

HAZİRAN 2019

Yüksek Lisans Tezi – Matematik Bölümü

EMİNE DERYA ÖZDİNÇ

TÜRKİYE CUMHURİYETİ
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FUZZY METRİK UZAYLAR ÜZERİNDE
TANIMLANAN BAZI SABİT NOKTA
TEOREMLERİ

MATEMATİK
YÜKSEK LİSANS TEZİ

EMİNE DERYA ÖZDİNÇ
HAZİRAN 2019

**FUZZY METRİK UZAYLAR ÜZERİNDE
TANIMLANAN BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ**

Gaziantep Üniversitesi

Matematik

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Doç. Dr. Memet ŞAHİN

Emine Derya ÖZDİNÇ

Haziran 2019



©2019 [Emine Derya ÖZDİNÇ]

TÜRKİYE CUMHURİYETİ
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tezin Adı: Fuzzy Metrik Uzaylar Üzerinde Tanımlanan Bazı Sabit Nokta
Teoremleri

Öğrencinin, Adı Soyadı: Emine Derya ÖZDİNÇ

Tez Savunma Tarihi: 12/06/2019

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. Ahmet Necmeddin YAZICI
FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Adil KILIÇ
Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımda okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Memet ŞAHİN
Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:

İmzası

Doç. Dr. Memet ŞAHİN

.....

Doç. Dr. Necati OLGUN

.....

Doç. Dr. Mustafa DEDE

.....

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

Emine Derya ÖZDİNÇ

ABSTRACT

SOME FIXED POINT THEOREMS DEFINED ON FUZZY METRIC SPACES

ÖZDİNÇ, Emine Derya

M.Sc. in Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Memet ŞAHİN

June 2019

62 pages

The thesis consists of five chapters. In the first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, rudiments about the thesis, basic definitions and theorems of fuzzy set are given. In the third chapter, classical metric space and some fixed point theorems on this space are given. In the four chapter, different fuzzy metric spaces are discussed in details. Especially; Fuzzy metric spaces, Fuzzy metric spaces by George and Veeramani, Non-Archimedean fuzzy metric spaces, Fuzzy metric spaces by Kramosil and Michalek, $\mathcal{M}$ -fuzzy metric spaces, Fuzzy metric spaces on fuzzy points sets, Fuzzy-2 metric spaces and some fixed point theorems defined on these spaces are given. In the last section, the results that can be extracted from the thesis are given.

Keywords: Metric Space, Fixed Point, Fixed Point Theorem, Fuzzy Metric Space,
Fuzzy Fixed Point Theorems.

ÖZET

FUZZY METRİK UZAYLAR ÜZERİNDE TANIMLANAN BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

ÖZDİNÇ, Emine Derya
Yüksek Lisans Tezi, Matematik
Tez Yöneticisi: Doç. Dr. Memet ŞAHİN
Haziran 2019
62 sayfa

Bu tez beş bölümde oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, ön bilgiler ve fuzzy kümelerle ilgili bilgilere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, klasik metrik uzay ve bu uzay üzerinde bazı sabit nokta teoremlerinin özellikleri verilmiştir. Dördüncü bölümde, farklı fuzzy metrik uzay tanımları ele alınmıştır. Özellikle; Fuzzy metrik uzay, George ve Veeramani anlamında fuzzy metrik uzay, Non-Archimedean fuzzy metrik uzay, Kramosil ve Michalek fuzzy metrik uzay, $\mathcal{M}$ - fuzzy metrik uzay, fuzzy noktalar kümesi üzerinde fuzzy metrik uzay, fuzzy 2-metrik uzaylar'a ve bunların üzerinde tanımlanan bazı sabit nokta teoremlerine yer verilmiştir. Son bölümde ise tezden çıkarılabilecek sonuçlara yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Metrik Uzay, Sabit Nokta, Sabit Nokta Teoremi, Bulanık
Metrik Uzay, Bulanık Sabit Nokta Teoremleri.



Çok kıymetli aileme...

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim süresince kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösteren, desteğini esirgemeyerek en iyi şekilde rehberlik yapan ve tezimde büyük emeği olan Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden hocam, tez danışmanım Doç. Dr. Memet ŞAHİN' e sonsuz şükranlarımı ve saygılarımı sunarım.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ABSTRACT.....	xii
ÖZET	xiii
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER	iii
SEMBOLLER LİSTESİ	Hata! Yer işareti tanımlı değil.
BÖLÜM I: GİRİŞ.....	1
BÖLÜM II: TEMEL BİLGİLER.....	4
BÖLÜM III: KLASİK METRİK UZAYLAR ve BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ	11
3.1 Metrik Uzay	11
3.2 Tam Metrik Uzaylar	17
3.3 Kısılma Dönüşüm Teoremi	17
3.4 Kısmi Metrik Uzaylar	19
3.5 Kısılma Sabit Nokta Teorem	20
BÖLÜM IV: FUZZY METRİK UZAYLAR VE BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ	22
4.1 Fuzzy Metrik Uzay üzerinde Sabit Nokta Teoremleri	22
4.2 Non-Archimedean (Arşimed Olmayan) Fuzzy Metrik Uzayı Üzerinde Sabit Nokta Teoremleri	29
4.3 $\mathcal{M}$ -Fuzzy Metrik uzayı üzerinde Sabit nokta Teoremleri	35
4.4 Fuzzy Noktalar Kümesi Üzerinde Fuzzy Metrik	38
4.5 Fuzzy 2-Metrik uzayı üzerinde Sabit nokta Teoremleri	39
4.6 Fuzzy Metrik Uzaylarında α - Tipi Bağdaşabilir Fonksiyonlar için Sabit Nokta Teoremleri	44
BÖLÜM V: SONUÇ.....	57
KAYNAKLAR	58

SEMBOLLER LİSTESİ

P	: Önerme
η_A	: Fuzzy Üyelik Fonksiyonu
$\eta_{A^c}(x)$	: Fuzzy Tümlen Üyelik Fonksiyonu
$*$	: İkili işlem
(x_n)	: dizi
(X, p)	: Kısmi Metrik Uzay
$\emptyset$	: Boş Küme
$(X, M, *)$	: Fuzzy Metrik Uzay
(X, d)	: Metrik Uzay
(X, M, T)	: Tam Fuzzy Metrik Uzay
$\phi -$	: Daralma Fonksiyonu
$(X, \mathcal{M}, *)$	: $\mathcal{M}$ -Fuzzy Metrik Uzay
(X, D)	: D- metrik
(X, S)	: S- metrik
$(Fp(X), d_F)$	: Fuzzy Point Metrik Uzay

BÖLÜM I

GİRİŞ

$A \neq \emptyset$ ve $f : A \rightarrow A$ bir dönüşüm olsun. Eğer $f(a_0) = a_0$ olacak şekilde A de bir a_0 noktası var ise bu a_0 noktasına f dönüşümünün bir sabit noktası denir.

Örneğin,

$$A = [0, \infty), f(a) = 2a, g(a) = a + 1$$

şeklinde tanımlanırsa $a = 0$ noktası f dönüşümünün sabit noktasıdır ancak g dönüşümünün sabit noktası yoktur. Yine $A = (0, \infty)$ alınırsa f dönüşümünün de sabit noktası olmadığı açıktır. O halde bir dönüşümün sabit noktasının varlığı, o dönüşümün tanımına bağlı olduğu gibi tanımladığı kümenin yapısına da bağlıdır. Sabit nokta teorisi, matematik içinde ve dışında da muazzam uygulamalara sahip, matematikte en başarılı ve etkili araçlardan biri olup, matematiğin birçok dalında özellikle diferansiyel denklemlere, integral denklemlere, kısmi diferansiyel denklemlere birçok uygulaması olmakla birlikte, diğer ilgili alanların varlık teorisinde çok kullanılmaktadır. Yine sabit nokta teorisi, sınır değer problemleri ve yaklaşım problemlerinde olduğu kadar öz değer problemlerde de çok verimli uygulamalara sahiptir.

1965 yılına kadar matematikte, incelenen konuların (olayların), daha önce saptanmış olan kurallara kesin olarak uyup, uymadığı incelendi. Bu incelemede her zaman kendimize göre bir kesinlik arandı. Araç olarak, düşünce sistemimizde, iki değerli mantık kullanıldı. Örneğin bir önerme için, daha önce saptanan kurallara uyuyorsa doğru, uymuyorsa yanlış denildi. Buna karşın yaşadığımız evrende birçok olaylar vardır ki, bunlarla ilgili önermelerin doğru ya da yanlış olduğunu ayırt etmek çoğu kez bizi güç durumda bırakabilir. Başka bir deyişle, bizi yanılgıya düşürebilir. Örneğin, bir sınıftaki öğrencilerden mavi gözlü öğrencilerin kümesinin yapılması istense; bu küme, değişik kişiler tarafından değişik biçimde oluşturulacaktır.

Çünkü mavi ile mavi olmama arasında bir değerlendirme olmadığından, mavimtırak gözlü bir öğrenci, birine göre mavi gözlü sayılacak, öbürüne göre mavi gözlü sayılmayacaktır. Daha başka bir örnekle bulanık küme kavramının gerekliliğini şu şekilde söyleyebiliriz:

$P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ önermeleri verilsin. $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}$ önermelerinin doğru olduğunu, P_n önermesinin yanlış olduğunu varsayalım. Bunlardan türettiğimiz,

$(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \dots \wedge P_{n-1}) \vee P_n$ bileşik önermesinin ikili mantığa göre doğruluğu bilinmektedir. Bu doğruluk ne derece geçerlidir? Bu gözlemler ve çeşitli araştırmalar, iki değerli mantığa dayanan bugünkü matematiğin kesinlik göstermeyen birçok olayları tam olarak açıklayamayacağı düşüncesini doğurmuştur. Bu durumu ilk kez, 1965 yılında, Zadeh yayınladığı “Fuzzy Sets”[2], adlı makalesiyle ortaya koydu ve bulanık küme (fuzzy set) kavramını tanıttı. Fakat belli durumlarda bu teori ile belli bir değerdeki bir bulanık kümenin üyelik olma derecesini tanımlamak zordur. Bu yüzden Turksen [3] 1986 da aralık değerli bulanık kümeleri tanımladı.

Bulanık metriği nasıl tanımlayacağınız, bulanık matematikte çokça bulanık optimizasyon ve desen tanımda kullanılan temel problemlerden biridir. Şimdiye kadar bu alanda iki yaklaşım var. Birincisi, ilk önce Kaleva [4] tarafından önerilen ve normal bulanık uzaydaki metriği tanımlamak için bulanık sayıları kullanmaktır. Bunun ardından George [5], Felbin [6], Gregori [7], Hadzic [8] gibi araştırmacılar sabit nokta teoremini ve bulanık metrik uzayların diğer özelliklerini de çalışmışlardır. Diamond [9], Boxer [10], Brass [11], Xia ve Guo [14] araştırmacıları tarafından bulanık kümeler arasındaki mesafeleri ölçmek için gerçek sayıları çalışılmışlardır. Son zamanlarda birçok araştırmacı bu alanda çalışmaya devam etmektedir [29-43].

Bu tezde ilk olarak, bulanık küme ve sabit nokta teoremleri ile ilgili literatür bilgilerine yer verilmiştir. İkinci bölümde, bulanık küme ve sabit nokta teoremleri ile ilgili bazı temel bilgilere yer verilmiştir. Üçüncü bölümünde, tanımlanmış olan bu sabit nokta teoremlerinin bazı özellikleri incelenmiş. Dördüncü bölümde, fuzzy kümeler üzerinde tanımlanan fuzzy metrik, George ve Veeramani anlamında fuzzy metrik uzay, Non-Archimedean fuzzy metrik uzay, Kramosil ve Michalek fuzzy metrik uzay, $\mathcal{M}$ -fuzzy metrik uzay, fuzzy noktalar kümesi üzerinde fuzzy metrik uzay, fuzzy 2-metrik uzay ve fuzzy metrik uzaylarında α - tipi bağdaşabilir fonksiyonlar üzerinde tanımlanan

sabit nokta teoremleri incelenmiş, tezin son bölümü olan beşinci bölüm ise, bu tezde elde edilen sonuçlara ayrılmıştır.



BÖLÜM II

TEMEL BİLGİLER

Tanım 2. 1 [2]

$X = \{x : x \in X\}$ kümesi verilmiş olsun. $\forall x \in X$ için $\eta_A(x) \in [0,1]$ olmak üzere,

$$\eta_A : X \rightarrow [0,1]$$

kümesine, X 'in A bulanık kümesi denir. η_A fonksiyonuna A bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu, $\eta_A(x)$ değerine x 'in üyelik derecesi(ya da değeri) ve $\eta_A(X)$ kümesine de A bulanık kümesine ait elemanların üyelik derecelerinin kümesi denir.

Tanım 2. 2[2]

A ve B , X 'in bulanık alt kümeleri ve bu bulanık kümelerin üyelik fonksiyonları η_A ve η_B olsun.

i) Eğer $\forall x \in X$ için $\eta_A(x) = \eta_B(x)$ ise $A = B$ dir.

ii) Eğer $\forall x \in X$ için $\eta_A(x) \leq \eta_B(x)$ ise $A \subseteq B$ dir.

X 'in üyelik fonksiyonu olarak her $x \in X$ için $\eta_X(x) = 1$ ve boş kümenin üyelik fonksiyonu olarak da $\eta_\emptyset(x) = 0$ alalım.

X 'in A ve B bulanık kümelerinin üyelik fonksiyonlarını η_A ve η_B ile gösterelim.
 $\forall x \in X$ için,

$$\max\{\eta_A(x), \eta_B(x)\} = \eta_A(x) \vee \eta_B(x) = \eta_A \vee \eta_B(x)$$

ve

$$\min\{\eta_A(x), \eta_B(x)\} = \eta_A(x) \wedge \eta_B(x) = \eta_A \wedge \eta_B(x)$$

şeklinde gösterilecektir.

Tanım 2. 3 [15]

A ve B bulanık kümelerinin üyelik fonksiyonları sırasıyla η_A ve η_B olsun.

i) Eğer $\forall x \in X$ için $\eta_C(x) = \eta_A(x) \vee \eta_B(x)$ ise $A \cup B = C$ dir.

ii) Eğer $\forall x \in X$ için $\eta_K(x) = \eta_A(x) \wedge \eta_B(x)$ ise $A \cap B = K$ dir.

Tanım 2. 4 [15]

X in bulanık kümelerinin bir ailesi $\{A_i\}_{i \in I}$ olmak üzere bunların birleşimi ve arakesiti sırasıyla eğer $\forall x \in X$ için

$$\eta_C(x) = \bigvee_{i \in I} \eta_{A_i}(x) = eküs \eta_{A_i}(x)$$

ise

$$C = \bigcup_{i \in I} A_i$$

ve $\forall x \in X$ için

$$\eta_K(x) = \bigwedge_{i \in I} \eta_{A_i}(x) = ebas \eta_{A_i}(x)$$

ise

$$K = \bigcap_{i \in I} A_i$$

şeklinde ifade edilir. Burada (eküs: en küçük üst sınır; ebas: en büyük alt sınır) anlamındadır.

Tanım 2. 5 [15]

X in bir bulanık kümesi A ve bunun üyelik fonksiyonu η_A ise, A nın A^c komplementi $\forall x \in X$ için

$$\eta_{A^c}(x) = 1 - \eta_A(x)$$

olmak üzere $\eta_{A^c}(x): X \rightarrow [0,1]$ üyelik fonksiyonu ile verilir.

Tanım 2. 6 [15]

X in A ve B bulanık kümeleri için,

$$A \setminus B = A \cap B^c, A \Delta B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$$

olarak tanımlanır.

X 'in bulanık kümeleri arasındaki birleşim ve arakesit işlemlerindeki özellikler, belirtili kümelerin birleşim ve arakesit işlemlerindeki özelliklerden aşağıdaki iki özellik hariç, aynıdır. Belirtili kümelerde;

$$A \cap A^c = \emptyset, A \cup A^c = X$$

olmasına karşın, bulanık kümelerde,

$$A \cap A^c \neq \emptyset, A \cup A^c \neq X$$

olabilir.

Tanım 2. 7 [48]

X 'in $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ bulanık kümelerini göz önüne alalım. X^n ' nin $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ bulanık kümesi,

$$\eta_A(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigwedge_{i \in I} \{\eta_{A_i}(x_i)\}$$

olmak üzere $\eta_A: X^n \rightarrow [0,1]$ üyelik fonksiyonu ile verilir.

Tanım 2. 8[48]

$\{A_1, A_2, \dots\}$ (veya kısaca) $\{A_n\}$ bir kümeler dizisi olsun. n 'nin sonsuz değerleri için A_n 'ye ait olan X 'in bu tür bütün noktalarının kümesine $\{A_n\}$ 'nin üst limiti denir ve

$$\lim_n \sup A_n$$

ile gösterilir. n 'nin sonlu değerleri için A_n 'ye ait olan X 'in bütün noktalarının kümesine de $\{A_n\}$ 'nin alt limiti denir ve

$$\lim_n \inf A_n$$

ile gösterilir.

Lemma 2. 9[48]

$$\lim_n \sup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i,$$

$$\lim_n \inf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i$$

dir.

Önerme 2.10 [48]

$\lim_n \inf A_n \subset \lim_n \sup A_n$ dir.

Eğer, $\lim_n \inf A_n = \lim_n \sup A_n$ ise, bu durumda bu küme için $\lim_n A_n$ notasyonu kullanılacaktır. Böylece $\{A_n\}$ 'nin limiti vardır ve bu kümeye $\{A_n\}$ 'nin limiti denilecektir.

$$\lim_n A_n = A \text{ veya } A_n \rightarrow A$$

yazılır.

Tanım 2. 11[48]

Eğer $A_n \subset A_{n+1}, \forall n = 1, 2, \dots$ ise, böyle bir $\{A_n\}$ dizisine artandır denir.

Tanım 2. 12[48]

Eğer $A_n \supset A_{n+1}, \forall n = 1, 2, \dots$ ise, böyle bir $\{A_n\}$ dizisine azalandır denir.

Tanım 2. 13[48]

Artan ve azalan dizilere monoton diziler denir.

Önerme 2. 14[48]

Herhangi bir $\{A_n\}$ monoton dizisi için $\lim_n A_n$ var ve $\lim_n A_n = \bigcup_n A_n$ (artan için),

$\lim_n A_n = \bigcap_n A_n$ (azalan için) şeklindedir

Genel olarak $\{A_n\}$ artıyor ve $\lim_n A_n = A$ ise $A_n \uparrow A$; benzer şekilde $\{A_n\}$ azalıyor ve $\lim_n A_n = A$ ise $A_n \downarrow A$ kullanılır.

Kümelerdeki işlemler ve kümelerin karakteristik(üyelik) fonksiyonlarına karşılık gelen ifadeleri aşağıdaki önerme ile verilecektir.

Önerme 2.15 [25]

$$1) \eta_{\bigcup_{t \in T} A_t} = \sup_{t \in T} \eta_{A_t} ,$$

özel olarak

$$\eta_{A \cup B} = \max(\eta_A, \eta_B).$$

$$2) \eta_{\bigcap_{t \in T} B_t} = \inf_{t \in T} \eta_{B_t} ,$$

özel olarak

$$\eta_{A \cap B} = \min(\eta_A, \eta_B).$$

$$3) \eta_{A^c} = 1 - \eta_A ,$$

$$4) \eta_{A-B} = \eta_A - \min(\eta_A, \eta_B)$$

$$= \min(\eta_A, 1 - \eta_B)$$

$$= \max(0, \eta_A - \eta_B),$$

$$5) \eta_{\lim_n \sup A_n} = \limsup_n A_n,$$

$$\eta_{\lim_n \inf A_n} = \liminf_n A_n,$$

ve eğer $\lim_n A_n$ varsa o zaman

$$\eta_{\lim_n A_n} = \lim_n \eta_{A_n}$$

dır.

Tanım 2. 16 [36]

$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ boş olmayan kümeler ise,

$$A = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

kümesine n-boyutlu çarpım kümesi denir ve

$$A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2. 17 [48]

$\{A_t : t \in T\}$, boş olmayan kümelerin ailesi ise

$$A = \{x_t, t \in T : x_t \in A_t, \text{ her } t \in T \text{ için}\}$$

kümesine sonsuz boyutlu çarpım kümesi denir. Burada T bir sonsuz indeks kümesidir.

Tanım 2. 18 [48]

$0 < r \leq 1$ ve $x_0 \in X$ olmak üzere

$$\forall x \in X \text{ için } p(x) = \begin{cases} r, & x = x_0 \text{ ise} \\ 0, & x \neq x_0 \text{ ise} \end{cases}$$

Şeklinde tanımlı $p: X \rightarrow [0,1]$ üyelik fonksiyonunun belirttiği p bulanık kümesine, X 'in bulanık noktası, x_0 'a p bulanık noktasının dayanağı, r ye de p bulanık noktasının değeri denir.

Tanım 2. 19 [48]

Bir A bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu η_A olsun. Eğer $\forall x \in X$ için

$$p(x) \leq \eta_A(x)$$

ise, p bulanık noktası A bulanık kümesine ait denir.

Tanım 2.20 [1]

$*$: $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ bir ikili işlem olsun. Eğer $*$ işlemi $\forall a, b, c, d \in [0, 1]$ için aşağıdaki şartları sağlanırsa $([0, 1], *)$ 'de bir sürekli t-norm denir.

- a) $a * 1 = 1$
- b) $a * b = b * a$
- c) $a * b \leq c * d$, iken $a \leq c$ ve $b \leq d$
- d) $a * (b * c) = (a * b) * c$
- e) $*$ sürekli.

BÖLÜM III

KLASİK METRİK UZAYLAR ve BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Bu bölümde, klasik metrik uzaylar tanıtılmış ve bunlara bağlı olarak metrik uzaylar üzerinde tanımlanan bazı sabit nokta teoremleri incelenmiştir ve [22, 23, 44, 45, 46, 47] bu çalışmalardan derlenmiştir.

3.1 Metrik Uzay

Tanım 3.1.1

X boş kümeden farklı bir küme ve $d : X \times X \rightarrow R$ olsun. $\forall x, y, z \in X$ için

- 1) $d(x, y) \geq 0$;
- 2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- 3) $d(x, y) = d(y, x)$
- 4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

burada, d fonksiyonuna X 'te bir metrik veya uzaklık fonksiyonu, (X, d) ikilisine de bir metrik uzayı denir. Eğer 1,3 ve 4 şartları ile birlikte $x = y \Rightarrow d(x, y) = 0$ şartı sağlanır ise d ye X üzerinde bir yarı metrik, (X, d) ikilisine de yarı metrik uzay denir.

Örnek 3.1.1

$X = R, \forall x, y \in R$ için $d(x, y) = |x - y|$ şeklinde tanımlanan d fonksiyonu Reel sayılar kümesi üzerinde bir metriktir. Bu metriğe alışılmış (veya mutlak değer) metrik (R, d) ikilisine de mutlak değer metrik uzayı denir.

Tanım 3.1.2

X boş kümeden farklı bir küme ve $d : X \times X \rightarrow R$ tanımlansın.

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

bir metrik uzayıdır. Bu metrik uzayına X 'te x, d 'ye bağlı ayırık metrik uzayı denir.

Tanım 3.1.3

Bir (X, d) metrik uzayında (x_n) dizisi $x \in X$ noktasına yakınsar ancak ve ancak verilen $\varepsilon > 0$ için öyle bir $n \in \mathbb{N}$ vardır ki öyle ki $n \geq N$ ise,

$$d(x, x_n) < \varepsilon.$$

Buna

$$x_n \rightarrow x, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

veya

$$d(x, x_n) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

olarak yazabiliriz. (x_n) dizisi x 'e yakınsaktır ancak ve ancak $\exists x \in X$ vardır öyle ki $x_n \rightarrow x$ veya (x_n) 'nin limiti x 'tir.

Lemma 3.1.1

(x_n) dizisi, (X, d) metrik uzayında bir dizi olsun. O zaman (x_n) en fazla bir noktaya yakınsar.

İspat

$x_n \rightarrow x$ ve $x_n \rightarrow y$ varsayalım. Burada

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Dolayısıyla $d(x, y) = 0$ ve böylece $x = y$.

Tanım 3.1.4

$(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ metrik uzaylar olsun. $f: x_1 \rightarrow x_2$ 'ye $x \in X$ noktasında sürekli denir ve eğer $\varepsilon > 0$ verilirse $\exists \delta > 0$ vardır öyle ki

$$d_2(f(y), f(x)) < \varepsilon$$

ise

$$d_1(x, y) < \delta$$

olur. Genel olarak δ, x ve ε sayısına bağlıdır. Eğer f, x_1 'in her noktasında sürekli ise x_1 üzerinde sürekli denir. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ verilirse öyle bir $\delta > 0$ vardır (sadece ε 'a bağlı olarak) öyle ki $d_2(f(y), f(x)) < \varepsilon$ o zaman f 'yi x_1 üzerinde düzgün sürekli denir.

Lemma 3.1.5

X_1, X_2 ve X_3 metrik uzayları ve $x \in X_1$ olsun. $f : X_1 \rightarrow X_2$, x noktasında sürekli ve $g : X_2 \rightarrow X_3, f(x)$ 'te sürekli olsun. O zaman $h = g \circ f$, x 'te sürekli dir. Sırasıyla, eğer f ve g, X_1 ve X_2 üzerinde sürekli iseler o zaman h, x üzerinde sürekli dir.

İspat:

$n \rightarrow \infty$ iken $x_n \rightarrow x$ varsayalım. O zaman f, x 'te sürekli olduğunda, $f(x_n) \rightarrow f(x)$; ve $g, f(x)$ 'te sürekli olduğunda $g(f(x_n)) \rightarrow g(f(x))$. Lemma 3.1.1'den h, x 'te sürekli dir.

Lemma 3.1.6

A ve B boş kümeden farklı bir (X, d) metrik uzayının altkümeleri olsun. $\forall x \in X$ için $d(x, A)$ ile gösterilen x ile A arasındaki uzaklığı

$$d(x, A) = \inf \{d(x, a) : a \in A\} \quad (x \in X)$$

olarak tanımlayalım ve A 'dan B 'ye olan uzaklığı da

$$d(A, B) = \inf \{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

olsun. O halde,

$$i. \quad d(A, B) = \inf \{d(a, B) : a \in A;$$

- ii. $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{A}$;
- iii. Aslında $\forall x, y \in X$ için $x \rightarrow d(x, A): X \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşüm süreklidir,
- $$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

İspat

- (i) $\forall a \in A$ ve $\forall b \in B$ için $d(A, B) \leq d(a, b)$; bundan dolayı, $\forall a \in A$ için $d(A, B) \leq d(a, B)$ ve böylece

$$d(A, B) \leq \inf\{d(a, B) : a \in A\}.$$

Şimdi $\varepsilon > 0$ olsun. Bir $a \in A$ ve $b \in B$ vardır, öyle ki

$$d(a, B) \leq d(a, b) < d(A, B) + \varepsilon;$$

Böylece

$$\inf\{d(x, B) : x \in A\} < d(A, B) + \varepsilon.$$

Bu tüm $\varepsilon > 0$ için geçerli olduğundan sağlanır.

- (ii) $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, A \cap B(X, \varepsilon) \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in \bar{A}$.
- (iii) $x, y \in X$ olsun. Buradan $\forall a \in A, d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, A)$ olduğunu gösterir.

Tanım 3.1.7

$X \neq \emptyset$ bir küme olsun. Her $a, b, c, x \in X$ için

- i. $D(a, b, c) \geq 0$,
- ii. $D(a, b, c) = 0 \Leftrightarrow a = b = c$,
- iii. $D(a, b, c) = D(p\{a, b, c\})$ p bir permütasyon fonk. olmak üzere,
- iv. $D(a, b, c) \leq D(a, b, x) + D(x, c, c)$.

şartını sağlayan bir $D : X^3 \rightarrow R^+$ fonksiyonuna genelleştirilmiş metrik ya da D -metrik, (X, D) çifti ise genelleştirilmiş metrik uzay ya da D -metrik uzay denir.

Örnek 3.1.8

$a, b, c, x \in X$ ve d bir klasik metrik olmak üzere;

$$D(a, b, c) = d(a, b) + d(b, c) + d(c, a)$$

D -metriktir. Yani;

i. d , klasik metrik olduğundan

$$d(a, b) \geq 0, d(b, c) \geq 0, d(c, a) \geq 0$$

dır. Dolayısıyla

$$D(a, b, c) = d(a, b) + d(b, c) + d(c, a) \geq 0$$

dır.

ii. $D(a, b, c) = 0 \Leftrightarrow d(a, b) + d(b, c) + d(c, a) = 0$

$$\Leftrightarrow d(a, b) = 0 \wedge d(b, c) = 0 \wedge d(c, a) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b = c.$$

iii. d , klasik metrik olduğundan

$$d(a, b) = d(b, a) \wedge d(b, c) = d(c, b) \wedge d(c, a) = d(a, c)$$

dir. Dolayısıyla

$$D(a, b, c) = D(p\{a, b, c\})$$

dir.

iv. d , klasik metrik olduğundan

$$d(b, c) \leq d(b, x) + d(x, c) \text{ ve } d(c, a) \leq d(c, x) + d(x, a)$$

dır. Aynı zamanda $d(c, c) = 0$ dır.

$$\begin{aligned} D(a, b, c) &= d(a, b) + d(b, c) + d(c, a) \\ &\leq d(a, b) + d(b, x) + d(x, c) + d(c, x) + d(x, a) + d(c, c) \\ &= d(a, b) + d(b, x) + d(x, c) + d(x, a) + d(c, x) + d(c, c) \\ &= D(a, b, x) + D(x, c, c). \end{aligned}$$

Yani

$$D(a, b, c) \leq D(a, b, x) + D(x, c, c)$$

dir. O halde $D(a, b, c) = d(a, b) + d(b, c) + d(c, a)$ fonksiyonu D -metriktir.

Tanım 3.1.9

$X \neq \emptyset$ bir küme olsun. X üzerindeki S -metriği Her $a, b, c, x \in X$ için

- i. $S(a, b, c) \geq 0$,
- ii. $S(a, b, c) = 0 \Leftrightarrow a = b = c$,
- iii. $S(a, b, c) \leq S(x, a, b) + S(x, a, a)$.

şartını sağlayan bir $S : X^3 \rightarrow [0, \infty[$ fonksiyonuna genelleştirilmiş metrik ya da S -metrik, (X, S) çifti ise genelleştirilmiş metrik uzay ya da S -metrik uzay denir.

Örnek 3.1.10

(X, S) bir metrik uzay olsun. Eğer $g : X^2 \rightarrow [0, \infty[$, her $a, b \in X$ için

$g(a, b) = S(a, b, b)$ olarak tanımlanırsa, g , X üzerinde bir klasik metriktir. Yani;

- i. $g(a, b) = S(a, b, b) \geq 0$,
- ii. $g(a, b) = S(a, b, b) = 0 \Leftrightarrow a = b = b \Leftrightarrow a = b$,

$$\begin{aligned}
\text{iii. } g(a,b) &= S(a,c,c) \leq S(b,c,c) + S(b,a,a) \\
&= S(a,b,b) + S(b,c,c) \\
&= g(a,c) + g(c,b)
\end{aligned}$$

3.2 Tam Metrik Uzaylar

Tanım 3.2.1

(X, d) bir metrik uzay olsun. (x_n) dizisi X 'te bir Cauchy dizisi denir eğer verilen herhangi $\varepsilon > 0$ öyle bir $n \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall m, n \geq n$ olduğunda $d(x_m, x_n) < \varepsilon$. Eş anlamlı olarak, $n \rightarrow \infty, \text{diam}\{x_m : m \geq n\} \rightarrow 0$. Genelde, bu koşullar $m, n \rightarrow \infty, d(x_m, x_n) \rightarrow 0$ olarak yazılabilir. X 'te verilen herhangi (x_n) Cauchy dizisi için öyle bir $x \in X$ vardır öyle ki $n \rightarrow \infty$, için $x_n \rightarrow x$ ise X uzayı tamdır denir.

3.3 Kısılma Dönüşüm Teoremi

Bu matematiğin en kullanışlı, ama basit teoremlerinden biridir.

Tanım 3.3.1

(X, d) bir metrik uzay olsun. Bir $f : X \rightarrow X$ dönüşümü bir kısılma denir eğer $\lambda \in [0, 1]$ bir sayı varsa, öyle ki $\forall x, y \in X$ için

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda(d(x, y)).$$

Tanım 3.3.2

X boştan farklı bir küme, $P(X)$ de X 'nin alt kümelerinin ailesi olmak üzere $F : X \rightarrow P(X)$ şeklinde tanımlı F kümesi değerli dönüşüm için $x \in F(x)$ ise x noktasına F dönüşümünün sabit noktası denir.

Teorem 3.3.1

(X, d) bir tam metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ bir kısılma olsun. Buradan tam olarak bir

$x \in X$ noktası vardır öyle ki $f(x) = x$ 'tir. Yani, f tam olarak bir sabit noktaya sahiptir.

İspat:

f bir kısalma olduğundan, $\forall x, y \in X$ için $d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$ olacak şekilde

$\lambda \in [0, 1]$ vardır. $x_0 \in X$ olsun ve bir (x_n) dizisi $x_n = f(x_{n-1}) (n \in \mathbb{N})$ tanımlansın.

Burada her bir $n \in \mathbb{N}$ için,

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1}))$$

$$\leq \lambda d(x_n, x_{n-1})$$

$$\leq \lambda^n d(x_1, x_0).$$

$m > n$ ise,

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n)$$

$$\leq (\lambda^{m-1} + \lambda^{m-2} + \dots + \lambda^n) d(x_1, x_0)$$

$$= (\lambda^n - \lambda^m) / (1 - \lambda) * d(x_1, x_0).$$

Buda (x_n) 'in X 'de bir Cauchy dizisi olduğunu ve X tam olduğundan öyle bir $x \in X$ vardır öyle ki $x_n \rightarrow x$. Böylece $n \rightarrow \infty$,

$$d(x, f(x)) \leq d(x, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, f(x))$$

$$\leq d(x, x_{n+1}) + \lambda d(x_n, x).$$

Bundan dolayı, $f(x) = x$, demek ki x, f 'nin bir sabit noktasıdır. $f(y) = y$ olacak şekilde eğer $y \in Y$ varsa; O zaman

$$d(x, y) = d(f(x), f(y))$$

$$\leq \lambda d(x, y)$$

ve $\lambda < 1$ olduğunda

$$d(x, y) = 0 \text{ dır.}$$

Dolayısıyla $x = y$ ve ispat tamamlanır.

Bu ispatın yapıcı niteliğine dikkat edin; x 'in hangi x_0 noktasını seçerseniz seçin f 'nin x sabit noktası aşağıdaki formül ile verilir

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0).$$

Sonuç 3.3.2

X bir tam metrik uzay ve $f : x \rightarrow x$ olsun öyle ki bazı $k \in \mathbb{N}$ için f^k bir kısaltmadır. O zaman f tek bir sabit noktaya sahiptir.

İspat:

Teorem 3.3.1'den, bir tek $x \in X$ vardır öyle ki $f^{(k)}(x) = x$ fakat

$$f^{(k)}(f(x)) = f(f^k(x)) = f(x),$$

ve böylece $f(x), f^{(k)}$ 'nin bir sabit noktasıdır. Bundan dolayı $f(x) = x$. f tek bir sabit noktayı sahip olduğundan f 'nin herhangi sabit noktası f^k 'nin sabit noktasıdır ve bu nedenle x ile aynı olmalıdır.

3.4 Kısmi Metrik Uzaylar

Tanım 3.4.1

Kısmi bir metrik uzayı bir $(X, p : X \times X \rightarrow \mathbb{R})$ öyle ki

$$P_0 : 0 \leq p(x, x) \leq p(x, y) \text{ [negatif olmayan, ve küçük öz mesafeler]}$$

$$P_1 : p(x, x) = p(x, y) = p(y, y) \text{ ise o zaman } x = y \text{ [indistance implies equality]}$$

$$P_2 : p(x, y) = p(y, x) \text{ [simetri], ve}$$

$$P_3 : p(x, z) \leq p(x, y) + p(y, z) - p(y, y) \text{ [üçgen eşitsizliği]}$$

Tanım 3.4.2

X 'te bir kısmi sıralama x 'te bir ikili bağlantıdır öyle ki

$$x \dot{\cup} x \text{ (yansıma)}$$

$$x \dot{\cup} y \text{ ve } y \dot{\cup} x \text{ ise o zaman } x = y \text{ (ters simetri) ve}$$

$x \dot{\cup} y$ ve $y \dot{\cup} z$ ise, o zaman $x \dot{\cup} z$ (geçişme).

Bir kısmen sıralı küme $(X, \dot{\cup})$ ikilidir öyle ki $\dot{\cup}$, X üzerinde bir kısmi sıralıdır.

Her bir (X, p) metrik uzayı için $\dot{\cup} p$, X üzerinde ikili bağlantı olsun öyle ki $x \dot{\cup} py$ (x, y 'nin bir parçasıdır diye okunur) $\Leftrightarrow p(x, x) = p(x, y)$ ise buradan $(X, \dot{\cup} p)$ bir poset olduğunu gösterir.

3.5 Kısılma Sabit Nokta Teorem

Şimdi metrik uzaylar teorisinden tanıdık bir teoremin kısmi metrik uzaylara nasıl taşınabileceğini düşünüyoruz. Tam uzaylar, Cauchy dizileri ve kısılma sabit nokta teoremi, metrik uzaylar teorisinde iyi bilinmektedir ve aşağıdaki gibi kısmi metrik uzaylara genelleştirilebilir. Bir sonraki tanım, metrik uzaydaki Cauchy dizi kavramını kısmi metrik uzaylara genelleştirir.

Tanım 3.5.1

(X, p) bir kısmi metrik uzayındaki noktalarının $x = (x_n)$ dizisi bir Cauchydir. $\exists \varepsilon > 0$ için öyle bir $a \geq 0$ ve k vardır ki

$$\forall n, m > k, |p(x_n - x_m) - a| < \varepsilon.$$

Başka bir deyişle, n ve m sonsuzluğa yaklaşması durumunda $p(x_n, x_m)$ sayıları bazı a 'ya yakınsarsa, x Cauchy dizidir yani,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n - x_m) = a$$

ise sonra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x_n) = a$$

ve böylece (X, p) bir metrik uzay ise o zaman $a = 0$ 'dır.

Tanım 3.5.2

$\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x_n) = p(y, y)$ ise (X, p) kısmi metrik uzayındaki noktalarının bir $x = (x_n)$ dizisi X cinsinden x 'ten y 'ye yakınsar.

Böylece bir dizi bir noktaya yakınsarsa, kendi mesafeleri o noktanın kendi mesafesine yakınsar.

Tanım 3.5.3

Eğer Cauchy dizisi yakınsaksa bir (X, p) kısmi metrik uzayı tamdır.

Tanım 3.5.4

(X, p) her bir kısmi metrik uzayı, öyle bir $c \in [0, 1]$ vardır öyle ki $f : x \rightarrow x$ bir kısıalma fonksiyonudur

$$\forall x, y \in X, p(f(x), f(y)) \leq cp(x, y).$$

Teorem 3.5.5

(X, p) bir tam kısmi metrik uzay üzerinde her bir f kısıalma için $x = f(x)$ olacak şekilde bir tek $x \in X$ vardır. Ayrıca, $p(x, x) = 0$. Böylece kısıalma sabit nokta teoremi kısmi metrik uzaylara genişletilir.

Hesaplanabilir bir fonksiyonun kısıalma olduğu kanıtlanabilen bilgisayar bilimleri bağlamında, kısmi metrik uzayındaki kısıalma sabit nokta teoremi, programın çıktısı olan tek sabit noktanın tamamen hesaplanacağını kanıtlamak için kullanılabilir.

BÖLÜM IV

FUZZY METRİK UZAYLAR VE BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Bu bölümde birçok yazar tarafından tanımlanmış Fuzzy metrik uzayları ve bunların bazıları üzerinde tanımlanan sabit nokta teoremlerini incelenmiş ve bölümle ilgili daha geniş bilgi [6, 9, 12, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 24, 25, 26, 27, 28] deki çalışmalarında verilmiştir.

4.1 Fuzzy Metrik Uzay üzerinde Sabit Nokta Teoremleri

Tanım 4.1.1

X boş olmayan keyfi bir küme, $*$ işlemi sürekli bir t-norm ve M de $X^2 \times [0, \infty)$ üzerinde bir fuzzy küme olsun. $\forall a, b, c \in X$ ve $s, t > 0$, için aşağıdaki şartlar sağlanırsa $(X, M, *)$ üçlüsüne bir fuzzy metrik uzayı denir.

- a. $M(a, b, 0) = 0$
- b. $M(a, b, t) = 1, \forall t > 0 \Leftrightarrow a = b$
- c. $M(a, b, t) = M(b, a, t)$
- d. $T(M(a, b, t) * M(b, c, s)) \leq M(a, c, t + s)$
- e. $M(a, b, .) : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ soldan sürekli

George ve Veeramani, [6]'de fuzzy metrik uzay üzerinde Hausdorff topolojisi sağlamak için bulanık metrik uzayını genişletti. Bu tanım aşağıdaki gibidir:

Tanım 4.1.2

$\forall a, b, c, d \in [0, 1]$ için aşağıdaki şartları sağlanırsa $*$: $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ikili işleme $([0, 1], *)$ 'de bir t-norm denir.

- f) $a * 1 = 1$
- g) $a * b = b * a$
- h) $a * b \leq c * d$, iken $a \leq c$ ve $b \leq d$
- i) $a * (b * c) = (a * b) * c$.

Tanım 4.1.3

X bir keyfi küme, $*$ sürekli t-norm ve $F, X^2 \times [0, \infty)$ 'de bir fuzzy küme. $\forall a, b, c \in X$ ve $s, t > 0$, için aşağıdaki şartlar sağlanırsa $(X, F, *)$ üçlüsüne bir fuzzy metrik uzayı denir.

- a. $F(a, b, 0) = 0$
- b. $F(a, b, t) = 1, \forall t > 0 \Leftrightarrow a = b$
- c. $F(a, b, t) = F(b, a, t)$
- d. $F(a, b, t) * F(b, c, s) \leq F(a, c, t + s)$
- e. $F(a, b, \cdot) : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ soldan sürekli
- f. $\lim_{t \rightarrow \infty} F(a, b, t) = 1$

Örnek 4.1.4:

(X, d) bir metrik uzay ve $x * y = xy$ olsun. Her $k, m, n \in R^+$ için

$$F_d(a, b, t) = \frac{kt^n}{kt^n + md(a, b)}$$

olarak tanımlanan fonksiyon bir fuzzy metriktir. Şimdi $\forall a, b, c \in X$ ve $s, t > 0$ ve $k, m, n \in R^+$ için

- i. d , bir metrik olduğundan her $a, b \in X$ için $d(a, b) \geq 0$ dır. $k, m, n \in R^+$ için $t > 0$ olduğundan

$$F_d(a, b, t) = \frac{kt^n}{kt^n + md(a, b)} > 0 \text{ dır.}$$

- ii. $F_d(a, b, t) = 1 \Leftrightarrow kt^n = kt^n + md(a, b)$

$$\Leftrightarrow md(a, b) = 0$$

$$\Leftrightarrow d(a, b) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b.$$

- iii. d , bir metrik olduğundan $d(a, b) = d(b, a)$ dır. Dolayısıyla

$$F_d(a, b, t) = \frac{kt^n}{kt^n + md(a, b)} = \frac{kt^n}{kt^n + md(b, a)} = F_d(b, a, t).$$

- iv. $F_d(a, b, t) * F_d(b, c, s) \leq F_d(a, c, t + s)$ olduğu yani, d , bir metrik

$k, m, n \in R^+$ olmak üzere

$$\frac{kt^n}{kt^n + md(a, b)} \cdot \frac{ks^n}{ks^n + md(b, c)} \leq \frac{k(t+s)^n}{k(t+s)^n + md(a, c)}$$

olduğu gösterilmelidir. d , bir metrik olduğundan

$$d(a, b) + d(b, c) \leq d(a, c)$$

dir. Diğer yandan

$$\frac{k(t+s)^n}{kt^n} > 1, \quad \frac{k(t+s)^n}{ks^n} > 1$$

dir ve dolayısıyla

$$m \frac{k(t+s)^n}{kt^n} > m, \quad m \frac{k(t+s)^n}{ks^n} > m$$

dir. Diğer yandan

$$\begin{aligned} md(a, c) &\leq m \frac{k(t+s)^n}{kt^n} d(a, b) + m \frac{k(t+s)^n}{ks^n} d(b, c) \\ \Rightarrow \frac{md(a, c)}{k(t+s)^n} &\leq \frac{md(a, b)}{kt^n} + \frac{md(b, c)}{ks^n} = \frac{ks^n md(a, b) + kt^n md(b, c)}{k^2(ts)^n} \\ \Rightarrow 1 + \frac{md(a, c)}{k(t+s)^n} &\leq 1 + \frac{ks^n md(a, b) + kt^n md(b, c)}{k^2(ts)^n} \\ \Rightarrow \frac{k(t+s)^n + md(a, c)}{k(t+s)^n} &\leq \frac{k^2(ts)^n + ks^n md(a, b) + kt^n md(b, c)}{k^2(ts)^n} \end{aligned}$$

olur. Metrik tanımından ve $m > 0$ olduğundan;

$$m^2 d(a, b) d(b, c) \geq 0$$

dır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \frac{k(t+s)^n + md(a, c)}{k(t+s)^n} &\leq \frac{k^2(ts)^n + ks^n md(a, b) + kt^n md(b, c)}{k^2(ts)^n} \\ &\leq \frac{k^2(ts)^n + ks^n md(a, b) + kt^n md(b, c) + m^2 d(a, b) d(b, c)}{k^2(ts)^n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{k^2(ts)^n}{k^2(ts)^n + ks^n md(a, b) + kt^n md(b, c) + m^2 d(a, b) d(b, c)} \\
& \Rightarrow \frac{kt^n}{kt^n + md(a, b)} \frac{ks^n}{ks^n + md(b, c)} \\
& \leq \frac{k(t+s)^n}{k(t+s)^n + md(a, c)}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow F_d(a, b, t) * F_d(b, c, s) \leq F_d(a, c, t+s)$$

bulunur.

iv. her $a, b \in X$, $t_0 > 0$ için

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow t_0} F_d(a, b, t) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{kt^n}{kt^n + md(a, b)} \\
&= \frac{\lim_{t \rightarrow t_0} kt^n}{\lim_{t \rightarrow t_0} (kt^n + md(a, b))} \\
&= \frac{kt_0^n}{kt_0^n + md(a, b)} \\
&= F_d(a, b, t_0).
\end{aligned}$$

O halde F_d bir fuzzy metriktir.

Tanım 4.1.5

$*: [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ bir ikili işlem olsun. Bu $*$ işlemi aşağıdaki şartlar sağlanırsa sürekli t-norm denir.

- 1) $([0, 1], X)$ birimi 1 olan değişmeli topolojik bir monoid ve
- 2) $[0, 1]$ 'de $\forall a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ için $a_1 * b_1 * c_1 \leq a_2 * b_2 * c_2$ olduğunda
 $a_1 \leq a_2, b_1 \leq b_2, c_1 \leq c_2$

dir.

Teorem 4.1.6

(X, M, T) , $\forall x, y \in X$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} M(x, y, t) = 1$ olacak şekilde tam bulanık metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ bir φ -daralma olsun. O halde f tek bir sabit noktaya sahiptir.

Teorem 4.1.7

(X, M, T) , $a * b = \min(a, b)$ ile fuzzy metrik uzay olsun. $f_i : X \rightarrow X$ her $i = 1, 2, 3, \dots$ için en az bir x_i içeren sabit nokta ve $f_0 : X \rightarrow X$ fuzzy daralma dönüşüm altında x_0 sabit noktası içeren bir fonksiyon olsun. Eğer (f_i) dizisi f_0 düzgün yakınsak ise, o halde (x_i) dizisi x_0 yakınsaktır.

İspat:

$k \in (0, 1)$ ve $i \geq N$ olacak şekilde $N \in$ pozitif bir sayı seçelim.

$$M(f_i x, f_0 x, (1-k)t) > 1-r$$

burada $r \in (0, 1)$ ve $x \in X$ tir. O halde, $i \geq N$ ise

$$\begin{aligned} M(x_i, x_0, t) &= M(f_i x_i, f_0 x_0, t) \\ &\geq M(f_i x_i, f_0 x_0, (1-k)t) * M(f_0 x_i, f_0 x_0, (1-k)t) \\ &> \min(1-r, M(x_i, x_0, t)). \end{aligned}$$

Dolayısıyla, $i \rightarrow \infty$ için $M(x_i, x_0, t) \rightarrow 1$ 'dir. Buradan (x_i) dizisi x_0 yakınsaktır denir.

Tanım 4.1.8

$\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ bir fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa ϕ -fonksiyonu denir.

- i. $\phi(t) = 0$ gerek ve yeter şart $t = 0$,
- ii. $t \rightarrow \infty$ iken $\phi(t) \rightarrow \infty$ ve $\phi(t)$ artandır,
- iii. $(0, \infty)$ da ϕ soldan süreklidir,
- iv. ϕ sıfırda süreklidir.

Teorem 4.1.9

(X, M, T) George ve Veeramani anlamında fuzzy metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ bir ϕ -daralma olsun. Bazı $x_0 \in X$ için $\{f^n x_0\}$ dizisinin bir p -yakınsak alt diziyeye sahip olduğunu varsayalım. O halde f tek bir sabit noktaya sahiptir.

İspat:

$x_0 \in X$ olsun. Tanım 4.7'den (i) ve (iv) şartlarını göz önüne alındığında, $s > 0$ için $s > \phi(r)$ olacak şekilde bir r sayısı bulabiliriz. O halde $s > 0$ için

$$\begin{aligned}
 M(x_n, x_{n+1}, s) &\geq M(fx_{n-1}, fx_n, \phi(r)) \\
 &\geq M\left(x_{n-1}, x_n, \phi\left(\frac{r}{c}\right)\right) \\
 &= M\left(fx_{n-2}, fx_{n-1}, \phi\left(\frac{r}{c}\right)\right) \\
 &\geq M\left(x_{n-2}, x_{n-1}, \phi\left(\frac{r}{c^2}\right)\right) \\
 &\geq \dots \dots \\
 &\geq M\left(x_0, x_1, \phi\left(\frac{r}{c^n}\right)\right).
 \end{aligned}$$

Bundan dolayı her $n > 1$ için

$$M(x_n, x_{n+1}, s) \geq M\left(x_0, x_1, \phi\left(\frac{r}{c^n}\right)\right).$$

$n \rightarrow \infty$ alındığında, her $s > 0$ için

$$M(x_n, x_{n+1}, s) \rightarrow 1. \quad (1)$$

$\{x_{n_j}\}$, $\{x_n\}$ dizisinin bir p -yakınsak alt dizisi olduğunu varsayalım, bundan dolayı $M\left(x_{n_j}, y_0, \frac{\varepsilon}{2}\right) \rightarrow 1$ olacak şekilde bir $y_0 \in X$ ve $\varepsilon > 0$ vardır. Dolayısıyla $\lambda \in (0, 1)$ için

$$M\left(x_{n_j}, y_0, \frac{\varepsilon}{2}\right) > 1 - \lambda, \quad \forall j \geq N_1(\lambda) \quad (2)$$

olacak şekilde bir $N_1(\lambda)$ pozitif sayısı bulabiliriz.

Şimdi $M(x_{n_j+1}, y_0, \varepsilon) \rightarrow 1$ olduğunu gösterelim. T sürekli olduğunda,

$$T(1-\delta, 1-\delta) > 1-\lambda$$

olacak şekilde bir $\delta \in (0, 1)$ vardır.

$$M\left(x_{n_j}, x_{n_j+1}, \frac{\varepsilon}{2}\right) > 1-\delta, \quad \forall j \geq N_2(\lambda) \quad (3)$$

N_2 'nin δ 'ye bağlı pozitif bir tamsayı olduğunu ve dolayısıyla λ 'ya bağlı olduğunu görebiliriz. O halde her $j > \max\{N_1(\lambda), N_2(\lambda)\}$ için

$$\begin{aligned} M(x_{n_j+1}, y_0, \varepsilon) &\geq T\left(\left(x_{n_j+1}, x_{n_j}, \frac{\varepsilon}{2}\right), \left(x_{n_j+1}, y_0, \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \\ &\geq T((1-\delta), (1-\delta)) \\ &> (1-\lambda). \end{aligned}$$

Dolayısıyla, $\lim_{j \rightarrow \infty} M(x_{n_j+1}, y_0, \varepsilon) = 1$, yani,

$$x_{n_j+1} \xrightarrow{p} y_0.$$

Şimdi $n \rightarrow \infty$ iken $M(x_{n_j+1}, fy_0, \varepsilon) = 1$ olduğunu gösterelim. ϕ -fonksiyonunun

özelliklerinden $\frac{\varepsilon}{2} < \phi(\varepsilon_1)$ olacak şekilde $\varepsilon_1 > 0$ bulabiliriz.

Şimdi,

$$\begin{aligned} M(x_{n_j+1}, fy_0, \varepsilon) &= M(fx_{n_j}, fy_0, \phi(\varepsilon_1)) \\ &\geq M\left(x_{n_j}, y_0, \frac{\varepsilon_1}{c}\right) \\ &\geq M(x_{n_j}, y_0, \phi(\varepsilon_1)) \\ &\geq M\left(x_{n_j}, y_0, \frac{\varepsilon}{2}\right) \\ j \rightarrow \infty \text{ iken } &\rightarrow 1. \end{aligned}$$

Bundan dolayı,

$$x_{n_j+1} \xrightarrow{p} fy_0$$

dır. Bir p -yakınsak dizinin p -limiti vardır ve tektir. Bundan dolayı, $fy_0 = y_0$, yani,

y_0 , f 'nin sabit noktasıdır.

Şimdi sabit noktanın tekliğini gösterelim. u ve v , f 'nin sabit iki noktası olsun.

$s_1 > 0$ için $s_1 > \phi(r_1)$ olacak şekilde bir r_1 sayısı bulabiliriz. O halde $s_1 > 0$ için

$$\begin{aligned} M(u, v, s_1) &= M(fu, fv, s_1) \\ &\geq M(fu, fv, \phi(r_1)) \\ &\geq M\left(u, v, \phi\left(\frac{r_1}{c}\right)\right) \\ &= M\left(fu, fv, \phi\left(\frac{r_1}{c}\right)\right) \\ &\geq \dots \dots \\ &\geq M\left(u, v, \phi\left(\frac{r_1}{c^n}\right)\right). \end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$ alındığında, her $s_1 > 0$ için $M(u, v, s_1) \rightarrow 1$, yani $u = v$. Bu sabit noktanın tekliğini kanıtlar ve ispat tamamlanmış olur.

4.2 Non-Archimedean (Arşimed Olmayan) Fuzzy Metrik Uzayı Üzerinde Sabit Nokta Teoremleri

Tanım 4.2.1

X boş olmayan keyfî bir küme, $*$ işlemi sürekli t-norm ve F de $X^2 \times [0, \infty)$ üzerinde bir fuzzy küme olsun. $\forall a, b, c \in X$ ve $s, t > 0$, için aşağıdaki şartlar sağlanırsa $(X, F, *)$ üçlüsüne bir Non-Archimedean fuzzy metrik uzayı denir:

- i. $F(a, b, 0) = 0$,
- ii. $F(a, b, t) = 1, \forall t > 0 \Leftrightarrow a = b$
- iii. $F(a, b, t) = M(b, a, t)$
- iv. $(F(a, b, t) * F(b, c, s)) \leq F(a, c, t \vee s), t \vee s = \max\{s, t\}$,
- v. $F(a, b, .) : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ süreklidir.

Üstteki iv. koşulu Kramosil ve Michalek fuzzy metrik uzay tanımındaki iv. koşulunu gerektirdiğinden; her Non-Archimedean fuzzy metrik uzay, Kramosil ve Michalek fuzzy metrik uzaydır.

4.2.2 Örnek

Her $x, y \in [0,1]$ için $x * y = xy$ olsun. d, X üzerinde klasik bir metrik olmak üzere; F , her $a, b \in R^+$ için $(R^+)^2 \times (0, \infty)$ üzerinde

$$F(a, b, t) = \frac{\min\{a, b\}}{\max\{a, b\}}$$

şeklinde tanımlanan bir bulanık küme olsun. O halde $F(a, b, *)$ bir Non-Archimedean bulanık metrik uzaydır.

Tanım 4.2.3

$(X, F, *)$ bir Non-Archimedean fuzzy metrik uzay olsun. X 'deki $\{x_n\}$ dizisi bir x e yakınsaması için gerek ve yeter şart her $t > 0, n \rightarrow \infty$ iken

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, x, t) = 1.$$

Tanım 4.2.4

$(X, F, *)$ bir Non-Archimedean fuzzy metrik uzay olsun. X 'deki bir $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir eğer her bir $0 < \varepsilon < 1$ ve $t > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n, m > n_0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, x_m, t) = 1.$$

Tanım 4.2.5

$(X, F, *)$ bir Non-Archimedean fuzzy metrik uzayının tam olması için gerek ve yeter şart her Cauchy dizisinin yakınsak olmasıdır.

Teorem 4.2.6

$(X, \leq)$ kısmi sıralı bir küme ve $(X, F, *)$ bir tam Non-Archimedean bulanık metrik uzay olsun. $x_0, y_0 \in X$ ile birlikte $x_0 \leq H(x_0, y_0)$ ve $y_0 \geq H(y_0, x_0)$ olacak şekilde X üzerinde karışık (mixed) monoton özelliğe sahip $H : X \times X \rightarrow X$ sürekli bir dönüşüm olsun. Her $a, b, u, v \in X$ ile $a \geq u, b \leq v$ ve $k \in (0,1)$

$$F(H(a, b), H(u, v), kt) \geq$$

$$\max \{F(H(u, v), a, t) * F(H(u, v), u, t), F(H(a, b), a, t) * F(H(a, v), b, u, t)\} \quad (4)$$

o halde H , X de bir bağlanmış (coupled) sabit noktaya sabittir.

İspat:

$$x_0, y_0 \in X \text{ ile birlikte } x_0 \leq H(x_0, y_0) \text{ ve } y_0 \geq H(y_0, x_0) \quad (5)$$

olsun. X de $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizilerini her $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$x_{n+1} = H(x_n, y_n) \text{ ve } y_{n+1} = H(y_n, x_n) \quad (6)$$

olacak şekilde tanımlayalım. İddia edelim ki $\{x_n\}$ monoton artan dizi ve $\{y_n\}$ monoton azalan bir dizi, yani; her $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$x_n \leq x_{n+1} \text{ ve } y_n \geq y_{n+1} \quad (7)$$

(5) ve (6) dan

$$x_0 \leq H(x_0, y_0) \text{ ve } y_0 \geq H(y_0, x_0) \text{ ve } x_1 = H(x_0, y_0) \text{ ve } y_1 = H(y_0, x_0)$$

dır. Böylece

$$x_0 \leq x_1 \text{ ve } y_0 \geq y_1$$

yani (7) ifadesi $n = 0$ için doğrudur.

Şimdi bazı n 'ler için (7) ifadesinin doğru olduğunu kabul edip

$$x_n \leq x_{n+1} \text{ ve } y_n \geq y_{n+1}$$

ifadesinin $n + 1$ için doğru olduğunu gösterelim. Şimdi

$$x_n \leq x_{n+1} \text{ ve } y_n \geq y_{n+1}$$

H 'nin monoton mixed özelliğinden

$$x_{n+2} = H(x_{n+1}, y_{n+1}) \geq H(x_n, y_{n+1}) \geq H(x_n, y_n) = x_{n+1}$$

ve

$$y_{n+2} = H(y_{n+1}, x_{n+1}) \leq H(y_n, x_{n+1}) \leq H(y_n, x_n) = y_{n+1}$$

Bu nedenle tümevarım metodundan (7) deki her n için geçerlidir. Böylece

$$x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \dots$$

ve

$$y_0 \geq y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n \geq y_{n+1} \geq \dots$$

$x_{n-1} \leq x_n$ ve $y_{n-1} \geq y_n$ olup, $x = x_n, y = y_n, u = x_{n-1}, v = y_{n-1}$ (7) ifadesinde yerine yazıldığında

$$F(H(x_n, y_n), H(x_{n-1}, y_{n-1}), kt) \geq$$

$$\max \{ F(H(x_{n-1}, y_{n-1}), x_n, t) * F(H(x_{n-1}, y_{n-1}), x_{n-1}, t), F(H(x_n, y_n), x_n, t) * F(H(x_n, y_n), x_{n-1}, t) \}$$

$$F((x_{n+1}, x_n), kt) \geq$$

$$\max \{ F(x_n, x_n, t) * F(x_n, x_{n-1}, t), F(x_{n+1}, x_n, t) * F(x_{n+1}, x_{n-1}, t) \}$$

$$= \max \{ 1 * F(x_n, x_{n-1}, t), F(x_{n+1}, x_n, t) * F(x_{n+1}, x_{n-1}, t) \}$$

$$= \max \{ F(x_n, x_{n-1}, t), F(x_{n+1}, x_n, t) * F(x_{n+1}, x_{n-1}, t) \}$$

$$\geq F(x_n, x_{n-1}, t)$$

$$\Rightarrow F(x_{n+1}, x_n, t) \geq F\left(x_n, x_{n-1}, \frac{t}{k^1}\right)$$

$$\geq F\left(x_n, x_{n-2}, \frac{t}{k^2}\right)$$

$$\geq F\left(x_n, x_{n-3}, \frac{t}{k^3}\right)$$

$\vdots$

$$\geq F\left(x_{n-(n-1)}, x_{n-n}, \frac{t}{k^n}\right)$$

$$\geq F\left(x_1, x_0, \frac{t}{k^n}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_{n+1}, x_n, t) = 1.$$

Şimdi $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Böylece,

$$F(x_n, x_{n+p}, t) \geq F(x_n, x_{n+1}, t) * \dots * F(x_{n+p-1}, x_{n+p}, t)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, x_{n+p}, t) \geq 1 * \dots * 1 = 1$$

$\Rightarrow \{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir. Benzer şekilde, $y_{n-1} \geq y_n$ ve $x_{n-1} \leq x_n$ olup,

$x = y_{n-1}, y = x_{n-1}, u = y_n, v = x_n$ (7) ifadesinde yerine yazıldığında

$$F(H(y_{n-1}, x_{n-1}), H(y_n, x_n), kt) \geq$$

$$\max\{F(H(x_{n-1}, y_{n-1}), x_n, t) * F(H(y_n, x_n), y_{n-1}, t), F(H(y_n, x_n), y_n, t) * F(H(y_{n-1}, x_{n-1}), y_{n-1}, t)\}$$

$$F((y_n, y_{n+1}), kt) \geq$$

$$\max\{F(y_{n+1}, y_{n-1}, t) * F(y_{n+1}, y_{n-1}, t), F(y_n, y_{n-1}, t) * F(y_n, y_n, t)\}$$

$$= \max\{F(y_{n+1}, y_{n-1}, t) * F(y_{n+1}, y_n, t), F(y_n, y_{n-1}, t) * 1\}$$

$$= \max\{F(y_{n+1}, y_{n-1}, t) * F(y_{n+1}, y_n, t), F(y_n, y_{n-1}, t)\}$$

$$\geq F(y_{n-1}, y_n, t)$$

$$\Rightarrow F(y_n, y_{n+1}, t) \geq F\left(y_{n-1}, y_n, \frac{t}{k^1}\right)$$

$$\geq F\left(y_{n-2}, y_{n-1}, \frac{t}{k^2}\right)$$

$$\geq F\left(y_{n-3}, y_{n-2}, \frac{t}{k^3}\right)$$

$\vdots$

$$\geq F\left(y_{n-n}, x_{n-(n-1)}, \frac{t}{k^n}\right)$$

$$\geq F\left(y_0, y_1, \frac{t}{k^n}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} F(y_n, y_{n+1}, t) = 1.$$

Şimdi $\{y_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Böylece,

$$F(y_n, y_{n+p}, t) \geq F(y_n, y_{n+1}, t) * \dots * F(y_{n+p-1}, y_{n+p}, t)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} F(y_n, y_{n+p}, t) \geq 1 * \dots * 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} F(y_n, y_{n+p}, t) = 1.$$

Şimdi $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizilerinin X te Cauchy dizisi olduğu açıktır. X tam fuzzy metrik uzay olduğundan $x, y \in X$ vardır öyle ki,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \text{ve} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$$

dir. (6) denkleminde $n \rightarrow \infty$ giderken limitini aldığımızda

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} H(x_{n-1}, y_{n-1}) = H\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}, \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n-1}\right) = H(x, y)$$

ve

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} H(y_{n-1}, x_{n-1}) = H\left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_{n-1}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}\right) = H(y, x).$$

Bundan dolayı $x = H(x, y)$ ve $y = H(y, x)$ 'dir. Dolayısıyla H , X de bir bağlanmış (coupled) sabit noktaya sabittir.

4.3 $\mathcal{M}$ -Fuzzy Metrik uzayı üzerinde Sabit nokta Teoremleri

Tanım 4.3.1

$X \neq \emptyset$ keyfi bir küme, $*$ işlemi sürekli t-norm ve $\mathcal{M}$ de $X^3 \times (0, \infty)$ üzerinde bir fuzzy küme olsun. $\forall a, b, c, x \in X$ ve $s, t > 0$, için aşağıdaki şartlar sağlanırsa $(X, \mathcal{M}, *)$ üçlüsüne bir $\mathcal{M}$ - fuzzy metrik uzayı denir:

- i. $\mathcal{M}(a, b, c, t) > 0$,
- ii. $\mathcal{M}(a, b, c, t) = 1 \Leftrightarrow a = b = c$
- iii. $\mathcal{M}(a, b, c, t) = \mathcal{M}(p\{a, b, c\}, t)$ (p bir permütasyon fonk. olmak üzere)
- iv. $\mathcal{M}(a, b, x, t) * \mathcal{M}(x, c, c, s) \leq \mathcal{M}(a, b, c, t + s)$,
- v. $\mathcal{M}(a, b, c, \cdot) : (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ süreklidir.

Örnek 4.3.2

$X \neq \emptyset$ keyfi bir küme ve D, X üzerinde bir D -metrik olsun. $\forall a, b \in [0, 1]$ için $x * y = xy$ olsun. Her $t \in]0, \infty[$ ve her $a, b, c \in X$ için

$$\mathcal{M}(a, b, c, t) = \frac{t}{t + D(a, b, c)}$$

şeklinde tanımlansın. $(X, \mathcal{M}, *)$ bir $\mathcal{M}$ - fuzzy metrik uzay olduğunu gösterelim:

- i. $t > 0$ ve D - bir metrik olduğundan her $a, b, c \in X$ için $D(a, b, c) > 0$ dır.

Dolayısıyla

$$\mathcal{M}(a, b, c, t) = \frac{t}{t + D(a, b, c)} > 0$$

dır.

- ii. $\mathcal{M}(a, b, c, t) = 1 \Leftrightarrow t = t + D(a, b, c) \Leftrightarrow D(a, b, c) = 0 \Leftrightarrow a = b = c$.

$$\begin{aligned} \text{iii. } \mathcal{M}(a, b, c, t) &= \frac{t}{t + D(a, b, c)} = \frac{t}{t + D(a, c, b)} = \frac{t}{t + D(c, b, a)} \\ &= \frac{t}{t + D(c, a, b)} = \frac{t}{t + D(b, a, c)} = \frac{t}{t + D(b, c, a)} \end{aligned}$$

(D - bir metrik olduğundan) buradan

$$\mathcal{M}(a, b, c, t) = \mathcal{M}(p\{a, b, c\}, t)$$

dir.

$$\text{iv. } \mathcal{M}(a, b, x, t) * \mathcal{M}(x, c, c, s) \leq M(a, b, c, t + s),$$

yani;

$$\frac{t}{t + D(a, b, x)} \frac{s}{s + D(x, c, c)} \leq \frac{t + s}{t + s + D(a, b, c)}$$

olduğu gösterilmelidir. D - metrik tanımından

$$D(a, b, c) \leq D(a, b, x) + D(x, c, c)$$

dir.

$$\frac{t + s}{t} > 1, \frac{t + s}{s} > 1$$

olduğundan

$$\begin{aligned} D(a, b, c) &\leq \frac{t + s}{t} D(a, b, x) + \frac{t + s}{s} D(a, x, x) \\ \Rightarrow \frac{D(a, b, c)}{t + s} &\leq \frac{D(a, b, x)}{t} + \frac{D(a, x, x)}{s} \leq \frac{sD(a, b, x) + tD(a, x, x)}{st} \\ &\Rightarrow 1 + \frac{D(a, b, c)}{t + s} \leq 1 + \frac{sD(a, b, x) + tD(a, x, x)}{st} \\ &\Rightarrow \frac{t + s + D(a, b, c)}{t + s} \leq \frac{st + sD(a, b, x) + tD(a, x, x)}{st} \end{aligned}$$

olur. Diğer yandan

$$D(a, b, x).D(a, x, x) \geq 0$$

olduğundan

$$\frac{t + s + D(a, b, c)}{t + s} \leq \frac{st + sD(a, b, x) + tD(a, x, x)}{st}$$

bulunur ve dolayısıyla

$$\frac{st}{st + sD(a, b, x) + tD(a, x, x) + D(a, b, x).D(a, x, x)} \leq \frac{s + t}{t + s + D(a, b, c)}$$

$$\leq \frac{st + sD(a, b, x) + tD(a, x, x) + D(a, b, x).D(a, x, x)}{st}$$

$$\Rightarrow \frac{t}{t + D(a, b, x)} \cdot \frac{s}{s + D(a, x, x)} \leq \frac{t + s}{s + t + D(a, b, c)}$$

$$\Rightarrow \mathcal{M}(a, b, x, t) * \mathcal{M}(x, c, c, s) \leq \mathcal{M}(a, b, c, t + s)$$

elde edilir.

v. Her $a, b, c \in X$ için $t_0 > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{M}(a, b, c, t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{t}{t + D(a, b, c)}$$

$$= \frac{\lim_{t \rightarrow t_0} t}{\lim_{t \rightarrow t_0} t + D(a, b, c)}$$

$$= \frac{t_0}{t_0 + D(a, b, c)}$$

$$= \mathcal{M}(a, b, c, t_0).$$

O halde $(X, \mathcal{M}, *)$ bir $\mathcal{M}$ - fuzzy metrik uzaydır.

Tanım 4.3.3

$(X, \mathcal{M}, *)$ bir $\mathcal{M}$ - fuzzy metrik uzay olsun. X deki $\{x_n\}$ dizisi bir x e yakınsaması için gerek ve yeter şart $n \rightarrow \infty$ iken

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{M}(a, a, x_n, t) = 1$$

dir.

Tanım 4.3.4

$(X, \mathcal{M}, *)$ bir $\mathcal{M}$ - fuzzy metrik uzay olsun. X deki bir $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir eğer her bir $0 < \varepsilon < 1$ ve $t > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n, m > n_0$ için

$$\mathcal{M}(x_n, x_n, x_m, t) > 1 - \varepsilon$$

dır.

Tanım 4.3.5

$(X, \mathcal{M}, *)$ bir $\mathcal{M}$ - fuzzy metrik uzayının tam olması için gerek ve yeter şart her Cauchy dizisinin yakınsak olmasıdır.

4.4 Fuzzy Noktalar Kümesi Üzerinde Fuzzy Metrik

Tanım 4.4.1

$X \neq \emptyset$ keyfi bir küme ve $d_F: Fp(X) \times Fp(X) \rightarrow Fs^+(R)$ bir dönüşüm olsun. Eğer herhangi bir $\{(a, \lambda), (b, \gamma), (c, \rho)\} \subset Fp(X)$ için d_F dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa d_F ye $Fp(X)$ üzerinde tanımlanan bir fuzzy metrik; $(Fp(X), d_F)$ ye fuzzy metrik uzay; $d_F((a, \lambda), (b, \gamma))$ ye de iki fuzzy nokta arasında tanımlanan fuzzy uzaklık denir.

- i. $d_F((a, \lambda), (b, \gamma)) \geq 0$, $\forall \{(a, \lambda), (b, \gamma)\} \in Fp(X)$
- ii. $d_F((a, \lambda), (b, \gamma)) = 0 \Leftrightarrow a = b$ ve $\lambda = \gamma = 1$
- iii. $d_F((a, \lambda), (b, \gamma)) = d_F((b, \gamma), (a, \lambda))$,
- iv. $d_{FS}((a, \lambda), (c, \rho)) < d_F((a, \lambda), (b, \gamma)) + d_F((b, \gamma), (c, \rho))$.

Örnek 4.4.2

(X, d) bir metrik uzay olsun. $Fp(X)$ 'teki keyfi $(a, \lambda), (b, \gamma)$ iki fuzzy noktasının uzaklığı

$$d_F((a, \lambda), (b, \gamma)) = (d(a, b), \min\{\lambda, \gamma\})$$

olarak tanımlanırsa $(Fp(X), d_F)$ bir fuzzy metrik uzaydır. Yani;

- i. $Fp(X)$ te keyfi $(a, \lambda), (b, \gamma)$ iki fuzzy nokta olsun. d klasik bir metrik olduğundan $d(a, b) \geq 0$ 'dır. Buradan

$$d_F((a, \lambda), (b, \gamma)) = (d(a, b), \min\{\lambda, \gamma\})$$

negatif olmayan bir skalerdir.

- ii. $d_F((a, \lambda), (b, \gamma)) = 0 \Leftrightarrow d(a, b) = 0$ ve $\min\{\lambda, \gamma\} = 1$

$$\Leftrightarrow a = b \text{ ve } \lambda = \gamma = 1.$$

iii. Her $(a, \lambda), (b, \gamma) \in Fp(X)$ için,

$$\begin{aligned} d_F((a, \lambda), (b, \gamma)) &= (d(a, b), \min\{\lambda, \gamma\}) \\ &= (d(b, a), \min\{\gamma, \lambda\}) \\ &= d_F((b, \gamma), (a, \lambda)) \end{aligned}$$

dır.

iv. Her $\{(a, \lambda), (b, \gamma), (c, \rho)\} \subset Fp(X)$ için

$$\begin{aligned} d_{FS}((a, \lambda), (c, \rho)) &= (d(a, c), \min\{\lambda, \rho\}) \\ &< (d(a, b) + d(b, c), \min\{\lambda, \gamma, \rho\}) \\ &= (d(a, b), \min\{\lambda, \gamma\} + d(b, c), \min\{\gamma, \rho\}) \\ &= (d(a, b), \min\{\lambda, \gamma\}) + (d(b, c), \min\{\gamma, \rho\}) \\ &= d_F((a, \lambda), (b, \gamma)) + d_F((b, \gamma), (c, \rho)) \end{aligned}$$

olur.

4.5 Fuzzy 2-Metrik uzayı üzerinde Sabit nokta Teoremleri

Tanım 4.5.1

X keyfi bir küme, $*$ sürekli bir t-norm ve $F, X^3 \times [0, \infty)$ bir bulanık küme olsun. O zaman $\forall a, b, c, u \in X$ ve $t_1, t_2, t_3 > 0$ için aşağıdaki şartlar sağlanırsa $(X, F, *)$ üçlüsüne fuzzy 2-metrik uzayı denir.

- a) $F(a, b, c, 0) = 0$
- b) $F(a, b, c, t) = 1, t > 0$ ve üç noktadan en az ikisi eşit olmalı.
- c) $F(a, b, c, t) = F(a, c, b, t)$
- d) $F(a, b, c, t_1 + t_2 + t_3) \geq F(a, b, u, t_1) * F(a, u, c, t_2) * F(u, b, c, t_3)$
- e) $F(a, b, c, \cdot) : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ soldan süreklidir.

Tanım 4.5.2

$(X, F, *)$ bir fuzzy 2-metrik uzay olsun. O zaman fuzzy 2-metrik uzayının x_n dizisi $x \in X$ 'e yakınsar ancak ve ancak $\forall a \in X$ ve $t > 0, p > 0$ için

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(x_n + p, x_n, a, t) = 1$$

dir.

Tanım 4.5.3

Eğer X 'deki Cauchy dizisi X 'de yakınsak ise o zaman $(X, F, *)$ bir fuzzy 2-metrik uzayı tamdır denir.

Tanım 4.5.4

P ve $Q, (X, F, *)$ bir fuzzy metrik uzayının öz eşleşmeleri olsun. Bu iki eşleşmeler zayıf sıra bağımsızdır, $\forall x \in X$ ve $t > 0$ için

$$F(PQx, QPx, z, t) \geq F(Px, Qx, z, t).$$

Tanım 4.5.5

$(X, F, *)$ bir fuzzy 2-metrik uzayı ve P ve $Q, (X, F, *)$ bir fuzzy 2-metrik uzayının iki öz eşleşmeler olsun. Sonra P ve Q uyumludur ancak ve ancak

$$\forall t > 0, F(PQx_n, QPx_n, z, t) \rightarrow 1,$$

X 'in öyle bir $\{x_n\}$ dizisi olduğunda bazı $q \in X$ için $n \rightarrow \infty$ gibi, PQx_n, QPx_n her ikisi de q 'ya yakınsar.

Tanım 4.5.6

P ve $Q, (X, F, *)$ bir fuzzy 2-metrik uzayının öz eşleşmeleri olsun. Bir $x \in X$ noktası P ve Q 'nun çakışma (kesişim) noktası denir ancak ve ancak $P_x = Q_x$ o zaman $w = P_x = Q_x$ 'i P ve Q 'nun bir çakışma noktası denir.

Tanım 4.5.7

P ve Q, $(X, F, *)$ bir fuzzy 2-metrik uzayının öz eşleşmeleri olsun. X 'te öyle bir (x_n) dizisi vardır öyle ki $z \in X$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Q x_n = z$$

ve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(PQx_n, QP x_n, a, t) = 1$$

'i sağlar, o zaman bu iki öz eşleşmeleri alt uyumlu eşleşmeler denir.

Tanım 4.5.8

P ve Q öz eşleşmelerinin A tipinin alt uyumlu denilmesi için X 'te öyle bir (x_n) dizisi olmalıdır, öyle ki

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Q x_n = z$$

ise

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(PQx_n, QQx_n, a, t) = 1$$

ve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(PQx_n, PPx_n, a, t) = 1$$

sağlanır.

Lemma 4.5.9

$\forall a, b, c \in X$ için $F(a, b, c, .)$ azalmayandır.

Lemma 4.5.10

$(X, M, *)$ bir fuzzy 2-metrik uzayı olsun. $\forall x, y, z \in X$ ile $z \neq x, z \neq y$ ve $t > 0$ için

$$M(x, y, z, kt) \geq M(x, y, z, t)$$

olacak şekilde $k \in (0, 1)$ varsa o zaman $x = y$ dir.

Teorem 4.5.11

$\forall t \in [0, 1]$ için $t * t > t$ sürekli t-norm ile tanımlı dört öz eşleşmeli A, B, U ve V bir fuzzy 2-metrik uzayının $(X, F, *)$ kümesini düşünelim. (A, U) ve (B, V) ikilileri aynı kesişim noktalarına sahip A tipinin alt uyumlu ve $\forall x, y, z \in X, k \in (0, 1)$ için $AB = BA, BU = UB, UV = VU, AU = UA, AV = VA$, ve $t > 0$ olması durumunda,

$$F(Ux, Vy, z, kt) \geq \min \{F(Ax, By, z, t), F(Ax, Ux, z, t), F(Vx, By, z, t), F(Ux, Ay, z, t)\}. \quad (1)$$

O zaman A, B, U ve V 'nin X 'te bir tek ortak noktası vardır.

İspat:

(A, U) ve (B, V) ikilileri tip A 'nın alt uyumlu olduklarından, o zaman X 'te iki $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizisi vardır öyle ki $a \in X$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Ux_n = a,$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(AUx_n, UUx_n, z, t) = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F(UAx_n, UUx_n, z, t) = 1$$

sağlanır. Böylece,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(Aa, Ua, z, t) = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F(Ua, Aa, z, t) = 1$$

sahibiz ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} By_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Vy_n = b, \quad b \in X$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(BVy_n, VVy_n, z, t) = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(VBy_n, VVy_n, z, t) = 1$$

sağlanır. Dolayısıyla, $Aa = Ua$ ve $Bb = Vb$, burada a ve b , sırasıyla A , U ve B , V 'nin kesişim noktalarıdır. Şimdi $a = b$ olduğunu ispatlayalım. Bunun için, (1)'de $x = x_n$ ve $y = y_n$ alalım. O zaman,

$$F(Ux_n, Vy_n, z, kt) \geq \text{Min } F\{(Ax_n, By_n, z, t)\}, F(Ax_n, Ux_n, z, t), F(Vx_n, By_n, z, t), F(Ux_n, Ay_n, z, t)\}. \quad (2)$$

$n \rightarrow \infty$ limit alırsak,

$$F(a, b, z, kt) \geq \text{Min } F\{(a, b, z, t)\}, F(a, a, z, t), F(b, b, z, t), F(a, b, z, t)\} \text{ elde ederiz.}$$

Bu da, $\forall t > 0$ için $F(a, b, z, kt) \geq \text{Min } F(a, b, z, t)$ olduğunu gösterir.

Bu nedenle lemma 2 kullanarak, $a = b$. Bu da A , B , U ve V 'nin aynı kesişim noktasına sahip olduğunu göstermektedir. Daha sonra, $Aa = Ba$, $Ua = Va = a$ olduğunu ispatlayacağız.

Öncelikle (1)'de $x = a$ ve $y = y_n$ aldığımızda,

$$F(Ua, Vy_n, z, kt) \geq \text{Min } F\{(Aa, By_n, z, t)\}, F(Aa, Ua, z, t), F(Va, By_n, z, t), F(Ua, Ay_n, z, t)\} \text{ elde ederiz.}$$

$n \rightarrow \infty$ limit alırsak,

$$F(Ua, b, z, kt) \geq \text{Min } F\{(Aa, b, z, t)\}, F(Aa, Ua, z, t), F(b, b, z, t), F(Ua, b, z, t)\}$$

$$\geq \text{Min } F\{(Ua, b, z, t)\}, F(Ua, Ua, z, t), F(b, b, z, t), F(Ua, b, z, t)\} \quad (3).$$

$A = b$ olduğunda o zaman

$$F(Ua, b, z, kt) \geq F(Ua, b, z, t)$$

olur. Bu da $Ua = a$ verir.

i.e., $Ua = Aa = a$.

Şimdi (1)'de $x = x_n$ ve $y = a$ alalım,

$$F(Ux_n, Va, z, kt) \geq \text{Min } F\{(Ax_n, Ba, z, t)\}, F(Ax_n, Ux_n, z, t), F(Vx_n, Ba, z, t), F(Ux_n, Aa, z, t)\}$$

elde ederiz. $n \rightarrow \infty$ limit alırsak,

$$F(a, Va, z, kt) \geq \text{Min } F\{(a, Ba, z, t)\}, F(a, a, z, t), F(Va, Ba, z, t), F(a, Aa, z, t)\}$$

$$\geq \min \{F(a, a, z, t), F(a, a, z, t), F(Va, a, z, t), F(a, a, z, t)\} \quad (4)$$

elde ederiz.

Bu da bize $F(Va, a, z, kt) \geq \min F(Va, a, z, t)$ olduğunu gösterir. Burada $Va = a$ 'dan $Va = Ba = a$ olduğunu gösterir. Bundan dolayı, $Aa = Ua = Va = Ba = a$ olur. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Örnek 4.5.12

$X = [0, 2]$, $M(x, y, z) = e^{-d(x, y)/t}$, $(0 < t < \infty)$ burada $d(x, y) = |x - y|$ ve $*$ işlemi $a * b = \min\{a, b\}$ olarak verilen bir sürekli t-norm olsun. $(X, M, *)$ bir tam bulanık metrik uzay olduğu açıktır.

$A = 1$, $B = 2x + 5/7$, $S = x$, $T = 3x + 1/4$, X üzerinde öz eşleşmeler olsun.

$\{x_n\} = \{1 - 1/n\}_{n \in \mathbb{N}}$ X 'te bir dizi olsun.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S A x_n = S(1) \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} A x_n = A(1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A x_n = 1 \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} S x_n = 1 \text{ burada } 1 \in X.$$

A ve B reciprocally sürekli ve $\{y_n\} = \{1 + 1/n\}$ X 'te bir dizi olsun.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (T B y_n, B T y_n, t) = 1$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T y_n = 1$$

burada $1 \in X$.

B ve T , Z-asymptotically sürekli burada $z = 1$.

A , B , S ve T , X 'te bir tek sabit nokta sahip i.e., $x = 1$.

4.6 Fuzzy Metrik Uzaylarında α - Tipi Bağdaşabilir Fonksiyonlar için Sabit

Nokta Teoremleri

Tanım 4.6.1

$(X, F, *)$ tam bir fuzzy metrik uzay ve $\mathcal{A}, \mathcal{B}: X \rightarrow X$ iki fonksiyon olsun. Herhangi bir $z \in X$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{A}x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{B}x_n = z$$

olacak şekilde $\mathbb{X}$ de bir $\{x_n\}$ dizisi var ve $t > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(\mathcal{A}\mathcal{B}x_n, \mathcal{B}\mathcal{A}x_n, t) = 1$$

oluyorsa $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ bağdaşabilirdir denir.

Tanım 4.6.2

$(\mathbb{X}, F, *)$ tam bir fuzzy metrik uzay ve $\mathcal{A}, \mathcal{B}: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ iki fonksiyon olsun. Herhangi bir $z \in \mathbb{X}$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{A}x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{B}x_n = z$$

olacak şekilde $\mathbb{X}$ de bir $\{x_n\}$ dizisi var ve $t > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(\mathcal{A}\mathcal{B}x_n, \mathcal{B}\mathcal{B}x_n, t) = 1$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(\mathcal{B}\mathcal{A}x_n, \mathcal{A}\mathcal{A}x_n, t) = 1$$

oluyorsa $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$, α - Tipi bağdaşabilirdir denir.

Teorem 4.6.3

$(\mathbb{X}, F, *)$, $\forall t > [0,1]$ için $t * t \geq t$ ile verilen tam bir fuzzy metrik uzay ve $\mathcal{A}, \mathcal{B}: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ sürekli iki fonksiyon olsun.

$\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ bağdaşabilirdir $\Leftrightarrow \mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$, α - Tipi bağdaşabilirdir.

Teorem 4.6.4

$(\mathbb{X}, F, *)$, $\forall t > [0,1]$ için $t * t \geq t$ ile verilen tam bir fuzzy metrik uzay ve $\mathcal{A}, \mathcal{B}: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ iki fonksiyon olsun. $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ α - bağdaşabilir herhangi bir $z \in \mathbb{X}$ için

$$\mathcal{A}z = \mathcal{B}z \Rightarrow \mathcal{A}\mathcal{B}z = \mathcal{B}\mathcal{B}z = \mathcal{A}\mathcal{A}z$$

dir.

Teorem 4.6.5

$(\mathbb{X}, F, *)$, $\forall t > [0,1]$ için $t * t \geq t$ ile verilen tam bir fuzzy metrik uzay ve $\mathcal{A}, \mathcal{B}: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ iki fonksiyon olsun. $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ bağdaşabilir herhangi bir $z \in \mathbb{X}$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{A}x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{B}x_n = z$$

olacak şekilde $\mathbb{X}$ de bir $\{x_n\}$ dizisi varsa

a) Eğer $\mathcal{A}$, z de sürekli ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{B}x_n = \mathcal{A}z$$

b) Eğer $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ z de sürekli ise

$$\mathcal{A}\mathcal{B}z = \mathcal{B}\mathcal{A}z \text{ ve } \mathcal{A}z = \mathcal{B}z$$

koşulları sağlanır.

Teorem 4.6.6

$(\mathbb{X}, F, *)$, $\forall t \in [0,1]$ için $t * t \geq t$ ile verilen tam bir fuzzy metrik uzay olsun. $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{P}, \mathcal{Q}: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ fonksiyonlar olmak üzere

- i. $\mathcal{P}(\mathbb{X}) \subset \mathcal{A}\mathcal{B}(\mathbb{X}), \mathcal{Q}(\mathbb{X}) \subset \mathcal{S}\mathcal{T}(\mathbb{X})$,
- ii. $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}, \mathcal{S}\mathcal{T} = \mathcal{T}\mathcal{S}, \mathcal{B}\mathcal{P} = \mathcal{P}\mathcal{B}, \mathcal{Q}\mathcal{S} = \mathcal{S}\mathcal{Q}, \mathcal{Q}\mathcal{T} = \mathcal{T}\mathcal{Q}$,
- iii. $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{S}$ ve $\mathcal{T}$ sürekli,
- iv. $(\mathcal{P}, \mathcal{A}\mathcal{B})$ ve $(\mathcal{Q}, \mathcal{S}\mathcal{T})$ ikilileri α - tipi bağdaşabilir,
- v. $\forall x, y \in \mathbb{X}, \gamma \in (0,2)$ ve $t > 0$ için

$$F(\mathcal{P}x, \mathcal{Q}y, kt) \geq F(\mathcal{A}\mathcal{B}x, \mathcal{P}x, t) * F(\mathcal{S}\mathcal{T}y, \mathcal{Q}y, t) * F(\mathcal{S}\mathcal{T}y, \mathcal{P}x, \gamma t) \\ * F(\mathcal{A}\mathcal{B}x, \mathcal{Q}y, (2 - \gamma)t) * F(\mathcal{A}\mathcal{B}x, \mathcal{S}\mathcal{T}y, t)$$

olacak şekilde $k \in (0,1)$ varsa bu durumda $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{P}, \mathcal{Q}$ nun $\mathbb{X}$ de ortak tek bir sabit noktası vardır.

İspat:

Teorem 4.6.6 (i) den $\mathcal{P}(\mathbb{X}) \subset \mathcal{A}\mathcal{B}(\mathbb{X})$ olduğundan $\mathcal{P}x_0 = \mathcal{A}\mathcal{B}x_1$ olacak şekilde $x_1 \in \mathbb{X}$ ve $\mathcal{Q}(\mathbb{X}) \subset \mathcal{S}\mathcal{T}(\mathbb{X})$ olduğundan $\mathcal{Q}x_1 = \mathcal{S}\mathcal{T}x_2$ olacak şekilde $x_2 \in \mathbb{X}$ vardır. Bu şekilde devam ederek bir $\{y_n\}$ dizisi

$$y_{2n} = Px_{2n} = ABx_{2n+1}, \quad n = 0,1,2,3, \dots$$

$$y_{2n+1} = Qx_{2n+1} = STx_{2n+2}, \quad n = 0,1,2,3, \dots$$

şeklinde oluşturulabilir. Teorem 4.6.6 (v) den her $t > 0$ ve $\gamma = 1 - q, q \in (0,1)$ için

$$\begin{aligned}
F(y_{2n+1}, y_{2n+2}, kt) &= F(Px_{2n+1}, Qx_{2n+2}, kt) \\
&\geq F(ABx_{2n+1}, Px_{2n+1}, t) * F(STx_{2n+2}, Qx_{2n+2}, t) \\
&\quad * F(STx_{2n+2}, Px_{2n+1}, \gamma t) * F(ABx_{2n+1}, Qx_{2n+2}, (2 - \gamma)t) \\
&\quad * F(ABx_{2n+1}, STx_{2n+2}, t) \\
&= F(y_{2n}, y_{2n+1}, t) * F(y_{2n+1}, y_{2n+2}, t) \\
&\quad * F(y_{2n+1}, y_{2n+1}, (1 - q)t) * F(y_{2n}, y_{2n+2}, (1 + q)t) \\
&\quad * F(y_{2n}, y_{2n+1}, t) \\
&\geq F(y_{2n}, y_{2n+1}, t) * F(y_{2n+1}, y_{2n+2}, t) * 1 \\
&\quad * F(y_{2n}, y_{2n+1}, t) * F(y_{2n+1}, y_{2n+2}, (q)t) \\
&\quad * F(y_{2n}, y_{2n+1}, t) \\
&\geq F(y_{2n}, y_{2n+1}, t) * F(y_{2n+1}, y_{2n+2}, t) * F(y_{2n}, y_{2n+1}, (q)t) \quad (1)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
&F(y_{2n+1}, y_{2n+2}, kt) \\
&\geq F(y_{2n}, y_{2n+1}, t) * F(y_{2n+1}, y_{2n+2}, t) * F(y_{2n}, y_{2n+1}, (q)t)
\end{aligned}$$

elde edilir.

* sürekli ve t - norm ve $F(x, y, .)$ sürekli olduğundan (4.6.6) da $q \rightarrow 1$ için limit alınırsa

$$F(y_{2n+1}, y_{2n+2}, kt) \geq F(y_{2n}, y_{2n+1}, t) * F(y_{2n+1}, y_{2n+2}, t) \quad (2)$$

elde edilir.

Benzer şekilde

$$F(y_{2n+2}, y_{2n+3}, kt) \geq F(y_{2n+1}, y_{2n+2}, t) * F(y_{2n+2}, y_{2n+3}, t) \quad (3)$$

bulunur. (2) ve (3) den

$$F(y_{n+1}, y_{n+2}, kt) \geq F(y_n, y_{n+1}, t) * F(y_{n+1}, y_{n+2}, t), \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

eşitsizliği elde edilir.

Pozitif n ve p sayıları için

$$F(y_{n+1}, y_{n+2}, kt) \geq F(y_n, y_{n+1}, t) * F\left(y_{n+1}, y_{n+2}, \frac{t}{k^p}\right)$$

yazılabilir. O halde $p \rightarrow \infty$ için

$$F(y_{n+1}, y_{n+2}, kt) \rightarrow 1$$

olacağından

$$F(y_{n+1}, y_{n+2}, kt) \geq F(y_n, y_{n+1}, t)$$

bulunur. $\mathbb{X}$ uzayı tam olduğundan $\{y_n\}$ Cauchy dizisi ve $\{y_n\}$ bir $z \in \mathbb{X}$ noktasına yakınsar. O halde $n \rightarrow \infty$ iken

$$\mathcal{P}x_{2n}, Qx_{2n+1}, \mathcal{ST}x_{2n+2} \rightarrow z$$

elde edilir. $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ sürekli fonksiyonlar ve $(\mathcal{P}, \mathcal{AB})$ ikilisi α - tipi bağdaşabilir olduğundan Teorem 4.6.6 (i) den $n \rightarrow \infty$ iken

$$\mathcal{P}(\mathcal{AB})x_{2n+1} \rightarrow \mathcal{AB}z$$

ve

$$(\mathcal{AB})^2x_{2n+1} \rightarrow \mathcal{AB}z$$

elde edilir.

Benzer şekilde $\mathcal{S}$ ve $\mathcal{T}$ sürekli fonksiyonlar ve $(Q, \mathcal{ST})$ ikilisi α - tipi bağdaşabilir olduğundan Teorem 4.6.6 (i) den $n \rightarrow \infty$ iken

$$Q(\mathcal{ST})x_{2n+2} \rightarrow \mathcal{ST}z$$

ve

$$(\mathcal{ST})^2 x_{2n+2} \rightarrow \mathcal{ST}z$$

elde edilir. Teorem 4.6.6 (v) de

$$x = (\mathcal{AB})x_{2n+1}, y = x_{2n+2}$$

ve $\gamma = 1$ alınır

$$\begin{aligned} & F(\mathcal{P}(\mathcal{AB})x_{2n+1}, Qx_{2n+2}, kt) \\ & \geq F((\mathcal{AB})^2 x_{2n+1}, \mathcal{P}(\mathcal{AB})x_{2n+1}, t) * F(\mathcal{ST}x_{2n+2}, Qx_{2n+2}, t) \\ & \quad * F(\mathcal{ST}x_{2n+2}, \mathcal{P}(\mathcal{AB})x_{2n+1}, t) * F((\mathcal{AB})^2 x_{2n+1}, Qx_{2n+2}, t) \\ & \quad * F((\mathcal{AB})^2 x_{2n+1}, \mathcal{ST}x_{2n+2}, t) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için limit alınır

$$\begin{aligned} F(\mathcal{AB}z, z, kt) & \geq 1 * 1 * F(z, \mathcal{AB}z, t) * F(\mathcal{AB}z, z, t) * F(\mathcal{AB}z, z, t) \\ & \geq F(\mathcal{AB}z, z, t) \end{aligned}$$

bulunur. $\mathcal{AB}z = z$ olduğu görülür. Teorem 4.6.6 (v) de

$$x = \mathcal{P}x_{2n}, y = x_{2n+1}$$

ve $\gamma = 1$ alınır

$$\begin{aligned} & F(\mathcal{P}(\mathcal{P}x_{2n}), Qx_{2n+1}, kt) \\ & \geq F(\mathcal{AB}(\mathcal{P}x_{2n}), \mathcal{P}(\mathcal{P}x_{2n}), t) * F(\mathcal{ST}x_{2n+1}, Qx_{2n+1}, t) \\ & \quad * F(\mathcal{ST}x_{2n+1}, \mathcal{P}(\mathcal{AB})x_{2n+1}, t) * F((\mathcal{AB})^2 x_{2n+1}, Qx_{2n+1}, t) \\ & \quad * F(\mathcal{AB}(\mathcal{P}x_{2n}), \mathcal{ST}x_{2n+1}, t) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için limit alınır

$$\begin{aligned} F(\mathcal{P}z, z, kt) & \geq F(z, \mathcal{P}z, t) * F(z, z, t) * F(z, \mathcal{P}z, t) * F(z, z, t) * F(z, z, t) \\ & = F(z, \mathcal{P}z, t) * 1 * F(z, \mathcal{P}z, t) * 1 * 1 \\ & \geq F(\mathcal{P}z, z, t) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. O halde

$$\mathcal{AB}z = z = \mathcal{P}z$$

elde edilir. Şimdi $\mathcal{B}z = z$ olduğunu gösterelim. Teorem 4.6.6 (v) de

$$x = \mathcal{B}z, y = x_{2n+1}$$

ve $\gamma = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} & F(\mathcal{P}(\mathcal{B}z), Qx_{2n+1}, kt) \\ & \geq F(\mathcal{AB}(\mathcal{B}z), \mathcal{P}(\mathcal{B}z), t) * F(STx_{2n+1}, Qx_{2n+1}, t) \\ & \quad * F(STx_{2n+1}, \mathcal{P}(\mathcal{B}z), t) * F(\mathcal{AB}(\mathcal{B}z), Qx_{2n+1}, t) \\ & \quad * F(\mathcal{AB}(\mathcal{B}z), STx_{2n+1}, t) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\begin{aligned} F(\mathcal{B}z, z, kt) & \geq F(\mathcal{B}z, \mathcal{B}z, t) * F(z, z, t) * F(z, \mathcal{B}z, t) * F(\mathcal{B}z, z, t) * F(\mathcal{B}z, z, t) \\ & = 1 * 1 * F(z, \mathcal{B}z, t) * F(\mathcal{B}z, z, t) * F(\mathcal{B}z, z, t) \\ & \geq F(\mathcal{B}z, z, t) \end{aligned}$$

bulunur. $\mathcal{AB}z = z$ olduğunda $\mathcal{A}z = z$ elde edilir. Teorem 4.6.6 (v) de

$$x = z, y = STx_{2n+2}$$

ve $\gamma = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} & F(\mathcal{P}z, Q(ST)x_{2n+2}, kt) \\ & \geq F(\mathcal{AB}z, \mathcal{P}z, t) * F((ST)^2x_{2n+2}, Q(ST)x_{2n+2}, t) \\ & \quad * F((ST)^2x_{2n+2}, \mathcal{P}z, t) * F(\mathcal{AB}z, Q(ST)x_{2n+2}, t) \\ & \quad * F(\mathcal{AB}z, (ST)^2x_{2n+2}, t) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\begin{aligned} & F(z, STz, kt) \\ & \geq F(z, z, t) * F(STz, STz, t) * F(STz, z, t) * F(z, STz, t) * F(z, STz, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 * 1 * F(STz, z, t) * F(z, STz, t) * F(z, STz, t) \\
&\geq F(z, STz, t)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. O halde $STz = z$ olduğu görülür.

Teorem 4.6.6 (v) de

$$x = z, y = Qx_{2n+1}$$

ve $\gamma = 1$ alınırsa ve Teorem 4.6.6 (ii) den

$$\begin{aligned}
&F(\mathcal{P}z, Q(Qx_{2n+1}), kt) \\
&\geq F(\mathcal{A}Bz, \mathcal{P}z, t) * F(ST(Qx_{2n+1}), Q(Qx_{2n+1}), t) \\
&\quad * F(ST(Qx_{2n+1}), \mathcal{P}z, t) * F(\mathcal{A}Bz, Q(Qx_{2n+1}), t) \\
&\quad * F(\mathcal{A}Bz, ST(Qx_{2n+1}), t)
\end{aligned}$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\begin{aligned}
&F(z, Qz, kt) \\
&\geq F(z, z, t) * F(z, Qz, t) * F(z, z, t) * F(z, Qz, t) * F(z, z, t) \\
&= 1 * F(z, Qz, t) * 1 * F(z, Qz, t) * 1 \\
&\geq F(z, Qz, t)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. O halde $Qz = z$ dir. Dolayısıyla

$$STz = z = Qz$$

olduğu görülür.

Teorem 4.6.6 (v) de

$$x = z, y = Tz$$

ve $\gamma = 1$ alınırsa ve Teorem 4.6.6 (ii) den

$$\begin{aligned}
& F(\mathcal{P}z, Q(Tz), kt) \\
& \geq F(\mathcal{A}Bz, \mathcal{P}z, t) * F(ST(Tz), Q(Tz), t) \\
& \quad * F(ST(Tz), \mathcal{P}z, t) * F(\mathcal{A}Bz, Q(Tz), t) \\
& \quad * F(\mathcal{A}Bz, ST(Tz), t)
\end{aligned}$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\begin{aligned}
& F(z, Q(Tz), kt) \\
& \geq F(z, z, t) * F(Tz, Tz, t) * F(Tz, z, t) * F(z, Tz, t) * F(z, Tz, t) \\
& = 1 * 1 * F(Tz, z, t) * F(z, Tz, t) * F(z, Tz, t) \\
& \geq F(Tz, z, t)
\end{aligned}$$

bulunur. O halde $Tz = z$ dir. $STz = z$ olduğunda $Sz = z$ dir.

Bütün bu sonuçlar birleştirilirse

$$\mathcal{A}z = \mathcal{B}z = \mathcal{P}z = Tz = Qz = Sz = z$$

olduğu dolayısıyla z noktasının $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{P}, T, Q, S$ nin ortak sabit noktası olduğu görülür.

Kabul edelim ki $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{P}, T, Q, S$ nin başka bir ortak sabit noktası w ($z \neq w$) olsun. Teorem 4.6.6 (v) den $\gamma = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& F(\mathcal{P}z, Qw, kt) \\
& \geq F(\mathcal{A}Bz, \mathcal{P}z, t) * F(STw, Qw, t) \\
& \quad * F(STw, \mathcal{P}z, t) * F(\mathcal{A}Bz, Qw, t) \\
& \quad * F(\mathcal{A}Bz, STw, t)
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
& F(z, w, kt) \\
& \geq F(z, z, t) * F(w, w, t) * F(w, z, t) * F(z, w, t) * F(z, w, t) \\
& = 1 * 1 * F(w, z, t) * F(z, w, t) * F(z, w, t)
\end{aligned}$$

$$\geq F(z, w, t)$$

bulunur ve $z = w$ olduğu görülür. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 4.6.6 da $\mathcal{B} = \mathcal{T} = I_x$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.6.7

$(\mathbb{X}, F, *)$, $\forall t \in [0, 1]$ için $t * t \geq t$ ile verilen tam bir fuzzy metrik uzay olsun. $\mathcal{A}, \mathcal{S}, \mathcal{P}, \mathcal{Q}: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ fonksiyonlar olmak üzere

- i. $\mathcal{P}(\mathbb{X}) \subset \mathcal{A}(\mathbb{X}), \mathcal{Q}(\mathbb{X}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{X})$,
- ii. $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{S}$ sürekli,
- iii. $(\mathcal{P}, \mathcal{A})$ ve $(\mathcal{Q}, \mathcal{S})$ ikilileri α - tipi bağdaşabilir,
- iv. $\forall x, y \in \mathbb{X}, \gamma \in (0, 2)$ ve $t > 0$ için

$$F(\mathcal{P}x, \mathcal{Q}y, kt) \geq F(\mathcal{A}x, \mathcal{P}x, t) * F(\mathcal{S}y, \mathcal{Q}y, t) * F(\mathcal{S}y, \mathcal{P}x, \gamma t) \\ * F(\mathcal{A}x, \mathcal{Q}y, (2 - \gamma)t) * F(\mathcal{A}x, \mathcal{S}y, t)$$

olacak şekilde $k \in (0, 1)$ varsa bu durumda $\mathcal{A}, \mathcal{S}, \mathcal{P}, \mathcal{Q}$ nun $\mathbb{X}$ de ortak tek bir sabit noktası vardır. Teorem 4.6.6 da $\mathcal{A} = \mathcal{S} = \mathcal{B} = \mathcal{T} = I_x$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.6.8

$(\mathbb{X}, F, *)$, $\forall t \in [0, 1]$ için $t * t \geq t$ ile verilen tam bir fuzzy metrik uzay olsun. $\mathcal{P}, \mathcal{Q}: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ iki fonksiyon olmak üzere

$$\forall x, y \in \mathbb{X}, \gamma \in (0, 2) \text{ ve } t > 0 \text{ için}$$

$$F(\mathcal{P}x, \mathcal{Q}y, kt) \geq F(x, \mathcal{P}x, t) * F(y, \mathcal{Q}y, t) * F(y, \mathcal{P}x, \gamma t) \\ * F(x, \mathcal{Q}y, (2 - \gamma)t) * F(x, y, t)$$

olacak şekilde $k \in (0, 1)$ varsa bu durumda $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ nun $\mathbb{X}$ de ortak tek bir sabit noktası vardır. Teorem 4.6.6 da

$$\mathcal{A} = \mathcal{S}, \mathcal{P} = \mathcal{Q}, \mathcal{B} = \mathcal{T} = I_x$$

alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.6.9

$(\mathbb{X}, F, *)$, $\forall t \in [0,1]$ için $t * t \geq t$ ile verilen tam bir fuzzy metrik uzay olsun. $\mathcal{P}$ ve $\mathcal{S}$, $\mathbb{X}$ de α - tipi bağdaşabilir iki fonksiyon olmak üzere $\mathcal{P}(\mathbb{X}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{X})$ olsun. Eğer $\mathcal{S}$ sürekli ise

$$\forall x, y \in \mathbb{X}, \gamma \in (0,2) \text{ ve } t > 0 \text{ için}$$

$$F(\mathcal{P}x, \mathcal{P}y, kt) \geq F(\mathcal{S}x, \mathcal{P}x, t) * F(\mathcal{S}y, \mathcal{P}y, t) * F(\mathcal{S}y, \mathcal{P}x, \gamma t) \\ * F(\mathcal{S}x, \mathcal{P}y, (2 - \gamma)t) * F(\mathcal{S}x, \mathcal{S}y, t)$$

olacak şekilde $k \in (0,1)$ varsa bu durumda $\mathcal{P}$ ve $\mathcal{S}$ nin $\mathbb{X}$ de ortak tek bir sabit noktası vardır.

Örnek 4.6.10

$\mathbb{X} = [0,1]$ ve $a * b = a.b$ olsun. $d(x, y) = |x - y|$ şeklinde tanımlanan d metriği tarafından üretilen standart fuzzy metrik $\forall x, y \in \mathbb{X}, t \in [0,1]$ için

$$F(x, y, t) = \frac{t}{t + |x - y|}$$

ve

$$F(x, y, 0) = 0$$

olarak tanımlansın. $(\mathbb{X}, F, *)$ bir fuzzy metrik uzay olduğu aşıkardır. $\forall x \in \mathbb{X}$ için $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{P}, \mathcal{T}, \mathcal{Q}$ ve $\mathcal{S}$ fonksiyonları

$$\mathcal{A}x = x,$$

$$\mathcal{B}x = \frac{x}{2},$$

$$\mathcal{S}x = \frac{x}{5},$$

$$\mathcal{T}x = \frac{x}{3},$$

$$\mathcal{P}x = \frac{x}{6}$$

ve

$$Qx = 0$$

olarak tanımlansın. O halde

$$\mathcal{P}(\mathbb{X}) = \left[0, \frac{1}{6}\right] \subset \left[0, \frac{1}{2}\right] = \mathcal{AB}(\mathbb{X})$$

ve

$$\mathcal{Q}(\mathbb{X}) = \{0\} \subset \left[0, \frac{1}{5}\right] = \mathcal{ST}(\mathbb{X})$$

elde edilir ki Teorem 4.6.6 (i) in sağlandığı görülür. Eğer $k = \frac{1}{2}, t = 1$ ve $\gamma = 1$ alınırsa Teorem 4.6.6 (v) de sağlanır. Teorem 4.6.6 (ii)'nin ve Teorem 4.6.6 (iii)'ün de sağlandığı açıktır. Herhangi bir $0 \in \mathbb{X}$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{AB}x_n$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

olacak şekilde $\mathbb{X}$ de bir $\{x_n\}$ dizisi vardır ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(\mathcal{P}(\mathcal{AB})x_n, (\mathcal{AB})^2x_n, t) = 1$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(\mathcal{AB}(\mathcal{P})x_n, (\mathcal{P})^2x_n, t) = 1$$

sağlanır. Dolayısıyla $(\mathcal{P}, \mathcal{AB})$ α - tipi bağdaşabilir. Benzer şekilde herhangi bir $0 \in \mathbb{X}$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Qx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{ST}x_n$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

olacak şekilde $\mathbb{X}$ de bir $\{x_n\}$ dizisi vardır ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(Q(ST)x_n, (ST)^2x_n, t) = 1$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(ST(Q)x_n, (Q)^2x_n, t) = 1$$

sağlanır. Dolayısıyla (Q, ST) α - tipi bağdaşabilirdir. Böylece Teorem 4.6.6 (iv) de sağlandığından $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{P}, \mathcal{T}, \mathcal{Q}, \mathcal{S}$ nin $\mathbb{X}$ de ortak tek bir sabit noktası vardır.



BÖLÜM V

SONUÇ

Bu tezde, değişik şartlar ve tanımlar altında tanımlanan klasik anlamda metrik uzay, D-metrik uzay, S- metrik uzay vb. uzaylar üzerinde sabit nokta teoremleri ve fuzzy kümeler üzerinde tanımlanan fuzzy metrik, George ve Veeramani anlamında fuzzy metrik uzay, Non-Archimedean fuzzy metrik uzay, Kramosil ve Michalek fuzzy metrik uzay, $\mathcal{M}$ - fuzzy metrik uzay, fuzzy noktalar kümesi üzerinde fuzzy metrik uzay, fuzzy 2-metrik uzay ve fuzzy metrik uzaylarında α - tipi bağdaşabilir fonksiyonlar üzerinde tanımlanan sabit nokta teoremlerinin varlığını ve tekliğini irdledik.

Ayrıca bu çalışmada farklı metrik uzay tanımları ve fuzzy metrik uzay tanımları ele alınmış, bunlar arasındaki ilişkiler saptanmaya çalışılmıştır. Sabit nokta kavramı farklı uzaylar için her geçen gün farklı kavram ve şartlar altında geliştirilmektedir. Bu açıdan bakıldığında söz konusu tez, fuzzy metrik uzaylar ve sabit nokta teoremlerini çalışacak araştırmacılara yol gösterici nitelikte olacaktır.

KAYNAKLAR

- [1] Schwiezer, B., Sklar, A. (1960). Statiscial metric spaces. *Paci.c J. Math.* **10**, 313-334.
- [2] Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Inform and Control.* **8**, 338-35.
- [3] Turksen, I. B. (1986). Interval valued fuzzy sets based on normal forms. *Fuzzy sets and Systems.* **20**, 191–210.
- [4] Kaleva, O., Seppo, S. (1984). On fuzzy metric spaces. *Fuzzy sets and systems.* **12.(3)** , 215-229.
- [5] Felbin, C. (1992). Finite dimensional fuzzy normed linear space. *Fuzzy Sets and systems.* **48(2)**, 239-248.
- [6] George, A., Veeramani, P. (1994). On some results in fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets and System.* **64**, 395-399.
- [7] Gregori, V., Salvador, R. (2000). Some properties of fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems.* **115(3)**, 485-489.
- [8] Hadzic O., Pap, E. (2002). A fixed point theorem for multivalued mapping in propbalitistic metric spaces and an application in fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets and Systems.* **127**, 333-344
- [9] Diamond, P., Kloeden, P. E. (1994). Metric spaces of fuzzy sets: theory and applications. Singapore: World scientific.
- [10] Boxer, L. (1997). On Hausdorff-like metrics for fuzzy sets. *Pattern Recognition Letters.* **18(2)**, 115-118.
- [11] Brass, P. (2002). On the nonexistence of Hausdorff-like metrics for fuzzy sets. *Pattern Recognition Letters.* **23(1)**, 39-43.

- [12] Kramosil, I., Michalek, J. (1975). Fuzzy metric and statistical metric space, *Kybernetika*. **11**, 336-344.
- [13] Pu, B.M., Liu, Y. M. (1980). Fuzzy topology I: Neighborhood structure of a fuzzy point and Moore-Smith convergence, *J. Math. Anal. Appl.* **76**, 517-599.
- [14] Xia, Z.-Q., Guo, F. (2004). Fuzzy metric spaces. *Journal of Applied Mathematics and Computing*. **16(2)**, 371-381.
- [15] Chang, C. L. (1968). Fuzzy topological spaces. *Journal of mathematical Analysis and Applications*. **24(1)**, 182-190.
- [16] Rahmat, M. R. S., Noorani, M. S. M. (2008). Product of fuzzy metric spaces and fixed point theorems. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*. **3(16)**, 703-712.
- [17] Grabiec, M. (1988). Fixed points in fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets and Systems*. **27**, 385-389.
- [18] Aage, C. T., Choudhury, B. S., Das, K. (2017). Some fixed point results in fuzzy metric spaces using a control function. *Surveys in Mathematics and its Applications*. **12**, 23 – 34.
- [19] Choudhury, B. S. Das, K. (2008). A new contraction principle in Menger spaces, *Acta Mathematica Sinica, English Series*. **24(8)**, 1379-1386.
- [20] Mehra, S. (2012). Fixed Point Theorems in Non-Archimedean Fuzzy Metric Spaces, *International Journal of Applied Mathematical Research*. **(2)**, 220-233.
- [21] Sedghi, S., Shobe, N. (2006). Fixed point theorem in M-fuzzy metric spaces with property (E). *Advances in Fuzzy Mathematics*. **1(1)**, 55-65.
- [22] Sedghi S., Zhou, H., Shobe, N. (2007). A Common Fixed Point Theorems in D^* – Metric Spaces. *Hindawi Publishing Corporation*, 1-13.
- [23] Sedghi, S., Shobe, N., Aliouche, A., (2012). A generalization of fixed point theorems in S-metric spaces, *Mat. Vesnik*. **64(3)**, 258-266.

- [24] Mishra, S.N., Sharma, N., Singh, S. L. (1994). Common fixed points of mapson fuzzy metric spaces. *Internat. J. Math. Sci.*, **17**, 253-258.
- [25] Cho, Y. J. (1997). Fixed points in fuzzy metric spaces. *J. Fuzzy Math*, **4**, 949-962.
- [26] Sharma, S. (2002). Common fixed point theorems in fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*. **127**, 345-352.
- [27] Çınar M., Fuzzy metrik uzaylar, Yüksek lisans tezi, Yıldız Teknik üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, 2015.
- [28] Sangurlu, M., Fuzzy metrik uzaylarda ortak sabit nokta teoremleri üzerine, Ankara üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 2011.
- [29] Yıldız, I., Şahin, M., Uluçay, V. (2017). Common fixed point theorems on fuzzy soft scalars. *Asian Journal of Mathematics and Computer Research*, 254-262.
- [30] Uluçay, V., Şahin, M., Olgun, N., Kılıçman, A. (2016). On Soft Expert Metric Spaces. *Malaysian journal of mathematical sciences*. **10(2)**, 221-231.
- [31] Gregori, V., Miñana, J. J., Miravet, D. (2019). Extended Fuzzy Metrics and Fixed Point Theorems. *Mathematics*. **7(3)**, 303.
- [32] Phiangsungnoen, S. (2019, April). Some New Fuzzy Fixed Point Theorems for Fuzzy Contractive Mappings in Hausdorff Fuzzy Metric Spaces. In *2018 International Conference on Control, Artificial Intelligence, Robotics & Optimization (ICCAIRO)* (159-164). IEEE.
- [33] Suantai, S., Cho, Y. J., Tiammee, J. (2019). Common fixed points for generalized ψ -contractions in weak non-Archimedean fuzzy metric spaces. *Applied General Topology*. **20(1)**, 1-18.
- [34] Al-Mazrooei, A. E., Ahmad, J. (2019). Fixed point theorems for fuzzy mappings with applications. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*. **36(4)**, 3903-3909.

- [35] Gregori, V., Miñana, J.J., Miravet, D. (2019). Fuzzy partial metric spaces. *International Journal of General Systems*. **48(3)**, 260-279.
- [36] Tiwari, V., Som, T. (2019). Fixed Points for (ϕ, ψ) -Contractions in Menger Probabilistic Metric Spaces. In *Advances in Mathematical Methods and High Performance Computing* (201-208). Springer, Cham.
- [37] Wang, G., Zhu, C., Wu, Z. (2019). Some new coupled fixed point theorems in partially ordered complete Menger probabilistic G-metric spaces. *Journal of Computational Analysis & Applications*. **27(1)**.
- [38] Mahmood, Q., Shoaib, A., Rasham, T., Arshad, M. (2019). Fixed Point Results for the Family of Multivalued F-Contractive Mappings on Closed Ball in Complete Dislocated b-Metric Spaces. *Mathematics*. **7(1)**, 56.
- [39] Sadabadi, N. B., Haghi, R. H. (2018). Fixed point theorems of integral contraction type mappings in fuzzy metric space. *SeMA Journal*. **75(3)**, 445-456.
- [40] Cho, Y. J., Rassias, T. M., Saadati, R. (2018). Generalized Distances and Fixed Point Theorems in Fuzzy Metric Spaces. In *Fuzzy Operator Theory in Mathematical Analysis*. (155-176). Springer, Cham.
- [41] Cho, Y. J., Rassias, T. M., Saadati, R. (2018). Fixed Point Theorems in Fuzzy Metric Spaces. In *Fuzzy Operator Theory in Mathematical Analysis*. (69-153). Springer, Cham.
- [42] Sedghi, S., Shobkolaei, N., Došenović, T., Radenović, S. (2018). Suzuki-type of common fixed point theorems in fuzzy metric spaces. *Mathematica Slovaca*. **68(2)**, 451-462.
- [43] Cho, Y. J., Rassias, T. M., Saadati, R. (2018). Fixed Points in Non-Archimedean Fuzzy Metric Spaces. In *Fuzzy Operator Theory in Mathematical Analysis*. (347-381). Springer, Cham.
- [44] Dshalalow, J. and H., (2000). *Real Analysis*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton.

- [45] Karayılan, H. (2000), w- uzaklık fonksiyonu ve sabit nokta teoremleri, Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, s.3–20, Edirne.
- [46] Matthews, S.G. (1992). Partial Metric Topology, Research Report 212, Department of Computer Science University Of Warwick.
- [47] Matthews, S.G. (1994). Partial Metric topology in Proceedings of the 8th Summer Conference at Queens College, S. Andima, Ed., 728 of Papers on General Topology and Applications, Annals of the New York Academy of Sciences, 183-197.
- [48] Şahin, M. (2000). Genelleştirilmiş σ -cebirleri ve genelleştirilmiş bulanık ölçümler, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Trabzon.