



FUZZY ÇİZGELER

Yüksek Lisans Tezi

Çağla EKMEN

Eskişehir 2022

FUZZY ÇİZGELER

Çağla EKMEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Tezli Yüksek Lisans Programı

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Emrah AKYAR

Eskişehir

Eskişehir Teknik Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Temmuz 2022

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Çağla Ekmen'in "Fuzzy Çizgeler" başlıklı tezi 25/07/2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Eskişehir Teknik Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği"nin ilgili maddeleri uyarınca, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Unvanı Adı Soyadı

İmza

Üye (Tez Danışmanı): Prof. Dr. Emrah AKYAR

.....

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Gonca İNCEOĞLU

.....

Üye : Dr. Öğr. Üyesi İlknur ATASEVER GÜVENÇ

.....

Prof. Dr. Murat TANIŞLI
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

25/07/2022

DANIşMAN ONAYI

Danişmanlığını yürüttüğüm yüksek lisans ęrencisi aęla EKMEN “Fuzzy izgeler” başlıklı tez çalışmasını tamamlamıştır. Hazırlamış olduğu tez tarafımca incelenmiş ve öğrencinin tez savunması sınavına alınması bilimsel ve etik açıdan uygun görülmüştür.

Tez Daniřmanı
Prof. Dr. Emrah AKYAR

ÖZET

FUZZY ÇİZGELER

Çağla EKMEN

Matematik Anabilim Dalı

Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Temmuz, 2022

Danışman : Prof. Dr. Emrah AKYAR

Bu tezde fuzzy çizgeler ele alınmış ve bu konuda yapılan çalışmalar çeşitli kaynaklardan derlenmiştir. Çizge, genel olarak bir V kümesindeki farklı elemanlar arasındaki belirli ilişkileri temsil eder. Bu bize V kümesinin herhangi iki elemanı arasındaki ilişkileri genelleştirmek için bir fikir verebilir. Eğer çizge ağırlıklı bir çizge ise ve herhangi iki köşe arasındaki tüm ağırlıklar biliniyorsa, V kümesindeki herhangi iki eleman arasındaki ilişki hakkında bir yorum yapılabilir. Ancak gerçek hayatta bu ağırlıkların kesin olarak bilinebilmesi mümkün olmayıp bu ağırlıklar genelde bulanık (fuzzy) biçimdedir. Dolayısıyla, V kümesinin elemanları arasındaki ilişkiler için fuzzy bağıntıların kullanılması daha uygun olur. Örneğin, V kümesinin elemanları çeşitli bölgeleri gösteriyorsa ve bu bölgeleri birbirine bağlayan yollar inşa edilmek istenirse, iki bölge arasına bir yol inşa etmenin maliyeti kesin bir sayı olmayıp, bir fuzzy sayı olur. Bu nedenle gerçek hayat problemlerinde fuzzy çizgelerin kullanılması çok daha gerçekçi olacaktır. Fuzzy çizgenin ilk tanımını Kaufman vermesine karşın, fuzzy çizge kuramının temellerini atan Rosenfeld ile Yeh ve Bang olmuştur.

Çalışmada ilk olarak fuzzy kümeler, fuzzy bağıntılar ve klasik çizgeler ile ilgili ön bilgiler verildikten sonra fuzzy çizgelerin tanımı ve temel kavramları sıralanarak fuzzy çizgelerde bağlantılılık konusu incelenmiştir. Daha sonra, fuzzy ormanlar, fuzzy ağaçlar ve fuzzy kesi kümeleri tanımlanarak temel özellikleri çalışılmıştır. Son olarak, fuzzy köprüler, fuzzy kopma noktaları ve fuzzy bloklar ele alınarak bu kavramları karakterize eden çeşitli sonuçlar verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Fuzzy Çizge, Fuzzy Ağaç, Fuzzy Köprü, Fuzzy Kopma Noktası

ABSTRACT

FUZZY GRAPHS

Çağla EKMEN

Mathematics Department

Eskisehir Technical University, Institute of Graduate Programs, July, 2022

Supervisor : Prof. Dr. Emrah AKYAR

In this thesis, fuzzy graphs are discussed and important results obtained on this subject have been compiled from various sources. A graph generally represents certain relationships between different elements in a set V . This gives an idea about the extent of the relationships between any two elements of the set V . If the graph is a weighted graph and all the weights between any two vertices are known, an inference can be made about the relationship between any two elements in the set V . However, in real life, it is not possible to know these weights precisely, and these weights are generally in fuzzy form. Therefore, it is more appropriate to use fuzzy relations for the relations between the elements of the set V . For example, if V represents certain regions and a network of roads is to be constructed between elements of V , then the costs of construction of the roads are not an exact number, but a fuzzy number. Hence, it will be much more realistic to use fuzzy graphs in real-life problems. Although Kaufman gave the first definition of fuzzy graph, it was Rosenfeld and Yeh and Bang who laid the foundations of fuzzy graph theory.

In the study, firstly, after giving preliminary information about fuzzy sets, fuzzy relations, and classical graphs, the definition and basic concepts of fuzzy graphs are listed and the concept of connectedness in fuzzy graphs is examined. Then, fuzzy forests, fuzzy trees, and fuzzy cut sets are defined and their basic properties are studied. Finally, fuzzy bridges, fuzzy cutvertex, and fuzzy blocks are discussed and various results characterizing these concepts are given.

Keywords: Fuzzy Graph, Fuzzy Tree, Fuzzy Bridge, Fuzzy Cutvertex

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam sırasında bilgi ve tecrübeleri ile bana yol gösterici ve destek olan değerli danışmanım sayın Prof. Dr. Emrah AKYAR'a teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Çalışmalarım sırasında desteklerini esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

Çağla EKMEN



25/07/2022

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarda bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Eskişehir Teknik Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Çağla EKMEN

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
BAŞLIK SAYFASI	I
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI	II
DANIŞMAN ONAYI	III
ÖZET	IV
ABSTRACT	V
TEŞEKKÜR	VI
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ	XI
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	XII
1 GİRİŞ	1
2 ÖN BİLGİLER	2
2.1 Fuzzy Kümeler	2
2.2 Fuzzy Bağıntılar	3
2.3 Klasik Çizgeler	5
3 FUZZY ÇİZGELER	11
3.1 Temel Kavramlar	11
3.2 Fuzzy Çizgelerde Bağlantılılık	14
4 ORMANLAR, AĞAÇLAR VE KESİ KÜMELERİ	25
4.1 Ormanlar ve Ağaçlar	25
4.2 Kesi Kümeleri	34
5 KÖPRÜLER, KOPMA NOKTALARI VE BLOKLAR	36
5.1 Köprüler	36
5.2 Kopma Noktaları	42

5.3 Bloklar	45
KAYNAKÇA	50
ÖZGEÇMİŞ	



ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1. Bir çizge örneği	6
Şekil 2.2. G çizgesi ile G 'nin H_1 , H_2 ve H_3 alt çizgeleri	7
Şekil 2.3. $n = 4, 5, 6$ için K_n tam çizgeleri	7
Şekil 2.4. S_9 yıldız çizge	8
Şekil 2.5. Bağlantısız bir çizge örneği	9
Şekil 2.6. Şekil 2.1 ile verilen çizgedeki bloklar	10
Şekil 2.7. Bazı ağaç örnekleri	10
Şekil 2.8. Bir G çizgesi ve G 'nin bazı geren ağaçları	10
Şekil 3.9. Örnek 3.2 ile verilen fuzzy çizgenin bir temsili	12
Şekil 3.10. Örnek 3.4 ile verilen kısmi fuzzy alt çizge ve P tarafından indirgenen fuzzy alt çizgenin bir temsili	13
Şekil 3.11. Örnek 3.2 ile verilen fuzzy çizgenin $t = 0.2$ ve $t = 0.6$ değerlerine karşılık gelen eşik çizgeleri	14
Şekil 3.12. Örnek 3.8 ile verilen fuzzy çizge	15
Şekil 3.13. Örnek 3.10 ile verilen fuzzy çizge	17
Şekil 3.14. Bir G fuzzy çizgesi ve G 'nin maksimum geren ağacı	17
Şekil 3.15. Örnek 3.14 ile verilen fuzzy çizge	19
Şekil 3.16. Örnek 3.15 ile verilen tam fuzzy çizge	20
Şekil 3.17. Fuzzy köprü bulundurmayan bir fuzzy tam çizge	22
Şekil 3.18. Fuzzy köprü bulunduran bir fuzzy tam çizge	22
Şekil 3.19. İki fuzzy köprünün ortak noktası olmayan bir fuzzy kopma noktası bulunduran bir çizge	23
Şekil 3.20. Fuzzy köprü bulundurduğu halde fuzzy kopma noktası bulundurmayan bir fuzzy çizge	24
Şekil 4.21. Bir fuzzy orman örneği	26
Şekil 4.22. Ağaç olmayıp, fuzzy ağaç olan bir fuzzy çizge örneği	28
Şekil 4.23. Fuzzy ağaç olduğu halde fuzzy döngü olmayan bir fuzzy çizge örneği	29
Şekil 4.24. Fuzzy ağaç olmayıp, fuzzy döngü olan bir fuzzy çizge örneği	29
Şekil 4.25. (σ, μ) fuzzy çizgesi ve $t = 0.4$ için $(\text{Supp}(\sigma), \mu^{0.4})$ çizgesi	31
Şekil 4.26. $(\text{Supp}(\sigma), \mu^t)$ bir ağaç olacak şekilde $t \in (0, 1]$ sayısı yoktur	31
Şekil 4.27. Bir fuzzy yıldız ve maksimum geren ağacı	34
Şekil 4.28. Fuzzy köprü bulundurmayan bir fuzzy çizge	35
Şekil 5.29. Örnek 5.3 ile verilen fuzzy çizge	37

Şekil 5.30.	Örnek 5.4 ile verilen fuzzy çizge	38
Şekil 5.31.	Örnek 5.5 ile verilen fuzzy çizge	38
Şekil 5.32.	Örnek 5.6 ile verilen fuzzy çizge	39
Şekil 5.33.	Örnek 5.9 ile verilen fuzzy çizge	40
Şekil 5.34.	Örnek 5.13 ile verilen fuzzy çizge	42
Şekil 5.35.	Örnek 5.14 ile verilen fuzzy çizge	43
Şekil 5.36.	Örnek 5.15 ile verilen fuzzy çizge	44
Şekil 5.37.	Örnek 5.16 ile verilen fuzzy çizge	45
Şekil 5.38.	Örnek 5.18 ile verilen fuzzy çizge	46
Şekil 5.39.	Örnek 5.19 ile verilen fuzzy çizge	47
Şekil 5.40.	Örnek 5.20 ile verilen fuzzy çizge	47
Şekil 5.41.	Örnek 5.22 ile verilen fuzzy çizge	48

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

V	: Çizgenin köşe noktaları kümesi
E	: Çizgenin kenarlar kümesi
$G = (V, \sigma, \mu)$	: G fuzzy çizgesi
(σ, μ)	: fuzzy köşe noktalar kümesi σ ve fuzzy kenarlar kümesi μ olan fuzzy çizge
σ^*	: σ fuzzy kümesinin dayanak (support) kümesi
$\text{Supp}(\sigma)$	: σ fuzzy kümesinin dayanak (support) kümesi
$\langle P \rangle$	: $P \subset V$ tarafından indirgenen fuzzy alt çizge
σ^t	: $\{x \in \sigma^* \mid \sigma(x) \geq t\}$
G^t	: G çizgesinin t -kesmesi
$\text{diam}(x, y)$	: x ile y köşe noktalarını birleştiren en uzun yolun uzunluğu, $x, y \in V$ köşe noktalarının çapı
$d(P)$	: P yolunun gücü
$s(P)$	: P yolunun gücü
$\mu^\infty(x, y)$	: x ve y köşe noktalarının bağlantılılığının gücü
$\text{CONNG}(x, y)$	: x ve y köşe noktalarının bağlantılılığının gücü
$d(\mu)$	: μ fuzzy kenarlar kümesinin derinliği
$h(\mu)$	: μ fuzzy kenarlar kümesinin yüksekliği

1. GİRİŞ

Bu çalışmada fuzzy çizgeler ve fuzzy çizgeler ile ilgili yol, bağlantılılık, orman, ağaç, döngü gibi temel kavramlar ele alınmıştır. Fuzzy kümeler ve klasik çizge kuramı ile ilgili temel kavramların bilindiği kabul edilerek sadece fuzzy çizgelerin temel kavramları üzerine yoğunlaşmıştır.

Lotfi Zadeh, 1965'te fuzzy küme kavramını ortaya atarak dünya çapında birçok araştırmacının yoğun olarak çalıştığı bir konuyu nasıl ortaya çıkardıysa, Azriel Rosenfeld de benzer şekilde fuzzy çizge kuramının en önemli kurucusu sayılabilir. Fuzzy çizge kuramının ortaya çıktığı 1975 yılından bu yana bu konu birçok araştırmacı tarafından yoğun olarak çalışılmaktadır.

Genel olarak çizge, bir V kümesindeki bazı elemanlar arasındaki belirli ilişkileri temsil eder. Eğer çizge ağırlıklı bir çizge ise ve tüm ağırlıklar biliniyorsa, bu durumda V kümesinin herhangi iki elemanı arasındaki ilişkinin derecesi hakkında bir yorum yapılabilir. Ancak gerçek hayatta bu ağırlıkların kesin olarak bilinmesi mümkün olmayıp bu ağırlıklar genelde “bulanık” (fuzzy) biçimdedir. Dolayısıyla V kümesinin elemanları arasındaki ilişkiler için bir fuzzy bağıntının kullanılması daha uygun olur. Örneğin, V kümesinin elemanları çeşitli bölgeleri göstermek üzere, bu bölgeleri birbirine bağlayan yollar inşa edilmek istenirse, iki bölge arasına bir yol inşa etmenin maliyeti kesin olmayıp, fuzzy sayı olur. Bu nedenle gerçek hayat problemlerinde fuzzy çizgelerin kullanılması daha gerçekçi olacaktır.

Fuzzy çizgenin ilk tanımını Kaufman (bkz. [5]) vermesine karşın, fuzzy çizge kuramının temellerini atan Rosenfeld (bkz. [12]) ile Yeh ve Bang (bkz. [15]) olmuştur. Rosenfeld, alt çizgeler de dahil olmak üzere yol, bağlantılılık, klik, köprü, kopma noktası, orman ve ağaç gibi çeşitli temel kavramları vermiştir. Yeh ve Bang ise, Rosenfeld'den bağımsız olarak bağlantılılık ile ilgili birçok kavramı vermiştir.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde ilk olarak Kauffman tarafından tanıtılan Fuzzy çizgeler için gerekli olan fuzzy küme ve fuzzy bağıntı kavramı verilecektir (bkz. [5]). Fuzzy çizge teorisinin gelişimi, Rosenfeld ile Yeh ve Bang'ın (bkz. [15]) temel makalelerine dayanmaktadır. Rosenfeld makalelerinde temel ve bağlantılılık ile ilgili kavramları tanıtırken Yeh ve Bang farklı bağlantılılık parametrelerini tanıtmış ve bunların uygulamalarını vermişlerdir.

Rosenfeld, köprü, yol, döngüler, ağaçlar ve bağlantılılık gibi çizge teorisinin bazı kavramlarının fuzzy çizge kuramındaki karşılıklarını vermiştir. Fuzzy çizge kuramı her geçen gün uygulamalarda daha fazla yer almaktadır. Fuzzy çizgeler, kriptoloji, küme analizi, örüntü sınıflandırması, veri tabanı teorisi, sosyal bilimler, sinir ağları, karar analizi, grup yapısı, portföy yönetimi gibi birçok alanda kullanılmaktadır (bkz. [6, 9, 10, 11]).

2.1. Fuzzy Kümeler

Olasılık teorisi, 20. yüzyılın ortalarına kadar belirsizlikle başa çıkabilen tek teori olarak kabul ediliyordu. Aristoteles'in iki değerli mantığı olarak bilinen "Evet" ya da "Hayır" mantığına dayanıyordu. Aristotelesçi mantık bir elemanın bir kümeye ait olup olmadığının bilgisini sağlar. İnsan icatlarının birçoğu bu mantığa dayalıdır. 1965 yılında Lotfi A. Zadeh çığır açıcı makalesinde yeni bir küme türü olan fuzzy kümeyi tanıtmıştır ve sonrasında ise fuzzy mantık olarak adlandırılan yeni bir mantık türünü ortaya çıkartmıştır. Zadeh'in düşünce tarzı çok farklıydı. "Evet" veya "Hayır" yerine bir kümede bir elemanın varlığı ile ilgili olarak bir elemanın kümeye ait olma ölçüsünü belirleyen üyelik derecesini kullanmıştır. Yapay zeka, elektronik, ulaşım, örüntü tanıma, robotik gibi konular fuzzy mantığın büyük ölçüde kullanıldığı alanlardan bazılarıdır. Bu bölümde ilk olarak fuzzy kümeler ile ilgili temel kavramlar verilecektir.

Tanım 2.1. *X bir küme olsun. X kümesinden $[0,1]$ aralığına tanımlı fonksiyona X kümesinin bir fuzzy alt kümesi denir.*

X kümesinin bir μ fuzzy alt kümesi, X kümesinin bir elemanının X 'in bir alt kümesine ait olma derecesi şeklinde de yorumlanabilir.

Örneğin, X 'in A fuzzy alt kümesi X kümesinde "yaşlı" olanların kümesi olarak düşünülebilir. Elbette bu şekilde verilen A kümesi iyi tanımlı değildir. Buna karşılık, X 'in her ögesi için $[0,1]$ aralığına tanımlı bir μ_A üyelik fonksiyonu yardımıyla yaşlılığın derecesi belirlenerek A kümesi iyi tanımlı hale getirilebilir. Bundan sonraki bölümlerde gerekmedikçe fuzzy alt küme yerine kısaca *fuzzy küme* ifadesi kullanılacaktır.

μ ve ν X kümesi üzerinde iki fuzzy küme olsun. Eğer her $x \in X$ için $\mu(x) \leq \nu(x)$ ise $\mu \subseteq \nu$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2. μ kümesi X kümesinin bir fuzzy alt kümesi olsun.

$$\text{Supp}(\mu) = \{x \in X \mid \mu(x) > 0\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye μ fuzzy kümesinin support (dayanak) kümesi denir. $\text{Supp}(\mu)$ yerine μ^* gösterimi de kullanılır.

Tanım 2.3. X kümesinin bir μ fuzzy alt kümesinin t -kesim (t -seviye) kümesi $t \in [0, 1]$ olmak üzere

$$\mu^t = \{x \in X \mid \mu(x) \geq t\}$$

şeklinde tanımlanır.

Yukarıda verilen kavramlar aşağıda sunulan örnek yardımıyla daha kolay anlaşılabilir.

Örnek 2.4. $X = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ olsun. X kümesinin μ fuzzy alt kümesi, aşağıdaki şekilde tanımlanan X 'in "5'e yakın" olan elemanlarının kümesi olsun:

$$\begin{aligned} \mu(1) &= 0, \mu(2) = 0.1, \mu(3) = 0.5, \mu(4) = 0.7, \mu(5) = 1, \\ \mu(6) &= 0.8, \mu(7) = 0.6, \mu(8) = 0.2, \mu(9) = 0.1, \mu(10) = 0. \end{aligned}$$

Buradan 2'nin μ fuzzy alt kümesine ait olma derecesi 6'nın ait olma derecesinden daha küçüktür şeklinde yorumlanabilir. Diğer taraftan

$$\mu^* = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

ve

$$\mu^{0.3} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

olur.

2.2. Fuzzy Bağıntılar

Bağıntı, iki veya daha fazla kümenin elemanları arasındaki ilişkiyi verirken fuzzy bağıntı bu ilişkinin iki fuzzy kümenin elemanları arasına genişletilmesidir. Zadeh 1965'te fuzzy bağıntıyı tanıtmış, daha sonra Zadeh, Kaufman, Rosenfeld önemli sonuçlar elde etmiştir (bkz. [16, 17, 12, 5]). Bu bölümde verilen bilgiler çoğunlukla Rosenfeld'in çalışmasına dayanmaktadır (bkz. [12]).

Tanım 2.5. S bir küme olsun $S \times S$ kümesinin her fuzzy alt kümesine S kümesi üzerinde bir fuzzy bağıntı denir. Yani, her $(x, y) \in S \times S$ için $0 \leq \mu(x, y) \leq 1$ olacak şekildeki μ :

$S \times S \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonuna S kümesi üzerinde bir fuzzy bağıntı denir. Eğer σ , S kümesinin bir fuzzy alt kümesi ve S kümesi üzerindeki μ fuzzy bağıntısı her $(x, y) \in S \times S$ için

$$\mu(x, y) \leq \sigma(x) \wedge \sigma(y)$$

koşulunu sağlıyorsa μ 'ye σ fuzzy kümesi üzerinde bir fuzzy bağıntı denir.

Yukarıdaki tanımdan bir fuzzy bağıntıda bir sıralı ikilinin üyelik derecesinin bileşenlerin üyelik derecelerinden büyük olamayacağı söylenebilir.

Tanım 2.6. σ , S kümesinin bir fuzzy alt kümesi ve μ , σ üzerinde bir fuzzy bağıntı olsun. Eğer her $x \in S$ için

$$\mu(x, x) = \sigma(x)$$

ise μ fuzzy bağıntısına yansıyandır denir.

Tanım 2.7. σ , S kümesinin bir fuzzy alt kümesi ve μ , σ üzerinde bir fuzzy bağıntı olsun. Eğer her $x, y \in S$ için

$$\mu(x, y) = \mu(y, x)$$

ise μ fuzzy bağıntısına simetriktir denir.

Tanım 2.8. S , T iki küme σ ve τ da sırasıyla bu kümeler üzerinde iki fuzzy alt küme olsun. $\mu : S \times T \rightarrow [0, 1]$ bağıntısı σ dan τ 'ya bir fuzzy bağıntı olsun. Benzer şekilde, U bir küme ve η , U 'nun bir fuzzy alt kümesi olsun. T üzerinde ρ fuzzy alt kümesini alalım. $\nu : T \times U \rightarrow [0, 1]$ fuzzy bağıntısı da ρ dan η ya bir fuzzy bağıntı olsun. Bu durumda her $x \in S$ ve $z \in U$ için

$$\mu \circ \nu : S \times U \rightarrow [0, 1], \quad (\mu \circ \nu)(x, z) = \bigvee \{ \mu(x, y) \wedge \nu(y, z) : y \in T \}$$

şeklinde tanımlanan fuzzy bağıntıya μ ve ν fuzzy bağıntılarının max-min bileşkesi adı verilir.

Yukarıdaki tanımdan iki fuzzy bağıntının max-min bileşkesinin de bir fuzzy bağıntı olduğu sonucu elde edilir. Bu çalışmada daha çok aynı küme üzerinde tanımlı olan fuzzy bağıntıların max-min bileşkesi ele alınacaktır.

Tanım 2.9. σ , S kümesinin bir fuzzy alt kümesi ve μ , σ üzerinde bir fuzzy bağıntı olsun. Eğer

$$\mu^2 \subseteq \mu$$

ise μ fuzzy bağıntısına geçişkendir denir. Burada, μ^2 ile μ fonksiyonunun kendisiyle max-min bileşkesi gösterilmektedir. Yani, $\mu^2 = \mu \circ \mu$ şeklindedir.

Tanım 2.10. σ , S kümesinin bir fuzzy alt kümesi ve μ , σ üzerinde bir fuzzy bağıntı olsun. Eğer μ fuzzy bağıntısı yansıma, simetri ve geçişkenlik özelliklerini sağlıyorsa μ 'ye fuzzy denklik bağıntısı denir.

Örnek 2.11. $S = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde $\sigma(a) = 0.2$, $\sigma(b) = 0.4$, $\sigma(c) = 0.6$ ve $\sigma(d) = 0.8$ şeklinde bir σ fuzzy alt kümesi tanımlansın. σ fuzzy kümesi üzerinde μ fuzzy bağıntısı aşağıdaki tablo ile verilsin.

μ	a	b	c	d
a	0.2	0.2	0.2	0.2
b	0.2	0.4	0.4	0.4
c	0.2	0.4	0.6	0.5
d	0.2	0.4	0.5	0.8

μ fuzzy bağıntısında

$$\mu(a, a) = \sigma(a) = 0.2$$

$$\mu(b, b) = \sigma(b) = 0.4$$

$$\mu(c, c) = \sigma(c) = 0.6$$

$$\mu(d, d) = \sigma(d) = 0.8$$

olduğundan μ yansıyandır. μ fuzzy bağıntısının simetrik olduğu tablodan görülmektedir. Son olarak, μ^2 max-min bileşkesi aşağıdaki tablo ile verilebilir.

μ^2	a	b	c	d
a	0.2	0.2	0.2	0.2
b	0.2	0.4	0.4	0.4
c	0.2	0.4	0.6	0.5
d	0.2	0.4	0.5	0.8

Her iki tablo karşılaştırıldığında her $x \in S$ için $\mu^2(x) \leq \mu(x)$ olduğundan $\mu^2 \subseteq \mu$ olur. Yani μ geçişkendir. Bu nedenle μ fuzzy bağıntısı σ fuzzy kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olur.

Fuzzy kümeler ve fuzzy bağıntılar ile ilgili daha fazla bilgi edinmek için [2, 7] referanslarından yararlanılabilir.

2.3. Klasik Çizgeler

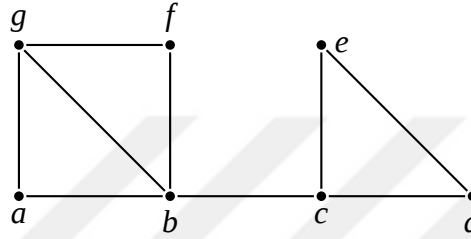
Bu bölümde, sonraki bölümler için gerekli olan temel tanım ve gösterimler verilecektir. Çizge kuramı ile ilgili daha detaylı bilgi edinmek için [1, 14] referanslarından yararlanılabilir.

Çizge, farklı nesneler ve bu nesneler arasındaki ilişkileri gösteren bir yapıdır. Çizgenin tanımını aşağıdaki şekilde verilebilir.

Tanım 2.12. Bir G çizgesi, boş kümeden farklı, elemanları köşe noktası olarak adlandırılan sonlu bir V kümesiyle, V kümesinin iki elemanlı alt kümelerinden oluşan ve elemanları kenar olarak adlandırılan E kümesi yardımıyla tanımlanır. Böylece, G çizgesi $G = (V, E)$ şeklinde gösterilir.

$G = (V, E)$ çizgesinin bir $\{a, b\} \in E$ kenarına a ve b köşe noktalarını birleştiriyor denir ve bu kenar kısaca ab (veya ba) şeklinde gösterilir.

Çizgeler genellikle köşe noktaları düzlemde birer nokta, kenarlar da bu noktalar arasına çizilen eğrilerle temsil edilir (bkz. Şekil 2.1).



Şekil 2.1. Bir çizge örneği

Tanım 2.13. $G = (V, E)$ çizgesi verilsin. $W \subset V$ ve $F \subset E$ olmak üzere, $H = (W, F)$ çizgesine G çizgesinin bir alt çizgesi denir ve $H \subseteq G$ ile gösterilir.

Tanım 2.14. $G = (V, E)$ bir çizge olsun. Eğer $V = W$ ise $H = (W, F)$ alt çizgesine G çizgesinin geren alt çizgesi denir.

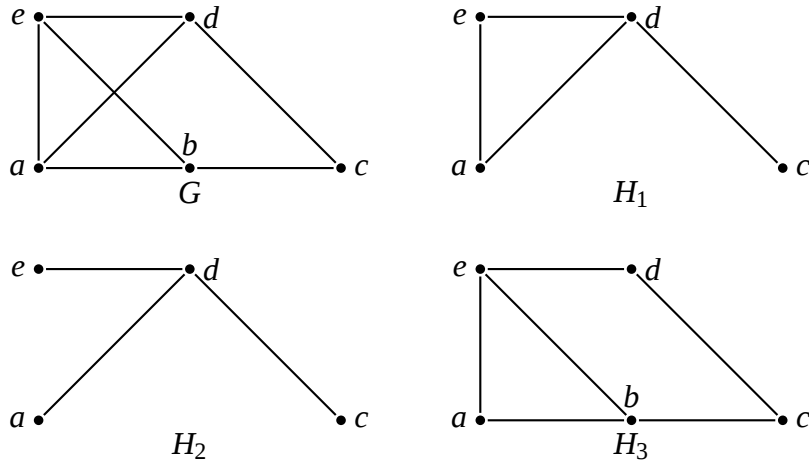
Tanım 2.15. $G = (V, E)$ bir çizge ve $S \subset V$ olsun. Köşe noktaları kümesi S olan ve kenarları ise G çizgesinde uç noktaları S kümesinde olan tüm kenarlardan oluşan $G[S]$ çizgesine G çizgesinin S tarafından indirgenen alt çizgesi denir.

Örneğin, Şekil 2.2 ile bir G çizgesi ile G 'nin H_1 , H_2 ve H_3 alt çizgeleri verilmiştir. H_1 ve H_2 alt çizgelerinde b köşe noktası bulunmadığından bu alt çizgeler G 'nin geren alt çizgeleri değildir. Ancak H_1 alt çizgesi G 'nin $\{a, c, d, e\}$ kümesi tarafından indirgenmiş alt çizgesidir. H_2 alt çizgesinde ae kenarı bulunmadığından H_2 alt çizgesi G 'nin indirgenmiş alt çizgesi değildir. H_3 alt çizgesi G 'nin geren alt çizgesi olmasına rağmen ad kenarı çizgede yer almadığından indirgenmiş alt çizge değildir.

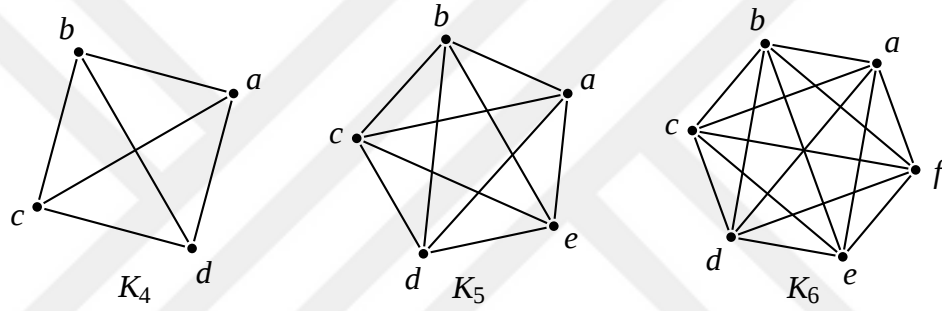
Tanım 2.16. Herhangi iki köşe noktası arasında bir kenar bulunduran çizgeye tam çizge denir. Köşe noktaları sayısı n olan bir tam çizge K_n simgesiyle gösterilir.

Şekil 2.3 ile $n = 4, 5, 6$ için K_n tam çizgeleri verilmektedir.

Tanım 2.17. Bir G çizgesinde v köşe noktasından çıkan kenar sayısına v köşe noktasının derecesi denir ve $\deg(v)$ ile gösterilir.



Şekil 2.2. G çizgesi ile G 'nin H_1 , H_2 ve H_3 alt çizgeleri



Şekil 2.3. $n = 4, 5, 6$ için K_n tam çizgeleri

Örneğin, Şekil 2.1 ile verilen çizgede

$$\deg(a) = 2, \quad \deg(b) = 4 \quad \text{ve} \quad \deg(c) = 3$$

olur.

Tanım 2.18. Eğer n köşe noktalı bağlantılı bir çizgenin sadece 1 köşe noktasının derecesi $n - 1$, diğer köşe noktalarının derecesi 1 ise bu çizge yıldız çizge olarak adlandırılır. n köşe noktası olan yıldız çizge S_n simgesiyle gösterilir.

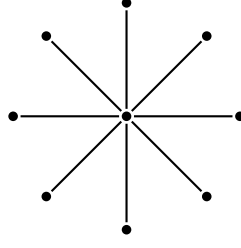
Örneğin, Şekil 2.4 ile S_9 yıldız çizge verilmektedir.

Tanım 2.19. Bir $G = (V, E)$ çizgesinde $x_0, x_1, \dots, x_k \in V$ olmak üzere,

$$x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k$$

şeklinde ardışık kenarlar bitişik veya özdeş olacak şekildeki kenarların sonlu dizisine G içinde x_0 ve x_k köşe noktalarını birleştiren bir yolculuk denir. x_0 ve x_k köşe noktalarını birleştiren bir yolculuk,

$$x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_{k-1} \rightarrow x_k$$



Şekil 2.4. S_9 yıldız çizge

biçiminde gösterilir.

Bir yolculuktaki kenar sayısına o yolculuğun uzunluğu denir.

Tanım 2.20. G çizgesindeki bir yolculuğun tüm kenarları farklı ise bu yolculuğa bir tur denir. Eğer turun tüm köşe noktaları da farklıysa bu tura bir yol denir.

Örneğin, Şekil 2.1 ile verilen çizgede

$$a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow c \rightarrow b \rightarrow f$$

yolculuğu a ve f köşe noktalarını birleştiren, uzunluğu 7 olan bir yolculuk olur. Ancak bu yolculukta bc kenarı iki kez kullanıldığından bu yolculuk bir tur değildir. Diğer taraftan,

$$d \rightarrow e \rightarrow c \rightarrow b \rightarrow f \rightarrow g \rightarrow b \rightarrow a$$

yolculuğunda ise her bir kenar farklı olduğundan bu yolculuk Şekil 2.1 ile verilen çizge içinde d ve a köşe noktalarını birleştiren bir tur olur. Fakat b köşe noktası iki kez kullanıldığından bu tur bir yol değildir. Son olarak,

$$a \rightarrow g \rightarrow b \rightarrow f$$

yolculuğunda ise her bir kenar farklı olduğundan Şekil 2.1 ile verilen çizge içinde a ile f köşe noktalarını birleştiren bir tur olur. Aynı zamanda her bir köşe noktası farklı olduğundan bu tur çizge içinde a ile f köşe noktalarını birleştiren bir yol olur.

Tanım 2.21. Başlangıç ve bitiş noktaları aynı olan yola döngü denir.

Örneğin,

$$a \rightarrow b \rightarrow f \rightarrow g \rightarrow a,$$

$$a \rightarrow b \rightarrow g \rightarrow a,$$

$$b \rightarrow g \rightarrow f \rightarrow b,$$

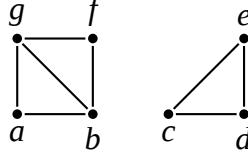
ve

$$c \rightarrow e \rightarrow d \rightarrow c$$

Şekil 2.1 ile verilen çizge içerisindeki tüm döngülerdir.

Tanım 2.22. Herhangi iki köşe noktası arasında bir yol bulunan çizgeye bağlantılı veya tek parça çizge denir.

Örneğin, Şekil 2.1 ile verilen çizge bağlantılı bir çizgedir. Ancak Şekil 2.5 ile verilen G çizgesi bağlantılı değildir. Bu çizgede örneğin a köşe noktası ile e köşe noktasını birleştiren bir yol mevcut değildir.



Şekil 2.5. Bağlantısız bir çizge örneği

Tanım 2.23. Bağlantılı bir çizgeden silindiğinde çizgeyi bağlantısız yapan kenara köprü denir.

Örneğin, Şekil 2.1 ile verilen çizgede bc kenarı bir köprü olur.

Tanım 2.24. Bağlantılı bir çizgeden silindiğinde çizgeyi bağlantısız yapan kenarların kümesine ayıran kenarlar kümesi denir.

Tanım 2.25. Minimal ayıran kümeye kesi kümesi denir.

Örneğin, Şekil 2.1 ile verilen çizgede $\{cd, ce\}$ kenarlar kümesi bir ayıran kenarlar kümesi olur. Bu küme aynı zamanda bir kesi kümesidir.

Köprü kavramı kesi kümeleri yardımıyla da tanımlanabilir. Sadece bir elemanı olan kesi kümesindeki kenara köprü denir.

Tanım 2.26. Bağlantılı bir çizgeden silindiğinde çizgeyi bağlantısız yapan köşe noktalar kümesine ayıran noktalar kümesi denir.

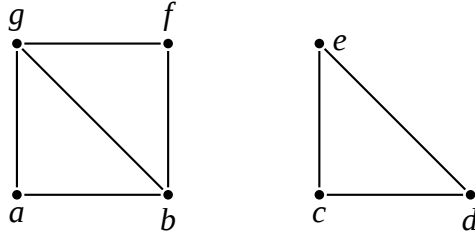
Çizgeden bir köşe noktası silindiğinde o köşe noktasına bağlı kenarlar da silinmelidir.

Tanım 2.27. Eğer bir çizgenin ayıran nokta kümesi tek elemanlı ise kümenin bu elemanına çizgenin kopma noktası denir.

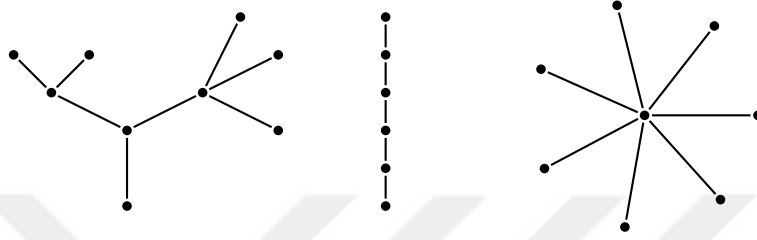
Örneğin, Şekil 2.1 ile verilen çizgede b ve c köşe noktaları birer kopma noktası olur.

Tanım 2.28. Bir G çizgesinin bağlantılı ve kopma noktası bulundurmeyen maksimal alt çizgesine G çizgesinde bir blok adı verilir. Eğer G çizgesi bağlantılı ve kopma noktası bulundurmuyorsa G 'nin kendisi bir blok olur.

Örneğin, Şekil 2.1 ile verilen çizgedeki bloklar Şekil 2.6 ile verilmiştir.



Şekil 2.6. Şekil 2.1 ile verilen çizgedeki bloklar



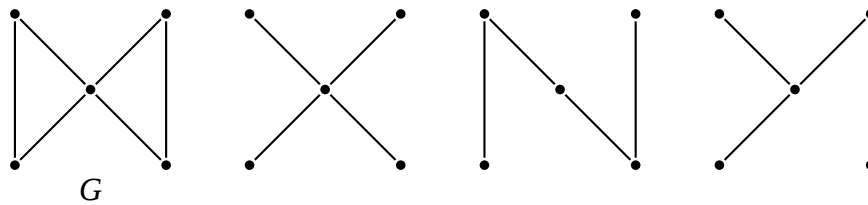
Şekil 2.7. Bazı ağaç örnekleri

Tanım 2.29. *Döngü içermeyen bağlantılı çizgelere ağaç denir.*

Örneğin yukarıda tanımlanan yıldız çizgeleri bir ağaç olur. Şekil 2.7 ile bazı ağaç örnekleri verilmiştir.

Tanım 2.30. *Bağlantılı bir G çizgesinin bazı kenarları silinerek G ile aynı köşe noktalara sahip ağaçlar elde edilebilir. Bu şekilde elde edilen ağaçlara G çizgesinin geren ağaçları denir. Yani G çizgesinin ağaç olan geren alt çizgelerine G 'nin geren ağacı denir.*

Örneğin Şekil 2.8 ile bir G çizgesi ve G 'nin bazı geren ağaçları verilmektedir.



Şekil 2.8. Bir G çizgesi ve G 'nin bazı geren ağaçları

Tanım 2.31. *Döngü içermeyen çizgelere orman denir.*

3. FUZZY ÇİZGELER

3.1. Temel Kavramlar

Bu bölümde fuzzy çizge kuramının temel kavramları verilecektir. Ancak fuzzy çizge kavramından önce çizgelerin bağıntılar yardımıyla aşağıdaki gibi bir tanımı verilebilir.

V boş kümeden farklı bir küme olsun. $V \times V$ üzerinde bir $\sim$ bağıntısı aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$(x, y) \sim (u, v) \Leftrightarrow (x = u \text{ ve } y = v) \text{ veya } (x = v \text{ ve } y = u).$$

Bu şekilde tanımlanan $\sim$ bağıntısının $V \times V$ kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olduğu kolaylıkla gösterilebilir. $x, y \in V$ için (x, y) 'nin $\sim$ bağıntısına göre denklik sınıfı $[(x, y)]$ ile gösterilsin. Yani

$$[(x, y)] = \{(x, y), (y, x)\}$$

olsun.

Diğer taraftan,

$$\mathcal{E}_V = \{[(x, y)] : x, y \in V, x \neq y\}$$

olsun. Gösterimlerde kısalık açısından, V kümesini vurgulamaya gerek olmadığında $\mathcal{E}_V$ yerine $\mathcal{E}$ yazacağız. Şimdi $E \subset \mathcal{E}$ olsun. Bu durumda (V, E) ikilisine bir çizge denir. V kümesinin elemanlarına çizgenin köşe noktaları, E kümesinin elemanlarına ise çizgenin kenarları denir. $x, y \in V$ için $[(x, y)]$ denklik sınıfını kısaca xy şeklinde yazılacaktır. Bu durumda $xy = yx$ olduğu, çizgenin paralel kenarlar bulundurmadığı ve bir köşe noktasının kendinden kendine bir kenar bulundurmadığı açıktır.

Tanım 3.1. Boş kümeden farklı bir V kümesiyle her $x, y \in V$ için

$$\mu(xy) \leq \sigma(x) \wedge \sigma(y)$$

olacak şekilde $\sigma : V \rightarrow [0, 1]$ ve $\mu : \mathcal{E} \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonlarından oluşan $G = (V, \sigma, \mu)$ üçlüsüne bir fuzzy çizge denir.

Burada, $\sigma(x) \wedge \sigma(y)$ ile $\sigma(x)$ ve $\sigma(y)$ değerlerinin minimumu ifade edilmektedir.

σ fuzzy kümesine G fuzzy çizgesinin fuzzy köşe noktalar kümesi, μ fuzzy kümesine ise G fuzzy çizgesinin fuzzy kenarlar kümesi denir.

Açıktır ki, μ, σ üzerinde bir fuzzy bağıntı olur.

Bu çalışmada tersi belirtilmedikçe V kümesi sonlu bir küme olarak alınacaktır. Gösterimlerde kısalık açısından $G = (V, \sigma, \mu)$ üçlüsü yerine kısaca G ya da (σ, μ) gösterimleri kullanılacaktır.

σ^* ve μ^* gösterimleri sırasıyla σ ve μ fuzzy kümelerinin dayanak (support) kümelerini gösterecektir. Dayanak kümeler $\text{Supp}(\sigma)$ ve $\text{Supp}(\mu)$ şeklinde de gösterilmektedir.

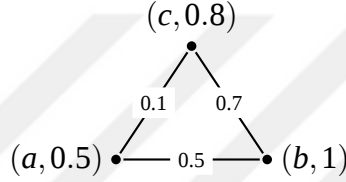
Örnek 3.2. $V = \{a, b, c\}$ olsun. V üzerinde σ fuzzy kümesi $\sigma(a) = 0.5$, $\sigma(b) = 1$ ve $\sigma(c) = 0.8$ şeklinde tanımlansın. μ fuzzy kümesi ise $\mathcal{E}$ üzerinde $\mu(ab) = 0.5$, $\mu(ac) = 0.1$ ve $\mu(bc) = 0.7$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$0.5 = \mu(ab) \leq \sigma(a) \wedge \sigma(b) = \min\{0.5, 1\} = 0.5$$

$$0.1 = \mu(ac) \leq \sigma(a) \wedge \sigma(c) = \min\{0.5, 0.8\} = 0.5$$

$$0.7 = \mu(bc) \leq \sigma(b) \wedge \sigma(c) = \min\{1, 0.8\} = 0.8$$

olduğundan $G = (V, \sigma, \mu)$ ya da kısaca $G = (\sigma, \mu)$ bir fuzzy çizge olur (bkz. Şekil 3.9). Ancak $\mu(ab) = 0.6$ şeklinde tanımlansaydı $\mu(ab) \not\leq \sigma(a) \wedge \sigma(b)$ olacağından $G = (\sigma, \mu)$ bir fuzzy çizge olmazdı.



Şekil 3.9. Örnek 3.2 ile verilen fuzzy çizgenin bir temsili

Tanım 3.1 yardımıyla, (ağırlıklı olmayan) herhangi bir (V, E) çizgesi, her $x \in V$ için $\sigma(x) = 1$ ve her $x, y \in V$ için $\mu(xy) = 0$ veya 1 şeklinde tanımlanmak üzere, bir fuzzy çizge gibi de düşünülebilir. Her $x \in V$ için $\sigma(x) = 1$ şeklinde tanımlı olan fuzzy çizge (V, μ) şeklinde gösterilecektir.

Tanım 3.3. $G = (V, \sigma, \mu)$ bir fuzzy çizge olsun. Bu durumda $\tau \subseteq \sigma$ ve $\nu \subseteq \mu$ olmak üzere, $H = (V, \tau, \nu)$ fuzzy çizgesine G çizgesinin bir kısmi fuzzy alt çizgesi denir.

Benzer olarak, $P \subseteq V$ ve her $x \in P$ için $\tau(x) = \sigma(x)$ ve her $x, y \in P$ için $\nu(xy) = \mu(xy)$ olmak üzere $H = (P, \tau, \nu)$ fuzzy çizgesine G çizgesinin P tarafından indirgenmiş fuzzy alt çizgesi denir. P tarafından indirgenen fuzzy alt çizge $\langle P \rangle$ şeklinde gösterilir.

Örnek 3.4. $G = (\tau, \nu)$ fuzzy çizgesi verilsin. τ ve ν kümelerinin dayanak kümeleri ise $\tau^* = \{a, b, c\}$ ve $\nu^* = \{ab, bc\}$ olsun. Ayrıca, $\tau(a) = 0.4$, $\tau(b) = 0.8$, $\tau(c) = 0.5$, $\nu(ab) = 0.3$ ve $\nu(bc) = 0.2$ olsun. Bu durumda,

$$\tau(a) = 0.4 \leq \sigma(a) = 0.5,$$

$$\tau(b) = 0.8 \leq \sigma(b) = 1,$$

$$\tau(c) = 0.5 \leq \sigma(c) = 0.8,$$

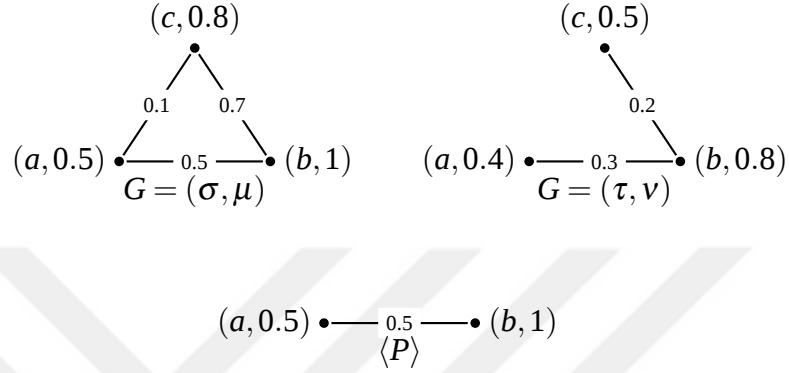
$$\nu(ab) = 0.3 \leq \mu(ab) = 0.5,$$

$$\nu(ac) = 0 \leq \mu(ac) = 0.1,$$

$$\nu(bc) = 0.2 \leq \mu(bc) = 0.7$$

yani $\tau \subseteq \sigma$ ve $\nu \subset \mu$ olduğundan G fuzzy çizgesi Örnek 3.2 ile verilen fuzzy çizgenin bir kısmi fuzzy alt çizgesi olur (bkz. Şekil 3.10).

Diğer taraftan, $P = \{a, b\}$ ve $\tau(a) = 0.5$, $\tau(b) = 1$ ve $\nu(ab) = 0.5$ olmak üzere $H = (\tau, \nu)$ fuzzy çizgesi, Örnek 3.2 ile verilen fuzzy çizgenin P tarafından indirgenen fuzzy alt çizgesi olur.



Şekil 3.10. Örnek 3.4 ile verilen kısmi fuzzy alt çizge ve P tarafından indirgenen fuzzy alt çizgenin bir temsili

Tanım 3.5. $G = (\sigma, \mu)$ bir fuzzy çizge olsun. Eğer $\sigma = \tau$ ise (τ, ν) kısmi fuzzy alt çizgesine G fuzzy çizgesinin geren fuzzy alt çizgesi denir.

$G = (\sigma, \mu)$ fuzzy çizgesinin $P \subset V$ kümesi tarafından indirgenen $H = (\tau, \nu)$ alt çizgesi aslında bir kısmi fuzzy alt çizge olarak da düşünülebilir. Gerçekten de eğer her $x \in P$ için $\tau(x) = \sigma(x)$ ve $x \notin P$ için $\tau(x) = 0$ şeklinde ve kenarlar kümesinden alınan xy ögesi P kümesinden elemanlar bulunduruyorsa $\nu(xy) = \mu(xy)$ aksi halde $\nu(xy) = 0$ alınırsa H fuzzy çizgesi G fuzzy çizgesinin bir kısmi fuzzy alt çizgesi olur.

Tanım 3.6. $G = (V, \sigma, \mu)$ bir fuzzy çizge olsun. $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere,

$$\sigma^t = \{x \in \sigma^* \mid \sigma(x) \geq t\}$$

ve

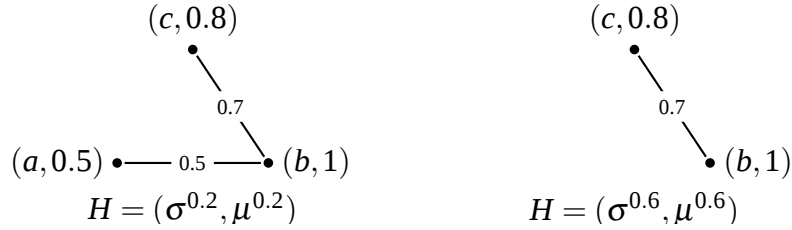
$$\mu^t = \{uv \in \mu^* \mid \mu(uv) \geq t\}$$

(t -kesme ya da t -seviye) kümeleri tanımlansın. Açıktır ki,

$$\mu^t \subseteq \{xy \mid \sigma(x) \geq t \text{ ve } \sigma(y) \geq t\}$$

olur. Yani $H = (\sigma^t, \mu^t)$ köşe noktaları kümesi σ^t ve kenarlar kümesi μ^t olan bir fuzzy çizge olur. H çizgesine G fuzzy çizgesinin t 'ye karşılık gelen eşik çizgesi (threshold graph) denir.

Şekil 3.11 ile Örnek 3.2 ile verilen $G = (V, \sigma, \mu)$ fuzzy çizgesinin sırasıyla $t = 0.2$ ve $t = 0.6$ değerlerine karşılık gelen $H = (\sigma^{0.2}, \mu^{0.2})$ ve $H = (\sigma^{0.6}, \mu^{0.6})$ eşik çizgeleri verilmektedir.



Şekil 3.11. Örnek 3.2 ile verilen fuzzy çizgenin $t = 0.2$ ve $t = 0.6$ değerlerine karşılık gelen eşik çizgeleri

Önerme 3.7. $G = (\sigma, \mu)$ bir fuzzy çizge ve $0 \leq s < t \leq 1$ olsun. Bu durumda (σ^t, μ^t) eşik çizgesi (σ^s, μ^s) eşik çizgesinin bir alt çizgesi olur. Ayrıca $H = (\tau, \nu)$ fuzzy çizgesi G fuzzy çizgesinin kısmi fuzzy alt çizgesi ise her $t \in [0, 1]$ için (τ^t, ν^t) eşik çizgesi (σ^t, μ^t) eşik çizgesinin alt çizgesi olur.

3.2. Fuzzy Çizgelerde Bağlantılılık

Bu kesimde esas olarak çizgelerdeki kopma noktası (cut-vertex) ve köprü kavramlarının fuzzy çizgelerdeki karşılığı olan fuzzy kopma noktası ve fuzzy köprü kavramları üzerinde durulacaktır.

$G = (\sigma, \mu)$ fuzzy çizgesindeki bir P yolu, $i = 1, 2, \dots, n$ için $\mu(x_{i-1}x_i) > 0$ olmak üzere, farklı $x_0, x_1, \dots, x_n$ köşe noktalarının bir dizisidir (x_0 ile x_n aynı olabilir). Burada n sayısına P yolunun *uzunluğu* denir. Ardışık köşe noktalara ise P yolunun *kenarları* denir. $x, y \in V$ köşe noktalarının *çapı* $\text{diam}(x, y)$ ile gösterilir ve x ile y köşe noktalarını birleştiren en uzun yolun uzunluğu olarak tanımlanır.

Bir $P, x_0, x_1, \dots, x_n$ yolunun *gücü*,

$$\bigwedge_{i=1}^n \mu(x_{i-1}, x_i)$$

şeklinde yani en zayıf kenarın ağırlığı olarak tanımlanır ve $d(P)$ ya da $s(P)$ ile gösterilir.

x ve y köşe noktalarının *bağlantılılığının gücü*, x ve y arasındaki tüm yolların güçlerinin maksimumu olarak tanımlanır ve $\mu^\infty(x, y)$ veya $\text{CONN}_G(x, y)$ ile gösterilir. Herhangi iki x ve y köşe noktalarını birleştiren en güçlü yolun gücü $\mu^\infty(x, y)$ olur.

Eğer $(\tau, \nu), (\sigma, \mu)$ fuzzy çizgesinin kısmi fuzzy alt çizgesi ise $\nu^\infty \subseteq \mu^\infty$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Eğer bir P yolunda $x_0 = x_n$ ve $n \geq 3$ ise P yoluna bir *döngü* adı verilir.

Bir yol ile birleştirilebilen köşe noktalara *bağlantılı* köşe noktalar adı verilir. Eğer fuzzy çizgenin keyfi iki köşe noktası bağlantılı ise fuzzy çizgeye bağlantılı fuzzy çizge

denir. Bağlantılı olma bağıntısının köşe noktalar üzerinde bir denklik bağıntısı olduğu hemen söylenebilir. Köşe noktaların bu bağıntıyla belirlenen denklik sınıflarına fuzzy çizgenin (bağlantılı) *bileşenleri* adı verilir. O halde bileşen, verilen fuzzy çizgenin maximal bağlantılı kısmi fuzzy alt çizgesi olur.

$G = (\sigma, \mu)$ bir fuzzy çizge, x ve y iki farklı köşe noktası olsun. G çizgesinden xy kenarının silinmesiyle elde edilen kısmi fuzzy alt çizge G' ile gösterilsin. Yani, $\mu'(xy) = 0$ ve diğer kenarlar için $\mu' = \mu$ olmak üzere, $G' = (\sigma, \mu')$ olsun. Eğer

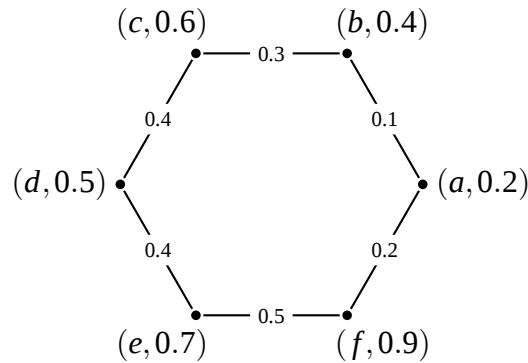
$$\mu'^{\infty}(u, v) < \mu^{\infty}(u, v)$$

olacak şekilde $u, v \in \sigma^*$ köşe noktaları varsa xy kenarına G fuzzy çizgesinde bir *fuzzy köprü* adı verilir. Bir başka ifadeyle, xy kenarının silinmesi G' 'nin bazı nokta çiftlerinin bağlantılılığının gücünü azaltıyorsa xy kenarına bir fuzzy köprü denir. O halde xy kenarının fuzzy köprü olması için gerek ve yeter koşul, xy kenarının u ve v köşe noktalarını birleştiren her en güçlü yolun bir kenarı olacak şekilde u ve v köşe noktalarının var olmasıdır.

Örnek 3.8. Şekil 3.12 ile verilen fuzzy çizgede

$$P_1 : a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e \text{ ve } P_2 : a \rightarrow f \rightarrow e$$

yolları a ve e köşe noktalarını birleştiren iki farklı yoldur. Buradan $\text{diam}(a, e) = 4$ olur. Ayrıca $d(P_1) = 0.1$ ve $d(P_2) = 0.2$ olduğundan $\mu^{\infty}(a, e) = 0.2$ elde edilir. ab kenarı hariç herhangi bir kenarın silinmesi silinen bu kenarın uç noktalarının bağlantılılığının gücünü azaltacağından ab hariç tüm kenarlar bir fuzzy köprü olur.



Şekil 3.12. Örnek 3.8 ile verilen fuzzy çizge

Teorem 3.9. $G = (\sigma, \mu)$ bir fuzzy çizge olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) xy kenarı bir fuzzy köprüdür.

(ii) $\mu'^{\infty}(x,y) < \mu(xy)$ olur.

(iii) xy kenarı bir döngünün en zayıf kenarı değildir.

Kanıt. (ii) $\Rightarrow$ (i) Tersine, kabul edelim ki, $\mu'^{\infty}(x,y) < \mu(xy)$ iken xy kenarı bir fuzzy köprü olmasın. Bu durumda

$$\mu'^{\infty}(x,y) = \mu^{\infty}(x,y) \geq \mu(xy)$$

elde edilir. O halde xy kenarı bir fuzzy köprü olmak zorundadır.

(i) $\Rightarrow$ (iii) Tersine, kabul edelim ki xy kenarı bir köprü ve bir döngünün en zayıf kenarı olsun. Bu durumda xy kenarını bulunduran bir P yolu xy kenarı silinerek, döngünün yardımıyla xy kenarını bulundurmeyen bir P' yoluna dönüştürülebilir. Bu durumda P' yolunun gücü en az P yolunun gücü kadar olur. O zaman xy kenarının silinmesi yolun gücünü azaltmadığından xy kenarının bir fuzzy köprü olmasıyla çelişeceğinden kabulümüz hatalıdır xy bir döngünün en zayıf kenarı olamaz.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Eğer $\mu'^{\infty}(x,y) \geq \mu(xy)$ ise x köşe noktasından y köşe noktasına xy kenarını içermeyen ve gücü $\geq \mu(xy)$ olan bir yol vardır. Bu yola xy kenarı da eklenirse G fuzzy çizgesinde xy kenarının en zayıf olduğu bir döngü elde edilir. Bu ise xy kenarının bir döngünün en zayıf kenarı olmaması ile çelişir. $\square$

w köşe noktası G fuzzy çizgesinin herhangi bir köşe noktası, G' çizgesi de G fuzzy çizgesinden w köşe noktasının silinmesiyle elde edilen kısmi fuzzy alt çizgesi olsun. Yani, $\sigma'(w) = 0$, diğer köşe noktalar için $\sigma' = \sigma$ ve tüm z köşe noktaları için $\mu'(wz) = 0$, w köşe noktasını bulundurmeyen diğer kenarlar için $\mu' = \mu$ olmak üzere $G = (\sigma', \mu')$ olsun. Eğer $u \neq w \neq v$ için

$$\mu'^{\infty}(u,v) < \mu^{\infty}(u,v)$$

olacak şekilde u ve v köşe noktaları varsa, w köşe noktasına G fuzzy çizgesinin bir *fuzzy kopma noktası* denir. Bir başka ifadeyle, w köşe noktasının silinmesi iki köşe noktasının bağlantılılığının gücünü azaltıyorsa w köşe noktasına fuzzy kopma noktası denir. O halde w köşe noktasının fuzzy kopma noktası olması için gerek ve yeter koşul w , u ve v köşe noktalarını birleştiren her en güçlü yolun üzerinde olacak şekilde w köşe noktasından farklı u ve v köşe noktalarının var olmasıdır.

Bir G çizgesinin bağlantılı ve kopma noktası bulundurmeyen maksimal alt çizgesine G çizgesinde bir blok adı verilir. Eğer G çizgesi bağlantılı ve kopma noktası bulundurmuyorsa G 'nin kendisi bir blok olur.

Eğer G fuzzy çizgesinde hiç fuzzy kopma noktası yoksa G fuzzy çizgesine *parçalanamaz* (nonseparable) veya *blok* adı verilir. Fuzzy çizgelerde bir blok fuzzy

köprüler bulundurabilirken, çizgelerde bu durum söz konusu değildir. Bazen bir fuzzy çizgedeki bloğa fuzzy blok adı da verilir.

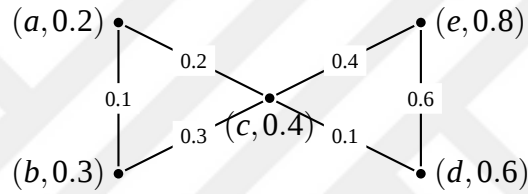
Örnek 3.10. Şekil 3.13 ile verilen fuzzy çizgede çizgelerde olduğu gibi c köşe noktası bir fuzzy kopma noktası olur. Gerçekten de, c köşe noktasının silinmesiyle

$$0 = \mu'^{\infty}(a, e) < \mu^{\infty}(a, e) = 0.2$$

elde edilir. Diğer taraftan e köşe noktası da bir fuzzy kopma noktası olur. Gerçekten de, e köşe noktası silinecek olursa,

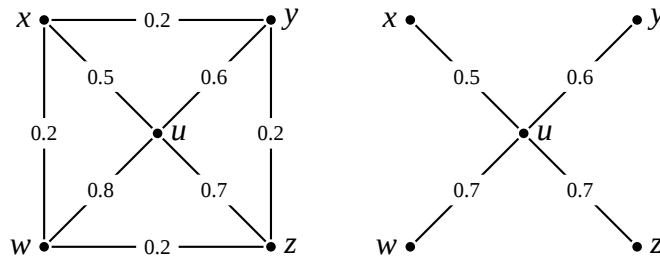
$$0.1 = \mu'^{\infty}(a, d) < \mu^{\infty}(a, d) = 0.2$$

olduğundan e bir fuzzy kopma noktası olur.



Şekil 3.13. Örnek 3.10 ile verilen fuzzy çizge

Her $u, v \in G$ için, T içinde u ve v köşelerini birleştiren tek en güçlü yolun gücü, $\mu^{\infty}(u, v)$ ise $T = (\sigma, \nu)$ fuzzy geren alt ağacına $G = (\sigma, \mu)$ bağlantılı fuzzy çizgesinin bir maksimum geren ağacı denir. Örneğin Şekil 3.14 ile bir G fuzzy çizgesi ile G 'nin bir geren maksimum ağacı verilmektedir.



Şekil 3.14. Bir G fuzzy çizgesi ve G 'nin maksimum geren ağacı

Fuzzy kopma noktaları ve fuzzy köprüler, maksimum geren ağaçlar yardımı ile aşağıdaki gibi karakterize edilebilir.

Teorem 3.11. $G = (\sigma, \mu)$ bir fuzzy çizge olsun. w köşe noktasının G 'nin bir fuzzy kopma noktası olması için gerek ve yeter koşul w köşe noktasının G 'nin her maksimum geren ağacında bir uç nokta olmamasıdır.

Kanıt. ($\Rightarrow$;) w köşe noktasının G 'nin bir fuzzy kopma noktası olsun. Bu durumda w köşe noktası G 'nin w köşe noktasından farklı u ve v köşe noktalarını birleştiren her en güçlü yolun üzerinde olur. G 'nin her bir maksimum geren ağacı u ve v köşe noktalarını birleştiren bir tek güçlü yol bulundurduğundan w uç nokta olamaz.

($\Leftarrow$;) w köşe noktası G 'nin her maksimum geren ağacının bir uç noktası olmasın. Bir T maksimum geren ağacını ele alalım. w uç nokta olmadığından bu ağaçta uw ve wv şeklinde iki kenar mevcuttur.

Kabul edelim ki, tersine $u \rightarrow w \rightarrow v$ yolu en güçlü $u - v$ yolu olsun ancak w bir kopma noktası olmasın.

O zaman her u ve v nokta çifti için u ile v yi birleştiren ancak w köşe noktasını bulundurmayan en az bir tane en güçlü yol vardır.

Bu yollardan kenarları T de olmayan ve u ile v köşe noktalarını birleştiren bir P yolunu ele alalım.

Genelliği bozmaksızın T de $\mu^\infty(u, v) = \mu(uw)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda P deki kenarların gücü $\geq \mu(uw)$ olur. uw kenarının silinerek P nin T maksimum geren ağacına eklenmesi yeni bir maksimum geren ağaç verir ve bu durumda w köşe noktası bu ağacın bir uç noktası olur. Bu ise varsayımımızla çelişir. $\square$

Teorem 3.11 yardımıyla, G fuzzy çizgesinin maksimum geren T ağacının uç noktalarının G 'nin fuzzy kopma noktaları olamayacağı söylenebilir. Böylece aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 3.12. *Her G fuzzy çizgesi fuzzy kopma noktası olmayan en az iki köşe noktası bulundurur.*

Sonuç 3.13. *$G = (\sigma, \mu)$ fuzzy çizgesinin bir uv kenarının fuzzy köprü olması için gerek ve yeter koşul uv kenarının G 'nin her maksimum geren ağacına ait olmasıdır.*

Kanıt. ($\Rightarrow$;) uv kenarı G fuzzy çizgesinde bir fuzzy köprü olsun. Bu durumda $u - v$ yolu G fuzzy çizgesindeki tek en güçlü yol olur. O halde uv kenarı G nin her maksimal geren ağacında bulunur.

($\Leftarrow$;) Tersine uv kenarı G fuzzy çizgesinin her maksimal geren ağacında bulunsun ancak kabul edelim ki uv bir fuzzy köprü olmasın. uv kenarı G 'de bir fuzzy köprü olmadığından G 'deki bir döngünün en zayıf kenarı olur. O zaman $\mu^\infty(u, v) \geq \mu(uv)$ olur. Bu ise G 'nin uv kenarını bulundurmayan en az bir maksimum geren ağacının var olduğu anlamına gelir. Bu ise uv kenarının G 'nin her maksimal geren ağacında bulunması ile çelişir. $\square$

Çizgelerde olduğu gibi fuzzy çizgelerde de fuzzy tam çizge kavramı mevcuttur. Bu kavram ilk olarak 1989 yılında Bhutani tarafından verilmiştir (bkz. [3]).

$G = (\sigma, \mu)$ bir fuzzy çizge olsun. Eğer her $u, v \in \sigma^*$ için

$$\mu(uv) = \sigma(u) \wedge \sigma(v)$$

ise G 'ye *fuzzy tam çizge* adı verilir. Eğer $G = (\sigma, \mu)$ bir fuzzy tam çizge ise $\mu^\infty = \mu$ olur ve G 'de fuzzy kopma noktası bulunmaz. Ancak aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi bu ifadenin tersi doğru olmayabilir.

Örnek 3.14. $V = \{a, b, c, d\}$ ve $X = \{ab, bc, cd, da, ac, bd\}$ olsun. Ayrıca,

$$\sigma(a) = 0.7, \quad \sigma(b) = \sigma(c) = \sigma(d) = 1$$

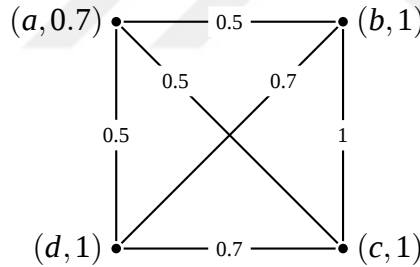
şeklinde tanımlansın. X üzerinde μ fuzzy alt kümesi de

$$\mu(ab) = \mu(da) = \mu(ac) = 0.5, \quad \mu(bc) = 1, \text{ ve } \mu(cd) = \mu(bd) = 0.7$$

şeklinde olsun (bkz. Şekil 3.15). Bu durumda $\mu^\infty = \mu$ olduğu kolayca görülebilir. Ayrıca G 'nin bir fuzzy kopma noktası yoktur. Ancak

$$0.5 = \mu(ab) \neq \sigma(a) \wedge \sigma(b) = 0.7 \wedge 1 = 0.7$$

olduğundan G fuzzy tam çizge değildir.



Şekil 3.15. Örnek 3.14 ile verilen fuzzy çizge

Diğer taraftan, Örnek 3.15 ile verildiği gibi bir fuzzy tam çizgenin bir fuzzy köprüsü mevcut olabilir.

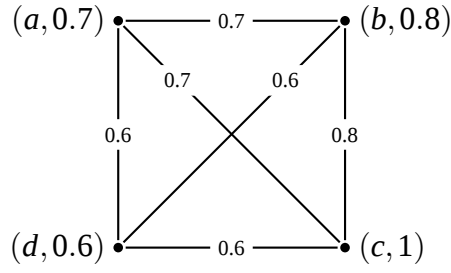
Örnek 3.15. $V = \{a, b, c, d\}$ ve $X = \{ab, bc, cd, da, ac, bd\}$ olsun. Ayrıca,

$$\sigma(a) = 0.7, \quad \sigma(b) = 0.8, \quad \sigma(c) = 1, \quad \sigma(d) = 0.6$$

şeklinde tanımlansın. X üzerinde μ fuzzy alt kümesi de

$$\mu(ab) = \mu(ac) = 0.7, \quad \mu(cd) = \mu(bd) = \mu(ad) = 0.6, \text{ ve } \mu(bc) = 0.8$$

şeklinde olsun (bkz. Şekil 3.16). G fuzzy tam çizge olur. Diğer taraftan, bc kenarının silinmesi b ve c köşe noktasını birleştiren yolun gücünün azalmasına yol açtığından bc kenarı G 'nin fuzzy köprüsü olur.



Şekil 3.16. Örnek 3.15 ile verilen tam fuzzy çizge

Teorem 3.16. $G = (\sigma, \mu)$ fuzzy tam çizge ise herhangi bir $uv \in \mu^*$ kenarı için $\mu^\infty(u, v) = \mu(uv)$ olur.

Kanıt.

$$\begin{aligned}\mu^2(u, v) &= \bigvee_{z \in \sigma^*} \{\mu(uz) \wedge \mu(zv)\} \\ &= \bigvee \{\sigma(u) \wedge \sigma(v) \wedge \sigma(z)\} \\ &= \sigma(u) \wedge \sigma(v) = \mu(uv)\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde, $\mu^3(u, v) = \mu(uv)$ yazılabilir. Tüm k pozitif tam sayılar için aynı yöntem ile $\mu^k(u, v) = \mu(uv)$ olduğu da gösterilebilir.

Böylece,

$$\mu^\infty(u, v) = \sup\{\mu^k(u, v) | k \geq 1\} = \mu(uv)$$

olur. □

Teorem 3.16 gereği fuzzy tam çizgede herhangi iki köşe noktasının bağlantılılığının gücü bu iki köşe noktası arasındaki kenarın ait olma derecesine eşit olduğundan fuzzy tam çizgeden bir köşe noktasının silinmesi herhangi iki köşe noktasının bağlantılılığının gücünü etkilemeyecektir. Buradan aşağıdaki sonuç elde edilebilir.

Sonuç 3.17. Tam fuzzy çizgede fuzzy kopma noktası bulunmaz.

Teorem 3.16 gereği bir fuzzy tam çizgede her uv kenarı u ile v köşe noktalarını birleştiren en güçlü yol olduğu söylenebilir. Ayrıca bir fuzzy tam çizgede en fazla bir tane fuzzy köprünün var olduğu da söylenebilir. Örneğin, Şekil 3.16 ile verilen fuzzy tam çizgenin tek fuzzy köprüsü bc kenarı olur. Bu fuzzy köprünün nasıl bulunabileceği ise Teorem 3.18 ile verilmektedir.

Teorem 3.18. $G = (\sigma, \mu)$ bir tam fuzzy çizge ve $|\sigma^*| = n$ olsun. Bu durumda G fuzzy tam çizgesinin bir fuzzy köprü bulundurması için gerek ve yeter koşul $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $t_i = \sigma(u_i)$ ve $t_{n-2} < t_{n-1} \leq t_n$ olacak şekilde $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ artan dizisinin var olmasıdır. Bu durumda $u_{n-1}u_n$ kenarı G fuzzy tam çizgesinde bir fuzzy köprü olur.

Kanıt. ($\Rightarrow$) Kabul edelim ki, G bir fuzzy tam çizge ve uv kenarı da G 'de bir fuzzy köprü olsun. G fuzzy tam çizge olduğundan $\mu(uv) = \sigma(u) \wedge \sigma(v)$ olur. Genelliği bozmaksızın $\sigma(u) \leq \sigma(v)$ yani $\mu(uv) = \sigma(u)$ olduğunu kabul edelim. uv bir fuzzy köprü olduğundan G 'deki herhangi bir döngünün en zayıf kenarı değildir. Bu durumda her $w \neq v$ için $\sigma(u) > \sigma(w)$ olduğunun gösterilmesi yeterlidir.

Şimdi tersine kabul edelim ki, $\sigma(u) \leq \sigma(w)$ olacak şekilde bir $w \neq v$ köşe noktası var olsun. O zaman,

$$C : u \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow u$$

döngüsü için

$$\mu(uv) = \mu(uw) = \sigma(u) \text{ ve eğer } \sigma(u) = \sigma(v) \text{ ise } \mu(vw) = \sigma(v)$$

olur. Ya da

$$\sigma(u) < \sigma(v) \leq \sigma(w) \text{ ve eğer } \sigma(u) < \sigma(w) < \sigma(v) \text{ ise } \mu(vw) = \sigma(w)$$

olur. Her iki durumda da uv kenarı C döngüsünün en zayıf kenarı olur. Bu ise uv kenarının fuzzy köprü olmasıyla çelişir.

($\Leftarrow$) $i = 1, 2, \dots, n$ için $t_i = \sigma(u_i)$ olmak üzere $t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} \leq t_n$ olsun. Bu durumda $u_{n-1}u_n$ kenarının bir fuzzy köprü olduğunu gösterelim. G bir fuzzy tam çizge olduğundan

$$\mu(u_{n-1}u_n) = \sigma(u_{n-1}) \wedge \sigma(u_n) = \sigma(u_{n-1})$$

olur. Bu durumda diğer kenarların ait olma dereceleri $\sigma(u_{n-1})$ değerinden küçük olur. O halde $u_{n-1}u_n$ kenarı G 'nin herhangi bir döngüsünün en zayıf kenarı değildir. Böylece Teorem 3.9 gereği $u_{n-1}u_n$ kenarı bir fuzzy köprü olur. $\square$

Örneğin, Teorem 3.18 yardımıyla Şekil 3.16 ile verilen fuzzy tam çizgede

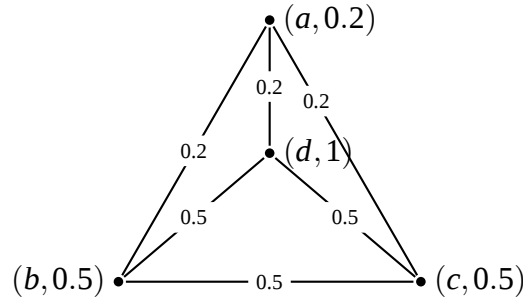
$$t_1 = \sigma(d), \quad t_2 = \sigma(a), \quad t_3 = \sigma(b) \text{ ve } t_4 = \sigma(c)$$

alınacak olursa $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ artan dizisi elde edilir ve bc kenarı bir fuzzy köprü olur.

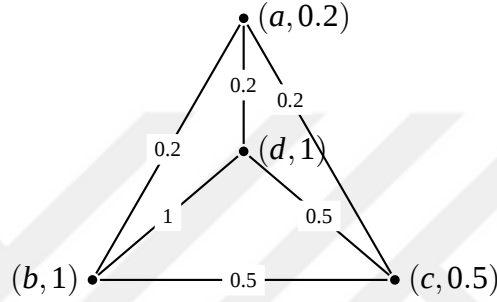
Şekil 3.17 ile verilen fuzzy tam çizgede bir fuzzy köprü yok iken Şekil 3.18 ile verilen fuzzy çizgede bd kenarı bir fuzzy köprü olur.

Teorem 3.19. $G = (\sigma, \mu)$ çizgesi (σ^*, μ^*) bir döngü olacak şekilde bir fuzzy çizge olsun. Bu durumda G 'nin bir köşe noktasının fuzzy kopma noktası olması için gerek ve yeter koşul bu köşe noktasının iki fuzzy köprüünün ortak köşe noktası olmasıdır.

Kanıt. ($\Rightarrow$) (σ^*, μ^*) bir döngü ve w köşe noktası bir kopma noktası olsun. Döngü üzerinde w köşe noktasından farklı iki u ve v köşeleri alındığında w köşe noktası u ile v



Şekil 3.17. Fuzzy köprü bulundurmayan bir fuzzy tam çizge



Şekil 3.18. Fuzzy köprü bulunduran bir fuzzy tam çizge

köşe noktalarını birleştiren en güçlü yolun üzerindedir. Bu durumda w köşe noktasının uç nokta olduğu kenarlar tanımı gereği fuzzy köprü olmak zorundadır.

($\Leftarrow$) w köşe noktası uw ve vw fuzzy köprülerinin ortak köşe noktası olsun. Bu durumda uw ve vw fuzzy köprü olduğundan G çizgesinin en zayıf kenarı değildir. Ayrıca u ve v köşe noktalarını bulundurmayan her kenarın gücü $\mu(uw) \wedge \mu(vw)$ değerinden daha az güce sahiptir (aksi halde uw ve vw köprü olmazdı). O halde en güçlü $u - v$ yolu $u \rightarrow w \rightarrow v$ yolu olur. Buradan w bir kopma noktası olur. $\square$

Teorem 3.20. w köşe noktası en az iki fuzzy köprünün ortak köşe noktası ise w bir fuzzy kopma noktası olur.

Kanıt. u_1w ve wu_2 kenarları iki fuzzy köprü olsun. Bu durumda, u_1w ve wu_2 kenarları u ve v köşe noktalarını birleştiren her en güçlü yolun üzerinde olacak şekilde u ve v köşe noktaları vardır. Eğer w köşe noktası u ve v köşe noktalarından farklı ise w köşe noktasının bir fuzzy kopma noktası olduğu açıktır.

O zaman w köşe noktası u ya da v köşe noktalarından birine eşit olsun. Bu durumda u_1w kenarı, u ile w köşe noktalarını birleştiren her en güçlü yolun üzerinde ya da wu_2 kenarı, w ile v köşe noktalarını birleştiren her en güçlü yolun üzerinde olur.

Kabul edelim ki, w köşe noktası fuzzy kopma noktası olmasın. Bu durumda herhangi iki köşe noktasını birleştiren ve w noktasını bulundurmayan en az bir en güçlü yol vardır.

Özel olarak, u_1 ve u_2 köşe noktalarını birleştiren ve w köşe noktasını bulundurmeyen bir en güçlü P yolunu ele alalım. Bu P yoluna u_1w ve wu_2 kenarları eklenecek olursa bir döngü elde edilir. Bu döngü için iki durum söz konusudur: Birincisi, döngünün üzerindeki $u_1 \rightarrow w \rightarrow u_2$ yolu en güçlü yol değildir. Ancak Teorem 3.9 gereği, fuzzy köprü bir döngünün en zayıf kenarı olamayacağından çelişki elde edilir.

İkinci durum, döngünün üzerindeki $u_1 \rightarrow w \rightarrow u_2$ yolu en güçlü yol olsun. O zaman P yolunun bağlantılılığının gücü

$$\mu^\infty(u_1, u_2) = \mu(u_1w) \wedge \mu(wu_2)$$

olur. Bu durumda P yolunun her bir kenarının gücü en az $\mu(u_1w)$ ve $\mu(wu_2)$ kadar olur. Bu ise u_1w ve wu_2 kenarlarının bir döngünün en zayıf kenarları olduğu anlamına gelir. Buradan yine Teorem 3.9 gereği, u_1w ve wu_2 kenarları bir fuzzy köprü olamaz. Bu ise u_1w ve wu_2 kenarlarının fuzzy köprü olmasıyla çelişir.

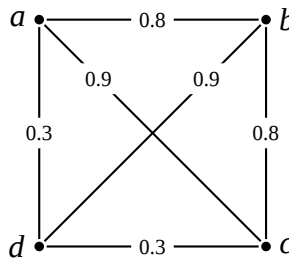
O halde w köşe noktası bir fuzzy kopma noktası olmak zorundadır. $\square$

Aşağıdaki örnek, Teorem 3.20 ile verilen koşulun yeter koşul olmadığını, yani bir fuzzy kopma noktasının iki fuzzy köprünün ortak noktası olmayabileceğini göstermektedir.

Örnek 3.21. $V = \{a, b, c, d\}$ ve $X = \{ab, bc, cd, da, ac, db\}$ olsun. Ayrıca, tüm $x \in V$ için $\sigma(x) = 1$ ve X üzerinde μ fuzzy alt kümesi de

$$\mu(ac) = \mu(bd) = 0.9, \quad \mu(da) = \mu(cd) = 0.3, \quad \text{ve} \quad \mu(ab) = \mu(bc) = 0.8$$

şeklinde olsun. Burada ac ve bd kenarları fuzzy köprü olur. Ayrıca $\mu^\infty(a, d) = 0.8$ iken b köşe noktası silindiğinde $\mu^\infty(a, d) = 0.3$ olduğundan b köşe noktası bir fuzzy kopma noktasıdır. Ancak b iki fuzzy köprünün ortak noktası değildir (bkz. Şekil 3.19).

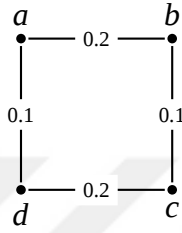


Şekil 3.19. İki fuzzy köprünün ortak noktası olmayan bir fuzzy kopma noktası bulunduran bir çizge

Örnek 3.22. $V = \{a, b, c, d, \}$ ve $X = \{ab, bc, cd, ad\}$ olmak üzere, $G = (V, X)$ bir fuzzy çizge olsun. Her $x \in V$ için $\sigma(x) = 1$ olsun. X 'in μ fuzzy alt kümesi de

$$\mu(ab) = \mu(cd) = 0.2 \quad \text{ve} \quad \mu(bc) = \mu(ad) = 0.1$$

şeklinde tanımlansın (bkz. Şekil 3.20). Burada ab ve cd kenarları fuzzy köprü iken fuzzy çizgede bir fuzzy kopma noktası yoktur. Bu ise fuzzy çizgelerin çizgelerden bir diğer farkıdır. Bir çizgede bir köprünün uç noktaları çizgenin kopma noktaları olur.



Şekil 3.20. Fuzzy köprü bulundurduğu halde fuzzy kopma noktası bulundurmeyen bir fuzzy çizge

Teorem 3.23. Eğer uv kenarı bir fuzzy köprü ise $\mu^\infty(u, v) = \mu(uv)$ olur.

Kanıt. uv kenarının bir fuzzy köprü ve $\mu^\infty(u, v) > \mu(uv)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\mu(uv)$ ' den daha büyük bir güce sahip en güçlü $u - v$ yolu vardır ve bu en güçlü yolun tüm kenarları $\mu(uv)$ ' den daha büyük bir güce sahiptir. Bu en güçlü yola uv kenarı da eklenirse uv kenarının en zayıf kenar olduğu bir döngü elde edilir. Bu ise uv kenarının fuzzy köprü olmasıyla çelişeceğinden kabulümüz hatalıdır. Bu durumda uv kenarı fuzzy köprü iken $\mu^\infty(u, v) \leq \mu(uv)$ olduğunu elde ederiz.

Fuzzy çizgede herhangi iki köşe noktasının bağlantılılığının gücü bu iki köşe noktası arasındaki kenarın ait olma derecesinden büyük eşit yani $\mu^\infty(u, v) \geq \mu(uv)$ olduğundan dolayı uv kenarı bir fuzzy köprü iken $\mu^\infty(u, v) = \mu(uv)$ olduğu elde edilir. $\square$

4. ORMANLAR, AĞAÇLAR VE KESİ KÜMELERİ

4.1. Ormanlar ve Ağaçlar

Tanım 4.1. $G = (\sigma, \mu)$ bir fuzzy çizge olsun. Eğer G fuzzy çizgesinin F de olmayan yani $v(xy) = 0$ şeklindeki kenarları $\mu(xy) < v^\infty(x, y)$ olmak üzere orman olan bir $F = (\sigma, v)$ kısmi fuzzy geren alt çizgesi varsa G 'ye fuzzy orman adı verilir. Bir başka ifadeyle, xy kenarı G 'de iken F 'de değilse F 'de x ve y köşelerini birleştiren ve gücü $\mu(xy)$ den daha fazla olan bir yol vardır.

Açıktır ki, her orman bir fuzzy orman olur.

Örnek 4.2. $G = (\sigma, \mu)$ ve $F = (\tau, \mu)$ fuzzy çizgeleri aşağıdaki gibi tanımlansın. $V = \{x, y, u, v, w\}$ olmak üzere,

$$\sigma, \tau : V \rightarrow [0, 1], \text{ her } z \in V \text{ için } \sigma(z) = \tau(z) = 1,$$

$$\mu : V \times V \rightarrow [0, 1],$$

$$\mu(xy) = 0.5,$$

$$\mu(yw) = 0.9,$$

$$\mu(wv) = 0.8,$$

$$\mu(uv) = 0.7,$$

$$\mu(yu) = 0.6$$

ve

$$v : V \times V \rightarrow [0, 1]$$

$$v(xy) = \mu(xy) = 0.5,$$

$$v(yw) = \mu(yw) = 0.9,$$

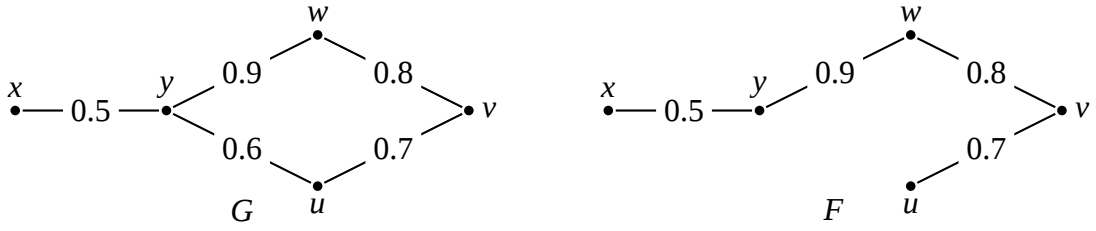
$$v(wv) = \mu(wv) = 0.8,$$

$$v(uv) = \mu(uv) = 0.7,$$

$$v(yu) = 0$$

olsun. G ve F fuzzy çizgeleri Şekil 4.21 ile görsel olarak verilmiştir.

- F fuzzy çizgesi, G fuzzy çizgesinin bir kısmi geren alt çizgesidir ($\sigma = \tau$ olduğundan).
- G fuzzy çizgesi bir orman değildir (Sıfırdan büyük kenarlar döngü içerdiğinden bir orman çizge oluşturmuyor).



Şekil 4.21. Bir fuzzy orman örneği

- G fuzzy çizgesi bir fuzzy ormandır. Gerçekten de, F bir ormandır (sıfırdan büyük kenarlar orman çizge oluşturur) ve yu kenarı G de mevcut iken F 'de mevcut değildir ve F 'de x ve y yi birleştiren yolun gücü

$$\min\{0.9, 0.8, 0.7\} = 0.7 > \mu(yu) = 0.6$$

eşitsizliğini sağlar. Dikkat edilecek olursa G fuzzy ormanı (klasik) ormandan farklı olarak bir döngü içermektedir.

Aşağıdaki teorem fuzzy ormanların bir karakterizasyonunu vermektedir.

Teorem 4.3. Bir G fuzzy çizgesinin fuzzy orman olması için gerek ve yeter koşul G 'nin her döngüsünün $\mu(xy) < \mu'^{\infty}(x,y)$ olacak şekilde bir xy kenarı bulundurmasıdır. Burada $G' = (\sigma, \mu')$ ile G fuzzy çizgesinden xy kenarının silinmesiyle elde edilen kısmi fuzzy alt çizge gösterilmektedir.

Kanıt. $(\Rightarrow)$ G bir fuzzy orman ve P , G içinde keyfi bir döngü olsun. P döngüsünün F ormanında olmayan bir xy kenarı vardır. G bir fuzzy orman olduğundan

$$\mu(xy) < v^{\infty}(x,y)$$

olur. Buradan

$$\mu(xy) < v^{\infty}(x,y) \leq \mu'^{\infty}(x,y)$$

elde edilir.

$(\Leftarrow)$ Eğer G fuzzy çizgesinde hiç döngü yoksa G bir orman dolayısıyla da fuzzy orman olur. G fuzzy çizgesinde en az bir döngü mevcut olsun ve xy kenarı G fuzzy çizgesinin verilen koşulları sağlayacak şekilde bir döngünün en zayıf kenarı olsun. Eğer xy kenarı G çizgesinden silinecek olursa, elde edilen fuzzy alt çizgede x ve y noktalarının bağlantılılığının gücü xy kenarının gücünden daha fazla olur. Eğer elde edilen çizge hala döngü bulunduruyorsa bu işlem hiç döngü kalmayınca kadar devam ettirilebilir. Her bir adımda silinen kenarın gücü bir önceki adımda silinen kenarın gücünden daha fazladır. Bu şekilde elde edilen F kısmi fuzzy alt çizgesi döngü içermediğinden bir orman olur ve xy kenarını bulundurmaz. Yapılan kenar silme işlemi gereği $\mu(xy) < v^{\infty}(x,y)$ olacağından G bir fuzzy orman olur. $\square$

Yukarıdaki kanıt G bağlantılı olduğunda F nin nasıl inşa edileceğini de göstermektedir. Bu F ağacının inşası fuzzy ağaçların incelenmesinde önemli bir rol oynamaktadır.

Önerme 4.4. *Eğer G fuzzy çizgesinin herhangi iki köşe noktası arasındaki en güçlü yol en fazla bir tane ise G bir fuzzy orman olur.*

Kanıt. G bir fuzzy orman olmasın. O zaman Teorem 4.3 gereği G deki bir P döngüsünün her xy kenarı için

$$\mu(xy) \geq \mu'^{\infty}(x,y)$$

olur. Yani xy kenarının kendisi x ile y 'yi birleştiren en güçlü yol olur. Ancak xy kenarı P döngüsünün en zayıf kenarı olarak seçilirse xy kenarı silindiğinde P 'nin kalan kenarları x ile y yi birleştiren en güçlü yol olur. Böylece x ile y yi birleştiren iki tane en güçlü yol elde edilmiş olur. $\square$

Yukarıdaki önermenin tersi doğru olmayabilir. Yani G bir fuzzy orman olduğu halde keyfi iki köşe nokta arasındaki en güçlü yol birden fazla olabilir. Gerçekten de, Örnek 4.2 ile verilen G çizgesi bir fuzzy ormandır ancak $x \rightarrow y \rightarrow u \rightarrow v$ yolunun gücü $\min\{0.5, 0.6, 0.7\} = 0.5$ ve $x \rightarrow y \rightarrow w \rightarrow v$ yolunun gücü $\min\{0.5, 0.9, 0.8\} = 0.5$ olduğundan x ve v köşe noktalarını birleştiren en güçlü yol birden fazladır.

Kanıt. Eğer xy kenarı F 'ye ait değilse

$$\mu(xy) \leq v^{\infty}(x,y) \leq \mu'^{\infty}(x,y)$$

olduğundan G 'nin bir fuzzy köprüsü olamaz. xy , F 'nin bir kenarı olsun. Eğer xy bir köprü değilse x ile y 'yi birleştiren ve gücü en az $\mu(xy)$ kadar olan bir P yolu vardır. F orman olduğundan döngü içermez dolayısıyla F P yolunun tüm kenarlarını bulundurmaz. P yolunun F de olmayan $u_i v_i$ kenarları G bir fuzzy orman olduğundan tüm kenarları F içinde kalan ve xy kenarını bulundurmayan bir P_i yolu ile değiştirilebilir. Bu durumda $\mu(u_i v_i) < \mu^{\infty}(P_i)$ olur. O halde F de olmayan her bir $u_i v_i$ kenarı P_i yolu ile değiştirilirse F içinde x ile y 'yi birleştiren yeni bir yol elde edilmiş olur. Bu ise F döngü içermesi anlamına gelir ve F nin orman olmasıyla çelişir. O halde xy kenarı F bir fuzzy köprü olmak zorundadır. $\square$

Tanım 4.5. $G = (\sigma, \mu)$ bir fuzzy çizge olsun. Bu durumda

- i. Eğer $(\text{Supp}(\sigma), \text{Supp}(\mu))$ bir ağaç ise G 'ye bir ağaç denir.
- ii. Eğer G 'nin her $uv \in (\text{Supp}(\mu) - \text{Supp}(\nu))$ için $\mu(uv) < v^{\infty}(u,v)$ olacak şekilde bir fuzzy geren ağaç $F = (\sigma, \nu)$ alt çizgesi varsa G 'ye fuzzy ağaç adı verilir. Yani, (σ, ν)

içinde gücü $\mu(uv)$ den daha büyük olan bir u ile v köşe noktalarını birleştiren bir yol vardır.

Tanım 4.6. $G = (\sigma, \mu)$ bir fuzzy çizge olsun. Bu durumda

- i. Eğer $(\text{Supp}(\sigma), \text{Supp}(\mu))$ bir döngü ise G 'ye bir döngü denir.
- ii. Eğer $(\text{Supp}(\sigma), \text{Supp}(\mu))$ bir döngü ve

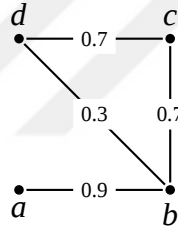
$$\mu(xy) = \wedge \{ \mu(uv) | uv \in \text{Supp}(\mu) \}$$

olmak üzere, $xy \in \text{Supp}(\mu)$ tek değil ise G 'ye bir fuzzy döngü denir.

Örnek 4.7. $V = \{a, b, c, d\}$ ve $X = \{ab, ac, ad, bc, cd, db\}$ olsun. Her $x \in V$ için $\sigma(x) = 1$ olsun. X üzerindeki μ fuzzy kümesi de

$$\mu(ab) = 0.9, \quad \mu(bc) = \mu(cd) = 0.7, \text{ ve } \mu(bd) = 0.3$$

şeklinde tanımlansın (bkz. Şekil 4.22). Bu durumda $\text{Supp}(\sigma) = V$ ve $\text{Supp}(\sigma) = X$ olur.



Şekil 4.22. Ağaç olmayıp, fuzzy ağaç olan bir fuzzy çizge örneği

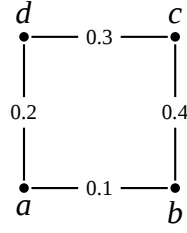
- $(\text{Supp}(\sigma), \text{Supp}(\mu))$ bir ağaç olmadığından G bir ağaç değildir.
- G bir fuzzy ağaç olur. Gerçekten de, $v(ab) = 0.9$, $v(bc) = 0.7$, $v(cd) = 0.7$ ve $v(bd) = 0$ için $F = (\sigma, v)$ bir fuzzy geren alt çizgesi bir ağaçtır. Ayrıca $bd \in (\text{Supp}(\mu) - \text{Supp}(v))$ iken $\mu(bd) = 0.3 < v^\infty(b, d) = 0.7$ olur.
- $(\text{Supp}(\sigma), \text{Supp}(\mu))$ bir döngü olmadığından G bir fuzzy döngü değildir.

Diğer taraftan, eğer $\mu(bd) = 0.8$ olsaydı G fuzzy çizgesi bir fuzzy ağaç olmazdı.

Örnek 4.8. $V = \{a, b, c, d\}$ ve $X = \{ab, ad, bc, cd\}$ olsun. Her $x \in V$ için $\sigma(x) = 1$ olsun. X üzerindeki μ fuzzy kümesi de

$$\mu(ab) = 0.1, \quad \mu(bc) = 0.4, \quad \mu(cd) = 0.3, \text{ ve } \mu(ad) = 0.2$$

şeklinde tanımlansın (bkz. Şekil 4.23). Bu durumda (σ, μ) fuzzy çizgesi



Şekil 4.23. Fuzzy ağaç olduğu halde fuzzy döngü olmayan bir fuzzy çizge örneği

- Fuzzy ağaç olur. Gerçekten de, $v(bc) = 0.4$, $v(cd) = 0.3$, $v(ad) = 0.2$ ve $v(ab) = 0$ için $F = (\sigma, v)$ geren fuzzy alt çizgesi bir ağaç olur. Ayrıca, $ab \in (\text{Supp}(\mu) - \text{Supp}(v))$ iken $\mu(ab) = 0.1 < v^\infty(a, b) = 0.2$ olur.
- Ağaç değildir.
- Fuzzy döngü değildir. G bir döngüdür ancak G 'nin en zayıf kenarı tek olduğundan bir fuzzy döngü değildir.

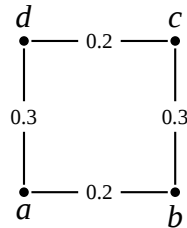
Örnek 4.9. $X = \{a, b, c, d\}$ ve her $x \in V$ için $\sigma(x) = 1$ olsun. X üzerindeki μ' fuzzy kümesi de

$$\mu'(ab) = 0.2, \quad \mu'(bc) = 0.3, \quad \mu'(cd) = 0.2, \quad \text{ve} \quad \mu'(ad) = 0.3$$

şeklinde tanımlansın (bkz. Şekil 4.24).

Bu durumda (σ, μ') fuzzy çizgesi

- En zayıf kenar tek olmadığından (ab ve cd kenarları) fuzzy döngü olur.
- Fuzzy ağaç değildir. Gerçekten de, G fuzzy çizgesinden ait olma derecesi 0.2 olan bir kenar silindiğinde bu kenarın uç noktalarını birleştiren yolun gücü 0.2 olduğundan eşitsizlik sağlanmaz. Eğer ait olma derecesi 0.3 olan bir kenar silinirse bu kenarın uç noktalarını birleştiren yolun gücü 0.2 olacağından eşitsizlik yine sağlanmaz.



Şekil 4.24. Fuzzy ağaç olmayıp, fuzzy döngü olan bir fuzzy çizge örneği

Teorem 4.10. $G = (\sigma, \mu)$ bir döngü olsun. Bu durumda G 'nin fuzzy döngü olması için gerek ve yeter koşul G 'nin fuzzy ağaç olmamasıdır.

Kanıt. $(\Rightarrow)$ G bir fuzzy döngü olsun. Bu durumda G 'nin en zayıf kenarı tek değildir. x_1y_1 ve x_2y_2 kenarları G 'nin en zayıf iki kenarı olsun. Yani $x_1y_1, x_2y_2 \in \text{Supp}(\mu)$ için

$$\mu(x_1y_1) = \mu(x_2y_2) = \wedge\{\mu(uv) | uv \in \text{Supp}(\mu)\}$$

olsun. Eğer (σ, ν) , (σ, μ) fuzzy çizgesinin herhangi bir geren alt ağacı ise (σ, μ) bir döngü olduğundan

$$\text{Supp}(\mu) - \text{Supp}(\nu) = \{uv\}$$

olacak şekilde $u, v \in V$ vardır. Buradan (σ, ν) içerisinde u ve v 'yi birleştiren ve $\mu(uv)$ 'den daha güçlü olan bir yol bulunamayacağından (σ, μ) bir fuzzy ağaç değildir.

$(\Leftarrow)$ (σ, μ) bir fuzzy ağaç olmasın. Bu durumda (σ, μ) bir döngü olduğundan her $uv \in \text{Supp}(\mu)$ için $\nu(uv) = 0$ ve her $xy \in \text{Supp}(\mu) - \{uv\}$ için $\nu(xy) = \mu(xy)$ olacak şekildeki (σ, ν) ağaç olan ve $\nu^\infty(u, v) \leq \mu(uv)$ olacak şekilde bir fuzzy alt çizgesi vardır. Buradan

$$\wedge\{\mu(xy) | xy \in \text{Supp}(\mu)\}$$

olacak şekilde kenar tek değildir. O halde (σ, μ) bir fuzzy döngü olur. $\square$

Teorem 4.11. $G = (\sigma, \mu)$ bir fuzzy çizge olsun. Eğer $(\text{Supp}(\sigma), \mu^t)$ bir ağaç olacak şekilde $t \in (0, 1]$ sayısı varsa G bir fuzzy ağaç olur. Tersine, G bir döngü ve fuzzy ağaç ise $(\text{Supp}(\sigma), \mu^t)$ bir ağaç olacak şekilde $t \in (0, 1]$ sayısı vardır.

Kanıt. $t \in (0, 1]$ için $(\text{Supp}(\sigma), \mu^t)$ bir ağaç olsun. Bu durumda $uv \in E$ ve $uv \notin \mu^t$ için

$$\mu^{t\infty}(u, v) \geq t > \mu(uv)$$

olur. O halde (σ, μ) bir fuzzy ağaç olur.

Tersine, (σ, μ) fuzzy çizgesi bir fuzzy ağaç ve döngü olduğundan

$$\mu(xy) = \wedge\{\mu(uv) | uv \in \text{Supp}(\mu)\}$$

olacak şekilde bir tek xy kenarı vardır. Buna göre

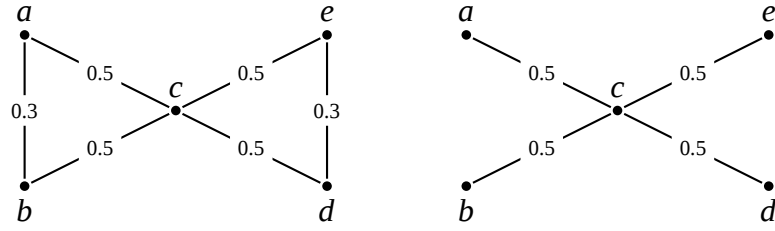
$$\mu(xy) < t < \wedge\{\mu(uv) | uv \in \text{Supp}(\mu) - \{xy\}\}$$

seçilirse $(\text{Supp}(\sigma), \mu^t)$ bir ağaç olur. $\square$

Örnek 4.12. $V = \{a, b, c, d, e\}$ ve $X = \{ab, bc, ac, cd, de, ec\}$ olsun. Her $x \in V$ için $\sigma(x) = 1$ olsun. X üzerindeki μ fuzzy kümesi de

$$\mu(ab) = \mu(de) = 0.3, \quad \mu(bc) = \mu(ac) = \mu(ec) = \mu(cd) = 0.5$$

şeklinde tanımlansın (bkz. Şekil 4.25). Bu durumda $t = 0.4$ için $(\text{Supp}(\sigma), \mu^{0.4})$ bir ağaç olduğundan Teorem 4.11 gereği (σ, μ) bir fuzzy ağaç olur.



Şekil 4.25. (σ, μ) fuzzy çizgesi ve $t = 0.4$ için $(\text{Supp}(\sigma), \mu^{0.4})$ çizgesi

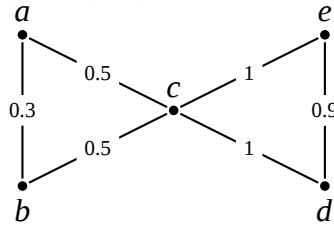
Aşağıdaki örnek Teorem 4.11 ile verilen ifadenin tersinin doğru olmayabileceğini göstermektedir.

Örnek 4.13. $V = \{a, b, c, d, e\}$ ve $X = \{ab, bc, ac, cd, de, ec\}$ olsun. Her $x \in V$ için $\sigma(x) = 1$ olsun. X üzerindeki μ fuzzy kümesi de

$$\mu(ab) = 0.3, \quad \mu(bc) = \mu(ac) = 0.5, \quad \mu(ec) = \mu(cd) = 1, \quad \text{ve} \quad \mu(de) = 0.9$$

şeklinde tanımlansın (bkz. Şekil 4.26). Bu durumda

- $(\text{Supp}(\sigma), \mu^t)$ bir ağaç olacak şekilde $t \in (0, 1]$ sayısı yoktur.
- Ancak (σ, μ) fuzzy ağaç olur.



Şekil 4.26. $(\text{Supp}(\sigma), \mu^t)$ bir ağaç olacak şekilde $t \in (0, 1]$ sayısı yoktur

Teorem 4.14. $G = (\sigma, \mu)$ bir fuzzy ağaç olsun. Eğer (σ^*, μ^*) bir ağaç değil ise $\mu(uv) < \mu^\infty(u, v)$ olacak şekilde en az bir $uv \in \text{Supp}(\mu)$ kenarı vardır.

Kanıt. G bir fuzzy ağaç olsun. Bu durumda G 'nin bir ağaç olan $F = (\sigma, \nu)$ fuzzy geren alt çizgesi vardır. F 'de olmayan tüm uv kenarları için $\mu(uv) < \nu^\infty(u, v)$ ve $\nu^\infty(u, v) \leq \mu^\infty(u, v)$ olur. Böylelikle F bir ağaç olan fuzzy geren alt çizge olduğundan F 'de olmayan en az bir uv kenarı vardır ve F 'de olmayan tüm uv kenarları için

$$\mu(uv) < \mu^\infty(u, v)$$

eşitsizliğini elde ederiz. □

Teorem 4.15. $G = (\sigma, \mu)$, fuzzy döngü içermeyen bağlantılı bir fuzzy çizge olsun. Bu durumda G bir fuzzy ağaç olur.

Kanıt. G çizgesinin döngü içermediğini kabul edelim. Böylece G bir ağaç olur. Her ağaç bir fuzzy ağaç olduğundan G bir fuzzy ağaç olur.

Şimdi G fuzzy çizgesinde döngüler olduğunu ancak hiçbir döngünün bir fuzzy döngü olmadığını kabul edelim. Bu durumda G fuzzy çizgesindeki her döngüde tam olarak bir tane en zayıf kenar vardır. G fuzzy çizgesindeki C döngüsünün e gibi bir en zayıf kenarını silelim. Eğer G çizgesinde hala bir döngü varsa bu en zayıf kenarı silme işlemini hiç döngü kalmayınca kadar devam edelim. Bu işlemin sonucunda ağaç olan bir fuzzy geren F alt çizgesine ulaşırız. Böylece $G(\sigma, \mu)$ istenen fuzzy ağaç olur. $\square$

Fuzzy çizge yapılarından bir köprü silindiğinde farklı sonuçlar elde edilir. Aşağıdaki teorem fuzzy ağaçlardan bir köprünün silinmesi durumunda ortaya çıkan sonucu ifade etmektedir.

Teorem 4.16. G bir fuzzy ağaç olsun. Bu durumda G 'den bir fuzzy köprünün silinmesi, silinen köprünün iki uç noktasının bağlantılılığının gücünü ve bazı nokta çiftlerinin bağlantılılığının gücünü azaltır.

Kanıt. $G(\sigma, \mu)$ bir fuzzy ağaç ve uv kenarı G fuzzy ağacının bir fuzzy köprüsü olsun. Bu durumda Sonuç 3.13 gereğince uv kenarı G 'nin T maksimum geren ağacının kenarı olur. Bu durumda tanımı gereği T iki farklı köşe noktası arasında bir tek en güçlü yol bulundurur. Dolayısıyla uv kenarının silinmesi x ve y gibi iki köşe nokta arasındaki bağlantılılığın gücünü azaltır. Burada eğer uv kenarı T nin uç olmayan bir kenarı ise x, u ile y de v ile komşu olur. Aksi halde $u = x$ ve $y = v$ olur. $\square$

Eğer G fuzzy çizgesi K_2 çizgesi ise K_2 tek kenarı bir fuzzy köprü olur. Bu kenarın silinmesi noktaları izole bırakacağı için bağlantılılığın gücünü azaltır.

Teorem 4.17. Eğer $G = (\sigma, \nu)$ bir fuzzy ağaç ise G fuzzy tam çizge değildir.

Kanıt. $G = (\sigma, \nu)$ bir fuzzy ağaç olsun ve tersine G 'nin bir fuzzy tam çizge olduğunu kabul edelim. O halde tüm her u, v için $\mu^\infty(u, v) = \mu(uv)$ olur. G bir fuzzy ağaç olduğundan $G = (\sigma, \mu)$ 'nin, $F(\sigma, \nu)$ fuzzy geren alt çizgesinde bulunmayan her u, v köşesi için $\mu(uv) < \nu^\infty(u, v)$ olur. Buradan da G 'yi bir fuzzy tam çizge olarak kabul ettiğimizden tüm u, v için $\mu^\infty(u, v) = \mu(u, v)$ olduğundan dolayı $\mu^\infty(u, v) < \nu^\infty(u, v)$ olduğu elde edilir. Böyle bir durumun olması mümkün olamayacağından çelişki elde ederiz kabulümüz hatalıdır. O halde $G = (\sigma, \mu)$ fuzzy ağaç iken bir fuzzy tam çizge olamaz. $\square$

Teorem 4.18. *Eğer G bir fuzzy ağaç ise F 'nin uç olmayan köşe noktaları (internal vertices) G 'nin fuzzy kopma noktaları olur.*

Kanıt. w köşe noktası, G fuzzy ağacının bir köşe noktası ve G 'nin bir ağaç olan fuzzy geren alt çizgesi F 'nin bir uç köşe noktası olmasın.

O zaman w , F 'de en az iki kenarın ortak köşe noktası olur. Bir fuzzy ağacın, ağaç olan geren alt çizgesinin kenarları fuzzy ağacın fuzzy köprüleri olduğundan dolayı w köşe noktasının bağlı olduğu kenarlar G 'nin fuzzy köprüleri olur. Teorem 3.20 yardımıyla w en az iki fuzzy köprünün ortak köşe noktası olduğundan w köşe noktasının fuzzy kopma noktası olduğu elde edilir.

Ayrıca, w , F 'nin uç köşe noktası ise w bir fuzzy kopma noktası değildir. Aksi halde, w , u, v 'den farklı olacak şekilde her $u - v$ yolunun üzerinde olur ve bu yollardan biri kesinlikle F 'de bulunurdu. Fakat w , F 'nin bir uç köşe noktası olduğu için bu durum mümkün değildir. $\square$

Sonuç 4.19. *Bir fuzzy ağacın fuzzy kopma noktası en az iki fuzzy köprünün ortak köşe noktası olur.*

Aşağıda fuzzy ağaçların bir başka karakterizasyonu veren bir sonuç yer almaktadır (bkz. [13]).

Teorem 4.20. *$G = (\sigma, \mu)$ bir fuzzy çizge olsun. Bu durumda G 'nin bir fuzzy ağaç olması için gerek ve yeter koşul her $u, v \in V$ için aşağıdaki ifadelerin denk olmasıdır.*

i. uv bir fuzzy köprüdür.

ii. $\mu^\infty(u, v) = \mu(uv)$.

Teorem 4.21. *Bir fuzzy çizgenin fuzzy ağaç olması için gerek ve yeter koşul fuzzy çizgenin bir tek maksimum fuzzy geren ağaç bulundurmasıdır.*

Eğer G fuzzy çizgesi için G^* ağaç değil ve T , G 'nin maksimum fuzzy geren ağacı ise G 'nin fuzzy köprü olmayan en az bir kenarı vardır. Ayrıca, T 'de olmayan kenarlar G 'nin fuzzy köprüsü değildir. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.22. *Eğer $G = (\sigma, \mu)$ bir fuzzy çizge olsun. Eğer $\text{Supp}(\sigma) = V$ ve $|V| = p$ ise G 'nin en fazla $p - 1$ tane fuzzy köprüsü vardır.*

Eğer G bir fuzzy çizge ve T , G 'nin tek maksimum fuzzy geren ağacı ise T 'nin uç köşe noktaları G 'nin kopma noktası değildir. Buradan her fuzzy çizgenin fuzzy kopma noktası olmayan en az iki köşe noktası bulundurduğu ifade edilebilir.

Yıldız çizge bir tek uç olmayan nokta bulunduran özel bir ağaçtır. n köşe noktalı yıldız çizge S_n ile gösterilir. Çizgelere benzer olarak fuzzy yıldız çizge aşağıdaki tanımlanabilir.

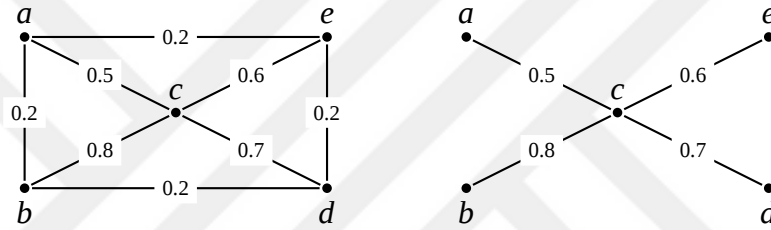
Tanım 4.23. $G = (\sigma, \mu)$ fuzzy ağaç olmak üzere G fuzzy ağacının tek maksimum geren ağacı bir yıldız çizge ise G 'ye fuzzy yıldız adı verilir. $|\sigma^*| = n + 1$ olmak üzere fuzzy yıldız çizge FS_n ile gösterilir.

Örnek 4.24. $V = \{a, b, c, d, e\}$ ve $X = \{ab, ae, ac, bc, bd, cd, de, ec\}$ olsun. Her $x \in V$ için $\sigma(x) = 1$ olsun. X üzerindeki μ fuzzy kümesi de

$$\mu(ab) = \mu(ae) = \mu(bd) = \mu(ed) = 0.2, \quad \mu(bc) = 0.8,$$

$$\mu(ac) = 0.5, \quad \mu(cd) = 0.7 \quad \text{ve} \quad \mu(ce) = 0.6$$

şeklinde tanımlansın (bkz. Şekil 4.27). Bu durumda G 'nin tek maksimum geren ağacı Şekil 4.27 ile verilen ağaç olacağından G fuzzy çizgesi bir fuzzy yıldız olur.



Şekil 4.27. Bir fuzzy yıldız ve maksimum geren ağacı

4.2. Kesi Kümeleri

Bağılantılı bir çizgeden silindiğinde çizgeyi bağlantısız yapan kenarlar kümesine ayıran kenarlar kümesi ya da kısaca ayıran küme adı verilir. Minimal yani hiçbir öz alt kümesi ayıran küme olmayan ayıran kümeye kesi kümesi denir.

Tanım 4.25. $G = (\sigma, \mu)$ bir fuzzy çizge ve $S \subset \text{Supp}(\mu)$ olsun. Bu durumda

i. Eğer S kümesi $(\text{Supp}(\sigma), \text{Supp}(\mu))$ çizgesinin bir kesi kümesi ise

$$\{xy | xy \in S\}$$

kümesine $G = (\sigma, \mu)$ fuzzy çizgesinin bir kesi kümesi denir.

ii. μ' fuzzy kenarlar kümesinin fuzzy alt kümesi, $\text{Supp}(\mu)$ üzerinde $\mu' = \mu$ ve her $xy \in S$ için $\mu'(xy) = 0$ olmak üzere, eğer $\mu'^\infty(u, v) < \mu^\infty(u, v)$ olacak şekilde $u, v \in \text{Supp}(\sigma)$ varsa $\{xy | xy \in S\}$ kümesine bir fuzzy kesi kümesi denir.

S bir elemanlı bir küme olduğunda, kesi kümesinin elemanı köprü olarak, bir fuzzy kesi kümesi olduğunda ise fuzzy köprü olarak adlandırılır.

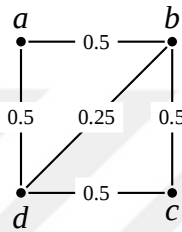
Örnek 4.26. μ sabit fonksiyon olmadığında da $G = (\sigma, \mu)$ fuzzy çizgesi fuzzy köprü bulundurmaz.

Gerçekten de, $V = \{a, b, c, d, \}$ ve $X = \{ab, bc, bd, cd, ad\}$ olsun. Her $x \in V$ için $\sigma(x) = 1$ ve

$$\mu(ab) = \mu(bc) = \mu(cd) = \mu(ad) = 0.5 \text{ ve } \mu(bd) = 0.25$$

şeklinde tanımlansın (bkz. Şekil 4.28).

μ sabit bir fonksiyon değildir. $G = (\sigma, \mu)$ bir fuzzy köprü bulundurmaz çünkü $G = (\sigma, \mu)$ fuzzy çizgesinde herhangi bir köşe çifti arasındaki bağlantılılığın gücü herhangi bir kenarın silinmesinden sonra 0.5 olarak kalır.



Şekil 4.28. Fuzzy köprü bulundurmeyen bir fuzzy çizge

Aşağıdaki teorem Örnek 4.26 ile verilen durumun bir genellemesidir.

Teorem 4.27. $G = (\sigma, \mu)$ bir fuzzy çizge ve $n \geq 3$ olmak üzere $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ve $C = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\}$ olsun.

i. $C \subseteq \text{Supp}(\mu)$ ve $v_{n+1} = v_1$ olmak üzere tüm $v_jv_k \in \text{Supp}(\mu) - C$ için

$$\mu(v_jv_k) < \vee \{\mu(v_i v_{i+1}) | i = 1, \dots, n\}$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda ya μ, C üzerinde bir sabit fonksiyondur ya da G bir fuzzy köprü bulundurur.

ii. Eğer $\emptyset \neq \text{Supp}(\mu) \subset C$ ise G bir fuzzy köprüye sahiptir.

Kanıt.

i. μ, C üzerinde sabit bir fonksiyon olmasın. $\mu(v_h v_{h+1}) = \vee \{\mu(v_i v_{i+1}) | i = 1, \dots, n\}$ olacak şekilde $v_h v_{h+1} \in C$ olsun. μ, C üzerinde sabit fonksiyon olmadığından v_h ve v_{h+1} arasındaki $C - \{v_h v_{h+1}\}$ yolunun gücü kesinlikle $\mu(v_h v_{h+1})$ 'den küçüktür. Herhangi bir P yolu $\text{Supp}(\mu) - C$ 'den bir kenar içereceğinden v_h ve v_{h+1} arasındaki herhangi bir P yolunun gücü kesinlikle $\mu(v_h v_{h+1})$ 'den küçük olur. Böylece $v_h v_{h+1}$ bir fuzzy köprüdür.

ii. Açıktır.

□

5. KÖPRÜLER, KOPMA NOKTALARI VE BLOKLAR

Önceki bölümlerde bağlantılılık ile ilgili kavramaları açıklarken Rosenfeld'in tanımlamaları kullanılmıştır. Bu bölümde ise köprü, kopma noktası ve blok kavramlarını açıklarken Delgado, Verdegay ve Vila'nın tanımları kullanılacaktır (bkz. [4]). Delgado, Verdegay ve Vila Rosenfeld'den farklı olarak köprü, kopma noktası ve blok kavramlarını tanımlamak için seviye kümelerini kullanmışlardır. Seviye kümelerinin kullanılmasını gerekçelendirirken örnek olarak bir fuzzy çizgenin bağlantılılığının farklı derecelerinin olabileceğini ifade etmişlerdir. Örneğin ikisi de bağlantılı olan fuzzy çizgelerin birinin bağlantılı olan bir t -kesmesi mevcut iken diğerinin bağlantılı bir t -kesmesi olmayabilir.

Mordeson ve Yao (bkz. [8]) seviye kümeleri ile verilen bağlantılılık konusunda yeni sonuçlar elde etmiştir. Bu bölümde verilen sonuçlar Mordeson ve Yao'nun bu çalışmasından alınmıştır.

5.1. Köprüler

Tanım 5.1.

$$d(\mu) = \wedge \{\mu(xy) | xy \in \mu^*\}$$

ve

$$h(\mu) = \vee \{\mu(xy) | xy \in \mu^*\}$$

olmak üzere, $d(\mu)$ değeri μ fuzzy kenarlar kümesinin derinliği ve $h(\mu)$ değeri ise μ fuzzy kenarlar kümesinin yüksekliği olarak adlandırılır.

Eğer $\mu^* = \emptyset$ ise $d(\mu)$ ve $h(\mu)$ tanımlı değildir.

Tanım 5.2. $xy \in \mu^*$ olsun.

- i. Eğer xy kenarı (σ^*, μ^*) fuzzy çizgesinde bir köprü ise xy kenarı bir köprüdür denir.
- ii. μ', μ 'nün $E - \{xy\}$ üzerine kısıtlanmış olmak üzere,

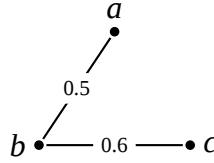
$$\mu'^\infty(u, v) < \mu^\infty(u, v)$$

olacak şekilde $uv \in \mu^*$ kenarı varsa xy kenarı bir fuzzy köprü olarak adlandırılır.

- iii. Eğer xy kenarı G^t için bir köprü olacak şekilde $t \in (0, h(\mu)]$ sayısı varsa xy kenarı bir zayıf fuzzy köprü olarak adlandırılır.
- iv. Eğer her $t \in (d(\mu), h(\mu)] \cup \{h(\mu)\}$ için xy kenarı G^t 'de bir köprü ise xy kenarına bir kısmi fuzzy köprü denir.

Burada, $d(\mu) = h(\mu)$ ise $(d(\mu), h(\mu)] = \emptyset$ kabul edildiğinden t değerleri $(d(\mu), h(\mu)] \cup \{h(\mu)\}$ kümesinden seçilmektedir.

- v. Eğer her $t \in (0, h(\mu)]$ için xy kenarı G^t 'nin bir köprüsü ise xy kenarı tam fuzzy köprü olarak adlandırılır.



Şekil 5.29. Örnek 5.3 ile verilen fuzzy çizge

Örnek 5.3. $V = \{a, b, c\}$ olsun. V köşe noktalar kümesinin fuzzy alt kümesi σ ve $E = \{ab, bc\}$ kenarlar kümesinin fuzzy alt kümesi μ olarak tanımlansın (bkz. Şekil 5.29).

$$\sigma(a) = \sigma(b) = \sigma(c) = 1 \quad \text{ve} \quad \mu(ab) = 0.5, \quad \mu(bc) = 0.6$$

olsun. Bu durumda $d(\mu) = 0.5$ ve $h(\mu) = 0.6$ olur.

$0 < t \leq 0.5$ için $G^t = (V, \{ab, bc\})$ ve $0.5 < t \leq 0.6$ için $G^t = (V, \{bc\})$ olur. Böylece,

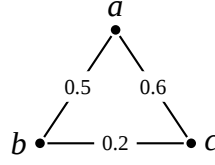
- bc tam fuzzy köprüdür. Gerçekten de, her $t \in (0, 0.6]$ için elde edilen G fuzzy çizgesinin t -kesimlerinden bc kenarının silinmesi çizgeyi bağlantısız yaptığından bc kenarı her $t \in (0, 0.6]$ için G^t fuzzy çizgesinin bir köprüsü olur. Bu yüzden bc kenarı tam fuzzy köprüdür.
- ab bir zayıf fuzzy köprü olur çünkü $t \in (0, 0.6]$ için en az bir t değeri ab kenarı G^t için köprü olacak şekilde mevcuttur. Örneğin, $t = 0.5$ için elde edilen $G^{0.5}$ fuzzy çizgesinden ab kenarının silinmesi çizgeyi bağlantısız yapar. O halde ab kenarı $G^{0.5}$ için bir köprü olur. Bu yüzden ab kenarı bir zayıf fuzzy köprüdür.
- ab kısmi fuzzy köprü değildir. Çünkü her $t \in (0.5, 0.6] \cup \{0.6\}$ için ab kenarı G^t için köprü olmadığından ab kenarı bir kısmi fuzzy köprü değildir.
- Hem ab hem de bc kenarları köprü ve fuzzy köprülerdir. Çünkü ab ve bc kenarları silindiğinde çizge bağlantısız olduğundan ab ve bc kenarları köprü olur ve ab ve bc kenarları silinmesi bağlantılılığın gücünü düşürdüğünden ab ve bc kenarları fuzzy köprülerdir.

Örnek 5.4. $V = \{a, b, c\}$ olsun. V köşe noktalar kümesinin fuzzy alt kümesi σ ve $E = \{ab, bc, ac\}$ kenarlar kümesinin fuzzy alt kümesi μ olarak tanımlansın. Her $x \in V$ için

$$\sigma(x) = 1 \quad \text{ve} \quad \mu(ab) = 0.5, \quad \mu(bc) = 0.2 \quad \text{ve} \quad \mu(ac) = 0.6$$

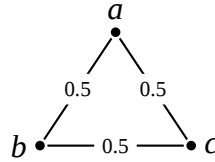
olsun (bkz. Şekil 5.30).

$d(\mu) = 0.2$ ve $h(\mu) = 0.6$ olur. $0 < t \leq 0.2$ için $G^t = (V, \{ab, bc, ac\})$ ve $0.2 < t \leq 0.5$ için $G^t = (V, \{ab, ac\})$, $0.5 < t \leq 0.6$ için $G^t = (V, \{ac\})$ olur. Böylece,



Şekil 5.30. Örnek 5.4 ile verilen fuzzy çizge

- i. *ac kenarının silinmesi çizgeyi bağlantısız yapmadığından ac kenarı köprü değildir.*
- ii. *ac bir fuzzy köprüdür çünkü ac kenarı silindiğinde a ile c köşe noktalarını birleştiren yolun gücü 0.6' dan 0.2' ye düşer.*
- iii. *Her $t \in (0.2, 0.6] \cup \{0.6\}$ için elde edilen G^t fuzzy çizgelerinde ac kenarının silinmesi G^t fuzzy çizgesini bağlantısız yaptığından ac kenarı bir kısmi fuzzy köprüdür.*
- iv. *ac tam fuzzy köprü değildir. Her $t \in (0, 0.6]$ için elde edilen t -kesimler için ac kenarının silinmesi çizgeyi bağlantısız yapmaz. Yani ac kenarı bir köprü değildir. Örneğin, $t = 0.1$ veya $t = 0.2$ için elde edilen G^t fuzzy çizgesi için ac kenarı bir köprü değildir. Dolayısıyla ac kenarı bir fuzzy tam köprü değildir.*
- v. *bc kenarı yukarıda tanımlanan beş köprü türünden herhangi biri değildir.*



Şekil 5.31. Örnek 5.5 ile verilen fuzzy çizge

Örnek 5.5. $V = \{a, b, c\}$ olsun. V köşe noktalar fuzzy kümesinin alt kümesi σ ve $E = \{ab, bc, ac\}$ kenarlar kümesinin fuzzy alt kümesi μ olarak tanımlansın. Her $x \in V$ için

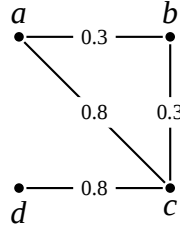
$$\sigma(x) = 1 \quad \text{ve} \quad \mu(ab) = \mu(bc) = \mu(ac) = 0.5$$

olsun (bkz. Şekil 5.31).

$G = (\sigma, \mu)$ fuzzy çizgesi yukarıda tanımlanan beş köprü türünden herhangi birini bulundurmaz.

Örnek 5.6. $V = \{a, b, c, d\}$ olsun. V köşe noktalar kümesinin fuzzy alt kümesi σ ve $E = \{ab, bc, ac, cd\}$ kenarlar kümesinin fuzzy alt kümesi μ olarak tanımlansın. Her $x \in V$ için

$$\sigma(x) = 1 \quad \text{ve} \quad \mu(ab) = \mu(bc) = 0.3 \quad \text{ve} \quad \mu(ac) = \mu(cd) = 0.8$$



Şekil 5.32. Örnek 5.6 ile verilen fuzzy çizge

olsun (bkz. Şekil 5.32).

$d(\mu) = 0.3$ ve $h(\mu) = 0.8$ olur. $0 < t \leq 0.3$ için $G^t = (V, \{ab, bc, ac, cd\})$ ve $0.3 < t \leq 0.8$ için $G^t = (V, \{ac, cd\})$ olur. Böylece,

- i. cd bir fuzzy tam köprüdür.
- ii. ac bir kısmi fuzzy köprüdür.
- iii. ac bir tam fuzzy köprü değildir.

Önerme 5.7. xy kenarının bir fuzzy tam köprü olması için gerek ve yeter koşul xy kenarının G^* fuzzy çizgesinde bir köprü ve $\mu(xy) = h(\mu)$ olmasıdır.

Kanıt. $(\Rightarrow)$ xy kenarı G fuzzy çizgesinin bir tam fuzzy köprüsü olsun. O zaman her $t \in (0, h(\mu)]$ için xy kenarı G^t çizgesi için bir köprü olur. Buradan $xy \in \mu^{h(\mu)}$ ve $\mu(xy) = h(\mu)$ olmak zorundadır. Diğer taraftan, $\mu(xy) \leq \sigma(x) \wedge \sigma(y)$ olduğundan $\sigma^* = \sigma^{d(\mu)}$ olur. $\mu^* = \mu^{d(\mu)}$ ve $0 < d(\mu) \leq h(\mu)$ olduğundan xy kenarı $G^* = (\sigma^*, \mu^*)$ fuzzy çizgesi için de bir köprü olur.

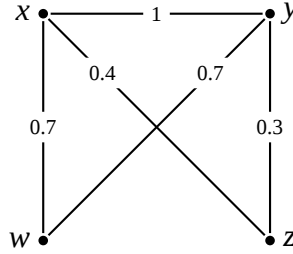
$(\Leftarrow)$ Tersine, xy kenarı G^* fuzzy çizgesinde bir köprü ve $\mu(xy) = h(\mu)$ olsun. Bu durumda her $t \in (0, h(\mu)]$ için xy kenarı G^t fuzzy çizgesinin bir köprüsü olur. Böylece her $t \in (0, h(\mu)]$ için G^t çizgesi G^* çizgesinin bir alt çizgesi olduğundan xy kenarı G çizgesinin bir fuzzy tam köprüsü olur. $\square$

Önerme 5.8. xy kenarı G^* fuzzy çizgesinin hiçbir döngüsünde bulunmasın. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

- i. $\mu(xy) = h(\mu)$
- ii. xy kenarı bir kısmi fuzzy köprüdür.
- iii. xy kenarı bir fuzzy tam köprüdür.

Kanıt. xy kenarı G^* fuzzy çizgesinin hiçbir döngüsünde bulunmadığından xy kenarı G^* çizgesinde bir köprü olur. O zaman Önerme 5.7 yardımıyla $i. \Leftrightarrow iii.$ elde edilmiş olur. Tam fuzzy köprü ve kısmi fuzzy köprü tanımlarından $iii. \Rightarrow ii.$ elde edilir. Geriye $ii. \Rightarrow i.$

olduğunun gösterilmesi kalır. Eğer xy kısmi fuzzy köprü ise her $t \in (d(\mu), h(\mu)] \cup \{h(\mu)\}$ için xy kenarı G^* çizgesinde köprü olur. Yani $xy \in \mu^{h(\mu)}$ olur. O zaman $\mu(xy) = h(\mu)$ elde edilir. $\square$



Şekil 5.33. Örnek 5.9 ile verilen fuzzy çizge

Örnek 5.9. $G = (\sigma, \mu)$ fuzzy çizge, $\sigma^* = \{x, y, z, w\}$ ve $\mu^* = \{xy, xz, xw, wy, yz\}$ olsun. Fuzzy alt kümeler σ ve μ

$$\sigma(x) = \sigma(y) = \sigma(z) = \sigma(w) = 1 \quad \text{ve}$$

$$\mu(xy) = 1, \quad \mu(xz) = 0.4, \quad \mu(xw) = 0.7, \quad \mu(wy) = 0.7 \quad \text{ve} \quad \mu(yz) = 0.3$$

olarak tanımlansın (bkz. Şekil 5.33).

$d(\mu) = 0.3$ ve $h(\mu) = 1$ olur. $0 < t \leq 0.3$ için $G^t = (V, \{xy, xz, xw, wy, yz\})$,
 $0.3 < t \leq 0.4$ için $G^t = (V, \{xy, xz, xw, wy\})$, $0.4 < t \leq 0.7$ için $G^t = (V, \{xy, xw, yz\})$,
ve $0.7 < t \leq 1$ için $G^t = (V, \{xy\})$ olur. Böylece;

- i. xy G^* fuzzy çizgesinde bir döngünün kenarıdır.
- ii. $\mu(xy) = h(\mu)$ eşitliği geçerlidir. Yani xy kenarı G fuzzy çizgesinde ait olma derecesi en yüksek olan kenardır.
- iii. xy kenarı bir kısmi fuzzy köprü değildir. Çünkü her $t \in (0.3, 1] \cup \{1\}$ için xy kenarı G^t için bir köprü değildir. Örneğin, $t = 0.4$ için elde edilen $G^{0.4}$ fuzzy çizgesinden xy kenarının silinmesi çizgeyi bağlantısız yapmadığından xy kenarı $G^{0.4}$ için bir köprü değildir. Bu yüzden xy kenarı bir kısmi fuzzy köprü değildir.
- iv. xy kenarı zayıf fuzzy köprüdür çünkü $t \in (0, 1]$ için en az bir t değeri xy kenarı G^t için köprü olacak şekilde mevcuttur. Örneğin, $t = 0.5$ için elde edilen $G^{0.5}$ fuzzy çizgesinden xy kenarının silinmesi çizgeyi bağlantısız yapar. O halde xy kenarı $G^{0.5}$ için bir köprü olur. Bu yüzden xy kenarı bir zayıf fuzzy köprüdür.

- v. xy kenarı bir fuzzy köprüdür çünkü xy kenarının G fuzzy çizgesinden silinmesi bağlantılılığın gücünü düşürür. Örneğin, G fuzzy çizgesinde xy kenarı silinirse x ile y köşe noktaları arasındaki yolun gücü 1 ' den 0.7 ' ye düşer.
- vi. xy kenarının silinmesi G fuzzy çizgesini bağlantısız yapmadığından xy kenarı bir köprü değildir.

Önerme 5.10. Eğer xy kenarı bir köprü ise xy kenarı bir zayıf fuzzy köprü ve bir fuzzy köprüdür.

Kanıt. xy kenarı G fuzzy çizgesinde bir köprü olsun. O zaman xy kenarı G^* fuzzy çizgesi için bir köprü olur.

$$d(\mu) = \wedge \{\mu(xy) | xy \in \mu^*\}$$

olduğu için $G^* = G^{d(\mu)}$ olur. Böylece, xy kenarı $G^{d(\mu)}$ fuzzy çizgesi için de bir köprü olur. xy kenarı G^t için bir köprü olacak şekilde $t \in (0, h(\mu)]$ sayısı varsa xy kenarı bir zayıf fuzzy köprü olarak adlandırıldığından, $t = d(\mu)$ olarak alınırsa xy kenarı G fuzzy çizgesi için bir zayıf köprü olur.

Ayrıca, xy kenarı G fuzzy çizgesinin bir köprüsü olduğundan xy kenarının G fuzzy çizgesinden silinmesi G^* fuzzy çizgesini bağlantısız yaptığından açıktır ki herhangi iki köşe noktası arasındaki bağlantılılığın gücü düşer böylece xy kenarı bir fuzzy köprü olur. $\square$

Teorem 5.11. xy kenarının bir fuzzy köprü olması için gerek ve yeter koşul xy kenarının bir zayıf fuzzy köprü olmasıdır.

Kanıt. xy kenarının zayıf fuzzy köprü olduğunu kabul edelim. O halde xy kenarı G^t için bir köprü olacak şekilde $t \in (0, h(\mu)]$ sayısı vardır. xy kenarı G^t fuzzy çizgesi için bir köprü olduğundan xy kenarının silinmesi G^t fuzzy çizgesini bağlantısız yapar. Dolayısıyla, G fuzzy çizgesinde x ve y köşe noktalarını birleştiren yol üzerinde $\mu(uv) < t$ olan bir uv kenarı vardır. Bu nedenle xy kenarının silinmesiyle

$$\mu'^{\infty}(x, y) < t \leq \mu^{\infty}(x, y)$$

olur.

$$\mu'^{\infty}(x, y) < \mu^{\infty}(x, y)$$

olduğundan xy kenarı bir fuzzy köprüdür.

Diğer taraftan, xy kenarının fuzzy köprü olduğunu kabul edelim xy kenarı fuzzy çizgeden silindiğinde

$$\mu'^{\infty}(u, v) < \mu^{\infty}(u, v)$$

olacak şekilde u ve v köşe noktaları vardır. Dolayısıyla xy kenarı u ve v köşe noktalarını birleştiren her en güçlü yolun üzerindedir ve xy kenarının fuzzy çizgeye ait olma derecesi en güçlü yolun gücünden büyük veya eşittir. Böylece $G^{\mu(xy)}$ fuzzy çizgesinde xy kenarından başka x ve y köşe noktalarını birleştiren bir yol yoktur. Aksi takdirde, xy kenarının olmadığı bu diğer yolun gücü $\geq \mu(xy)$ ve xy kenarının olmadığı bu diğer yol u ve v köşe noktalarını birleştiren en güçlü yolun bir parçası olurdu. Bu durumlar ise xy kenarının her en güçlü yol üzerinde olmasıyla çelişir. O halde $0 < \mu(xy) \leq h(\mu)$ ve xy kenarı $G^{\mu(xy)}$ için bir köprüdür. xy kenarı G^t için bir köprü olacak şekilde en az bir $t \in (0, h(\mu)]$ sayısı varsa xy kenarı bir zayıf fuzzy köprü olarak adlandırılır. Burada $\mu(xy)$ istenilen t değeridir. O halde xy kenarı bir zayıf fuzzy köprüdür. $\square$

5.2. Kopma Noktaları

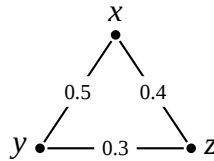
Tanım 5.12. $x \in V$ olsun.

1. Eğer x köşe noktası G^* fuzzy çizgesinin bir kopma noktası ise x 'e bir kopma noktası denir.
2. μ', μ 'nün $E - \{\{xz, zx\} | z \in V\}$ üzerine kısıtlanmış olması üzere

$$\mu'^{\infty}(u, v) < \mu^{\infty}(u, v)$$

olacak şekilde $u, v \in V - \{x\}$ varsa x köşe noktası bir fuzzy kopma noktası olarak adlandırılır.

3. Eğer x köşe noktası G^t için bir kopma noktası olacak şekilde bir $t \in (0, h(\mu)]$ sayısı varsa x köşe noktası bir zayıf fuzzy kopma noktası olarak adlandırılır.
4. Eğer her $t \in (d(\mu), h(\mu)] \cup \{h(\mu)\}$ için x köşe noktası G^t 'de bir kopma noktası ise x köşe noktasına bir kısmi fuzzy kopma noktası denir
5. Eğer her $t \in (0, h(\mu)]$ için x köşe noktası G^t 'nin bir kopma noktası ise x köşe noktası tam fuzzy kopma noktası olarak adlandırılır.



Şekil 5.34. Örnek 5.13 ile verilen fuzzy çizge

Örnek 5.13. $G = (\sigma, \mu)$ fuzzy çizge, $\sigma^* = \{x, y, z\}$ ve $\mu^* = \{xy, xz, yz\}$ olsun. Fuzzy alt kümeler σ ve μ

$$\sigma(x) = \sigma(y) = \sigma(z) = 1 \quad \text{ve} \quad \mu(xy) = 0.5, \quad \mu(yz) = 0.3 \quad \text{ve} \quad \mu(xz) = 0.4$$

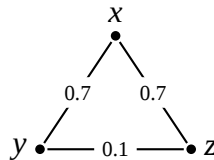
olarak tanımlansın (bkz. Şekil 5.34).

$d(\mu) = 0.3$ ve $h(\mu) = 0.5$ olur. $0 < t \leq 0.3$ için $G^t = (V, \{xy, xz, yz\})$,

$0.3 < t \leq 0.4$ için $G^t = (V, \{xy, xz\})$ ve $0.4 < t \leq 0.5$ için $G^t = (V, \{xy\})$ olur.

Böylece,

- i. x bir fuzzy kopma noktasıdır. Çünkü x köşe noktası silindiğinde y ile z köşe noktalarını birleştiren yolun gücü 0.4 'ten 0.3 'e düşer.
- ii. x zayıf fuzzy kopma noktasıdır çünkü $t \in (0, 0.5]$ için en az bir t değeri x köşe noktası G^t için kopma noktası olacak şekilde mevcuttur. Örneğin, $t = 0.4$ için elde edilen $G^{0.4}$ fuzzy çizgesinden x köşe noktasının silinmesi çizgeyi bağlantısız yapar. O halde x köşe noktası $G^{0.4}$ için bir kopma noktası olur. Bu yüzden x köşe noktası bir zayıf fuzzy kopma noktasıdır.
- iii. x kopma noktası değildir çünkü x köşe noktası silindiğinde x köşe noktasına bağlı kenarlar da silinir bu durumda x köşe noktasının silinmesi çizgeyi bağlantısız yapmadığından x köşe noktası kopma noktası değildir.
- iv. x kısmi fuzzy kopma noktası değildir. Her $t \in (0.3, 0.5] \cup \{0.5\}$ için elde edilen G^t fuzzy çizgelerde x köşe noktasının silinmesi G^t fuzzy çizgesini bağlantısız yapmaz. Örneğin, $t = 0.5$ için elde edilen G^t fuzzy çizgesinden x köşe noktası silindiğinde x köşe noktasına bağlı kenarlar da silinir bu durumda y köşe noktası tek nokta olarak kalır ve bağlantılıdır. Yani $G^{0.5}$ fuzzy çizgesi için x köşe noktası bir kopma noktası değildir. Bu yüzden x köşe noktası bir kısmi fuzzy kopma noktası değildir.



Şekil 5.35. Örnek 5.14 ile verilen fuzzy çizge

Örnek 5.14. $G = (V, \sigma, \mu)$ fuzzy çizge ve $V = \{x, y, z\}$ olsun. V köşe noktalar kümesinin fuzzy alt kümesi σ ve μ kenarlar kümesi $E = \{xy, xz, yz\}$ 'nin fuzzy alt kümesi olmak üzere

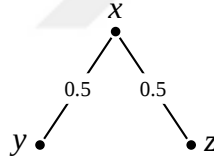
$$\sigma(x) = \sigma(y) = \sigma(z) = 1 \quad \text{ve} \quad \mu(xy) = \mu(xz) = 0.7 \quad \text{ve} \quad \mu(yz) = 0.1$$

olarak tanımlansın (bkz. Şekil 5.35).

$d(\mu) = 0.1$ ve $h(\mu) = 0.7$ olur. $0 < t \leq 0.1$ için $G^t = (V, \{xy, xz, yz\})$, $0.1 < t \leq 0.7$ için $G^t = (V, \{xy, xz\})$ olur.

Böylece,

- i. x bir fuzzy kopma noktasıdır. Çünkü x köşe noktası silindiğinde y ile z köşe noktalarını birleştiren yolun gücü 0.7 ' den 0.1 ' e düşer.
- ii. Her $t \in (0.1, 0.7] \cup \{0.7\}$ için elde edilen G^t fuzzy çizgelerinde x köşe noktasının silinmesi G^t fuzzy çizgesini bağlantısız yaptığından x köşe noktası kısmi fuzzy kopma noktasıdır.
- iii. x köşe noktasının silinmesi çizgeyi bağlantısız yapmadığından x köşe noktası kopma noktası değildir.
- iv. x tam fuzzy kopma noktası değildir. Gerçekten de $t = 0.05 \in (0, 0.7]$ için x köşe noktasının G^t fuzzy çizgesinden silinmesi çizgeyi bağlantısız yapmaz. Yani x köşe noktası $G^{0.05}$ için bir kopma noktası değildir. Dolayısıyla x köşe noktası bir fuzzy tam kopma noktası değildir.



Şekil 5.36. Örnek 5.15 ile verilen fuzzy çizge

Örnek 5.15. $V = \{x, y, z\}$ olsun. V köşe noktalar kümesinin fuzzy alt kümesi σ ve $E = \{xy, xz\}$ kenarlar kümesinin fuzzy alt kümesi μ olarak tanımlansın.

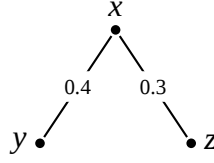
$$\sigma(x) = \sigma(y) = \sigma(z) = 1 \quad \text{ve} \quad \mu(xy) = \mu(xz) = 0.5$$

olarak tanımlansın (bkz. Şekil 5.15).

Burada $d(\mu) = h(\mu) = 0.5$ olmak üzere, $0 < t \leq 0.5$ için $G^t = (V, \{xy, xz\})$ olur.

Böylece,

- i. x bir kopma noktasıdır.
- ii. x fuzzy kopma noktasıdır.
- iii. x tam fuzzy kopma noktasıdır.



Şekil 5.37. Örnek 5.16 ile verilen fuzzy çizge

Örnek 5.16. $V = \{x, y, z\}$ olsun. V köşe noktalar kümesinin fuzzy alt kümesi σ ve $E = \{xy, xz\}$ kenarlar kümesinin fuzzy alt kümesi μ olarak tanımlansın.

$$\sigma(x) = \sigma(y) = \sigma(z) = 1 \quad \text{ve} \quad \mu(xy) = 0.4 \quad \text{ve} \quad \mu(xz) = 0.3$$

olarak tanımlansın (bkz. Şekil 5.37).

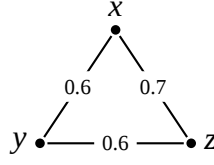
Bu durumda $d(\mu) = 0.3$ ve $h(\mu) = 0.4$ olmak üzere, $0 < t \leq 0.3$ için $G^t = (V, \{xy, xz\})$ ve $0.3 < t \leq 0.4$ için $G^t = (V, \{xy\})$ olur. Böylece,

- i. x bir kopma noktasıdır.
- ii. x fuzzy kopma noktasıdır.
- iii. x zayıf fuzzy kopma noktasıdır.
- iv. x kısmi fuzzy kopma noktası değildir. Gerçekten de, $t = 0.35 \in (0.3, 0.4]$ için iki bileşenli olan $G^{0.35}$ fuzzy çizgesinden x köşe noktasının silinmesi bileşen sayısını arttırmadığından x köşe noktası $G^{0.35}$ çizgesi için bir kopma noktası değildir. Bu nedenle x kısmi fuzzy kopma noktası olamaz.

5.3. Bloklar

Tanım 5.17. i. Eğer G^* fuzzy çizgesi bir blok ise G fuzzy çizgesine blok denir.

- ii. Eğer G fuzzy çizgesi fuzzy kopma noktası bulundurmuyorsa G bir fuzzy blok olarak adlandırılır.
- iii. Eğer G^t fuzzy çizgesi bir blok olacak şekilde olacak şekilde $t \in (0, h(\mu)]$ sayısı varsa G bir zayıf fuzzy blok olarak adlandırılır.
- iv. Eğer her $t \in (d(\mu), h(\mu)] \cup \{h(\mu)\}$ için G^t bir blok ise G fuzzy çizgesine kısmi fuzzy blok denir.
- v. Eğer her $t \in (0, h(\mu)]$ için G^t bir blok ise G fuzzy çizgesine tam fuzzy blok denir.



Şekil 5.38. Örnek 5.18 ile verilen fuzzy çizge

Örnek 5.18. $G = (\sigma, \mu)$ fuzzy çizge, $\sigma^* = \{x, y, z\}$ ve $\mu^* = \{xy, xz, yz\}$ olsun. Fuzzy alt kümeler σ ve μ

$$\sigma(x) = \sigma(y) = \sigma(z) = 1 \quad \text{ve} \quad \mu(xy) = \mu(yz) = 0.6 \quad \text{ve} \quad \mu(xz) = 0.7$$

olarak tanımlansın (bkz. Şekil 5.38).

$d(\mu) = 0.6$ ve $h(\mu) = 0.7$ olur. $0 < t \leq 0.6$ için $G^t = (V, \{xy, xz, yz\})$, $0.6 < t \leq 0.7$ için $G^t = (V, \{xz\})$ olur.

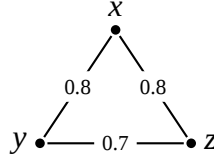
Böylece,

- i. G fuzzy çizgesi kopma noktası içermediğinden bir bloktur.
- ii. G bir fuzzy bloktur çünkü herhangi bir köşe noktasının silinmesi iki köşe çifti arasındaki yolun gücünü düşürmediğinden G fuzzy çizgesinde fuzzy kopma noktası yoktur. Bu yüzden G bir fuzzy bloktur.
- iii. G zayıf fuzzy bloktur. $t \in (0, 0.7]$ için en az bir t değeri G^t blok olacak şekilde mevcuttur. Örneğin, $t = 0.5$ için elde edilen $G^{0.5}$ fuzzy çizgesinden herhangi bir köşe noktasının silinmesi çizgeyi bağlantısız yapmadığından $t = 0.5$ için elde edilen $G^{0.5}$ fuzzy çizgesinde kopma noktası yoktur. O halde $G^{0.5}$ fuzzy çizgesi bir blok olur. Bu yüzden G fuzzy çizgesi bir zayıf fuzzy bloktur.
- iv. Her $t \in (0.6, 0.7] \cup \{0.7\}$ için elde edilen G^t fuzzy çizgesi bir blok değildir. Örneğin $t = 0.7$ için G^t fuzzy çizgesinden x köşe noktasının silinmesi çizgeyi bağlantısız yaptığından x köşe noktası $G^{0.7}$ fuzzy çizgesi için bir kopma noktasıdır bu yüzden $G^{0.7}$ fuzzy çizgesi bir blok değildir. Dolayısıyla G fuzzy çizgesi bir kısmi fuzzy blok değildir.

Örnek 5.19. $G = (\sigma, \mu)$ fuzzy çizge, $\sigma^* = \{x, y, z\}$ ve $\mu^* = \{xy, xz, yz\}$ olsun. Fuzzy alt kümeler σ ve μ

$$\sigma(x) = \sigma(y) = \sigma(z) = 1 \quad \text{ve} \quad \mu(xy) = \mu(xz) = 0.8 \quad \text{ve} \quad \mu(yz) = 0.7$$

olarak tanımlansın (bkz. Şekil 5.39).

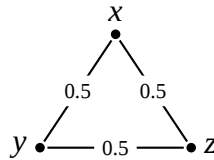


Şekil 5.39. Örnek 5.19 ile verilen fuzzy çizge

$d(\mu) = 0.7$ ve $h(\mu) = 0.8$ olur. $0 < t \leq 0.7$ için $G^t = (V, \{xy, xz, yz\})$, $0.7 < t \leq 0.8$ için $G^t = (V, \{xy, xz\})$ olur.

Böylece,

- i. G fuzzy çizgesi kopma noktası içermediğinden bir bloktur.
- ii. G zayıf fuzzy bloktur. $t \in (0, 0.8]$ için en az bir t değeri G^t blok olacak şekilde mevcuttur. Örneğin, $t = 0.4$ için elde edilen $G^{0.4}$ fuzzy çizgesinden herhangi bir köşe noktasının silinmesi çizgeyi bağlantısız yapmadığından $t = 0.4$ için elde edilen $G^{0.4}$ fuzzy çizgesinde kopma noktası yoktur. O halde $G^{0.4}$ fuzzy çizgesi bir blok olur. Bu yüzden G fuzzy çizgesi bir zayıf fuzzy bloktur.
- iii. G fuzzy çizgesinden x köşe noktası silindiğinde y ile z köşe noktalarını birleştiren yolun gücü 0.8 'den 0.7 'ye düştüğünden x köşe noktası G fuzzy çizgesi için bir fuzzy kopma noktası olur. Bu yüzden G fuzzy çizgesi bir fuzzy blok değildir.
- iv. Her $t \in (0.7, 0.8] \cup \{0.8\}$ için elde edilen G^t fuzzy çizgesi bir blok değildir. Örneğin $t = 0.8$ için G^t fuzzy çizgesinden x köşe noktasının silinmesi çizgeyi bağlantısız yaptığından x köşe noktası $G^{0.8}$ fuzzy çizgesi için bir kopma noktasıdır bu yüzden $G^{0.8}$ fuzzy çizgesi bir blok değildir. Dolayısıyla G fuzzy çizgesi bir kısmi fuzzy blok değildir.



Şekil 5.40. Örnek 5.20 ile verilen fuzzy çizge

Örnek 5.20. $G = (\sigma, \mu)$ fuzzy çizge, $\sigma^* = \{x, y, z\}$ ve $\mu^* = \{xy, xz, yz\}$ olsun. Fuzzy alt kümeler σ ve μ

$$\sigma(x) = \sigma(y) = \sigma(z) = 1 \quad \text{ve} \quad \mu(xy) = \mu(xz) = \mu(yz) = 0.5$$

olarak tanımlansın (bkz Şekil 5.40).

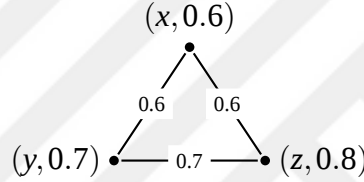
$d(\mu) = h(\mu) = 0.5$ olur. $0 < t \leq 0.5$ için $G^t = (V, \{xy, xz, yz\})$ olur. Böylece,

- i. G bir bloktur.
- ii. G fuzzy bloktur.
- iii. G tam fuzzy bloktur.

Tanım 5.21. $G = (\sigma, \mu)$ olmak üzere eğer

$$\wedge \{\sigma(x) | x \in V\} \geq \vee \{\mu(xy) | xy \in \mu^*\}$$

ise $G = (\sigma, \mu)$ fuzzy çizgesine kesin (firm) fuzzy çizge denir.



Şekil 5.41. Örnek 5.22 ile verilen fuzzy çizge

Örnek 5.22. $G = (\sigma, \mu)$ fuzzy çizge, $\sigma^* = \{x, y, z\}$ ve $\mu^* = \{xy, xz, yz\}$ olsun. Fuzzy alt kümeler σ ve μ

$$\sigma(x) = 0.6, \quad \sigma(y) = 0.7, \quad \sigma(z) = 0.8$$

ve

$$\mu(xy) = \mu(xz) = 0.6, \quad \mu(yz) = 0.7$$

olarak tanımlansın (bkz. Şekil 5.41).

$d(\mu) = 0.6$ ve $h(\mu) = 0.7$ olur. $0 < t \leq 0.6$ için $G^t = (V, \{xy, xz, yz\})$, $0.6 < t \leq 0.7$ için $G^t = (V, \{yz\})$ olur. Böylece,

- i. G fuzzy çizgesinden herhangi bir köşe noktasının silinmesi çizgeyi bağlantısız yapmadığından G fuzzy çizgesinin kopma noktası yoktur. Bu yüzden G fuzzy çizgesi bir bloktur.
- ii. G fuzzy çizgesinden x , y ve z köşe noktaları silindiğinde bağlantılılığın gücünde düşüş olmadığından G fuzzy çizgesinde fuzzy kopma noktası yoktur. Bu yüzden G bir fuzzy bloktur.

iii. G tam fuzzy bloktur.

iv. $\wedge\{\sigma(x)|x \in V\} = 0.6 < \vee\{\mu(xy)|xy \in \mu^*\} = 0.7$ olduğundan $G(\sigma, \mu)$ fuzzy çizgesi bir kesin fuzzy çizge değildir.



KAYNAKÇA

- [1] Emrah Akyar. *Çizge Kuramına (Graf Teorisine) Giriş*. Seçkin Yayıncılık, Ankara, 2021.
- [2] Barnabas Bede. *Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*. Studies in Fuziness and Soft Computing. Springer, Berlin, Heidelberg, 2013.
- [3] K. R. Bhutani. On automorphisms of fuzzy graphs. *Pattern Recognition Letters*, 9:159–162, 1989.
- [4] M. Delgado, J. L. Verdegay, and M. A. Vila. On fuzzy tree definition. *European J. Operational Res.*, 22:243–249, 1985.
- [5] A. Kauffmann. *Introduction to the Theory of Fuzzy Sets*, volume 1. Academic Press, Inc., Orlando, Florida, 1973.
- [6] Dalibor Krleza and Kresimir Fertalj. Graph matching using hierarchical fuzzy graph neural networks. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 25(4):892–904, 2017.
- [7] K.H. Lee. *First Course on Fuzzy Theory and Applications*. Advances in Intelligent and Soft Computing. Springer Berlin Heidelberg, 2004.
- [8] J. N. Mordeson and Y. Y. Yao. Fuzzy cycles and fuzzy trees. *The Journal of Fuzzy Mathematics*, 10:189–202, 2002.
- [9] John N. Mordeson and Premchand S. Nair. *Applications of Fuzzy Graphs*, pages 83–133. Physica-Verlag HD, Heidelberg, 2000.
- [10] A. Pius and D. R. Kirubaharan. Application of cryptography in data privacy using fuzzy graph theory. *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, 24(8):2389–2401, 2021.
- [11] P. Rani, D.K. Tayal, and M.P.S. Bhatia. Sociocentric SNA on fuzzy graph social network model. *Soft Comput*, 2022.
- [12] A. Rosenfeld. *Fuzzy Sets and Their Applications*. Academic Press, New York, 1975.
- [13] M. S. Sunitha and A. Vijayakumar. A characterization of fuzzy trees. *Information Sciences*, 113:293–300, 1999.
- [14] Douglas Brent West. *Introduction to Graph Theory*. Prentice Hall, 2001.

- [15] Raymond T. Yeh and S. Y. Bang. Fuzzy relations, fuzzy graphs, and their applications to clustering analysis. In *Fuzzy sets and their applications to cognitive and decision processes (Proc. U. S.-Japan Sem., Univ. Calif., Berkeley, Calif., 1974)*, pages 125–149, 1975.
- [16] L. A. Zadeh. Fuzzy sets. *Inform. and Control*, 8:338–353, 1965.
- [17] L. A. Zadeh. Similarity relations and fuzzy orderings. *Information Sciences*, 3:177–200, 1971.



ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : Çağla Ekmen

Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Geçmişi:

- 2015–2019, Anadolu Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü.

