

FUZZY METRİK UZAYLARI

Yasemin AKMAN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**OCAK 2007
ANKARA**

Yasemin AKMAN tarafından hazırlanan FUZZY METRİK UZAYLARI adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Cemil YILDIZ

Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Haydar EŞ

Üye : Prof. Dr. Cemil YILDIZ

Üye : Prof. Dr. Bahri TURAN

Üye : Doç. Dr. Nurhayat İSPİR

Üye : Doç. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU

Tarih : 29/01/2007

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Yasemin AKMAN

FUZZY METRİK UZAYLARI**(Yüksek Lisans Tezi)****Yasemin AKMAN****GAZİ ÜNİVERSİTESİ****FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ****Ocak 2007****ÖZET**

Bu çalışmada bazı fuzzy metrik uzay tanımları incelenmiştir. Tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde girişe yer verilmiştir. İkinci bölümde fuzzy küme ve fuzzy kümeler ile ilgili bazı tanım ve teoremler ele alınmıştır. Fuzzy topolojik uzay ve fuzzy kompakt uzay tanımları verilmiştir. Üçüncü bölümde fuzzy metrik uzay-I tanımı incelenmiş ve her metrik uzayın fuzzy metrik uzay olduğu gösterilmiştir. Fuzzy metrik-I tarafından üretilen topoloji ve tam fuzzy metrik uzay tanımları verilmiştir. Ayrıca her fuzzy metrik uzayın Hausdorff uzayı olduğu ispatlanmıştır. Dördüncü bölümde fuzzy metrik uzay-II tanımı ve metrik uzaydaki bazı temel kavramlar fuzzy metrik uzay-II de verilmiştir. Son olarak verilen bu iki fuzzy metrik uzay arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Bilim Kodu : 204.1.132
Anahtar Kelimeler : Fuzzy küme, fuzzy metrik uzay, tam fuzzy metrik uzay
Sayfa Adedi : 63
Tezin Yöneticisi : Prof. Dr. Cemil YILDIZ

FUZZY METRIC SPACES**(M.Sc. Thesis)****Yasemin AKMAN****GAZİ UNIVERSITY****INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY****January 2007****ABSTRACT**

In this study, definitions of some fuzzy metric spaces are investigated. The thesis consists of four sections. In the first part the introduction takes places. In the second part fuzzy set and some definitions and theorems related to fuzzy sets are studied. Also fuzzy topological space and fuzzy compact space are given. In the third part definition of the fuzzy metric space-I is investigated and it is shown that every metric space is fuzzy metric space. Definitions of the topology induced by fuzzy metric-I and complete fuzzy metric space are given. Also it is proven that every fuzzy metric space is a Hausdorff space. In the last part definition of fuzzy metric space-II and some basic concepts in the metric spaces are given in the fuzzy metric space-II. Finally, relations between these two fuzzy metric spaces are investigated.

Science Code : 204.1.132**Key Words : Fuzzy set, fuzzy metric space, complete fuzzy metric space****Page Number: 63****Adviser : Prof. Dr. Cemil YILDIZ**

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren Sayın Hocam Prof. Dr. Cemil YILDIZ 'a, manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme ve eşim Akif AKMAN 'a teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	.v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. Fuzzy Küme ve Fuzzy Kümeler ile İlgili İşlemler.....	3
2.2. Fuzzy Topolojik Uzaylar ve Fuzzy Topolojik Uzaylarda Temel Kavramlar.....	9
2.3. Fuzzy Kümelerinin Görüntü ve Ters Görüntü Kavramları.....	19
3. FUZZY METRİK UZAYLAR-I.....	22
3.1. Fuzzy Metrik Uzay-I ve Özellikleri.....	22
3.2. Fuzzy Metrik-I Tarafından Üretilen Topoloji ve Özellikleri.....	31
4. FUZZY METRİK UZAYLAR-II.....	46
4.1. Fuzzy Metrik Uzay-II Tanımı ve Temel Kavramlar.....	46
4.2. Fuzzy Metrik-II Tarafından Üretilen Topoloji ve Özellikleri.....	49
KAYNAKLAR.....	62
ÖZGEÇMİŞ.....	63

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$\Rightarrow$	Gerektirir
$\Leftarrow$	Yeterlidir
$\Leftrightarrow$	Çift yönlü gerektirme
I^X	X den I ya tanımlanan fonksiyonların kümesi
f_A	A fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu
τ	Fuzzy topolojisi
κ	Fuzzy kapalılar ailesi
A^0	A fuzzy kümesinin içi
$\overline{A}$	A fuzzy kümesinin kapanışı
A^c	A fuzzy kümesinin tümleyeni
$N(p)$	p fuzzy noktasının fuzzy komşuluklar ailesi
β	τ fuzzy topolojisi için taban
$E(p)$	p fuzzy noktasının fuzzy komşuluklar tabanı
φ	τ fuzzy topolojisi için alt taban
β_p	p fuzzy noktasının yerel tabanı
$ X $	X kümesinin kardinalitesi
$\omega(X, \tau)$	X fuzzy topolojik uzayının ağırlığı
$\chi(p, (X, \tau))$	p fuzzy noktasının karakteri
N_0	Alef sıfır
$*$	İkili işlem
M	Fuzzy metrik-I
$(X, M, *)$	Fuzzy metrik uzay-I
d	Metrik

Simgeler**Açıklama** (X, d)

Metrik uzay

 $B(x, r, t)$

Fuzzy metrik uzay-I de açık yuvar

 $B[x, r, t]$

Fuzzy metrik uzay-I de kapalı yuvar

 τ_M

Fuzzy metrik-I tarafından üretilen topoloji

 μ_X

Fuzzy metrik-II

 (I^X, μ_X)

Fuzzy metrik uzay-II

 $S(A, r)$

Fuzzy metrik uzay-II de F-açık yuvar

 $\overline{S}(A, r)$

Fuzzy metrik uzay-II de F-kapalı yuvar

 G'

G nin F-türetilmiş kümesi

 $d(A, G)$

A nın G ye uzaklığı

 $\overline{G}$

G nin F-kapanışı

 $F_{\text{int}}(G)$

G nin F-içi

 $F_{\text{ext}}(G)$

G nin F-dışı

1.GİRİŞ

Cantor tarafından 1879 yılında yapılan küme tanımının ardından matematikte incelenen her konuda kesinlik aranmıştır. Bu sebeple, incelenen konular karşısında iki değerli mantığa göre düşünülmüştür. Klasik küme tanımına göre bir şey ya doğru yada yanlış (ya var yada yok, ya beyaz yada siyah, ya 1 yada 0)'dır. Ancak günlük hayatımızdaki bir çok olay bu şekilde açıklanamayacak kadar karmaşıktır. Yani siyah ile beyaz arasında grinin tonları vardır. Örneğin Cantor'un yaptığı küme tanımına göre yaşlı insanların kümesini oluşturmak istesek bu kümenin elemanları değişik insanlar tarafından farklı şekillerde oluşturulacaktır. Çünkü birine göre 90 yaşında bir insan yaşlı iken başka birine göre 65 yaşında bir insan yaşlı olacaktır. Böyle bir durum karşısında kesin bir yargı yoktur.

Görüldüğü gibi iki değerli mantığa dayanan matematik kesinlik göstermeyen olaylar karşısında yetersiz kalmıştır. Bu sebeple 1879 yılında Cantor tarafında verilen küme tanımı 1965 yılında Zadeh tarafından fuzzy (belirtisiz) küme kavramı tanımlanarak genişletilmiştir. Zadeh'in kesinlik aramayan mantığı yalnızca matematikte kullanılmakla sınırlı kalmayıp istatistikte, fizikte, astronomide, endüstride, mühendislikte, genetikte ve daha bir çok alanda kullanılır olmuştur. Bunların doğal bir sonucu olarak matematiğin fuzzy küme kavramına göre yeniden düzenlenmesi gereksinimi ortaya çıkmış ve bu düzenleme ile birlikte bir çok yeni makale yayınlanmıştır.

Çalışmamızın ikinci bölümünde Zadeh [1]'in fuzzy küme tanımı, fuzzy küme ile ilgili temel kavramları ve bu kavramların bazı özellikleri verilmiştir. Chang [2] ve Nanda [3]'nın ortaya koyduğu fuzzy topolojik uzay tanımı ve bazı özellikleri gösterilmiş, kompakt fuzzy topolojik uzay tanımı yapılmıştır. Ayrıca fonksiyonlar yardımı ile bir fuzzy kümeden nasıl bir fuzzy küme oluşturulacağı gösterilmiştir.

Tezimizin üçüncü bölümünde 1994 yılında A. George ve P. Veeramani [4] tarafından verilen fuzzy metrik uzay kavramı ve standart d metriğinin oluşturduğu fuzzy metrik

tanımı verilmiştir. Fuzzy metrik tarafından üretilen topoloji tanımlanarak metrik uzaydaki gibi açık ve kapalı yuvar tanımları yapılmıştır. Her açık yuvarın açık bir küme, her kapalı yuvarında kapalı bir küme olduğu gösterilmiştir. Bu tanımlar ile fuzzy metrik uzayın Hausdorff uzayı olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca fuzzy metrik uzayda dizi ve Cauchy dizi tanımları yapılarak reel sayılar kümesinin tam fuzzy metrik uzay olduğu gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde ise K. Chakrabarty, R. Biswas ve S. Nanda [5] tarafından 1998 yılında tanımlanan fuzzy metrik uzay incelenmiştir. Fuzzy metrik uzayda yakınsaklık, süreklilik, değme noktası, yığılma noktası, izole nokta, iç nokta ve dış nokta gibi kavramların tanımları verilmiştir. Bu fuzzy metrik uzayda açık yuvar, açık küme, kapalı yuvar ve kapalı küme tanımları yapılmıştır. Ayrıca fuzzy metrik kullanılarak fuzzy kümeler ailesi üzerinde bir topoloji oluşturulabileceği gösterilmiştir. Sonuç olarak tanımlanan iki fuzzy metrik arasında bir ilişki olup olmadığı araştırılmış ancak kesin bir yargıya ulaşılamamıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Fuzzy Küme ve Fuzzy Kümeler ile İlgili İşlemler

2.1.1. Tanım

X boştan farklı herhangi bir küme ve $I=[0,1]$ olmak üzere X 'den I 'ya tanımlanan bütün fonksiyonların kümesini I^X ile gösterelim. I^X 'in her bir elemanına X 'in bir fuzzy kümesi denir [1].

2.1.2. Tanım

$X \neq \emptyset$ ve $I = [0,1]$ olmak üzere $f_A : X \rightarrow I$ üyelik fonksiyonu ile karakterize edilen $A = \{(x, f_A(x)) : x \in X\} \subset X \times I$ kümesine X 'in bir A fuzzy alt kümesi denir. Bundan sonra zaman zaman f_A yerine A , $f_A(x)$ yerine $A(x)$ alınacaktır [1].

2.1.3. Tanım

X boştan farklı herhangi bir küme olmak üzere X 'deki x_α fuzzy kümesinin $x_\alpha : X \rightarrow I$ üyelik fonksiyonu

$$x_\alpha(y) = \begin{cases} \alpha, & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}$$

şeklinde tanımlı ise x_α 'ya X 'de fuzzy noktası denir. Burada $x \in X$ noktasına x_α fuzzy noktasının desteği (dayanağı) ve $\alpha \in (0,1]$ sayısına x_α fuzzy noktasının değeri denir [6]. Bundan sonra fuzzy noktasını x_α yerine p ile göstereceğiz.

2.1.4. Tanım

X boştan farklı herhangi bir küme, p X 'de bir fuzzy noktası ve A X 'in bir fuzzy kümesi olsun. Eğer her $x \in X$ için $p(x) \leq A(x)$ ise p , A 'ya aittir (A , p 'yi içerir) denir ve $p < A$ ile gösterilir.

2.1.5. Tanım

X ve $\emptyset$ kümeleri birer fuzzy kümesi olup

$$\forall x \in X \text{ için } f_X(x) = 1 \Rightarrow X = \{(x,1) : x \in X\}$$

$$\forall x \in X \text{ için } f_{\emptyset}(x) = 0 \Rightarrow \emptyset = \{(x,0) : x \in X\}$$

şeklinde ifade edilir [2]. Buradan her klasik anlamdaki kümenin bir fuzzy kümesi olduğu sonucu çıkar.

Kümeler teorisinde bilinen kapsama " $\subset$ ", eşitlik " $=$ ", birleşim " $\cup$ " ve kesişim " $\cap$ " işlemleri fuzzy kümelerinde sırasıyla $\leq$, $=$, $\vee$, $\wedge$ işaretleri kullanılarak aşağıdaki gibi tanımlanır.

2.1.6. Tanım

X 'deki herhangi iki fuzzy küme A ve B olsun. A ve B 'nin üyelik fonksiyonları sırasıyla f_A ve f_B olmak üzere, her $x \in X$ için;

$$(1) A \leq B \Leftrightarrow f_A(x) \leq f_B(x)$$

$$(2) A = B \Leftrightarrow f_A(x) = f_B(x)$$

$$(3) A \vee B = C \Leftrightarrow f_C(x) = \max\{f_A(x), f_B(x)\}$$

$$(4) A \wedge B = D \Leftrightarrow f_D(x) = \min\{f_A(x), f_B(x)\}$$

$$(5) A^c \Leftrightarrow f_{A^c}(x) = 1 - f_A(x)$$

şeklinde tanımlanır [2].

2.1.7. Tanım

X'deki fuzzy kümelerin bir ailesi $\{A_i\}_{i \in I}$ olsun. Buna göre birleşim ve kesişim işlemlerinin genelleştirilmiş hali

$$(1) C = \bigvee_{i \in I} A_i \Leftrightarrow f_C(x) = \sup_{i \in I} \{f_{A_i}(x)\}$$

$$(2) D = \bigwedge_{i \in I} A_i \Leftrightarrow f_D(x) = \inf_{i \in I} \{f_{A_i}(x)\}$$

şeklinde tanımlıdır [2].

2.1.8. Tanım

A ve B, X'deki herhangi iki fuzzy küme olmak üzere A ve B fuzzy kümelerinin farkı

$$A - B = A \wedge B^c \Leftrightarrow f_{A-B}(x) = \min\{f_A(x), f_{B^c}(x)\}$$

fuzzy kümesi olarak tanımlanır [2].

2.1.1. Örnek

$X=\{a,b\}$ ve $I=[0,1]$ olmak üzere X üzerinde iki fuzzy küme $A=\{(a/0,3),(b/0,5)\}$ ve $B=\{(a/0,2),(b/0,7)\}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $A \vee B$, $A \wedge B$, A^c ve $A-B$ fuzzy kümeleri nedir?

Çözüm

A ve B fuzzy kümelerinin her $x \in X$ için üyelik fonksiyonlarının değerleri sırasıyla $f_A(x)$ ve $f_B(x)$ olsun. Buna göre $a \in X$ için $f_A(a)=0,3$ ve $f_B(a)=0,2$, $b \in X$ için $f_A(b)=0,5$ ve $f_B(b)=0,7$ 'dir.

$$A \vee B = C \Leftrightarrow f_C(x) = \max\{f_A(x), f_B(x)\}$$

$$\Leftrightarrow f_C(a)=0,3 \text{ ve } f_C(b)=0,7$$

$$\Leftrightarrow A \vee B = \{(a/0,3),(b/0,7)\}$$

$$A \wedge B = D \Leftrightarrow f_D(x) = \min\{f_A(x), f_B(x)\}$$

$$\Leftrightarrow f_D(a)=0,2 \text{ ve } f_D(b)=0,5$$

$$\Leftrightarrow A \wedge B = \{(a/0,2),(b/0,5)\}$$

$$A^c \Leftrightarrow f_{A^c}(x) = 1 - f_A(x)$$

$$\Leftrightarrow f_{A^c}(a)=0,7 \text{ ve } f_{A^c}(b)=0,5$$

$$\Leftrightarrow A^c = \{(a/0,7),(b/0,5)\}$$

$$A - B = A \wedge B^c \Leftrightarrow f_{A-B}(x) = \min\{f_A(x), f_{B^c}(x)\}$$

$$\Leftrightarrow f_{A-B}(a)=0,3 \text{ ve } f_{A-B}(b)=0,3$$

$$\Leftrightarrow A-B = \{(a/0,3),(b/0,3)\}$$

2.1.1. Teorem

X’de iki fuzzy küme A ve B olmak üzere

- (i) $A \vee B$ fuzzy kümesi A ve B’yi ihtiva eden en küçük fuzzy kümedir.
- (ii) $A \wedge B$ fuzzy kümesi A ve B kümeleri tarafından ihtiva edilen en büyük fuzzy kümedir [7].

İspat

(i) A ve B fuzzy kümelerinin üyelik fonksiyonları sırasıyla f_A ve f_B olsun. $A \vee B = C \Leftrightarrow f_C(x) = \max\{f_A(x), f_B(x)\}$ olduğundan $A \leq C$ ve $B \leq C$ ’dir. Kabul edelim ki A ve B’yi ihtiva eden en küçük fuzzy küme D olsun. D fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu f_D olmak üzere $A \leq D$ olduğundan $f_A(x) \leq f_D(x)$ ve $B \leq D$ olduğundan $f_B(x) \leq f_D(x)$ ’dir. Buradan

$$\max\{f_A(x), f_B(x)\} \leq f_D(x)$$

$$\Rightarrow f_{A \vee B}(x) = f_C(x) \leq f_D(x)$$

$A \vee B = C$ fuzzy kümesi A ve B’yi ihtiva eden bir küme olup kabulden dolayı

$$f_A(x) \leq f_D(x) \leq f_C(x) \text{ ve } f_B(x) \leq f_D(x) \leq f_C(x)$$

$$\Rightarrow f_D(x) \leq f_C(x)$$

O halde her $x \in X$ için $f_C(x) = f_D(x)$ olup $C = D$ ’dir. Buna göre A ve B’yi ihtiva eden en küçük fuzzy küme $A \vee B$ ’dir.

(ii) (i) şıkkına benzer şekilde ispat yapılır.

2.1.1. Özellikler

X'deki fuzzy kümeler A, B ve C olmak üzere

$$(i) A \vee \emptyset = A, A \wedge \emptyset = \emptyset, A \vee X = X, A \wedge X = A$$

$$(ii) A \vee B = B \vee A, A \wedge B = B \wedge A, A \vee A = A = A \wedge A$$

$$(iii) A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C, A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$$

$$(iv) A \leq B \Rightarrow A \vee B = B, A \leq B \Rightarrow A \wedge B = A$$

$$(v) A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C), A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

dir [7].

2.1.2. Özellikler

A ve B, X'de iki fuzzy küme olmak üzere

$$(i) A - \emptyset = A$$

$$(ii) \emptyset^c = X, X^c = \emptyset, (A^c)^c = A$$

$$(iii) A \leq B \Leftrightarrow B^c \leq A^c$$

$$(iv) (A \wedge B)^c = A^c \vee B^c, (A \vee B)^c = A^c \wedge B^c$$

dir [7].

2.1.2. Teorem

X kümesi üzerindeki herhangi bir fuzzy kümesi A olsun.

(i) $A \wedge A^c = \emptyset$ olmak zorunda değildir.

(ii) $A \vee A^c = X$ olmak zorunda değildir [7].

2.1.2. Örnek

$X=\{a,b\}$ olmak üzere X'de bir A fuzzy kümesi $A=\{(a/0,2),(b/0,9)\}$ olarak verilsin.

$A \wedge A^c = \emptyset$ ve $A \vee A^c = X$ midir?

Çözüm

$A^c = \{(a/0,8),(b/0,1)\}$ olmak üzere

$A \wedge A^c = \min\{f_A(x), f_{A^c}(x)\}$ olduğundan $A \wedge A^c = \{(a/0,2),(b/0,1)\} \neq \emptyset$

$A \vee A^c = \max\{f_A(x), f_{A^c}(x)\}$ tanımına göre $A \vee A^c = \{(a/0,8),(b/0,9)\} \neq X$

2.2. Fuzzy Topolojik Uzaylar ve Fuzzy Topolojik Uzaylarda Temel Kavramlar

2.2.1. Tanım

X boştan farklı bir küme ve $\tau \leq I^X$ fuzzy kümelerinin bir ailesi olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan τ ailesine X üzerinde fuzzy topolojisi, (X, τ) ikilisine de fuzzy topolojik uzay denir.

$(t_1) \emptyset, X \in \tau \quad (0,1 \in \tau)$

$$(t_2) \quad \forall A_1, A_2, \dots, A_n \in \tau \Rightarrow \bigwedge_{i=1}^n A_i \in \tau$$

$$(t_3) \quad \forall i \in I \text{ için } A_i \in \tau \Rightarrow \bigvee_{i \in I} A_i \in \tau$$

τ topolojisinin her bir elemanına X 'de fuzzy açık küme, X uzayına göre tümleyeni fuzzy açık olan kümeye de fuzzy kapalı küme denir [2].

2.2.1. Teorem

(X, τ) fuzzy topolojik uzay olmak üzere $\kappa = \{K \in I^X : K \text{ fuzzy kapalı} \Leftrightarrow K^c \in \tau\}$ şeklinde tanımlı κ (kapalılar) ailesi

$$(k_1) \quad \emptyset, X \in \kappa$$

$$(k_2) \quad \forall K_1, K_2, \dots, K_n \in \kappa \Rightarrow \bigvee_{i=1}^n K_i \in \kappa$$

$$(k_3) \quad \forall i \in I \text{ için } K_i \in \kappa \Rightarrow \bigwedge_{i \in I} K_i \in \kappa$$

şartlarını sağlar [2].

2.2.2. Tanım

(X, τ) fuzzy topolojik uzay ve $A \in I^X$ olsun.

$$A^0 = \bigvee \{B : B \leq A, B \in \tau\} = \sup \{B : B \leq A, B \in \tau\}$$

şeklinde tanımlanan fuzzy kümesine A fuzzy kümesinin içi denir. Tanımdan da anlaşıldığı gibi A^0 fuzzy açık bir kümedir. Üstelik A^0 , A 'nın kapsadığı en geniş fuzzy açık kümedir [2].

2.2.2. Teorem

(X, τ) fuzzy topolojik uzay ve $A \in I^X$ olsun. A 'nın fuzzy açık küme olması için gerekli ve yeterli koşul $A = A^0$ olmasıdır [3].

2.2.1. Sonuç

(X, τ) fuzzy topolojik uzay, $A, B \in I^X$ ve A^0 , A fuzzy kümesinin içi olsun. Bu durumda

$$(i) \ X^0 = X, \emptyset^0 = \emptyset$$

$$(ii) \ A^0 \leq A$$

$$(iii) \ A^{00} = A^0$$

$$(iv) \ A \leq B \Rightarrow A^0 \leq B^0$$

$$(v) \ (A \wedge B)^0 = A^0 \wedge B^0$$

sağlanır [7].

2.2.3. Tanım

(X, τ) fuzzy topolojik uzay ve $A \in I^X$ olsun.

$$\overline{A} = \wedge \{B : A \leq B, B^c \in \tau\} = \inf \{B : A \leq B, B^c \in \tau\}$$

ile tanımlanan fuzzy kümesine A fuzzy kümesinin kapanışı denir. $\bar{A}$ kümesi tanımdan da anlaşıldığı gibi fuzzy kapalı bir kümedir. Ayrıca $\bar{A}$, A 'yı kapsayan en küçük fuzzy kapalı kümedir [2].

2.2.3. Teorem

(X, τ) fuzzy topolojik uzay ve $A \in I^X$ olsun. A 'nın fuzzy kapalı küme olması için gerekli ve yeterli koşul $A = \bar{A}$ olmasıdır [3].

2.2.2. Sonuç

(X, τ) fuzzy topolojik uzay, A, B X 'in iki fuzzy kümesi ve $\bar{A}$, A 'nın kapanışı olsun. Bu durumda

$$(i) \bar{X} = X, \overline{\emptyset} = \emptyset$$

$$(ii) A \leq \bar{A}$$

$$(iii) \overline{\bar{A}} = \bar{A}$$

$$(iv) A \leq B \Rightarrow \bar{A} \leq \bar{B}$$

$$(v) \overline{(A \vee B)} = \bar{A} \vee \bar{B}$$

özellikleri vardır [2].

2.2.4. Teorem

(X, τ) fuzzy topolojik uzay ve $A \in I^X$ olsun. Bu durumda

$$(i) A^{0^c} = \overline{A^c}$$

$$(ii) \overline{A^c} = A^{c^0}$$

dir [7].

2.2.4. Tanım

(X, τ) fuzzy topolojik uzay ve $A \in I^X$ olsun. A 'yı ihtiva eden bir B fuzzy açık kümesini kapsayan N kümesine, A fuzzy kümesinin bir komşuluğu denir. Buna göre

$$N, A \text{'nin fuzzy komşuluğu} \Leftrightarrow \exists B \in \tau \text{ var } \ni A \leq B \leq N \text{ [6].}$$

2.2.5. Tanım

(X, τ) fuzzy topolojik uzay ve p , X 'in bir fuzzy noktası olsun. p fuzzy noktasını içeren bir A fuzzy açık kümesini kapsayan N kümesine, p 'nin fuzzy komşuluğu denir ve p 'nin bütün fuzzy komşuluklarının ailesi $N(p)$ ile gösterilir. Buna göre

$$N \in N(p) \Leftrightarrow \exists A \in \tau \text{ var } \ni p < A \leq N \text{ [6].}$$

2.2.6. Tanım

(X, τ) fuzzy topolojik uzay, $p \in I^X$ ve $N(p)$, p fuzzy noktasının komşuluklar ailesi olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler vardır.

$$N_1) \quad \forall N \in N(p) \Rightarrow p < N$$

$$N_2) \quad \forall N_1, N_2 \in N(p) \Rightarrow N_1 \wedge N_2 \in N(p)$$

N_3) Herhangi bir $N \in N(p)$ ve $N \leq M \Rightarrow M \in N(p)$

N_4) Her $N \in N(p)$ için $U \leq N$ olacak şekilde öyle bir $U \in N(p)$ vardır ki $q \leq U$ şartını sağlayan her q fuzzy noktası için $N \in N(q)$ dur [6].

2.2.7. Tanım

(X, τ) fuzzy topolojik uzay, $N(p)$ X kümesinde p fuzzy noktasının komşuluklar ailesi ve $E(p)$ de $N(p)$ 'nin bir alt ailesi olsun. $N(p)$ 'nin her N elemanına karşılık $E \leq N$ olacak biçimde $E(p)$ 'nin en az bir E elemanı varsa $E(p)$ ailesine p 'nin fuzzy komşuluklar tabanı (fuzzy yerel tabanı) denir [6].

2.2.8. Tanım

(X, τ) fuzzy topolojik uzay ve $\beta \leq \tau$ olsun. Her $A \in \tau$ için $A = \bigvee_{i \in J} B_i$ olacak şekilde $\{B_i\}_{i \in J} \leq \beta$ alt ailesi varsa β 'ya τ için bir taban denir. Yani;

$$\beta, \tau \text{ için taban} \Leftrightarrow \forall A \in \tau \text{ için } \exists \beta' \leq \beta \text{ var } \ni A = \bigvee_{B \in \beta'} B \text{ [7].}$$

2.2.9. Tanım

(X, τ) fuzzy topolojik uzay ve $\varphi \leq \tau$ olsun. φ 'nin elemanlarının her sonlu kesişimlerinin oluşturduğu fuzzy kümeler sınıfı τ için bir taban oluşturuyor ise φ ailesine τ için bir alt taban denir. Yani;

$$\varphi, \tau \text{ için alt taban} \Leftrightarrow \{ \bigwedge_{S \in \theta} S : \theta \leq \varphi \text{ ve } \theta \text{ sonlu} \} \tau \text{ için taban}$$

şeklindedir [7].

2.2.10. Tanım

(X, τ) fuzzy topolojik uzay ve β, τ için bir taban olsun. X 'in bir p fuzzy noktası için $\beta_p = \{B : p < B, B \in \beta\}$ ailesini göz önüne alalım. $p < A$ olmak üzere, her $A \in \tau$ için $p < B \leq A$ olacak şekilde en az bir $B \in \beta_p$ varsa β_p ailesine p fuzzy noktasının τ topolojisine göre yerel tabanı (lokal tabanı) denir [7].

2.2.11. Tanım

X ve Y herhangi iki küme olsun. X 'den Y 'ye birebir ve örten bir fonksiyon varsa, X ve Y kümelerine elemanları sayısı bakımından denktir yada aynı kardinal sayıya sahiptir denir. Herhangi bir X kümesinin kardinal sayısı bu kümenin kardinalitesiyle belirlenir ve $|X|$ ile gösterilir. Bütün pozitif tam sayıların, $\mathbb{Z}^+$ kümesinin kardinal sayısı N_0 (alef sıfır) ile gösterilir [10,8].

2.2.12. Tanım

Bir küme sonlu yada kardinalitesi N_0 (alef sıfır) ise bu kümeye sayılabilir küme, aksi halde sayılamaz küme denir [8].

2.2.13. Tanım

(X, τ) fuzzy topolojik uzay ve $\beta_\tau = \{\beta\}$ ailesi τ 'nin bütün tabanlarının ailesi olsun. Her $\beta \in \beta_\tau$ için $|\beta|$ kardinal sayılar kümesinin en küçük elemanına (X, τ) fuzzy topolojik uzayının ağırlığı (weight) denir ve $\omega(X, \tau)$ ile gösterilir [10,8].

$$\omega(X, \tau) = \min\{|\beta| : \beta, \tau \text{ nun tabanı}\}$$

dir.

2.2.14. Tanım

(X, τ) fuzzy topolojik uzayı, $p \in X$ 'in bir fuzzy noktası ve $\{E(p)\}$ p 'nin komşuluklar tabanlarının bir ailesi olsun. $|E(p)|$ kardinal sayılarının en küçük elemanına p fuzzy noktasının karakteri denir ve $\chi(p, (X, \tau))$ ile gösterilir [10,8].

$$\chi(p, (X, \tau)) = \min\{|E(p)| : E(p), p \text{ fuzzy noktasının komşuluklar tabanı}\}$$

dir.

2.2.15. Tanım

(X, τ) fuzzy topolojik uzayının her fuzzy noktasının sayılabilir bir komşuluklar tabanı varsa bu uzaya birinci sayılabilir fuzzy topolojik uzayı denir [7].

2.2.16. Tanım

(X, τ) fuzzy topolojik uzayı sayılabilir bir tabana sahipse bu uzaya ikinci sayılabilir fuzzy topolojik uzayı denir [7].

2.2.5. Teorem

Her ikinci sayılabilir fuzzy topolojik uzayı, birinci sayılabilir fuzzy topolojik uzayıdır [7].

İspat

(X, τ) ikinci sayılabilir fuzzy topolojik uzayı olsun. O halde sayılabilir bir tabana sahiptir. β, τ 'nun sayılabilir tabanı olsun. $\beta_p = \{B : p \in B, B \in \beta\}$ ailesini göz önüne alalım ve bu ailenin p fuzzy noktasının komşuluklar tabanı olduğunu gösterelim.

Öncelikle $\beta_p \leq \beta$ ve β sayılabilir olduğundan β_p ailesi sayılabilir. Şimdi $p < A$ olacak şekilde $A \in \tau$ alalım. β, τ 'nin tabanı olduğundan $p < B \leq A$ olacak şekilde $B \in \beta$ vardır.

$$p < B \text{ ve } B \in \beta \Rightarrow B \in \beta_p$$

O halde $p < A$ olacak şekilde $A \in \tau$ için $p < B \leq A$ olacak şekilde en az bir $B \in \beta_p$ elemanı bulunduğundan β_p , p noktasının komşuluklar tabanıdır. Bu durumda (X, τ) fuzzy topolojik uzayının her noktasının sayılabilir bir komşuluklar tabanı vardır. Böylece (X, τ) birinci sayılabilir fuzzy topolojik uzayıdır.

2.2.17. Tanım

(X, τ) fuzzy topolojik uzay ve $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ fuzzy açık kümelerin bir ailesi olsun. Eğer $X = \bigvee_{i \in I} A_i$ ise $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ ailesine X 'in bir fuzzy açık örtüsü denir [9].

2.2.18. Tanım

(X, τ) fuzzy topolojik uzay olsun. X 'in her $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ fuzzy açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa, (X, τ) fuzzy topolojik uzayına fuzzy kompakt uzay denir [9].

2.2.19. Tanım

X boştan farklı bir küme, $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ X 'in fuzzy alt kümelerinin bir ailesi ve her $i \in I$ için A_i 'nin üyelik fonksiyonu f_{A_i} olsun. Eğer her sonlu $\{A_i\}_{i \in J}$ için $\bigwedge_{i \in J} A_i \neq \emptyset$ ($\forall x \in X$ için $f_{\bigwedge_{i \in J} A_i}(x) \neq 0$) ise $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ ailesine sonlu arakesit özelliğine sahiptir denir [9].

2.2.6. Teorem

(X, τ) fuzzy topolojik uzay olsun. (X, τ) fuzzy kompakt uzay olması için gerekli ve yeterli koşul X 'in fuzzy kapalı kümelerinden oluşan ve $\bigwedge_{i \in I} K_i = \emptyset$ özelliğine sahip her $\kappa = \{K_i\}_{i \in I}$ ailesi için en az bir $J \subset I$ sonlu alt kümesi var öyle ki $\bigwedge_{i \in J} K_i = \emptyset$ 'dir.

İspat

$(\Rightarrow)$: (X, τ) fuzzy kompakt ve $\bigwedge_{i \in I} K_i = \emptyset$ olacak şekilde $\kappa = \{K_i\}_{i \in I}$ fuzzy kapalılar ailesi olsun. $\forall K \in \kappa$ için K^c açık ve $\bigvee_{i \in I} K_i^c = X$ olduğundan $\{K_i^c\}_{i \in I}$ ailesi X 'in fuzzy açık örtüsü olur. X kompakt olduğundan bu fuzzy açık örtünün sonlu bir alt örtüsü vardır. Böylece $J \subset I$ sonlu alt kümesi için $\bigvee_{i \in J} K_i^c = X$ olup $\bigwedge_{i \in J} K_i = \emptyset$ 'dir.

$(\Leftarrow)$: X 'in herhangi bir $\{A_i\}_{i \in I}$ fuzzy açık örtüsünü alalım. Yani $X = \bigvee_{i \in I} A_i$ olsun. $\forall i \in I$ için A_i fuzzy açık ve A_i^c fuzzy kapalı olup $\bigwedge_{i \in I} A_i^c = \emptyset$ dir. Bu durumda hipotezden $\bigwedge_{i \in J} A_i^c = \emptyset$ olacak biçimde $J \subset I$ sonlu alt kümesi vardır. Buradan $\bigvee_{i \in J} A_i = X$ bulunur. Böylece X 'in herhangi bir fuzzy açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü vardır, X kompakttır.

2.2.7. Teorem

(X, τ) fuzzy topolojik uzay olsun. (X, τ) fuzzy kompakt uzay olması için gerekli ve yeterli koşul X 'in fuzzy kapalı kümelerinden oluşan ve sonlu arakesit özelliğine sahip $\kappa = \{K_i\}_{i \in I}$ ailesi için $\bigwedge_{i \in I} K_i \neq \emptyset$ dir [9].

İspat

$(\Rightarrow): (X, \tau)$ fuzzy kompakt uzay olsun. Kabul edelim ki X 'in fuzzy kapalı kümelerinden oluşan ve sonlu arakesit özelliğine sahip $\kappa = \{K_i\}_{i \in I}$ ailesi için $\bigwedge_{i \in I} K_i = \emptyset$ olsun. Yani $i \in I$ için K_i lerin üyelik fonksiyonu f_{K_i} ise $\forall x \in X$ için $f_{\bigwedge_{i \in I} K_i}(x) = 0$ olsun.

$$f_{\bigwedge_{i \in I} K_i}(x) = 0 \Rightarrow 1 - f_{\bigwedge_{i \in I} K_i}(x) = 1 \Rightarrow f_{\bigvee_{i \in I} K_i^c}(x) = 1$$

$$\Rightarrow \bigvee_{i \in I} K_i^c = X$$

olur. Böylece $\{K_i^c\}_{i \in I}$ ailesi X 'in fuzzy açık örtüsüdür. X fuzzy kompakt olduğundan $J \subset I$ sonlu alt kümesi için $\bigvee_{i \in J} K_i^c = X$ olur.

$$f_{\bigvee_{i \in J} K_i^c}(x) = 1 \Rightarrow 1 - f_{\bigvee_{i \in J} K_i^c}(x) = 0 \Rightarrow f_{\bigwedge_{i \in J} K_i}(x) = 0$$

Buna göre $J \subset I$ sonlu alt kümesi için $\bigwedge_{i \in J} K_i = \emptyset$ bulunur. Bu ise $\kappa = \{K_i\}_{i \in I}$ ailesinin sonlu arakesit özelliğine sahip oluşu ile çelişir. O halde (X, τ) fuzzy kompakt uzay iken sonlu arakesit özelliğine sahip fuzzy kapalı kümelerin $\kappa = \{K_i\}_{i \in I}$ ailesi için $\bigwedge_{i \in I} K_i \neq \emptyset$ olduğu görülür. Terside benzer şekilde gösterilir.

2.3. Fuzzy Kümelerinin Görüntü ve Ters Görüntü Kavramları

2.3.1. Tanım

X ve Y herhangi iki küme ve $g : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. B , Y 'de bir fuzzy kümesi ve üyelik fonksiyonu f_B ise bu durumda $g^{-1}(B)$ 'de X üzerinde bir fuzzy kümesi olup üyelik fonksiyonu, $\forall x \in X$ için

$$f_{g^{-1}(B)}(x) = f_B(g(x))$$

şeklinde tanımlanır [2].

2.3.2. Tanım

X ve Y herhangi iki küme ve $g : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer A , X 'de bir fuzzy kümesi ve üyelik fonksiyonu f_A ise $g(A)$ 'da Y üzerinde bir fuzzy kümesi olup üyelik fonksiyonu, $\forall y \in Y$ için

$$f_{g(A)}(y) = \begin{cases} \sup_{x \in g^{-1}(y)} \{f_A(x)\}; & g^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0; & g^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $g^{-1}(y) = \{x \in X : g(x) = y\}$ 'dir [2].

2.3.1. Teorem

X, Y herhangi iki küme, $g : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon, A , X 'de ve B , Y 'de fuzzy kümeler olsun. Aşağıdaki özellikler vardır:

$$1) \forall A \in I^X \Rightarrow (g(A))^c \leq g(A^c)$$

$$2) \forall B \in I^Y \Rightarrow g^{-1}(B^c) = (g^{-1}(B))^c$$

$$3) \forall A_1, A_2 \in I^X \text{ için } A_1 \leq A_2 \Rightarrow g(A_1) \leq g(A_2)$$

$$4) \forall B_1, B_2 \in I^Y \text{ için } B_1 \leq B_2 \Rightarrow g^{-1}(B_1) \leq g^{-1}(B_2)$$

$$5) \forall A \leq X \Rightarrow A \leq g^{-1}(g(A))$$

$$6) \forall B \in I^Y \Rightarrow g(g^{-1}(B)) \leq B$$

7) Z herhangi bir küme ve $h: Y \rightarrow Z$ bir fonksiyon olsun. $\forall C \in I^Z$ için $(hog)^{-1}(C) = g^{-1}(h^{-1}(C))$ 'dir [2].

İspat

1) Eğer $g^{-1}(y) = \emptyset$ ise eşitlik söz konusudur.

$\forall y \in Y$ için $g^{-1}(y) \neq \emptyset$ olsun.

$$f_{g(A^c)}(y) = \sup_{x \in g^{-1}(y)} \{f_{A^c}(x)\} = \sup_{x \in g^{-1}(y)} \{1 - f_A(x)\} \Rightarrow f_{g(A^c)}(y) = 1 - \inf_{x \in g^{-1}(y)} \{f_A(x)\}$$

$$f_{(g(A))^c}(y) = 1 - f_{g(A)}(y) = 1 - \sup_{x \in g^{-1}(y)} \{f_A(x)\}$$

olduğundan $\forall y \in Y$ için $f_{(g(A))^c}(y) \leq f_{g(A^c)}(y)$ elde edilir. Böylece $(g(A))^c \leq g(A^c)$ olduğu görülür.

2) $\forall B \in I^Y$ ve $\forall x \in X$ için

$$\begin{aligned} f_{g^{-1}(B^c)}(x) &= f_{B^c}(g(x)) = 1 - f_B(g(x)) \\ \Rightarrow f_{g^{-1}(B^c)}(x) &= 1 - f_{g^{-1}(B)}(x) = f_{(g^{-1}(B))^c}(x) \end{aligned}$$

eşitliğinden $\forall x \in X$ için $f_{g^{-1}(B^c)}(x) = f_{(g^{-1}(B))^c}(x)$ olup $g^{-1}(B^c) = (g^{-1}(B))^c$ elde edilir. Diğer özellikler de benzer şekilde ispatlanır.

3. FUZZY METRİK UZAYLAR-I

Bu bölümde A. George ve P. Veeramani[1]'nin 1994 tarihli makalesindeki gibi fuzzy metrik uzay ve fuzzy metrik tarafından üretilen topoloji tanımı verilmiştir. Her fuzzy metrik uzayın Hausdorff uzayı olduğu ispatlanmıştır. Fuzzy metrik uzayında dizi ve Cauchy dizisi tanımlanarak reel sayılar kümesinin tam fuzzy metrik uzay olduğu gösterilmiştir.

3.1. Fuzzy Metrik Uzay-I ve Özellikleri

3.1.1. Tanım

$*$: $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ bir ikili işlem olsun. Eğer bu $*$ işlemi aşağıdaki şartları sağlıyor ise $*$ işlemine sürekli t-norm denir. $\forall a, b, c, d \in [0,1]$ için;

$$(1) a * b = b * a$$

$$(2) (a * b) * c = a * (b * c)$$

$$(3) * \text{ işlemi sürekli}$$

$$(4) a * 1 = a$$

$$(5) a \leq c \text{ ve } b \leq d \text{ iken } a * b \leq c * d \text{ [11].}$$

3.1.1. Örnek

$$(i) a * b = ab$$

$$(ii) a * b = \min(a, b); (\forall a, b \in [0, 1])$$

şeklinde tanımlanan ikili işlemler birer sürekli t-normdur [11].

Çözüm

(i) $a * b = ab$ şeklinde tanımlanan ikili işlemin sürekli t-norm olduğunu gösterelim.

$\forall a, b, c, d \in [0,1]$ için;

$$(1) a * b = ab = ba = b * a \Rightarrow a * b = b * a$$

$$(2) (a * b) * c = (ab) * c = (ab)c = a(bc) = a * (bc) = a * (b * c)$$

$$\Rightarrow (a * b) * c = a * (b * c)$$

(3) $(a_n), (b_n) [0,1]$ üzerinde iki dizi ve $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$ olsun.

$$a_n \rightarrow a \text{ ve } b_n \rightarrow b \Rightarrow a_n b_n \rightarrow ab \Rightarrow a_n * b_n \rightarrow a * b$$

$$\Rightarrow * \text{ dizisel sürekli}$$

$$\Rightarrow * \text{ süreklidir}$$

$$(4) a * 1 = a1 = a \Rightarrow a * 1 = a$$

$$(5) a \leq c \text{ ve } b \leq d \Rightarrow ab \leq cd \Rightarrow a * b \leq c * d$$

O halde $*$ sürekli t-normdur.

(ii) Benzer şekilde $a * b = \min(a,b)$ ikili işleminin sürekli t-norm olduğu görülür.

3.1.2. Tanım

X boştan farklı bir küme, $*$ sürekli t-norm ve $M, X^2 \times (0, \infty)$ üzerinde tanımlı bir fuzzy küme olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise $(X, M, *)$ üçlüsüne fuzzy metrik uzay denir. $\forall x, y, z \in X$ ve $s, t > 0$ için;

$$1. M(x, y, t) > 0$$

$$2. M(x,y,t)=1 \Leftrightarrow x=y$$

$$3. M(x,y,t)=M(y,x,t)$$

$$4. M(x,y,t) * M(y,z,s) \leq M(x,z,t+s)$$

$$5. M(x,y,.): (0, \infty) \rightarrow [0,1] \text{ s\u00fcrekli} \text{dir [4].}$$

3.1.1. Not

(1) $(X,M,*)$ fuzzy metrik uzayında $\forall x, y \in X, t > 0$ ve $0 < r < 1$ için; $M(x,y,t) > 1-r$ olduğunda $M(x,y,t_0) > 1-r$ olacak biçimde $0 < t_0 < t$ aralığında bir t_0 bulunabilir.

(2) Her bir $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 \in (0,1)$ için; $r_1 > r_2$ iken $r_1 * r_3 \geq r_2$ olacak biçimde r_3 ve her bir r_4 için $r_5 * r_5 \geq r_4$ olacak biçimde r_5 bulunabilir [4].

3.1.1. Lemma

$\forall x, y \in X$ için $M(x,y,.): (0, \infty) \rightarrow [0,1]$ azalmayandır [4].

İspat

$M(x,y,.): (0, \infty) \rightarrow [0,1]$ için $0 < t < s$ alalım. Kabul edelim ki $M(x,y,t) > M(x,y,s)$ olsun. $M(x,y,t) * M(y,y,s-t) \leq M(x,y,s) < M(x,y,t)$ olup fuzzy metrik uzay tanımından $M(y,y,s-t)=1$ olduğunu göre $M(x,y,t) * 1 = M(x,y,t) < M(x,y,t)$ bulunur. Bu ise bir çelişkidir. O halde $\forall x, y \in X$ ve $t < s$ için $M(x,y,t) \leq M(x,y,s)$ olup $M(x,y,.)$ azalmayandır.

3.1.2. Örnek

$X = \mathbb{R}$ ve $a * b = ab$ olsun. $\forall x, y \in X$ ve $t > 0$ için

$$M(x,y,t) = \frac{1}{e^{\frac{|x-y|}{t}}}$$

biçiminde tanımlanır ise $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzaydır.

Çözüm

$$1. \forall x, y \in X \text{ ve } t > 0 \text{ için } M(x,y,t) > 0$$

$$2. M(x,y,t) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{e^{\frac{|x-y|}{t}}} = 1 \Leftrightarrow e^{\frac{|x-y|}{t}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{|x-y|}{t} = 0 \Leftrightarrow |x-y| = 0 \Leftrightarrow x=y$$

$$3. M(x,y,t) = \frac{1}{e^{\frac{|x-y|}{t}}} = \frac{1}{e^{\frac{|y-x|}{t}}} = M(y,x,t)$$

$$4. M(x,y,t) * M(y,z,s) \leq M(x,z,t+s) \text{ olduğunu göstermek için}$$

$$|x-z| \leq \left(\frac{t+s}{t}\right)|x-y| + \left(\frac{t+s}{s}\right)|y-z|$$

eşitsizliğini ele alalım. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{|x-z|}{t+s} &\leq \frac{|x-y|}{t} + \frac{|y-z|}{s} \\ \Rightarrow e^{\frac{|x-z|}{t+s}} &\leq e^{\frac{|x-y|}{t} + \frac{|y-z|}{s}} = e^{\frac{|x-y|}{t}} e^{\frac{|y-z|}{s}} \\ \Rightarrow \frac{1}{e^{\frac{|x-y|}{t}} e^{\frac{|y-z|}{s}}} &\leq \frac{1}{e^{\frac{|x-z|}{t+s}}} \Rightarrow \frac{1}{e^{\frac{|x-y|}{t}}} \frac{1}{e^{\frac{|y-z|}{s}}} \leq \frac{1}{e^{\frac{|x-z|}{t+s}}} \\ \Rightarrow M(x,y,t) * M(y,z,s) &\leq M(x,z,t+s) \end{aligned}$$

5. $M(x,y,.):(0,\infty)\rightarrow[0,1]$ sürekli midir? $\forall t_0>0$ için;

$$\lim_{t\rightarrow t_0} M(x,y,t) = \lim_{t\rightarrow t_0} \frac{1}{e^{\frac{|x-y|}{t}}} = \frac{1}{\lim_{t\rightarrow t_0} e^{\frac{|x-y|}{t}}} = \frac{1}{e^{\frac{|x-y|}{t_0}}}$$

$$\Rightarrow \lim_{t\rightarrow t_0} M(x,y,t) = M(x,y,t_0)$$

O halde $M(x,y,.):(0,\infty)\rightarrow[0,1]$ süreklidir. Böylece $(X,M,*)$ bir fuzzy metrik uzaydır.

3.1.2. Not

Örnek 3.1.2’de $\mathbb{R}$ yerine herhangi bir X metrik uzayını ve $|x-y|$ yerine $d(x,y)$ alabiliriz. Ayrıca t-norm olarak $a*b=\min(a,b)$ sürekli t-normunu alabiliriz.

3.1.3. Örnek

(X,d) metrik uzay ve $a*b=ab$ olsun. $\forall k, m, n \in \mathbb{R}^+$ için

$$M(x,y,t) = \frac{kt^n}{kt^n + md(x,y)}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $(X,M,*)$ fuzzy metrik uzaydır.

3.1.3. Not

Yukarıdaki örnek $a*b=\min(a,b)$ t-normu içinde geçerlidir. Ayrıca $k=m=n=1$ alınarak

fuzzy metrik $M(x,y,t) = \frac{t}{t+d(x,y)}$ şeklinde tanımlanabilir. Bu şekilde tanımlanan

fuzzy metriğine d metriği tarafından indirgenen standart fuzzy metrik adı verilir.

3.1.1. Sonuç

Her metrik uzay fuzzy metrik uzaydır. Ancak tersi doğru değildir.

3.1.4. Örnek

(X, d) metrik uzay ve $a, b \in [0, 1]$ olmak üzere $a * b = ab$ olsun. $t > 0$ için;

$$M(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}$$

şeklinde tanımlanırsa $(X, M, *)$ fuzzy metrik uzaydır.

Çözüm

1. $t \in (0, \infty)$ ve metrik tanımından $d(x, y) \geq 0$ olup $M(x, y, t) > 0$ dır.

2. $\forall x, y \in X$ ve $t > 0$ için;

$$M(x, y, t) = 1 \Leftrightarrow \frac{t}{t + d(x, y)} = 1 \Leftrightarrow d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

3. Metrik tanımından $d(x, y) = d(y, x)$ olup

$$M(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)} = \frac{t}{t + d(y, x)} = M(y, x, t)$$

4. $\forall x, y, z \in X$ ve $s, t > 0$ için $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$ eşitsizliğinin sağlandığını görelim. Metrik tanımına göre $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ve

$$\frac{t + s}{t} > 1, \frac{t + s}{s} > 1 \text{ olduğundan;}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow d(x, z) \leq \left(\frac{t+s}{t}\right)d(x, y) + \left(\frac{t+s}{s}\right)d(y, z) \\
&\Rightarrow \frac{d(x, z)}{t+s} \leq \frac{d(x, y)}{t} + \frac{d(y, z)}{s} \\
&\Rightarrow \frac{d(x, z)}{t+s} \leq \frac{sd(x, y) + td(y, z)}{st} \\
&\Rightarrow 1 + \frac{d(x, z)}{t+s} \leq 1 + \frac{sd(x, y) + td(y, z)}{st} \\
&\Rightarrow \frac{t+s+d(x, z)}{t+s} \leq \frac{st+sd(x, y) + td(y, z)}{st}
\end{aligned}$$

$d(x, y)d(y, z) \geq 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{t+s+d(x, z)}{t+s} \leq \frac{st+sd(x, y) + td(y, z)}{st} \leq \frac{st+sd(x, y) + td(y, z) + d(x, y)d(y, z)}{st} \\
&\Rightarrow \frac{st}{st+sd(x, y) + td(y, z) + d(x, y)d(y, z)} \leq \frac{t+s}{t+s+d(x, z)} \\
&\Rightarrow \left(\frac{t}{t+d(x, y)}\right)\left(\frac{s}{s+d(y, z)}\right) \leq \frac{t+s}{t+s+d(x, z)} \\
&\Rightarrow M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t+s)
\end{aligned}$$

5. $\forall x, y \in X$ ve $t_0 > 0$ için;

$$\lim_{t \rightarrow t_0} M(x, y, t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{t}{t+d(x, y)} = \frac{\lim_{t \rightarrow t_0} t}{\lim_{t \rightarrow t_0} t+d(x, y)} = \frac{t_0}{t_0+d(x, y)} = M(x, y, t_0)$$

olduğundan $M(x, y, \cdot): (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ süreklidir. Böylece M, X üzerinde bir fuzzy metrik ve $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzaydır.

3.1.5. Örnek

$X = \mathbb{N}$ ve $a * b = ab$ olsun. Her $t > 0$ için;

$$M(x, y, t) = \begin{cases} \frac{x}{y}; x \leq y \\ \frac{y}{x}; y \leq x \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ise $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzaydır.

Çözüm

1. $\forall t > 0$ ve $x, y \in IN$ için $M(x, y, t) > 0$ olduğu açıktır.

2. $\forall x, y \in IN$ ve $t > 0$ için $M(x, y, t) = 1 \Leftrightarrow x = y$ olduğunu görelim.

$$(i) \ x \leq y \Rightarrow M(x, y, t) = \frac{x}{y} = 1 \Leftrightarrow x = y$$

$$(ii) \ y \leq x \Rightarrow M(x, y, t) = \frac{y}{x} = 1 \Leftrightarrow x = y$$

3. $\forall x, y \in IN$ ve $t > 0$ için

$$M(x, y, t) = \begin{cases} \frac{x}{y}; x \leq y \\ \frac{y}{x}; y \leq x \end{cases} = \begin{cases} \frac{y}{x}; y \leq x \\ \frac{x}{y}; x \leq y \end{cases} = M(y, x, t)$$

4. $\forall x, y, z \in IN$ ve $s, t > 0$ için $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$ olduğunu görelim.

Kabul edelim ki $x \leq y$ olsun.

(i) $x \leq y \leq z$ ise $M(x, y, t) = \frac{x}{y}, M(y, z, s) = \frac{y}{z}$ ve $M(x, z, t + s) = \frac{x}{z}$ olup

$$M(x, y, t) * M(y, z, s) = \frac{x}{y} \frac{y}{z} = \frac{x}{z} = M(x, z, t + s)$$

(ii) $x \leq z \leq y$ ise $M(x, y, t) = \frac{x}{y}, M(y, z, s) = \frac{z}{y}$ ve $M(x, z, s + t) = \frac{x}{z}$ olup

$$M(x, y, t) * M(y, z, s) = \frac{x}{y} \frac{z}{y} \leq \frac{x}{z} = M(x, z, t + s)$$

(iii) $z \leq x \leq y$ ise $M(x, y, t) = \frac{x}{y}, M(y, z, s) = \frac{z}{y}$ ve $M(x, z, t + s) = \frac{z}{x}$ olup

$$M(x, y, t) * M(y, z, s) = \frac{x}{y} \frac{z}{y} \leq \frac{z}{x} = M(x, z, t + s)$$

Benzer şekilde $y \leq x$ için de $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$ olduğu görülür.

5. $\forall t_0 > 0$ için;

$$\lim_{t \rightarrow t_0} M(x, y, t) = M(x, y, t_0)$$

olduğu açıktır. Bu sebeple $M(x, y, \cdot): (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ süreklidir. Böylece $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzaydır.

3.1.4. Not

Örnek 3.1.5’de verilen $M(x, y, t)$ için

$$M(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}$$

olacak biçimde X 'de hiçbir d metriği yoktur. Ayrıca $a * b = \min(a, b)$ t-normu alınırsa M fuzzy metrik değildir.

3.2.Fuzzy Metrik-I Tarafından Üretilen Topoloji ve Özellikleri

3.2.1. Tanım

$(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay, $x \in X, 0 < r < 1$ ve $t > 0$ olsun. Bu durumda

$$B(x, r, t) = \{y \in X : M(x, y, t) > 1 - r\}$$

kümesine x merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar denir [4].

3.2.1. Teorem

Her açık yuvar açık bir kümedir [4].

İspat

$B(x, r, t)$ açık yuvarını ele alalım. $y \in B(x, r, t)$ keyfi bir nokta olsun. $B(x, r, t)$ 'nin tanımından;

$$y \in B(x, r, t) \Rightarrow M(x, y, t) > 1 - r$$

$M(x, y, t) > 1 - r \Rightarrow M(x, y, t_0) > 1 - r$ olacak biçimde $0 < t_0 < t$ aralığında bir t_0 bulunabilir.

$r_0 = M(x, y, t_0)$ olsun. $r_0 = M(x, y, t_0) > 1 - r$ olduğundan $r_0 > 1 - s > 1 - r$ olacak biçimde $0 < s < 1$ aralığında bir s bulunabilir. Ayrıca $r_0 > 1 - s$ olacak biçimde verilen r_0 ve s için $r_0 * r_1 \geq 1 - s$ şartını sağlayan $0 < r_1 < 1$ aralığında bir r_1 bulunabilir.

Şimdi $B(y, 1 - r_1, t - t_0)$ açık yuvarını göz önüne alalım. Gösterelim ki $B(y, 1 - r_1, t - t_0) \subset B(x, r, t)$ 'dir.

$z \in B(y, 1 - r_1, t - t_0)$ olsun. O halde $M(y, z, t - t_0) > 1 - (1 - r_1) = r_1$ 'dir. Bundan dolayı

$$\begin{aligned} M(x, z, t) &\geq M(x, y, t_0) * M(y, z, t - t_0) \\ \Rightarrow M(x, z, t) &> r_0 * r_1 \geq 1 - s \\ \Rightarrow M(x, z, t) &> 1 - r \\ \Rightarrow z &\in B(x, r, t) \end{aligned}$$

olur. Böylece $B(y, 1 - r_1, t - t_0) \subset B(x, r, t)$ bulunur. $y \in B(x, r, t)$ keyfi seçildiğinden her $y \in B(x, r, t)$ için en az bir $B(y, 1 - r_1, t - t_0)$ açık yuvarı vardır öyle ki $B(y, 1 - r_1, t - t_0) \subset B(x, r, t)$ olur. Buradan $B(x, r, t)$ açık bir kümedir.

3.2.1. Sonuç

$(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay olsun.

$\tau_M = \{A \subset X : \forall x \in A \text{ için } B(x, r, t) \subset A \text{ olacak biçimde } t > 0 \text{ ve } 0 < r < 1 \text{ aralığında } r \text{ var}\}$

şeklinde tanımlanan τ_M , X üzerinde bir topolojidir [4].

İspat

t_1) $\emptyset$ kümesinin hiçbir elemanı olmadığından $\emptyset$ 'nin elemanlarını merkez kabul eden açık yuvar boştur. Dolayısıyla $\emptyset$ tarafından kapsanır. O halde $\emptyset \in \tau_M$ 'dur. $\forall x \in X$ ve $0 < r < 1$ için $B(x, r, t) \subset X$ olduğundan $X \in \tau_M$ olur. Böylece $\emptyset, X \in \tau_M$ 'dur.

t_2) $A_1, A_2, \dots, A_n \in \tau_M$ olsun.

$$(i) \bigcap_{i=1}^n A_i = \emptyset \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n A_i \in \tau_M$$

$$(ii) \bigcap_{i=1}^n A_i \neq \emptyset \text{ olsun.}$$

$\exists x \in \bigcap_{i=1}^n A_i$ vardır. Bu durumda $\forall i=1,2,\dots,n$ için $x \in A_i$ ve $A_i \in \tau_M$ 'dur. O halde

$\forall i=1,2,\dots,n$ için $B(x, r_i, t) \subset A_i$ olacak biçimde $0 < r_i < 1$ ve $t > 0$ vardır.

$\forall i=1,2,\dots,n$ için $r = \min\{r_i\}$ diyelim.

$\Rightarrow \forall i=1,2,\dots,n$ için $B(x, r, t) \subset B(x, r_i, t) \subset A_i$ olacak biçimde $0 < r < 1$ ve $t > 0$ var

$$\Rightarrow B(x, r, t) \subset \bigcap_{i=1}^n A_i$$

$$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^n A_i \in \tau_M$$

t_3) $\{A_i\}_{i \in I} \subset \tau_M \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau_M$ olduğunu görelim.

(i) $\bigcup_{i \in I} A_i = X \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau_M$ olduğu açıktır.

(ii) $\bigcup_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ olsun.

$\exists x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ vardır. Bu durumda $\exists i_0 \in I$ için $x \in A_{i_0}$ ve $A_{i_0} \in \tau_M$ 'dir. O halde

$\exists i_0 \in I$ için $B(x, r, t) \subset A_{i_0}$ olacak biçimde $0 < r < 1$ ve $t > 0$ vardır.

$A_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ olduğundan $0 < r < 1$ ve $t > 0$ için $B(x, r, t) \subset A_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ olur. Buradan

$B(x, r, t) \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ olacak biçimde $0 < r < 1$ ve $t > 0$ var olduğu görülür. O halde

$\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau_M$ 'dur.

Böylece τ_M , X üzerinde bir topolojidir.

3.2.2. Sonuç

(X, τ_M) topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. Buna göre

$$E(x) = \{B(x, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$$

ailesi x 'in yerel (komşuluklar) tabanıdır.

İspat

Komşuluk tanımından N , x 'in bir komşuluğu ise $x \in U \subset N$ olacak biçimde en az bir $U \subset X$ açığı vardır. $U \subset X$ açık olduğundan $B(x, r, t) \subset U$ olacak biçimde $0 < r < 1$ ve $t > 0$

vardır. $\frac{1}{n} < r$ ve $\frac{1}{n} < t$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ seçelim. Şimdi $B(x, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \subset B(x, r, t)$

olduğunu görelim.

$z \in B(x, \frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ olsun. O halde $M(x, z, \frac{1}{n}) > 1 - \frac{1}{n} > 1 - r$ olur.

$$M(x, z, \frac{1}{n}) * M(z, z, t - \frac{1}{n}) \leq M(x, z, t)$$

dir. $M(z, z, t - \frac{1}{n}) = 1$ olduğundan $M(x, z, \frac{1}{n}) \leq M(x, z, t)$ olur. Ayrıca $M(x, z, \frac{1}{n}) > 1 - r$ eşitsizliğinden $M(x, z, t) > 1 - r$ bulunur. Buna göre $z \in B(x, r, t)$ 'dir. Böylece

$$\Rightarrow B(x, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \subset B(x, r, t)$$

$$\Rightarrow B(x, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \subset B(x, r, t) \subset U \subset N$$

$$\Rightarrow B(x, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \subset N$$

O halde x 'in her N komşuluğu için $B(x, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \subset N$ olacak biçimde en az bir

$B(x, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \in E(x)$ bulunabileceğinden $E(x)$, x 'in yerel (komşuluklar) tabanıdır.

3.2.1. Not

Sonuç 3.2.2'de tanımlanan $E(x)$ ailesinin her bir elemanı doğal sayılar tarafından indislendiğinden $E(x)$ sayılabilir bir ailedir. Bu sebeple $E(x)$, x 'in sayılabilir komşuluklar tabanıdır.

3.2.3. Sonuç

$(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzayı olmak üzere

$\tau_M = \{A \subset X : \forall x \in A \text{ için } B(x, r, t) \subset A \text{ olacak biçimde } t > 0 \text{ ve } 0 < r < 1 \text{ aralığında } r \text{ var}\}$

şeklinde tanımlanan (X, τ_M) topolojisi birinci sayılabilir uzaydır [4].

3.2.2. Teorem

Her fuzzy metrik uzay Hausdorff uzayıdır [4].

İspat

$(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzayı, $x, y \in X$ ve $x \neq y$ olsun. Fuzzy metrik tanımına göre $x \neq y$ olduğundan $0 < M(x, y, t) < 1$ 'dir. Buradan $r = M(x, y, t)$ dersek $0 < r < 1$ olur. $r < r_0 < 1$ olacak biçimde her bir r_0 için $r_1 * r_1 \geq r_0$ eşitsizliğini sağlayan r_1 bulunabilir.

Şimdi $B(x, 1 - r_1, \frac{1}{2}t)$ ve $B(y, 1 - r_1, \frac{1}{2}t)$ açık yuvarlarını ele alalım. Gösterelim ki

$$B(x, 1 - r_1, \frac{1}{2}t) \cap B(y, 1 - r_1, \frac{1}{2}t) = \emptyset \text{ dir.}$$

Kabul edelim ki $B(x, 1 - r_1, \frac{1}{2}t) \cap B(y, 1 - r_1, \frac{1}{2}t) \neq \emptyset$ olsun.

$$\Rightarrow \exists z \in B(x, 1 - r_1, \frac{1}{2}t) \cap B(y, 1 - r_1, \frac{1}{2}t)$$

$$\Rightarrow M(x, z, \frac{1}{2}t) > 1 - (1 - r_1) = r_1 \text{ ve } M(y, z, \frac{1}{2}t) > 1 - (1 - r_1) = r_1$$

$$r = M(x, y, t) \geq M(x, z, \frac{1}{2}t) * M(z, y, \frac{1}{2}t)$$

$$\Rightarrow r > r_1 * r_1$$

$$\Rightarrow r > r_0$$

$$\Rightarrow r > r$$

Bu ise bir çelişkidir. O halde $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için;

$$B(x, 1 - r_1, \frac{1}{2}t) \cap B(y, 1 - r_1, \frac{1}{2}t) = \emptyset$$

dir. Buna göre $(X, M, *)$ fuzzy metrik uzayı Hausdorff uzayıdır.

3.2.2. Tanım

$(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay ve A , X 'in bir alt kümesi olsun. Eğer $\forall x, y \in A$ için $M(x, y, t) > 1 - r$ olacak biçimde $t > 0$ ve $0 < r < 1$ varsa $A \subset X$ kümesi F-sınırlıdır denir [4].

3.2.3. Teorem

$(X, M, *)$, d metriği tarafından indirgenen bir fuzzy metrik uzay ve A , X 'in bir alt kümesi olsun. $A \subset X$ kümesinin F-sınırlı olması için gerekli ve yeterli koşul A 'nın sınırlı olmasıdır [4].

İspat

$(\Rightarrow)$: $A \subset X$ kümesi F-sınırlı olsun. O halde Tanım 3.2.8.'den $\forall x, y \in A$ için $M(x, y, t) > 1 - r$ olacak biçimde $t > 0$ ve $0 < r < 1$ vardır. Buradan $\forall a \in A$ için $x \in A \subset X$ olup $M(x, a, t) > 1 - r$

$$\Rightarrow a \in B(x, r, t)$$

$$\Rightarrow A \subset B(x, r, t) \text{ olacak şekilde } x \in X, t > 0 \text{ ve } 0 < r < 1 \text{ vardır.}$$

Böylece A sınırlıdır.

($\Leftarrow$): $A \subset X$ kümesi sınırlı olsun. Buna göre $A \subset B(x, r, t)$ olacak biçimde $x \in X$, $t > 0$ ve $0 < r < 1$ vardır. O halde $\forall a, b \in A$ için $a, b \in B(x, r, t)$ olup $M(x, a, t) > 1-r$ ve $M(x, b, t) > 1-r$ 'dir. Buradan $\forall a, b \in A$ için;

$$\begin{aligned} M(a, b, 2t) &\geq M(a, x, t) * M(x, b, t) \\ \Rightarrow M(a, b, 2t) &> (1-r) * (1-r) \end{aligned}$$

$0 < r < 1$ için $(1-r) * (1-r) > 1-s$ olacak biçimde $0 < s < 1$ vardır. Ayrıca $2t = t'$ dersek $\forall a, b \in A$ için $M(a, b, t') > 1-s$ olacak şekilde $t' > 0$ ve $0 < s < 1$ bulunur. O zaman A , F-sınırlıdır.

3.2.4. Teorem

$(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay olsun. X 'in her kompakt alt kümesi F-sınırlıdır [4].

İspat

X 'in kompakt bir A alt kümesini göz önüne alalım. $t > 0$ ve $0 < r < 1$ olmak üzere $\{B(x, r, t) : x \in A\}$ ailesi A 'nın bir açık örtüsü olsun. A kompakt olduğundan

$$A \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, r, t)$$

olacak biçimde $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$ vardır. $x, y \in A$ olsun. O zaman $x \in B(x_i, r, t)$ ve $y \in B(x_j, r, t)$ olacak şekilde $1 \leq i, j \leq n$ vardır. Bundan dolayı

$$\begin{aligned} \Rightarrow M(x, x_i, t) &> 1-r \\ \Rightarrow M(x, x_j, t) &> 1-r \end{aligned}$$

dir. $\alpha = \min\{M(x_i, x_j, t) : 1 \leq i, j \leq n\}$ diyelim. O zaman $\alpha > 0$ 'dır.

$$M(x, y, 3t) \geq M(x, x_i, t) * M(x_i, x_j, t) * M(x_j, y, t) \\ \Rightarrow M(x, y, 3t) > (1-r) * (1-r) * \alpha$$

$3t=t'$ ve $(1-r) * (1-r) * \alpha > 1-s$ olacak biçimde $0 < s < 1$ alalım. Böylece $\forall x, y \in A$ için $M(x, y, t') > 1-s$ olur. Buna göre A, F-sınırlıdır.

3.2.4. Sonuç

Bir fuzzy metrik uzayda her kompakt küme kapalı ve sınırlıdır [4].

İspat

Her fuzzy metrik uzay Hausdorff uzayı ve Hausdorff bir X uzayının her kompakt alt kümesi X de kapalı olduğundan;

$A \subset X$ kompakt $\Rightarrow A \subset X$ kapalıdır.

Ayrıca Teorem 3.2.3 ve Teorem 3.2.4'den

$A \subset X$ kompakt $\Rightarrow A$ F-sınırlıdır $\Rightarrow A$ sınırlıdır.

3.2.3. Tanım

$(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay ve $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f(n) = x_n \in X$ olmak üzere $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ şeklinde tanımlanan her fonksiyona X fuzzy metrik uzayında bir dizi denir ve $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ veya kısaca (x_n) ile gösterilir.

3.2.4. Tanım

$(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay, (x_n) X'de bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun. Her $0 < r < 1$ sayısına karşılık $n \geq n_0$ iken $M(x_n, x_0, t) > 1-r$ olacak şekilde en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$

sayısı varsa (x_n) dizisi x_0 noktasına yakınsıyor denir ve $x_n \rightarrow x_0$ veya $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ ile gösterilir.

$$x_n \rightarrow x_0 : \Leftrightarrow \forall 0 < r < 1 \text{ için } \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ var } \ni \forall n \geq n_0 \Rightarrow M(x_n, x_0, t) > 1 - r$$

$$x_n \rightarrow x_0 : \Leftrightarrow \forall 0 < r < 1 \text{ için } \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ var } \ni \forall n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in B(x_0, r, t)$$

3.2.5. Teorem

$(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay ve (x_n) X 'de bir dizi olsun. $x_n \rightarrow x$ olması için gerekli ve yeterli koşul $n \rightarrow \infty$ için $M(x_n, x, t) \rightarrow 1$ olmasıdır [4].

İspat

$(\Rightarrow)$: Kabul edelim ki $x_n \rightarrow x$ olsun. O zaman $0 < r < 1$ için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n \geq n_0$ iken $x_n \in B(x, r, t)$ 'dir. Buradan

$$\begin{aligned} x_n \in B(x, r, t) &\Rightarrow M(x_n, x, t) > 1 - r \\ &\Rightarrow 1 - M(x_n, x, t) < r \end{aligned}$$

Böylece $n \rightarrow \infty$ için $M(x_n, x, t) \rightarrow 1$ olur.

$(\Leftarrow)$: $n \rightarrow \infty$ iken $M(x_n, x, t) \rightarrow 1$ ise $0 < r < 1$ için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır ki her $n \geq n_0$ iken $1 - M(x_n, x, t) < r$ olur. O halde

$$\begin{aligned} 1 - M(x_n, x, t) < r &\Rightarrow M(x_n, x, t) > 1 - r \\ &\Rightarrow x_n \in B(x, r, t) \end{aligned}$$

Buradan da $x_n \rightarrow x$ elde edilir.

3.2.5. Tanım

$(X, M, *)$ fuzzy metrik uzayda bir (x_n) dizisinin Cauchy dizisi olması için gerekli ve yeterli koşul $p > 0$ ve $t > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_{n+p}, x_n, t) = 1$ olmasıdır [4].

3.2.6. Tanım

Her Cauchy dizisinin yakınsak olduğu uzaya tam fuzzy metrik uzay denir [4].

3.2.1. Uyarı

Tanım 3.2.5'e göre IR tam fuzzy metrik uzay değildir [4].

3.2.1. Örnek

(IR, d) metrik uzay, $d(x, y) = |x - y|$ ve $a * b = ab$ olsun.

$$M(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}$$

biçiminde tanımlanırsa $(IR, M, *)$ fuzzy metrik uzaydır. Bu uzayda

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

olacak biçimde (S_n) dizisini ele alalım. Her $p > 0$ için;

$$M(S_{n+p}, S_n, t) = \frac{t}{t + |S_{n+p} - S_n|} = \frac{t}{t + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} M(S_{n+p}, S_n, t) = 1$$

olur. O halde (S_n) dizisi $(IR, M, *)$ fuzzy metrik uzayında bir Cauchy dizisidir. Eğer IR tam fuzzy metrik uzay ise en az bir $x \in IR$ noktası vardır ki $n \rightarrow \infty$ iken $M(S_n, x, t) \rightarrow 1$ 'dir.

$$M(S_n, x, t) \rightarrow 1 \Rightarrow n \rightarrow \infty \text{ iken } \frac{t}{t + |S_n - x|} \rightarrow 1$$

$$\Rightarrow n \rightarrow \infty \text{ iken } |S_n - x| \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow S_n \rightarrow x$$

olmalıdır. Ancak IR 'de bu doğru değildir. Bu sebeple IR tam fuzzy metrik uzay değildir.

Şimdi IR 'yi tam fuzzy metrik uzay yapmak için Cauchy dizisi tanımını aşağıdaki gibi verelim.

3.2.7. Tanım

$(X, M, *)$ fuzzy metrik uzayında bir (x_n) dizisinin Cauchy dizisi olması için gerekli ve yeterli koşul her bir $\varepsilon > 0, t > 0$ için $\forall m, n \geq n_0$ iken $M(x_n, x_m, t) > 1 - \varepsilon$ olacak şekilde $\exists n_0 \in IN$ sayısının bulunmasıdır [4].

3.2.5. Sonuç

Tanım 3.2.7'de verilen Cauchy dizisi tanımına göre IR tam fuzzy metrik uzaydır.

İspat

$(IR, M, *)$ fuzzy metrik uzay ve (x_n) IR 'de bir Cauchy dizisi olsun. O halde tanıma göre her $\varepsilon > 0, t > 0$ için $\exists n_0 \in IN$ vardır öyle ki $\forall m, n \geq n_0$ iken $M(x_n, x_m, t) > 1 - \varepsilon$ 'dır. Buna göre $\forall n \geq n_0$ iken $M(x_n, x_{n_0}, t) > 1 - \varepsilon$ olur. Yani $x_n \in B(x_{n_0}, \varepsilon, t)$ 'dir.

$A = \{x_{n_0}, x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \dots\}$ diyelim.

$$\Rightarrow A \subset B(x_{n_0}, \varepsilon, t)$$

$\Rightarrow A$ sınırlı

$B = \{x_1, x_2, \dots, x_{n_0-1}\}$ diyelim.

$\Rightarrow B$ sonlu

$\Rightarrow B$ sınırlı

$(x_n) = A \cup B$ olduğundan (x_n) sınırlıdır. Bolzano-Wierstrass teoremine göre IR 'nin sonsuz elemanlı sınırlı her alt kümesinin en az bir yığılma noktası vardır. Buna göre $x \in (x_n)^\sim \subset (x_n)^\sim$ 'dir.

$x \in (x_n)^\sim \Rightarrow x_{n_k} \rightarrow x$ olacak biçimde $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ vardır.

$x_{n_k} \rightarrow x \Leftrightarrow \forall 0 < r < 1$ için $\exists n_1 \in IN$ var $\ni \forall n_k \geq n_1$ iken $x_{n_k} \in B(x, r, t)$

$x_{n_k} \rightarrow x \Leftrightarrow \forall 0 < r < 1$ için $\exists n_1 \in IN$ var $\ni \forall n_k \geq n_1$ iken $M(x_{n_k}, x, t) > 1 - r$

$n_2 = maks\{n_0, n_1\}$ diyelim. $\forall n, n_k \geq n_2$ için

$$M(x_n, x, 2t) \geq M(x_n, x_{n_k}, t) * M(x_{n_k}, x, t) > (1 - \varepsilon) * (1 - r)$$

$\varepsilon > 0$ ve $0 < r < 1$ için $(1 - \varepsilon) * (1 - r) > 1 - s$ olacak biçimde $0 < s < 1$ vardır. Ayrıca $2t = t'$ dersek

$$M(x_n, x, t') > 1 - s \Rightarrow x_n \in B(x, s, t')$$

olur. Buna göre $x_n \rightarrow x$ bulunur. Böylece IR tam fuzzy metrik uzaydır.

3.2.8. Tanım

$(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay, $x \in X$, $0 < r < 1$ ve $t > 0$ olsun. Bu durumda

$$B[x, r, t] = \{y \in X : M(x, y, t) \geq 1 - r\}$$

kümesine x merkezli ve r yarıçaplı kapalı yuvar denir [4].

3.2.1. Lemma

Her kapalı yuvar kapalı bir kümedir [4].

İspat

$(X, M, *)$ fuzzy metrik uzay, $x \in X$, $0 < r < 1$ ve $t > 0$ olmak üzere $B[x, r, t]$ kapalı yuvarını ele alalım. $y \in \overline{B[x, r, t]}$ olsun. X birinci sayılabilir uzay olduğundan $y_n \rightarrow y$ olacak biçimde $(y_n) \subset B[x, r, t]$ vardır.

$$(y_n) \subset B[x, r, t] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \text{ için } M(x, y_n, t) \geq 1 - r$$

Ayrıca $y_n \rightarrow y$ olduğundan verilen her bir $\varepsilon > 0$ için $M(y_n, y, \varepsilon) \rightarrow 1$ 'dir. Buna göre

$$\begin{aligned}
M(x, y, t + \varepsilon) &\geq M(x, y_n, t) * M(y_n, y, \varepsilon) \\
\Rightarrow M(x, y, t + \varepsilon) &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} M(x, y_n, t) * \lim_{n \rightarrow \infty} M(y_n, y, \varepsilon) \\
\Rightarrow M(x, y, t + \varepsilon) &\geq (1 - r) * 1 = 1 - r
\end{aligned}$$

Özel olarak $n \in \mathbb{N}$ için $\varepsilon = \frac{1}{n}$ alınırsa $M(x, y, t + \frac{1}{n}) \geq 1 - r$ olur.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow M(x, y, t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} M(x, y, t + \frac{1}{n}) \geq 1 - r \\
\Rightarrow M(x, y, t) &\geq 1 - r \\
\Rightarrow y &\in B[x, r, t]
\end{aligned}$$

olur. Böylece $\overline{B[x, r, t]} \subset B[x, r, t]$ olur. Bundan dolayı $B[x, r, t]$ kapalıdır.

4.FUZZY METRİK UZAYLAR-II

Bu kısımda Kankana Chakrabarty , Ranjit Biswas ve Sudarsan Nanda tarafından 1998 yılında tanımlanan fuzzy metrik uzay incelenmiştir. [5] makalesindeki fuzzy metriği kullanarak fuzzy kümelerinin ailesi üzerinde bir topoloji oluşturulduğu gösterilmiştir.

4.1. Fuzzy Metrik Uzay-II Tanımı ve Temel Kavramlar

4.1.1. Tanım

$X \neq \emptyset$ bir küme ve μ_X fonksiyonu $I^X \times I^X$ ’den $[0,1]$ kapalı aralığına aşağıdaki şekilde tanımlansın. $\forall A, B \in I^X$ olmak üzere

$$\mu_X(A, B) = \sup_{x \in X} |A(x) - B(x)|$$

μ_X ’e I^X ’de bir fuzzy metrik ve (I^X, μ_X) ikilisine X ’in bir fuzzy metrik uzayı denir [5].

Tanımlanan bu fuzzy metriğin aşağıdaki özellikleri sağladığını gösterelim.

(i) Pozitif tanımlıdır.

$$\forall x \in X \text{ için } |A(x) - B(x)| \geq 0 \text{ olduğundan } \sup_{x \in X} |A(x) - B(x)| \geq 0 \Rightarrow \mu_X(A, B) \geq 0$$

(ii) Simetri özelliği vardır.

$$\mu_X(A, B) = \sup_{x \in X} |A(x) - B(x)| = \sup_{x \in X} |B(x) - A(x)| = \mu_X(B, A) \Rightarrow \mu_X(A, B) = \mu_X(B, A)$$

(iii) $\mu_X(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$ 'dir.

$$\begin{aligned} \mu_X(A, B) = 0 &\Leftrightarrow \sup_{x \in X} |A(x) - B(x)| = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için } |A(x) - B(x)| = 0 \Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için } A(x) - B(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için } A(x) = B(x) \Leftrightarrow A = B \end{aligned}$$

(iv) $\mu_X(A, B) \leq \mu_X(A, C) + \mu_X(C, B)$ 'dir.

$$\begin{aligned} \mu_X(A, B) &= \sup_{x \in X} |A(x) - B(x)| = \sup_{x \in X} |A(x) - C(x) + C(x) - B(x)| \\ &\leq \sup_{x \in X} \{ |A(x) - C(x)| + |C(x) - B(x)| \} \\ &\leq \sup_{x \in X} |A(x) - C(x)| + \sup_{x \in X} |C(x) - B(x)| \\ &\leq \mu_X(A, C) + \mu_X(C, B) \end{aligned}$$

4.1.2. Tanım

(I^X, μ_X) X 'in bir fuzzy metrik uzayı ve IN doğal sayılar kümesi olsun. $\forall n \in IN$ için $f(n) = A_n \in I^X$ olmak üzere $f : IN \rightarrow I^X$ şeklinde tanımlı her fonksiyona I^X üzerinde tanımlı bir dizi denir ve $(A_n)_{n \in N}$ veya kısaca (A_n) ile gösterilir.

4.1.3. Tanım

(I^X, μ_X) X 'in bir fuzzy metrik uzayı, $(A_n) \in I^X$ 'de bir dizi ve $A \in I^X$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ iken $\mu_X(A_n, A) < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $n_0 \in IN$ sayısı varsa (A_n) dizisi A 'ya F-yakınsaktır denir [5].

(A_n) dizisi A 'ya F-yakınsaktır $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ var $\ni \forall n \geq n_0$
 $\Rightarrow \mu_X(A_n, A) < \varepsilon$

4.1.4. Tanım

μ_X, I^X 'de bir fuzzy metrik ve $(A_n), I^X$ 'de bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ iken $\mu_X(A_m, A_n) < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa (A_n) dizisi F-Cauchy dizisidir denir [5].

(A_n) dizisi F-Cauchy dizisidir $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ var $\ni \forall m, n > n_0$
 $\Rightarrow \mu_X(A_m, A_n) < \varepsilon$

4.1.5. Tanım

(I^X, μ_X) X'in bir fuzzy metrik uzayı ve $(A_n) \subset I^X$ bir F-Cauchy dizisi olsun. Eğer (A_n) dizisi X'in bir fuzzy kümesine F-yakınsak ise (I^X, μ_X) fuzzy metrik uzayına F-tamdır denir [5].

4.1.6. Tanım

μ_X, I^X üzerinde ve μ_Y, I^Y üzerinde birer fuzzy metrik, $A \in I^X$ ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. $B \in I^X$ olmak üzere

f fonksiyonu $A \in I^X$ de F-süreklidir $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ var $\ni \mu_X(A, B) < \delta$ iken $\mu_Y(f(A), f(B)) < \varepsilon$ [5].

4.1.7. Tanım

(I^X, μ_X) X'in bir fuzzy metrik uzayı, $r \in (0,1)$ ve $A \in I^X$ olsun. Bu durumda

$$S(A, r) = \{B \in I^X : \mu_X(B, A) < r\}$$

kümesine A merkezli ve r yarıçaplı F-açık yuvar ve

$$\bar{S}(A, r) = \{B \in I^X : \mu_X(B, A) \leq r\}$$

kümesine de A merkezli ve r yarıçaplı F-kapalı yuvar denir.

$A \in I^X$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere $S(A, \varepsilon)$ F-açık yuvarına A'nın ε yarıçaplı F-küresel komşuluğu veya F-komşuluğu denir [5].

4.1.1. Not

(I^X, μ_X) fuzzy metrik uzayında her F-açık yuvar (F-kapalı yuvar) boş kümeden farklıdır.

4.1.2. Not

Tanım 4.1.7'ye göre X 'in A fuzzy kümesi ve $r_1, r_2 \in (0, 1)$ için $0 < r_1 < r_2$ iken $S(A, r_1) \subset S(A, r_2) \subset \bar{S}(A, r_2)$ 'dir [5].

4.2.Fuzzy Metrik-II Tarafından Üretilen Topoloji ve Özellikleri

4.2.1. Tanım

G, I^X 'in bir alt ailesi olsun. Eğer her $A \in G$ için $S(A, r) \subset G$ olacak biçimde en az bir $r > 0$ varsa G 'ye F-açık küme denir.

G F-açık kümedir $\Leftrightarrow \forall A \in G$ için $S(A, r) \subset G$ olacak biçimde $\exists r > 0$ vardır [5].

4.2.1. Not

Bu tanıma göre açıktır ki $\emptyset$ ve I^X F-açık kümelerdir.

4.2.1. Teorem

(I^X, μ_X) X 'in bir fuzzy metrik uzayı olsun. Fuzzy metrik uzayda her F-açık yuvar F-açık kümedir [5].

İspat

(I^X, μ_X) üzerinde $S(A, r)$ F-açık yuvarını ele alalım.

$$B \in S(A, r) \Rightarrow \mu_X(B, A) < r \Rightarrow r - \mu_X(B, A) > 0$$

$r_1 = r - \mu_X(B, A)$ diyelim ve $S(B, r_1) \subset S(A, r)$ olduğunu görelim.

$$C \in S(B, r_1) \Rightarrow \mu_X(C, B) < r_1 = r - \mu_X(B, A)$$

$$\Rightarrow \mu_X(C, B) + \mu_X(B, A) < r$$

Fuzzy metrik tanımına göre $\mu_X(C, A) \leq \mu_X(C, B) + \mu_X(B, A)$ olduğundan

$$\Rightarrow \mu_X(C, A) < r$$

$$\Rightarrow C \in S(A, r)$$

bulunur. Buna göre $S(B, r_1) \subset S(A, r)$ olur. O halde $\forall B \in S(A, r)$ için $S(B, r_1) \subset S(A, r)$ olacak biçimde $\exists r_1 > 0$ bulunacağından $S(A, r)$ yuvarı F-açık kümedir.

4.2.2. Teorem

(I^X, μ_X) fuzzy metrik uzay ve $G \subset I^X$ olsun. G 'nin F-açık olması için gerekli ve yeterli koşul G 'nin F-açık yuvarların birleşimi şeklinde yazılmasıdır [5].

İspat

$(\Rightarrow)$: G , F-açık olsun.

G , F-açık $\Rightarrow \forall A \in G$ için $S(A, r) \subset G$ olacak biçimde $\exists r > 0$ vardır

$$\Rightarrow \forall A \in G \text{ için } A \in S(A, r) \subset G$$

$$\Rightarrow \bigcup_{A \in G} A \subset \bigcup_{A \in G} S(A, r) \subset \bigcup_{A \in G} G$$

$$\Rightarrow G \subset \bigcup_{A \in G} S(A, r) \subset G$$

$$\Rightarrow G = \bigcup_{A \in G} S(A, r)$$

$(\Leftarrow)$: G , F-açık yuvarların birleşimi şeklinde yazılsın. Yani

$$G = \bigcup_{A \in G} S(A, r)$$

olsun. Eğer $B \in G$ ise $G = \bigcup_{A \in G} S(A, r)$ olduğundan $\exists S(A, r)$ F-açık yuvarı vardır ki

$B \in S(A, r)$ 'dir. Her F-açık yuvar F-açık küme olduğundan $B \in S(A, r)$ için $S(B, r_1) \subset S(A, r)$ olacak biçimde en az bir $r_1 > 0$ vardır öyle ki $r_1 < r$ 'dir.

$$\Rightarrow S(B, r_1) \subset S(A, r) \subset G$$

$$\Rightarrow S(B, r_1) \subset G$$

Her $B \in G$ için $S(B, r_1) \subset G$ olacak şekilde en az bir $r_1 > 0$ bulunduğu için G , F-açık kümedir.

4.2.3. Teorem

(I^X, μ_X) X 'in fuzzy metrik uzayı olsun. Aşağıdaki ifadeler vardır.

- (i) F-açık kümelerin sonlu sayıda kesişimi F-açıktır.
- (ii) F-açık kümelerin keyfi sayıda birleşimi F-açıktır [5].

İspat

(i) $i=1,2,\dots,n$ olmak üzere $\{G_i\}$ F-açık kümelerin sonlu ailesi olsun. $G = \bigcap_{i=1}^n G_i$ diyelim.

Eğer $\bigcap_{i=1}^n G_i = \emptyset$ ise $G = \bigcap_{i=1}^n G_i$ F-açıktır.

$\bigcap_{i=1}^n G_i \neq \emptyset$ ve $A \in \bigcap_{i=1}^n G_i$ olsun. Bu durumda her $i=1,2,\dots,n$ için $A \in G_i$ 'dir. Her $i=1,2,\dots,n$ için G_i 'ler F-açık küme olduğundan $S(A, r_i) \subset G_i$ olacak biçimde $\exists r_i > 0$ vardır.

$r = \min\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ dersek

$\Rightarrow \forall i=1,2,\dots,n$ için $S(A, r) \subset G_i$

$\Rightarrow S(A, r) \subset G = \bigcap_{i=1}^n G_i$

dir. Buna göre G , F-açık kümedir.

(ii) $\{G_i\}_{i \in I}$ F-açık kümeler ailesi olsun. $G = \bigcup_{i \in I} G_i$ diyelim.

$\bigcup_{i \in I} G_i = I^X$ ise $\bigcup_{i \in I} G_i$, F-açık kümedir.

$\bigcup_{i \in I} G_i \neq \emptyset$ ve $A \in \bigcup_{i \in I} G_i$ olsun. Bu durumda en az bir $i_0 \in I$ için $A \in G_{i_0}$ 'dir. G_{i_0} , F-açık olduğundan $S(A, r) \subset G_{i_0}$ olacak biçimde en az bir $r > 0$ vardır. Ayrıca $G_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} G_i$ olup $\exists r > 0$ için $S(A, r) \subset \bigcup_{i \in I} G_i$ bulunur. O halde $G = \bigcup_{i \in I} G_i$ kümesi F-açıktır.

4.2.1. Sonuç

Tanım 4.1.1'de verilen μ_X fuzzy metriği I^X kümesi üzerinde bir topoloji tanımlar.

4.2.2. Tanım

(I^X, μ_X) fuzzy metrik uzay, $G \subset I^X$ ve $A \in I^X$ olsun. A kümesinin her F-komşuluğunda G 'nin en az bir elemanı varsa A 'ya G 'nin F-değme noktası denir [5].

A , G 'nin F-değme noktasıdır $\Leftrightarrow \forall S(A, r)$ F-açık yuvarı için $S(A, r) \cap G \neq \emptyset$

4.2.3. Tanım

(I^X, μ_X) fuzzy metrik uzay, $G \subset I^X$ ve $A \in I^X$ olsun. A kümesinin her F-komşuluğunda G 'nin A 'dan farklı en az bir elemanı varsa A 'ya G 'nin F-yığılma (limit) noktası denir [5].

A, G 'nin F-yığılma noktasıdır $\Leftrightarrow \forall S(A, r)$ F-açık yuvarı için $(S(A, r) - A) \cap G \neq \emptyset$

4.2.4. Tanım

(I^X, μ_X) fuzzy metrik uzay ve $G \subset I^X$ olsun. G 'nin bütün F-yığılma noktalarının kümesine G 'nin F-türetilmiş kümesi denir ve G' ile gösterilir [5].

4.2.5. Tanım

(I^X, μ_X) fuzzy metrik uzay, $G \subset I^X$ ve A, G 'nin F-değme noktası olsun. A 'nın en az bir F-komşuluğunda G 'nin A 'dan farklı hiçbir elemanı yoksa A 'ya G 'nin F-izole (ayrık) noktası denir. Yani G 'nin F-yığılma noktası olmayan F-değme noktasına G 'nin F-izole noktası denir [5].

4.2.6. Tanım

(I^X, μ_X) fuzzy metrik uzay, $G \subset I^X$ ve $A \in I^X$ olsun. A 'nın G 'ye uzaklığı

$$d(A, G) = \inf\{\mu_X(A, B) : B \in G\}$$

şeklinde tanımlanır [5].

4.2.4. Teorem

(I^X, μ_X) fuzzy metrik uzay, $G \subset I^X$ ve $A \in I^X$ olsun. A 'nın G 'nin F-değme noktası olması için gerekli ve yeterli koşul $d(A, G)=0$ olmasıdır [5].

İspat

$(\Rightarrow)$: A, G 'nin F-değme noktası olsun. Gösterelim ki $d(A, G)=0$ 'dır.

Kabul edelim ki $d(A,G) = \inf\{\mu_x(A,B) : B \in G\} = r > 0$ olsun. Bu durumda

$$S(A, \frac{1}{2}r) = \{B \in I^X : \mu_x(B,A) < \frac{1}{2}r\}$$

F-açık yuvarı G 'nin hiçbir elemanını içermez. Yani;

$$S(A, \frac{1}{2}r) \cap G = \emptyset$$

olur. Buna göre A , G 'nin F-değme noktası değildir. Bu ise bir çelişkidir. Böylece A , G 'nin F-değme noktası ise $d(A,G)=0$ 'dır.

$(\Leftarrow) : d(A,G) = \inf\{\mu_x(A,B) : B \in G\} = 0$ olsun.

(i) $A \in G$ 'dir. Bu durumda her A merkezli $S(A,r)$ F-açık yuvarı için $S(A,r) \cap G \neq \emptyset$ olup A , G 'nin F-değme noktasıdır.

(ii) $A \notin G$ ise $d(A,G)=0$ olduğundan $S(A,r) = \{B \in I^X : \mu_x(B,A) < r\}$ F-açık yuvarı G 'nin en az bir elemanını içerir. Buna göre de A , G 'nin F-değme noktasıdır.

4.2.7. Tanım

(I^X, μ_x) fuzzy metrik uzay ve $G \subset I^X$ olsun. G 'nin bütün F-değme noktalarının kümesine G 'nin F-kapanışı denir ve $\overline{G}$ ile gösterilir [5].

4.2.8. Tanım

(I^X, μ_x) fuzzy metrik uzay, $G \subset I^X$ ve $A \in I^X$ olsun. Eğer A merkezli bir F-açık yuvar G tarafından kapsanır ise A 'ya G 'nin F-iç noktası denir.

A, G 'nin F-iç noktasıdır $\Leftrightarrow S(A,r) \subset G$ olacak biçimde $\exists S(A,r)$ vardır

G 'nin bütün F-iç noktalarının kümesine G 'nin F-içi denir ve $F_{\text{int}}(G)$ ile gösterilir [5].

4.2.9. Tanım

(I^X, μ_X) fuzzy metrik uzay ve $G \subset I^X$ olsun. G 'nin tümleyeninin F-iç noktasına G 'nin F-dış noktası denir. G 'nin tüm F-dış noktalarının kümesine G 'nin F-dışı denir ve $F_{\text{ext}}(G)$ ile gösterilir [5].

4.2.10. Tanım

(I^X, μ_X) fuzzy metrik uzay ve $M \subset I^X$ olsun. Eğer M 'nin tümleyeni F-açık ise M 'ye F-kapalı küme denir [5].

4.2.2. Not

(i) Bir F-kapalı kümenin tümleyeni F-açık küme ve bir F-açık kümenin tümleyeni F-kapalı kümedir.

(ii) $\emptyset$ ve I^X hem F-açık hem de F-kapalı kümedir.

4.2.5. Teorem

Bir fuzzy metrik uzayda F-kapalı yuvar F-kapalı kümedir [5].

İspat

(I^X, μ_X) fuzzy metrik uzay ve bu uzayda $\bar{S}(A, r) = \{B \in I^X : \mu_X(B, A) \leq r\}$ F-kapalı yuvarını ele alalım.

Eğer $\{\bar{S}(A, r)\}^c$ kümesinin F-açık küme olduğunu gösterirsek $\bar{S}(A, r)$ F-kapalı kümedir. $B \in \{\bar{S}(A, r)\}^c$ keyfi bir nokta olsun.

$$B \in \{\bar{S}(A, r)\}^c \Rightarrow \mu_x(A, B) > r$$

Keyfi bir $\varepsilon > 0$ için $\mu_x(A, B) = r + 2\varepsilon$ olsun. Bu durumda $S(B, \varepsilon) \subset \{\bar{S}(A, r)\}^c$ 'dir.

Gerçekten $\forall C \in S(B, \varepsilon)$ için $\mu_x(B, C) < \varepsilon$ olup

$$\begin{aligned} \mu_x(B, A) &\leq \mu_x(B, C) + \mu_x(C, A) \Rightarrow \mu_x(C, A) \geq \mu_x(B, A) - \mu_x(B, C) \\ &\Rightarrow \mu_x(C, A) \geq r + 2\varepsilon - \varepsilon = r + \varepsilon \Rightarrow \mu_x(C, A) > r \\ &\Rightarrow C \in \{\bar{S}(A, r)\}^c \end{aligned}$$

Böylece $S(B, \varepsilon) \subset \{\bar{S}(A, r)\}^c$ olacak biçimde $S(B, \varepsilon)$ F-açık yuvarı bulunduğundan $\{\bar{S}(A, r)\}^c$ F-açık kümedir. O halde $\bar{S}(A, r)$ F-kapalı kümedir.

4.2.6. Teorem

Bir fuzzy metrik uzayda;

- (i) Sonlu sayıdaki F-kapalı kümenin birleşimi F-kapalıdır.
- (ii) Keyfi sayıdaki F-kapalı kümenin arakesiti F-kapalıdır [5].

İspat

(I^X, μ_x) fuzzy metrik uzay olsun.

- (i) $M_1, M_2, \dots, M_n$ F-kapalı kümeler olsun.

$$M = \bigcup_{i=1}^n M_i$$

diyelim. $M^c = \bigcap_{i=1}^n M_i^c$ olup burada $i=1,2,\dots,n$ için M_i^c 'ler F-açıktır. Sonlu sayıdaki

F-açık kümenin arakesiti F-açık olduğundan $M^c = \bigcap_{i=1}^n M_i^c$ F-açık kümedir. Buna

göre $M = \bigcup_{i=1}^n M_i$ F-kapalı kümedir.

(ii) $\{M_i\}_{i \in I}, (I^X, \mu_X)$ fuzzy metrik uzayının F-kapalıları ailesi olsun.

$$M = \bigcap_{i \in I} M_i$$

diyelim. $M^c = \bigcup_{i \in I} M_i^c$ olup $\forall i \in I$ için M_i^c F-açıktır. F-açık kümelerin keyfi

sayıdaki birleşimi F-açık olduğundan $M^c = \bigcup_{i \in I} M_i^c$ F-açık kümedir. O halde

$M = \bigcap_{i \in I} M_i$ kümesi F-kapalı kümedir.

Şimdi bu bölümde verilen fuzzy metrik-II tanımı ile üçüncü bölümde tanımladığımız fuzzy metrik-I arasında ilişki olup olmadığını inceleyelim.

Fuzzy metrik-I: $M : X \times X \times (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$, X üzerinde fuzzy metriktir.

Fuzzy metrik-II: $\mu_X : I^X \times I^X \rightarrow [0, 1]$, I^X üzerinde fuzzy metriktir.

Eğer $a, b \in [0, 1]$ olmak üzere $a * b = ab$,

$$M : I^X \times I^X \times (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$$

$$\Rightarrow M(A, B, t) = \frac{1}{e^{\frac{\sup_{x \in X} |A(x) - B(x)|}{t}}}$$

biçiminde tanımlanır ise

1. $\forall A, B \in I^X$ ve $t > 0$ için $M(A, B, t) > 0$ 'dir.

$$2. M(A, B, t) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{e^{\frac{\sup_{x \in X} |A(x) - B(x)|}{t}}} = 1$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{\sup_{x \in X} |A(x) - B(x)|}{t}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sup_{x \in X} |A(x) - B(x)|}{t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sup_{x \in X} |A(x) - B(x)| = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için } |A(x) - B(x)| = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için } A(x) - B(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için } A(x) = B(x) \Leftrightarrow A = B$$

$$3. M(A, B, t) = \frac{1}{e^{\frac{\sup_{x \in X} |A(x) - B(x)|}{t}}} = \frac{1}{e^{\frac{\sup_{x \in X} |B(x) - A(x)|}{t}}} = M(B, A, t)$$

$$\Rightarrow M(A, B, t) = M(B, A, t)$$

4. $\forall x \in X$ için $|A(x) - C(x)| \leq |A(x) - B(x)| + |B(x) - C(x)|$ eşitsizliğinden

$$\sup_{x \in X} |A(x) - C(x)| \leq \sup_{x \in X} |A(x) - B(x)| + \sup_{x \in X} |B(x) - C(x)|$$

dir. Buradan $\forall s, t > 0$ için $\frac{t+s}{t} > 1, \frac{t+s}{s} > 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \sup_{x \in X} |A(x) - C(x)| \leq \left(\frac{t+s}{t}\right) \sup_{x \in X} |A(x) - B(x)| + \left(\frac{t+s}{s}\right) \sup_{x \in X} |B(x) - C(x)| \\
&\Rightarrow \frac{\sup_{x \in X} |A(x) - C(x)|}{t+s} \leq \frac{\sup_{x \in X} |A(x) - B(x)|}{t} + \frac{\sup_{x \in X} |B(x) - C(x)|}{s} \\
&\Rightarrow e^{\frac{\sup_{x \in X} |A(x) - C(x)|}{t+s}} \leq e^{\frac{\sup_{x \in X} |A(x) - B(x)|}{t}} + e^{\frac{\sup_{x \in X} |B(x) - C(x)|}{s}} \\
&\Rightarrow e^{\frac{\sup_{x \in X} |A(x) - C(x)|}{t+s}} \leq e^{\frac{\sup_{x \in X} |A(x) - B(x)|}{t}} e^{\frac{\sup_{x \in X} |B(x) - C(x)|}{s}} \\
&\Rightarrow \frac{1}{e^{\frac{\sup_{x \in X} |A(x) - B(x)|}{t}}} \frac{1}{e^{\frac{\sup_{x \in X} |B(x) - C(x)|}{s}}} \leq \frac{1}{e^{\frac{\sup_{x \in X} |A(x) - C(x)|}{t+s}}} \\
&\Rightarrow M(A, B, t) * M(B, C, s) \leq M(A, C, t+s)
\end{aligned}$$

5. $\forall t_0 > 0$ için

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow t_0} M(A, B, t) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{e^{\frac{\sup_{x \in X} |A(x) - B(x)|}{t}}} = \frac{1}{\lim_{t \rightarrow t_0} e^{\frac{\sup_{x \in X} |A(x) - B(x)|}{t}}} = \frac{1}{e^{\frac{\sup_{x \in X} |A(x) - B(x)|}{t_0}}} \\
&\Rightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} M(A, B, t) = M(A, B, t_0)
\end{aligned}$$

olduğundan $M(A, B, \cdot) : (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ süreklidir.

Böylece M, I^X üzerinde fuzzy metrik olur.

Buna göre $I^X \times I^X \times (0, \infty)$ 'dan $[0, 1]$ kapalı aralığına yukarıdaki şekilde tanımlanan ve fuzzy metrik-I şartlarını sağlayan bir dönüşüm bulundu. O halde I^X 'de μ_X fuzzy

metriği yardımıyla fuzzy metrik-I anlamında $M(A, B, t) = \frac{1}{e^{\frac{\sup_{x \in X} |A(x) - B(x)|}{t}}}$ şeklinde bir

fuzzy metrik tanımlanabildi. Ancak bunun tersine X üzerinde $M : X \times X \times (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ fuzzy metrik-I yardımı ile fuzzy metrik-II anlamında bir örnek bulunamadığı için iki fuzzy metrik tanımı arasında kesin bir sonuca ulaşamamıştır.

KAYNAKLAR

1. Zadeh, L.A., "Fuzzy Sets", *Inform and Control*, 8: 338-353 (1965).
2. Chang, C.L., "Fuzzy Topological Spaces", *J.Math.Anal.Appl.*, 24: 182-190 (1968).
3. Nanda, S., "On Fuzzy Topological Spaces", *Fuzzy Sets and Systems*, 19: 193-197 (1986).
4. George, A. and Veeramani, P., "On Some Results in Fuzzy Metric Spaces", *Fuzzy Sets and Systems*, 64: 395-399 (1994).
5. Chacrabarty, K., Biswas, R. and Nanda, S., "On Fuzzy Metric Spaces", *Fuzzy Sets and Systems*, 99: 111-114 (1998).
6. Ming, P. P. and Liu, Ying-Ming, "Fuzzy Topology I. Neighborhood Structure of a Fuzzy Point and More-Smith Convergence", *J.Math.Anal.Appl.*, 76: 571-599 (1980).
7. Alaca, C., "Fuzzy Uzaylarında Süreklilik", Yüksek Lisans Tezi, *Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara, 6-20 (2001).
8. Yıldız, C., "Topolojik Uzayın Temel Kavramları", Genel Topoloji, *Gazi Üniversitesi*, Ankara, 69-70 (2002).
9. Gürsul, F., "Belirtisiz Topolojik Uzaylarda Kompaktlıklar", Yüksek Lisans Tezi, *Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara, 17 (2003).
10. Liu, Ying-Ming and Luo, Mao-Kang, "Fuzzy Topology", *World Scientific Publishing*, 9:82 (1998).
11. George, A. and Veeramani, P., "On Some Results of Analysis for Fuzzy Metric Spaces", *Fuzzy Sets and Systems*, 90: 365-368 (1997).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : AKMAN, Yasemin
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 13.11.1982 ANKARA
Medeni hali : Evli
Telefon : 0 (312) 282 24 58
e-mail : yaseminkurt17@mynet.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Gazi Üniversitesi/ Matematik Bölümü	2004
Lise	İbn-i Sina Süper Lisesi	2000

Yabancı Dil

İngilizce