

FUBINI POLİNOMLARI VE BAZI ÖZELLİKLERİ**Muhammet AĞCA****YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI****DANIŞMAN
Doç. Dr. Nejla ÖZMEN****DÜZCE, 2023**

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

FUBINI POLİNOMLARI VE BAZI ÖZELLİKLERİ

Muhammet AĞCA tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Nejla ÖZMEN
Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Nejla ÖZMEN
Düzce Üniversitesi

Prof. Dr. Esra ERKUŞ DUMAN
Gazi Üniversitesi

Doç.Dr. Hüseyin BUDAK
Düzce Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 25/07/2023

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

25 Temmuz 2023

Muhammet AĞCA

TEŐEKKÖR

Yüksek lisans eğitimin boyunca benden yardımını esirgemeyen, her konuda yardımcı olan ve tez çalışmamın her aşamasında aynı titizlikle yardımına devam eden konu ile ilgili engin bilgi ve birikimini ustalık ve samimiyetiyle aktaran sayın hocam Doç. Dr. Nejla ÖZMEN'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışma boyunca manevi desteğini esirgemeyen canım anneme, tanıdığım ilk günden bu yana her konuda yanımda olan biricik eşim Merve AĞCA'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

25 Temmuz 2023

Muhammet AĞCA

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
SİMGELER	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR VE TANIMLAR.....	3
3. FUBINI POLİNOMLARI VE ÖZELLİKLERİ.....	8
3.1. TEK DEĞİŞKENLİ VE İKİ DEĞİŞKENLİ FUBINI POLİNOMLARI...	8
3.2. İKİ DEĞİŞKENLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ FUBINI POLİNOMU.....	10
3.3. YÜKSEK MERTEBEDEN FUBINI POLİNOMU VE ÖZELLİKLERİ...	11
3.4. DEJENERE FUBINI POLİNOMLARI.....	12
4. GENELLEŞTİRİLMİŞ FUBINI POLİNOMLARI	16
4.1. GENELLEŞTİRİLMİŞ FUBINI POLİNOMLARI.....	16
4.2. ÇOK DEĞİŞKENLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ FUBINI POLİNOMLARI İÇİN BİLİNEER VE BİLATERAL DOĞURUCU FONKSİYONLAR.....	17
4.3. ÖZEL DURUMLAR.....	19
4.4. GENELLEŞTİRİLMİŞ FUBINI POLİNOMLARININ REKÜRANS BAĞINTILARI.....	21
5. İKİ DEĞİŞKENLİ YÜKSEK MERETEBEDEN GENELLEŞTİRİLMİŞ FUBINI POLİNOMLARI	26
5.1. İKİ DEĞİŞKENLİ YÜKSEK MERETEBEDEN GENELLEŞTİRİLMİŞ FUBINI POLİNOMU	26
5.2. İKİ DEĞİŞKENLİ YÜKSEK MERETEBEDEN GENELLEŞTİRİLMİŞ FUBINI POLİNOMU İÇİN TEOREMLER VE BAZI SONUÇLAR	28
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	37
7. KAYNAKLAR.....	38
ÖZGEÇMİŞ.....	42

SİMGELER

$(\alpha)_n$	Pochhammer Sembolü
$S(n, k)$	Stirling numbers
F_n	Fubini Sayıları
$F_n(x)$	Tek Değişkenli Fubini Polinomu
$F_n(x, y)$	İki Değişkenli Fubini Polinomu
$F_n(x, y, z, q)$	Genelleştirilmiş Fubini Polinomu
$F_n^r(x, y)$	İki Değişkenli Genelleştirilmiş r . basamaktan Fubini Polinomu
$T_{n, \lambda, k}^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r; \alpha)}(s_1, \dots, s_r; s)$	Lagrange-based Apostol- tip Polinomu
$H_n^{(r)}(u; x)$	Frobenius-Euler Polinomu

ÖZET

FUBINI POLİNOMLARI VE BAZI ÖZELLİKLERİ

Muhammet AĞCA

Düzce Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Nejla ÖZMEN

Temmuz 2023, 41 sayfa

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde önbilgiler ve diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı tanımlar ve yardımcı teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, Fubini polinomlarının türleri hakkında bilgi verilmiştir. Bu polinomların bazı özellikleri verilmiştir. Dördüncü bölümde genelleştirilmiş Fubini polinomları tanıtılmış, genelleştirilmiş Fubini polinomları için toplam formülleri, doğurucu fonksiyon bağıntıları elde edilmiştir. Ayrıca, bu polinomun multilineer ve multilateral doğurucu fonksiyonlarını veren teoremler elde edilmiştir. Bu teoremlerin uygulamalarına yer verilmiştir. Beşinci bölümde iki değişkenli yüksek mertebeden genelleştirilmiş Fubini polinomları tanıtıldı ve özelliklerine yer verildi. İki değişkenli yüksek mertebeden genelleştirilmiş Fubini polinomları için toplam formülü ve doğurucu fonksiyon bağıntısı elde edildi. Bu polinomun bilineer ve bilateral doğurucu fonksiyonlarını veren teoremler elde edildi ve bu teoremlerin uygulamalarına yer verilmiştir. Daha sonra bu polinomların bazı rekürans bağıntıları ve integral bağıntısı elde edilmiştir. Son bölümde sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar sözcükler: Genelleştirilmiş Fubini Polinomları, Toplam Formülü, Doğurucu Fonksiyon.

ABSTRACT

FUBINI POLYNOMIALS AND SOME PROPERTIES

Muhammet AĞCA

Düzce University

Graduate School, Department of Mathematics

Master Thesis

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Nejla ÖZMEN

July 2023, 41 pages

This thesis consists of six chapters. The first chapter is reserved for the introduction. In the second chapter, some definitions and lemmas that will be used in other chapters are given. In the third chapter, information about the types of Fubini polynomials is given. Some properties of these polynomials are given. In the fourth chapter, generalized Fubini polynomials are introduced, sum formulas and generating function relations for generalized Fubini polynomials are obtained. In addition, theorems giving the multilinear and multilateral generating functions of this polynomial are obtained. Applications of these theorems are given. In the fifth chapter, higher order generalized Fubini polynomials with two variables are introduced and their properties are given. The sum formula and the generative function relation for bivariate higher order Fubini polynomials were obtained. Theorems giving the bilinear and bilateral generating functions of this polynomial are obtained and the applications of these theorems are given. Then, some recurrence relations and integral relations of these polynomials are obtained. In the last section, conclusions and recommendations are given.

Keywords: Generalized Fubini Polynomials, Summation Formula, Generating Function.

1. GİRİŞ

Bu tez, genelleştirilmiş Fubini polinomları üzerinde yapılan bir çalışmadır. Fubini tipi polinomlar kombinatoryal matematikte ortaya çıkar ve matematiğin teori ve uygulamalarında önemli bir rol oynar. Bu nedenle birçok sayı teorisi ve kombinatorik uzmanı bunların özelliklerini kapsamlı bir şekilde incelemiş ve bir dizi ilginç sonuçlar elde etmişlerdir [1]-[5]. Literatürde bu polinomlar ve sayılarla ilgili çok sayıda özdeşlik elde edilmiş [6]-[11] ve bunların genellemeleri verilmiştir [6], [12], [13]. Bu polinomlar üzerine yapılan çalışmalar hâlen devam etmektedir. Bu polinomlar, fizik, matematik, uygulamalıbilimler, mühendislik ve fonksiyonel analiz, diferansiyel denklemler, kuantum mekaniği, matematiksel analiz, matematiksel fizik vb. dahil olmak üzere birçok araştırma alanına sahiptir.

Son yıllarda bu polinomlar üzerine yapılan çalışmalar önemli bir yer tutmaktadır. Uygun koşullar altında bu polinomların farklı tip özellikleri halen çalışılmaktadır. Tek değişkenli Fubini polinomlarının ilk örnekleri 1974 yılında S. M. Tanny tarafından ortaya çıkmıştır [14]. 1997 yılında M. E. Dasef ve S. M. Kautz [15], 2005 yılında K. N. Boyadzhiev [6], 2011 yılında A. Dil ve V. Kurt [12], 2016 yılında L. Kargın [1] tarafından yapılan çalışmalar Fubini polinomunun genişlemesine katkıda bulunmuşlardır. 2017 yılında N. Kılar ve Y. Şimşek yüksek mereteben tek değişkenli Fubini polinomların doğurucu fonksiyonunu tanıttılar ve bu polinomun özelliklerini verdiler [3]. 2018 yılında F. Qi tarafından genelleştirilmiş Fubini polinomları tanıtılmış ve Fubini sayıları üzerine çalışma yapmıştır [16]. 2019 yılında H. M. Srivastava ve C. Kızılateş tarafından iki parametrelili, iki değişkenli Fubini tip polinomu tanıtıldı [17]. Daha sonraları, bu polinomun birçok genelleştirilmesi birçok yazar tarafından ele alınmış, Apostol tip polinomlarla ilişkilendirilmiştir [18]-[20]. Aynı zamanda, matematikte doğurucu fonksiyon (veya üreteç fonksiyonu), bir dizinin girdilerinin bilgisini katsayılarında tutan bir biçimsel kuvvet serisidir. Kullanım ve uygulama alanlarına göre çeşitli doğurucu fonksiyonlar bulunmaktadır. Karma doğurucu fonksiyon, multilinear doğurucu fonksiyon, multilateral doğurucu fonksiyon bunlardan bazılarıdır. Doğurucu fonksiyonlar sayesinde matematikte, fizikte ve özellikle de mühendislikte pek çok uygulama alanına sahip olan özel fonksiyonların yapısal davranışları ve karakteristikleri incelenebilmektedir. Konunun geniş bir yelpazede çalışılıyor olması birçok araştırmacının ilgisini çekmektedir. Özellikle de son yıllarda etkin bir araştırma

sahası haline gelmiştir. Bir doğurucu fonksiyonun elde edilmesinde kombinatoryal toplamlar ve binom özdeşlikler önem arz etmektedir. Bu özdeşlikler yardımıyla doğurucu fonksiyonların yanı sıra integral gösterimleri, ters bağıntılar, hipergeometrik serilerin içerildiği gösterimler gibi daha farklı özellikler de elde edilebilmektedir. Doğurucu fonksiyonlar kullanılarak özel polinomlar tanımlanabilir. Matematikte iyi bilinen tek ve çok değişkenli birçok polinom, doğurucu fonksiyon yardımıyla tanımlanmıştır [21]-[31]. Ayrıca Fubini tip polinomlar üzerinde yapılan çalışmalar, daha halen devam etmektedir. Örneğin; 2021 yılında Srivastava ve arkadaşları tarafından Fubini tip polinomların yeni bir ailesi tanıtılmış [32], 2021 yılında q -Fubini polinomları üzerine A. Muhyi ve S. Araci [33] tarafından çalışmalar mevcuttur.

Bu tezde ilk olarak tek değişkenli Fubini polinomları, iki değişkenli Fubini polinomları, yüksek meretebeden tek değişkenli Fubini polinomları ve dejenere olmuş Fubini polinomları verilmiştir. Daha sonra, çok değişkenli genelleştirilmiş Fubini polinomlarının toplam formülleri, bilinear ve bilateral doğurucu fonksiyon bağıntısını veren teoremler elde edildi ve sonuçları incelenmiştir. Türev içeren rekürans bağıntısı verilmiştir. Ayrıca, çok değişkenli genelleştirilmiş Fubini polinomlarının bilinear ve bilateral doğurucu fonksiyonunu veren teoremler bulunmaktadır. Bu teoremler kullanılarak bazı doğurucu fonksiyon bağıntıları verilmiştir. Son bölümde, iki değişkenli yüksek meretebeden Fubini polinomları incelenmiştir. Toplam formülleri, bilinear ve bilateral doğurucu fonksiyon bağıntısını veren teoremler elde edildi ve sonuçları incelenmiştir. Türev içeren rekürans bağıntısı ve integral bağıntısı verilmiştir. Son olarak, genelleştirilmiş Fubini polinomları için elde edilen sonuçlar ve öneriler bulunmaktadır.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TANIMLAR

Çalışmanın bu bölümünde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlara ve tanımlara yer verilmiştir.

Tanım 2.1. λ reel yada kompleks bir sayı, ϑ sıfır yada pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$(\lambda)_{\vartheta} = \begin{cases} (\lambda + 1)(\lambda + 2) \dots (\lambda + \vartheta - 1), & \vartheta \geq 1 \\ 1, & \vartheta = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $(\lambda)_{\vartheta}$ ifadesine Pochhammer sembolü denir [29].

Tanım 2.2. α, β ve γ reel ya da kompleks sabitler olmak üzere,

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{x^n}{n!} \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanan seriye hipergeometrik seri denir. Literatürde $F(\alpha, \beta; \gamma; x)$ ile gösterilir ve bu fonksiyona hipergeometrik fonksiyon denir. Genelleştirilmiş hipergeometrik seri,

$${}_pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p; \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_q; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n (\alpha_2)_n \dots (\alpha_p)_n}{(\gamma_1)_n (\gamma_2)_n \dots (\gamma_q)_n} \frac{x^n}{n!}$$

şeklinde tanımlanır [41].

Tanım 2.3. (Newton Binom Formülü) $a, b \in R$ ve $n \in N$ olmak üzere,

$$(a - b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} (-b)^k$$

dır [41].

Yardımcı Teorem 2.4. $c > 0$ olmak üzere,

$$c^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln c)^n}{n!}$$

şeklinde açılımına sahiptir [41]. Ayrıca, $c = e$ alınırsa,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 2.5. Hipergeometrik serilerin tanımında Eşitlik (2.1)'deki ifadesinde α, β, γ değerleri özel olarak alındığında aşağıdaki eşitlikler geçerlidir [41]:

a)

$$(1-x)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha)_n \frac{x^n}{n!} = {}_2F_1(\alpha, 1; 1; x).$$

b)

$$\ln(1+x) = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)_n (1)_n (-x)^n}{(2)_n n!} = {}_2F_1(1, 1; 2; -x).$$

Yardımcı Teorem 2.6. Aşağıdaki eşitlikler geçerlidir [29]:

a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A(k, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor n/p \rfloor} A(k, n - pk). \quad (2.2)$$

b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor n/p \rfloor} A(k, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A(k, n + pk). \quad (2.3)$$

c)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A(k, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n A(k, n - k). \quad (2.4)$$

d)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n A(k, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A(k, n + k). \quad (2.5)$$

e)

$$\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{\lfloor k/p \rfloor} A(k, l) = \sum_{l=0}^{\lfloor n/p \rfloor} \sum_{k=0}^{n-pl} A(k + pl, l). \quad (2.6)$$

Yardımcı Teorem 2.7. Aşağıdaki eşitlik geçerlidir [41]:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (1 + \lambda t)^{1/\lambda} = e^t. \quad (2.7)$$

İspat. İspat için sol tarafı kullanarak sağ tarafı elde etmeye çalışalım. Eşitliğin sol tarafına kolaylık olması için L ile gösterelim ve eşitliğin iki tarafını $\ln$ tabanında yazalım.

$$\begin{aligned}
 \ln(L) &= \ln \left(\lim_{\lambda \rightarrow 0} (1 + \lambda t)^{1/\lambda} \right) \\
 &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \ln (1 + \lambda t)^{1/\lambda} \\
 &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \ln (1 + \lambda t) \\
 &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\ln (1 + \lambda t)}{\frac{1}{\lambda}} \text{ (L'Hospital)} \\
 &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\frac{t}{1+\lambda t}}{\frac{-1}{\lambda^2}} \\
 &= t
 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$L = e^t$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. □

Tanım 2.8. İki değişkenli bir $F(x, t)$ fonksiyonu, t nin kuvvetlerine göre

$$F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n(x) t^n$$

şeklinde bir seriye açılabilirse, $F(x, t)$ fonksiyonuna $\{f_n(x)\}$ fonksiyonlar ailesinin bir doğurucu fonksiyonu denir. Burada c_n ler x ve t den bağımsız, n nin bir fonksiyonu olup değişik parametreler içerebilirler.

Tanım 2.9. Üç değişkenli $D(x, y, t)$ fonksiyonu, t nin kuvvetlerine göre

$$D(x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k h_k(x) h_k(y) t^k$$

şeklinde bir seriye açılabilirse, $D(x, y, t)$ fonksiyonuna $h_k(x)$ fonksiyonları için bilineer doğurucu fonksiyon denir.

Tanım 2.10. Üç değişkenli $D(x, y, t)$ fonksiyonu t nin kuvvetlerine göre

$$D(x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k h_k(x) g_k(y) t^k$$

şeklinde bir seriye açılabilirse $D(x, y, t)$ fonksiyonuna $h_k(x)$ ve $g_k(y)$ fonksiyonları için bilateral doğurucu fonksiyon denir.

Tanım 2.11. $(r+1)$ değişkenli $D(x_1, x_2, \dots, x_r, t)$ t nin kuvvetlerine göre,

$$D(x_1, x_2, \dots, x_r, t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k(x_1) f_k(x_2) \dots f_k(x_r) t^k$$

şeklinde bir seriye açılabilirse, $D(x, y, t)$ fonksiyonuna $f_k(x_1), f_k(x_2), \dots, f_k(x_r)$ fonksiyonları için multiliner doğurucu fonksiyon denir.

Tanım 2.12. $(r+1)$ değişkenli $D(x_1, x_2, \dots, x_r, t)$ t nin kuvvetlerine göre

$$D(x_1, x_2, \dots, x_r, t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k f_{1k}(x_1) f_{2k}(x_2) \dots f_{rk}(x_r) t^k$$

şeklinde bir seriye açılabilirse, $D(x_1, x_2, \dots, x_r, t)$ fonksiyonuna $f_{1k}(x_1), f_{2k}(x_2), \dots, f_{rk}(x_r)$ fonksiyonları için multilateral doğurucu fonksiyon denir.

Tanım 2.13. $T_{n, \lambda, k}^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r; \alpha)}(s_1, \dots, s_r; s)$ Lagrange-based Apostol- tip Polinomları ($\lambda \in C$; $\alpha_i \in C$) için;

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_{n, \lambda, k}^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r; \alpha)}(x_1, \dots, x_r; x) t^n = \left(\prod_{j=1}^r (1 - x_j t)^{-\alpha_j} \right) \left(\frac{2^l t}{\lambda e^t + (-1)^{l+1}} \right)^{\alpha} e^{xt} \quad (2.8)$$

şeklinde doğurucu fonksiyon bağıntısıyla tanımlanır [18].

Tanım 2.14. $H_n^{(r)}(u; x)$ Frobenius-Euler Polinomları $u \neq 1$ için;

$$\left(\frac{1-u}{e^t - u} \right)^r e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(r)}(u; x) \frac{t^n}{n!}$$

şeklinde doğurucu fonksiyon bağıntısıyla tanımlanır [18]

Tanım 2.15. $E_n(x)$ Euler Polinomu;

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{2}{e^t + 1} e^{xt}, (|t| < \pi) \quad (2.9)$$

olarak tanımlanır. Eşitlik (2.9) da $x = 0$ alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n(0) \frac{t^n}{n!} = \frac{2}{e^t + 1} \quad (2.10)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. İki serinin eşitliğinden t^n katsayılarını eşitlersek,

$$E_n(0) = E_n$$

elde edilir.



3. FUBINI POLİNOMLARI VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde bazı Fubini polinom çeşitlerinin tanımını ve özelliklerini vereceğiz. Ayrıca dejenere Fubini polinomları için bazı sonuçlar elde edilecektir. Amerikalı bir matematikçi olan Leonard Carlitz'in bakış açısıyla dejenere Fubini polinomunu inceleyeceğiz. Bu polinomlarla ilgili bazı teoremler ve ispatlar da verilecektir.

3.1. TEK DEĞİŞKENLİ VE İKİ DEĞİŞKENLİ FUBINI POLİNOMLARI

Bu bölümde, tek değişkenli Fubini polinomları $F_n(x)$ in tanımını ve bazı özelliklerini vereceğiz. Ayrıca F_n Fubini sayılarının Stirling Sayıları $S_n(n, k)$ ile ilişkisini tanım olarak veriyoruz.

Tek değişkenli Fubini polinomları fiziksel problemlerde sıklıkla karşılaşılan büyük kısmi diferansiyel denklem sınıflarının çözümü için yeni analiz araçları sunmaktadır. Matematiksel olarak $F_n(x)$ Fubini polinomları aşağıdaki gibi tanımlanmıştır [14].

$$\frac{1}{1 - x(e^t - 1)} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x) \frac{t^n}{n!}. \quad (3.1)$$

Şimdi Eşitlik (3.1) de $x = -\frac{1}{2}$ alınırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} F_n\left(-\frac{1}{2}\right) \frac{t^n}{n!} &= \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)(e^t - 1)} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{2}(e^t - 1)} \\ &= \frac{2}{e^t + 1} \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitlik (2.10) den

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n\left(-\frac{1}{2}\right) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. İki serinin eşitliğinden, t^n katsayıları eşitlenirse

$$F_n\left(-\frac{1}{2}\right) = E_n$$

elde edilir. Fubini sayılarını elde etmek için Eşitlik (3.1) de $x = 1$ alınırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} F_n(1) \frac{t^n}{n!} &= \frac{1}{1 - 1(e^t - 1)} \\ &= \frac{1}{2 - e^t} \end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan bu ifadeye Fubini sayıları adı verilir. Fubini sayıları

$$\frac{1}{2 - e^t} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \frac{t^n}{n!}$$

şeklinde tanımlanır [39]. Ayrıca $n \geq 0$ için $S_n(n, k)$ stirling sayılarını göstermek üzere Fubini sayıları,

$$F_n = \sum_{k=0}^n k! S_n(n, k)$$

şeklinde tanımlanır [40]. Eşitlik (3.1) ifadesinde $x = y$, alınırsa,

$$\frac{1}{1 - y(e^t - 1)} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(y) \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Böylece genelleştirilmiş Fubini Polinomu $F_n(y)$ elde edilir. Uygun faktöriyel ile ağırlıklandırılmış $k! S_n(n, k)$ Stirling sayıları olmak üzere Fubini sayıları

$$F_n(y) = \sum_{k=0}^n S_n(n, k) k! y^k$$

şeklinde de kabul görmüştür [14].

[6] deki yazarlar tarafından tanımlanan,

$$\left(y \frac{d}{dy}\right)^m \frac{1}{1 - y} = \sum_{k=0}^{\infty} k^m y^k = \frac{1}{1 - y} F_m\left(\frac{y}{1 - y}\right)$$

bağıntısından dolayı $F_n(y)$ polinomları geometrik polinomlar olarakta isimlendirilir.

3.2. İKİ DEĞİŞKENLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ FUBINI POLİNOMU

Bu bölümde iki değişkenli genelleştirilmiş Fubini polinomlarının tanımını veriyoruz. Ayrıca iki değişkenli Fubini polinomlarının bazı özelliklerini vererek Fubini sayılarını elde edeceğiz. Ayrıca Fubini polinomları ile Euler polinomu arasında eşitlik elde edeceğiz. İki değişkenli genelleştirilmiş Fubini polinomları $F_n(x, y)$,

$$\frac{e^{xt}}{1 - y(e^t - 1)} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x, y) \frac{t^n}{n!} \quad (3.2)$$

olarak tanımlanır [1]. Eşitlik (3.2) de $x = 0$ seçilirse,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - y(e^t - 1)} &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n(0, y) \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n(y) \frac{t^n}{n!} \end{aligned} \quad (3.3)$$

elde edilir. Yani $F_n(0, y) = F_n(y)$ dir. Bu eşitlik ile genellikle karşılaşılan büyük kısmi diferansiyel denklem sınıflarının çözümü için yeni analiz araçları sunmaktadır. Negatif olmayan bir n tamsayısı için Eşitlik (3.2) de $y = -\frac{1}{2}$ alınırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} F_n\left(x, -\frac{1}{2}\right) \frac{t^n}{n!} &= \frac{e^{xt}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)(e^t - 1)} \\ &= \frac{e^{xt}}{1 + \frac{1}{2}(e^t - 1)} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{e^{xt}}{2} \\ &= \frac{e^{xt} + 1}{2} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada elde edilen son eşitlikten,

$$F_n\left(x, -\frac{1}{2}\right) = E_n(x)$$

bağıntısı elde edilir.

3.3. YÜKSEK MERTEBEDEN FUBINI POLİNOMU VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde yüksek mertebeden tek değişkenli Fubini polinomunun $F_n^{(v)}(x)$ tanım ve bazı özelliklerini vereceğiz. Yüksek mertebeden Fubini polinomları

$$\frac{2^v}{(2-e^t)^{2v}} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(v)}(x) \frac{t^n}{n!}, \quad (v \in N_0; |t| < \log 2) \quad (3.4)$$

olarak tanımlanmıştır [3]. Eşitlik (3.4) ifadesinde $x = 0$ alınırsa,

$$\frac{2^v}{(2-e^t)^{2v}} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(v)} \frac{t^n}{n!}, \quad (v \in N_0; |t| < \log 2) \quad (3.5)$$

elde edilir. Eşitlik (3.5) ifadesi v . mertebeden $F_n^{(v)}$ Fubini sayılarını elde etmemizi sağlar.

Şimdi $x, y \in R$ için $e^{xt} \cos(yt)$ ve $e^{xt} \sin(yt)$ iki fonksiyonun Maclaurin açılımlarını yazalım.

$$e^{xt} \cos(yt) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x, y) \frac{t^n}{n!}$$

ve

$$e^{xt} \sin(yt) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(x, y) \frac{t^n}{n!}$$

olarak yazılır [34]. Burada $C_n(x, y)$ ve $S_n(x, y)$ fonksiyonları

$$C_n(x, y) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} x^{n-2k} y^{2k}$$

ve

$$S_n(x, y) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k+1} x^{n-2k-1} y^{2k+1}$$

şeklinde tanımlanır. Son zamanlarda [17] yazarları

$$\frac{2^v}{(2-e^t)^{2v}} e^{xt} \cos(yt) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(c,v)}(x, y) \frac{t^n}{n!}, \quad (v \in N_0; |t| < \log 2)$$

ve

$$\frac{2^v}{(2-e^t)^{2v}} e^{xt} \sin(yt) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(s,v)}(x, y) \frac{t^n}{n!}, \quad (v \in N_0; |t| < \log 2)$$

şeklinde iki parametrlili Fubini polinomu tanımladılar.

3.4. DEJENERE FUBINI POLİNOMLARI

İkinci türden Stirling sayıları,

$$\frac{1}{k!} (e^t - 1)^k = \sum_{n=k}^{\infty} S_2(n, k) \frac{t^n}{n!}, \quad (k \geq 0) \quad (3.6)$$

ve ikinci türden dejenere Stirling sayıları

$$\frac{1}{k!} \left((1 + \lambda t)^{\frac{1}{\lambda}} - 1 \right)^k = \sum_{n=k}^{\infty} S_{2,\lambda}(n, k) \frac{t^n}{n!}, \quad (\lambda \in R) \quad (3.7)$$

olarak tanımlanmıştır [37], [38]. Kang-Tae Kim ve arkadaşları tarafından birinci türden Stirling sayıları,

$$\frac{1}{k!} (\log(1+t))^k = \sum_{n=k}^{\infty} S_1(n, k) \frac{t^n}{n!}, \quad (k \geq 0) \quad (3.8)$$

olarak tanımlanmıştır [1], [35]. Yine aynı yazarlar

$$\begin{aligned} (1 + \lambda t)^{\frac{x}{\lambda}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\lambda} \right)_n \lambda^n \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (x)_{n,\lambda} \frac{t^n}{n!} \end{aligned} \quad (3.9)$$

eşitliğini tanımlamıştır. Burada $(x)_{n,\lambda}$

$$\begin{aligned} (x)_{n,\lambda} &= x(x - \lambda) \dots (x - (n-1)\lambda), \quad (n \geq 1), \\ (x)_{0,\lambda} &= 1 \end{aligned}$$

şeklindedir.

Eşitlik (3.7) ifadesinin sol tarafının $\lambda \rightarrow 0$ limiti alındığında,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} S_{2,\lambda}(n, k) = S_2(n, k)$$

elde edilir. Eşitlik (3.7) de

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} \left((1 + \lambda t)^{\frac{1}{\lambda}} - 1 \right)^k &= \frac{1}{k!} \left(e^{\log(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}} - 1 \right)^k \\ &= \frac{1}{k!} \left(e^{\frac{1}{\lambda} \log(1+\lambda t)} - 1 \right)^k \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlik dikkate alındığında Eşitlik (3.6) de t yerine $\frac{1}{\lambda} \log(1 + \lambda t)$ gelmiş halidir. O halde

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} \left(e^{\frac{1}{\lambda} \log(1 + \lambda t)} - 1 \right)^k &= \sum_{n=k}^{\infty} S_2(n, k) \frac{\left(\frac{1}{\lambda} \log(1 + \lambda t) \right)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} S_2(n, k) \lambda^{-n} \frac{1}{n!} (\log(1 + \lambda t))^n \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte dikkate alınır, Eşitlik (3.8) da k yerine n , n yerine m , t yerine de λt gelmiş halidir. O halde

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^{\infty} S_2(n, k) \lambda^{-n} \frac{1}{n!} (\log(1 + \lambda t))^n &= \sum_{n=k}^{\infty} S_2(n, k) \lambda^{-n} \sum_{m=n}^{\infty} S_1(m, n) \frac{(\lambda t)^m}{m!} \quad (3.10) \\ &= \sum_{m=k}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^m S_2(n, k) \lambda^{m-n} S_1(m, n) \right) \frac{t^m}{m!} \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca Eşitlik (3.7) de $n = m$ alınır ve Eşitlik (3.10) ile eşitlenirse,

$$\sum_{m=k}^{\infty} S_{2,\lambda}(m, k) \frac{t^m}{m!} = \sum_{m=k}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^m S_2(n, k) \lambda^{m-n} S_1(m, n) \right) \frac{t^m}{m!}$$

elde edilir. Son ifadenin $\frac{t^m}{m!}$ katsayıları birbirine eşitlenirse;

$$S_{2,\lambda}(m, k) = \sum_{n=k}^m S_2(n, k) \lambda^{m-n} S_1(m, n)$$

elde edilir.

Eşitlik (2.7) den biliyoruz ki

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (1 + \lambda t)^{1/\lambda} = e^t$$

eşitliği sağlanıyordu. Eşitlik (3.3) den

$$\frac{1}{1 - y(e^t - 1)} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(y) \frac{t^n}{n!}$$

eşitliğini biliyoruz. Yukarıdaki Eşitlik (2.7) ve Eşitlik (3.3) göz önüne alındığında dejenere Fubini polinomlarının

$$\frac{1}{1 - y((1 + \lambda t)^{1/\lambda} - 1)} = \sum_{n=0}^{\infty} F_{n,\lambda}(y) \frac{t^n}{n!}, \quad (\lambda \in R) \quad (3.11)$$

şeklinde tanımlandığını söyleyebiliriz. Buradan,

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[\frac{1}{1 - y((1 + \lambda t)^{1/\lambda} - 1)} \right] &= \frac{1}{1 - y(e^t - 1)} \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} F_{n,\lambda}(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n(y) \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

eşitlik elde edilir. Eşitlik (3.11) nin sol tarafınından,

$$\frac{1}{1 - y((1 + \lambda t)^{1/\lambda} - 1)} = \sum_{n=0}^{\infty} y^k \left((1 + \lambda t)^{1/\lambda} - 1 \right)^k$$

yazılabilir. Eşitlik (3.7) göz önüne alındığında yukarıdaki toplam

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^k k! \sum_{n=k}^{\infty} S_{2,\lambda}(n, k) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n y^k k! S_{2,\lambda}(n, k) \right) \frac{t^n}{n!} \quad (3.12)$$

şeklinde yazılabilir. Bu nedenle Eşitlik (3.11) ve Eşitlik (3.12) ile aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 3.1. $n \geq 0$ için

$$F_{n,\lambda}(y) = \sum_{k=0}^n y^k k! S_{2,\lambda}(n, k).$$

eşitliği geçerlidir.

İspat.

$$\frac{1}{k!} \left((1 + \lambda t)^{\frac{1}{\lambda}} - 1 \right)^k = \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (-1)^{k-l} (1 + \lambda t)^{\frac{l}{\lambda}}$$

binom açılımını kullanarak ispata başlayalım.

Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafındaki $(1 + \lambda t)^{\frac{l}{\lambda}}$ ifadesine Eşitlik (3.9) uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (-1)^{k-l} (1 + \lambda t)^{\frac{l}{\lambda}} &= \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (-1)^{k-l} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{l}{\lambda} \right)_n \lambda^n \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (-1)^{k-l} (l)_{n,\lambda} \right) \frac{t^n}{n!} \end{aligned} \quad (3.13)$$

elde edilir. Böylece Eşitlik (3.7) ve Eşitlik (3.13) den

$$\frac{1}{k!} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (-1)^{k-l} (l)_{n,\lambda} = \begin{cases} 0, & n < k \\ S_{2,\lambda}(n, k), & n \geq k \end{cases}$$

yazabiliriz.

Şimdi aşağıdaki farklı eşitlikler elde etmeye çalışalım.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-y} \left(\frac{1}{1 - \frac{y}{1-y} ((1+\lambda t)^{1/\lambda} - 1)} \right) &= \frac{1}{1-y(1+\lambda t)^{1/\lambda}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} y^k (1+\lambda t)^{k/\lambda} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} y^k (k)_{n,\lambda} \right) \frac{t^n}{n!}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Birinci eşitliğimiz yukarıdaki gibi olsun. Şimdi ikinci bir eşitlik yazmaya çalışalım.

$$\frac{1}{1-y} \left(\frac{1}{1 - \frac{y}{1-y} ((1+\lambda t)^{1/\lambda} - 1)} \right) = \frac{1}{1-y} \sum_{n=0}^{\infty} F_{n,\lambda} \left(\frac{y}{1-y} \right) \frac{t^n}{n!}. \quad (3.15)$$

eşitliğini yazabiliriz. Böylece Eşitlik (3.14) ve Eşitlik (3.15) eşitliklerinden gerekli düzenlemeler yapılırsa ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 3.2. $n \geq 0$ için

$$\frac{1}{1-y} F_{n,\lambda} \left(\frac{y}{1-y} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} y^k (k)_{n,\lambda}$$

eşitliği sağlanır.

Ayrıca

$$F_{n,\lambda}(1) = F_{n,\lambda} = \sum_{k=0}^n \frac{(k)_{n,\lambda}}{2^k}$$

ve Teorem 3.2 den

$$F_{n,\lambda} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k)_{n,\lambda}}{2^k}$$

eşitliği yazılabilir.

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ FUBINI POLİNOMLARI

Bu bölümde genelleştirilmiş Fubini polinomları tanımını vereceğiz. $F_n(x, y, z, q)$ genelleştirilmiş Fubini polinomu D.S Kim, T.Kim, H.-I Kwon ve J.-W.Park yazarları tarafından tanımlanmıştır [36]. $F_n(x, y, z, q)$ genelleştirilmiş Fubini polinomları için değişkenleri değiştirerek farklı toplamalar elde edeceğiz.

4.1. GENELLEŞTİRİLMİŞ FUBINI POLİNOMLARI

$F_n(x, y, z, q)$ genelleştirilmiş Fubini Polinomları

$$\frac{e^{xt}}{[z - y(e^t - 1)]^q} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!} \quad (x, q \in R) \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlanmıştır [16].

Yardımcı Teorem 4.1. Genelleştirilmiş Fubini polinomu için aşağıdaki toplam formülü doğrudur.

$$F_n(x_1 + x_2, y, z, q_1 + q_2) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} F_{n-m}(x_1, y, z, q_1) F_m(x_2, y, z, q_2). \quad (4.2)$$

İspat. Eşitlik (4.1) ifadesinde $x = x_1 + x_2$ ve $q = q_1 + q_2$ yazılırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n(x_1 + x_2, y, z, q_1 + q_2) \frac{t^n}{n!} = \frac{e^{x_1 t + x_2 t}}{[z - y(e^t - 1)]^{q_1 + q_2}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n(x_1 + x_2, y, z, q_1 + q_2) \frac{t^n}{n!} = \frac{e^{x_1 t}}{[z - y(e^t - 1)]^{q_1}} \frac{e^{x_2 t}}{[z - y(e^t - 1)]^{q_2}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n(x_1 + x_2, y, z, q_1 + q_2) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x_1, y, z, q_1) \frac{t^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} F_m(x_2, y, z, q_2) \frac{t^m}{m!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n(x_1 + x_2, y, z, q_1 + q_2) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} F_n(x_1, y, z, q_1) F_m(x_2, y, z, q_2) \frac{t^{n+m}}{n!m!}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafına Eşitlik (2.4) özdeşliği uygulanırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n(x_1 + x_2, y, z, q_1 + q_2) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} F_{n-m}(x_1, y, z, q_1) F_m(x_2, y, z, q_2) \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Son eşitliğin t^n katsayıları birbirine eşitlenirse

$$F_n(x_1 + x_2, y, z, q_1 + q_2) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} F_{n-m}(x_1, y, z, q_1) F_m(x_2, y, z, q_2)$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur. □

4.2. ÇOK DEĞİŞKENLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ FUBİNİ POLİNOMLARI İÇİN BİLİNEER VE BİLATERAL DOĞURUCU FONKSİYONLAR

Bu kısımda, genelleştirilmiş Fubini $F_n(x, y, z, q)$ polinomlarının bilineer ve bilateral doğurucu fonksiyonlarını veren bazı teoremler elde edilecek ve bu teoremlerin bazı uygulamaları ele alınacaktır. Burada kullanılan yöntemler bir çok araştırmacı tarafından kullanılmaktadır. [25], [26] ve [41] inci referanslarda benzer yöntemler kullanılmıştır.

Teorem 4.2. μ -üncü basamaktan $s_1, \dots, s_r$ ($r \in \mathbb{N}$) kompleks değişkenli sıfıra denk olmayan $\Omega_\mu(s_1, \dots, s_r)$ fonksiyonu için

$$\Lambda_{\mu, \psi}(s_1, \dots, s_r; \zeta) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_{\mu+\psi k}(s_1, \dots, s_r) \zeta^k \quad (a_k \neq 0, \mu, \psi \in \mathbb{C}) \quad (4.3)$$

ve

$$\theta_{n,p}^{\mu, \psi}(x, y, z, q; s_1, \dots, s_r; \xi) := \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k F_{n-pk}(x, y, z, q) \Omega_{\mu+\psi k}(s_1, \dots, s_r) \frac{\xi^k}{(n-pk)!} \quad (n, p \in \mathbb{N}), \quad (4.4)$$

olsun. Burada $[n/p]$ gösterimi, n/p den küçük veya ona eşit en büyük tamsayı anlamına gelir. Bu durumda,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \theta_{n,p}^{\mu, \psi}(x, y, z, q; s_1, \dots, s_r; \frac{\eta}{t^p}) t^n = \frac{e^{xt}}{[z - y(e^t - 1)]^q} \Lambda_{\mu, \psi}(s_1, \dots, s_r; \eta) \quad (4.5)$$

gerçekleşir.

İspat. Eşitlik (4.5) ifadesinin sol tarafına T diyelim. Eşitlik (4.4) ifadesi, Eşitlik (4.5) de yerine yazılırsa,

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k F_{n-pk}(x, y, z, q) \Omega_{\mu+\psi k}(s_1, \dots, s_r) \eta^k \frac{t^{n-pk}}{(n-pk)!}$$

elde edilir. Bu ifadeye, Eşitlik (2.5) özdeşliği uygulanır ve Eşitlik (4.3) ifadesi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} T &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k F_n(x, y, z, q) \Omega_{\mu+\psi k}(s_1, \dots, s_r) \eta^k \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_{\mu+\psi k}(s_1, \dots, s_r) \eta^k \\ &= \frac{e^{xt}}{[z - y(e^t - 1)]^q} \Lambda_{\mu, \psi}(s_1, \dots, s_r; \eta) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 4.3. μ -üncü basamaktan $s_1, \dots, s_r$ ($r \in N$) kompleks değişkenli sıfıra denk olmayan $\Omega_{\mu}(s_1, \dots, s_r)$ fonksiyonu için

$$\Lambda_{\mu, \psi}^{n, p}(x_1 + x_2, y, z, q_1 + q_2; s_1, \dots, s_r; t) := \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k F_{n-pk}(x_1 + x_2, y, q_1 + q_2) \Omega_{\mu+\psi k}(s_1, \dots, s_r) t^k$$

($a_k \neq 0, n, p \in N$)

dir. O halde $p \in N$ için,

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{[k/p]} a_l \binom{n-pl}{k-pl} F_{n-k-pl}(x_1, y, z, q_1) F_k(x_2, y, z, q_2) \Omega_{\mu+\psi l}(s_1, \dots, s_r) t^l \quad (4.6) \\ &= \Lambda_{\mu, \psi}^{n, p}(x_1 + x_2, y, z, q_1 + q_2; s_1, \dots, s_r; t) \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Eşitlik (4.6) ifadesinin sol tarafını kolaylık olması için T ile gösterelim. Bu ifadeye Eşitlik (2.6) özdeşliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} T &= \sum_{l=0}^{[n/p]} \sum_{k=0}^{n-pl} a_l \binom{n-pl}{k} F_{n-k-pl}(x_1, y, z, q_1) F_k(x_2, y, z, q_2) \Omega_{\mu+\psi l}(s_1, \dots, s_r) t^l \\ &= \sum_{l=0}^{[n/p]} a_l \left(\sum_{k=0}^{n-pl} \binom{n-pl}{k} F_{n-k-pl}(x_1, y, z, q_1) F_k(x_2, y, z, q_2) \right) \Omega_{\mu+\psi l}(s_1, \dots, s_r) t^l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l=0}^{[n/p]} a_l F_{n-pl}(x_1 + x_2, y, q_1 + q_2) \Omega_{\mu+\psi l}(s_1, \dots, s_r) t^l \\
&= \Lambda_{\mu, \psi}^{n,p}(x_1 + x_2; s_1, \dots, s_r; t).
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

4.3. ÖZEL DURUMLAR

Çok değişkenli $\Omega_{\mu+\psi k}(s_1, \dots, s_r)$, $k \in \mathbb{N}_0$, $r \in \mathbb{N}$ fonksiyonu yerine bir ve daha fazla değişkenli daha basit fonksiyonlar yazıldığında bir önceki bölümde bahsedilen teoremlerin başka özel durumlarını verebiliriz.

Özellik 4.4. Eğer Teorem 4.2 de,

$$\Omega_{\mu+\psi k}(s_1, \dots, s_r) = T_{\mu+\psi k, \lambda, l}^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r; \alpha)}(s_1, \dots, s_r; s)$$

Lagrange tabanlı Apostol-tipi polinom alınırsa,

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\mu, \psi}(s_1, \dots, s_r; s; \zeta) &:= \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_{\mu+\psi k, \lambda, l}^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r; \alpha)}(s_1, \dots, s_r; s) \zeta^k \\
&(a_k \neq 0, \mu, \psi \in \mathbb{C})
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k F_{n-pk}(x, y, z, q) T_{\mu+\psi k, \lambda, l}^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r; \alpha)}(s_1, \dots, s_r; s) \frac{\xi^k}{t^{pk}} \frac{t^n}{(n-pk)!} \quad (4.7) \\
&= \frac{e^{xt}}{[z - y(e^t - 1)]^q} \Lambda_{\mu, \psi}(s_1, \dots, s_r; s; \eta)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Not 4.5. Lagrange tabanlı Apostol-tipi polinomlar $T_{n, \lambda, k}^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r; \alpha)}(x_1, \dots, x_r; x)$ için Eşitlik (2.8) kullanılır ve Eşitlik (4.7) de $a_k = 1, \mu = 0, \psi = 1$ seçilirse,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} F_{n-pk}(x, y, z, q) T_{k, \lambda, l}^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r; \alpha)}(s_1, \dots, s_r; s) \frac{\xi^k}{t^{pk}} \frac{t^{n-pk}}{(n-pk)!} \\
&= \frac{e^{xt}}{[z - y(e^t - 1)]^q} \left(\prod_{j=1}^r (1 - s_j \eta)^{-\alpha_j} \right) \left(\frac{2^l \eta}{\lambda e^\eta + (-1)^{l+1}} \right)^\alpha e^{s\eta}, (\lambda, \alpha_j \in \mathbb{C})
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece çok değikenli genelleştirilmiş Fubini polinomları iin bilateral doğurucu fonksiyon bağıntısı elde edilmiş olur.

Eğer Teorem 4.2 de $r = 4$ iin

$$\Omega_{\mu+\psi k}(s_1, s_2, s_3, s_4) = F_{\mu+\psi k}(s_1, s_2, s_3, s_4)$$

alınırsa, aşağıdaki Özellik elde edilir.

zellik 4.6.

$$\Lambda_{\mu,\psi}(s_1, \dots, s_r; s; \zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k F_{\mu+\psi k}(s_1, s_2, s_3, s_4) \zeta^k, \quad (a_k \neq 0, \mu, \psi \in \mathbb{C})$$

ve

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k F_{n-pk}(x, y, z, q) F_{\mu+\psi k}(s_1, s_2, s_3, s_4) \frac{\eta^k}{t^{pk}} \frac{t^n}{(n-pk)!} \\ &= \frac{e^{xt}}{[z-y(e^t-1)]^q} \Lambda_{\mu,\psi}(s_1, s_2, s_3, s_4; \eta) \end{aligned} \quad (4.8)$$

elde edilir.

Not 4.7. Eşitlik (4.8) de $a_k = \frac{1}{k!}$, $\mu = 0$, $\psi = 1$ alınırsa,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} \frac{1}{k!} F_{n-pk}(x, y, z, q) F_k(s_1, s_2, s_3, s_4) \eta^k \frac{t^{n-pk}}{(n-pk)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} F_k(s_1, s_2, s_3, s_4) \frac{\eta^k}{k!} \\ &= \frac{e^{xt}}{[z-y(e^t-1)]^q} \frac{e^{s_1 \eta}}{[s_3-s_2(e^\eta-1)]^{s_4}}. \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece çok değikenli genelleştirilmiş Fubini polinomları için bilinear doğurucu fonksiyon bağıntısı elde edilmiş olur.

Eğer Teorem 4.3 de $r = 4$ ve

$$\Omega_{\mu+\psi k}(s_1, s_2, s_3, s_4) = F_{\mu+\psi k}(x_3, y, z, q_3)$$

alınırsa, aşağıdaki toplam ifadesi elde edilir.

Özellik 4.8.

$$\begin{aligned} & \Lambda_{\mu, \psi}^{n, p}(x_1 + x_2, y, z, q_1 + q_2; x_3, y, z, q_3; \eta) \\ &:= \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k F_{n-pk}(x_1 + x_2, y, z, q_1 + q_2) F_{\mu+\psi k}(x_3, y, z, q_3) \eta^k, \quad (a_k \neq 0, \mu, \psi \in C) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{[k/p]} a_l \binom{n}{k} F_{n-k}(x_1, y, z, q_1) F_{k-pl}(x_2, y, z, q_2) F_{\mu+\psi l}(x_3, y, z, q_3) \eta^l \\ &= \Lambda_{\mu, \psi}^{n, p}(x_1 + x_2, y, z, q_1 + q_2; x_3, y, z, q_3; \eta) \end{aligned}$$

elde edilir.

Not 4.9. Özellik 4.8 de $a_l = \binom{k}{l}$, $\mu = 0$, $\psi = 1$, $p = 1$, $\eta = 1$ alınır ve Eşitlik (4.2) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^k \binom{n}{k} \binom{k}{l} F_{n-k}(x_1, y, z, q_1) F_{k-l}(x_2, y, z, q_2) F_l(x_3, y, z, q_3) \\ &= F_n(x_1 + x_2 + x_3, y, z, q_1 + q_2 + q_3) \end{aligned}$$

toplam ifadesi elde edilir.

Ayrıca, a_k ($k \in N_0$), katsayılarının her uygun seçimi için, çok değişkenli $\Omega_{\mu+\psi k}(s_1, \dots, s_r)$, $r \in N$ fonksiyonlarının birkaç basit fonksiyonun uygun bir çarpımı olarak ifade edilirse, Teorem 4.2 ve Teorem 4.3 ün iddiaları, çeşitli multilineer ve multilateral doğurucu fonksiyonlarını türetmek için uygulanabilir ve Eşitlik (4.1) ile açıkça verilen çok değişkenli genelleştirilmiş Fubini polinomlarının ailesi için birçok doğurucu fonksiyon ailesi elde edilir.

4.4. GENELLEŞTİRİLMİŞ FUBINI POLİNOMLARININ REKÜRANS BAĞINTILARI

Bu bölümde $F_n(x, y, z, q)$ çok değişkenli genelleştirilmiş Fubini polinomları için bazı rekürans bağıntıları elde edeceğiz.

Eşitlik (4.1) ifadesinin her iki tarafının x e göre türevini alalım.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{e^{xt}}{[z - y(e^t - 1)]^q} \right] \\ \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!} &= \frac{te^{xt}}{[z - y(e^t - 1)]^q} \\ \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!} &= t \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x, y, z, q) \frac{t^{n+1}}{n!}\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin sağına Eşitlik (2.4) özdeşliği uygulanırsa ;

$$\frac{\partial}{\partial x} F_n(x, y, z, q) = n F_{n-1}(x, y, z, q)$$

elde edilir.

Eşitlik (4.1) ifadesinin her iki tarafının y ye göre türevini alalım:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!} &= \left[\frac{\partial}{\partial y} \left[e^{xt} [z - y(e^t - 1)]^{-q} \right] \right] \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!} &= e^{xt} [-q(z - y(e^t - 1))]^{-q-1} (-1)(e^t - 1) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!} &= \frac{e^{xt}}{[z - y(e^t - 1)]^q} \frac{q(e^t - 1)}{z - y(e^t - 1)} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!} \frac{qe^t - q}{z + y - ye^t} \\ (z + y) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!} - y \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!} \\ &= q \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} F_n(x, y, z, q) \frac{t^{n+p}}{n!p!} - q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!} \\ (z + y) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!} - y \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} F_n(x, y, z, q) \frac{t^{n+p}}{n!p!} \\ &= q \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} F_n(x, y, z, q) \frac{t^{n+p}}{n!p!} - q \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!}.\end{aligned}$$

Yukarıdaki son eşitlikte Eşitlik (2.4) özdeşliği kullanılırsa,

$$(z + y) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!} - y \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^n \frac{\partial}{\partial y} F_{n-p}(x, y, z, q) \frac{t^{n+p}}{(n-p)!p!}$$

$$= q \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^n F_{n-p}(x, y, z, q) \frac{t^n}{(n-p)!p!} - q \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!}$$

$$\begin{aligned} (z+y) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!} - y \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^n \frac{\partial}{\partial y} F_{n-p}(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!} \binom{n}{p} \\ = q \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} F_{n-p}(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!} - q \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (z+y) \frac{\partial}{\partial y} F_n(x, y, z, q) - y \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \frac{\partial}{\partial y} F_{n-p}(x, y, z, q) \\ = q \sum_{p=0}^{\infty} \binom{n}{p} F_{n-p}(x, y, z, q) - q F_n(x, y, z, q) \end{aligned}$$

$$(z+y) \frac{\partial}{\partial y} F_n(x, y, z, q) + q F_n(x, y, z, q) = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \left[q F_{n-p}(x, y, z, q) + y \frac{\partial}{\partial y} F_{n-p}(x, y, z, q) \right]$$

türev içeren rekürans bağıntısı elde edilir.

Şimdi Eşitlik (4.1) in z ye göre türevi alınır;

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!} &= e^{xt} \left(-q [z - y(e^t - 1)]^{-q-1} \right) \\ &= -q \frac{e^{xt}}{[z - y(e^t - 1)]^q (z - y(e^t - 1))} \end{aligned}$$

$$(z - y(e^t - 1)) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!} = -q \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!}$$

$$\begin{aligned} z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!} - y \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} F_n(x, y, z, q) \frac{t^{n+p}}{n!p!} + y \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!} \\ = -q \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!}. \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitliğe Eşitlik (2.4) özdeşliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!} - y \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^n \frac{\partial}{\partial z} F_{n-p}(x, y, z, q) \frac{t^n}{(n-p)!p!} + y \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!} \\ = -q \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

$$\frac{z \frac{\partial}{\partial z} F_n(x, y, z, q)}{n!} - \frac{y \sum_{p=0}^n \frac{\partial}{\partial z} F_{n-p}(x, y, z, q)}{(n-p)!p!} + \frac{y \frac{\partial}{\partial z} F_n(x, y, z, q)}{n!} = \frac{-q F_n(x, y, z, q)}{n!}$$

$$z \frac{\partial}{\partial z} F_n(x, y, z, q) - y \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \frac{\partial}{\partial z} F_{n-p}(x, y, z, q) + y \frac{\partial}{\partial z} F_n(x, y, z, q) = -q F_n(x, y, z, q)$$

$$(z+y) \frac{\partial}{\partial z} F_n(x, y, z, q) + q F_n(x, y, z, q) = y \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \frac{\partial}{\partial z} F_{n-p}(x, y, z, q)$$

türev içeren rekürans bağıntısı elde edilir.

Şimdi Eşitlik (4.1) in q ya göre türevini alalım:

$$\frac{\partial}{\partial q} \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!} = \frac{\partial}{\partial q} [e^{xt} (z - y(e^t - 1))^{-q}]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial q} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!} = e^{xt} ((-1) [z - y(e^t - 1)]^{-q} \ln(z - y(e^t - 1)))$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial q} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!} = \frac{-e^{xt}}{[z - y(e^t - 1)]^q} \ln(z + y) \left(1 - \frac{ye^t}{z + y}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial q} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!} = - \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!} \left[\ln(z + y) + \ln\left(1 - \frac{ye^t}{z + y}\right) \right]$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial q} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!} \\ = & -\ln(z+y) \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!} - \ln\left(1 - \frac{ye^t}{z+y}\right) \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial q} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!} &= -\ln(z+y) \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!} \\ &\quad - \left[-\frac{ye^t}{z+y} F\left(1, 1; 2; \frac{ye^t}{z+y}\right) \right] \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial q} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!} &= -\ln(z+y) \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!} \\ &\quad + \frac{y}{z+y} e^t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)_m (1)_m}{(2)_m} \frac{\left(\frac{ye^t}{z+y}\right)^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial q} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!} &= -\ln(z+y) \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} F_n(x, y, z, q) \left(\frac{y}{z+y}\right)^{m+1} \frac{(e^t)^{m+1}}{m+1} \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial q} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!} &= -\ln(z+y) \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x, y, z, q) \frac{t^n}{n!} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{F_n(x, y, z, q)}{m+1} \left(\frac{y}{z+y}\right)^{m+1} \frac{t^p (m+1)^p}{p!} \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

türev içeren rekürans bağıntısı elde edilir.

5. İKİ DEĞİŞKENLİ YÜKSEK MERETEBEDEN GENELLEŞTİRİLMİŞ FUBINI POLİNOMLARI

Bu bölümde iki değişkenli yüksek mertebeli genelleştirilmiş Fubini polinomları tanımını toplam ifadelerini, doğurucu fonksiyon ve rekürans bağıntılarını vereceğiz.

5.1. İKİ DEĞİŞKENLİ YÜKSEK MERETEBEDEN GENELLEŞTİRİLMİŞ FUBINI POLİNOMU

İki değişkenli yüksek mertebeli genelleştirilmiş Fubini polinomları için toplam formülünü elde ediyoruz. İki değişkenli yüksek mertebeli genelleştirilmiş Fubini polinomları şu şekilde tanımlanır.

$$\frac{e^{\lambda xt}}{[1 - y(e^{\lambda t} - 1)]^r} = \sum_{n=0}^{\infty} F_{n,\lambda}^{(r)}(x, y) \frac{t^n}{n!} \quad (r \in \mathbb{N}). \quad (5.1)$$

Şimdi Eşitlik (5.1) eşitliğinin bazı özel durumlarını inceleyelim.

$\lambda = 1$ alınırsa,

$$F_{n,1}^{(r)}(x, y) = F_n^{(r)}(x, y)$$

elde edilir [36]. $\lambda = 1$ ve $x = 0$ alınırsa,

$$F_{n,1}^{(r)}(0, y) = \frac{1}{[1 - y(e^t - 1)]^r} = F_{n,1}^{(r)}(y) = F_n^{(r)}(y)$$

elde edilir. Eşitlik (5.1) eşitliğinin sol tarafında düzenleme yapılırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} F_{n,\lambda}^{(r)}(x, y) \frac{t^n}{n!} &= [1 - y(e^{\lambda t} - 1)]^{-r} e^{\lambda xt} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(r)}(y) \frac{\lambda^n t^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda xt)^k}{k!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} F_n^{(r)}(y) (\lambda)^{n+k} \frac{x^k t^{n+k}}{n!k!} \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte Eşitlik (2.2) uygulanırsa;

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n F_{n-k}^{(r)}(y)(\lambda)^n x^k \frac{t^n}{(n-k)!k!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_{n-k}^{(r)}(y)(\lambda)^n x^k \right] \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

elde edilir ve $\frac{t^n}{n!}$ katsayıları eşitlenirse;

$$F_{n,\lambda}^{(r)}(x,y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_{n-k}^{(r)}(y)(\lambda)^n x^k$$

elde edilir.

Eşitlik (4.1) ile verilen bağıntının sol tarafında payda z^q parantezine alınırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x,y,z,q) \frac{t^n}{n!} &= \frac{e^{xt}}{[z - y(e^t - 1)]^q} \\ \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x,y,z,q) \frac{t^n}{n!} &= \frac{1}{z^q} \frac{e^{xt}}{[1 - (y/z)(e^t - 1)]^q} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafı Eşitlik(5.1) daki bağıntı kullanılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n(x,y,z,q) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n^q(x,y/z)}{z^q} \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Son olarak $\frac{t^n}{n!}$ katsayıları eşitlenirse

$$\begin{aligned} & \frac{F_n^q(x,y/z)}{z^q} \\ & z^q F_n(x,y,z,q) = F_n^q(x,y/z) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece genelleştirilmiş Fubini polinomları ile yüksek mertebeden iki değişkenli genelleştirilmiş Fubini polinomları arasında bir bağıntı elde edildi.

Teorem 5.1. İki değişkenli yüksek mertebeden Fubini polinomları için aşağıdaki formül geçerlidir.

$$F_{n,\lambda}^{(r_1+r_2)}(x_1+x_2,y) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} F_{n-m,\lambda}^{(r_1)}(x_1,y) F_{m,\lambda}^{(r_2)}(x_2,y). \quad (5.2)$$

İspat. Eşitlik (5.1) de $r = r_1 + r_2$ ve $x = x_1 + x_2$ alınırsa;

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} F_{n,\lambda}^{(r_1+r_2)}(x_1+x_2, y) \frac{t^n}{n!} &= \frac{e^{\lambda(x_1+x_2)t}}{[1-y(e^{\lambda t}-1)]^{(r_1+r_2)}} \\ \sum_{n=0}^{\infty} F_{n,\lambda}^{(r_1+r_2)}(x_1+x_2, y) \frac{t^n}{n!} &= \frac{e^{\lambda(x_1)t}}{[1-y(e^{\lambda t}-1)]^{r_1}} \frac{e^{\lambda(x_2)t}}{[1-y(e^{\lambda t}-1)]^{r_2}} \\ \sum_{n=0}^{\infty} F_{n,\lambda}^{(r_1+r_2)}(x_1+x_2, y) \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} F_{n,\lambda}^{(r_1)}(x_1, y) \frac{t^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} F_{m,\lambda}^{(r_2)}(x_2, y) \frac{t^m}{m!} \\ \sum_{n=0}^{\infty} F_{n,\lambda}^{(r_1+r_2)}(x_1+x_2, y) \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} F_{n,\lambda}^{(r_1)}(x_1, y) F_{m,\lambda}^{(r_2)}(x_2, y) \frac{t^{n+m}}{n!m!}\end{aligned}$$

elde edilir ve son eşitlikte Eşitlik (2.2) sağ tarafa uygulanırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{n,\lambda}^{(r_1+r_2)}(x_1+x_2, y) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} F_{n-m,\lambda}^{(r_1)}(x_1, y) F_{m,\lambda}^{(r_2)}(x_2, y) \frac{t^n}{n!}.$$

elde edilir. Son olarak $\frac{t^n}{n!}$ katsayıları eşitlenirse, ispat tamamlanır. $\square$

5.2. İKİ DEĞİŞKENLİ YÜKSEK MERETEBEDEN GENELLEŞTİRİLMİŞ FUBİNİ POLİNOMU İÇİN TEOREMLER VE BAZI SONUÇLAR

Bu bölümde, iki değişkenli yüksek mertebeden genelleştirilmiş Fubini $F_{n,\lambda}^{(r)}(x, y)$ polinomlarının bilinear ve bilateral doğurucu fonksiyonlarını veren bazı teoremler elde edilecek ve bu teoremlerin bazı uygulamalarına yer verilecektir. Burada kullanılan yöntemler bir çok araştırmacı tarafından kullanılmaktadır.

Teorem 5.2. μ -üncü basamaktan $y_1, \dots, y_s$ ($s \in \mathbb{N}$) kompleks değişkenli sıfıra denk olmayan $\Omega_\mu(y_1, \dots, y_s)$ fonksiyonu için

$$\Lambda_{\mu,\psi}(y_1, \dots, y_s; \zeta) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_s) \zeta^k \quad (a_k \neq 0, \mu, \psi \in \mathbb{C})$$

ve

$$\theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x, y; y_1, \dots, y_s; \xi) := \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k F_{n-pk,\lambda}^{(r)}(x, y) \Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_s) \frac{\xi^k}{(n-pk)!} \quad (n, p \in \mathbb{N}) \quad (5.3)$$

olsun. Bu durumda,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x,y,y_1,\dots,y_s;\frac{\eta}{t^p})t^n = \frac{e^{\lambda xt}}{[1-y(e^{\lambda t}-1)]^r} \Lambda_{\mu,\psi}(y_1,\dots,y_s;\eta) \quad (5.4)$$

doğuruvu fonksiyonu elde edilir.

İspat. Eşitlik (5.4) ifadesinin sol tarafına T diyelim. Eşitlik (5.3) ifadesi, Eşitlik (5.4) de yerine yazılırsa,

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k F_{n-pk,\lambda}^{(r)}(x,y) \Omega_{\mu+\psi k}(y_1,\dots,y_s) \eta^k \frac{t^{n-pk}}{(n-pk)!}$$

elde edilir. Bu ifadeye, Eşitlik (2.5) özdeşliği uygulanır ve Eşitlik (5.3) ifadesi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} T &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k F_{n,\lambda}^{(r)}(x,y) \Omega_{\mu+\psi k}(y_1,\dots,y_s) \eta^k \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} F_{n,\lambda}^{(r)}(x,y) \frac{t^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_{\mu+\psi k}(y_1,\dots,y_s) \eta^k \\ &= \frac{e^{\lambda xt}}{[1-y(e^{\lambda t}-1)]^r} \Lambda_{\mu,\psi}(y_1,\dots,y_s;\eta), \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 5.3. μ -üncü basamaktan $y_1,\dots,y_s$ ($r \in N$) kompleks değişkenli sıfıra denk olmayan $\Omega_{\mu}(y_1,\dots,y_s)$ fonksiyonu için

$$\Lambda_{\mu,\psi}^{n,p}(x_1+x_2,y;y_1,\dots,y_s;t) := \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k F_{n-pk,\lambda}^{(r_1+r_2)}(x_1+x_2,y) \Omega_{\mu+\psi k}(y_1,\dots,y_s) t^k \quad (a_k \neq 0, n, p \in N)$$

dir. O halde $p \in N$ için,

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{[k/p]} a_l \binom{n-pl}{k-pl} F_{n-k,\lambda}^{(r_1)}(x_1;y) F_{k-pl,\lambda}^{(r_2)}(x_2;y) \Omega_{\mu+\psi l}(y_1,\dots,y_s) t^l \\ &= \Lambda_{\mu,\psi}^{n,p}(x_1+x_2,y;y_1,\dots,y_s;t) \end{aligned} \quad (5.5)$$

toplam ifadesi elde edilir.

İspat. Eşitlik (5.5) ifadesinin sol tarafını kolaylık olması için T ile gösterelim. Eşitlik (2.6) özdeşliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
T &= \sum_{l=0}^{[n/p]} \sum_{k=0}^{n-pl} a_l \binom{n-pl}{k} F_{n-k-pl,\lambda}^{(r_1)}(x_1, y) F_{k,\lambda}^{(r_2)}(x_2, y, z, q_2) \Omega_{\mu+\psi l}(y_1, \dots, y_s) t^l \\
&= \sum_{l=0}^{[n/p]} a_l \left(\sum_{k=0}^{n-pl} \binom{n-pl}{k} F_{n-k-pl,\lambda}^{(r_1)}(x_1, y) F_{k,\lambda}^{(r_2)}(x_2, y) \right) \Omega_{\mu+\psi l}(y_1, \dots, y_s) t^l \\
&= \sum_{l=0}^{[n/p]} a_l F_{n-pl,\lambda}^{(r_1+r_2)}(x_1 + x_2, y) \Omega_{\mu+\psi l}(y_1, \dots, y_s) t^l \\
&= \Lambda_{\mu,\psi}^{n,p}(x_1 + x_2; y_1, \dots, y_s; t)
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur. □

Şimdi Teorem 5.2 ve Teorem 5.3 ün bazı uygulamalarını elde edeceğiz.

Örneğin Teorem 5.2 de

$$\Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_s) = \Phi_{\mu+\psi k}^{(\alpha)}(y_1, \dots, y_s)$$

alınırsa ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_s) t^n = (1 - x_1 t)^{-\alpha} e^{(x_2 + \dots + x_s)t}, \quad (a \in \mathbb{C}, |t| < \{|x_1|^{-1}\})$$

doğuru fonksiyonu kullanılırsa [26], $F_{n,\lambda}^{(r)}(x, y)$ genelleştirilmiş iki değişkenli r . mertebeden Fubini polinomları için bazı sonuçlar elde edilir.

Özellik 5.4. Bu durumda,

$$\Lambda_{\mu,\psi}(y_1, \dots, y_s; \zeta) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Phi_{\mu+\psi k}^{(\alpha)}(y_1, \dots, y_s) \zeta^k \quad (a_k \neq 0, \mu, \psi \in \mathbb{C})$$

ve

$$\theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x, y; y_1, \dots, y_s; \xi) := \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k F_{n-pk,\lambda}^{(r)}(x, y) \Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_s) \frac{\xi^k}{(n-pk)!} \quad (n, p \in \mathbb{N})$$

olur. Buradan;

$$\sum_{n=0}^{\infty} \theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x,y,y_1,\dots,y_s;\frac{\eta}{t^p})t^n = \frac{e^{\lambda xt}}{[1-y(e^{\lambda t}-1)]^r} \Lambda_{\mu,\psi}(y_1,\dots,y_s;\eta) \quad (5.6)$$

doğurucu fonk bağıntısı elde edilir.

Not 5.5. Eşitlik (5.6) eşitliğinde $a_k = 1$ ($k \in \mathbb{N}_0$), $\mu = 0$ ve $\Psi = 1$ alınırsa;

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} F_{n-pk,\lambda}^{(r)}(x,y) \Phi_{\mu+\psi k}^{(\alpha)}(y_1,\dots,y_s) \eta^k t^{n-pk} \\ &= \frac{e^{\lambda xt}}{[1-y(e^{\lambda t}-1)]^r} (1-y_1\eta)^{-\alpha} e^{(y_2+\dots+y_s)\eta} (|\eta| < |y_1|^{-1}) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $F_{n,\lambda}^{(r)}(x,y)$ genelleştirilmiş iki değişkenli r . mertebeden Fubini polinomları için bilateral doğurucu fonksiyon bağıntısı elde edilir.

Eğer Teorem 5.2 de $r = 2$ için

$$\Omega_{\mu+\psi k}(y_1,y_2) = F_{\mu+\psi k,\lambda}^{(r)}(y_1,y_2)$$

seçilirse aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Özellik 5.6. Bu durumda

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mu,\psi}(y_1,y_2;\xi) &:= \sum_{k=0}^{\infty} a_k F_{\mu+\psi k,\lambda}^{(r)}(y_1,y_2) \xi^k \\ (a_k &\neq 0, \mu, \psi \in \mathbb{C}) \end{aligned}$$

ve

$$\theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x,y,y_1,y_2;\xi) := \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k F_{n-pk,\lambda}^{(r)}(x,y) F_{\mu+\psi k,\lambda}^{(r)}(y_1,y_2) \frac{\xi^k}{(n-pk)!} \quad (n \in \mathbb{N}_0, p \in \mathbb{N})$$

olup,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x,y,y_1,y_2;\frac{\eta}{t^p})t^n = \frac{e^{\lambda xt}}{[1-y(e^{\lambda t}-1)]^r} \Lambda_{\mu,\psi}(y_1,y_2;\eta) \quad (5.7)$$

eşitliği elde edilir.

Not 5.7. Özellik 5.6 da, $a_k = 1$ ($k \in \mathbb{N}_0$), $\mu = 0$ ve $\psi = 1$ alınırsa Eşitlik (5.7) ifadesi,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} F_{n-pk,\lambda}^{(r)}(x,y) F_{\mu+\psi k,\lambda}^{(r)}(y_1,y_2) \frac{\eta^k t^{n-pk}}{(n-pk)!} \\ &= \frac{e^{\lambda x t}}{[1-y(e^{\lambda t}-1)]^r} \frac{e^{\lambda y_1 \eta}}{[1-y_2(e^{\lambda \eta}-1)]^r} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece iki değişkenli yüksek meriteden genelleştirilmiş Fubini polinomları için bilinear dogurucu fonksiyon bağıntısı elde edilmiş olur.

Teorem 5.3 de $r = 2$ için

$$\Omega_{\mu+\psi k}(y_1,y_2) = F_{\mu+\psi k,\lambda}^{(r_3)}(y_1,y_2)$$

alınırsa Eşitlik (5.5) ifadesi için aşağıdaki özellik elde edilir.

Özellik 5.8.

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mu,\psi}^{n,p}(x_1+x_2,y;y_1,y_2;t) &:= \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k F_{n-pk,\lambda}^{(r_1+r_2)}(x_1+x_2,y) F_{\mu+\psi k,\lambda}^{(r_3)}(y_1,y_2) t^k \\ (a_k \neq 0, \mu, \psi \in \mathbb{C}) \end{aligned}$$

seçilirse

$$\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{[k/p]} a_l \binom{n-pl}{k-pl} F_{n-k,\lambda}^{(r_1)}(x_1;y) F_{k-pl,\lambda}^{(r_2)}(x_2;y) F_{\mu+\psi k,\lambda}^{(r_3)}(y_1,y_2) t^l = \Lambda_{\mu,\psi}^{n,p}(x_1+x_2,y;y_1,y_2;t)$$

elde edilir.

Ayrıca Teorem 5.2 ve Teorem 5.3 den faydalanarak $F_{n,\lambda}^{(r)}(x,y)$ genelleştirilmiş r . mertebeden iki değişkenli Fubini polinomları a_k ($k \in \mathbb{N}_0$) katsayısının uygun seçimi ve $\Omega_{\mu}(y_1, \dots, y_s), s \in \mathbb{N}$ yerine yazılarak uygun fonksiyonların çarpımı ile farklı sonuçlar elde edilir.

Teorem 5.9. $r \geq 1$ ve $n \geq 1$ için

$$\frac{\partial}{\partial x} F_{n,\lambda}^{(r)}(x,y) = \lambda n F_{n-1,\lambda}^{(r)}(x,y) \quad (5.8)$$

türev içeren rekürans bağıntısı elde edilir.

İspat. Eşitlik (5.1) eşitliğinin iki tarafına x e göre türevini alalım.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} F_{n,\lambda}^{(r)}(x,y) \frac{t^n}{n!} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^{\lambda x t}}{[1 - y(e^{\lambda t} - 1)]^r} \right) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} F_{n,\lambda}^{(r)}(x,y) \frac{t^n}{n!} &= \lambda t \frac{e^{\lambda x t}}{[1 - y(e^{\lambda t} - 1)]^r} \\ &= \lambda \sum_{n=0}^{\infty} F_{n,\lambda}^{(r)}(x,y) \frac{t^{n+1}}{n!} \\ &= \lambda \sum_{n=1}^{\infty} F_{n-1,\lambda}^{(r)}(x,y) \frac{t^n}{(n-1)!}\end{aligned}$$

elde edilir. Yüksek mertebeden iki değişkenli genelleştirilmiş Fubini polinomlarında, $n = 0$ için

$$F_{0,\lambda}^{(r)}(x,y) = 1$$

olduğundan,

$$\frac{\partial}{\partial x} F_{0,\lambda}^{(r)}(x,y) = 0$$

dır. Dolayısıyla

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} F_{n,\lambda}^{(r)}(x,y) \frac{t^n}{n!} = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} F_{n-1,\lambda}^{(r)}(x,y) \frac{t^n}{(n-1)!}$$

yazılabilir. Son olarak $\frac{t^n}{n!}$ katsayıları eşitlenirse ispat tamamlanır. □

Teorem 5.10. $r \geq 1$ ve $n \geq 0$ için

$$\begin{aligned}& (1+y) \frac{\partial}{\partial y} F_{n,\lambda}^{(r)}(x,y) + r F_{n,\lambda}^{(r)}(x,y) \\ &= r \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (\lambda x)^m F_{n-m,\lambda}^{(r)}(x,y) + y \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (\lambda x)^m \frac{\partial}{\partial y} F_{n-m,\lambda}^{(r)}(x,y)\end{aligned}$$

türev içeren rekürans bağıntısı elde edilir.

İspat. Eşitlik (5.1) eşitliğinin iki tarafının y ye göre türevini alalım;

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y} \left(\sum_{n=0}^{\infty} F_{n,\lambda}^{(r)}(x,y) \frac{t^n}{n!} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e^{\lambda x t}}{[1 - y(e^{\lambda t} - 1)]^r} \right) \\
\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} F_{n,\lambda}^{(r)}(x,y) \frac{t^n}{n!} \right) &= -r \frac{e^{\lambda x t} (1 - e^{\lambda t})}{[1 - y(e^{\lambda t} - 1)]^{r+1}} \\
[1 - y(e^{\lambda t} - 1)] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} F_{n,\lambda}^{(r)}(x,y) \frac{t^n}{n!} &= -r \sum_{n=0}^{\infty} F_{n,\lambda}^{(r)}(x,y) \frac{t^n}{n!} + r \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} F_{n,\lambda}^{(r)}(x,y) \frac{t^n}{n!} \frac{(\lambda x t)^m}{m!} \\
(1+y) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} F_{n,\lambda}^{(r)}(x,y) \frac{t^n}{n!} - y \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} F_{n,\lambda}^{(r)}(x,y) \frac{t^n}{n!} \frac{(\lambda x t)^m}{m!} &= r \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} F_{n,\lambda}^{(r)}(x,y) \frac{t^n}{n!} \frac{(\lambda x t)^m}{m!} - r \sum_{n=0}^{\infty} F_{n,\lambda}^{(r)}(x,y) \frac{t^n}{n!} \\
(1+y) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} F_{n,\lambda}^{(r)}(x,y) \frac{t^n}{n!} - y \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (\lambda x)^m \frac{\partial}{\partial y} F_{n-m,\lambda}^{(r)}(x,y) \frac{t^n}{(n-m)!m!} &= r \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (\lambda x)^m F_{n-m,\lambda}^{(r)}(x,y) \frac{t^n}{(n-m)!m!} - r \sum_{n=0}^{\infty} F_{n,\lambda}^{(r)}(x,y) \frac{t^n}{n!} \\
(1+y) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} F_{n,\lambda}^{(r)}(x,y) \frac{t^n}{n!} - y \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (\lambda x)^m \frac{\partial}{\partial y} F_{n-m,\lambda}^{(r)}(x,y) \frac{t^n}{n!} &= r \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (\lambda x)^m F_{n-m,\lambda}^{(r)}(x,y) \frac{t^n}{n!} - r \sum_{n=0}^{\infty} F_{n,\lambda}^{(r)}(x,y) \frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

elde edilir ve $\frac{t^n}{n!}$ katsayıları eşitlenirse;

$$\begin{aligned}
(1+y) \frac{\partial}{\partial y} F_{n,\lambda}^{(r)}(x,y) + r F_{n,\lambda}^{(r)}(x,y) &= r \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (\lambda x)^m F_{n-m,\lambda}^{(r)}(x,y) + y \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (\lambda x)^m \frac{\partial}{\partial y} F_{n-m,\lambda}^{(r)}(x,y)
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 5.11. İki değişkenli r . mertebeden $F_{n,\lambda}^{(r)}(x,y)$ Fubini polinomları için aşağıdaki rekürans bağıntısı geçerlidir.

$$F_{n+1,\lambda}^{(r)}(x,y) = \lambda \left[xF_{n,\lambda}^{(r)}(x,y) + yr \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} F_{n-m,\lambda}^{(r)}(x,y) F_{m,\lambda}(1,y) \right].$$

İspat. Eşitlik (5.1) eşitliğinin iki tarafını t ye göre kısmi türevini alalım.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\sum_{n=0}^{\infty} F_{n,\lambda}^{(r)}(x,y) \frac{t^n}{n!} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{e^{\lambda xt}}{[1-y(e^{\lambda t}-1)]^r} \right) \\ &= \lambda x \frac{e^{\lambda xt}}{[1-y(e^{\lambda t}-1)]^r} + y\lambda r \frac{e^{\lambda xt}}{[1-y(e^{\lambda t}-1)]^r} \frac{e^{\lambda t}}{[1-y(e^{\lambda t}-1)]} \\ &= \lambda x \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1,\lambda}^{(r)}(x,y) \frac{t^n}{n!} + y\lambda r \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} F_{n,\lambda}^{(r)}(x,y) F_{m,\lambda}(1,y) \frac{t^n}{n!} \frac{t^m}{m!} \\ &= \lambda x \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1,\lambda}^{(r)}(x,y) \frac{t^n}{n!} + y\lambda r \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} F_{n-m,\lambda}^{(r)}(x,y) F_{m,\lambda}(1,y) \frac{t^n}{(n-m)!n!} \end{aligned}$$

elde edilir ve Eşitlik (2.4) özdeşliği eşitliğin sağ tarafına uygulanırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1,\lambda}^{(r)}(x,y) \frac{t^n}{n!} = \lambda x \sum_{n=0}^{\infty} F_{n,\lambda}^{(r)}(x,y) \frac{t^n}{n!} + y\lambda r \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} F_{n,\lambda}^{(r)}(x,y) F_{m,\lambda}(1,y) \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir ve $\frac{t^n}{n!}$ katsayıları eşitlenirse ispat tamamlanmış olur. $\square$

Teorem 5.12. Aşağıdaki integral gösterimi doğrudur.

$$\int_{\alpha}^{\beta} F_{n,\lambda}^{(r)}(x,y)dx = \frac{F_{n+1,\lambda}^{(r)}(\beta,y) - F_{n+1,\lambda}^{(r)}(\alpha,y)}{\lambda(n+1)}.$$

İspat. Eşitlik (5.8) eşitliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} F_{n,\lambda}^{(r)}(x,y)dx &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\lambda(n+1)} \frac{\partial}{\partial x} F_{n+1,\lambda}^{(r)}(x,y)dx \\ &= \frac{1}{\lambda(n+1)} F_{n+1,\lambda}^{(r)}(x,y) \Big|_{\alpha}^{\beta} \\ &= \frac{1}{\lambda(n+1)} \left[F_{n+1,\lambda}^{(r)}(\beta,y) - F_{n+1,\lambda}^{(r)}(\alpha,y) \right] \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. □

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada genelleştirilmiş Fubini polinomları ve bu polinomun bazı uygulamaları incelenmiştir. Ayrıca çok değişkenli genelleştirilmiş Fubini polinomunun bazı özellikleri verildikten sonra bu polinomlar için multilineer ve multilateral doğurucu fonksiyon bağıntılarını veren teoremler elde edilmiştir. Ayrıca bu teoremlerin özel durumları incelendikten sonra bu polinomlar için yeni rekürans bağıntıları elde edilmiştir.

Bu tezde çalışılan konuların ışığı altında gelecekte farklı polinomların toplam formülleri, doğurucu fonksiyon bağıntıları, rekürans bağıntıları gibi farklı özellikleri de elde edilebilir. Bu tezde yapılan uygulamalar matematiğin bir çok alanında kullanılan farklı doğurucu fonksiyonların çeşitlendirilmesi ve geliştirilmesi için yol gösterebilir.

7. KAYNAKLAR

- [1] L. Kargin. (2016, 23 Aralık). *Some formulae for products of Fubini polynomials with applications*. [Online]. Erişim: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1701.01023>
- [2] Y. Simsek, “Generating functions for the Bernstein type polynomials: A new approach to deriving identities and applications for these polynomials,” *Hacettepe Journal of Mathematical and Statistics*, c. 43, sayı 1, ss. 1-14, 2014.
- [3] N. Kilar, & Y. Simsek, “A new family of Fubini type numbers and polynomials associated with Apostol–Bernoulli numbers and polynomials,” *Journal of the Korean Mathematical Society*, c. 54, ss. 1605-1621, 2017.
- [4] H. Exton, *Multiple Hypergeometric Functions and Applications*, John Wiley & Sons, New York: Halsted Press, 1976.
- [5] T. Kim, D. S. Kim, & G.-W. Jang, “A note on degenerate Fubini polynomials,” *Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society*, c. 20, sayı 4, ss. 521-531, 2017.
- [6] K. N. Boyadzhiev, “A series transformation formula and related polynomials,” *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, c. 3, sayı 23, ss. 3849-3866, 2005.
- [7] K. N. Boyadzhiev, “Exponential polynomials, Stirling numbers and evaluation of some gamma integrals,” *Abstract and Applied Analysis*, c. 18, ss. 1-18, 2009.
- [8] K. N. Boyadzhiev, “Apostol-Bernoulli functions, derivative polynomials and Eulerian polynomials,” *Advances and Applications in Discrete Mathematics*, c. 1, sayı 2, ss. 109-122, 2008.
- [9] K. N. Boyadzhiev, “Close encounters with the Stirling numbers of the second kind,” *Mathematics Magazine*, c. 85, ss. 252–266, 2012.
- [10] A. Dil, & V. Kurt, “Polynomials related to harmonic numbers and evaluation of harmonic number series I,” *Integers*, c. 12, ss. 1-18, 2012.

- [11] I. Mezö, “Periodicity of the last digits of some combinatorial sequences,” *Journal of Integer Sequences*, c. 17, ss. 1-18, 2014.
- [12] A. Dil, & V. Kurt, “Polynomials related to harmonic numbers and evaluation of harmonic number series II,” *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, c. 5, ss. 212–229, 2011.
- [13] L. Kargin, & R. B. Corcino, “Generalization of Mellin derivative and its applications,” *Integral Transforms and Special Functions*, c. 27, sayı 8, ss. 620–631, 2016.
- [14] S. M. Tanny, “On some numbers related to the Bell numbers,” *Canadian Mathematical Society*, c. 17, sayı 5, ss. 733-738, 1975.
- [15] M. E. Dasef, & S. M. Kautz, “Some sums of some importance,” *The College Mathematics Journal*, c. 28, ss. 52-55, 1997.
- [16] F. Qi. (2018, 3 Ağustos). *On generalized Fubini polynomials*. [Online]. Erişim: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01853686v1>.
- [17] H. M. Srivastava, & C. Kızılateş, “A parametric kind of the Fubini-type polynomials,” *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, c. 113, ss. 3253–3267, 2019.
- [18] H. M., Srivastava, M. A. Ozarslan, & C. Kaanoglu, “Some Generalized Lagrange-Based Apostol-Bernoulli, Apostol-Euler and Apostol-Genocchi polynomials,” *Russian Journal of Mathematical Physics*, c. 20, sayı 1, ss. 110-120, 2013.
- [19] G. Yasmin, & A. Muhyi, “Certain results of hybrid families of special polynomials associated with Appell sequences,” *Filomat*, c. 33, sayı 12, ss. 3833–3844, 2019.
- [20] H. M. Srivastava, M. A. Özarslan, & B. Yılmaz, “Some families of differential equations associated with the Hermite-based Appell polynomials and other classes of Hermite-based polynomials,” *Filomat*, c. 28, sayı 4, ss. 695-708, 2014.
- [21] G. Dattoli, S. Lorenzutta, & C. Cesarano, “Finite sums and generalized forms of Bernoulli polynomials,” *Rendiconti di Matematica*, c. 19, ss. 385-391, 1999.

- [22] G. Dattoli, “Generalized polynomials, operational identities and their applications,” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, c. 118, ss. 111-123, 2000.
- [23] H. M. Srivastava, & G. B. Djordjević, “Some generating functions and other properties associated with the generalized Hermite and related polynomials,” *Integral Transforms and Special Functions*, c. 22, sayı 12, ss. 895-906, 2011.
- [24] G. B. Djordjević, “Polynomials related to generalized Chebyshev polynomials,” *Filomat*, c. 23, sayı 3, ss. 279-290, 2009.
- [25] N. Özmen, & E. Erkuş-Duman, “Some families of generating functions for the generalized Cesáro polynomials,” *Journal of Computational Analysis and Applications*, c. 25, sayı 4, ss. 670-683, 2018.
- [26] N. Özmen, & E. Erkuş-Duman, “Some results for a family of multivariable polynomials,” *American Institute of Physics Conference Proceedings*, c. 1558, ss. 1124-1127, 2013.
- [27] G. Bretti, & P. E. Ricci, “Multidimensional extensions of the Bernoulli and Appell polynomials,” *Taiwanese Journal of Mathematics*, c. 8, sayı 3, ss. 415–428, 2004.
- [28] Y. Simsek, “Beta type polynomials and their generating functions,” *Applied Mathematics and Computation*, c. 254, ss. 172-182, 2015.
- [29] E. D. Rainville, *Special Functions*. New York, USA: The Macmillan Company, 1960.
- [30] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*. New York American Mathematical Society Colloquium Publications, 1959.
- [31] E. B. Mc Bridge, *Obtaining generating functions*. Berlin: Springer-Verlag, Berlin, 100, 1971.
- [32] H. M. Srivastava, R. Srivastava, A. Muhyi, G. Yasmin, H. Islahi, & S. Araci, “Construction of a new family of Fubini-type polynomials and its applications,” *Advances in Difference Equations*, c. 2021, sayı 36, ss. 1-25, 2021.
- [33] A. Muhyi, & S. Araci, “A Note on q-Fubini-Appell Polynomials and Related Properties,” *Hindawi, Journal of Function Spaces*, c. 2021, ss. 1-9, 2021.

- [34] M. Masjed-Jamei, & W. Koepf, “Symbolic computation of some power-trigonometric series,” *Journal of Symbolic Computation*, c. 80, ss. 273–284, 2017.
- [35] T. Kim, D. S. Kim, & G.-W. Jang, “Extended stirling polynomials of the second kind and extended Bell polynomials,” *Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society*, c. 20, sayı 3, ss. 365-376, 2017.
- [36] D. S. Kim, T. Kim, H. I. Kwon, & J. W. Park, “Two variable higher-order Fubini polynomials,” *Journal of the Korean Mathematical Society*, c. 55, sayı 4, ss. 975-986, 2018.
- [37] T. Kim, “A note on degenerate stirling polynomials of the second kind,” *Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society*, c. 20, sayı 3, ss. 319 - 331, 2017.
- [38] T. Kim, “Degenerate ordered Bell numbers and polynomials,” *Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society*, c. 20, sayı 2, ss. 137-144, 2017.
- [39] F. Qi, “Diagonal recurrence relations, inequalities, and monotonicity related to the Stirling numbers of the second kind,” *Mathematical Inequalities & Applications*, c. 19, sayı 1, ss. 313–323, 2016.
- [40] R. D. James, “The factors of a square-free integer,” *Canadian Mathematical Society*, c. 11, ss. 733-735, 1968.
- [41] H. M. Srivastava, & H. L. Monacha, *A Treatise on Generating Functions*. New York, USA: Ellis Horwood Limited, 1984.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Muhammet AĞCA

Yabancı Dili : İngilizce

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik ABD	Düzce Üniversitesi	2023
Lisans	Matematik Bölümü	Düzce Üniversitesi	2019
Lise		Kurtköy Anadolu Lisesi	2014

YAYINLAR

M. Ağca and N. Özmen, “Miscellaneous Properties of Generalized Fubini Polynomials,”
Communications in Advanced Mathematical Sciences, vol. 6, no. 1, pp. 19-30, 2023.

Y. Çin, M. Ağca and N. Özmen, “Two Variable Higher-order Generalized Fubini Polynomials,” *2nd International E-Conference on Mathematical and Statistical Science: A Selcuk Meeting*, 2023.