

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FUZZY DÖNÜŞÜMÜ VE BAZI UYGULAMALARI

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ
NUR GAZANFER

AĞUSTOS 2020

**ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

FUZZY DÖNÜŞÜMÜ VE BAZI UYGULAMALARI

**MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Nur GAZANFER**

DANIŞMAN: Doç. Dr. Zekeriya USTAOĞLU

**ZONGULDAK
Ağustos 2020**

KABUL:

Nur GAZANFER tarafından hazırlanan “FUZZY DÖNÜŞÜMÜ VE BAZI UYGULAMALARI” başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek, Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliği ile kabul edilmiştir. 28/08/2020

Başkan: Doç. Dr. Zekeriya USTAOĞLU (ZBEÜ)

.....

Üye : Prof. Dr. Yusuf KAYA (ZBEÜ)

.....

Üye : Doç. Dr. Mahmut AKYİĞİT (SAÜ)

.....

ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım. .../.../2020

Prof. Dr. Ahmet ÖZARSLAN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü



“Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim.”

Nur GAZANFER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

FUZZY DÖNÜŞÜMÜ VE BAZI UYGULAMALARI

Nur GAZANFER

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Zekeriya USTAOĞLU

Ağustos 2020, 57 sayfa

Tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde fuzzy kümeleri ile ilgili bazı temel tanımlar verilmiştir. İkinci bölümde fuzzy parçalanış, fuzzy dönüşümü, ayrık fuzzy dönüşümü ve ters fuzzy dönüşümü kavramları ele alınmıştır. Üçüncü bölümde fuzzy dönüşümünün uygulanması kapsamında, iki nokta sınır-değer problemi, parabolik denklem için birinci karışık problem, hiperbolik denklem için birinci karışık problem ve eliptik denklem için Dirichlet probleminin yaklaşık çözümünün fuzzy yaklaşımı kullanılarak araştırılmasına yer verilmiştir. Bu problemler için, verilere etki eden gürültünün yaklaşık çözüme etkisi üzerine değerlendirmeler yapılmıştır. Son bölümde ise sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fuzzy Parçalanış, Fuzzy Dönüşümü, Sonlu Farklar

Bilim Kodu: 403.06.01



ABSTRACT

M. Sc. Thesis

FUZZY TRANSFORM AND SOME OF ITS APPLICATIONS

Nur GAZANFER

**Zonguldak Bülent Ecevit University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Thesis Advisor: Assoc. Prof. Dr. Zekeriya USTAOĞLU

August 2020, 57 pages

The thesis consists of four chapters. In the first chapter, some basic definitions on fuzzy sets are given. In the second chapter, fuzzy partition, fuzzy transform, discrete fuzzy transform and inverse fuzzy transform concepts are considered. In the third chapter, as applications of fuzzy transform, the approximate solutions of two point boundary-value problem, the first mixed problem for parabolic equation, the first mixed problem for hyperbolic equation and Dirichlet problem for elliptic equation via fuzzy approximation are presented. Moreover, the effect of the noisy data to the approximate solution of these problems is investigated. Conclusion and remarks are given in the last chapter.

Keywords: Fuzzy Partition, Fuzzy Transform, Finite Differences

Science Code: 403.06.01

TEŞEKKÜR

Tezin tüm aşamalarında değerli vaktini esirgemedi bana ayıran, görüş ve önerileriyle yardımcı olan ve beni yönlendiren değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Zekeriya USTAOĞLU'na (ZBEÜ) teşekkür ederim.

Hayatımın tüm aşamalarında olduğu gibi bu çalışma esnasında da manevi desteklerini hep yanımda hissettiğim aileme ve sevgili arkadaşlarıma çok teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
KABUL	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER.....	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xi
ÇİZELGELER DİZİNİ	xiii
SİMGELER DİZİNİ.....	xv
BÖLÜM 1 GİRİŞ	1
1.1 TEZİN KAPSAMI VE ÖNEMİ.....	2
1.2 FUZZY KÜMELERİ VE TEMEL İŞLEMLER	3
BÖLÜM 2 FUZZY DÖNÜŞÜMÜ	7
2.1 TEK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR İÇİN FUZZY DÖNÜŞÜMÜ	7
2.1.1 Fuzzy Parçalanış.....	7
2.1.2 Direkt Fuzzy Dönüşümü	13
2.1.3 Ters Fuzzy Dönüşümü	20
2.2 İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR İÇİN FUZZY DÖNÜŞÜMÜ	24
2.2.1 Fuzzy Parçalanış.....	24
2.2.2 Direkt Fuzzy Dönüşümü	27
2.2.3 Ters Fuzzy Dönüşümü	31
2.3 $r \in \mathbb{N}$ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR İÇİN FUZZY DÖNÜŞÜMÜ	31
2.3.1 Fuzzy Parçalanış.....	31
2.3.2 Direkt Fuzzy Dönüşümü	32
2.3.3 Ters Fuzzy Dönüşümü	32

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

BÖLÜM 3 FUZZY DÖNÜŞÜMÜNÜN BAZI UYGULAMALARI.....	35
3.1 İKİ NOKTA SINIR-DEĞER PROBLEMİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ	36
3.2 PARABOLİK DENKLEM İÇİN BİRİNCİ KARIŞIK PROBLEMİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ.....	41
3.3 HİPERBOLİK DENKLEM İÇİN BİRİNCİ KARIŞIK PROBLEMİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ.....	45
3.4 ELİPTİK DENKLEM İÇİN DİRİCHLET PROBLEMİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ	49
BÖLÜM 4 SONUÇ VE ÖNERİLER.....	53
KAYNAKLAR.....	55
ÖZGEÇMİŞ	57

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>No</u>		<u>Sayfa</u>
2.1	Üçgensel temel fonksiyonlar	9
2.2	Sinüsoidal temel fonksiyonlar	9
2.3	Üçgensel temel fonksiyonlar ile fuzzy bileşenleri ve ters fuzzy yaklaşımı	23
2.4	Sinüsoidal temel fonksiyonlar ile fuzzy bileşenleri ve ters fuzzy yaklaşımı	23
3.1	(3.8) sınır-değer problemi için gürültüsüz ve gürültülü veri ile yaklaşım	39
3.2	(3.9) sınır-değer problemi için gürültüsüz ve gürültülü veri ile yaklaşım	39
3.3	(3.10) sınır-değer problemi için gürültüsüz ve gürültülü veri ile yaklaşım	40
3.4	(3.11) sınır-değer problemi için gürültüsüz ve gürültülü veri ile yaklaşım	40

ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>No</u>	<u>Sayfa</u>
Çizelge 3.1 Hata matrisinin 2-normu (Örnek 3.2.1 için)	44
Çizelge 3.2 Hata matrisinin 2-normu (Örnek 3.3.1 için)	48
Çizelge 3.3 Hata matrisinin 2-normu (Örnek 3.4.1 için)	51





SİMGELER DİZİNİ

SİMGELER

$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$	: Fuzzy kümeleri
$\mathbf{A}(x)$	: x in $\mathbf{A}$ ya üyelik derecesi
$\mathbf{A}_\alpha$	: α –kesimi
$\mathbf{A}^c$	: $\mathbf{A}$ nın tümleyeni
$f_n^F(x)$	: f fonksiyonunun ters fuzzy dönüşümü
F_i	: f fonksiyonunun direkt fuzzy dönüşüm bileşenleri
$\mathbf{F}_n[f]$	: f fonksiyonunun fuzzy dönüşümü
$supp(\mathbf{A})$	: $\mathbf{A}$ nın supportu
$\subseteq$ $\sim$	: Fuzzy küme teorisinde alt küme
$\times_\odot$	: Çarpım t normuna göre fuzzy kartezyen çarpımı
$\circ_T$	: $sup - T$ bileşkesi

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Fiziksel problemlerin matematiksel modelleri ortaya koyulurken, problemlerin doğrusal olduğu veya zamanla değişmediği gibi bazı basitleştirmeler veya kabuller yapılabilir. Ancak uygulamalarda karşılaşılan birçok problem hem dinamik hem de oldukça karmaşıktır. Bu nedenle ortaya konulan matematiksel modelin pratikte uygulanabilir ve uygun bir çözüm yöntemine sahip olması önemlidir.

Kullanılan matematiksel modelde istenilen çözümün analitik olarak elde edilmesi her zaman mümkün olmadığından, çözümlerin nümerik olarak hesaplanması için doğruluğu yüksek etkili yöntemler araştırılır. Fourier, Laplace, Radon, dalgacık (wavelet) dönüşümü gibi çeşitli dönüşümler matematiksel modellerin ortaya konulmasında ve diferansiyel ya da integro-diferansiyel denklemlerin çözümünün teorik veya sayısal olarak araştırılmasında kullanılmaktadır. Perfilieva ve Chaldeevea 2001 yılında, fuzzy dönüşümünün (F -dönüşümü) tanımını vererek veri sıkıştırma ve rekonstrüksiyonu, görüntü düzenleme, füzyon gürültüsünün yok edilmesi ve kontrol sistemleri konularında fuzzy dönüşümünün uygulanabilirliğini ortaya koymuştur (Perfilieva and Chaldeevea 2001). (Stepnicka and Valasek 2004a, 2004b) çalışmalarında fuzzy dönüşümü kullanılarak ısı ve dalga denklemlerinin çözümleri için bir sürekli fonksiyon yaklaşımı verilmiştir. (Dankova and Valasek 2006) makalesinde görüntü füzyon probleminin çözümünde kullanılan dalgacık dönüşümünün yerine alternatif olarak fuzzy dönüşümünün kullanılabileceği gösterilmiştir.

Fuzzy dönüşümü, kapalı aralıkta tanımlı sürekli fonksiyonların yaklaşık olarak bir temsilini yapar ve bu yaklaşım diğer dönüşümlerde olduğu gibi direkt fuzzy dönüşüm ile ters fuzzy dönüşüm çiftinden meydana gelir. Fuzzy dönüşümü temel anlamda, fuzzy küme teorisine bağlı olarak kısmi üyeliği kabul eden bir dönüşüm olarak ifade edilebilir. Fuzzy küme teorisi, klasik küme teorisinden farklı olarak elemanların kısmen kümeye dahil olduğu durumları da dikkate alır. Buradan hareketle fuzzy küme teorisine göre, kümedeki her bir elemana karşılık, $[0, 1]$ aralığında kümedeki üyelik derecesini temsil

eden bir reel sayı değeri verilir. Fuzzy küme teorisi kavramını ilk olarak 1965 yılında Lotfi Zadeh tarafından ortaya konulmuştur (Zadeh 1965).

Mevcut matematiksel kavramlar önemli ölçüde ele alınan problemin evrensel kümesine ait elemanlar ve kümeler bakımından klasik küme teorisine bağlıdır. Fakat, klasik küme teorisi ile tanımlanamayan ya da ele alınamayan bir çok uygulamalı problem mevcuttur. Bu nedenle fuzzy küme teorisi ve fuzzy modellerinin yaklaşım özelliklerini merkeze alan fuzzy yaklaşımı ve bu yaklaşımın uygulama alanları üzerine çalışmalar önem kazanmaktadır.

1.1 TEZİN KAPSAMI VE ÖNEMİ

Bu tez kapsamında fuzzy parçalanış, fuzzy dönüşümü, ayrık fuzzy dönüşümü ve ters fuzzy dönüşümü kavramları ele alınmıştır. Bu kavramlar sırasıyla tek değişkenli, iki değişkenli ve $r \in \mathbb{N}$ değişkenli fonksiyonlar için açıklanmıştır. Fuzzy ve ters fuzzy dönüşümleri ile bir fonksiyonun hangi ölçüde temsil edilebileceği ve nasıl bir yaklaşım sağlanabileceği incelenmiştir.

Fuzzy dönüşümü ile ilgili uygulamalar kapsamında, iki nokta sınır-değer problemi, parabolik denklem için birinci karışık problem, hiperbolik denklem için birinci karışık problem ve eliptik denklem için Dirichlet probleminin yaklaşık çözümü fuzzy yaklaşımı kullanılarak araştırılmıştır. Bu problemler için verilen yaklaşım yöntemlerinin uygulanması ve değerlendirmesine yönelik gerekli program kodları yazılmış ve problemlerde yer alan bilinen fonksiyonların bazı özel durumları için yaklaşık çözümler elde edilmiştir.

Yaklaşık çözümlerin elde edilmesinde kullanılan yöntem temel olarak sonlu farklar yöntemi ile benzerlik göstermektedir. Ancak sonlu farklardan farklı olarak ele alınan tanım kümesi bir ağ ile temsil edilmek yerine bu kümenin fuzzy parçalanışı yardımıyla temsil edilmektedir. Ayrıca, fonksiyonun ağın düğüm noktalarındaki değerleri yerine fonksiyonun fuzzy bileşenleri kullanılmaktadır. Ele alınan örneklerde verilere etki eden gürültünün yaklaşık çözüme etkisinin fuzzy dönüşümü kullanılarak yapılan yaklaşımlarda sonlu farklar kullanılarak yapılan yaklaşımlara göre daha az olduğu görülmüştür.

1.2 FUZZY KÜMELERİ VE TEMEL İŞLEMLER

Bu kısımda, fuzzy kümeleri tanımı ve bu kümelerde tanımlanan işlemler ele alınacaktır.

Tanım 1.2.1 D evrensel küme $A \subseteq D$ olsun. Klasik küme teorisinde D kümesinin her bir elemanı A kümesinin bir elemanıdır ya da değildir. Bir klasik küme $\chi_A : D \rightarrow \{0, 1\}$ olmak üzere

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

olarak tanımlanan karakteristik fonksiyon ile karakterize edilir (Zadeh 1965, s. 339).

Fuzzy küme teorisinde ise kısmi üyelik geçerlidir. Karakteristik fonksiyonun genelleştirilmesi D nin her bir elemanının üyelik derecesi şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.2.2 D , x ile ifade edilen nesnelerin bir topluluğu olsun. D üzerinde $\mathbf{A}$ fuzzy kümesi $\mathbf{A} : D \rightarrow [0, 1]$ olmak üzere

$$\mathbf{A} = \{(x, \mathbf{A}(x)) \mid x \in D\}$$

ile tanımlı sıralı ikililerin bir kümesidir. Burada her $x \in D$ için tanımlanan $\mathbf{A}(x)$ değerine x in $\mathbf{A}$ fuzzy kümesine ait olma (üyelik) derecesi ve $\mathbf{A}$ fonksiyonuna da üyelik fonksiyonu denir (Chen and Pham 2000).

Örnek 1.2.1 $D = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ olsun. Klasik küme teorisinde bir $A \subseteq D$ kümesi

$$A = \{2, 5, 8\}$$

şeklinde ifade edilirken, fuzzy küme teorisinde $\mathbf{A} \subseteq D$ kümesi, üyelik derecelerini de içeren sıralı ikililer yardımıyla

$$\mathbf{A} = \{(1, 0.1), (2, 1), (3, 0.6), (4, 0.5), (5, 1), (6, 0), (7, 0), (8, 1), (9, 0), (10, 0.5)\}$$

şeklinde gösterilir.

Uyarı 1.2.3 1) $\mathbf{A}$ nın her bir elemanı, birinci bileşeni D den ve ikinci bileşeni $[0, 1]$ aralığından olan bir sıralı ikili şeklinde ifade edilir.

2) 0 değeri tam üye olmamayı, 1 değeri tam üye olmayı ifade eder ve bunların arasındaki değerler ara derece üyeliğini temsil eder.

Fuzzy kümelerindeki üyelik dereceleri aşağıdaki gibi sınıflandırılır.

Tanım 1.2.4 $\alpha \in [0, 1]$ olmak üzere, $\mathbf{A}$ fuzzy kümesine ait üyelik derecesinin en az α olduğu elemanların

$$\mathbf{A}_\alpha = \{x \in D \mid \mathbf{A}(x) \geq \alpha\}$$

kümesine α -kesimi (α -cut veya α -level set) denir (Leondes 1998, s. 41).

Yukarıdaki tanım " $\geq$ " yerine " $>$ " sembolü kullanılarak da verilebilir.

Tanım 1.2.5 $\mathbf{A} \subseteq_{\sim} D$ olmak üzere

$$\text{Supp}(\mathbf{A}) = \{x \in D \mid \mathbf{A}(x) > 0\}$$

kümesine $\mathbf{A}$ nın desteği (support) denir (Zimmermann 2001, s. 14).

Örnek 1.2.2 Örnek 1.2.1 ele alınırsa

$$\text{Supp}(\mathbf{A}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 10\}$$

$$\mathbf{A}_{0,5} = \{2, 3, 4, 5, 8, 10\}$$

şeklinde bulunur.

Tanım 1.2.6 $\mathbf{A} \subseteq_{\sim} D$ olmak üzere her $x \in D$ için $\mathbf{A}(x) = 0$ ise $\mathbf{A}$ fuzzy kümesi boştur denir (Feng 2010, s. 18).

Tanım 1.2.7 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subseteq_{\sim} D$ olmak üzere her $x \in D$ için $\mathbf{A}(x) \leq \mathbf{B}(x) \iff \mathbf{A} \subseteq_{\sim} \mathbf{B}$ dir (Zadeh 1965, s. 340).

Tanım 1.2.8 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subseteq_{\sim} D$ olsun. Her $x \in D$ için $\mathbf{A}(x) = \mathbf{B}(x) \iff \mathbf{A} = \mathbf{B}$ dir (Zadeh 1965, s. 340).

Tanım 1.2.9 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subseteq_{\sim} D$ fuzzy kümelerinin $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cup \mathbf{B} \subseteq_{\sim} D$ birleşimi, her $x \in D$ için üyelik fonksiyonu

$$\mathbf{C}(x) = (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})(x) = \max\{\mathbf{A}(x), \mathbf{B}(x)\}$$

olarak tanımlanan fuzzy kümesidir (Zadeh 1965, s. 340).

Tanım 1.2.10 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subseteq D$ fuzzy kümelerinin $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cap \mathbf{B} \subseteq D$ kesişimi, her $x \in D$ için üyelik fonksiyonu

$$\mathbf{C}(x) = (\mathbf{A} \cap \mathbf{B})(x) = \min \{ \mathbf{A}(x), \mathbf{B}(x) \}$$

olarak tanımlanan fuzzy kümesidir (Zadeh 1965, s. 341).

Tanım 1.2.11 $\mathbf{A} \subseteq D$ fuzzy kümesinin $\mathbf{A}^c \subseteq D$ tümleyeni, her $x \in D$ için üyelik fonksiyonu

$$\mathbf{A}^c(x) = 1 - \mathbf{A}(x)$$

olarak tanımlanan fuzzy kümesidir (Feng 2010, s. 19).

Tanım 1.2.12 $x_1, x_2 \in D$ ve $\lambda \in [0, 1]$ olmak üzere

$$\mathbf{A}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min(\mathbf{A}(\lambda x_1), \mathbf{A}(\lambda x_2))$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $\mathbf{A}$ fuzzy kümesi D üzerinde konvektir denir (Feng 2010, s. 18).

Tanım 1.2.13 Her $x, x', y, y' \in [0, 1]$ için

$$T(x, y) = T(y, x) \quad (\text{değişme})$$

$$T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z) \quad (\text{birleşme})$$

$$x \leq x' \text{ ve } y \leq y' \text{ iken } T(x, y) \leq T(x', y') \quad (\text{monotonluk})$$

$$T(x, 1) = x \quad (\text{birim eleman 1})$$

özelliklerini sağlayan $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dönüşümüne t -norm denir (Stepnicka 2007).

Tanım 1.2.14 Her $x, x', y, y' \in [0, 1]$ için

$$S(x, y) = S(y, x) \quad (\text{değişme})$$

$$S(x, S(y, z)) = S(S(x, y), z) \quad (\text{birleşme})$$

$$x \leq x' \text{ ve } y \leq y' \text{ iken } S(x, y) \leq S(x', y') \quad (\text{monotonluk})$$

$$S(x, 0) = x \quad (\text{birim eleman 0})$$

özelliklerini sağlayan $S : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dönüşümüne t -konorm denir (Stepnicka 2007).

Tanım 1.2.15 $\mathbf{A} \subseteq X$, $\mathbf{B} \subseteq Y$ olsun. $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \subseteq X \times Y$ fuzzy kartezyen çarpımı, her $x \in X$ ve $y \in Y$ için üyelik fonksiyonu

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})(x, y) = \min(\mathbf{A}(x), \mathbf{B}(y))$$

olarak tanımlanan fuzzy kümesidir (Stepnicka 2007).

Bir $\mathbf{R}$ fuzzy bağıntısı $X \times Y$ kartezyen çarpım uzayından $[0, 1]$ aralığına tanımlanan ve iki uzaydan alınan sıralı ikililerin üyelik fonksiyonlarıyla ifade edilen bir dönüşümdür.

Tanım 1.2.16 $\mathbf{R}$ ve $\mathbf{G}$, $X \times Y$ kartezyen uzayında iki fuzzy bağıntısı olsun. Bu durumda

$$(\mathbf{R} \cup \mathbf{G})(x, y) = \max(\mathbf{R}(x, y), \mathbf{G}(x, y)) \quad \text{Birleşim işlemi}$$

$$(\mathbf{R} \cap \mathbf{G})(x, y) = \min(\mathbf{R}(x, y), \mathbf{G}(x, y)) \quad \text{Kesişim işlemi}$$

$$\mathbf{R}^c(x, y) = 1 - \mathbf{R}(x, y) \quad \text{Tümleyen}$$

$$\mathbf{R} \subseteq \mathbf{G} \Rightarrow \mathbf{R}(x, y) \leq \mathbf{G}(x, y) \quad \text{Kapsama}$$

dır (Stepnicka 2007).

Tanım 1.2.17 $\mathbf{R} \subseteq X \times Y$, $\mathbf{G} \subseteq Y \times Z$ fuzzy bağıntıları olsun.

$$(\mathbf{R} \circ \mathbf{G})(x, z) = \sup_{y \in Y} \min\{\mathbf{R}(x, y), \mathbf{G}(y, z)\}$$

ifadesine $\mathbf{R}$ ve $\mathbf{G}$ fuzzy kümelerinin sup-min bileşkesi denir (Stepnicka 2007).

Tanım 1.2.18 T , t -norm ve $\mathbf{R} \subseteq X \times Y$, $\mathbf{G} \subseteq Y \times Z$ fuzzy bağıntıları olsun.

$$(\mathbf{R} \circ_T \mathbf{G})(x, z) = \sup_{y \in Y} T\{\mathbf{R}(x, y), \mathbf{G}(y, z)\}$$

ifadesine $\mathbf{R}$ ve $\mathbf{G}$ fuzzy kümelerinin sup-T bileşkesi denir (Stepnicka 2007).

BÖLÜM 2

FUZZY DÖNÜŞÜMÜ

Bir fonksiyonun fuzzy dönüşümünün tanımlanabilmesi için öncelikle ele alınan fonksiyonun tanım kümesinin fuzzy parçalanış olarak adlandırılan bir parçalanışının oluşturulması gerekir. Bölüm 2.1’de, bir $D \subseteq \mathbb{R}$ kümesi için fuzzy parçalanış kavramı açıklanacak ve daha sonra tek değişkenli reel değerli fonksiyonlar için direkt ve ters fuzzy dönüşüm tanımları verilecektir. Bölüm 2.2 ve 2.3’te bu tanımların daha yüksek boyutlardaki genelleştirmelerine yer verilecektir.

2.1 TEK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR İÇİN FUZZY DÖNÜŞÜMÜ

2.1.1 Fuzzy Parçalanış

Bu bölümde $D = [a, b]$ olarak alınacaktır. D kümesi için $\sum_{i=1}^n \mathbf{A}_i(x) = 1$ koşulunu (Ruspini koşulu) sağlayan $\mathbf{A}_i \subseteq D$, $i = 1, \dots, n$, fuzzy kümeleri yardımıyla bir fuzzy parçalanış oluşturulacaktır (Perfileieva 2004, s. 4).

Tanım 2.1.1 $n \geq 2$ olmak üzere $a = c_0 = c_1 < \dots < c_n = c_{n+1} = b$, $[a, b]$ aralığında belirlenmiş noktalar ve $h_i = c_{i+1} - c_i$, $i = 0, \dots, n$ adım büyüklükleri olsun.

1. Her bir $i = 1, \dots, n$ için $\mathbf{A}_i : [a, b] \rightarrow [0, 1]$, $\mathbf{A}_i(c_i) = 1$,
2. $x \notin [c_1, c_2]$ ise $\mathbf{A}_1(x) = 0$, $x \notin (c_{n-1}, c_n]$ ise $\mathbf{A}_n(x) = 0$ ve $i = 2, \dots, n-1$ için $x \notin (c_{i-1}, c_{i+1})$ ise $\mathbf{A}_i(x) = 0$,
3. Her bir $i = 1, \dots, n$ için $\mathbf{A}_i$, D de sürekli, D de sürekli, D de sürekli,
4. $\mathbf{A}_i$, $i = 2, \dots, n$ için $[c_{i-1}, c_i]$ aralığında kesin artan ve $i = 1, \dots, n-1$ için $[c_i, c_{i+1}]$ aralığında kesin azalandır,
5. $\sum_{i=1}^n \mathbf{A}_i(x) = 1$ (her $x \in D$ için)

koşulları sağlanırsa $\mathbf{A}_1(x), \dots, \mathbf{A}_n(x)$ fonksiyonlarına temel fonksiyonlar ve bu fonksiyonlar yardımıyla tanımlanan $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$ fuzzy kümelerine de D nin bir fuzzy parçalanışı denir.

Eğer $c_1, \dots, c_n$ noktaları birbirlerine eşit uzaklıkta ise, başka bir deyişle $i = 1, \dots, n$ ($n > 2$) için $c_i = a + h(i - 1)$, $h = \frac{b-a}{n-1}$ olmak üzere

$$6. \mathbf{A}_i(c_i - x) = \mathbf{A}_i(c_i + x) \text{ her } x \in [0, h], \quad i = 2, \dots, n - 1,$$

$$7. \mathbf{A}_{i+1}(x) = \mathbf{A}_i(x - h) \text{ her } x \in [a + h, b], \quad i = 1, \dots, n - 1,$$

koşulları sağlanıyorsa parçalanışa düzgün fuzzy parçalanış ve temel fonksiyonlara da düzgün temel fonksiyonlar denir (Perfilieva 2004, s. 4).

Düzgün fuzzy parçalanış için sıklıkla kullanılan temel fonksiyonlar üçgensel (triangular) ve sinüsoidal temel fonksiyonlardır. Üçgensel temel fonksiyonlar

$$\mathbf{A}_1(x) = \begin{cases} \frac{c_2 - x}{c_2 - c_1} & , \quad x \in [c_1, c_2] \\ 0 & , \quad \text{diğer} \end{cases},$$

$$\mathbf{A}_n(x) = \begin{cases} \frac{x - c_{n-1}}{c_n - c_{n-1}} & , \quad x \in [c_{n-1}, c_n] \\ 0 & , \quad \text{diğer} \end{cases}$$

ve $i = 2, \dots, n - 1$ için

$$\mathbf{A}_i(x) = \begin{cases} \frac{x - c_{i-1}}{c_i - c_{i-1}} & , \quad x \in [c_{i-1}, c_i] \\ \frac{c_{i+1} - x}{c_{i+1} - c_i} & , \quad x \in [c_i, c_{i+1}] \\ 0 & , \quad \text{diğer} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Sinüsoidal temel fonksiyonlar ise

$$\mathbf{A}_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi(x - c_1)}{c_2 - c_1} \right) + 1 \right) & , \quad x \in [c_1, c_2] \\ 0 & , \quad \text{diğer} \end{cases},$$

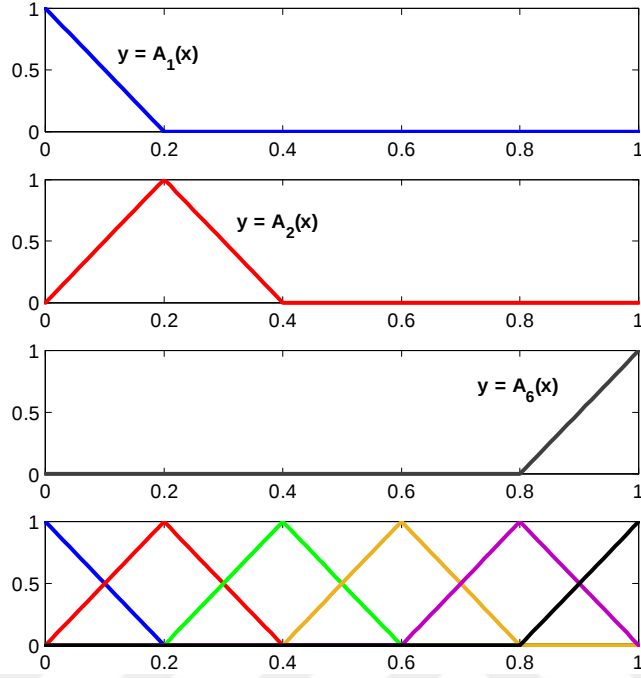
$$\mathbf{A}_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi(x - c_n)}{c_n - c_{n-1}} \right) + 1 \right) & , \quad x \in [c_{n-1}, c_n] \\ 0 & , \quad \text{diğer} \end{cases}$$

ve $i = 2, \dots, n - 1$ için

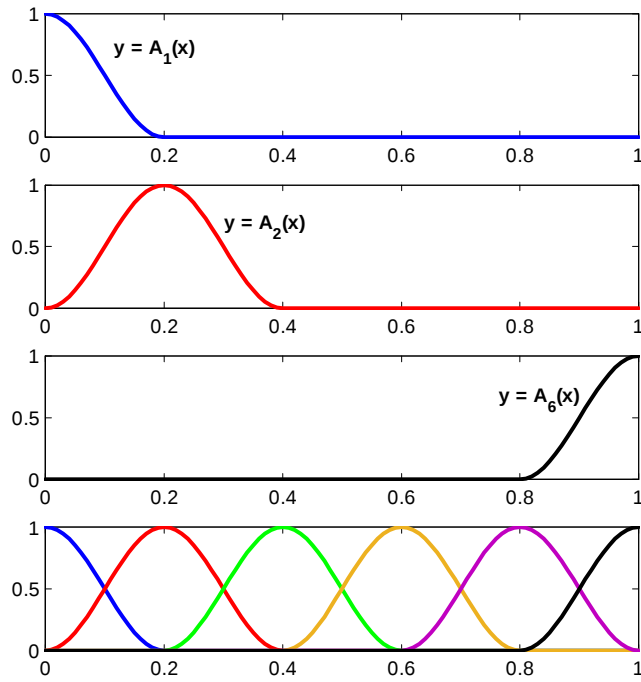
$$\mathbf{A}_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi(x - c_i)}{c_i - c_{i-1}} \right) + 1 \right) & , \quad x \in [c_{i-1}, c_i] \\ \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi(x - c_i)}{c_{i+1} - c_i} \right) + 1 \right) & , \quad x \in [c_i, c_{i+1}] \\ 0 & , \quad \text{diğer} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (Perfilieva 2004, s. 5).

$[0, 1]$ aralığında, $n = 6$ için $h = 0.2$ eşit adım büyüklüğü ile $c_i = 0.2(i - 1)$, $i = 1, \dots, 6$ olup, üçgensel temel fonksiyonlar Şekil 2.1’de ve sinüsoidal temel fonksiyonlar Şekil 2.2’de verilmiştir.



Şekil 2.1 Üçgensel temel fonksiyonlar ($\mathbf{A}_1(x), \mathbf{A}_2(x), \dots, \mathbf{A}_6(x)$).



Şekil 2.2 Sinüsoidal temel fonksiyonlar ($\mathbf{A}_1(x), \mathbf{A}_2(x), \dots, \mathbf{A}_6(x)$).

Lemma 2.1.2 D nin bir düzgün fuzzy parçalanışı, $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$ temel fonksiyonları ile tanımlansın. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \int_a^b \mathbf{A}_1(x) dx &= \frac{h}{2}, \\ \int_a^b \mathbf{A}_n(x) dx &= \frac{h}{2} \end{aligned} \quad (2.1)$$

ve $i = 2, \dots, n-1$ ($n > 2$) için

$$\int_a^b \mathbf{A}_i(x) dx = h \quad (2.2)$$

olur (Perfilieva 2006, s. 996).

İspat. Temel fonksiyon tanımından, her $x \notin (c_{i-1}, c_{i+1})$ için $\mathbf{A}_i(x) = 0$, $x \in D$ için $\sum_{i=1}^n \mathbf{A}_i(x) = 1$ ve $x \in [c_i, c_{i+1}]$ için

$$1 = \mathbf{A}_i(x) + \mathbf{A}_{i+1}(x)$$

olup, son eşitliğin her iki tarafının integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} \int_{c_i}^{c_{i+1}} 1 dx &= \int_{c_i}^{c_{i+1}} \mathbf{A}_i(x) dx + \int_{c_i}^{c_{i+1}} \mathbf{A}_{i+1}(x) dx \\ h &= \int_{c_i}^{c_{i+1}} \mathbf{A}_i(x) dx + \int_{c_i}^{c_{i+1}} \mathbf{A}_{i+1}(x) dx \end{aligned}$$

elde edilir. Fuzzy parçalanış düzgün olduğundan

$$h = \int_{c_i}^{c_{i+1}} \mathbf{A}_i(x) dx + \int_{c_i}^{c_{i+1}} \mathbf{A}_{i+1}(x) dx = 2 \int_{c_i}^{c_{i+1}} \mathbf{A}_i(x) dx$$

veya

$$\int_{c_i}^{c_{i+1}} \mathbf{A}_i(x) dx = \frac{h}{2}, \quad i = 1, \dots, n-1$$

olur. Benzer biçimde her $x \in [c_{i-1}, c_i]$ için

$$1 = \mathbf{A}_{i-1}(x) + \mathbf{A}_i(x)$$

olduğundan

$$\int_{c_{i-1}}^{c_i} \mathbf{A}_i(x) dx = \frac{h}{2}, \quad i = 2, \dots, n$$

elde edilir. Bu durumda, Tanım 2.1.1'den her $x \notin [c_1, c_2)$ için $\mathbf{A}_1(x) = 0$ olduğundan

$$\int_a^b \mathbf{A}_1(x) dx = \int_{c_1}^{c_2} \mathbf{A}_1(x) dx = \frac{h}{2}$$

ve Tanım 2.1.1'den her $x \notin (c_{n-1}, c_n]$ için $\mathbf{A}_n(x) = 0$ olduğundan

$$\int_a^b \mathbf{A}_n(x) dx = \int_{c_{n-1}}^{c_n} \mathbf{A}_n(x) dx = \frac{h}{2}$$

olduğu görülür. Son olarak, Tanım 2.1.1'den $i = 2, \dots, n-1$ ve her $x \notin (c_{i-1}, c_{i+1})$ için $\mathbf{A}_i(x) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} \int_a^b \mathbf{A}_i(x) dx &= \int_{c_{i-1}}^{c_{i+1}} \mathbf{A}_i(x) dx \\ &= \int_{c_{i-1}}^{c_i} \mathbf{A}_i(x) dx + \int_{c_i}^{c_{i+1}} \mathbf{A}_i(x) dx \\ &= \frac{h}{2} + \frac{h}{2} \\ &= h \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Tanım 2.1.3 $a = c_0 = c_1 < \dots < c_n = c_{n+1} = b$, D de sabit noktalar ve $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$ temel fonksiyonlar olsun. $h_i = c_{i+1} - c_i$ olmak üzere, $i = 1, \dots, n-1$ için

$$\mathbf{A}_i(c_i + x) = \mathbf{A}_{i+1}(c_{i+1} - x), \quad x \in [0, h_i] \quad (2.3)$$

koşulunu sağlayan fuzzy parçalanışı simetriktir denir (Stepnicka 2007, s. 39).

Şimdi, simetrik bir fuzzy parçalanışın Lemma 2.1.2'deki özelliğe benzer bir özelliği sağladığı gösterilecektir.

Lemma 2.1.4 D nin bir simetrik fuzzy parçalanışı $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$, $n > 2$, temel fonksiyonları ile tanımlansın. Bu durumda $i = 1, \dots, n$ için

$$\int_a^b \mathbf{A}_i(x) dx = \frac{h_{i-1} + h_i}{2}$$

olur (Stepnicka 2007, s. 41).

İspat. İntegraller yardımıyla h_i değeri aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\begin{aligned}
h_i &= \int_{c_i}^{c_{i+1}} 1 dx \\
&= \int_{c_i}^{c_{i+1}} (\mathbf{A}_i(x) + \mathbf{A}_{i+1}(x)) dx \\
&= \int_{c_i}^{c_{i+1}} \mathbf{A}_i(x) dx + \int_{c_i}^{c_{i+1}} \mathbf{A}_{i+1}(x) dx.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Simetri tanımından,

$$\int_{c_i}^{c_{i+1}} \mathbf{A}_i(x) dx = \int_{c_i}^{c_{i+1}} \mathbf{A}_{i+1}(x) dx$$

olur ve (2.4) eşitliğinden,

$$\int_{c_i}^{c_{i+1}} \mathbf{A}_i(x) dx = \frac{h_i}{2}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\int_{c_{i-1}}^{c_i} \mathbf{A}_i(x) dx = \frac{h_{i-1}}{2}$$

olduğu gösterilebilir. Böylece

$$\begin{aligned}
\int_a^b \mathbf{A}_i(x) dx &= \int_{c_{i-1}}^{c_{i+1}} \mathbf{A}_i(x) dx \\
&= \int_{c_{i-1}}^{c_i} \mathbf{A}_i(x) dx + \int_{c_i}^{c_{i+1}} \mathbf{A}_i(x) dx \\
&= \frac{h_{i-1} + h_i}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Lemma 2.1.4, Lemma 2.1.2'nin bir genelleştirilmesidir. Çünkü, bir fuzzy parçalanışın düzgün olması durumunda simetri özelliği sağlanır. (2.3) ün sağ tarafı düşünülürse: Fuzzy parçalanışın düzgünlüğü özelliğinden

$$\mathbf{A}_{i+1}(c_{i+1} - x) = \mathbf{A}_i(c_{i+1} - x - h) = \mathbf{A}_i(c_i - x) = \mathbf{A}_i(c_i + x)$$

yazılabilir. Böylece, simetri özelliği de sağlanmış olur.

2.1.2 Direkt Fuzzy Dönüşümü

Tanım 2.1.5 D nin bir fuzzy parçalanışı $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$, $n > 2$, temel fonksiyonları ile tanımlansın ve $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $C(D)$ de keyfi bir fonksiyon olsun.

$$F_i = \frac{\int_a^b f(x) \mathbf{A}_i(x) dx}{\int_a^b \mathbf{A}_i(x) dx}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.5)$$

ile verilen reel sayıların $\mathbf{F}_n[f] = [F_1, \dots, F_n]$ n -lisine f fonksiyonunun $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$ parçalanışına göre direkt fuzzy dönüşümü (F -dönüşümü) denir. $F_1, \dots, F_n$ reel sayılarına f nin fuzzy dönüşüm bileşenleri denir (Perfilieva 2006).

Bir fuzzy parçalanış düzgün ise Lemma 2.1.2'den bir f fonksiyonunun direkt fuzzy dönüşümü bileşenleri aşağıdaki şekilde yazılabilir;

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{\int_a^b f(x) \mathbf{A}_1(x) dx}{\int_a^b \mathbf{A}_1(x) dx} = \frac{\int_{c_1}^{c_2} f(x) \mathbf{A}_1(x) dx}{\int_{c_1}^{c_2} \mathbf{A}_1(x) dx} = \frac{2}{h} \int_{c_1}^{c_2} f(x) \mathbf{A}_1(x) dx, \\ F_n &= \frac{\int_a^b f(x) \mathbf{A}_n(x) dx}{\int_a^b \mathbf{A}_n(x) dx} = \frac{\int_{c_{n-1}}^{c_n} f(x) \mathbf{A}_n(x) dx}{\int_{c_{n-1}}^{c_n} \mathbf{A}_n(x) dx} = \frac{2}{h} \int_{c_{n-1}}^{c_n} f(x) \mathbf{A}_n(x) dx \end{aligned}$$

ve $i = 2, \dots, n-1$ için

$$F_i = \frac{\int_a^b f(x) \mathbf{A}_i(x) dx}{\int_a^b \mathbf{A}_i(x) dx} = \frac{\int_{c_{i-1}}^{c_{i+1}} f(x) \mathbf{A}_i(x) dx}{\int_{c_{i-1}}^{c_{i+1}} \mathbf{A}_i(x) dx} = \frac{1}{h} \int_{c_{i-1}}^{c_{i+1}} f(x) \mathbf{A}_i(x) dx. \quad (2.6)$$

Eğer fuzzy parçalanış simetrikse Lemma 2.1.4'ten direkt fuzzy dönüşüm bileşenleri

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{2}{h_1} \int_{c_1}^{c_2} f(x) \mathbf{A}_1(x) dx, \\ F_n &= \frac{2}{h_{n-1}} \int_{c_{n-1}}^{c_n} f(x) \mathbf{A}_n(x) dx \end{aligned}$$

ve $i = 2, \dots, n-1$ için

$$F_i = \frac{2}{h_{i-1} + h_i} \int_{c_{i-1}}^{c_{i+1}} f(x) \mathbf{A}_i(x) dx$$

şeklinde yazılır.

f fonksiyonunun değerleri sadece $p_1, \dots, p_N \in D$ noktalarında biliniyorsa fuzzy dönüşümünün ayrık formu kullanılır.

Tanım 2.1.6 D nin bir fuzzy parçalanışı $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$, $n > 2$, temel fonksiyonları ile tanımlansın ve $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $p_1, \dots, p_N \in D$ noktalarında değerleri bilinsin. Eğer, her $i = 1, \dots, n$ için $\mathbf{A}_i(p_k) > 0$ olacak şekilde bir $k \in \{1, \dots, N\}$ varsa

$$F_i = \frac{\sum_{k=1}^N f(p_k) \mathbf{A}_i(p_k)}{\sum_{k=1}^N \mathbf{A}_i(p_k)}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.7)$$

ile verilen reel sayıların $[F_1, \dots, F_n]$ n -lisine f fonksiyonunun ayırık fuzzy dönüşümü denir (Perfilieva and Chaldeevea 2001).

Lemma 2.1.7 D nin bir fuzzy parçalanışı $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$, $n > 2$, temel fonksiyonları ile tanımlansın. f, g, h , D de sürekli fonksiyonlar ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $h = \alpha f + \beta g$ olsun. Bu durumda,

$$[H_1, \dots, H_n] = \alpha [F_1, \dots, F_n] + \beta [G_1, \dots, G_n]$$

eşitliği geçerlidir, burada $[H_1, \dots, H_n]$, $[F_1, \dots, F_n]$ ve $[G_1, \dots, G_n]$ sırasıyla h , f ve g nin fuzzy dönüşümleridir (Perfilieva and Chaldeevea 2001).

İspat. $i = 1, \dots, n$ için

$$\begin{aligned} H_i &= \frac{\int_a^b h(x) \mathbf{A}_i(x) dx}{\int_a^b \mathbf{A}_i(x) dx} \\ &= \frac{\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) \mathbf{A}_i(x) dx}{\int_a^b \mathbf{A}_i(x) dx} \\ &= \alpha \frac{\int_a^b f(x) \mathbf{A}_i(x) dx}{\int_a^b \mathbf{A}_i(x) dx} + \beta \frac{\int_a^b g(x) \mathbf{A}_i(x) dx}{\int_a^b \mathbf{A}_i(x) dx} \\ &= \alpha F_i + \beta G_i \end{aligned}$$

yazılır. Böylece ispat tamamlanır. ■

Lemma 2.1.8 D nin bir düzgün fuzzy parçalanışı $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$, $n > 2$, temel fonksiyonları ile tanımlansın ve $f \in C(D)$, (a, b) aralığında ikinci mertebeden sürekli diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. Bu durumda $i = 1, \dots, n$ için

$$F_i = f(c_i) + O(h^2)$$

eşitliği geçerlidir (Perfilieva 2006).

İspat. $i = 2, \dots, n - 1$ için, trapez kuralı kullanılarak

$$\begin{aligned} F_i &= \frac{1}{h} \int_{c_{i-1}}^{c_{i+1}} f(x) \mathbf{A}_i(x) dx \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x) \mathbf{A}_i(x) dx + \int_{c_i}^{c_{i+1}} f(x) \mathbf{A}_i(x) dx \right) \\ &= \frac{1}{h} \left[\frac{h}{2} (f(c_{i-1}) \mathbf{A}_i(c_{i-1}) + 2f(c_i) \mathbf{A}_i(c_i) + f(c_{i+1}) \mathbf{A}_i(c_{i+1})) + O(h^3) \right] \end{aligned}$$

yazılabilir, ayrıca temel fonksiyon tanımından $\mathbf{A}_i(c_i) = 1$ ve $\mathbf{A}_i(c_{i-1}) = \mathbf{A}_i(c_{i+1}) = 0$ dır. Buradan;

$$F_i = f(c_i) + O(h^2)$$

bulunur.

Benzer olarak, $i = 1$ için

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{2}{h} \int_{c_1}^{c_2} f(x) \mathbf{A}_1(x) dx \\ &= \frac{2}{h} \left[\frac{h}{2} (f(c_1) \mathbf{A}_1(c_1) + f(c_2) \mathbf{A}_1(c_2)) + O(h^3) \right] \end{aligned}$$

ve $\mathbf{A}_1(c_1) = 1, \mathbf{A}_1(c_2) = 0$ olduğundan

$$F_1 = f(c_1) + O(h^2)$$

bulunur. Son olarak $i = n$ için

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{2}{h} \int_{c_{n-1}}^{c_n} f(x) \mathbf{A}_n(x) dx \\ &= \frac{2}{h} \left[\frac{h}{2} (f(c_{n-1}) \mathbf{A}_n(c_{n-1}) + f(c_n) \mathbf{A}_n(c_n)) + O(h^3) \right] \end{aligned}$$

ve $\mathbf{A}_n(c_n) = 1, \mathbf{A}_n(c_{n-1}) = 0$ olduğundan

$$F_n = f(c_n) + O(h^2)$$

elde edilir. ■

Lemma 2.1.9 D nin bir simetrik fuzzy parçalanışı $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$, $n > 2$, temel fonksiyonları ile tanımlansın, ayrıca $f \in C(D)$ fonksiyonu (a, b) aralığında ikinci mertebeden sürekli diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Bu durumda $i = 1, \dots, n$ için

$$F_i = f(c_i) + O(\max(h_{i-1}^2, h_i^2))$$

dir (Stepnicka 2007, s. 44).

İspat. $i = 2, \dots, n - 1$ için

$$\begin{aligned} F_i &= \frac{2}{h_{i-1} + h_i} \left(\int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x) \mathbf{A}_i(x) dx + \int_{c_i}^{c_{i+1}} f(x) \mathbf{A}_i(x) dx \right) \\ &= \frac{2}{h_{i-1} + h_i} \left[\frac{h_{i-1}}{2} (f(c_{i-1}) \mathbf{A}_i(c_{i-1}) + f(c_i) \mathbf{A}_i(c_i)) + O(h_{i-1}^3) \right] \\ &\quad + \frac{2}{h_{i-1} + h_i} \left[\frac{h_i}{2} (f(c_i) \mathbf{A}_i(c_i) + f(c_{i+1}) \mathbf{A}_i(c_{i+1})) + O(h_i^3) \right] \end{aligned}$$

yazılabilir, ayrıca temel fonksiyon tanımından $\mathbf{A}_i(c_i) = 1$ ve $\mathbf{A}_i(c_{i-1}) = \mathbf{A}_i(c_{i+1}) = 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned} F_i &= \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i} f(c_i) + \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i} f(c_i) + 2 \frac{O(h_{i-1}^3) + O(h_i^3)}{h_{i-1} + h_i} \\ &= f(c_i) \frac{O(h_{i-1}^3 + h_i^3)}{h_{i-1} + h_i} = f(c_i) + O(\max(h_{i-1}^2, h_i^2)) \end{aligned}$$

bulunur.

Benzer olarak, $i = 1$ için

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{2}{h_1} \int_{c_1}^{c_2} f(x) \mathbf{A}_1(x) dx \\ &= \frac{2}{h_1} \left[\frac{h_1}{2} (f(c_1) \mathbf{A}_1(c_1) + f(c_2) \mathbf{A}_1(c_2)) + O(h_1^3) \right] \\ &= f(c_1) + O(h_1^2) \end{aligned}$$

ve $i = n$ için

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{2}{h_{n-1}} \int_{c_{n-1}}^{c_n} f(x) \mathbf{A}_n(x) dx \\ &= \frac{2}{h_{n-1}} \left[\frac{h_{n-1}}{2} (f(c_{n-1}) \mathbf{A}_n(c_{n-1}) + f(c_n) \mathbf{A}_n(c_n)) + O(h_{n-1}^3) \right] \\ &= f(c_n) + O(h_{n-1}^2) \end{aligned}$$

olur. ■

Lemma 2.1.10 D nin bir simetrik fuzzy parçalanışı $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$, $n > 2$, temel fonksiyonları ile tanımlansın. Ayrıca $f \in C(D)$ fonksiyonu (a, b) aralığında ikinci mertebeden sürekli diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. $i = 2, \dots, n - 1$ için

$$\begin{aligned} \int_a^{c_i} f(x) dx &= \frac{h_1}{2} F_1 + \frac{h_1 + h_2}{2} F_2 + \dots + \frac{h_{i-2} + h_{i-1}}{2} F_{i-1} + \frac{h_{i-1}}{2} F_i \\ &\quad + O(\max(h_{i-1}^2, h_i^2)) \end{aligned}$$

ve buradan;

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} h_i F_i + \sum_{i=2}^n h_{i-1} F_i \right)$$

yazılır (Stepnicka 2007, s. 45).

İspat. $i = 2, \dots, n - 1$ için $x \in [a, c_i]$ olsun. Bu durumda, temel fonksiyon tanımından

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{A}_j(x) = \sum_{j=1}^i \mathbf{A}_j(x) + \mathbf{A}_{i+1}(x) + \mathbf{A}_{i+2}(x) + \dots + \mathbf{A}_n(x) = 1$$

ve her $x \in [a, c_i]$ için $\mathbf{A}_{i+1}(x) + \mathbf{A}_{i+2}(x) + \dots + \mathbf{A}_n(x) = 0$ olduğundan

$$\sum_{j=1}^i \mathbf{A}_j(x) = 1$$

olur. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafı $f(x)$ ile çarpılarak

$$f(x) = f(x) \sum_{j=1}^i \mathbf{A}_j(x) = \sum_{j=1}^i f(x) \mathbf{A}_j(x)$$

yazılabilir, bu eşitliğin her iki tarafının integrali alındığında

$$\begin{aligned} \int_a^{c_i} f(x) dx &= \int_a^{c_i} \sum_{j=1}^i f(x) \mathbf{A}_j(x) dx \\ &= \sum_{j=1}^i \int_a^{c_i} f(x) \mathbf{A}_j(x) dx \\ &= \int_{c_1}^{c_2} f(x) \mathbf{A}_1(x) dx + \int_{c_1}^{c_3} f(x) \mathbf{A}_2(x) dx \\ &\quad + \dots + \int_{c_{i-2}}^{c_i} f(x) \mathbf{A}_{i-1}(x) dx + \int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x) \mathbf{A}_i(x) dx \end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 2.1.4'ten,

$$\begin{aligned} \int_a^{c_i} f(x) dx &= \frac{h_1}{2} F_1 + \frac{h_1 + h_2}{2} F_2 + \dots + \frac{h_{i-2} + h_{i-1}}{2} F_{i-1} \\ &\quad + \int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x) \mathbf{A}_i(x) dx \end{aligned}$$

yazılabilir. Son eşitliğin sağ tarafındaki son integrale trapez yöntemi uygulanırsa ve

$$\mathbf{A}_i(c_i) = 1, \quad \mathbf{A}_i(c_{i-1}) = 0$$

olduğu dikkate alınırsa, Lemma 2.1.9'dan;

$$\begin{aligned}
\int_a^{c_i} f(x) dx &= \frac{h_1}{2} F_1 + \frac{h_1 + h_2}{2} F_2 + \dots + \frac{h_{i-2} + h_{i-1}}{2} F_{i-1} \\
&\quad + \frac{h_{i-1}}{2} (f(c_{i-1}) \mathbf{A}_i(c_{i-1}) + f(c_i) \mathbf{A}_i(c_i)) + O(h_{i-1}^3) \\
&= \frac{h_1}{2} F_1 + \frac{h_1 + h_2}{2} F_2 + \dots + \frac{h_{i-2} + h_{i-1}}{2} F_{i-1} \\
&\quad + \frac{h_{i-1}}{2} f(c_i) + O(h_{i-1}^3) \\
&= \frac{h_1}{2} F_1 + \frac{h_1 + h_2}{2} F_2 + \dots + \frac{h_{i-2} + h_{i-1}}{2} F_{i-1} \\
&\quad + \frac{h_{i-1}}{2} (F_i - O(\max(h_{i-1}^2, h_i^2))) + O(h_{i-1}^3) \\
&= \frac{h_1}{2} F_1 + \frac{h_1 + h_2}{2} F_2 + \dots + \frac{h_{i-2} + h_{i-1}}{2} F_{i-1} + \frac{h_{i-1}}{2} F_i \\
&\quad - \frac{h_{i-1}}{2} O(\max(h_{i-1}^2, h_i^2)) + O(h_{i-1}^3) \\
&= \frac{h_1}{2} F_1 + \frac{h_1 + h_2}{2} F_2 + \dots + \frac{h_{i-2} + h_{i-1}}{2} F_{i-1} + \frac{h_{i-1}}{2} F_i \\
&\quad + O(\max(h_{i-1}^2, h_i^2))
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer olarak, her $x \in D$ için $\sum_{j=1}^n \mathbf{A}_j(x) = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x) dx &= \int_a^b \sum_{j=1}^n f(x) \mathbf{A}_j(x) dx \\
&= \sum_{j=1}^n \int_a^b f(x) \mathbf{A}_j(x) dx \\
&= \int_{c_1}^{c_2} f(x) \mathbf{A}_1(x) dx + \int_{c_1}^{c_3} f(x) \mathbf{A}_2(x) dx \\
&\quad + \dots + \int_{c_{n-2}}^{c_n} f(x) \mathbf{A}_{n-1}(x) dx + \int_{c_{n-1}}^{c_n} f(x) \mathbf{A}_n(x) dx \\
&= \frac{h_1}{2} F_1 + \frac{h_1 + h_2}{2} F_2 + \dots + \frac{h_{n-2} + h_{n-1}}{2} F_{n-1} + \frac{h_n}{2} F_n \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} h_i F_i + \sum_{i=2}^n h_{i-1} F_i \right)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. ■

Lemma 2.1.10 dikkate alınarak düzgün bir fuzzy parçalanış için integral hesabı aşağıda verilmiştir.

Lemma 2.1.11 *D nin bir düzgün fuzzy parçalanışı $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$, $n > 2$, temel fonksiyonları ile tanımlansın. Ayrıca $f \in C(D)$ fonksiyonu (a, b) aralığında ikinci mertebeden sürekli diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Bu durumda $i = 2, \dots, n-1$ için*

$$\int_a^{c_i} f(x) dx = h \left(\frac{1}{2}F_1 + F_2 + \dots + F_{i-1} + \frac{1}{2}F_i \right) + O(h^2)$$

ve

$$\int_a^b f(x) dx = h \left(\frac{1}{2}F_1 + F_2 + \dots + F_{n-1} + \frac{1}{2}F_n \right) \quad (2.8)$$

olur (Perfilieva and Chaldeevea 2001).

İspat. İspat direkt olarak yapılabileceği gibi, bir düzgün fuzzy parçalanış aynı zamanda simetrik fuzzy parçalanış olduğundan Lemma 2.1.10 dikkate alınarak verilecektir.

$$\begin{aligned} \int_a^{c_i} f(x) dx &= \frac{h_1}{2}F_1 + \frac{h_1 + h_2}{2}F_2 + \dots + \frac{h_{i-2} + h_{i-1}}{2}F_{i-1} + \frac{h_{i-1}}{2}F_i \\ &\quad + O(\max(h_{i-1}^2, h_i^2)) \end{aligned}$$

olup parçalanış düzgün olduğundan

$$h_1 = h_2 = \dots = h_{i-2} = h_{i-1} = h$$

olarak alınırsa

$$\begin{aligned} \int_a^{c_i} f(x) dx &= \frac{h}{2}F_1 + hF_2 + \dots + hF_{i-1} + \frac{h}{2}F_i + O(h^2) \\ &= h \left(\frac{1}{2}F_1 + F_2 + \dots + F_{i-1} + \frac{1}{2}F_i \right) + O(h^2) \end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 2.1.10'daki ikinci eşitlik kullanılırsa

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} h_i F_i + \sum_{i=2}^n h_{i-1} F_i \right) \\ &= \frac{h}{2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} F_i + \sum_{i=2}^n F_i \right) \\ &= h \left(\frac{1}{2}F_1 + F_2 + \dots + F_{n-1} + \frac{1}{2}F_n \right) \end{aligned}$$

olduğu görülür. ■

Lemma 2.1.10 ve Lemma 2.1.11, belirli integrallerin hesaplanması ve fuzzy dönüşüm arasındaki ilişkiyi açıklar. Bu durum fuzzy dönüşümün sayısal hesaplamalarda nasıl kullanılabileceğini gösterir. Özel olarak (2.7) formülüne göre hesaplanan fuzzy dönüşümünün bileşenleri ve (2.8) formülü f için bir nümerik integral olur.

2.1.3 Ters Fuzzy Dönüşümü

Tanım 2.1.12 $[F_1, \dots, F_n], \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n, n > 2$, temel fonksiyonlarına göre f nin fuzzy dönüşümü olsun. Bu durumda

$$f_n^F(x) = \sum_{i=1}^n F_i \mathbf{A}_i(x)$$

f fonksiyonunun ters fuzzy dönüşümü denir (Perfileva et al. 2008).

Belirli bir fuzzy parçalanış için ters fuzzy dönüşümü; reel sayıların bir n -lisini, temel fonksiyonların lineer kombinasyonlarının $\text{lin}_n\{\mathbf{A}_i\}$ uzayının bir elemanına eşleştiren bir dönüşümdür.

Lemma 2.1.13 D nin bir fuzzy parçalanışı $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n, n > 2$, temel fonksiyonları ile tanımlansın. Bu durumda her bir $q \in \text{lin}_n\{\mathbf{A}_i\}$ fonksiyonu, yani

$$q(x) = \sum_{i=1}^n Q_i \mathbf{A}_i(x),$$

$[Q_1, \dots, Q_n]$ n -lisiyle tek olarak belirlidir (Stepnicka 2007, s. 48).

İspat. Kabul edelim ki, $Q_1, \dots, Q_n, R_1, \dots, R_n \in \mathbb{R}$ için $Q_i \neq R_i$ olacak şekilde bir i var ve

$$\sum_{i=1}^n Q_i \mathbf{A}_i(x) = \sum_{i=1}^n R_i \mathbf{A}_i(x)$$

eşitliği sağlansın. $Q_i \neq R_i$ şartını sağlayan i indeksi için $\mathbf{A}_i(c_i) = 1$ ve bu nedenle $j \neq i$ için $\mathbf{A}_j(c_i) = 0$ olur. Bu son eşitlik $Q_i = R_i$ olmasını gerektirir. Bu durum ispatın başında yer alan $Q_i \neq R_i$ olma durumu ile çelişir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Lemma 2.1.13'ten $\text{lin}_n\{\mathbf{A}_i\}$ uzayı ile reel sayıların n -lilerinin kümesi, yani $\mathbb{R}^n$ arasında birebir eşleşme vardır. Fuzzy dönüşümünün tersi sürekli bir fonksiyondur. Ters fuzzy dönüşümlerinin bir dizisi, f fonksiyonuna düzgün yakınsar. Bu durum aşağıdaki teorem ve onu izleyen iki sonuç ile gösterilmiştir.

Teorem 2.1.14 f, D de herhangi bir sürekli fonksiyon olsun. Bu durumda keyfi bir $\varepsilon > 0$ için bir $n_\varepsilon > 2$ sayısı ve D nin bir $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_{n_\varepsilon}$ fuzzy parçalanışı, her $x \in X$ için

$$|f(x) - f_{n_\varepsilon}^F(x)| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde vardır. Burada $f_{n_\varepsilon}^F(x), \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_{n_\varepsilon}$ fuzzy parçalanışına göre f nin ters fuzzy dönüşümüdür (Perfilieva 2004, s. 11).

İspat. f, D de sürekli bir fonksiyon olduğundan, her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır öyle ki her $x, y \in D$ için $|x - y| < \delta$ iken $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ olur. $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_{n_\varepsilon}, D$ nin bir düzgün fuzzy parçalanışı ve $h = \frac{b-a}{n-1} \leq \delta$ olsun. Ayrıca $z \in [c_i, c_{i+1}] \subseteq D, x \in [c_{i-1}, c_{i+1}], i = 1, \dots, n_\varepsilon$ için

$$|x - z| \leq h < \delta$$

olur. $i = 2, \dots, n - 1$ için (2.2), (2.6) eşitlikleri ve f fonksiyonunun sürekliliğinden

$$\begin{aligned} |f(z) - F_i| &= \left| f(z) - \frac{1}{h} \int_{c_{i-1}}^{c_{i+1}} f(x) \mathbf{A}_i(x) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{h} \int_{c_{i-1}}^{c_{i+1}} |f(z) - f(x)| \mathbf{A}_i(x) dx \\ &< \frac{1}{h} \int_{c_{i-1}}^{c_{i+1}} \varepsilon \mathbf{A}_i(x) dx \\ &= \frac{\varepsilon}{h} \int_{c_{i-1}}^{c_{i+1}} \mathbf{A}_i(x) dx \\ &= \frac{\varepsilon}{h} h \\ &= \varepsilon \end{aligned} \tag{2.9}$$

olur. Benzer yolla $i = 1$ için

$$\begin{aligned} |f(z) - F_1| &= \left| f(z) - \frac{2}{h} \int_{c_1}^{c_2} f(x) \mathbf{A}_1(x) dx \right| \\ &\leq \frac{2}{h} \int_{c_1}^{c_2} |f(z) - f(x)| \mathbf{A}_1(x) dx \\ &< \frac{2\varepsilon}{h} \int_{c_1}^{c_2} \mathbf{A}_1(x) dx \\ &= \frac{2\varepsilon}{h} \cdot \frac{h}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned} \tag{2.10}$$

ve $i = n$ için

$$|f(z) - F_n| < \varepsilon \tag{2.11}$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
|f(z) - f_{n_\varepsilon}^F(z)| &= \left| f(z) - \sum_{j=1}^{n_\varepsilon} F_j \mathbf{A}_j(z) \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n_\varepsilon} \mathbf{A}_j(z) |f(z) - F_j| \\
&< \sum_{j=1}^{n_\varepsilon} \mathbf{A}_j(z) \varepsilon \\
&= \varepsilon \sum_{j=1}^{n_\varepsilon} \mathbf{A}_j(z) \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir, son eşitlikte temel fonksiyonlar için $\sum_{j=1}^{n_\varepsilon} \mathbf{A}_j(z) = 1$ eşitliği kullanılmıştır. z elemanı keyfi olarak seçildiğinden, her $x \in D$ için teorem ispatlanmış olur. ■

Sonuç 2.1.15 f , D de herhangi bir sürekli fonksiyon ve $\{\mathbf{A}_i\}_n$, her bir n için D nin düzgün fuzzy parçalanışı olan bir dizi olsun. $\{f_n^F\}_n$, verilen her bir fuzzy parçalanışına göre ters fuzzy dönüşümlerinin bir dizisi olsun. Bu durumda keyfi bir $\varepsilon > 0$ için bir $n_\varepsilon > 2$ sayısı, her bir $n > n_\varepsilon$ ve her $x \in D$ için

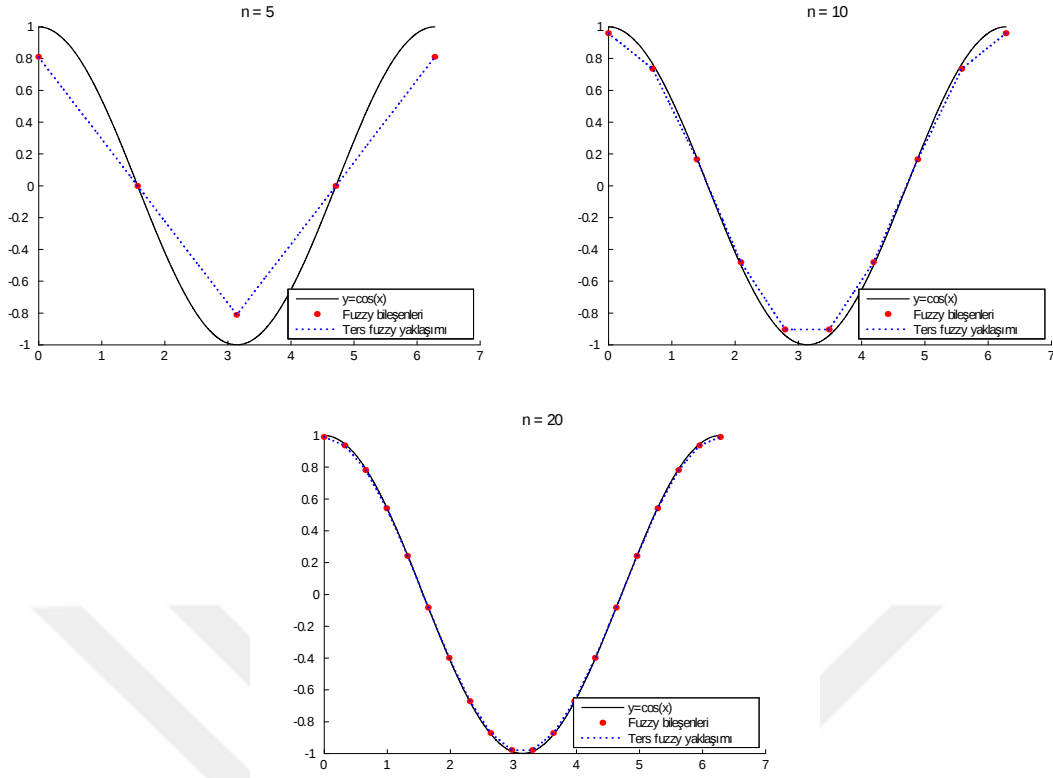
$$|f(x) - f_n^F(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde vardır (Perfilieva 2004, s. 12).

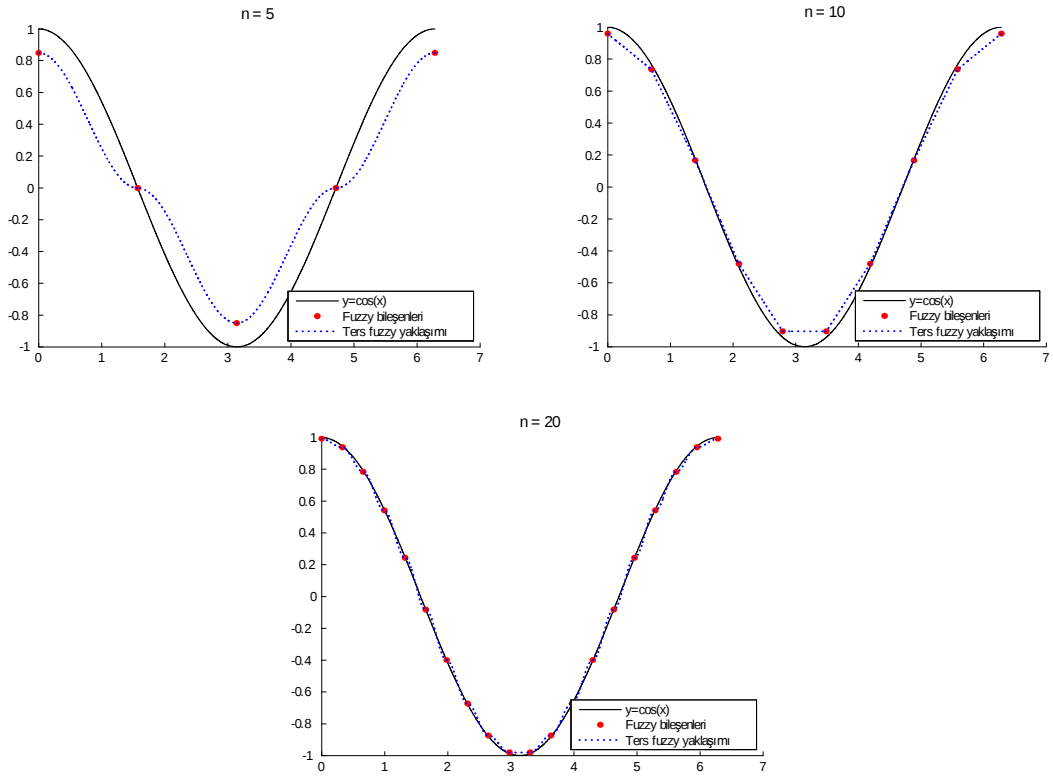
Sonuç 2.1.16 Sonuç 2.1.15'deki varsayımlar sağlansın. Bu durumda, $\{f_n^F\}_n$ ters fuzzy dönüşümler dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsar.

Sonuç 2.1.15'deki fuzzy parçalanışların düzgünlüğünün varsayımı bir yeter şarttır. $i = 1, 2, \dots, n-1$ ve $n \rightarrow \infty$ için $h_i \rightarrow 0$ olacak şekildeki fuzzy parçalanışları için de sonuç geçerlidir.

Örnek 2.1.1 $[0, 2\pi]$ aralığında $f(x) = \cos x$ fonksiyonu için fuzzy bileşenleri ve ters fuzzy yaklaşımı grafiksel olarak Şekil 2.3 ve 2.4'te verilmiştir.



Şekil 2.3 Üçgensel temel fonksiyonlar ile fuzzy bileşenleri ve ters fuzzy yaklaşımı.



Şekil 2.4 Sinitisoidal temel fonksiyonlar ile fuzzy bileşenleri ve ters fuzzy yaklaşımı.

2.2 İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR İÇİN FUZZY DÖNÜŞÜMÜ

Bu kısım, iki değişkenli fonksiyonlar için fuzzy dönüşümü tanımını içermektedir. İki değişkenli fonksiyonlar için fuzzy dönüşümü yöntemi 2003 yılında Stepnicka tarafından tanımlanmış ve bu yöntem 2007 yılında keyfi bir sonlu değişkene sahip fonksiyonlar için genelleştirilmiştir (Stepnicka and Valasek 2003, Stepnicka 2007).

2.2.1 Fuzzy Parçalanış

Bu kısımda ele alınan fonksiyonlar için ortak tanım kümesi $D^2 = [a, b] \times [c, d]$ dikdörtgeni olarak kabul edilecektir. $[a, b]$ aralığının fuzzy parçalanış noktaları $a = c_0^x = c_1^x < \dots < c_n^x = c_{n+1}^x = b$ ve $[c, d]$ aralığının fuzzy parçalanış noktaları $c = c_0^y = c_1^y < \dots < c_m^y = c_{m+1}^y = d$ ile gösterilsin. Ayrıca, adım büyüklükleri $h_i^x = c_{i+1}^x - c_i^x$, $i = 0, \dots, n$ ve $h_j^y = c_{j+1}^y - c_j^y$, $j = 0, \dots, m$ olsun. Fuzzy parçalanışların düzgün olması durumunda $h^x = (b - a) / (n - 1)$ ve $h^y = (d - c) / (m - 1)$ gösterimleri kullanılacaktır.

Tanım 2.2.1 $[a, b]$ nin bir fuzzy parçalanışı $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$, $n > 2$, temel fonksiyonları ve $[c, d]$ nin bir fuzzy parçalanışı $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_m$, $m > 2$, temel fonksiyonları ile tanımlansın. Bu durumda, bu iki fuzzy parçalanışın çarpım t - normuna göre $\{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n\} \times_{\odot} \{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_m\}$ fuzzy kartezyen çarpımı, D^2 nin bir fuzzy parçalanışdır. Eğer her iki eksenin fuzzy parçalanışları düzgünse (simetrikse) bu durumda oluşturulan fuzzy parçalanış düzgündür (simetriktir) (Stepnicka 2007, s. 51).

Lemma 2.2.2 $\{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n\} \times_{\odot} \{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_m\}$, D^2 nin bir düzgün fuzzy parçalanışı olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \int_c^d \int_a^b \mathbf{A}_1(x) \mathbf{B}_1(y) dx dy &= \frac{h^x h^y}{4}, \\ \int_c^d \int_a^b \mathbf{A}_1(x) \mathbf{B}_m(y) dx dy &= \frac{h^x h^y}{4}, \\ \int_c^d \int_a^b \mathbf{A}_n(x) \mathbf{B}_1(y) dx dy &= \frac{h^x h^y}{4}, \\ \int_c^d \int_a^b \mathbf{A}_n(x) \mathbf{B}_m(y) dx dy &= \frac{h^x h^y}{4} \end{aligned}$$

ve $i = 2, \dots, n-1$, $j = 2, \dots, m-1$ için

$$\int_c^d \int_a^b \mathbf{A}_i(x) \mathbf{B}_1(y) dx dy = \frac{h^x h^y}{2},$$

$$\int_c^d \int_a^b \mathbf{A}_i(x) \mathbf{B}_m(y) dx dy = \frac{h^x h^y}{2},$$

$$\int_c^d \int_a^b \mathbf{A}_1(x) \mathbf{B}_j(y) dx dy = \frac{h^x h^y}{2},$$

$$\int_c^d \int_a^b \mathbf{A}_n(x) \mathbf{B}_j(y) dx dy = \frac{h^x h^y}{2}$$

ve

$$\int_c^d \int_a^b \mathbf{A}_i(x) \mathbf{B}_j(y) dx dy = h^x h^y$$

dir (Stepnicka and Valasek 2003).

İspat. $i = 2, \dots, n-1$, $j = 2, \dots, m-1$ için Lemma 2.1.2 yardımıyla

$$\begin{aligned} \int_c^d \int_a^b \mathbf{A}_i(x) \mathbf{B}_j(y) dx dy &= \int_c^d \mathbf{B}_j(y) \int_a^b \mathbf{A}_i(x) dx dy \\ &= \int_c^d \mathbf{B}_j(y) h^x dy \\ &= h^x h^y \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \int_c^d \int_a^b \mathbf{A}_i(x) \mathbf{B}_1(y) dx dy &= \int_c^d \mathbf{B}_1(y) \int_a^b \mathbf{A}_i(x) dx dy \\ &= \int_c^d \mathbf{B}_1(y) h^x dy \\ &= \frac{h^x h^y}{2} \end{aligned}$$

bulunur. Benzer olarak $i = 2, \dots, n-1$, $j = 2, \dots, m-1$ için

$$\int_c^d \int_a^b \mathbf{A}_1(x) \mathbf{B}_j(y) dx dy = \frac{h^x h^y}{2},$$

$$\int_c^d \int_a^b \mathbf{A}_n(x) \mathbf{B}_j(y) dx dy = \frac{h^x h^y}{2},$$

$$\int_c^d \int_a^b \mathbf{A}_i(x) \mathbf{B}_m(y) dx dy = \frac{h^x h^y}{2}$$

ve $i \in \{1, n\}$, $j \in \{1, m\}$ için

$$\begin{aligned} \int_c^d \int_a^b \mathbf{A}_i(x) \mathbf{B}_j(y) dx dy &= \int_c^d \mathbf{B}_j(y) \int_a^b \mathbf{A}_i(x) dx dy \\ &= \int_c^d \mathbf{B}_j(y) \frac{h^x}{2} dy \\ &= \frac{h^y}{2} \frac{h^x}{2} \\ &= \frac{h^x h^y}{4} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır. ■

Simetrik bir fuzzy parçalanış için benzer eşitlikler aşağıda verilmiştir.

Lemma 2.2.3 $\{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n\} \times_{\odot} \{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_m\}$, D^2 nin bir simetrik fuzzy parçalanışı olsun. Bu durumda $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ için

$$\int_c^d \int_a^b \mathbf{A}_i(x) \mathbf{B}_j(y) dx dy = \frac{(h_{i-1}^x + h_i^x)(h_{j-1}^y + h_j^y)}{4}$$

olur (Stepnicka 2007, s. 54).

İspat. Lemma 2.1.4 kullanılarak bir önceki lemmanın ispatına benzer olarak $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ için

$$\begin{aligned} \int_c^d \int_a^b \mathbf{A}_i(x) \mathbf{B}_j(y) dx dy &= \int_c^d \mathbf{B}_j(y) \int_a^b \mathbf{A}_i(x) dx dy \\ &= \int_c^d \mathbf{B}_j(y) \frac{h_{i-1}^x + h_i^x}{2} dy \\ &= \frac{h_{i-1}^x + h_i^x}{2} \frac{h_{j-1}^y + h_j^y}{2} \\ &= \frac{(h_{i-1}^x + h_i^x)(h_{j-1}^y + h_j^y)}{4} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

2.2.2 Direkt Fuzzy Dönüşümü

Tek boyutlu durumdakine benzer olarak bir direkt fuzzy dönüşümü $C(D^2)$ sürekli fonksiyonlar uzayından $n \times m$ tipinde reel matrisler uzayına dönüşüm olarak yani

$$\mathbf{F}_{nm}^2 : C(D^2) \rightarrow [M]_{n \times m}$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 2.2.4 $\{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n\} \times_{\odot} \{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_m\}$, D^2 nin bir fuzzy parçalanışı ve $f \in C(D^2)$ olsun. $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ için

$$F_{ij} = \frac{\int_c^d \int_a^b f(x, y) \mathbf{A}_i(x) \mathbf{B}_j(y) dx dy}{\int_c^d \int_a^b \mathbf{A}_i(x) \mathbf{B}_j(y) dx dy}$$

ile verilen $\mathbf{F}_{nm}^2[f] = [F_{ij}]_{n \times m}$ reel matrisi, verilen fuzzy parçalanışa göre f fonksiyonunun fuzzy dönüşümüdür. F_{ij} reel sayılarına f fonksiyonunun fuzzy dönüşüm bileşenleri denir (Stepnicka and Valasek 2003).

D^2 nin fuzzy parçalanışının düzgün olması durumunda Lemma 2.2.2 kullanılarak fuzzy dönüşüm bileşenleri

$$F_{11} = \frac{4}{h^x h^y} \int_c^d \int_a^b f(x, y) \mathbf{A}_1(x) \mathbf{B}_1(y) dx dy,$$

$$F_{1m} = \frac{4}{h^x h^y} \int_c^d \int_a^b f(x, y) \mathbf{A}_1(x) \mathbf{B}_m(y) dx dy,$$

$$F_{n1} = \frac{4}{h^x h^y} \int_c^d \int_a^b f(x, y) \mathbf{A}_n(x) \mathbf{B}_1(y) dx dy,$$

$$F_{nm} = \frac{4}{h^x h^y} \int_c^d \int_a^b f(x, y) \mathbf{A}_n(x) \mathbf{B}_m(y) dx dy$$

ve $i = 2, \dots, n-1$, $j = 2, \dots, m-1$ için

$$F_{i1} = \frac{2}{h^x h^y} \int_c^d \int_a^b f(x, y) \mathbf{A}_i(x) \mathbf{B}_1(y) dx dy,$$

$$F_{im} = \frac{2}{h^x h^y} \int_c^d \int_a^b f(x, y) \mathbf{A}_i(x) \mathbf{B}_m(y) dx dy,$$

$$F_{1j} = \frac{2}{h^x h^y} \int_c^d \int_a^b f(x, y) \mathbf{A}_1(x) \mathbf{B}_j(y) dx dy,$$

$$F_{nj} = \frac{2}{h^x h^y} \int_c^d \int_a^b f(x, y) \mathbf{A}_n(x) \mathbf{B}_j(y) dx dy$$

ve

$$F_{ij} = \frac{1}{h^x h^y} \int_c^d \int_a^b f(x, y) \mathbf{A}_i(x) \mathbf{B}_j(y) dx dy$$

şeklinde yazılır.

Fuzzy parçalanışın simetrik olması durumunda $i = 1, \dots, n$ ve $j = 1, \dots, m$ için

$$F_{ij} = \frac{4}{(h_{i-1}^x + h_i^x)(h_{j-1}^y + h_j^y)} \int_c^d \int_a^b f(x, y) \mathbf{A}_i(x) \mathbf{B}_j(y) dx dy$$

olur.

Sıradaki lemmada tek boyutlu durumda verilen Lemma 2.1.8 ve Lemma 2.1.9'daki duruma benzer olarak $f \in C(D^2)$ fonksiyonunun fuzzy dönüşüm bileşenlerinin belli bir doğruluğa kadar f fonksiyonunun değerine eşit olduğu gösterilecektir.

Lemma 2.2.5 $\{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n\} \times_{\odot} \{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_m\}$, D^2 nin bir düzgün fuzzy parçalanışı ve $f \in C(D^2)$, $(a, b) \times (c, d)$ üzerinde ikinci mertebeden sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda her bir $i = 1, \dots, n$ ve $j = 1, \dots, m$ için

$$F_{ij} = f(c_i^x, c_j^y) + O(\max((h^x)^2, (h^y)^2))$$

olur (Stepnicka 2007, s. 56).

İspat. İspat $i = 2, \dots, n-1$, $j = 2, \dots, m-1$ için verilecek olup kalan durumlar benzer yolla gösterilebilir. $i = 2, \dots, n-1$, $j = 2, \dots, m-1$ için, trapez kuralı kullanılarak

$$\begin{aligned}
F_{ij} &= \frac{1}{h^x h^y} \int_{c_{j-1}^y}^{c_{j+1}^y} \int_{c_{i-1}^x}^{c_{i+1}^x} f(x, y) \mathbf{A}_i(x) \mathbf{B}_j(y) dx dy \\
&= \frac{1}{h^x h^y} \int_{c_{j-1}^y}^{c_{j+1}^y} \mathbf{B}_j(y) \int_{c_{i-1}^x}^{c_{i+1}^x} f(x, y) \mathbf{A}_i(x) dx dy \\
&= \frac{1}{h^x h^y} \int_{c_{j-1}^y}^{c_{j+1}^y} \left[\mathbf{B}_j(y) \frac{h^x}{2} (f(c_{i-1}^x, y) \mathbf{A}_i(c_{i-1}^x) + 2f(c_i^x, y) \mathbf{A}_i(c_i^x) + f(c_{i+1}^x, y) \mathbf{A}_i(c_{i+1}^x)) \right. \\
&\quad \left. + O((h^x)^3) \right] dy
\end{aligned}$$

ve temel fonksiyonun tanımından $\mathbf{A}_i(c_{i-1}^x) = \mathbf{A}_i(c_{i+1}^x) = 0$, $\mathbf{A}_i(c_i^x) = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}
F_{ij} &= \frac{1}{h^x h^y} \int_{c_{j-1}^y}^{c_{j+1}^y} \mathbf{B}_j(y) (h^x f(c_i^x, y) + O((h^x)^3)) dy \\
&= \frac{1}{h^y} \int_{c_{j-1}^y}^{c_{j+1}^y} \mathbf{B}_j(y) f(c_i^x, y) dy + \frac{1}{h^x h^y} \int_{c_{j-1}^y}^{c_{j+1}^y} \mathbf{B}_j(y) O((h^x)^3) dy \\
&= \frac{1}{h^y} \left[\frac{h^y}{2} (f(c_i^x, c_{j-1}^y) \mathbf{B}_j(c_{j-1}^y) + 2f(c_i^x, c_j^y) \mathbf{B}_j(c_j^y) + f(c_i^x, c_{j+1}^y) \mathbf{B}_j(c_{j+1}^y)) \right] \\
&\quad + \frac{O((h^y)^3)}{h^y} + \frac{O((h^x)^3)}{h^x h^y} \int_{c_{j-1}^y}^{c_{j+1}^y} \mathbf{B}_j(y) dy \\
&= f(c_i^x, c_j^y) + O((h^x)^2) + \frac{O((h^y)^3)}{h^x h^y} h^y \\
&= f(c_i^x, c_j^y) + O(\max((h^x)^2, (h^y)^2))
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Lemma 2.2.6 $\{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n\} \times_{\odot} \{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_m\}$ ile verilen D^2 nin bir simetrik fuzzy parçalanışı ve $f \in C(D^2)$, $(a, b) \times (c, d)$ üzerinde ikinci mertebeden sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda her bir $i = 1, \dots, n$ ve $j = 1, \dots, m$ için

$$F_{ij} = f(c_i^x, c_j^y) + O\left(\max\left((h_{i-1}^x)^2, (h_i^x)^2, (h_{j-1}^y)^2, (h_j^y)^2\right)\right)$$

olur (Stepnicka 2007, s. 57).

İspat. Lemma 2.2.3'ten

$$F_{ij} = \frac{4}{(h_{i-1}^x + h_i^x)(h_{j-1}^y + h_j^y)} \int_c^d \int_a^b f(x, y) \mathbf{A}_i(x) \mathbf{B}_j(y) dx dy$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned} F_{ij} &= \frac{4}{(h_{i-1}^x + h_i^x)(h_{j-1}^y + h_j^y)} \int_{c_{j-1}^y}^{c_{j+1}^y} \mathbf{B}_j(y) \left(\int_{c_{i-1}^x}^{c_i^x} f(x, y) \mathbf{A}_i(x) dx + \int_{c_i^x}^{c_{i+1}^x} f(x, y) \mathbf{A}_i(x) dx \right) dy \\ &= \frac{4}{(h_{i-1}^x + h_i^x)(h_{j-1}^y + h_j^y)} \int_{c_{j-1}^y}^{c_{j+1}^y} \mathbf{B}_j(y) \left(\frac{h_{i-1}^x + h_i^x}{2} f(c_i^x, y) + O\left((h_{i-1}^x)^3 + (h_i^x)^3\right) \right) dy \\ &= \frac{2}{h_{j-1}^y + h_j^y} \int_{c_{j-1}^y}^{c_{j+1}^y} \mathbf{B}_j(y) f(c_i^x, y) dy + \frac{O\left((h_{i-1}^x)^2 + (h_i^x)^2\right)}{h_{j-1}^y + h_j^y} \int_{c_{j-1}^y}^{c_{j+1}^y} \mathbf{B}_j(y) dy \end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 2.1.4 ve Lemma 2.1.9'daki eşitlikler kullanılırsa

$$F_{ij} = f(c_i^x, c_j^y) + O\left(\max\left((h_{i-1}^x)^2, (h_i^x)^2, (h_{j-1}^y)^2, (h_j^y)^2\right)\right)$$

bulunur. ■

f fonksiyonunun sadece bazı $(p_k, q_k) \in D^2$ noktalarındaki değerlerinin bilinmesi durumunda direkt fuzzy dönüşümünün ayrık formu aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.2.7 $\{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n\} \times_{\odot} \{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_m\}$, D^2 nin bir fuzzy parçalanışı ve $f : D^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $(p_1, q_1), \dots, (p_N, q_N)$ noktalarındaki değerleri bilinsin.

Eğer, her $i = 1, \dots, n$ ve $j = 1, \dots, m$ için $\mathbf{A}_i(p_k) \mathbf{B}_j(q_k) > 0$ olacak şekilde bir $k \in \{1, \dots, N\}$ varsa

$$F_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^N f(p_k, q_k) \mathbf{A}_i(p_k) \mathbf{B}_j(q_k)}{\sum_{k=1}^N \mathbf{A}_i(p_k) \mathbf{B}_j(q_k)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m$$

ile verilen $[F_{ij}]_{n \times m}$ reel matrisine f fonksiyonunun ayrık fuzzy dönüşümü denir (Stepnicka 2007, s. 59).

2.2.3 Ters Fuzzy Dönüşümü

Tanım 2.2.8 $F_{nm}^2[f]$, $\{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n\} \times_{\odot} \{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_m\}$ ile verilen fuzzy parçalanış için $f \in C(D^2)$ fonksiyonunun fuzzy dönüşümü olsun. Bu durumda

$$f_{n,m}^F(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m F_{ij} \mathbf{A}_i(x) \mathbf{B}_j(y)$$

funksiyonuna f fonksiyonunun ters fuzzy dönüşümü denir (Stepnicka and Valasek 2003).

Bir fonksiyonun ters fuzzy dönüşümünün bu fonksiyona düzgün yakınsaklığı ile ilgili değerlendirmeler bir sonraki bölümde genel durum için ifade edilecektir.

2.3 $r \in \mathbb{N}$ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR İÇİN FUZZY DÖNÜŞÜMÜ

Bu kısımda, yukarıdaki bölümlerde verilen fuzzy dönüşümü kavramının keyfi sonlu değişkenli fonksiyonlar için genelleştirilmesine yer verilecektir.

2.3.1 Fuzzy Parçalanış

Bu kısımda, $r \in \mathbb{N}$ değişkenli fonksiyonlar için ortak tanım kümesi $D^r = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_r, b_r]$ olarak alınacak ve D^r nin elemanları da $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^r)$ vektörleri ile gösterilecektir. $j = 1, \dots, r$ için $[a_j, b_j]$ nin fuzzy parçalanışının noktaları $a_j = c_0^j = c_1^j < \dots < c_{n_j}^j = c_{n_j+1}^j = b_j$ şeklinde gösterilecektir. Ayrıca her $i_j = 0, \dots, n_j$, $j = 1, \dots, r$ için adım büyüklükleri $h_{i_j}^j = c_{i_j+1}^j - c_{i_j}^j$ ve fuzzy parçalanışın düzgün olması durumunda $h^j = (b_j - a_j) / (n_j - 1)$ gösterimi kullanılacaktır.

Tanım 2.3.1 $j = 1, \dots, r$ için $[a_j, b_j]$ aralıklarının birer fuzzy parçalanışı $\mathbf{A}_1^j, \dots, \mathbf{A}_{n_j}^j$, $n_j > 2$, temel fonksiyonları ile tanımlansın. Bu durumda D^r nin fuzzy parçalanışı, bu r fuzzy parçalanışın çarpım t - normuna göre $\{\mathbf{A}_1^1, \dots, \mathbf{A}_{n_1}^1\} \times_{\odot} \{\mathbf{A}_1^2, \dots, \mathbf{A}_{n_2}^2\} \times_{\odot} \dots \times_{\odot} \{\mathbf{A}_1^r, \dots, \mathbf{A}_{n_r}^r\}$ fuzzy kartezyen çarpımı ile verilir. Eğer her bir eksenin fuzzy parçalanışı düzgünse (simetrikse) bu durumda oluşturulan fuzzy parçalanış düzgündür (simetrik) (Stepnicka 2007, s. 60).

2.3.2 Direkt Fuzzy Dönüşümü

Tanım 2.3.2 $f \in C(D^r)$ ve $\{\mathbf{A}_1^1, \dots, \mathbf{A}_{n_1}^1\} \times_{\odot} \{\mathbf{A}_1^2, \dots, \mathbf{A}_{n_2}^2\} \times_{\odot} \dots \times_{\odot} \{\mathbf{A}_1^r, \dots, \mathbf{A}_{n_r}^r\}$, D^r nin bir fuzzy parçalanışı olsun. Her bir $i_1 \dots i_r$, r -lisi için

$$F_{i_1 \dots i_r} = \frac{\int_{a_r}^{b_r} \dots \int_{a_1}^{b_1} f(x^1, \dots, x^r) \mathbf{A}_{i_1}^1(x^1) \dots \mathbf{A}_{i_r}^r(x^r) dx^1 \dots dx^r}{\int_{a_r}^{b_r} \dots \int_{a_1}^{b_1} \mathbf{A}_{i_1}^1(x^1) \dots \mathbf{A}_{i_r}^r(x^r) dx^1 \dots dx^r}$$

ile verilen $\nu = (n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_r)$ reel sayılarının $\mathbf{F}_{\nu}^r[f] = [F_{i_1 \dots i_r}]$ ν -lisine f fonksiyonunun verilen fuzzy parçalanışa göre direkt fuzzy dönüşümü denir (Stepnicka and Valasek 2004b).

Tanım 2.3.3 $\{\mathbf{A}_1^1, \dots, \mathbf{A}_{n_1}^1\} \times_{\odot} \{\mathbf{A}_1^2, \dots, \mathbf{A}_{n_2}^2\} \times_{\odot} \dots \times_{\odot} \{\mathbf{A}_1^r, \dots, \mathbf{A}_{n_r}^r\}$, D^r nin bir fuzzy parçalanışı olsun ve ayrıca $f : D^r \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $(p_1^1, \dots, p_1^r), \dots, (p_N^1, \dots, p_N^r)$ noktalarında değerleri bilinsin. Eğer, her $i_j = 1, \dots, n_j$ ve $j = 1, \dots, r$ için $\mathbf{A}_{i_1}^1(p_k^1) \dots \mathbf{A}_{i_r}^r(p_k^r) > 0$ olacak şekilde bir $k = 1, \dots, N$ varsa

$$F_{i_1 \dots i_r} = \frac{\sum_{k=1}^N f(p_k^1, \dots, p_k^r) \mathbf{A}_{i_1}^1(p_k^1) \dots \mathbf{A}_{i_r}^r(p_k^r)}{\sum_{k=1}^N \mathbf{A}_{i_1}^1(p_k^1) \dots \mathbf{A}_{i_r}^r(p_k^r)}$$

ile verilen $[F_{i_1 \dots i_r}]$ ν -lisine f fonksiyonunun verilen fuzzy parçalanışa göre ayrık fuzzy dönüşümü denir (Stepnicka 2007, s. 63).

2.3.3 Ters Fuzzy Dönüşümü

Tanım 2.3.4 $\mathbf{F}_{\nu}^r[f]$ dönüşümü, $f \in C(D^r)$ fonksiyonunun $\{\mathbf{A}_1^1, \dots, \mathbf{A}_{n_1}^1\} \times_{\odot} \{\mathbf{A}_1^2, \dots, \mathbf{A}_{n_2}^2\} \times_{\odot} \dots \times_{\odot} \{\mathbf{A}_1^r, \dots, \mathbf{A}_{n_r}^r\}$ fuzzy parçalanışına göre verilen direkt fuzzy dönüşümü olsun. Buna göre

$$f_{n_1, \dots, n_r}^F(x^1, \dots, x^r) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_r=1}^{n_r} F_{i_1 \dots i_r} \mathbf{A}_{i_1}^1(x^1) \dots \mathbf{A}_{i_r}^r(x^r)$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun ters fuzzy dönüşümü denir (Stepnicka and Valasek 2004b).

Teorem 2.3.5 $f \in C(D^r)$ olsun. Keyfi bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde, $j = 1, \dots, r$ için bir $n_j(\varepsilon)$ sayısı ve D^r nin bir $\{\mathbf{A}_1^1, \dots, \mathbf{A}_{n_1}^1\} \times_{\odot} \{\mathbf{A}_1^2, \dots, \mathbf{A}_{n_2}^2\} \times_{\odot} \dots \times_{\odot} \{\mathbf{A}_1^r, \dots, \mathbf{A}_{n_r}^r\}$ fuzzy

parçalanışı, her $\mathbf{x} \in D^r$ için

$$|f(\mathbf{x}) - f_{n_1(\varepsilon), \dots, n_r(\varepsilon)}^F(\mathbf{x})| < \varepsilon$$

olacak şekilde vardır (Stepnicka and Valasek 2004b).

Sonuç 2.3.6 $f \in C(D^r)$ fonksiyonu ve her bir n için D^r nin düzgün fuzzy parçalanışı olan bir dizi $\{\{\mathbf{A}_1^1, \dots, \mathbf{A}_{n_1}^1\} \times_{\odot} \{\mathbf{A}_1^2, \dots, \mathbf{A}_{n_2}^2\} \times_{\odot} \dots \times_{\odot} \{\mathbf{A}_1^r, \dots, \mathbf{A}_{n_r}^r\}\}_{(n_1, n_2, \dots, n_r)}$ olsun. $\{f_{n_1, n_2, \dots, n_r}^F\}_{(n_1, n_2, \dots, n_r)}$ verilen her bir fuzzy parçalanışına göre ters fuzzy dönüşümlerinin bir dizisi olsun. Bu durumda keyfi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde, $j = 1, \dots, r$ için bir $n_j(\varepsilon)$ sayısı, her bir $n_j > n_j(\varepsilon)$ ve her $\mathbf{x} \in D^r$ için

$$|f(\mathbf{x}) - f_{n_1, n_2, \dots, n_r}^F(\mathbf{x})| < \varepsilon$$

olacak şekilde vardır (Stepnicka 2007).

Sonuç 2.3.7 Sonuç 2.3.6'daki varsayımlar sağlansın. Bu durumda, $\{f_{n_1, n_2, \dots, n_r}^F\}_{(n_1, n_2, \dots, n_r)}$ ters fuzzy dönüşümler dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsar.



BÖLÜM 3

FUZZY DÖNÜŞÜMÜNÜN BAZI UYGULAMALARI

Diferansiyel denklemler sıvı akışı, ısı transferi, katı mekanığı ve biyolojik süreçler gibi önemli uygulama alanlarına sahiptir. Diferansiyel denklemlerin analitik çözümünün elde edilmesi mümkün olmadığı veya zor olduğu durumlarda uygun sayısal yöntemler kullanılarak çözüm için bir yaklaşım araştırılır.

Bu bölümde, adi ve kısmi diferansiyel denklemler için bazı sınır-değer veya başlangıç-sınır değer problemlerinin yaklaşık çözümü için fuzzy yaklaşımı ele alınacaktır. Bu yaklaşımın temeli sonlu farklar yöntemine dayanmakla birlikte, verilerdeki gürültünün (noise) yaklaşık çözüme etkisini azaltmada avantajlı olabilmektedir.

Bölüm 3.1’de iki nokta sınır-değer problemi, Bölüm 3.2’de parabolik denklem için birinci karışık problem, Bölüm 3.3’te hiperbolik denklem için birinci karışık problem ve Bölüm 3.4’te eliptik denklem için Dirichlet probleminin yaklaşık çözümü için fuzzy yaklaşımı (Perfilieva et al. 2017) ve (Stepnicka 2007) çalışmaları temel alınarak ifade edilecektir. Bu problemlerde yer alan denklemlerin sağ tarafında yer alan (bilinen) fonksiyonların değerlerine Gauss beyaz gürültü (Gaussian white noise) eklenmesi durumunda fuzzy yaklaşımı ve sonlu farklar yöntemi ile elde edilen yaklaşık çözümlerin hangi ölçüde etkilendiğine ilişkin örneklere yer verilmiştir. Ele alınan problemler için sonlu farklar yöntemi kullanılırken (Burden et al. 2014) çalışmasında verilen algoritmalarından yararlanılmış olup bu problemlerle ilgili fuzzy yaklaşımları için yakınsaklık analizi (Perfilieva et al. 2017) ve (Stepnicka 2007) çalışmalarında ortaya konulmuştur.

Bölüm 3.1’de kesin çözüm ile yaklaşık çözümlerin karşılaştırılması grafiksel olarak verilmiş olup Bölüm 3.2, 3.3 ve 3.4’te ise çözüm fonksiyon değerleri ile yaklaşım sonuçlarının karşılaştırılması $\mathbb{R}^3$ te grafiksel olarak detaylı bir şekilde ifade edilemediğinden yapılan yaklaşımlar için hata değerlendirmeleri tablolar kullanılarak verilmiştir.

3.1 İKİ NOKTA SINIR-DEĞER PROBLEMİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ

Fuzzy dönüşümünün ikinci mertebeden başlangıç-değer problemlerine uygulanışı (Chen and Schen 2014), (Khastan et al. 2016) ve (Perfilieva et al. 2017) çalışmalarında verilmiştir. Aynı problem için daha yüksek mertebeden fuzzy dönüşümü uygulanan sayısal çözüm (Zeinali et al. 2018) çalışmasında ele alınmıştır.

Dirichlet sınır koşullarıyla ikinci mertebeden bir sınır-değer problemini çözmek için bir fuzzy dönüşüm tabanlı sayısal yöntem araştırılacaktır. Bilinen fonksiyonların (sağ taraf) farklı bazı durumları için ikinci mertebeden sınır-değer problemlerinin fuzzy dönüşümü uygulanarak elde edilen nümerik çözümlerine yer verilecektir. Amaç, fuzzy dönüşümünün ikinci mertebeden sınır-değer problemine uygulanabilirliğini göstermek ve kullanılan yöntemi klasik sonlu farklar yöntemi ile karşılaştırmaktır.

Sınır-değer probleminin çözümü için fuzzy dönüşümü yaklaşımının ana fikri, verilen diferansiyel denkleminin her iki tarafına fuzzy dönüşümünün uygulanmasıdır. Daha sonra sonlu farklar yöntemine benzer olarak ilgili fonksiyonların ve onların türevlerinin kesin değerleri fuzzy dönüşüm bileşenleriyle yer değiştirilir (Khastan et al. 2016).

İki nokta sınır-değer problemi, f fonksiyonu (a, b) üzerinde bir reel fonksiyon, y fonksiyonu (a, b) aralığında bilinmeyen reel fonksiyon, d_1, d_0, y_a, y_b reel sayılar ve y_a, y_b ise y nin sınır değerleri olmak üzere

$$y'' + d_1 y' + d_0 y = f(x), \quad x \in (a, b) \quad (3.1)$$

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b \quad (3.2)$$

şeklinde ifade edilir.

$[a, b]$ aralığının bir düzgün fuzzy parçalanışı, $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$ temel fonksiyonları ile tanımlı ve $h = \frac{b-a}{n-1}$ olmak üzere, y, y', y'' ve f fonksiyonlarının fuzzy dönüşüm bileşenleri sırasıyla

$$\mathbf{F}_n[y] = [Y_1, \dots, Y_n],$$

$$\mathbf{F}_n[y'] = [Y'_1, \dots, Y'_n],$$

$$\mathbf{F}_n[y''] = [Y''_1, \dots, Y''_n]$$

$$\mathbf{F}_n[f] = [F_1, \dots, F_n]$$

şeklinde gösterilsin. (3.1) denkleminin her iki yanına fuzzy dönüşümü uygulanır ve (3.2) sınır koşulları dikkate alınır

$$Y_i'' + d_1 Y_i' + d_0 Y_i = F_i, \quad i = 2, \dots, n-1 \quad (3.3)$$

$$Y_1 = y_a, \quad Y_n = y_b \quad (3.4)$$

elde edilir.

Sonlu farklar yöntemi uygulanarak sırasıyla bilinmeyen Y_i' ve Y_i'' bileşenleri için

$$Y_i' \approx \frac{Y_{i+1} - Y_{i-1}}{2h}, \quad i = 2, \dots, n-1$$

$$Y_i'' \approx \frac{Y_{i+1} - 2Y_i + Y_{i-1}}{h^2}, \quad i = 2, \dots, n-1$$

yaklaşımları kullanılabilir.

$\mathbf{F}_n[y]$, y nin fuzzy dönüşüm bileşenlerinin bilinmeyen vektörü, $\tilde{\mathbf{F}}_n[f]$ ise $\mathbf{F}_n[f]$ nin birinci ve sonuncu koordinatlarının değiştirildiği

$$\tilde{\mathbf{F}}_n[f] = \left[\frac{y_a}{h}, F_2, \dots, F_{n-1}, \frac{y_b}{h} \right]$$

vektörü olmak üzere (3.3) denklem sistemi ve (3.4) sınır şartlarından matris formunda

$$(D_2 + d_1 D_1 + d_0 D_0) \mathbf{F}_n^T[y] = \tilde{\mathbf{F}}_n^T[f] \quad (3.5)$$

eşitliği elde edilir. Burada, D_0 , D_1 ve D_2

$$D_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & \dots & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$D_2 = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} h & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & h \end{bmatrix}$$

şeklinde $n \times n$ tipinde matrislerdir. (3.5) eşitliği

$$a = \frac{1}{h^2} - \frac{d_1}{2h}, \quad b = d_0 - \frac{2}{h^2}, \quad c = \frac{1}{h^2} + \frac{d_1}{2h}$$

olmak üzere

$$D = D_2 + d_1 D_1 + d_0 D_0 = \begin{bmatrix} 1/h & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1/h \end{bmatrix}$$

tridiagonal matrisi yardımıyla

$$D\mathbf{F}_n^T[y] = \tilde{\mathbf{F}}_n^T[f] \quad (3.6)$$

olarak da yazılabilir.

(3.6) denkleminin $\mathbf{F}_n[y] = [Y_1, \dots, Y_n]$ çözüm vektörü ile, $A_1, \dots, A_n$ fuzzy parçalanışı ile belirli $c_1, \dots, c_n$ noktalarının $y(c_i) \approx Y_i$, $i = 1, \dots, n$ anlamında (3.1), (3.2) sınır-değer probleminin tek çözümü için bir yaklaşım elde edilir.

Son olarak, $\mathbf{F}_n[y] = [Y_1, \dots, Y_n]$ çözüm vektörüne ters fuzzy dönüşümü uygulandığında, (3.1), (3.2) probleminin $\hat{y}$ yaklaşık çözümü

$$\hat{y}(x) = \sum_{i=1}^n Y_i A_i(x), \quad x \in [a, b] \quad (3.7)$$

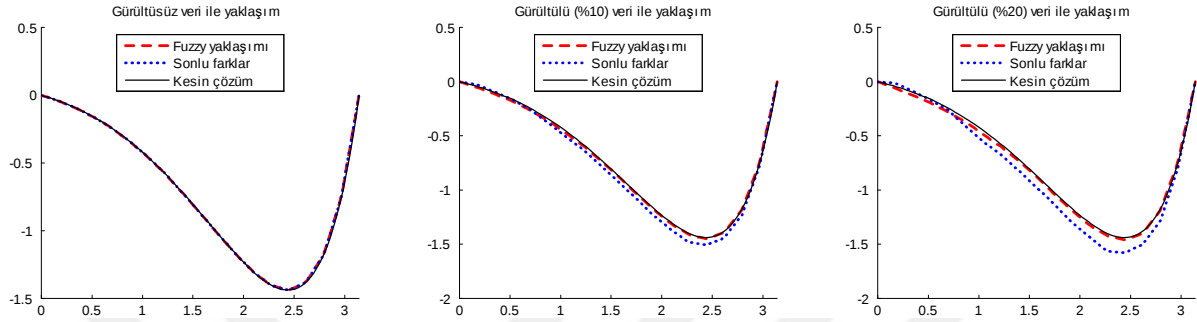
fonksiyonu şeklinde elde edilir.

Aşağıdaki örneklerde denklemin sağ tarafı olan $f(x)$ fonksiyonunun bazı özel durumları için gürültü eklenmemiş değerleri ile %10 ve %20 gürültü eklenmiş değerleri kullanılarak fuzzy yaklaşımı ve sonlu farklar yöntemi ile yaklaşım yapılmıştır. $n = 20$ olmak üzere, düzgün parçalanış ve üçgensel temel fonksiyonlar kullanılarak elde edilen yaklaşık çözümlerin kesin çözüm ile karşılaştırılması grafiksel olarak verilmiştir.

Örnek 3.1.1

$$y'' - y' - 2y = x^2, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0 \quad (3.8)$$

sınır-değer probleminin çözümü için gürültüsüz ve gürültülü veri ile yaklaşım sonuçları Şekil 3.1'de verilmiştir.

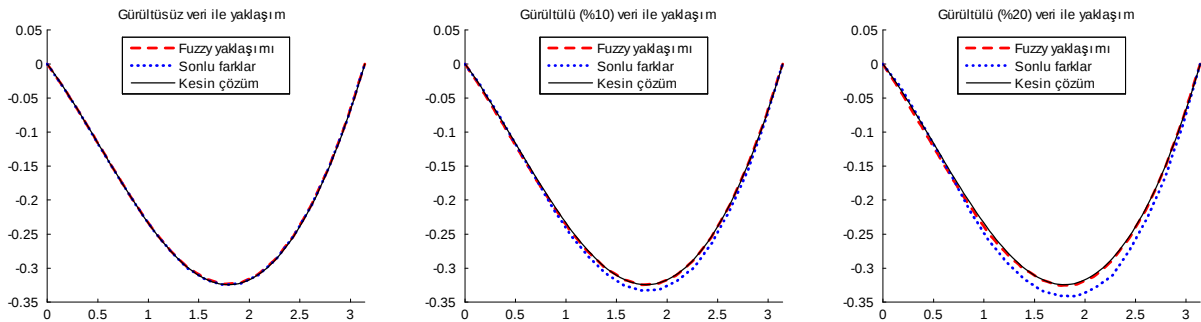


Şekil 3.1 (3.8) sınır-değer problemi için gürültüsüz ve gürültülü veri ile yaklaşım.

Örnek 3.1.2

$$y'' - y' - 2y = \sin x, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0 \quad (3.9)$$

sınır-değer probleminin çözümü için gürültüsüz ve gürültülü veri ile yaklaşım sonuçları Şekil 3.2'de verilmiştir.

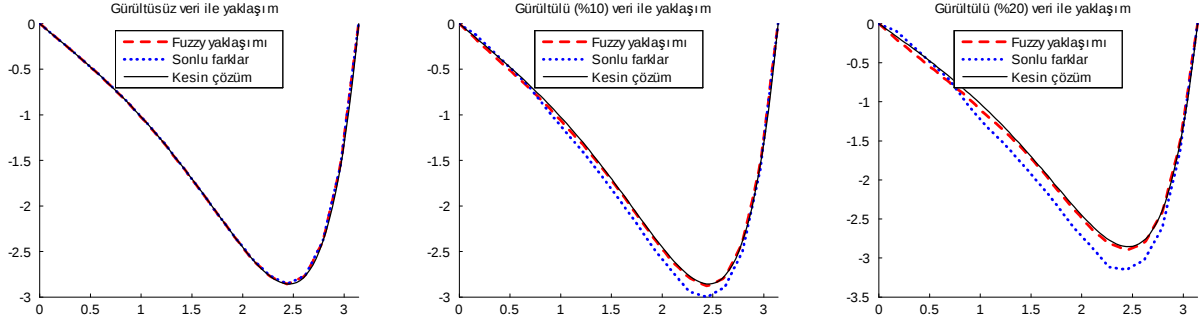


Şekil 3.2 (3.9) sınır-değer problemi için gürültüsüz ve gürültülü veri ile yaklaşım.

Örnek 3.1.3

$$y'' - y' - 2y = e^x, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0 \quad (3.10)$$

sınır-değer probleminin çözümü için gürültüsüz ve gürültülü veri ile yaklaşım sonuçları Şekil 3.3'te verilmiştir.

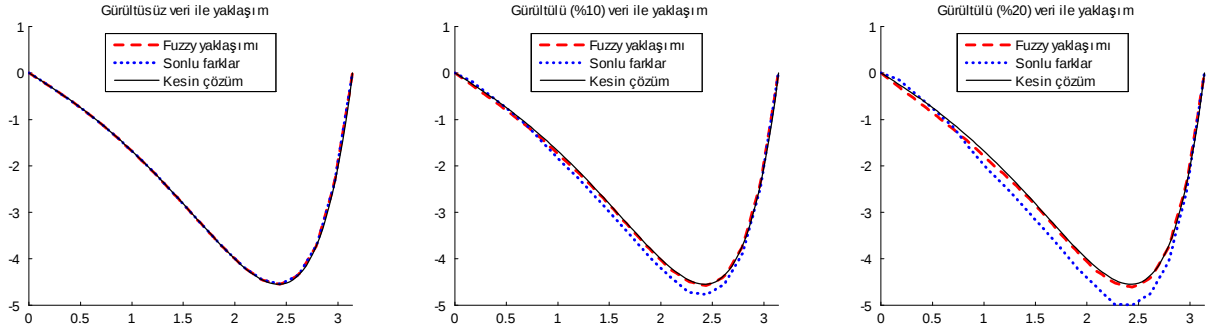


Şekil 3.3 (3.10) sınır-değer problemi için gürültüsüz ve gürültülü veri ile yaklaşım.

Örnek 3.1.4 Yukarıda verilen örneklerdeki denklemlerin sağ tarafındaki fonksiyonların toplamı alınarak

$$y'' - y' - 2y = x^2 + \sin x + e^x, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0 \quad (3.11)$$

sınır-değer probleminin çözümü için gürültüsüz ve gürültülü veri ile yaklaşım sonuçları Şekil 3.4'te verilmiştir.



Şekil 3.4 (3.11) sınır-değer problemi için gürültüsüz ve gürültülü veri ile yaklaşım.

Yukarıda verilen iki nokta sınır-değer problemlerinde yer alan denklemlerin sağ tarafı sırasıyla polinom fonksiyon, trigonometrik fonksiyon, üstel fonksiyon ve en son olarak bu fonksiyonların toplamı olarak alınmıştır. Bu fonksiyonların gürültüsüz değerleri ile %10 ve %20 gürültü eklenmiş değerleri kullanılarak fuzzy yaklaşımı ve sonlu farklar yöntemi ile yapılan yaklaşımlarda, fuzzy yaklaşımının sonlu farklar yöntemine göre verilen gürültüden daha az etkilendiği görülmektedir.

3.2 PARABOLİK DENKLEM İÇİN BİRİNCİ KARIŞIK PROBLEMİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ

Parabolik tipten kısmi diferansiyel denklemler ısı yayılımı ve difüzyon gibi önemli uygulamalara sahiptir. (Stepnicka and Valasek 2004a) çalışmasında düzgün fuzzy parçalanmış kullanılarak ısı denklemi için fuzzy yaklaşımı ortaya konulmuştur.

$X = [0, L]$ ve $T = [0, d]$ olmak üzere $D^2 = X \times T$ bölgesi tanımlansın ve $D_0^2 = (0, L) \times (0, d)$ olsun.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = q(x, t), \quad \alpha \in \mathbb{R}^+, \quad (x, t) \in D_0^2 \quad (3.12)$$

parabolik denkleminin

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in X \quad (3.13)$$

başlangıç koşulu ve

$$u(0, t) = T_1(t), \quad u(L, t) = T_2(t), \quad t \in T \quad (3.14)$$

sınır koşulları altında $u : X \times T \rightarrow \mathbb{R}$ çözümünün bulunması problemi verilsin. Bu başlangıç-sınır değer problemi parabolik denklem için birinci karışık problem olarak adlandırılır.

$0 = x_0 = x_1 < x_2 < \dots < x_n = x_{n+1} = L$ ve $h^x = \frac{L}{n-1}$ olmak üzere, $[0, L]$ aralığının bir düzgün fuzzy parçalanışı $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$ temel fonksiyonları ile tanımlansın. Ayrıca, $0 = t_0 = t_1 < t_2 < \dots < t_m = t_{m+1} = d$ ve $h^t = \frac{d}{m-1}$ olmak üzere, $[0, d]$ aralığının bir düzgün fuzzy parçalanışı $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_m$ temel fonksiyonları ile tanımlansın.

(3.12) denkleminin her iki yanına fuzzy dönüşümü uygulanırsa,

$$\mathbf{F}_{nm}^2[u_t] - \alpha \mathbf{F}_{nm}^2[u_{xx}] = \mathbf{F}_{nm}^2[q] \quad (3.15)$$

cebirsel denklemine ulaşılır. Burada,

$$\mathbf{F}_{nm}^2[u_t] = \begin{bmatrix} U_{11}^t & U_{12}^t & \dots & U_{1m}^t \\ U_{21}^t & U_{22}^t & \dots & U_{2m}^t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{n1}^t & U_{n2}^t & \dots & U_{nm}^t \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_{nm}^2[u_{xx}] = \begin{bmatrix} U_{11}^{xx} & U_{12}^{xx} & \cdots & U_{1m}^{xx} \\ U_{21}^{xx} & U_{22}^{xx} & \cdots & U_{2m}^{xx} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{n1}^{xx} & U_{n2}^{xx} & \cdots & U_{nm}^{xx} \end{bmatrix},$$

ve

$$\mathbf{F}_{nm}^2[q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1m} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{n1} & Q_{n2} & \cdots & Q_{nm} \end{bmatrix},$$

sırasıyla $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ve $q(x, y)$ için fuzzy dönüşüm bileşenlerinin matrisleridir. Buna göre (3.15) eşitliği fuzzy bileşenleri kullanılarak, $i = 1, \dots, n$ ve $j = 1, \dots, m$ için

$$U_{ij}^t - \alpha U_{ij}^{xx} = Q_{ij} \quad (3.16)$$

şeklinde yazılabilir.

$\frac{\partial u}{\partial t}$ ve $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ türevleri bilinmediğinden U_{ij}^t ve U_{ij}^{xx} bileşenleri direkt olarak hesaplanamaz. U_{ij}^t ve U_{ij}^{xx} bileşenlerine U_{ij} değerleri yardımıyla bir yaklaşım yapabilmek amacıyla $\frac{\partial u}{\partial t}$ ve $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ kısmi türevleri için

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &\approx \frac{u(x, t + h^t) - u(x, t)}{h^t}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) &\approx \frac{u(x - h^x, t) - 2u(x, t) + u(x + h^x, t)}{(h^x)^2} \end{aligned}$$

sonlu fark yaklaşımları kullanılabilir. Bu durumda U_{ij}^{xx} bileşenleri için bir yaklaşım

$$\begin{aligned} U_{ij}^{xx} &= \frac{\int_0^d \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \mathbf{A}_i(x) \mathbf{B}_j(t) dx dt}{\int_0^d \int_0^L \mathbf{A}_i(x) \mathbf{B}_j(t) dx dt} \\ &\approx \frac{\int_0^d \int_0^L \frac{u(x - h^x, t) - 2u(x, t) + u(x + h^x, t)}{(h^x)^2} \mathbf{A}_i(x) \mathbf{B}_j(t) dx dt}{\int_0^d \int_0^L \mathbf{A}_i(x) \mathbf{B}_j(t) dx dt} \\ &= \frac{1}{(h^x)^2} [U_{(i-1)j} - 2U_{ij} + U_{(i+1)j}] \end{aligned} \quad (3.17)$$

şeklinde bulunur. Benzer yolla U_{ij}^t bileşenleri için

$$U_{ij}^t \approx \frac{1}{h^t} (U_{i(j+1)} - U_{ij}) \quad (3.18)$$

elde edilir.

(3.17) ve (3.18) yaklaşımları kullanılarak (3.16) eşitliklerinden, $r = \frac{\alpha h^t}{(h^x)^2}$ olmak üzere, $i = 2, \dots, n-1$ ve $j = 1, \dots, m-1$ için

$$U_{i(j+1)} = rU_{(i-1)j} + (1-2r)U_{ij} + rU_{(i+1)j} + h^t Q_{ij} \quad (3.19)$$

elde edilir.

Uyarı 3.2.1 *Nümerik çözümün kararlılığı ve kesin çözüme yakınsaklığı için $0 < r \leq \frac{1}{2}$ koşulu sağlanmalıdır (Burden et al. 2014).*

(3.19) eşitliklerini kullanarak çözüm elde edebilmek için $i = 1, \dots, n$ için U_{i1} ve $j = 1, \dots, m$ için U_{1j} , U_{nj} bileşenlerinin bilinmesi gereklidir. (3.13) başlangıç koşulundan, $i = 1, \dots, n$ için

$$U_{i1} = f(x_i) \quad (3.20)$$

ve (3.14) sınır koşullarından, $j = 1, \dots, m$ için

$$U_{1j} = T_1(t_j) \quad (3.21)$$

$$U_{nj} = T_2(t_j) \quad (3.22)$$

olarak kabul edilecektir.

Böylece (3.20)-(3.22) kullanılarak (3.19) formülünden

$$\mathbf{F}_{nm}^2[u] = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdots & U_{1m} \\ U_{21} & U_{22} & \cdots & U_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{n1} & U_{n2} & \cdots & U_{nm} \end{bmatrix}$$

matrisinin tüm bileşenleri bulunur ve $u(x_i, t_j) \approx U_{ij}$, $i = 2, \dots, n-1$, $j = 2, \dots, m$, anlamında (3.12)-(3.14) probleminin çözümü için bir yaklaşım sağlanır.

(3.12)-(3.14) probleminin u çözümüne bir sürekli fonksiyon yaklaşımı elde edebilmek için, bulunan $\mathbf{F}_{nm}^2[u]$ dönüşümüne Tanım 2.2.8'de ifade edilen ters fuzzy dönüşümü uygulanır.

Örnek 3.2.1 $D^2 = [0, 2] \times [0, 1]$ bölgesi üzerinde

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin(\pi x) (\pi^2 t + 1)$$

parabolik denkleminin

$$u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad x \in [0, 2]$$

başlangıç koşulu ve

$$u(0, t) = u(2, t) = 0, \quad t \in [0, 1]$$

sınır koşulları altında kesin çözümü $u(x, t) = \sin(\pi x) (e^{-\pi^2 t} + t)$ olur. $h^x = 0.2$ ve $h^t = 0.02$ için, denklemin sağ tarafı olan $q(x, y) = \sin(\pi x) (\pi^2 t + 1)$ fonksiyonunun gürültü eklenmemiş değerleri ile %5, %10 ve %20 gürültü eklenmiş değerleri kullanılarak, fuzzy yaklaşımı ve sonlu farklar yöntemi ile problemin çözümü için yaklaşım yapılmıştır. Elde edilen yaklaşık çözümlerin kesin çözüm ile karşılaştırılması amacıyla hata matrislerinin 2-normu hesaplanmış ve sonuçlar Tablo 3.1’de verilmiştir.

Tablo 3.1 Hata matrisinin 2-normu (Örnek 3.2.1 için).

	Gürültüsüz	%5 gürültülü	%10 gürültülü	%20 gürültülü
Fuzzy Yaklaşımı (Üçgensel)	0.2189	0.2894	0.4399	0.7945
Fuzzy Yaklaşımı (Sinüsoidal)	0.2344	0.3105	0.4662	0.8146
Sonlu Fark Yaklaşımı	0.2953	0.4303	0.6305	1.1064

Tablo 3.1’de, fuzzy yaklaşımı ve sonlu farklar yöntemi ile yapılan yaklaşımlarda verilere eklenen gürültü oranının artmasıyla yaklaşımlarda ortaya çıkan hatanın da arttığı görülmektedir. Bununla birlikte fuzzy yaklaşımının, sonlu fark yaklaşımına göre verilere etki eden gürültüden daha az etkilendiği görülmektedir. Ayrıca, üçgensel temel fonksiyonlar kullanılarak yapılan fuzzy yaklaşımlarında sinüsoidal temel fonksiyonlar kullanılarak yapılan fuzzy yaklaşımları ve sonlu farklar yöntemi ile yapılan yaklaşımlara göre daha küçük hata değerleri elde edilmiştir. Kesin çözüm değerleri ile yaklaşık çözüm değerleri arasındaki farkların küçüklüğünden dolayı grafiksel karşılaştırma yerine hesaplanan hata matrislerinin 2-normları sadece tablo kullanılarak verilmiştir.

3.3 HİPERBOLİK DENKLEM İÇİN BİRİNCİ KARIŞIK PROBLEMİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ

Bu kısımda hiperbolik denklemlere fuzzy dönüşümü uygulanacaktır. Bu türde denklemler, akışkanlar dinamiği, katı mekaniği ve astrofizik gibi farklı alanlarda bir dizi problemlerde kullanılan kısmi türevli diferansiyel denklemlerdir. (Stepnicka and Valasek 2004b) çalışmasında düzgün fuzzy parçalanış kullanılarak dalga denklemi için fuzzy yaklaşımı verilmiştir.

$X = [0, L]$ ve $T = [0, d]$ olmak üzere $D^2 = X \times T$ bölgesi tanımlansın ve $D_0^2 = (0, L) \times (0, d)$ olsun.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = q(x, t), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (x, t) \in D_0^2 \quad (3.23)$$

hiperbolik denkleminin,

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad x \in X \quad (3.24)$$

başlangıç koşulları ve

$$u(0, t) = T_1(t), \quad u(L, t) = T_2(t), \quad t \in T \quad (3.25)$$

sınır koşulları altında $u : X \times T \rightarrow \mathbb{R}$ çözümünün bulunması problemi verilsin. Bu başlangıç-sınır değer problemi hiperbolik denklem için birinci karışık problem olarak adlandırılır.

$0 = x_0 = x_1 < x_2 < \dots < x_n = x_{n+1} = L$ ve $h^x = \frac{L}{n-1}$ olmak üzere, $[0, L]$ aralığının bir düzgün fuzzy parçalanışı $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$ temel fonksiyonları ile tanımlansın. Ayrıca, $0 = t_0 = t_1 < t_2 < \dots < t_m = t_{m+1} = d$ ve $h^t = \frac{d}{m-1}$ olmak üzere, $[0, d]$ aralığının bir düzgün fuzzy parçalanışı $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_m$ temel fonksiyonları ile tanımlansın.

(3.23) denkleminin her iki yanına fuzzy dönüşümü uygulanırsa,

$$\mathbf{F}_{nm}^2[u_{tt}] - \alpha^2 \mathbf{F}_{nm}^2[u_{xx}] = \mathbf{F}_{nm}^2[q] \quad (3.26)$$

cebirsel denkleme ulaşılır. Burada $\mathbf{F}_{nm}^2[u_{xx}]$ ve $\mathbf{F}_{nm}^2[q]$ matrisleri bir önceki bölümde

ifade edilmiş olup,

$$\mathbf{F}_{nm}^2 [u_{tt}] = \begin{bmatrix} U_{11}^{tt} & U_{12}^{tt} & \cdots & U_{1m}^{tt} \\ U_{21}^{tt} & U_{22}^{tt} & \cdots & U_{2m}^{tt} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{n1}^{tt} & U_{n2}^{tt} & \cdots & U_{nm}^{tt} \end{bmatrix}$$

matrisi $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ için fuzzy dönüştürme bileşenlerinin matrisidir. Bu durumda (3.26) eşitliği fuzzy bileşenleri kullanılarak, $i = 1, \dots, n$ ve $j = 1, \dots, m$ için

$$U_{ij}^{tt} - \alpha^2 U_{ij}^{xx} = Q_{ij} \quad (3.27)$$

olarak yazılabilir.

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ve $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ türevleri bilinmediğinden U_{ij}^{tt} ve U_{ij}^{xx} bileşenleri direkt olarak hesaplanamaz ve bu bileşenlere U_{ij} değerleri yardımıyla bir yaklaşım yapabilmek amacıyla $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ve $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ kısmi türevleri için

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &\approx \frac{u(x, t - h^t) - 2u(x, t) + u(x, t + h^t)}{(h^t)^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) &\approx \frac{u(x - h^x, t) - 2u(x, t) + u(x + h^x, t)}{(h^x)^2} \end{aligned}$$

sonlu fark yaklaşımları kullanılabilir. Bu durumda U_{ij}^{tt} bileşenleri için bir yaklaşım

$$\begin{aligned} U_{ij}^{tt} &= \frac{\int_0^d \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \mathbf{A}_i(x) \mathbf{B}_j(t) dx dt}{\int_0^d \int_0^L \mathbf{A}_i(x) \mathbf{B}_j(t) dx dt} \\ &\approx \frac{\int_0^d \int_0^L \frac{u(x, t - h^t) - 2u(x, t) + u(x, t + h^t)}{(h^t)^2} \mathbf{A}_i(x) \mathbf{B}_j(t) dx dt}{\int_0^d \int_0^L \mathbf{A}_i(x) \mathbf{B}_j(t) dx dt} \\ &= \frac{1}{(h^t)^2} [U_{i(j-1)} - 2U_{ij} + U_{i(j+1)}] \end{aligned} \quad (3.28)$$

şeklinde bulunur. Benzer yolla

$$U_{ij}^{xx} \approx \frac{1}{(h^x)^2} [U_{(i-1)j} - 2U_{ij} + U_{(i+1)j}] \quad (3.29)$$

elde edilir.

(3.28) ve (3.29) yaklaşımları kullanılarak (3.27) eşitliklerinden, $r = \frac{\alpha h^t}{h^x}$ olmak üzere, $i = 2, \dots, n-1$ ve $j = 1, \dots, m-1$ için

$$U_{i(j+1)} = r^2 U_{(i-1)j} + 2(1-r^2) U_{ij} + r^2 U_{(i+1)j} - U_{i(j-1)} + (h^t)^2 Q_{ij} \quad (3.30)$$

elde edilir.

Uyarı 3.3.1 *Nümerik çözümün kararlılığı ve kesin çözüme yakınsaklığı için $0 < r \leq 1$ koşulunun sağlanması gereklidir (Burden et al. 2014).*

$u(x, 0) = f(x)$, $x \in X$, başlangıç koşulu ve (3.25) sınır koşulları dikkate alınarak $i = 1, \dots, n$ için

$$U_{i1} = f(x_i) \quad (3.31)$$

ve $j = 1, \dots, m$ için

$$U_{1j} = T_1(t_j) \quad (3.32)$$

$$U_{nj} = T_2(t_j) \quad (3.33)$$

olarak alınır. Ayrıca

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad x \in X$$

başlangıç koşulunda, eşitliğin her iki yanına fuzzy dönüşümü uygulanır ve $\frac{\partial u}{\partial t}$ kısmi türevi için

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \approx \frac{u(x, t + h^t) - u(x, t - h^t)}{2h^t}$$

sonlu fark yaklaşımı dikkate alındığında $i = 1, \dots, n$ için

$$U_{i0} = U_{i2} - 2h^t g(x_i) \quad (3.34)$$

olarak kabul edilebilir.

Böylece (3.31)-(3.34) koşulları ve (3.30) formülünden

$$\mathbf{F}_{nm}^2[u] = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdots & U_{1m} \\ U_{21} & U_{22} & \cdots & U_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{n1} & U_{n2} & \cdots & U_{nm} \end{bmatrix}$$

matrisinin tüm U_{ij} bileşenleri bulunur ve $u(x_i, t_j) \approx U_{ij}$, $i = 2, \dots, n-1$, $j = 2, \dots, m$, anlamında (3.23)-(3.25) probleminin çözümü için bir yaklaşım sağlanır.

(3.23)-(3.25) probleminin u çözümüne bir sürekli fonksiyon yaklaşımı elde edebilmek için, bulunan $\mathbf{F}_{nm}^2[u]$ dönüşümüne ters fuzzy dönüşümü uygulanır.

Örnek 3.3.1 $D^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ bölgesi üzerinde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (1 + 4\pi^2) \sin(\pi x) e^t$$

hiperbolik denkleminin,

$$u(x, 0) = 2 \sin(\pi x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sin(\pi x), \quad x \in [0, 1]$$

başlangıç koşulları ve

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \in [0, 1]$$

sınır koşulları altında kesin çözümü $u(x, t) = \sin(\pi x) (\cos(2\pi t) + e^t)$ olur. $h^x = 0.1$ ve $h^t = 0.02$ için, denklemin sağ tarafı olan $q(x, y) = (1 + 4\pi^2) \sin(\pi x) e^t$ fonksiyonunun gürültü eklenmemiş değerleri ile %5, %10 ve %20 gürültü eklenmiş değerleri kullanılarak, fuzzy yaklaşımı ve sonlu farklar yöntemi ile problemin çözümü için yaklaşım yapılmıştır. Elde edilen yaklaşık çözümlerin kesin çözüm ile karşılaştırılması maksadıyla hata matrislerinin 2-normu hesaplanmış ve sonuçlar Tablo 3.2’de verilmiştir.

Tablo 3.2 Hata matrisinin 2-normu (Örnek 3.3.1 için).

	Gürültüsüz	%5 gürültülü	%10 gürültülü	%20 gürültülü
Fuzzy Yaklaşımı (Üçgensel)	0.6041	0.7593	0.9877	1.5272
Fuzzy Yaklaşımı (Sintisoidal)	0.6141	0.7782	1.0104	1.55518
Sonlu Fark Yaklaşımı	0.6967	0.8580	1.1676	1.9317

Tablo 3.2’de, verilere eklenen gürültü oranının artmasıyla yaklaşımlarda ortaya çıkan hatanın da arttığı görülmektedir. Bununla birlikte gürültüsüz veya gürültülü verilerle, fuzzy yaklaşımlarındaki hata değerlerinin sonlu farklar yöntemi ile yapılan yaklaşımlarda elde edilenlere göre daha küçük olduğu görülmektedir.

3.4 ELİPTİK DENKLEM İÇİN DİRİCHLET PROBLEMİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ

Eliptik tip kısmi diferansiyel denklemler, potansiyel teori, akışkanlar mekaniği ve elastikiyet gibi alanlarda uygulamalara sahiptir. Bu bölümde bir eliptik denklem için Dirichlet probleminin çözümü için fuzzy yaklaşımı ifade edilecektir.

$X = [a, b]$ ve $T = [c, d]$ olmak üzere $D^2 = X \times T$ bölgesi tanımlansın ve $D_0^2 = (a, b) \times (c, d)$ olsun.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = q(x, y), \quad (x, y) \in D_0^2 \quad (3.35)$$

eliptik denkleminin

$$\begin{aligned} u(a, y) &= f_1(y), \quad u(b, y) = f_2(y), \quad y \in [c, d] \\ u(x, c) &= f_3(x), \quad u(x, d) = f_4(x), \quad x \in [a, b] \end{aligned} \quad (3.36)$$

Dirichlet sınır koşulları altında $u : X \times T \rightarrow \mathbb{R}$ çözümünün bulunması problemi verilsin.

$a = x_0 = x_1 < x_2 < \dots < x_n = x_{n+1} = b$ ve $h^x = \frac{b-a}{n-1}$ olmak üzere, $[a, b]$ aralığının bir düzgün fuzzy parçalanışı $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$ temel fonksiyonları ile tanımlansın. Ayrıca, $c = y_0 = y_1 < y_2 < \dots < y_m = y_{m+1} = d$ ve $h^y = \frac{d-c}{m-1}$ olmak üzere, $[c, d]$ aralığının bir düzgün fuzzy parçalanışı $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_m$ temel fonksiyonları ile tanımlansın. (3.35) denkleminin her iki yanına fuzzy dönüşümü uygulanırsa,

$$\mathbf{F}_{nm}^2[u_{xx}] + \mathbf{F}_{nm}^2[u_{yy}] = \mathbf{F}_{nm}^2[q] \quad (3.37)$$

cebirsal denklemine ulaşılır. Burada, $\mathbf{F}_{nm}^2[u_{xx}]$ ve $\mathbf{F}_{nm}^2[q]$ matrisleri Bölüm 3.2'de ifade edilmiş olup

$$\mathbf{F}_{nm}^2[u_{yy}] = \begin{bmatrix} U_{11}^{yy} & U_{12}^{yy} & \dots & U_{1m}^{yy} \\ U_{21}^{yy} & U_{22}^{yy} & \dots & U_{2m}^{yy} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{n1}^{yy} & U_{n2}^{yy} & \dots & U_{nm}^{yy} \end{bmatrix}$$

matrisi $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ için fuzzy dönüşüm bileşenlerinin matrisidir. Bu durumda (3.37) eşitliğinden fuzzy bileşenleri kullanılarak, $i = 1, \dots, n$ ve $j = 1, \dots, m$ için

$$U_{ij}^{xx} + U_{ij}^{yy} = Q_{ij} \quad (3.38)$$

eşitlikleri elde edilir. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ve $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ türevleri bilinmediğinden U_{ij}^{xx} ve U_{ij}^{yy} bileşenleri direkt olarak hesaplanamaz ve bu bileşenlere U_{ij} değerleri yardımıyla bir yaklaşım yapabilmek amacıyla $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ve $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ kısmi türevleri için

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) &\approx \frac{u(x - h^x, y) - 2u(x, y) + u(x + h^x, y)}{(h^x)^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) &\approx \frac{u(x, y - h^y) - 2u(x, y) + u(x, y + h^y)}{(h^y)^2}\end{aligned}$$

sonlu fark yaklaşımları kullanılırsa

$$U_{ij}^{xx} \approx \frac{1}{(h^x)^2} [U_{(i-1)j} - 2U_{ij} + U_{(i+1)j}], \quad (3.39)$$

$$U_{ij}^{yy} \approx \frac{1}{(h^y)^2} [U_{i(j-1)} - 2U_{ij} + U_{i(j+1)}] \quad (3.40)$$

elde edilir.

(3.39) ve (3.40) yaklaşımları kullanılarak (3.38) eşitliklerinden $i = 2, \dots, n - 1$ ve $j = 2, \dots, m - 1$ için

$$\frac{U_{(i-1)j} - 2U_{ij} + U_{(i+1)j}}{(h^x)^2} + \frac{U_{i(j-1)} - 2U_{ij} + U_{i(j+1)}}{(h^y)^2} = Q_{ij} \quad (3.41)$$

denklem sistemi elde edilir.

(3.36) sınır koşullarından, $i = 1, \dots, n$ ve $j = 1, \dots, m$ için

$$\begin{aligned}U_{1j} &= f_1(c + (j - 1)) \\ U_{nj} &= f_2(c + (j - 1)) \\ U_{i1} &= f_3(a + (i - 1)) \\ U_{im} &= f_4(a + (i - 1))\end{aligned} \quad (3.42)$$

olarak alınır.

(3.42) koşulları ve (3.41) denklem sisteminden, U_{ij} değerleri hesaplanarak (Burden et al. 2014, Yang et al. 2020)

$$\mathbf{F}_{nm}^2[u] = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdots & U_{1m} \\ U_{21} & U_{22} & \cdots & U_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{n1} & U_{n2} & \cdots & U_{nm} \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir ve böylece $u(x_i, y_j) \approx U_{ij}$, $i = 2, \dots, n-1$ ve $j = 2, \dots, m-1$ anlamında (3.35)-(3.36) probleminin çözümü için bir yaklaşım sağlanmış olur.

(3.35)-(3.36) probleminin u çözümüne bir sürekli fonksiyon yaklaşımı elde edebilmek için, bulunan $\mathbf{F}_{nm}^2[u]$ dönüşümüne ters fuzzy dönüşümü uygulanır.

Örnek 3.4.1 $D^2 = [1, 3] \times [1, 3]$ bölgesi üzerinde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = xe^y$$

eliptik denkleminin

$$u(1, y) = e^y, \quad u(3, y) = 3e^y, \quad y \in [1, 3]$$

$$u(x, 1) = xe, \quad u(x, 3) = xe^3, \quad x \in [1, 3]$$

Dirichlet sınır koşulları altında kesin çözümü $u(x, y) = xe^y$ olur. $h^x = h^y = 0.2$ için, denklemin sağ tarafı olan $q(x, y) = xe^y$ fonksiyonunun gürültü eklenmemiş değerleri ile %5, %10 ve %20 gürültü eklenmiş değerleri kullanılarak, fuzzy yaklaşımı ve sonlu farklar yöntemi ile problemin çözümü için yaklaşım yapılmıştır. Ortaya çıkan denklem sistemlerinin çözümü için Gauss-Seidel yöntemi (100 iterasyon adımı ile) kullanılarak elde edilen yaklaşık çözümlerin kesin çözüm ile karşılaştırılması amacıyla hata matrislerinin 2-normu hesaplanmış ve sonuçlar Tablo 3.3'te verilmiştir.

Tablo 3.3 Hata matrisinin 2-normu (Örnek 3.4.1 için).

	Gürültüsüz	%5 gürültülü	%10 gürültülü	%20 gürültülü
Fuzzy Yaklaşımı (Üçgensel)	0.0012	0.1944	0.3891	0.7786
Fuzzy Yaklaşımı (Sintüsoidal)	0.0143	0.2046	0.4021	0.7973
Sonlu Fark Yaklaşımı	0.0852	0.5289	0.9899	1.9142

Örnek 3.2.1 ve 3.3.1 için verilen Tablo 3.1 ve 3.2'de olduğu gibi Tablo 3.3'te de gürültü oranı arttırıldıkça fuzzy yaklaşımı ve sonlu farklar yöntemi ile yapılan yaklaşımlarla elde edilen hataların artmakta olduğu, ancak fuzzy yaklaşımının sonlu fark yaklaşımına göre verilere etki eden gürültüden daha az etkilendiği görülmektedir.



BÖLÜM 4

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, (Perfilieva and Chaldeeva 2001) çalışmasında ortaya konulan fuzzy dönüşümü (F -dönüşümü) ele alınmış olup fuzzy parçalanış, fuzzy dönüşümü, ayrık fuzzy dönüşümü ve ters fuzzy dönüşümü kavramları açıklanmıştır.

Fuzzy dönüşümü ve ters fuzzy dönüşümünün uygulanması kapsamında iki nokta sınır-değer problemi, parabolik denklem için birinci karışık problem, hiperbolik denklem için birinci karışık problem ve eliptik denklem için Dirichlet probleminin yaklaşık çözümü için fuzzy yaklaşımı ifade edilmiştir. Bu problemlerde yer alan bilinen fonksiyonların bazı özel durumları için fuzzy yaklaşımı ve klasik bir yöntem olan sonlu farklar yöntemi ile elde edilen yaklaşım sonuçları grafikler ve tablolar yardımıyla karşılaştırılmıştır.

İncelenen örneklerde denklemlerin sağ taraflarına eklenen gürültünün artması ile her iki yöntemde de yaklaşım sonucu ortaya çıkan hatanın da artmakta olduğu, bununla beraber fuzzy yaklaşımı ile elde edilen sonuçların sonlu farklar yöntemine göre gürültü artışından daha az etkilendiği görülmüştür. Ayrıca, üçgensel temel fonksiyonlar kullanılarak yapılan fuzzy yaklaşımlarında sinüsoidal temel fonksiyonlar kullanılarak yapılan fuzzy yaklaşımları ve sonlu farklar yöntemi ile yapılan yaklaşımlara göre daha küçük hata değerlerine ulaşılmıştır.

Bu çalışma kapsamında kullanılan fuzzy yaklaşımı ele alınan örnekler haricinde diğer adi diferansiyel denklemler, kısmi diferansiyel denklemler ve integral denklemlerin çözümünü gerektiren uygulamalı matematiğin çeşitli problemlerinde kullanımı mümkün olan önemli ve etkili bir yaklaşımdır.



KAYNAKLAR

- Burden R L, Faires J D and Burden A M** (2014) *Numerical Analysis*. 10th Edition, Brooks Cole, Boston, USA.
- Chen G and Pham T T** (2000) *Introduction to Fuzzy Sets, Fuzzy Logic and Fuzzy Control Systems*. CRC press, Boca Raton.
- Chen W and Schen Y** (2014) Approximate solution for a class of second-order ordinary differential equations by the fuzzy transform. *Intelligent and Fuzzy Systems*, 27: 73-82.
- Dankova M and Valasek R** (2006) Full fuzzy transform and problem of image fusion. *Journal of Electrical Engineering*, 57, 82-84.
- Feng G** (2010) *Analysis and Synthesis of Fuzzy Control Systems: A Model-Based Approach*. CRC Press, Boca Raton.
- Khastan A, Alijani Z and Perfilieva I** (2016) Fuzzy transform to approximate solution of two point boundary value problems. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*.
- Khastan A, Perfilieva I and Alijani Z** (2016) A new fuzzy approximation method to Cauchy problems by fuzzy transform. *Fuzzy Sets and Systems*, 288: 75-95.
- Leondes C** (1998) *Fuzzy Logic and Expert Systems Applications*. Academic Press, USA.
- Novak V, Perfilieva I and Mockor J** (1999) *Mathematical Principles of Fuzzy Logic*. Kluwer International Series in Engineering and Computer Science, Springer Science, New York.
- Perfilieva I** (2003) Fuzzy transforms and universal approximation. *EUSFLAT Conference*, 529-533.
- Perfilieva I** (2004) *Fuzzy Transforms, Transactions on Rough Sets II*. J. F. Peters and A. Skowron (Eds.), Springer-Verlag, Berlin, 63-81.
- Perfilieva I** (2006) Fuzzy transforms: Theory and applications. *Fuzzy Sets and Systems*, 157: 993-1023.
- Perfilieva I and Chaldeevea E** (2001) Fuzzy transformation and its applications. *4th Czech-Japan Seminar on Data Analysis and Decision Making under Uncertainty*, 116-124.
- Perfilieva I, Novak V and Dvorak A** (2008) Fuzzy transform in the analysis of data. *International Journal of Approximate Reasoning*, 48: 36-46.
- Perfilieva I, Stevuliakova P and Valasek R** (2017) F-transform for numerical solution of two-point boundary value problem. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 14: 1-13.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- Perfilieva I and Valasek R** (2005) *Fuzzy Transforms in Removing Noise*. Computational Intelligence, Springer-Verlag, New York, 221-230.
- Stepnicka M** (2007) Fuzzy transform and its applications to problems in engineering practice. *Ph. D. Thesis*, Ostrava Uni.
- Stepnicka M and Valasek R** (2003) Fuzzy transform for functions of two variables. *The 6th Czech-Japan Seminar on Data Analysis and Decision Making under Uncertainty*, 100-107.
- Stepnicka M and Valasek R** (2004a) Fuzzy transforms and their applications to heat flow equation. *In: Abstracts of the 2nd FLLL/SCCH Master and PhD Seminar 2004*, 51–56.
- Stepnicka M and Valasek R** (2004b) Fuzzy transform and their application on wave equation. *Journal of Electrical Engineering*, 52: 7-10.
- Yang W Y, Cao W, Kim J, Park K W, Park H H, Joung J, Ro J S, Lee H L, Hong C H, Im T** (2020) *Applied Numerical Methods Using MATLAB*. Second Edition, John Wiley and Sons, USA.
- Zadeh L A** (1965) Fuzzy sets. *Information and Control*, 8: 338-353.
- Zeinali M, Alikhani R, Shahmorad S, Bahrami F and Perfilieva I** (2018) On the structural properties of F^m -transform with applications. *Fuzzy Sets and Systems*, 342: 32-52.
- Zimmermann H J** (2001) *Fuzzy Set Theory and Its Applications*. Fourth Edition, Kluwer Academic Publishers, New York.

ÖZGEÇMİŞ

Nur GAZANFER, 05.09.1984 tarihinde Zonguldak'ta doğdu; ilk ve orta öğrenimini Zonguldak'ta tamamladıktan sonra 2001 yılında girdiği Zonguldak Karaelmas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2005 yılında mezun oldu. Halen 2017 yılında girdiği Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans programını sürdürmektedir. 2010 yılından bu yana Sakarya Uygulamalı Bilimler Üniversitesi Hendek Meslek Yüksekokulu'nda öğretim görevlisi olarak görev yapmaktadır.

ADRES BİLGİLERİ

Adres : Bahçelievler Mah.
Funda Sok. Murat Aydın Apt.
No:12/5 67100
Merkez / ZONGULDAK

Tel : (505) 374 59 11
E-posta : ngazanfer@subu.edu.tr