



**T.C.  
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**FREDHOLM İNTEGRAL DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN  
YAKLAŞIK YÖNTEMLER**

**EBRU GEZO**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN  
PROF. DR. İLHAME AMİRALİ**

**DÜZCE, 2021**

**T.C.**  
**DÜZCE ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**FREDHOLM İNTEGRAL DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN**  
**YAKLAŞIK YÖNTEMLER**

Ebru GEZO tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

**Tez Danışmanı**

Prof. Dr. İlhami AMİRALİ  
Düzce Üniversitesi

**Jüri Üyeleri**

Prof. Dr. İlhami AMİRALİ  
Düzce Üniversitesi

Doç. Dr. Mustafa KUDU  
Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Nejla ÖZMEN  
Düzce Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 19/01/2021

## BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışının olmadığı, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışının olmadığını beyan ederim.

19 Ocak 2021

Ebru Gezo

## TEŐEKKÖR

Yüksek lisans öğrenimim ve bu tezin hazırlanması sürecinde gösterdiği destek ve yardımından dolayı çok değerli hocam, tez danışmanım Prof. Dr. İlhame Amirali'ye en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Tez çalışmam süresince desteklerini esirgemeyen ve her zaman yanımda olan sevgili aileme sonsuz teşekkür ederim.

**19 Ocak 2021**

**Ebru Gezo**



# İÇİNDEKİLER

## Sayfa No

|                                                                  |      |
|------------------------------------------------------------------|------|
| ÇİZELGE LİSTESİ .....                                            | vii  |
| SİMGELER .....                                                   | viii |
| ÖZET .....                                                       | ix   |
| ABSTRACT .....                                                   | x    |
| 1. GİRİŞ.....                                                    | 1    |
| 2. GENEL BİLGİLER .....                                          | 2    |
| 2.1. İNTEGRAL DENKLEMLERİN SINIFLANDIRILMASI .....               | 2    |
| 2.1.1. Volterra ve Fredholm İntegral Denklemleri .....           | 2    |
| 2.1.2. Lineer ve Lineer Olmayan İntegral Denklemler .....        | 2    |
| 2.1.3. Tekil ve Tekil Olmayan Lineer İntegral Denklemler .....   | 3    |
| 2.1.4. Homojen ve Homojen Olmayan İntegral Denklemler .....      | 3    |
| 2.2. ÇEKİRDEK TÜRLERİ .....                                      | 3    |
| 2.2.1. Sabit Çekirdek .....                                      | 3    |
| 2.2.2. Dejenere (Ayrılabilir) Çekirdek .....                     | 3    |
| 2.2.3. Simetrik Çekirdek .....                                   | 4    |
| 2.2.4. İtere (Ardışık) Çekirdek .....                            | 4    |
| 2.3. POLİNOM SİSTEMLERİ .....                                    | 4    |
| 2.3.1. Legendre Polinomu .....                                   | 4    |
| 2.3.2. Chebyshev Polinomu .....                                  | 5    |
| 2.4. L2 FONKSİYONU .....                                         | 5    |
| 2.5. KARAKTERİSTİK SAYILAR VE ÖZFONKSİYONLAR .....               | 6    |
| 2.6. LİNEER DENKLEM SİSTEMİ .....                                | 6    |
| 2.7. PİCARD İTERASYON YÖNTEMİ .....                              | 6    |
| 2.8. CAUCHY-SCHWARZ EŞİTSİZLİĞİ .....                            | 7    |
| 2.9. NEUMANN SERİSİ .....                                        | 7    |
| 3. KARAKTERİSTİK SAYILARI BULMAK İÇİN YAKLAŞIK<br>YÖNTEMLER..... | 10   |
| 3.1. KELLOGG YÖNTEMİ .....                                       | 10   |
| 3.2. İZLER YÖNTEMİ .....                                         | 17   |

|                                                                           |    |
|---------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.3. RİTZ YÖNTEMİ .....                                                   | 22 |
| 4. FREDHOLM İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ İÇİN<br>YAKLAŞIK YÖNTEMLER ..... | 26 |
| 4.1. ARDIŞIK YAKLAŞIMLAR YÖNTEMİ.....                                     | 26 |
| 4.1.1. Ardışık Yaklaşımlar Yöntemi Yakınsama Koşulu .....                 | 28 |
| 4.2. BUBNOV-GALERKİN YÖNTEMİ.....                                         | 33 |
| 4.3. ÇEKİRDEĞİN YERİNE DEJENERE BİR ÇEKİRDEK ALINMASI .....               | 44 |
| 5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....                                                 | 49 |
| 6. KAYNAKLAR.....                                                         | 50 |
| ÖZGEÇMİŞ.....                                                             | 52 |



## ÇİZELGE LİSTESİ

|                                                           | <b><u>Sayfa No</u></b> |
|-----------------------------------------------------------|------------------------|
| Çizelge 3.1. Kellog yöntemi ile bulunan özdeğerler. ....  | 14                     |
| Çizelge 3.2. Kellogg yöntemi ile bulunan özdeğerler. .... | 17                     |
| Çizelge 3.3. Birinci ve ikinci en küçük özdeğerler.....   | 21                     |
| Çizelge 4.1. Polinom sistemlerin çözümünün bulunması..... | 43                     |
| Çizelge 4.2. Fredholm integral denklemlerin çözümü.....   | 44                     |



## SİMGELER

|                    |                                                |
|--------------------|------------------------------------------------|
| $D(\lambda)$       | Katsayılar determinanı                         |
| $K(x, t)$          | İntegraldenkleminin çekirdek fonksiyonu        |
| $K_n$              | $n$ . mertebeden ardışık çekirdek              |
| $L$                | Düzgün integral operatörü                      |
| $L_2$              | Karesi integrallenebilir fonksiyonların sınıfı |
| $R(x, t; \lambda)$ | Çözücü çekirdek                                |
| $\lambda$          | Parametre                                      |
| $\int$             | İntegral sembolü                               |





# ÖZET

## FREDHOLM İNTEGRAL DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN YAKLAŞIK YÖNTEMLER

Ebru GEZO

Düzce Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. İlhami AMİRALİ

Ocak 2021, 51 sayfa

Bu çalışmada Fredholm integral denkleminin yaklaşık çözümü için Bubnov-Galerkin, dejenere çekirdek ve ardışık yaklaşımlar yöntemleri incelendi.  $K(x, t)$  çekirdeğinin karakteristik sayısının yaklaşık değerinin bulunması için Ritz, İzler ve Kellogg yöntemleri kullanıldı. Son olarak, ele alınan her bir yöntem için nümerik çözümlerin teorik sonuçları doğruladığı gözlemlenmiştir.

**Anahtar sözcükler:** Dejenere çekirdek, Fredholm integral denklemi, Karakteristik sayılar.

## ABSTRACT

### APPROXIMATE METHODS FOR THE SOLUTION OF THE FREDHOLM INTEGRAL EQUATION

Ebru GEZO

Düzce University

Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematic

Master's Thesis

Supervisor: Prof. Dr. İlhami AMİRALI

January 2021, 51 pages

In this study, for the approximate solution of the Fredholm integral equation, Bubnov-Galerkin method, Degenerate Kernel method and successive approximation method were examined. Ritz, Traces and Kellogg methods were used to find the approximate value of the eigenvalue of  $K(x, t)$  kernel. Finally, it has been observed that numerical solutions confirm the theoretical results for each method.

**Keywords:** Degenerate kernel, Fredholm integral equations, Characteristic numbers.

# 1. GİRİŞ

Uygulamalı bilimlerde integral denklemler, integral işareti altında bilinmeyen fonksiyonu içeren denklemlerdir. İntegral denklemler matematiğin, modern bilimin ve mühendisliğin temelini oluşturan kavramlardır [12]. [17], [19] ve [20]' de bilim ve mühendislikte sıkça kullanılan integral denklem kavramı ele alınmıştır.

19. yy'da integral denklemler ile ilgili çalışmalar başlamıştır. 1823 yılında Abel, 1888'de de Reymond integral denklemler ile ilgili çalışmalar yapmışlardır. [1]'de integral denklemde simetrik çekirdek kavramı, Fredholm integral denklemlerin yaklaşım yöntemleri ve Fredholm teoremini ele almıştır. [2], [3] ve [11]'de lineer ve lineer olmayan integral denklemlerin yaklaşık yöntemleri üzerine çalışılmıştır. [4]'de Fredholm integral denklemleri, dejenere çekirdek ve polinom sistemleri ele alınmıştır. [5] ve [6] nolu çalışmalarda Fredholm ve Volterra integral denklemleri içeren türkçe kaynaklar mevcuttur. [18]'de diferansiyel ve integral denklem çeşitleri ve çözüm yöntemleri üzerine çalışılmıştır. [15] ve [21]-[23]'de Volterra ve Fredholm integral denklemleri üzerine çalışmalar yapılmıştır. [14]'de integral denklemlerin tekil çözümü ele alınmıştır. [16] ve [7]-[10]'da integral denklemlerin sınır değer problemleri ve yaklaşık yöntemleriyle ilgili çalışmalar yapılmıştır. İsveçli matematikçi Erik Ivar Fredholm'ın integral denklemler üzerine çalışmaları sayesinde Fredholm integral denklemleri olarak bilinen denklemlerin çözümlerinin bulunması için yöntemler geliştirilmiştir.

Bizim çalışmamızda Fredholm integral denklemlerin nümerik çözümleri için yaklaşık yöntemler üzerinde incelemeler yapıldı ve her bir yöntemi açıklayan örnekler çözüldü.

Birinci bölümde giriş yer almaktadır. İkinci bölümde konunun daha iyi anlaşılması için gerekli tanımlar verilmiştir. Üçüncü bölümde  $K(x, t)$  çekirdeğinin karakteristik sayılarının bulunması için Ritz, İzler ve Kellogg yöntemleri ele alındı ve sayısal örnekler çözüldü. Dördüncü bölümde ikinci tip Fredholm integral denklemi için Bubnov-Galerkin yöntemi, dejenere çekirdek yöntemi ve ardışık yaklaşımlar yöntemi kullanılarak ayrıntılı çözümler yapılmıştır. Beşinci bölümde elde edilen sonuçlar ve öneriler bulunmaktadır. Altıncı bölümde ise tez de çalışmamız için yararlanılan kaynaklar verilmiştir.

## 2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde tezde kullanılan tanımlar verilmektedir.

### 2.1. İNTEGRAL DENKLEMLERİN SINIFLANDIRILMASI

#### 2.1.1. Volterra ve Fredholm İntegral Denklemleri

$\lambda$  sayısal bir parametre,  $f(x)$  ve  $K(x, t)$  bilinen fonksiyonlar,  $h(x)$  ise bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere

$$h(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)h(t)dt \quad (2.1)$$

denklemine *II. tip lineer Volterra İntegral Denklemi* denir.

$$h(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)h(t)dt \quad (2.2)$$

denklemine *II. tip lineer Fredholm İntegral Denklemi* denir [5].

#### 2.1.2. Lineer ve Lineer Olmayan İntegral Denklemler

$\lambda$  bir parametre olsun.  $h(x)$  bilinmeyen fonksiyon olmak üzere,

$$h(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)h(t)dt \quad (2.3)$$

şeklindeki integral denkleme *lineer integral denklem* denir.

$$h(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)h^n(t)dt \quad (2.4)$$

integral denkleminde  $h(x)$  bilinmeyen fonksiyonun  $n$ .kuvveti bulunduğundan bu denkleme *lineer olmayan integral denklem* denir [6], [22].

### 2.1.3. Tekil ve Tekil Olmayan Lineer İntegral Denklemler

$K(x, t)$  çekirdek fonksiyonu  $a \leq x \leq b$ ,  $a \leq t \leq b$  için sürekli ve  $f(x)$  fonksiyonu da  $[a, b]$ 'de sürekli ise

$$h(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t)h(t)dt \quad (2.5)$$

denklemine *tekil (singüler) olmayan denklem*,  $K(x, t)$ 'nin verilen kare bölgede sürekli olmaması halinde ise (2.5) denklemine *tekil (singüler) denklem* denir. İntegral denklemlerin tekil olup olmadıkları sınırlarına bakılarak söylenebilir. İntegralin sınırlarından en az biri sonsuz ise denklem tekil denklemdir.

### 2.1.4. Homojen ve Homojen Olmayan İntegral Denklemler

İntegral denklemlerinin bir sınıflandırılması da homojen olup olmadığına göre yapılır. (2.5) integral denkleminde  $f(x) = 0$  ise *homojen integral denklem*,  $f(x) \neq 0$  ise *homojen olmayan integral denklem* denir.

## 2.2. ÇEKİRDEK TÜRLERİ

$\lambda$  sayısal bir parametre (2.2) integral denkleminde  $K(x, t)$  çekirdek fonksiyonunun lineer  $x, t$  değişkenleri  $[a, b]$  aralığında tanımlı ve sürekli olsunlar. Sabit, Dejenere, Simetrik ve İtere (ardışık) Çekirdek tanımları aşağıdaki şekildedir.

### 2.2.1. Sabit Çekirdek

$c$  sabit bir sayı olmak üzere,  $K(x, t) = c$  için (2.2) denklemi

$$h(x) = f(x) + \lambda c \int_a^b h(t)dt \quad (2.6)$$

şeklinde alır. Bu durumda  $K(x, t)$  çekirdeğine *Sabit Çekirdek* denir [24].

### 2.2.2. Dejenere (Ayrılabilir) Çekirdek

(2.2) integral denkleminde  $K(x, t)$  çekirdeği aşağıdaki şekilde verilsin:

$$K(x, t) = \sum_{i=1}^n r_i(x) y_i(t). \quad (2.7)$$

Burada

$$h(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^n \int_a^b r_i(x) y_i(t) h(t) dt, \quad (2.8)$$

$$h(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^n r_i(x) \int_a^b y_i(t) h(t) dt \quad (2.9)$$

olur. (2.7) çekirdeğine *Dejenere (Ayrılabilir) Çekirdek* denir.

### 2.2.3. Simetrik Çekirdek

(2.2) integral denkleminde  $K(x, t)$  çekirdeği,  $K(x, t) = K(t, x)$  eşitliğini sağlıyorsa,  $K(x, t)$  çekirdeğine *Simetrik Çekirdek* denir.

### 2.2.4. İtere (Ardışık) Çekirdek

$K(x, t)$  çekirdek fonksiyonu  $n$  ve  $m$  pozitif tamsayılar olmak üzere

$$K_{(n+m)}(x, t) = \int_a^b K_n(x, z) K_m(z, t) dz \quad (2.10)$$

veya

$$K_m(x, t) = \int_a^b K_n(x, z) K_{m-n}(z, t) dz \quad (2.11)$$

şeklinde tanımlanan ifadeye *itere (ardışık) çekirdek* denir.

## 2.3. POLİNOM SİSTEMLERİ

Burada Legendre ve Chebyshev polinom sistemleri açıklandı.

### 2.3.1. Legendre Polinomu

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (2.12)$$

şeklinde tanımlanan polinoma *Legendre Polinomu* denir [24].

### 2.3.2. Chebyshev Polinomu

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x), n = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (2.13)$$

şeklinde tanımlı polinoma *Chebyshev Polinomu* denir.

### 2.4. $L_2$ FONKSİYONU

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty \quad (2.14)$$

eşitsizliğini sağlayan  $f$  fonksiyonuna  $L_2$  fonksiyonu denir [1], [12].

Özellik 2.1:  $L_2(a, b)$  uzayında norm

$$\|f\|_2 = \left( \int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad (2.15)$$

şeklinde tanımlanır.

Özellik 2.2:  $(L_2, \|\cdot\|)$  uzayı normlanmış bir uzaydır.  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in L_2$  için

$$\|x\|_2 = \left( \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.16)$$

şeklindedir.

Özellik 2.3:  $f(x)$  ve  $g(x)$  iki fonksiyon olmak üzere  $L_2$  uzayında iç çarpım

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx \quad (2.17)$$

şeklinde tanımlanır.

Özellik 2.4: Miskowski eşitsizliği  $L_2$  uzayında geçerlidir.  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  ve  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  vektörü için aşağıdaki üçgen eşitsizliği sağlanır:

$$\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2, \quad (2.18)$$

$$\left( \sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^2 \right)^{1/2} \leq \left( \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.19)$$

## 2.5. KARAKTERİSTİK SAYILAR VE ÖZFONKSİYONLAR

$$h(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)h(t)dt \quad (2.20)$$

integral denkleminde  $\lambda$  ( $\lambda \neq 0$ ) değerlerine (2.21) denkleminin *Karakteristik Sayıları* (*Özdeğerleri*) denir. (2.21) denklemini sağlayan  $\lambda$  değerlerine karşılık gelen fonksiyonlara da *Özfonksiyon* (*özvektör*) denir.

## 2.6. LİNEER DENKLEM SİSTEMİ

Bir lineer (doğrusal) denklem için  $a_1, a_2, \dots, a_n, b$  reel sayılar,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ise değişkenler ve denklemin bilinmeyenleri olmak üzere

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \quad (2.21)$$

biçimindeki denklemlerdir.

## 2.7. PİCARD İTERASYON YÖNTEMİ

$g(x, h)$  fonksiyonu  $(x_0, h_0)$  noktasının bir komşuluğunda tanımlı ve sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$h' = g(x, h), \quad h' = \frac{dh}{dx} \quad (2.22)$$

diferansiyel denkleminin  $h(x_0) = h_0$  başlangıç koşulu olsun. Başlangıç koşuluna dikkat ederek (2.22) ifadesini  $x_0$  dan  $x$ 'e kadar integral alınsın

$$\int_{x_0}^x dh = \int_{x_0}^x g(x, h)dx, \quad h(x) - h(x_0) = \int_{x_0}^x g(x, h)dx, \quad (2.23)$$

$$h = h_0 + \int_{x_0}^x g(x, h)dx. \quad (2.24)$$

$h = h_0$  başlangıç noktası (2.24) de yerine yazılırsa yaklaşımın birinci adımı



$$h_1 = h_0 + \int_{x_0}^x g(x, h_0) dx \quad (2.25)$$

olur. Buradan elde edilen  $h_1$  değerini (2.24) de yerine yazılırsa yaklaşımın ikinci adımı

$$h_2 = h_0 + \int_{x_0}^x g(x, h_1) dx \quad (2.26)$$

olur. Devam edildiğinde

$$h_3 = h_0 + \int_{x_0}^x g(x, h_2) dx, \quad (2.27)$$

.....

$$h_n = h_0 + \int_{x_0}^x g(x, h_{n-1}) dx \quad (2.28)$$

elde edilir. (2.22) formunda olan bir diferansiyel denklemin çözümünde kullanılır.

## 2.8. CAUCHY-SCHWARZ EŞİTSİZLİĞİ

$R^n$  ya da  $C^n$  öklit uzayına ait her  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  ve her  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  vektörü için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.29)$$

## 2.9. NEUMANN SERİSİ

(2.2) Fredholm integral denklemi ele alalım.  $h(x)$  için ilk yaklaşım olarak

$$f(x) = h_0(x) \quad (2.30)$$

kabul edelim ve (2.2) denkleminde  $h(x) = h_1(x)$  yazılsın

$$h_1(x) = h_0 + \lambda \int_a^b K(x, t) h_0(t) dt. \quad (2.31)$$

Bu eşitlikte  $f(t) = h_0(t)$  yerine yazılırsa

$$h_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) f(t) dt \quad (2.32)$$

olur. (2.32) de  $t$  yerine  $t_1$  yazılırsa

$$h_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t_1) f(t_1) dt_1 \quad (2.33)$$

olur. Aynı şekilde  $h_2(x)$  ifadesi

$$h_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) h_1(t) dt. \quad (2.34)$$

(2.34) de  $h_1(t)$  eşitliği yazılırsa

$$h_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \left( f(t) + \lambda \int_a^b K(t, t_1) f(t_1) dt_1 \right) dt, \quad (2.35)$$

$$h_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) f(t) dt + \lambda^2 \int_a^b \int_a^b K(x, t) K(t, t_1) f(t_1) dt_1 dt \quad (2.36)$$

olur. İtere çekirdek tanımından

$$K_2(x, t_1) = \int_a^b K(x, t) K(t, t_1) dt \quad (2.37)$$

olur. (2.36) düzenlenirse

$$h_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) f(t) dt + \lambda^2 \int_a^b K_2(x, t_1) f(t_1) dt_1, \quad (2.38)$$

$$h_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) f(t) dt + \lambda^2 \int_a^b K_2(x, t) f(t) dt + \cdots + \lambda^n \int_a^b K_n(x, t) f(t) dt$$

elde edilir.  $h_n(x)$  fonksiyonun limiti alındığında  $h(x)$  fonksiyonuna

$$h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) \quad (2.39)$$

olur. Bu durumda

$$h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) f(t) dt + \lambda^2 \int_a^b K_2(x, t) f(t) dt + \cdots + \lambda^n \int_a^b K_n(x, t) f(t) dt \right], \quad (2.40)$$

$$h(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \int_a^b K_n(x, t) f(t) dt \quad (2.41)$$

olur. (2.41) ifadesine *Neumann serisi* denir [15].

### 3. KARAKTERİSTİK SAYILARI BULMAK İÇİN YAKLAŞIK YÖNTEMLER

#### 3.1. KELLOGG YÖNTEMİ

$K(x, t)$ , simetrik ve pozitif bir çekirdektir ( $a \leq x, t \leq b$ ).  $v_0(x) \in L_2(a, b)$ ,  $v_0(x)$  fonksiyonu yardımıyla bir dizi işlev oluşturalım:

$$v_1(x) = \int_a^b K(x, t) v_0(t) dt, \quad (3.1)$$

$$v_2(x) = \int_a^b K(x, t) v_1(t) dt, \quad (3.2)$$

$$\dots$$
$$v_n(x) = \int_a^b K(x, t) v_{n-1}(t) dt. \quad (3.3)$$

(3.3) denklemini için aşağıdaki ifadeyi ele alalım:

$$\left\{ \frac{\|v_{n-1}\|}{\|v_n\|} \right\}. \quad (3.4)$$

Burada

$$\|v_n\| = \sqrt{\int_a^b |v_n(x)|^2 dx}, \quad \|v_{n-1}\| = \sqrt{\int_a^b |v_{n-1}(x)|^2 dx}.$$

$K(x, t)$  simetrik çekirdeğinin  $h_1(x), h_2(x), h_3(x) \dots h_n(x)$  ortogonal özfonksiyonları olarak adlandırılınsın. Bu fonksiyonlara denk gelen öz değerleri  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n$

$$K(x, t)h_1(x) = \lambda_1 h_1(x), \quad (3.5)$$

$$K(x, t)h_2(x) = \lambda_2 h_2(x), \quad (3.6)$$

$$\dots$$
$$K(x, t)h_n(x) = \lambda_n h_n(x) \quad (3.7)$$

şeklindedir. Burada  $v_0(x)$  fonksiyonunu  $h_1(x), h_2(x), \dots, h_{k-1}(x)$  fonksiyonlarına ortogonal alalım:

$$\int_a^b h_0(x)v_0(x)dx + \int_a^b h_1(x)v_0(x)dx + \int_a^b h_2(x)v_0(x)dx \dots \int_a^b h_{k-1}(x)v_0(x)dx = 0,$$

$$\int_a^b h_k(x)v_0(x)dx \neq 0 \quad (3.8)$$

olsun. Bu koşullar altında (3.4)'nin limit değeri  $\lambda_k$  özdeğerine eşit olur.

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt[n]{\|v_n\|}} \right\} \quad (3.9)$$

dizisi (3.4) ifadesinin limitine sahiptir.

$$\left\{ \frac{v_n(x)}{\|v_n\|} \right\} \quad (3.10)$$

fonksiyon dizisi  $\lambda_k$  özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonların doğrusal bir birleşimine yakınsar.  $h_1(x)$  ve  $v_0(x)$  ortogonal olmasın:

$$\int_a^b h_1(x)v_0(x)dx \neq 0. \quad (3.11)$$

(3.4) ve (3.9)' den en küçük özdeğerler için aşağıdaki iki yaklaşım formülü elde edilir:

$$\lambda_1 \approx \frac{\|v_{n-1}\|}{\|v_n\|}, \quad (3.12)$$

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{\sqrt[n]{\|v_n\|}}. \quad (3.13)$$

(3.12) formülü  $\lambda_1$  için bir üst sınırı verir.  $K(x,t)$  simetrik çekirdeği pozitif tanımlı olmadığında

$$\lambda_1 = \min \left\{ \left| \frac{\|v_{n-1}\|}{\|v_n\|} \right|, \left| \frac{1}{\sqrt[n]{\|v_n\|}} \right| \right\} \quad (3.14)$$

olur. Uygun şekilde seçilmiş bir başlangıç fonksiyonu  $v_0(x)$  için Kellogg yöntemi hesaplamalar açısından kolaylık sağlar [1]- [3], [21].

Örnek 3.1:

$$K(x, t) = \sin x \sin t, -\pi \leq x, t \leq \pi \quad (3.15)$$

çekirdeği için en küçük özdeğerini Kellog yöntemi yardımıyla bulalım. Başlangıç için  $v_0(x) = \sin x$  alınırsa

$$\begin{aligned} v_1(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \sin t \sin t dt = \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \sin^2 t dt &= \sin x \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt = \sin x \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{1 - \cos 2t}{2} \right) dt = \pi \sin x, \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$v_2(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x v_1(t) dt = \pi \sin x \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt = \pi^2 \sin x, \quad (3.17)$$

$$v_3(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x v_2(t) dt = \pi^2 \sin x \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt = \pi^3 \sin x, \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} &\dots \\ v_n(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin x v_{n-1}(t) dt = \pi^{n-1} \sin x \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt = \pi^n \sin x. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Norm tanımından

$$\|v_n(x)\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \pi^{2n} \sin^2 x dx} = \pi^n \sqrt{\pi}, \|v_{n-1}(x)\| = \pi^{n-1} \sqrt{\pi} \quad (3.20)$$

olur. Daha sonra (3.12) ifadesinden

$$\lambda_1 \approx \frac{\pi^{n-1} \sqrt{\pi}}{\pi^n \sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi} \quad (3.21)$$

bulunur.  $v_0(x) = x$  alınırsa

$$v_1(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x t \sin t dt = 2\pi \sin x, \quad (3.22)$$

$$v_2(x) = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \sin t \sin t dt = 2\pi^2 \sin x, \quad (3.23)$$

$$v_3(x) = 2\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \sin t \sin t dt = 2\pi^3 \sin x, \quad (3.24)$$

$$\dots$$

$$v_n(x) = 2\pi^{n-1} \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \sin t \sin t dt = 2\pi^n \sin x \quad (3.25)$$

olur. Norm tanımından

$$\|v_n(x)\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (2\pi^n)^2 \sin^2 x dx} = 2\pi^n \sqrt{\pi}, \quad \|v_{n-1}(x)\| = 2\pi^{n-1} \sqrt{\pi} \quad (3.26)$$

olur. Daha sonra (3.12) ifadesinden

$$\lambda_1 \approx \frac{2\pi^{n-1} \sqrt{\pi}}{2\pi^n \sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi} \quad (3.27)$$

bulunur.  $v_0(x) = e^x$  alınırsa

$$v_1(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \sin t e^t dt = \left( \frac{e^{\pi}}{2} - \frac{e^{-\pi}}{2} \right) \sin x, \quad (3.28)$$

$$v_2(x) = \left( \frac{e^{\pi}}{2} - \frac{e^{-\pi}}{2} \right) \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \sin t \sin t dt = \left( \frac{e^{\pi}}{2} - \frac{e^{-\pi}}{2} \right) \pi \sin x, \quad (3.29)$$

$$v_3(x) = \left( \frac{e^{\pi}}{2} - \frac{e^{-\pi}}{2} \right) \pi \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \sin t \sin t dt = \left( \frac{e^{\pi}}{2} - \frac{e^{-\pi}}{2} \right) \pi^2 \sin x, \quad (3.30)$$

...

$$v_n(x) = \pi^{n-1} \left( \frac{e^{\pi}}{2} - \frac{e^{-\pi}}{2} \right) \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \sin t \sin t dt = \left( \frac{e^{\pi}}{2} - \frac{e^{-\pi}}{2} \right) \pi^n \sin x \quad (3.31)$$

olur. Norm tanımından

$$\|v_n(x)\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \left( \left( \frac{e^{\pi}}{2} - \frac{e^{-\pi}}{2} \right) \pi^n \right)^2 \sin^2 x dx} = \left( \frac{e^{\pi}}{2} - \frac{e^{-\pi}}{2} \right) \pi^n \sqrt{\pi}, \quad (3.32)$$

$$\|v_{n-1}(x)\| = \left(\frac{e^\pi}{2} - \frac{e^{-\pi}}{2}\right) \pi^{n-1} \sqrt{\pi} \quad (3.33)$$

olur. Daha sonra (3.12) ifadesinden

$$\lambda_1 \approx \frac{\|v_{n-1}(x)\|}{\|v_n(x)\|} = \frac{1}{\pi}. \quad (3.34)$$

Çizelge 3.1. Kellog yöntemi ile bulunan özdeğerler.<sup>1</sup>

| $v_0(x)$ keyfi fonksiyon | Kellogg Yöntemi           |
|--------------------------|---------------------------|
| $v_0(x) = \sin x$        | $\lambda_1 \approx 1/\pi$ |
| $v_0(x) = x$             | $\lambda_1 \approx 1/\pi$ |
| $v_0(x) = e^x$           | $\lambda_1 \approx 1/\pi$ |

Çizelge 3.1 görüldüğü gibi keyfi seçilen fonksiyonlar aynı özdeğeri vermektedir.

Örnek 3.2:

$$K(x, t) = xt, \quad 0 \leq x, t \leq 1 \quad (3.35)$$

çekirdeği için en küçük özdeğerini Kellog yöntemi yardımıyla bulalım.

Başlangıç için  $v_0(x) = x$  alınırsa

$$v_1 = \int_0^1 K(x, t) v_0(t) dt = \int_0^1 xt^2 dt = \frac{x}{3}, \quad (3.36)$$

$$v_2 = \int_0^1 K(x, t) v_1(t) dt = \int_0^1 \frac{xt^2}{3} dt = \frac{x}{9}, \quad (3.37)$$

$$v_3 = \int_0^1 K(x, t) v_2(t) dt = \int_0^1 \frac{xt^2}{9} dt = \frac{x}{27}, \quad (3.38)$$

$$v_n = \int_0^1 K(x, t) v_{n-1}(t) dt = \int_0^1 \frac{xt^2}{3^{n-1}} dt = \frac{x}{3^n} \quad (3.39)$$

<sup>1</sup>Çizelge 3.1 Göcen, Soydan, Taşdemir; Karaelmas Fen Müh. Derg., 2016;6(1):9-15 çalışmasından esinlenilmiştir.



olur. Norm tanımından

$$\|v_n(x)\| = \sqrt{\int_0^1 \frac{x^2}{3^{2n}} dx} = \frac{1}{3^{n+\frac{1}{2}}}, \|v_{n-1}(x)\| = \sqrt{\int_0^1 \frac{x^2}{3^{2(n-1)}} dx} = \frac{1}{3^{n-\frac{1}{2}}} \quad (3.40)$$

olur. Daha sonra (3.12) ifadesinden

$$\lambda_1 \approx \frac{\|v_{n-1}(x)\|}{\|v_n(x)\|} = 3 \quad (3.41)$$

olur.  $v_0(x) = \sin x$  alınırsa

$$v_1 = \int_0^1 K(x, t) v_0(t) dt = \int_0^1 x t \sin t dt = x(-\cos 1 + \sin 1), \quad (3.42)$$

$$v_2 = \int_0^1 K(x, t) v_1(t) dt = \int_0^1 x t^2 (-\cos 1 + \sin 1) dt = \frac{x}{3} (-\cos 1 + \sin 1), \quad (3.43)$$

$$v_3 = \int_0^1 K(x, t) v_2(t) dt = \int_0^1 x t^2 (-\cos 1 + \sin 1) dt = \frac{x}{9} (-\cos 1 + \sin 1), \quad (3.44)$$

$$\dots$$

$$v_n = \int_0^1 K(x, t) v_{n-1}(t) dt$$

$$= \int_0^1 \frac{x t^2 (-\cos 1 + \sin 1)}{3^{n-2}} dt = \frac{x}{3^{n-1}} (-\cos 1 + \sin 1). \quad (3.45)$$

Norm tanımından

$$\|v_n(x)\| = \sqrt{\int_0^1 \left( \frac{1}{3^{n-1}} x (-\cos 1 + \sin 1) \right)^2 dx} = \frac{(-\cos 1 + \sin 1)}{3^{n-1} \sqrt{3}}, \quad (3.46)$$

$$\|v_{n-1}(x)\| = \sqrt{\int_0^1 \left( \frac{1}{3^{n-2}} x (-\cos 1 + \sin 1) \right)^2 dx} = \frac{(-\cos 1 + \sin 1)}{3^{n-2} \sqrt{3}} \quad (3.47)$$

olur. Daha sonra (3.12) ifadesinden

$$\lambda_1 \approx \frac{\|v_{n-1}(x)\|}{\|v_n(x)\|} = 3 \quad (3.48)$$

olur.  $v_0(x) = e^x$  alınırsa

$$v_1 = \int_0^1 K(x, t) v_0(t) dt = \int_0^1 x t e^t dt = x, \quad (3.49)$$

$$v_2 = \int_0^1 K(x, t) v_1(t) dt = \int_0^1 x t^2 dt = \frac{1}{3} x, \quad (3.50)$$

$$v_3 = \int_0^1 K(x, t) v_2(t) dt = \int_0^1 x t^2 dt = \frac{1}{9} x, \quad (3.51)$$

$$\dots$$

$$v_n = \int_0^1 K(x, t) v_{n-1}(t) dt = \int_0^1 \frac{x t^2}{3^{n-2}} dt = \frac{1}{3^{n-1}} x. \quad (3.52)$$

Norm tanımından

$$\begin{aligned} \|v_n(x)\| &= \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{1}{3^{n-1}} x\right)^2 dx} = \frac{1}{3^{n-1}\sqrt{3}}, \|v_{n-1}(x)\| = \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{1}{3^{n-2}} x\right)^2 dx} \\ &= \frac{1}{3^{n-2}\sqrt{3}} \end{aligned} \quad (3.53)$$

olur. Daha sonra (3.12) ifadesinden

$$\lambda_1 \approx \frac{\|v_{n-1}(x)\|}{\|v_n(x)\|} = 3. \quad (3.54)$$

Çizelge 3.2. Kellogg yöntemi ile bulunan özdeğerler.

| $v_0$ keyfi fonksiyon | Kellogg Yöntemi       |
|-----------------------|-----------------------|
| $v_0(x) = x$          | $\lambda_1 \approx 3$ |
| $v_0(x) = \sin x$     | $\lambda_1 \approx 3$ |
| $v_0(x) = e^x$        | $\lambda_1 \approx 3$ |

Çizelge 3.2 görüldüğü gibi keyfi seçilen fonksiyonlar aynı özdeğeri vermektedir.

### 3.2. İZLER YÖNTEMİ

$K(x, t)$  çekirdeğinin  $n$ . izi

$$A_n = \int_a^b K_n(t, t) dt \quad (3.55)$$

formunda alınsın. Burada  $K_n(x, t)$  ifadesine  $n$ . itere çekirdek denir. Bilinmesi gereken formüller:

$$K_n(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k(x)h_k(t)}{\lambda_k^n}, \quad (3.56)$$

$$\int_a^b h_i(x)h_j(x)dx = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}. \quad (3.57)$$

(3.56), (3.57) ve (3.55) ifadelerinden:

$$A_n = \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k(t)h_k(t)}{\lambda_k^n} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\int_a^b h_k(t)h_k(t)dt}{\lambda_k^n}, \quad (3.58)$$

$$A_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^n}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (3.59)$$

bulunur. Oldukça küçük  $n$  için bu ifadedeki ana terim  $\frac{1}{\lambda_k^n}$  dir. Bu nedenle

$$A_{2n} \approx \frac{1}{\lambda_1^{2n}}, A_{2n+2} \approx \frac{1}{\lambda_1^{2n+2}} \quad (3.60)$$

şeklindedir. En küçük özdeğeri olan  $\lambda_1$  ve oldukça büyük  $n$  değeri için

$$|\lambda_1| \approx \sqrt{\frac{A_{2n}}{A_{2n+2}}} \quad (3.61)$$

yaklaşım formülü geçerlidir. (3.61) formülü  $|\lambda_1|$  'in değerini çok daha büyük elde eder.

İkinci karakteristik değeri hesaplamak için yaklaşım formülleri

$$|\lambda_2| \approx \frac{1}{|\lambda_1|} \sqrt{\frac{B_{2n}}{B_{2n+2}}}, |\lambda_2| \approx \frac{1}{|\lambda_1|} \left(\frac{2}{B_{2n}}\right)^{\frac{1}{2n}} \quad (3.62)$$

şeklindedir. Burada  $B_{2n} = A_{2n}^2 - A_{4n}$ ,

$$B_{2n} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^{2n}}\right)^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^{4n}}, \quad (3.63)$$

$$B_{2n} = \left(\frac{\frac{1}{\lambda_1^{2n}}}{1 - \frac{1}{\lambda_1^{2n}}}\right)^2 - \left(\frac{\frac{1}{\lambda_1^{4n}}}{1 - \frac{1}{\lambda_1^{4n}}}\right), \quad (3.64)$$

$$B_{2n} = \frac{1}{(\lambda_1^{2n} - 1)^2} - \frac{1}{\lambda_1^{4n} - 1}, \quad (3.65)$$

$$B_{2n} = \frac{2}{(\lambda_1^{4n} - 1)(\lambda_1^{2n} - 1)}. \quad (3.66)$$

Simetrik çekirdeğe ait çift mertebeden izler

$$A_{2n} = \int_a^b \int_a^b K_n^2(x, t) dt dx = 2 \int_a^b \int_a^x K_n^2(x, t) dt dx \quad (3.67)$$

formülleriyle bulunur [5], [6], [23].

Örnek 3.3:

$$K(x, t) = x^2 t^2, a = 0 \text{ ve } b = 1 \quad (3.68)$$

çekirdeği için birinci ve ikinci karakteristik sayılarını İzler yöntemiyle bulalım.

$K(x, t)$  çekirdeği simetriktir. Ardışık çekirdek formüllerinden aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$K_2(x, t) = \int_a^b K(x, y)K(y, t)dy = \int_0^1 x^2 y^2 y^2 t^2 dy = \frac{x^2 t^2}{5}, \quad (3.69)$$

$$K_3(x, t) = \int_a^b K(x, y)K_2(y, t)dy = \frac{1}{5} \int_0^1 x^2 y^2 y^2 t^2 dy = \frac{x^2 t^2}{25}, \quad (3.70)$$

$$K_4(x, t) = \int_a^b K(x, y)K_3(y, t)dy = \frac{1}{25} \int_0^1 x^2 y^2 y^2 t^2 dy = \frac{x^2 t^2}{125}. \quad (3.71)$$

(3.67) formülünden  $n = 1$ ,  $n = 2$  ve  $n = 4$  için

$$A_2 = \int_0^1 \int_0^1 K_1^2(x, t) dt dx = \int_0^1 \int_0^1 x^4 t^4 dt dx = \int_0^1 \frac{x^4}{5} dx = \frac{1}{25}, \quad (3.72)$$

$$A_4 = \int_0^1 \int_0^1 K_2^2(x, t) dt dx = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^4 t^4}{25} dt dx = \int_0^1 \frac{x^4}{125} dx = \frac{1}{5^4}, \quad (3.73)$$

$$A_8 = \int_0^1 \int_0^1 K_4^2(x, t) dt dx = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^4 t^4}{125} dt dx = \int_0^1 \frac{x^4}{625} dx = \frac{1}{5^5}. \quad (3.74)$$

(3.61) formülünden

$$|\lambda_1| \approx \sqrt{\frac{\frac{1}{25}}{\frac{1}{625}}} = 5 \quad (3.75)$$

olur.  $B_{2n} = A_{2n}^2 - A_{4n}$  formülünden

$$B_2 = A_2^2 - A_4 = 0, \quad B_4 = A_4^2 - A_8 = \frac{-124}{5^8} \quad (3.76)$$

olur. (3.62) formülünden

$$|\lambda_2| \approx \sqrt{\frac{0}{\frac{-124}{5^8}}} = 0 \quad (3.77)$$

olur.

Örnek 3.4:

$$K(x, t) = e^{x+t} \quad (3.78)$$

çekirdeği için birinci ve ikinci karakteristik sayılarını İzler yöntemiyle bulalım.

$K(x, t)$  çekirdeği simetriktir. Ardışık çekirdek formüllerinden aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$K_2(x, t) = \int_a^b K(x, y)K(y, t)dy = \int_0^1 e^{x+y}e^{y+t}dy = \frac{e^{x+t}}{2}(e^2 - 1), \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned} K_3(x, t) &= \int_a^b K(x, y)K_2(y, t)dy = \frac{(e^2 - 1)}{2} \int_0^1 e^{x+y}e^{y+t}dy \\ &= \frac{e^{x+t}}{4}(e^2 - 1)^2, \end{aligned} \quad (3.80)$$

$$\begin{aligned} K_4(x, t) &= \int_a^b K(x, y)K_3(y, t)dy = \frac{(e^2 - 1)^2}{4} \int_0^1 e^{x+y}e^{y+t}dy \\ &= \frac{e^{x+t}}{8}(e^2 - 1)^3. \end{aligned} \quad (3.81)$$

(3.67) formülünden  $n = 1$ ,  $n = 2$  ve  $n = 4$  için

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_0^1 \int_0^1 K_1^2(x, t)dt dx = \int_0^1 \int_0^1 e^{2(x+t)} dt dx = \int_0^1 \frac{e^{2x+2} - e^{2x}}{2} dx \\ &= \frac{e^4}{4} - \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}, \end{aligned} \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned} A_4 &= \int_0^1 \int_0^1 K_2^2(x, t)dt dx = \frac{(e^2 - 1)^2}{4} \int_0^1 \int_0^1 e^{2(x+t)} dt dx \\ &= \frac{(e^2 - 1)^2}{4} \left( \frac{e^4}{4} - \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4} \right), \end{aligned} \quad (3.83)$$

$$\begin{aligned}
A_8 &= \int_0^1 \int_0^1 K_4^2(x, t) dt dx = \int_0^1 \int_0^1 \left( \frac{e^{x+t}}{8} (e^2 - 1)^3 \right)^2 dt dx \\
&= \frac{(e^2 - 1)^6}{64} \left( \frac{e^4}{4} - \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4} \right). \tag{3.84}
\end{aligned}$$

(3.61) formülünden

$$|\lambda_1| \approx \frac{2}{(e^2 - 1)}. \tag{3.85}$$

olur.  $B_{2n} = A_{2n}^2 - A_{4n}$  formülünden

$$B_2 = A_2^2 - A_4 = \left( \frac{e^4}{4} - \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4} \right) \left( 1 - \frac{(e^2 - 1)^2}{4} \right), \tag{3.86}$$

$$B_4 = A_4^2 - A_8 = \left( \frac{e^4}{4} - \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4} \right) \left( 1 - \frac{(e^2 - 1)^2}{4} \right) \frac{(e^2 - 1)^2}{4} \tag{3.87}$$

olur. (3.62) formülünden  $\lambda_2$  değeri

$$|\lambda_2| \approx \sqrt{\frac{B_2}{B_4}} = \frac{4}{(e^2 - 1)^2}. \tag{3.88}$$

Çizelge 3.3. Birinci ve ikinci en küçük özdeğerler.

| İzler Yöntemi       |                                           |                                             |
|---------------------|-------------------------------------------|---------------------------------------------|
| $K(x, t)$ Çekirdeği | $ \lambda_1 $                             | $ \lambda_2 $                               |
| $K(x, t) = x^2 t^2$ | $ \lambda_1  \approx 5$                   | $ \lambda_2  \approx 0$                     |
| $K(x, t) = e^{x+t}$ | $ \lambda_1  \approx \frac{2}{(e^2 - 1)}$ | $ \lambda_2  \approx \frac{4}{(e^2 - 1)^2}$ |

### 3.3. RİTZ YÖNTEMİ

$K(x, t)$  simetrik çekirdek olmak üzere

$$h(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)h(t)dt \quad (3.89)$$

Fredholm integral denklemini ele alalım.  $\{v_n(x)\}$ , ilk  $n$  tane terimi  $[a, b]$  aralığında lineer bağımsız fonksiyonlar dizisi olsun  $(\{v_n(x)\} \in L_2(a, b))$ .

$$h_n(x) = c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x) + \dots + c_n v_n, \quad (3.90)$$

$$h_n(x) = \sum_{i=1}^n c_i v_i(x) \quad (3.91)$$

şeklinde yazılabilir. (3.91) ifadesindeki  $c_i$  katsayıları  $\|h_n\| = 1$  koşulunu sağlayacak biçimde seçilir. 2. dereceden formun sabit değerleri aşağıdaki ifadede bulunur:

$$(Kh_n, h_n) = \left( K \sum_{i=1}^n c_i v_i(x), \sum_{i=1}^n c_i v_i(x) \right) = \sum_{i,k}^n K_{ik} c_i c_k. \quad (3.92)$$

Buradan

$$\left\| \sum_{i=1}^n (c_i, v_i) \right\|^2 = \sum_{i,k}^n d_{ik} c_i c_k = 1. \quad (3.93)$$

(3.92) ifadesinde

$$K_{ik} = (Kv_i, v_k) = (v_i, Kv_k), \quad d_{ik} = (v_i, v_k) = (v_k, v_i) \quad (3.94)$$

eşitlikleri verilir. (3.92) ifadesine Lagrange çarpanları yöntemini kullanılırsa

$$\Phi = \sum_{i,k=1}^n (K_{ik} c_i c_k - \mu d_{ik} c_i c_k) \quad (3.95)$$

elde edilir.  $\mu$  bir Lagrange çarpanı,  $c_i$  katsayılarının değerlerini bulmak için  $\Phi$ 'nin  $c_i$ 'ye göre kısmi türevi alınır

$$\sum_{k=1}^n \{K_{ik} - \mu d_{ik}\} c_k = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.96)$$



olur. (3.96) ifadesi  $c_k$  katsayıları türünden yazılan homojen lineer denklem sistemi olur.

(3.96) lineer denklem sistemi sıfırdan farklı bir çözüme sahip ise

$$\begin{vmatrix} K_{11} - \mu d_{11} & K_{12} - \mu d_{12} & \cdots & K_{1n} - \mu d_{1n} \\ K_{21} - \mu d_{21} & K_{22} - \mu d_{22} & \cdots & K_{2n} - \mu d_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{n1} - \mu d_{n1} & K_{n2} - \mu d_{n2} & \cdots & K_{nn} - \mu d_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.97)$$

şeklinde. (3.97) ifadesinin kökleri  $K(x, t)$  çekirdeğinin özdeğerleri yaklaşık olarak bulunur. (3.91) denklemini sağlayan en büyük kök için özdeğerlerinin en büyüğünü daha küçük elde edilir. (3.97) ifadesinden  $\mu$  değerlerini bulup (3.96) da yerine yazarak  $c_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) katsayıları elde edilir. Bulunan  $c_i$  katsayılarını (3.91) de yazarak özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyon yaklaşık olarak elde edilir. Ritz yönteminde Legendre ya da Chebyshev polinom sistemlerini kullanarak çözüme ulaşılır [18], [19].

Örnek 3.5:

$$K(x, t) = xt^2, a = 0 \text{ ve } b = 1 \quad (3.98)$$

Çekirdeği için en büyük karakteristik sayısını Ritz yöntemiyle bulalım.

$v_n(x)$  fonksiyonlarının oluşturduğu koordinat sistemi için Legendre polinom sistemi

$$v_n(x) = P_{n-1}(2x - 1) \quad (3.99)$$

olur. (3.91) formülündeki ilk iki terimi

$$h_2(x) = c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x) \quad (3.100)$$

alınsın. Legendre polinom sisteminin

$$v_1(x) = P_0(2x - 1) = 1, v_2(x) = P_1(2x - 1) = 2x - 1 \quad (3.101)$$

olduğundan

$$(v_1, v_1) = \int_0^1 dx = 1, \quad (v_2, v_1) = (v_1, v_2) = \int_0^1 (2x - 1) dx = 0, \quad (3.102)$$

$$(v_2, v_2) = \int_0^1 (2x - 1)^2 dx = \frac{1}{3} \quad (3.103)$$

sonuçlarına ulaşılır. Böylece

$$(Kv_1, v_1) = \int_0^1 \left( \int_0^1 K(x, t) v_1(t) dt \right) v_1(x) dx = \int_0^1 \left( \int_0^1 xt^2 dt \right) dx = \frac{1}{6}, \quad (3.104)$$

$$(Kv_1, v_2) = \int_0^1 \left( \int_0^1 K(x, t) v_1(t) dt \right) v_2(x) dx = \frac{1}{18}, \quad (3.105)$$

$$(Kv_2, v_2) = \int_0^1 \left( \int_0^1 K(x, t) v_2(t) dt \right) v_2(x) dx = \frac{1}{12} \quad (3.106)$$

elde edilir. (3.97) sisteminden  $\mu$  değerleri

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{6} - \mu & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{12} - \mu \end{vmatrix} = 0, \mu_1 = \frac{1}{18}, \mu_2 = \frac{7}{36} \quad (3.107)$$

olur. Özdeğerlerinin en büyüğü  $\mu_2 = \frac{7}{36}$  için en küçük özdeğeri

$$\lambda = \frac{1}{\mu_2} = \frac{36}{7} \quad (3.108)$$

olur.

Örnek 3.6:

$$K(x, t) = x + t, a = 0 \text{ ve } b = 1 \quad (3.109)$$

Çekirdeği için en büyük karakteristik sayısını Ritz yöntemiyle bulalım.

$v_n(x)$  fonksiyonların oluşturduğu koordinat sistemi için Chebyshev polinom sistemi

$$v_n(x) = T_{n-1}(x) \quad (3.110)$$

alınsın. (3.91) formülündeki ilk iki terimi alınırsa

$$h_2(x) = c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x). \quad (3.111)$$

Chebyshev polinom sisteminde

$$v_1(x) = T_0(x) = 1, v_2(x) = T_1(x) = x \quad (3.112)$$

olduğundan

$$(v_1, v_1) = \int_0^1 dx = 1, \quad (v_2, v_1) = (v_1, v_2) = \int_0^1 x dx = 1, \quad (3.113)$$

$$(v_2, v_2) = \int_0^1 (x)^2 dx = \frac{1}{3} \quad (3.114)$$

sonuçlarına ulaşılır. Böylece

$$(Kv_1, v_1) = \int_0^1 \left( \int_0^1 K(x, t) v_1(t) dt \right) v_1(x) dx = \int_0^1 \left( \int_0^1 (x + t) dt \right) dx = 1, \quad (3.115)$$

$$(Kv_1, v_2) = \int_0^1 \left( \int_0^1 K(x, t) v_1(t) dt \right) v_2(x) dx = \frac{7}{12}, \quad (3.116)$$

$$(Kv_2, v_2) = \int_0^1 \left( \int_0^1 K(x, t) v_2(t) dt \right) v_2(x) dx = \frac{1}{3} \quad (3.117)$$

elde edilir. (3.97) sisteminden  $\mu$  değerleri

$$\begin{vmatrix} 1 - \mu & \frac{17}{72} - \mu \\ \frac{17}{72} - \mu & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\mu \end{vmatrix} = 0, \mu_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}, \mu_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (3.118)$$

olur. Özdeğerlerinin en büyüğü  $\mu_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}$  için en küçük özdeğer

$$\lambda = \frac{1}{\mu_1} = \frac{6}{3 + 2\sqrt{3}} \quad (3.119)$$

olur.

## 4. FREDHOLM İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ İÇİN YAKLAŞIK YÖNTEMLER

### 4.1. ARDIŞIK YAKLAŞIMLAR YÖNTEMİ

(2.2) Fredholm integral denklemini ele alalım.  $h(x)$  çözümüne sıfırıncı mertebeden bir yaklaşımı

$$h_0(x) = f(x) \quad (4.1)$$

olarak seçilebilir. Ayrıca,  $h_n(x)$  ve  $h_{n-1}(x)$  Picard iterasyon yöntemi yardımıyla

$$h_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) h_{n-1}(t) dt \quad (4.2)$$

elde edilir. Ardışık çekirdek  $K_n(x, t)$  ( $n = 1, 2, 3 \dots$ ) tanımından

$$K_1(x, t) = K(x, t), \quad (4.3)$$

$$K_n(x, t) = \int_a^b K(x, z) K_{n-1}(z, t) dz. \quad (4.4)$$

(4.2)' de  $n = 1$  yazıldığında

$$h_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) h_0(t) dt \quad (4.5)$$

ifadesi olur. Bu formda  $h_0(t) = f(t)$  eşitliği yerine yazılırsa

$$h_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) f(t) dt \quad (4.6)$$

olur. Aynı şekilde (4.2)' de  $n = 2$  yazıldığında

$$h_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) h_1(t) dt, \quad (4.7)$$

$$h_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, z) h_1(z) dz \quad (4.8)$$

olur. (4.6)'daki  $x$  yerine  $z$  yazılırsa

$$h_1(z) = f(z) + \lambda \int_a^b K(z, t) f(t) dt \quad (4.9)$$

elde edilir. (4.8) ifadesinde  $h_1(z)$  eşitliği yazılsın

$$h_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, z) \left( f(z) + \lambda \int_a^b K(z, t) f(t) dt \right) dz \quad (4.10)$$

düzenlenirse

$$h_2(x) = f(x) + \sum_{m=1}^2 \lambda^m \int_a^b K_m(x, t) f(t) dt, \quad (4.11)$$

$$h_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, z) f(z) dz + \lambda^2 \int_a^b K(x, t) \left[ \int_a^b K(z, t) f(t) dt \right] dz, \quad (4.12)$$

$$h_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) f(t) dt + \lambda^2 \int_a^b f(t) \left[ \int_a^b K(x, z) K(z, t) dz \right] dt, \quad (4.13)$$

$$h_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K_1(x, t) f(t) dt + \lambda^2 \int_a^b K_2(x, t) f(t) dt, \quad (4.14)$$

olur. Benzer şekilde tümevarım yöntemiyle

$$h_n(x) = f(x) + \sum_{m=1}^n \lambda^m \int_a^b K_m(x, t) f(t) dt \quad (4.15)$$

kolayca elde edilir. (4.15) ifadesini  $n \rightarrow \infty$  limit alındığında Neumann serisi

$$h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = f(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int_a^b K_m(x, t) f(t) dt \quad (4.16)$$

olur. Çözücü çekirdeği  $R(x, t; \lambda)$  ardışık çekirdek  $K_n(x, t)$  cinsinden belirlenir. Bu amaçla Neumann serisinde (4.16) ifadesini integral ve toplam sırası değiştirilsin:

$$h(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x, t) \right] f(t) dt. \quad (4.17)$$

Denklem

$$h(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, t; \lambda) f(t) dt \quad (4.18)$$

ile (4.17) ifadesinden

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x, t) \quad (4.19)$$

elde edilir.

#### 4.1.1. Ardışık Yaklaşımlar Yöntemi Yakınsama Koşulu

(4.15) ifadesini ele alalım ve Schwarz eşitsizliğini bu serinin genel terimine uygulırsa

$$\left| \int_a^b K_m(x, t) f(t) dt \right|^2 \leq \left( \int_a^b |K_m(x, t)|^2 dt \right) \int_a^b |f(t)|^2 dt. \quad (4.20)$$

(4.18) ifadesinde

$$D = |f(t)| = \left[ \int_a^b |f(t)|^2 dt \right]^{1/2} \quad (4.21)$$

olur. Ayrıca  $\int_a^b |K_m(x, t)|^2 dt$  integralinin üst sınırını  $C_m^2$  belirtsin

$$\int_a^b |K_m(x, t)|^2 dt \leq C_m^2. \quad (4.22)$$

(4.21) ve (4.22) kullanılarak (4.20) ifadesini tekrardan düzenlenirse

$$\left| \int_a^b K_m(x, t) f(t) dt \right|^2 \leq C_m^2 D^2. \quad (4.23)$$

Buradan

$$K_m(x, t) = \int_a^b K_{m-1}(x, z) K(z, t) dz \quad (4.24)$$

denklemin Schwarzschild eşitsizliği uygulanırsa

$$|K_m(x, t)|^2 \leq \left( \int_a^b |K_{m-1}(x, z)|^2 dz \right) \left( \int_a^b |K(z, t)|^2 dz \right) \quad (4.25)$$

elde edilir. Daha sonra  $t$  'ye göre integral alınır aşağıdaki ifadeyi verir:

$$\int_a^b |K_m(x, t)|^2 dt \leq B^2 C_{m-1}^2, \quad (4.26)$$

$$B^2 = \int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 dx dt. \quad (4.27)$$

(4.26) eşitsizliğinden

$$C_m^2 \leq B^{2m-2} C_1^2 \quad (4.28)$$

ifadesine ulaşılır. (4.23) ve (4.28) kullanarak (4.15) kısmı toplamın genel teriminin  $DC_1 |\lambda|^m B^{m-1}$  miktarından daha az bir büyüklüğe sahip olduğunu gösteren

$$\left| \int_a^b K_m(x, t) f(t) dt \right|^2 \leq C_1^2 D^2 B^{2m-2} \quad (4.29)$$

elde edilir. Böylece sonsuz seri (4.16) ortak oran  $|\lambda|B$  ile geometrik seriye göre daha hızlı yakınsar. Bunun sonucu olarak, eğer

$$|\lambda|B < 1, \quad (4.30)$$

$$|\lambda| < \frac{1}{\sqrt{\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 dx dt}} \quad (4.31)$$

koşulu karşılanırsa o zaman (4.16) serisi yakınsak olur [1].

Örnek 4.1:

$$h(x) = 1 + \int_0^1 xt^2 h(t) dt \quad (4.32)$$

Fredholm integral denklemini Ardışık yaklaşımlar yöntemiyle bulalım.

$K(x, t) = xt^2$ ,  $Z_0(x) = 1$  alınır

$$Z_1(x) = \int_0^1 xt^2 Z_0(t) dt = \frac{x}{3}, \quad (4.33)$$

$$Z_2(x) = \int_0^1 xt^2 Z_1(t) dt = \frac{x}{3 \cdot 4}, \quad (4.34)$$

$$Z_3(x) = \int_0^1 xt^2 Z_2(t) dt = \frac{x}{3 \cdot 4 \cdot 4}, \quad (4.35)$$

...

$$Z_n(x) = \int_0^1 xt^2 Z_{n-1}(t) dt = \frac{x}{3 \cdot 4^{n-1}} \quad (4.36)$$

elde edilir. Bulunan  $Z_n(x)$  fonksiyonu  $h(x)$ ' de yerine yazılırsa

$$h(x) = 1 + \frac{4x}{3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{4^k} = 1 + \frac{4x}{9}. \quad (4.37)$$

Örnek 4.2:

$$h(x) = \frac{5}{6}x + \frac{1}{2} \int_0^1 xth(t)dt \quad (4.38)$$

Fredholm integral denklemini Ardışık yaklaşım yöntemiyle bulalım.

$h_0(x) = 0$  alınırsa

$$h_1(x) = \frac{5x}{6}, \quad (4.39)$$

$$h_2(x) = \frac{5x}{6} + \frac{1}{2} \int_0^1 xth_1(t)dt = \frac{35x}{36}, \quad (4.40)$$

$$h_3(x) = \frac{5x}{6} + \frac{35}{72} \int_0^1 xt^2 dt = \frac{215x}{216}, \quad (4.41)$$

$$h_n(x) = \left(1 - \frac{5}{6^n}\right)x \quad (4.42)$$



elde edilir.  $h(x)$  integral denkleminin çözümü

$$h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{6^n}\right)x = x. \quad (4.43)$$

Örnek 4.3:

$$h(x) = \sin x + \int_0^{\pi/2} \sin x \cos t h(t) dt \quad (4.44)$$

Fredholm integral denklemini ardışık yaklaşımlar yöntemiyle bulalım.

$h_0(x) = 1$  alınırsa

$$h_1(x) = \sin x + \sin x \int_0^{\pi/2} \cos t dt = 2\sin x, \quad (4.45)$$

$$h_2(x) = 2\sin x, \quad (4.46)$$

$$h_3(x) = h_4(x) = h_5(x) = \dots = h_n(x) = 2\sin x \quad (4.47)$$

elde edilir.  $h(x)$  integral denkleminin çözümü

$$h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = 2\sin x. \quad (4.48)$$

Örnek 4.4:

$$h(x) = 1 + \int_{-1}^1 (xt + x^2) h(t) dt \quad (4.49)$$

Fredholm integral denklemini ardışık yaklaşımlar yöntemiyle çözelim.

$K(x, t) = xt + x^2$ ,  $Z_0(x) = 1$  alınırsa

$$Z_1(x) = \int_0^1 (xt + x^2) Z_0(t) dt = 2x^2, \quad (4.50)$$

$$Z_2(x) = \int_0^1 (xt + x^2) Z_1(t) dt = \frac{4x^2}{3}, \quad (4.51)$$

$$Z_3(x) = \int_0^1 (xt + x^2)Z_2(t)dt = \frac{8x^2}{9}, \quad (4.52)$$

$$\dots$$

$$Z_n(x) = \int_0^1 (xt + x^2)Z_{n-1}(t)dt = \frac{2^n x^2}{3^{n-1}} \quad (4.53)$$

elde edilir. Bulunan  $Z_n(x)$ 'i  $h(x)$ 'de yerine yazılırsa

$$h(x) = 1 + 3x^2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k = 1 + 6x^2. \quad (4.54)$$

Örnek 4.5:

$$h(x) = 1 + \frac{4x}{3} + \int_{-1}^1 (xt - x)h(t)dt \quad (4.55)$$

Fredholm integral denklemini ardışık yaklaşımlar yöntemiyle bulalım.

$h_0(x) = 1$  alınırsa

$$h_1(x) = 1 + \frac{4x}{3} + \int_{-1}^1 (xt - x)dt = 1 - \frac{2x}{3}, \quad (4.56)$$

$$h_2(x) = 1 + \frac{4x}{3} - \frac{2}{3} \int_{-1}^1 (xt - x)t dt = 1 - \frac{10x}{9}, \quad (4.57)$$

$$h_3(x) = 1 + \frac{4x}{3} - \frac{10}{9} \int_{-1}^1 (xt - x)t dt = 1 - \frac{38x}{27}, \quad (4.58)$$

$$\dots$$

$$h_n(x) = 1 - 2x \left( \frac{3^n - 2^n}{3^n} \right). \quad (4.59)$$

elde edilir. Buradan

$$h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = 1 - 2x. \quad (4.60)$$

## 4.2. BUBNOV-GALERKİN YÖNTEMİ

(2.2) Fredholm integral denklemini ele alalım.  $L_2(a, b)$ 'de tanımlanmış  $\{h_n(x)\}$  fonksiyonlar sistemini seçelim ve  $n$  için  $h_0(x), h_1(x), h_2(x), \dots, h_n(x)$  fonksiyonları lineer bağımsızdır. Bu sistemin yaklaşık çözümünü

$$h_n(x) = \sum_{i=1}^n A_i v_i(x) \quad (4.61)$$

şeklinde ele alalım.  $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$  katsayıları aşağıdaki lineer denklem sisteminden

$$(h_n(x), v_i(x)) = (f(x), v_i(x)) + \lambda \left( \int_a^b K(x, t) h_n(t) dt, v_i(x) \right) \quad (4.62)$$

bulunur. (4.62) ifadesinde  $n \neq i$  için

$$\int_a^b h_n(x) v_i(x) dx = \int_a^b f(x) v_i(x) dx + \lambda \int_a^b \int_a^b K(x, t) h_n(t) v_i(x) dx dt \quad (4.63)$$

olur. Sistem lineer bağımsız ise  $A_i$  katsayıları tek bir şekilde bulunur.  $L_2(a, b)$  uzayında  $h(x)$  denkleminin çözümü

$$h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) \quad (4.64)$$

olur. Bubnov-Galerkin yöntemi için Legendre ya da Chebyshev polinom sistemleri çözüme ulaşmamızı kolaylaştırır [1]-[6], [21].

Örnek 4.6:

$$h(x) = 1 + \int_{-1}^1 (xt + x^2) h(t) dt \quad (4.65)$$

Fredholm integral denklemini Bubnov-Galerkin yöntemiyle çözümünü bulalım.

$P_n(x)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) Legendre polinomlar sistemini ele alalım.  $h_n(x)$  fonksiyonu

$$h_3(x) = A_1 v_1(x) + A_2 v_2(x) + A_3 v_3(x) \quad (4.66)$$

formunda alınır.  $v_1(x), v_2(x), v_3(x)$  fonksiyonları Legendre polinomundan dolayı sırasıyla 1,  $x, \frac{3x^2-1}{2}$  terimlerine karşılık gelir. Buradan

$$h_3(x) = A_1 + A_2x + A_3 \frac{3x^2 - 1}{2}. \quad (4.67)$$

$h(x)$  yerine  $h_3(x)$  yazılırsa

$$\begin{aligned} A_1 + A_2x + A_3 \frac{3x^2 - 1}{2} &= 1 + \int_{-1}^1 (xt + x^2) \left( A_1 + A_2t + A_3 \frac{3t^2 - 1}{2} \right) dt \\ &= 1 + A_1 \int_{-1}^1 (xt + x^2) dt + A_2 \int_{-1}^1 (xt + x^2)t dt \\ &\quad + A_3 \int_{-1}^1 (xt + x^2) \left( \frac{3t^2 - 1}{2} \right) dt \end{aligned} \quad (4.68)$$

bulunur. Düzenlenirse

$$A_1 + A_2x + A_3 \frac{3x^2 - 1}{2} = 1 + 2A_1x^2 + \frac{2}{3}A_2x. \quad (4.69)$$

Eşitliğin her iki yanını -1 den 1'e integrali alınırsa

$$\int_{-1}^1 \left( A_1 + A_2x + A_3 \frac{3x^2 - 1}{2} \right) dx = \int_{-1}^1 \left( 1 + 2A_1x^2 + \frac{2}{3}A_2x \right) dx \quad (4.70)$$

olur. İşlemler yapıldığında  $A_1 = 3$  bulunur. (4.69) eşitliğinde her iki yanını  $x$  ile çarpılır -1 den 1'e integrali alınırsa

$$\int_{-1}^1 \left( A_1x + A_2x^2 + A_3 \frac{3x^3 - x}{2} \right) dx = \int_{-1}^1 (x + 2A_1x^3 + 2/3A_2x^2) dx, \quad (4.71)$$

$A_2 = 0$  olur. (4.69) eşitliğinde her iki yanını  $\frac{3x^2 - 1}{2}$  ile çarpılıp -1 den 1'e integral alınırsa

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 \left( A_1 \left( \frac{3x^2 - 1}{2} \right) + A_2x \left( \frac{3x^2 - 1}{2} \right) + A_3 \left( \frac{3x^2 - 1}{2} \right)^2 \right) dx = \\ &\int_{-1}^1 \left( \left( \frac{3x^2 - 1}{2} \right) + 2A_1x^2 \left( \frac{3x^2 - 1}{2} \right) + 2/3A_2x \left( \frac{3x^2 - 1}{2} \right) \right) dx \end{aligned} \quad (4.72)$$

olur. İşlemler yapıldığında  $A_3 = 4$  elde edilir. Bulunan  $A_1, A_2, A_3$  katsayılarını  $h_3(x)$  ifadesinde yazılırsa

$$h(x) = h_3(x) = 1 + 6x^2. \quad (4.73)$$

$T_n(x)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) Chebyshev polinomlar sistemi alınsın.  $h_n(x)$  fonksiyonu (4.66) formunda alınsın.  $v_1(x), v_2(x), v_3(x)$  fonksiyonlarını Chebyshev polinomundan dolayı sırasıyla  $1, x, 2x^2 - 1$  terimlerine karşılık gelir. Buradan

$$h_3(x) = A_1 \cdot 1 + A_2 x + A_3(2x^2 - 1). \quad (4.74)$$

$h(x)$  yerine  $h_3(x)$  yazılırsa

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 x + A_3(2x^2 - 1) &= 1 + \int_{-1}^1 (xt + x^2)(A_1 + A_2 t + A_3(2x^2 - 1)) dt \\ &= 1 + A_1 \int_{-1}^1 (xt + x^2) dt + A_2 \int_{-1}^1 (xt + x^2) t dt \\ &\quad + A_3 \int_{-1}^1 (xt + x^2)(2x^2 - 1) dt \end{aligned} \quad (4.75)$$

bulunur. Yukarıdaki ifade düzenlenirse

$$A_1 + A_2 x + A_3(2x^2 - 1) = 1 + 2A_1 x^2 + \frac{2}{3} A_2 x - \frac{2}{3} x^2 A_3 \quad (4.76)$$

bulunur. Eşitliğin her iki yanını -1 den 1'e integrali alınırsa

$$\int_{-1}^1 (A_1 + A_2 x + A_3(2x^2 - 1)) dx = \int_{-1}^1 \left( 1 + 2A_1 x^2 + \frac{2}{3} A_2 x - \frac{2}{3} A_3 x^2 \right) dx,$$

$A_1 = 4$  olur. (4.76) eşitliğinde her iki yanını  $x$  ile çarpılır -1 den 1'e integrali alınırsa

$$\int_{-1}^1 (A_1 x + A_2 x^2 + A_3(2x^2 - 1)x) dx = \int_{-1}^1 \left( x + 2A_1 x^3 + \frac{2}{3} A_2 x^2 - \frac{2}{3} A_3 x^3 \right) dx,$$

$A_2 = 0$  olur. (4.76) eşitliğinde her iki yanını  $(2x^2 - 1)$  ile çarpılıp -1 den 1'e integral alınırsa

$$\int_{-1}^1 (A_1(2x^2 - 1) + A_2x(2x^2 - 1) + A_3(2x^2 - 1)^2)dx =$$

$$\int_{-1}^1 \left( (2x^2 - 1) + 2A_1x^2(2x^2 - 1) + \frac{2}{3}A_2x(2x^2 - 1) - \frac{2}{3}A_3x^2(2x^2 - 1) \right) dx.$$

İşlemler yapıldığında  $A_3 = 3$  elde edilir.  $h_3(x)$  yerine bulunan katsayılar yazılırsa

$$h(x) = h_3(x) = 1 + 6x^2. \quad (4.77)$$

Örnek 4.7:

$$h(x) = 1 + \frac{4x}{3} + \int_{-1}^1 (xt - x)h(t)dt \quad (4.78)$$

Fredholm integral denklemini Bubnov-Galerkin yöntemiyle çözümünü bulalım.

$P_n(x)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) Legendre polinom sistemini ele alalım.  $h_n(x)$  fonksiyonunu (4.66) formunda alınır.  $v_1(x)$ ,  $v_2(x)$ ,  $v_3(x)$  fonksiyonları Legendre polinomundan dolayı sırasıyla 1,  $x$ ,  $\frac{(3x^2-1)}{2}$  terimlerine karşılık gelir.  $h_3(x)$  ifadesinin eşiti (4.67) de verildi.  $h(x)$  yerine  $h_3(x)$  yazılırsa

$$\begin{aligned} & A_1 + xA_2 + A_3 \frac{(3x^2 - 1)}{2} \\ &= 1 + \frac{4x}{3} + \int_{-1}^1 (xt - x) \left( A_1 + A_2t + A_3 \frac{(3t^2 - 1)}{2} \right) dt \end{aligned} \quad (4.79)$$

bulunur. Yukarıdaki ifade düzenlenirse

$$A_1 + A_2x + A_3 \frac{(3x^2 - 1)}{2} = 1 + x \left[ \frac{4}{3} - 2A_1 + \frac{2A_2}{3} + \frac{1}{2}A_3 \right] \quad (4.80)$$

bulunur. (4.80) denklemini -1'den 1'e integralini alınırsa

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \left( A_1 \cdot 1 + A_2 \cdot x + A_3 \cdot \frac{(3x^2 - 1)}{2} \right) dx &= \int_{-1}^1 \left[ 1 + x \left( \frac{4}{3} - 2A_1 + \frac{2A_2}{3} + \frac{1}{2}A_3 \right) \right] dx, \\ 2A_1 &= 2. \end{aligned}$$

(4.80) ifadesini sırasıyla  $x$ ,  $\frac{3x^2-1}{2}$  terimleriyle çarpıp  $x$ 'e göre -1'den 1'e integrali alınırsa

$$\frac{2}{3}A_2 = \frac{8}{9} - \frac{4}{3}A_1 + \frac{1}{6}A_3, \frac{2}{5}A_3 = 0. \quad (4.81)$$

İşlemler yapıldığında  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = -2$  ve  $A_3 = 0$  katsayıları bulunur.  $h_3(x)$  ifadesinde bulunan katsayılar yerine yazılırsa

$$h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_3(x) = 1 - 2x. \quad (4.82)$$

$T_n(x)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) Chebyshev polinom sistemini ele alalım.  $h_n(x)$  fonksiyonunu (4.66) şeklinde alınsın.  $v_1(x)$ ,  $v_2(x)$ ,  $v_3(x)$  fonksiyonları Chebyshev polinomundan dolayı sırasıyla 1,  $x$ ,  $2x^2 - 1$  terimlerine karşılık gelir.  $h_3(x)$  ifadesinin eşiti (4.74) verildi.  $h(x)$  yerine  $h_3(x)$  yazılırsa

$$A_1 + A_2x + A_3(2x^2 - 1) = 1 + \frac{4x}{3} + \int_{-1}^1 (xt - x)(A_1 + A_2t + A_3(2t^2 - 1))dt \quad (4.83)$$

bulunur. Yukarıdaki ifadede düzenlenirse

$$A_1 + A_2x + A_3(2x^2 - 1) = 1 + x \left[ \frac{4}{3} - 2A_1 + \frac{2A_2}{3} + \frac{2A_3}{3} \right] \quad (4.84)$$

olur. (4.84) denklemini -1'den 1'e integralini alınsın

$$\int_{-1}^1 (A_1 \cdot 1 + A_2 \cdot x + A_3 \cdot (2x^2 - 1)) dx = \int_{-1}^1 \left[ 1 + x \left( \frac{4}{3} - \frac{4A_1}{3} - \frac{8A_3}{15} \right) \right] dx,$$

$$3A_1 - A_3 = 3.$$

(4.84) ifadesini sırasıyla  $x$ ,  $2x^2 - 1$  terimleriyle çarpıp  $x$ 'e göre -1'den 1'e integrali alınırsa

$$-\frac{2}{3}A_1 + \frac{14}{15}A_3 = -\frac{2}{3}, \frac{2}{9}A_2 = \frac{8}{9} - \frac{4}{3}A_1 + \frac{4}{9}A_3 \quad (4.85)$$

bulunur. Daha sonra  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = -2$  ve  $A_3 = 0$  bulunur.  $h_3(x)$  ifadesinde bulunan katsayılar yerine yazılırsa

$$h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_3(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 2x) = 1 - 2x. \quad (4.86)$$

Örnek 4.8

$$h(x) = 1 + \int_0^1 xt^2 h(t) dt \quad (4.87)$$

Fredholm integral denklemini Bubnov-Galerkin yöntemiyle çözümünü bulalım.

$P_n(x)$  ( $n = 0,1,2, \dots$ ) Legendre polinom sistemini ele alalım.  $h_n(x)$  fonksiyonu (4.66) formunda alınır.  $v_1(x)$ ,  $v_2(x)$ ,  $v_3(x)$  fonksiyonları Legendre polinomundan dolayı sırasıyla 1,  $x$ ,  $\frac{(3x^2-1)}{2}$  terimlerine karşılık gelir.  $h_3(x)$  ifadesinin eşiti (4.67) de verildi.

$h(x)$  yerine  $h_3(x)$  yazılırsa

$$A_1 + A_2x + A_3 \frac{(3x^2 - 1)}{2} = 1 + \int_{-1}^1 xt^2 \left( A_1 + A_2t + A_3 \frac{(3t^2 - 1)}{2} \right) dt. \quad (4.88)$$

Yukarıdaki ifade düzenlenirse

$$A_1 + A_2x + A_3 \frac{(3x^2 - 1)}{2} = 1 + \frac{x}{3} A_1 + \frac{x}{4} A_2 + A_3x \quad (4.89)$$

olur. (4.89) denklemini  $x$  'e göre -1'den 1'e integralini alınır

$$\int_{-1}^1 \left( A_1 \cdot 1 + A_2 \cdot x + A_3 \cdot \frac{(3x^2 - 1)}{2} \right) dx = \int_{-1}^1 \left( 1 + \frac{x}{3} A_1 + \frac{x}{4} A_2 + x A_3 \right) dx,$$

$$2A_1 = 2.$$

(4.89) ifadesini sırasıyla  $x, \frac{(3x^2-1)}{2}$  terimleriyle çarpıp  $x$ 'e göre -1'den 1'e integralini alınır

$$\frac{2}{3} A_2 = \frac{2}{9} A_1 + \frac{2}{12} A_2 + \frac{2}{3} A_3, \frac{2}{5} A_3 = 0 \quad (4.90)$$

bulunur. Daha sonra  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = \frac{4}{9}$  ve  $A_3 = 0$  bulunur.  $h_3(x)$  ifadesinde bulunan katsayıları yerine yazılırsa

$$h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_3(x) = 1 + \frac{4}{9} x. \quad (4.91)$$

$T_n(x)$  ( $n = 0,1,2, \dots$ ) Chebyshev polinom sistemini ele alalım.  $h_n(x)$  fonksiyonu (4.66) şeklinde alınsın.  $v_1(x)$ ,  $v_2(x)$ ,  $v_3(x)$  fonksiyonları Chebyshev polinomundan dolayı sırasıyla 1,  $x$ ,  $2x^2 - 1$  terimlerine karşılık gelir.  $h_3(x)$  ifadesinin eşiti (4.74) verildi.  $h(x)$  yerine  $h_3(x)$  yazılırsa



$$A_1 + A_2x + A_3(2x^2 - 1) = 1 + \int_0^1 xt^2(A_1 + A_2t + A_3(2t^2 - 1))dt. \quad (4.92)$$

Yukarıdaki ifade düzenlenirse

$$A_1 + A_2x + A_3(2x^2 - 1) = 1 + \frac{x}{3}A_1 + \frac{x}{4}A_2 + \frac{x}{15}A_3 \quad (4.93)$$

olur. (4.93) denklemini  $x$  'e göre -1'den 1'e integralini alınırsa

$$\int_{-1}^1 (A_1 \cdot 1 + A_2 \cdot x + A_3 \cdot (2x^2 - 1))dx = \int_{-1}^1 \left(1 + \frac{x}{3}A_1 + \frac{x}{4}A_2 + \frac{x}{15}A_3\right)dx,$$

$$A_1 - \frac{1}{3}A_3 = 1.$$

(4.93) ifadesini sırasıyla  $x$ ,  $2x^2 - 1$  terimleriyle çarpıp  $x$ 'e göre -1'den 1'e integralini alınırsa

$$A_2 = \frac{1}{3}A_1 + \frac{1}{4}A_2 + \frac{1}{15}A_3, -A_1 + \frac{7}{5}A_3 = -1.$$

Daha sonra  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = \frac{4}{9}$  ve  $A_3 = 0$  bulunur.  $h_3(x)$  ifadesinde bulunan katsayılar yazılırsa

$$h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_3(x) = 1 + \frac{4}{9}x. \quad (4.94)$$

Örnek 4.9:

$$h(x) = \frac{5}{6}x + \frac{1}{2} \int_0^1 xth(t)dt \quad (4.95)$$

Fredholm integral denklemini Bubnov-Galerkin yöntemiyle çözümünü bulalım.

$P_n(x)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) Legendre polinom sistemini ele alalım.  $h_n(x)$  fonksiyonu (4.66) formunda alalım.  $v_1(x)$ ,  $v_2(x)$ ,  $v_3(x)$  fonksiyonları Legendre polinomundan dolayı sırasıyla 1,  $x$ ,  $\frac{(3x^2-1)}{2}$  terimlerine karşılık gelir.  $h_3(x)$  ifadesinin eşiti (4.67) de verildi.  $h(x)$  yerine  $h_3(x)$  yazılırsa

$$A_1 + A_2x + A_3 \frac{(3x^2 - 1)}{2} = \frac{5x}{6} + \int_{-1}^1 xt \left( A_1 + A_2t + A_3 \frac{(3t^2 - 1)}{2} \right) dt. \quad (4.96)$$

(4.96) ifadesi düzenlenirse

$$A_1 + A_2x + A_3 \frac{(3x^2 - 1)}{2} = \frac{5x}{6} + \frac{x}{4}A_1 + \frac{x}{6}A_2 + \frac{1}{16}A_3x. \quad (4.97)$$

(4.97) denklemini  $x$  'e göre -1'den 1'e integralini alınırsa

$$\int_{-1}^1 \left( A_1 \cdot 1 + A_2 \cdot x + A_3 \cdot \frac{(3x^2 - 1)}{2} \right) dx = \int_{-1}^1 \left( \frac{5x}{6} + \frac{x}{4}A_1 + \frac{x}{6}A_2 + \frac{x}{16}A_3 \right) dx,$$

$A_1 = 0$ . (4.97) ifadesini sırasıyla  $x, \frac{(3x^2-1)}{2}$  terimleriyle çarpıp  $x$ 'e göre -1'den 1'e integralini alınırsa

$$\frac{2}{3}A_2 = \frac{5}{9} + \frac{1}{6}A_1 + \frac{1}{9}A_2 + \frac{1}{24}A_3, \quad \frac{2}{5}A_3 = 0 \quad (4.98)$$

bulunur. Daha sonra  $A_1 = 0$ ,  $A_2 = 1$  ve  $A_3 = 0$  bulunur.  $h_3(x)$  ifadesinde bulunan katsayılar yerine yazılırsa

$$h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = x. \quad (4.99)$$

$T_n(x)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) Chebyshev polinom sistemini ele alalım.  $h_n(x)$  fonksiyonu (4.66) şeklinde alınsın.  $v_1(x)$ ,  $v_2(x)$ ,  $v_3(x)$  fonksiyonları Chebyshev polinomundan dolayı sırasıyla  $1, x, 2x^2 - 1$  terimlerine karşılık gelir.  $h_3(x)$  ifadesinin eşiti (4.74) verildi.  $h(x)$  yerine  $h_3(x)$  yazılırsa

$$A_1 \cdot 1 + A_2 \cdot x + A_3 \cdot (2x^2 - 1) = \frac{5}{6}x + \frac{1}{2} \int_0^1 xt(A_1 \cdot 1 + A_2 \cdot t + A_3 \cdot (2t^2 - 1))dt$$

olur. Yukarıdaki ifadesi düzenlenirse

$$A_1 + A_2x + A_3(2x^2 - 1) = \frac{5}{6}x + \left( \frac{1}{4}A_1 + \frac{1}{6}A_2 \right)x \quad (4.100)$$

bulunur. (4.100) denklemini  $x$  'e göre -1'den 1'e integrali alınırsa

$$\int_{-1}^1 (A_1 \cdot 1 + A_2 \cdot x + A_3 \cdot (2x^2 - 1)) dx = \int_{-1}^1 \left( \frac{5}{6}x + \left( \frac{1}{4}A_1 + \frac{1}{6}A_2 \right)x \right) dx,$$

$$3A_1 = A_3.$$

(4.100) ifadesini sırasıyla  $x$ ,  $2x^2 - 1$  terimleriyle çarpıp  $x$ 'e göre -1'den 1'e integrali alınırsa

$$A_2 = \frac{5}{6} + \frac{1}{4}A_1 + \frac{1}{6}A_2, -\frac{2}{3}A_1 + \frac{14}{15}A_3 = 0$$

bulunur. Daha sonra  $A_1 = 0$ ,  $A_2 = 1$  ve  $A_3 = 0$  bulunur.  $h_3(x)$  ifadesinde bulunan katsayılar yerine yazılırsa

$$h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_3(x) = x. \quad (4.101)$$

Örnek 4.10:

$$h(x) = \sin x + \int_0^{\pi/2} \sin x \cos t h(t) dt \quad (4.102)$$

Fredholm integral denklemini Bubnov-Galerkin yöntemiyle çözümünü bulalım.

$P_n(x)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) Legendre polinom sistemini ele alınırsa

$$P_0(\sin x) = 1, P_1(\sin x) = x, P_2(\sin x) = \frac{(3 \sin^2 x - 1)}{2}. \quad (4.103)$$

$h_n(x)$  fonksiyonunu (4.66) formunda alınır.  $v_1(x)$ ,  $v_2(x)$ ,  $v_3(x)$  fonksiyonları

Legendre polinomundan dolayı sırasıyla 1,  $\sin x$ ,  $\frac{(3 \sin^2 x - 1)}{2}$  terimlerine denk gelirse

$$h_3(x) = A_1 + A_2 \sin x + A_3 \frac{(3 \sin^2 x - 1)}{2}. \quad (4.104)$$

$h(x)$  yerine  $h_3(x)$  yazılırsa

$$\begin{aligned} & A_1 + A_2 \sin x + \frac{A_3(3 \sin^2 x - 1)}{2} \\ &= \sin x \left( 1 + \int_0^{\pi/2} \cos t \left( A_1 + A_2 \sin t + A_3 \frac{(3 \sin^2 t - 1)}{2} \right) dt \right). \end{aligned}$$

Yukarıda ifade düzenlenirse

$$A_1 + A_2 \sin x + \frac{A_3(3 \sin^2 x - 1)}{2} = \sin x \left( 1 + A_1 + \frac{1}{2}A_2 \right) \quad (4.105)$$

bulunur. (4.105) denklemini -1'den 1'e  $x$  'e göre integralini alınırsa

$$\int_{-1}^1 \left( A_1 + A_2 \sin x + \frac{A_3(3 \sin^2 x - 1)}{2} \right) dx = \int_{-1}^1 \left( \sin x \left( 1 + A_1 + \frac{1}{2} A_2 \right) \right) dx,$$

$$2A_1 + \frac{1}{2} A_3 = 0$$

olur. (4.105) ifadesini sırasıyla  $\sin x, \frac{(3 \sin^2 x - 1)}{2}$  terimleriyle çarpıp  $x$ 'e göre -1'den 1'e integrali alınırsa

$$A_2 = \left( 1 + A_1 + \frac{1}{2} A_2 \right), \frac{1}{2} A_1 - \frac{5}{4} A_3 = 0 \quad (4.106)$$

bulunur. Daha sonra  $A_1 = 0, A_2 = 2$  ve  $A_3 = 0$  bulunur.  $h_3(x)$  ifadesinde bulunan katsayılar yerine yazılırsa

$$h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_3(x) = 2 \sin x. \quad (4.107)$$

$T_n(x)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) Chebyshev polinom sistemi ele alınırsa

$$T_0(\sin x) = 1, T_1(\sin x) = x, T_2(\sin x) = 2 \sin^2 x - 1. \quad (4.108)$$

$h_n(x)$  fonksiyonu (4.66) formunda alınsın.  $v_1(x), v_2(x), v_3(x)$  fonksiyonları Chebyshev polinomundan dolayı sırasıyla 1,  $\sin x, 2 \sin^2 x - 1$  terimlerine denk gelirse

$$h_3(x) = A_1 + A_2 \sin x + A_3(2 \sin^2 x - 1). \quad (4.109)$$

$h(x)$  yerine  $h_3(x)$  yazılırsa

$$A_1 + A_2 \sin x + A_3(2 \sin^2 x - 1) = \sin x \left( 1 + \int_0^{\pi/2} \cos t (A_1 + A_2 \sin t + A_3(2 \sin^2 t - 1)) dt \right). \quad (4.110)$$

Yukarıdaki ifade düzenlenirse

$$A_1 + A_2 \sin x + A_3(2 \sin^2 x - 1) = \sin x \left( 1 + A_1 + \frac{1}{2} A_2 - \frac{1}{3} A_3 \right) \quad (4.111)$$

bulunur. (4.111) denklemini  $x$  'e göre -1'den 1'e integrali alınırsa

$$\int_{-1}^1 (A_1 + A_2 \sin x + A_3(2 \sin^2 x - 1)) dx = \int_{-1}^1 \left( \sin x \left( 1 + A_1 + \frac{1}{2} A_2 - \frac{1}{3} A_3 \right) \right) dx,$$

$A_1 = 0$  olur. (4.111) ifadesini sırasıyla  $\sin x$ ,  $2 \sin^2 x - 1$  terimleriyle çarpıp  $x$ 'e göre -1'den 1'e integrali alınırsa

$$A_2 = \left( 1 + A_1 + \frac{1}{2} A_2 - \frac{1}{3} A_3 \right), A_3 = 0 \quad (4.112)$$

bulunur. Daha sonra  $A_1 = 0$ ,  $A_2 = 2$  ve  $A_3 = 0$  bulunur.  $h_3(x)$  ifadesinde bulunan katsayılar yerine yazılırsa

$$h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = 2 \sin x. \quad (4.113)$$

Çizelge 4.1. Polinom sistemlerin çözümünün bulunması.

| Bubnov-Galerkin Yöntemi                                |                           |                           |
|--------------------------------------------------------|---------------------------|---------------------------|
| $h(x)$                                                 | Legendre Polinomu         | Chebyshev Polinomu        |
| $h(x) = 1 + \int_{-1}^1 (xt + x^2)h(t)dt$              | $h(x) = 1 + 6x^2$         | $h(x) = 1 + 6x^2$         |
| $h(x) = 1 + \frac{4x}{3} + \int_{-1}^1 (xt - x)h(t)dt$ | $h(x) = 1 - 2x$           | $h(x) = 1 - 2x$           |
| $h(x) = 1 + \int_0^1 xt^2h(t)dt$                       | $h(x) = 1 + \frac{4}{9}x$ | $h(x) = 1 + \frac{4}{9}x$ |
| $h(x) = \frac{5}{6}x + \frac{1}{2} \int_0^1 xth(t)dt$  | $h(x) = x$                | $h(x) = x$                |
| $h(x) = \sin x + \int_0^{\pi/2} \sin x \cos t h(t)dt$  | $h(x) = 2 \sin x$         | $h(x) = 2 \sin x$         |

Çizelge 4.1 Bubnov-Galerkin yöntemiyle integral denklemlerin çözümü için seçilen Legendre polinomları ve Chevysbey polinomları aynı sonucu verildiği görülmektedir.

Çizelge 4.2. Fredholm integral denklemlerin çözümü.

| $h(x)$                                                  | Ardışık Yaklaşım Yöntemi  | Bubnov-Galerkin Yöntemi   |
|---------------------------------------------------------|---------------------------|---------------------------|
| $h(x) = 1 + \int_0^1 xt^2 h(t) dt$                      | $h(x) = 1 + \frac{4}{9}x$ | $h(x) = 1 + \frac{4}{9}x$ |
| $h(x) = \frac{5}{6}x + \frac{1}{2} \int_0^1 xth(t) dt$  | $h(x) = x$                | $h(x) = x$                |
| $h(x) = \sin x + \int_0^{\pi/2} \sin x \cos t h(t) dt$  | $h(x) = 2 \sin x$         | $h(x) = 2 \sin x$         |
| $h(x) = 1 + \int_{-1}^1 (xt + x^2)h(t) dt$              | $h(x) = 1 + 6x^2$         | $h(x) = 1 + 6x^2$         |
| $h(x) = 1 + \frac{4x}{3} + \int_{-1}^1 (xt - x)h(t) dt$ | $h(x) = 1 - 2x$           | $h(x) = 1 - 2x$           |

Çizelge 4.2 açıkça görüldüğü gibi ardışık yaklaşımlar ve Bubnov-Galerkin yöntemi ile çözülen integral denklemlerin çözümleri eşittir.

### 4.3. ÇEKİRDEĞİN YERİNE DEJENERE BİR ÇEKİRDEK ALINMASI

$K(x, t)$  çekirdeğinin yakın bir dejenere çekirdek olan

$$K_n(x, t) = \sum_{i=1}^n g_i(x)r_i(t) \quad (4.114)$$

alalım.  $f_n(x)$  fonksiyonu  $f(x)$ 'e yakınsar ve  $h_n(x)$  integral denkleminin çözümü

$$h_n(x) = f_n(x) + \lambda \int_a^b K_n(x, t)h_n(t)dt \quad (4.115)$$

olur.  $L_2$  uzayında ortonormal olan  $K(x, t)$  çekirdeği yerine  $K_n(x, t)$  dejenere çekirdeği yazıldığında oluşan hatalar için hesaplanmalar yapılır. Aşağıdaki hata tahminleri

$$\int_a^b |K(x, t) - K_n(x, t)| dt < \varepsilon, \quad |f(x) - f_n(x)| < \delta. \quad (4.116)$$

geçerli olur. Daha sonra denklem (4.115)' ün çözücü çekirdeği  $R_n(x, t; \lambda)$  için

$$\int_a^b |R_n(x, t; \lambda)| dt < R, a \leq x \leq b \quad (4.117)$$

olduğu kabul edilsin. Son olarak

$$q = \varepsilon(1 + R) < 1 \quad (4.118)$$

eşitsizliği geçerli olur. Bu durumda (2.2) integral denkleminin bir tek  $h(x)$  çözümü vardır. Bu çözüm ile (4.115) denkleminin farkı

$$|h(x) - h_n(x)| < \frac{\varepsilon N(1 + R)^2}{1 - q} + \delta, \quad (4.119)$$

$$N = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| = \left( \int_a^b f^2(x) dx \right)^{1/2}$$

şeklindedir [5], [18].

Örnek 4.11:

$$h(x) = e^x - x - \int_0^1 x(e^{xt} - 1)h(t)dt \quad (4.120)$$

Fredholm integral denklemini çekirdeğinin yerine dejenere bir çekirdek koyarak bulalım.

$K(x, t) = x(e^{xt} - 1)$  çekirdeğini seriye açalırca:

$$K(x, t) = x \left( 1 + xt + \frac{x^2 t^2}{2!} + \frac{x^3 t^3}{3!} + \frac{x^4 t^4}{4!} \dots \right) - x, \quad (4.121)$$

$$K(x, t) = x^2 t + \frac{x^3 t^2}{2!} + \frac{x^4 t^3}{3!} + \frac{x^5 t^4}{4!} \dots \quad (4.122)$$

$K(x, t)$  açılımının ilk üç terimini  $K_2(x, t)$  dejenere çekirdeğini oluşturmak için alınırsa

$$K_2(x, t) = x^2 t + \frac{x^3 t^2}{2!} + \frac{x^4 t^3}{3!} \quad (4.123)$$

olur. Buradan

$$h_2(x) = e^x - x - \int_0^1 \left( x^2 t + \frac{x^3 t^2}{2!} + \frac{x^4 t^3}{3!} \right) h_2(t) dt. \quad (4.124)$$

Yukarıdaki integral denkleminin çözümü

$$h_2(x) = e^x - x - C_1 x^2 - C_2 x^3 - C_3 x^4, \quad (4.125)$$

$$C_1 = \int_0^1 t h_3(t) dt, C_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 t^2 h_3(t) dt \text{ ve } C_3 = \frac{1}{6} \int_0^1 t^3 h_3(t) dt \quad (4.126)$$

olur.  $h_3(x)$  ifadesi  $C_1, C_2, C_3$  eşitliklerinde yazılırsa

$$C_1 = \int_0^1 t(e^t - t - C_1 t^2 - C_2 t^3 - C_3 t^4) dt = 1 - \frac{C_1}{4} - \frac{C_2}{5} - \frac{C_3}{6}, \quad (4.127)$$

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{1}{2} \int_0^1 t^2 (e^t - t - C_1 t^2 - C_2 t^3 - C_3 t^4) dt \\ &= \frac{1}{2} (e - 2) - \frac{1}{8} - \frac{C_1}{10} - \frac{C_2}{12} - \frac{C_3}{14}, \end{aligned} \quad (4.128)$$

$$\begin{aligned} C_3 &= \frac{1}{6} \int_0^1 t^3 (e^t - t - C_1 t^2 - C_2 t^3 - C_3 t^4) dt \\ &= \frac{1}{6} (2 - 2e) - \frac{1}{30} - \frac{C_1}{36} - \frac{C_2}{42} - \frac{C_3}{48}. \end{aligned} \quad (4.129)$$

Yukarıdaki eşitliklerden

$$C_1 = 1,60631013, C_2 = 0,5066681 \text{ ve } C_3 = -6,6553277 \quad (4.130)$$

bulunur.  $C_1, C_2, C_3$  eşitliklerini  $h_2(x)$  denkleminde yerine yazılırsa

$$h_2(x) = e^x - x - 1,60631013x^2 - 0,566681x^3 + 6,6553277x^4. \quad (4.131)$$



Denklemin çözümü

$$h(x) \approx h_2(x) = e^x - x - 1,60631013x^2 - 0,566681x^3 + 6,6553277x^4 \quad (4.132)$$

olur.

Örnek 4.12:

$$h(x) = x^2 + \int_0^1 \sin(xt)h(t)dt \quad (4.133)$$

Fredholm integral denklemini çekirdeğinin yerine dejenere bir çekirdek koyarak bulalım.

$K(x, t) = \sin(xt)$  çekirdeğini

$$K(x, t) = xt - \frac{(xt)^3}{3!} + \frac{(xt)^5}{5!} - \frac{(xt)^7}{7!} + \dots \quad (4.134)$$

şeklinde yazılır. Dejenere çekirdeğini

$$K_2(x, t) = xt - \frac{(xt)^3}{3!} + \frac{(xt)^5}{5!} \quad (4.135)$$

şeklinde alınsın. Buradan

$$h_2(x) = x^2 + \int_0^1 \left( xt - \frac{(xt)^3}{3!} + \frac{(xt)^5}{5!} \right) h(t)dt. \quad (4.136)$$

(4.132) ifadesi  $h_2(x) = x^2 + xC_1 + x^3C_2 + x^5C_3$  şeklinde yazılırsa

$$C_1 = \int_0^1 t(t^2 + tC_1 + t^3C_2 + t^5C_3)dt, \quad (4.137)$$

$$C_2 = -\frac{1}{6} \int_0^1 t^3(t^2 + tC_1 + t^3C_2 + t^5C_3)dt, \quad (4.138)$$

$$C_3 = \frac{1}{120} \int_0^1 t^5(t^2 + tC_1 + t^3C_2 + t^5C_3)dt. \quad (4.139)$$

Yapılan işlemler sonucunda

$$\frac{2C_1}{3} - \frac{C_2}{5} - \frac{C_3}{7} = \frac{1}{4}, \quad (4.140)$$

$$\frac{C_1}{5} + \frac{43C_2}{7} + \frac{C_3}{9} = -\frac{1}{6}, \quad (4.141)$$

$$\frac{C_1}{7} + \frac{C_2}{9} - \frac{1309C_3}{11} = -\frac{1}{8} \quad (4.142)$$

bulunur. Yukarıdaki ifadelerden  $C_1 = 0,7527$ ,  $C_2 = 0,004$  ve  $C_3 = 1,757$  bulunur. Buradan  $h_2(x)$  denklemine yazılırsa

$$h_2(x) = x^2 + 0,7527x + 0,004x^3 + 1,757x^5. \quad (4.143)$$

Denklemin çözümü

$$h(x) \approx h_2(x) = x^2 + 0,7527x + 0,004x^3 + 1,757x^5. \quad (4.144)$$

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Fredholm integral denkleminde çekirdeklere karşılık gelen  $\lambda$  değerleri için Kellogg, İzler ve Ritz yöntemi kullanıldı. Kellogg yönteminde Çizelge 3.1 ve Çizelge 3.2 incelendiğinde keyfi seçilen bir fonksiyonun (özfonksiyon ile ortagonal olmamak şartıyla) aynı özdeğerleri verdiği görüldü.

(2.2) Fredholm integral denklemi için Ardışık yaklaşım, Bubnov-Galerkin ve Dejenere Çekirdek yöntemi kullanılarak çözümler bulundu. Bubnov-Galerkin yönteminde Çizelge 4.1 incelendiğinde Legendre ve Chebyshev polinomları ile ele alınan örneklerin sonuçlarının değişmediği görüldü. Çizelge 4.2 incelendiğinde Ardışık yaklaşım ve Bubnov-Galerkin yöntemleriyle ele alınan örneklerin sonuçlarının değişmediği görüldü. Bu nedenle Fredholm integral denklem çözümünde Ardışık yaklaşım ve Bubnov-Galerkin yöntemlerinden herhangi birinin kullanımı yeterli olur. Fredholm integral denkleminde çekirdek yerine dejenere çekirdek alınması yönteminde taylor açılımı yardımıyla elde edilen fonksiyonlar çözüm için kolaylık sağlar.

## 6. KAYNAKLAR

- [1] M. D. Raisinghania, Integral Equations and Boundary Values Problems, 1. baskı, Ram Ragar, New Delhi: S. Chand & Company, 2007, böl. 4, ss. 108-200.
- [2] M. Wazwaz, "Fredholm Equations," A First Course in Integral Equations, 2. baskı, New York, ABD: World Scientific Publishing, 2015, böl. 2, ss. 48-100.
- [3] M. Wazwaz, "Fredholm Integral Equations," Linear and Nonlinear Integral Equations Methods and Applications, 1. baskı, Chicagp, USA: Saint Xavier University, 2011, böl. 4, ss. 119-173.
- [4] Y. Shestopalov, "Linear Fredholm Equations," Integral Equations, Karlstad, İsveç: Karlstad University, 2002, c. 5, ss. 12-17.
- [5] C. Cerit, İntegral Denklemler, 1. baskı, İstanbul, Türkiye: Alfa yayıncılık, 1976, böl. 3, ss. 132-156.
- [6] K. Köklü, İntegral Denklemler, 1. baskı, İstanbul, Türkiye: Papatya Yayıncılık, 2018, böl. 4, ss. 291-301.
- [7] M. Kudu, I. Amirali ve G. M. Amiraliyev, "Uniform numerical approximation for parameter dependent singularly perturbed problem with integral boundary condition," Miskolc Mathematical Notes, c. 19, sayı. 1, ss. 337-353, 2018.
- [8] M. Kudu ve I. Amirali, "A priori estimates of solution of parametrized singularly perturbed problem," Journal of Applied Mathematics and Physics, sayı 2, ss. 73-78, 2016.
- [9] M. Kudu, I. Amirali ve G. M. Amiraliyev, "A layer analysis of parameterized singularly perturbed boundary value problems," International Journal of Applied Mathematics, c. 29, sayı. 4, ss. 439-449, 2016.
- [10] Ö. Yapman, G. M. Amiraliyev ve I. Amirali, "Convergence analysis of fitted numerical method for a singularly perturbed nonlinear Volterra integro-differential equation with delay," Journal of Computational and Applied Mathematics, c. 10, 2019.
- [11] M. Rahman, Integral Equations and their Applications, 1. baskı, Boston, ABD: Dalhousie University, 2007, böl. 3, ss. 47-63.
- [12] A.T. B. Reid, Random Integral Equations, 1. baskı, New York, ABD: Acedemic Press, 1972, böl. 4, ss. 134-171.
- [13] M. D. Rasisinghania, Integral Equations and Boundary Value Problems, 2. baskı, Ram Nagar, New Delhi: S. Chand and company, 2008, böl. 5, ss.143-200.
- [14] B. N. Mandal, Applied Singuler Integral Equations, 1. baskı, Bangolera, India: Science Publishers, 2011, böl. 7, ss. 180-189.
- [15] A. D. Polyain ve A. V. Manzhirov, Handbook of Mathematics For Engineers and Scientists, 2. baskı, New York, ABD: Chapman and Hall, 2007, böl. 10, ss. 519-700.

- [16] M. Kudu, I. Amirali ve G. M. Amiraliyev, “A finite difference method for singularly perturbed delay integro-differential equation,” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, c. 308, ss. 379-390, 2016.
- [17] C. Constanda, *Integral Methods in Science and Engineering*, 1. baskı, Boston, ABD: Science Business Media, 2000, böl. 10, ss. 90-115.
- [18] S. M. Zemyan, *The Classical Theory of Integral Equations*, 1. baskı, Boston, ABD: Science Business Media, 2012, böl. 2, ss. 31-78.
- [19] H. M. Srivastava, X. J. Yang, D. Baleanu, J. J. Nieto ve J. Hristov, *Advances on Integrodifferential Equations and Transforms*, 2. baskı, Sofya, Bulgaria: Hindawi Publishing Corporation, 2015, böl. 4, ss. 15-22.
- [20] P. Collins, *Differential and Integral Equations*, 1.baskı, New York, ABD: Oxford University, 2006, böl. 1, ss. 5-11.
- [21] M. Krasnov, A. Kiselev ve G. Makarenko, *Problems and Exercises In Integral Equations*, 1. baskı, Moscow, Russia: Mir Publishers, 1971, böl. 2, ss. 71-144.
- [22] R. P. Kanwal, *Linear Integral Equations Theory and Technique*, 1. baskı, London, ABD: Academic Press, 1971, böl. 2, ss. 8-34.
- [23] A. D. Polyanin ve A. V. Manzhirov, *Handbook Of Integral Equations Second Edition*, 2. baskı, New York, ABD: Chapman and Hall, 2008, böl. 8, ss. 403-544.
- [24] S. Sayın, *Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemleri*, 1. baskı, Ankara, Türkiye: ODTÜ Geliştirme Vakfı, 2000, böl. 2, ss. 7-30.

# ÖZGEÇMİŞ

## KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Ebru GEZO  
Yabancı Dili : İngilizce

## ÖĞRENİM DURUMU

| Derece    | Alan             | Okul/Üniversite         | Mezuniyet Yılı |
|-----------|------------------|-------------------------|----------------|
| Y. Lisans | Matematik Bölümü | Düzce Üniversitesi      | 2021           |
| Lisans    | Matematik Bölümü | Kocaeli Üniversitesi    | 2015           |
| Lise      | Sayısal          | Hacer Demirören Ç. P. L | 2010           |

## YAYINLAR

[1] İ. Amiralı ve E. Gezo, “İkinci tip Fredholm integral denkleminin yaklaşık çözümü İçin Bubnov- Galerkin yönteminin kullanılması üzerine,” *Balkan Zirvesi 3. Uluslararası Uygulamalı Bilimler Kongresi*, Edirne, Türkiye, 2020, ss. 35-42.