{4} = 4 \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $\lambda > 3$ olup

$$\begin{aligned} boy(G) &= 1 + \frac{\log \lambda}{\log n} = 1 + \frac{\log 4}{\log 3} \\ &\approx 2,2618 \end{aligned}$$

olarak bulunur (bkz. Şekil 4.10).

Örnek 4.4.3. Şimdi **Veri Kümesi 7**'yi ele alınsın. $s_{ij} = 0$ seçilirse $\lambda = 0 < 3$ olur. Dolayısıyla ilgili teorem gereği $s_{ij} = 0$ iken **Veri Kümesi 7**'ye karşılık gelen bilineer fraktal interpolasyon yüzeyinin boyutu 2'dir (bkz. Şekil 4.14).

Kaynaklar

- [1] Barnsley, M.F. (1986). Fractal functions and interpolation. *Constructive Approximation*, 2(1), 303–329.
- [2] Barnsley, M.F. (1988). Fractals everywhere. *Academic Press*, Boston.
- [3] Barnsley, M.F., Elton, J. ve Hardin, D. Massopust, P. (1989). Hidden variable fractal interpolation functions. *SIAM J. Math. Anal.*, 20, 1218–1242.
- [4] Bouboulis, P. (2012). Fractal interpolation: Theory and applications in image compression. *LAP LAMBERT Academic Publishing*, 110-135.
- [5] Bouboulis, P ve Dalla, L. (2007) Fractal interpolation surfaces derived from fractal interpolation functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 336, 919-936.
- [6] Dalla, L. (2002). Bivariate fractal interpolation functions on grids. *Fractals*, 10, 53-58.
- [7] Geronimo, J.S. ve Hardin, D. (1993). Fractal interpolation surfaces and a related 2D multiresolution analysis. *J. Math. Anal. Appl.*, 176, 561-586.
- [8] Hutchinson, J.E. (1981). Fractals and self similarity. *Indiana University Mathematics Journal*, 30(5), 713-747.
- [9] Kong, Q., Ruan, H. ve Zhang, S. (2018). Box dimension of bilinear fractal interpolation surfaces. *Bull. Aust. Math. Soc.*, 1(9), 113-121.
- [10] Malysz, R. (2006) The Minkowski dimension of the bivariate fractal interpolation surfaces. *Chaos Solitons Fractals*, 7(5), 1147-1156.
- [11] Massopust, P.R. (1990). Fractal surfaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 151, 275-290.
- [12] Metzler, W. ve Yun, C. (2010). Construction of fractal interpolation surfaces on rectangular grids. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 20, 4079-4086.
- [13] Ruan, H. ve Xu, Q. (2015). Fractal interpolation surfaces on rectangular grids. *Bull. Aust. Math. Soc.*, 91(03), 435-446.
- [14] Xie, H. ve Sun, H. (1997). The study of bivariate fractal interpolation functions and creation of fractal interpolation surfaces. *Fractals*, 5(4), 625-634.
- [15] Zhao, N. (1996). Construction and application of fractal interpolation surfaces. *Visual Computer*, 12, 132-146.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : Oumar DAO
Yabancı Dil : Fransızca, İngilizce, Türkçe
Doğum Yeri ve Yılı : Oue sur Burkina Faso / 1992
E-Posta : daooumar19@gmail.com / oumardao@eskisehir.edu.tr

Eğitim Geçmişi:

- 2000-2006, École Accart-Ville Ouest A, Bobo-Dioulasso (Burkina Faso)
- 2006-2010, Lycée Privé Mixte d'Accart-Ville, Bobo-Dioulasso (Burkina Faso)
- 2010-2013, Lycée Privé Madina, Ouagadougou (Burkina Faso)
- 2014-2018, Kütahya Dumlupınar Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Lisans, Kütahya (Türkiye)
- 2018-2020, Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi, Yüksek Lisans, Eskişehir (Türkiye)