

**FUZZY NORMLA ELDE EDİLEN
FUZZY TOPOLOJİK UZAYLAR**

Mustafa ÖZBEY

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**OCAK 2007
ANKARA**

Mustafa ÖZBEY tarafından hazırlanan FUZZY NORMLA ELDE EDİLEN FUZZY TOPOLOJİK UZAYLAR adlı bu tezin YÜKSEK LİSANS tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Cemil YILDIZ

Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile, MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Aydın TİRYAKİ

Üye : Prof. Dr. Cemil YILDIZ

Üye : Doç. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU

Üye : Yrd. Doç. Dr. Erdal GÜNER

Üye : Yrd. Doç. Dr. Çetin VURAL

Tarih : 29.01.2007

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Mustafa ÖZBEY

**FUZZY NORMLA ELDE EDİLEN
FUZZY TOPOLOJİK UZAYLAR
(Yüksek Lisans Tezi)**

Mustafa ÖZBEY

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Ocak 2007**

ÖZET

Bu tez çalışmasında; fuzzy normla elde edilen fuzzy topolojik uzaylar ele alınmıştır. Tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde girişe yer verilmiştir. İkinci bölümde, daha sonraki bölümlere yardımcı olması için fuzzy küme, fuzzy nokta, fuzzy seviye kümesi, fuzzy reel sayısı, fuzzy süreklilik, fuzzy yakınsaklık ve fuzzy Hausdorfftan bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde fuzzy normlu lineer uzay tanımı verilmiş ve fuzzy normlu lineer uzayda yakınsak dizi ve Cauchy dizi arasındaki ilişki incelenmiştir. Ayrıca fuzzy norm ve fuzzy metrik arasındaki ilişki ispat edilmiştir. Son bölümde ise fuzzy normla elde edilen fuzzy topolojik uzaylarda bazı tanım ve önermeler verilmiştir. Bunlarla ilgili önermeler ispatlanarak aralarındaki ilişkiler incelenmiştir.

Bilim Kodu : 204.1.132
Anahtar Kelimeler : Fuzzy küme, Fuzzy reel sayısı, Fuzzy seviye kümesi, Fuzzy normlu lineer uzay, Fuzzy topolojisi
Sayfa Adedi : 45
Tez Yöneticisi : Prof. Dr. Cemil YILDIZ

**FUZZY TOPOLOGICAL SPACES
GENERATED BY FUZZY NORM**

(M. Sc. Thesis)

Mustafa ÖZBEY

**GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

October 2007

ABSTRACT

In this thesis, we have related fuzzy topological spaces generated by fuzzy norm. The thesis consists of four sections. In the first part the introduction takes place. In the second part it is examined fuzzy set, fuzzy point, fuzzy level set, fuzzy real number, fuzzy continuity, fuzzy convergence and fuzzy Hausdorff in order to help the more recent parts. In the third part definition of fuzzy normed linear space is given and the relation between convergent sequence and Cauchy sequence in a fuzzy normed linear space is researched. Furthermore, the relation between fuzzy metric and fuzzy norm is proved. In the last part some definitions and propositions are given in fuzzy topological spaces generated by fuzzy norm. Some related propositions proved and relations between them are also given.

Science Code : 204.1.132
**Key Words : Fuzzy set, Fuzzy real number, Fuzzy level set, Fuzzy normed
linearspace, Fuzzy topology.**
Page Number : 45
Adviser : Prof. Dr. Cemil YILDIZ

TEŞEKKÜR

Tez konumu verip, beni fuzzy uzaylarına yönlendiren, çalışmalarım boyunca yardımlarını ve değerli zamanını hiçbir zaman esirgemeyen Sayın Hocam Prof. Dr. Cemil YILDIZ'a, ayrıca manevi destekleri ile beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme, yardımları için M. Akif ERCAN arkadaşşıma, tezin yazımı aşamasında bana yardımcı olan Meldan İŞCEN'e teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ	viii
SİMGELER	ix
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1. Fuzzy Küme ve Fuzzy Kümeler ile İlgili İşlemler	4
2.2. Fuzzy Topolojik Uzay ve Fuzzy Topolojik Uzaylarda Bazı Temel Kavramlar	15
3. FUZZY NORMLU LİNEER UZAYLAR	19
3.1. Normlu Uzay	19
3.2. Fuzzy Normlu Lineer Uzay	20
4. FUZZY NORMLA ELDE EDİLEN FUZZY TOPOLOJİK UZAYLAR	32
KAYNAKLAR	44
ÖZGEÇMİŞ	45

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 2.1. Yaş kümesi ile oluşturulan fuzzy kümelerinin çizelgesi	9

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$\Rightarrow$	Gerektirir
$\Leftarrow$	Yeterdir
$\Leftrightarrow$	İki yönlü gerektirme
I^X	X den I ya tanımlanan fonksiyonların kümesi
$\mu(x)$	μ fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu
τ	Fuzzy topolojisi
$\tau_{ \cdot }$	Fuzzy norm üzerindeki fuzzy topolojisi
$(X, \cdot)$	Fuzzy normlu lineer uzay
$[\cdot]_\alpha$	α -seviye kümesi
$\oplus$	Fuzzy reel sayılarda toplama işlemi
$\ominus$	Fuzzy reel sayılarda çıkarma işlemi
$\odot$	Fuzzy reel sayılarda çarpma işlemi
$\oslash$	Fuzzy reel sayılarda bölme işlemi
$\preceq$	Fuzzy reel sayılarda kısmi sıralama işlemi
$\mu_\alpha(x, \epsilon)$	$(X, \cdot)$ de α -açık yuvarı

1. GİRİŞ

Cantor ilk kez 1879 yılında küme tanımını verdikten sonra, matematikte incelenen her konuda kesinlik aranmıştır. Böylece olaylar karşısındaki düşünce sistemimiz iki değerlikli mantığa göre olmuştur. Fakat bu mantık günlük hayatımızdaki bir çok olayı açıklamaya yeterli değildir. Örneğin, “hava sıcak” denildiğinde herkes, kesin olarak hava kelimesinin günlük hayattaki kullanımını anlamaktadır. Ancak “sıcak” kelimesinin ifade ettiği anlam izafi olarak birbirinden farklı olabilir. Kutuplarda bulunan bir kişinin sıcak için 15°C 'yi algılamasına mukabil, ekvator civarındaki bir kişi için bu 35°C 'yi bulabilir. Arada bir çok kişinin görüşü olarak başka dereceler de bulunur. Böylece “sıcak” kelimesinin altında, insanların da ima ettiği sayısal anlayışın bir sonucu olarak belirsiz bir durum vardır. Bu rastgele değildir, ancak belirsizdir ve bu şekilde kelimelerin ima ettikleri belirsizliklere fuzzy (bulanık) denir. Günlük örneklerden bir tanesi de bir annenin çocuğuna fırına koyduğu keklerin pişmesi durumunda fırını kapatmasını söylemesi için ya sayısal olarak sıcaklığın hangi dereceye kadar devam etmesini veya daha basit olarak keklerin üstünün açık kahverengi olmaya başlaması halinde kapatmasını söyleyebilir. Bunlardan ikincisi bulanıktır ve sayısal yönleri ima etmesine rağmen kesinlik belirtmemektedir. İkinci çeşit sözel bilginin ise yani renk bilgisinin bir çok kişi tarafından tercih edileceği açıktır. O halde, böyle bilgileri bilgisayarlara tanıtarak bulanık işlemlerin yapılmasını temin etmek yoluna gidilmelidir. İşte bu yoldaki en geçerli yöntem bilim (metodoloji) fuzzy küme, mantık ve sistemleridir. Yukarıdaki kek örneğinde, sıcaklığı 60°C olması gibi bir bilgiyi uygulamak oldukça zordur, fakat keklerin üzerindeki rengin kahverengiye dönüşmesiyle pişmenin kıvamında olduğunu çocuk bile anlar.

Fuzzy ilkeler hakkında ilk bilgiler 1965 yılında Azerbeycan asıllı Prof. Dr. Lütü Askerzade tarafından literatüre kazandırılmasına karşılık bu fikirler Batı dünyasında şüphe ile karşılanmış ve oldukça yoğun tenkit almıştır. Ancak 1970'li yıllardan sonra Doğu dünyasında ve özellikle de Japonya'da fuzzy mantık ve sistem kavramlarına önem verilmiştir. Bunların teknolojik cihaz yapım ve işleyişinde kullanılması bugün bütün dünyada yaygın hale gelmiştir. Batıda gecikmenin ana sebebi Batı kültürünün

temelinde ikili mantık, yani Aristo mantığının yatması ve olaylara evet-hayır, beyaz-siyah, kurak-sulak, artı-eksi, 0-1 v.b. gibi ikili esasta yaklaşılmasıdır. Bu iki değer arasında başka seçeneklere kesin değil düşüncesi ile yer verilmezdi Batı'da. Batı'da fuzzy kelimesi güvensizliği ifade eder. Doğu'da ise bu güvensizlikte bile güzelliklerin bulunabileceği düşüncesi vardır. Örneğin, insanlar arasındaki gerekli diyalogun bile sağlanması bu tür bulanık (kesin olmayan, oldukça kişisel) görüşlere bağlıdır.

Fuzzy kavram ve sistemlerin dünyanın değişik araştırma merkezlerinde dikkat kazanması 1975 yılında Mamdani ve Assilian tarafından yapılan gerçek bir kontrol uygulaması ile olmuştur. Bu araştırmacılar ilk defa buhar makinası kontrolünün fuzzy sistem ile modellenmesini başarmışlardır. Bu ön çalışmadan, fuzzy sistemlerle çalışmanın ne kadar kolay ama sonuçlarının da ne kadar etkili olduğunu anlamışlardır.

Daha sonraki yıllarda fuzzy sistem uygulaması çimento fabrikasının işletilmesi ve kontrolü için yapılırca; artık fuzzy kavramlar dünyanın birçok yerinde yavaş yavaş kullanılmaya başlanmıştır. Bu faaliyet, Batı'da çok yavaş olurken, Doğu'da ve özellikle Japonya, Singapur, Kore ve Malezya'da kendisini daha fazla göstermiştir. 1980'den sonra fuzzy sistemin elektrik süpürgeleri, çamaşır makineleri, asansörleri, metro ve şirket işletimi gibi konularda kullanılmasında patlama olmuştur. Son yıllarda, birçok mühendislik dallarında, veri tabanlarının sözelleştirilmesinde, telesekreterlerin cevaplanmasında ve birçok konularda fuzzy mantık, bütün dünyada kullanılır hale gelmiştir. Tüm bunların doğal sonucu olarak matematiğinde bu fuzzy küme kavramına göre yeniden düzenlenmesi gereksinimi ortaya çıkmış ve bu yeni düzenleme ile birlikte birçok makale yayınlanmıştır.

Bizde bu çalışmamızda ikinci bölümde; ileriki konularda bize yardımcı olacak; fuzzy küme, fuzzy nokta, fuzzy seviye kümesi, fuzzy reel sayısı, fuzzy reel sayılarındaki aritmetik işlemler, fuzzy komşuluk, fuzzy süreklilik, fuzzy yakınsaklık, fuzzy Hausdorff gibi temel kavramları Zadeh [1], Chang [2], Alaca [3] yüksek lisans tezi, Das [4], Felbin [5], Ming [6] makalelerinden faydalanarak tanımlandı. Üçüncü bölümde ise ilk önce Yıldız [7] Genel Topoloji kitabından alışımlı normlu uzay

tanımı yapılarak örnek verildi. Felbin [5] makalesinden fuzzy normlu lineer uzay tanımı verilerek, fuzzy normlu lineer uzayda yakınsak dizi ve Cauchy dizileri ile ilgili bazı ispatlar incelendi. Ayrıca fuzzy normlu uzay ve fuzzy metrik uzay arasındaki ilişki ispatlandı. Son bölümde de Das [4] makalesini açarak, fuzzy normlu fuzzy topolojik uzaylar incelenerek, bu fuzzy topolojik uzaylar hakkında fuzzy dizisel süreklilik, fuzzy Hausdorff gibi kavramları kullanılarak bazı önermeler arasındaki ilişkiler incelendi.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Fuzzy Küme ve Fuzzy Kümeler ile İlgili İşlemler

2.1.1. Tanım

X boştan farklı herhangi bir küme ve $I = [0,1]$ olmak üzere X den I ya tanımlanan bütün fonksiyonların kümesini I^X ile gösterelim. I^X in her bir elemanına X in bir fuzzy kümesi denir [1].

2.1.2. Tanım

X in bir μ fuzzy alt kümesi, $f_\mu: X \rightarrow I$ üyelik fonksiyonu ile karakterize edilen $\mu = \{(x, f_\mu(x)) : x \in X\} \subset X \times I$ kümesine denir. Burada $f_\mu(x)$, μ fuzzy kümesinin üyelik derecesidir. Bundan sonra genellikle f_μ yerine μ , $f_\mu(x)$ yerine $\mu(x)$ alınacaktır [1].

2.1.3. Tanım

$X \neq \emptyset$, $\mu_1, \mu_2 \in I^X$ olsun. μ_1 ve μ_2 üyelik dereceleri $\forall x \in X$ için sırasıyla $\mu_1(x)$ ve $\mu_2(x)$ ile gösterilsin. μ_1 ve μ_2 fuzzy kümeleri için aşağıdaki özellikler vardır:

$$(i) \mu_1 \leq \mu_2 \Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için } \mu_1(x) \leq \mu_2(x)$$

$$(ii) \mu_1 = \mu_2 \Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için } \mu_1(x) = \mu_2(x)$$

$$(iii) \mu_3 = \mu_1 \wedge \mu_2 \Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için } \mu_3(x) = \min\{\mu_1(x), \mu_2(x)\}$$

$$(iv) \mu_4 = \mu_1 \vee \mu_2 \Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için } \mu_4(x) = \max\{\mu_1(x), \mu_2(x)\}$$

$$(v) \mu_5 = \mu_1^C \Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için } \mu_5(x) = 1 - \mu_1(x) = \mu_1^C(x) \quad [1].$$

$\{\mu_i : i \in I\}$ fuzzy kümeler ailesi olmak üzere $\mu_3 = \bigwedge_{i \in I} \mu_i$ arakesiti ve $\mu_4 = \bigvee_{i \in I} \mu_i$ birleşimi $\forall x \in X$ için sırasıyla $\mu_3(x) = \inf_{i \in I} \{\mu_i(x)\}$, $\mu_4(x) = \sup_{i \in I} \{\mu_i(x)\}$ ile tanımlanır

[2].

2.1.1. Özellik

$X \neq \emptyset$, $\mu_1, \mu_2 \in I^X$ olsun. Aşağıdaki özellikler vardır:

- (i) $\emptyset^C = X$, $X^C = \emptyset$
- (ii) $\mu_1 \leq \mu_2 \Leftrightarrow \mu_2^C \leq \mu_1^C$
- (iii) $(\mu_1 \wedge \mu_2)^C = \mu_1^C \vee \mu_2^C$
- (iv) $(\mu_1 \vee \mu_2)^C = \mu_1^C \wedge \mu_2^C$ dir [3].

2.1.1. Teorem

X de iki fuzzy küme μ_1 ve μ_2 olsun.

- i) $\mu_1 \vee \mu_2$ fuzzy kümesi μ_1 ve μ_2 'yi ihtiva eden en küçük fuzzy kümesidir.
- ii) $\mu_1 \wedge \mu_2$ fuzzy kümesi μ_1 ve μ_2 fuzzy kümeleri tarafından ihtiva edilen en küçük fuzzy kümesidir [3].

2.1.1. Örnek

$X = \{x_1, x_2\}$, $I = [0,1]$ olmak üzere, X 'de bir fuzzy küme μ_1 ve μ_2
 $\mu_1 = \{(x_1/0,2), (x_2/0,7)\}$, $\mu_2 = \{(x_1/0,5), (x_2/0,3)\}$ olarak verilsin. Böylece; $\mu_1 \wedge \mu_2$,
 $\mu_1 \vee \mu_2$ fuzzy kümeleri ve Teorem 2.1.1 in doğru olduğunu gösteriniz.

Çözüm

μ_1 ve μ_2 fuzzy kümelerinin $x \in X$ için üyelik fonksiyonlarının değerleri sırasıyla $\mu_1(x)$ ve $\mu_2(x)$ olsun. Buna göre;

$$x_1 \in X \text{ için } \mu_1(x_1) = 0,2 \text{ ve } x_1 \in X \text{ için } \mu_2(x_1) = 0,5$$

$$x_2 \in X \text{ için } \mu_1(x_2) = 0,7 \text{ ve } x_2 \in X \text{ için } \mu_2(x_2) = 0,3 \text{ dır.}$$

$$\mu_1 \wedge \mu_2 = \mu_3 \Leftrightarrow \mu_3(x) = \min\{\mu_1(x), \mu_2(x)\} \quad (\forall x \in X)$$

$$\mu_3(x) = \{(x_1/0,2), (x_2/0,3)\}$$

$$\mu_1 \wedge \mu_2 = \{(x_1/0,2), (x_2/0,3)\}$$

Gerçekten $\mu_3 \leq \mu_1$ ve $\mu_3 \leq \mu_2$ 'dir.

$$\mu_1 \vee \mu_2 = \mu_4 \Leftrightarrow \mu_4(x) = \max\{\mu_1(x), \mu_2(x)\} \quad (\forall x \in X)$$

$$\mu_4(x) = \{(x_1/0,5), (x_2/0,7)\}$$

$$\mu_1 \vee \mu_2 = \{(x_1/0,5), (x_2/0,7)\}$$

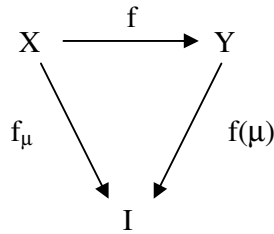
Gerçekten $\mu_1 \leq \mu_1 \vee \mu_2$ ve $\mu_2 \leq \mu_1 \vee \mu_2$ dir.

2.1.4. Tanım

X ve Y herhangi iki küme olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve μ , X'de bir fuzzy alt küme olsun. $\forall y \in Y$ ve $f^{-1}(y) = \{x : f(x) = y\}$ için,

$$f(\mu)(y) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu(x) & , \quad f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0 & , \quad f^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases}$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlanan Y'nin bir fuzzy alt kümesi olan $f(\mu)$ fuzzy alt kümesine μ nün f altındaki görüntüsü denir [2,3]. Şema ile gösterirsek,

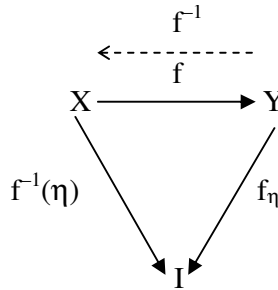


2.1.5. Tanım

X, Y iki küme olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve η , Y 'de bir fuzzy alt küme olsun. $\forall x \in X$ için,

$$f^{-1}(\eta)(x) = \eta(f(x))$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlanan $f^{-1}(\eta)$ ifadesine η 'nin ters görüntüsü denir [2,3]. Şema ile gösterirsek,



2.1.6. Tanım

$x \in X, \alpha \in (0,1]$ olsun. X 'de x_{α} fuzzy kümesi

$$x_{\alpha}(t) = \begin{cases} \alpha & , \quad t = x, \\ 0 & , \quad t \neq x. \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan x_{α} fuzzy kümesine X 'de bir fuzzy noktası denir. Burada $x \in X$ noktasına x_{α} fuzzy noktasının desteği (dayanağı), $\alpha \in (0,1]$ sayısına da x_{α} nın değeri denir [4–6].

$\alpha \leq \mu(x)$ ise x_{α} fuzzy noktası bir μ fuzzy kümesi tarafından kapsanır [4–6].

2.1.7. Tanım

μ , X 'de bir fuzzy kümesi ve $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere,

$$[\mu]_{\alpha} = \{x \in X : \mu(x) \geq \alpha\}$$

kümesine μ fuzzy kümesinin α -seviye kümesi denir [4].

2.1.2. Teorem

μ_1 ve μ_2 , X 'in herhangi iki alt fuzzy kümeleri olsun. $\forall \alpha, \beta \in (0,1]$ için,

$$i) [\mu_1]_\alpha = [\mu_2]_\alpha \Leftrightarrow \mu_1 = \mu_2 .$$

$$ii) [\mu_1]_\alpha \leq [\mu_1]_\beta \Leftrightarrow \beta \leq \alpha [5].$$

İspat

(i) İspatı açıktır.

(ii) $\Leftarrow$: $\beta \leq \alpha$ olsun. $[\mu_1]_\alpha \leq [\mu_1]_\beta$ ifadesi açıktır.

$\Rightarrow$: $[\mu_1]_\alpha \leq [\mu_1]_\beta$ ve $\beta > \alpha$ olsun.

$[\mu_1]_\alpha \leq [\mu_1]_\beta$ ise,

$$[\mu_1]_\alpha = \{x \in X : \mu_1(x) \geq \alpha\},$$

$$[\mu_1]_\beta = \{x \in X : \mu_1(x) \geq \beta\}.$$

O zaman en az bir $x_0 \in [\mu_1]_\beta$ vardır ve $x_0 \notin [\mu_1]_\alpha$. O halde $x_0 \in [\mu_1]_\beta$ ise $\beta \leq \mu_1(x_0)$ ve $x_0 \notin [\mu_1]_\alpha$ ise $\mu_1(x_0) < \alpha$ dır.

$\beta > \alpha$ iken $\mu_1(x_0) < \alpha < \beta < \mu_1(x_0)$ dır. Böylece $x_0 \in [\mu_1]_\alpha$ elde edilir. $\forall x \in [\mu_1]_\beta$ ise $\beta \leq \mu_1(x)$ dir, $\alpha < \beta \leq \mu_1(x)$ ise $\forall x \in [\mu_1]_\beta$ ise $x \in [\mu_1]_\alpha$ ise,

$$[\mu_1]_\beta \subseteq [\mu_1]_\alpha.$$

Bu eşitsizlikle çelişkiye düştük. Çünkü $\beta > \alpha$ almıştık. Böylece

$$[\mu_1]_\alpha \leq [\mu_1]_\beta \Rightarrow \beta \leq \alpha \text{ dır.}$$

2.1.2. Örnek

$X = \{5,15,25,35,45,55,65,75,85\}$ kümesi yaşların kümesi olsun X kümesinden faydalanarak “Bebek”, “Genç”, “Yetişkin” ve “Yaşlı” fuzzy kümeleri tanımlanabilir. Şimdi bu fuzzy kümeler için bir tablo oluşturalım.

Çizelge 2.1. Yaş kümesi ile oluşturulan fuzzy kümelerinin çizelgesi

Yaş (Elemanlar)	Bebek	Genç	Yetişkin	Yaşlı
5	0	0	0	0
15	0	0,2	0,1	0
25	0	1	0,9	0
35	0	0,8	1	0
45	0	0,4	1	0,1
55	0	0,1	1	0,2
65	0	0	1	0,6
75	0	0	1	1
85	0	0	1	1

μ 'nün α -seviye kümesi, keyfi $(0,1]$ için $[\mu]_{\alpha} = \{x \in X: \mu(x) \geq \alpha\}$ ile tanımlı idi. Buna göre;

$\alpha = 0,2$ olarak alınırsa, “Genç” fuzzy kümesinin α -seviye kümesi

$\text{Genç}_{0,2} = \{15,25,35,45\}$ dir.

$\alpha = 0,4$ olarak alınırsa “Genç” fuzzy kümesinin α -seviye kümesi,

$\text{Genç}_{0,4} = \{25,35,45\}$ dir.

$\alpha = 0,2$ olarak alınırsa “Yaşlı” fuzzy kümesinin α -seviye kümesi,

$\text{Yaşlı}_{0,2} = \{55,65,75,85\}$

Buna benzer olarak, “Bebek”, “Genç”, “Yetişkin” ve “Yaşlı” fuzzy kümelerinin de keyfi $\alpha \in (0,1]$ için α -seviye kümelerini yazabiliriz. Burada dikkat edecek olursak $[\mu]_{\alpha} \geq [\mu]_{\beta}$ ’dır. Örneğin $\alpha = 0,2$ ve $\beta = 0,4$ olarak alırsak, $\alpha \leq \beta$ iken $\text{Genç}_{0,2} \geq \text{Genç}_{0,4}$ ’dür.

2.1.8. Tanım

Bir X vektör uzayının iki fuzzy alt kümesi μ_1 ve μ_2 olsun. $\mu_1 + \mu_2$ şeklinde iki fuzzy kümesinin toplama işlemi şöyle tanımlanır;

$$(\mu_1 + \mu_2)(x) = \sup_{x = x_1 + x_2} (\mu_1(x_1) \wedge \mu_2(x_2))$$

X ’de bir x_{α} fuzzy noktası için, toplama işlemi kolayca aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$(x_{\alpha} + \mu_1)(y) = \alpha \wedge \mu_1(y - x)$$

ve özellikle,

$$(x + \mu_1)(y) = \mu_1(y - x)$$

olarak gösterilebilir [4].

2.1.9. Tanım

X vektör uzayının, bir fuzzy alt kümesi μ ve t ’de bir sabit olsun. Böylece,

$$(a) \ t \neq 0, \ \forall x \in X \text{ için } (t.\mu)(x) = \mu(t^{-1}.x).$$

$$(b) \ t = 0 \text{ için}$$

$$(t.\mu)(x) = \begin{cases} 0 & , \ x \neq 0, \\ \sup_y \mu(x) & , \ x = 0 \end{cases} \quad [4].$$

2.1.10. Tanım

$\mathbb{R}$ üzerindeki fuzzy kümesine fuzzy reel sayısı denir, yani $\eta: \mathbb{R} \rightarrow I = [0,1]$. “t” reel sayısının üyelik derecesi $\eta(t)$ ile gösterilir [4,5].

2.1.11. Tanım

Eğer $\eta(t_0) = 1$ olacak biçimde bir t_0 reel sayısı varsa, η ’ye normal fuzzy reel sayısı denir [5,7].

2.1.12. Tanım

η fuzzy reel sayısı olsun. Her $t \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ ve $\eta(t) = a$ için, eğer $|s-t| < c = c(t)$ olduğunda $\eta(t) < a+\varepsilon$ olacak şekilde bir $c > 0$ sayısı bulanabiliyorsa η fuzzy reel sayısına üstten yarı sürekli denir, yani $\mathbb{R}$ ’nin alışılmış topolojisinde, $\forall a \in I$ ve $\varepsilon > 0$ için $\eta^{-1}([0, a+\varepsilon))$ $\mathbb{R}$ ’de açıktır [5,7].

2.1.13. Tanım

X bir vektör uzayı ve bu uzayın fuzzy alt kümesi μ olsun. Her $x, y \in X$ ve $k \in [0,1]$ için

$$\mu(kx + (1-k)y) \geq \min(\mu(x), \mu(y))$$

şartını sağlayan μ fuzzy alt kümesine X vektör uzayının bir konveks fuzzy kümesi denir [4].

Aynı şekilde, her $\alpha \in (0,1]$ için

$$[\mu]_{\alpha} = \{x \in X : \mu(x) \geq \alpha\}$$

şeklindeki küme de bir konveks kümedir [4].

2.1.1. Not

Bütün üstten yarı sürekli normal konveks fuzzy reel sayılarını $\mathbb{R}(I)$ ile göstereceğiz.

Her $r \in \mathbb{R}$ için bir $\bar{r}$ fuzzy reel sayısını şöyle tanımlayabiliriz.

$$\bar{r}(t) = \begin{cases} 1 & , \quad t = r, \\ 0 & , \quad t \neq r. \end{cases}$$

$\mathbb{R}, \mathbb{R}(I)$ içine gömülebilir [7].

2.1.2. Not

$\mathbb{R}(I)$ da toplama ve çarpma işlemlerinde $\bar{0}$ ve $\bar{1}$ fuzzy sayıları şöyle tanımlanır [7]:

$$\bar{0}(t) = \begin{cases} 1 & , \quad t = 0 \text{ ise}, \\ 0 & , \quad t \neq 0. \end{cases} \quad \bar{1}(t) = \begin{cases} 1 & , \quad t = 1 \text{ ise}, \\ 0 & , \quad t \neq 1. \end{cases}$$

2.1.3. Not

η bir fuzzy reel sayısı olsun. $t < 0$ için $\eta(t) = 0$ oluyorsa η fuzzy reel sayısına negatif olmayan fuzzy reel sayısı denir ve $\mathbb{R}(I)$ nın negatif olmayan fuzzy reel sayılarını $\mathbb{R}^*(I)$ ile göstereceğiz [4,5].

2.1.14. Tanım

$\eta, \delta \in \mathbb{R}(I)$ ve $[\eta]_\alpha = [a_1^\alpha, b_1^\alpha], [\delta]_\alpha = [a_2^\alpha, b_2^\alpha]$ olsun. $\oplus, \ominus, \odot, \oslash$ işlemleri aşağıdaki gibi tanımlanır [5,7]:

$$[\eta \oplus \delta]_\alpha = [a_1^\alpha + a_2^\alpha, b_1^\alpha + b_2^\alpha]$$

$$[\eta \ominus \delta]_\alpha = [a_1^\alpha - a_2^\alpha, b_1^\alpha - b_2^\alpha]$$

$$[\eta \odot \delta]_\alpha = [a_1^\alpha . a_2^\alpha, b_1^\alpha . b_2^\alpha]$$

$$[\bar{1} \oslash \delta]_\alpha = \left[\frac{1}{b_2^\alpha}, \frac{1}{a_2^\alpha} \right] \quad \text{ve} \quad a_2^\alpha > 0.$$

2.1.15. Tanım

$[\eta]_\alpha = [a_1^\alpha, b_1^\alpha]$ ve $[\delta]_\alpha = [a_2^\alpha, b_2^\alpha]$ olsun.

Her $\alpha \in (0,1]$ için

$$\eta \preceq \delta \Leftrightarrow a_1^\alpha \leq a_2^\alpha \text{ ve } b_1^\alpha \leq b_2^\alpha$$

ise bu bağıntıya $\mathbb{R}(I)$ da kısmi sıralama bağıntısı denir.

Her $\alpha \in (0,1]$ için

$$\eta < \delta \Leftrightarrow a_1^\alpha < a_2^\alpha \text{ ve } b_1^\alpha < b_2^\alpha$$

ise bu bağıntıya $\mathbb{R}(I)$ da tam eşitsizlik denir [5,7].

2.1.16. Tanım

(η_n) , $\mathbb{R}(I)$ da bir dizi ve her $\alpha \in (0,1]$ için $[\eta_n]_\alpha = [a_n^\alpha, b_n^\alpha]$, $[\eta]_\alpha = [a^\alpha, b^\alpha]$ olsun.

Eğer,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^\alpha = a^\alpha \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n^\alpha = b^\alpha$$

ise,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = \eta.$$

Burada (η_n) dizisinin η yakınsaklığına α -seviye yakınsaklığı denir [5,7].

2.1.3. Teorem

$\eta, \delta, \mu \in \mathbb{R}(I)$ ve $[\eta]_\alpha = [a^\alpha, b^\alpha]$, $[\delta]_\alpha = [c^\alpha, d^\alpha]$, $[\mu]_\alpha = [e^\alpha, f^\alpha]$ olsun. Bu taktirde fuzzy reel sayılarının α -seviye kümeleri aşağıdaki şartları sağlar:

$$(a) [\eta \oplus \delta] \ominus \mu = \eta \oplus [\delta \ominus \mu]$$

$$(b) \mu \preceq \eta \text{ ise } \mu \ominus \delta \preceq \eta \ominus \delta.$$

$$(c) \mu \preceq \eta \text{ ve } \delta > \bar{0} \text{ ise}$$

$$(i) \mu \odot \delta \preceq \eta \odot \delta$$

$$(ii) \mu \oslash \delta \preceq \eta \oslash \delta$$

$$(d) c^\alpha > 0 \text{ için}$$

$$(\eta \odot \mu) \oslash \delta = \eta \odot (\mu \oslash \delta) \text{ dır [5].}$$

İspat

Tanım 2.1.14 kullanarak ispatlayalım.

$$(a) [\eta \oplus \delta]_\alpha = [a^\alpha + c^\alpha, b^\alpha + d^\alpha]$$

ve

$$[\eta \ominus \mu]_\alpha = [c^\alpha - f^\alpha, d^\alpha - e^\alpha].$$

Şimdi $[(\eta \oplus \delta) \ominus \mu]_\alpha$ ifadesini yazalım.

$$\begin{aligned} [(\eta \oplus \delta) \ominus \mu]_\alpha &= [a^\alpha + c^\alpha - f^\alpha, b^\alpha + d^\alpha - e^\alpha] \\ &= [a^\alpha + (c^\alpha - f^\alpha), b^\alpha + (d^\alpha - e^\alpha)] \\ &= [\eta \oplus (\delta \ominus \mu)]_\alpha \end{aligned}$$

olur.

$$(b) [\mu \ominus \delta]_\alpha = [e^\alpha - d^\alpha, f^\alpha - c^\alpha]$$

ve

$$[\eta \ominus \delta]_\alpha = [a^\alpha - d^\alpha, b^\alpha - c^\alpha]$$

eşitlikleri vardır. Şimdi $\mu \leq \eta$ ise $e^\alpha \leq a^\alpha$ ve $f^\alpha \leq b^\alpha$ dır. Buradan $e^\alpha - d^\alpha \leq a^\alpha - d^\alpha$ ve $f^\alpha - c^\alpha \leq b^\alpha - c^\alpha$ yazılır. Böylece, $\mu \ominus \delta \preceq \eta \ominus \delta$ dır.

(c) i) $[\mu \odot \delta]_\alpha$ ve $[\eta \odot \delta]_\alpha$ ifadeleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$[\mu \odot \delta]_\alpha = [e^\alpha \cdot c^\alpha, f^\alpha \cdot d^\alpha]$$

$$[\eta \odot \delta]_\alpha = [a^\alpha \cdot c^\alpha, b^\alpha \cdot d^\alpha].$$

Şimdi $\mu \leq \eta$ ise $e^\alpha \leq a^\alpha$ ve $f^\alpha \leq b^\alpha$ dır. Ayrıca $c^\alpha > 0$ olduğundan $e^\alpha \cdot c^\alpha \leq a^\alpha \cdot c^\alpha$ ve $f^\alpha \cdot d^\alpha \leq b^\alpha \cdot d^\alpha$ yazılır. Bu da bize $\mu \odot \delta \leq \eta \odot \delta$ olduğunu gösterir.

ii) $[\mu \oslash \delta]_\alpha$ ve $[\eta \oslash \delta]_\alpha$ ifadelerini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$[\mu \oslash \delta]_\alpha = \left[\frac{e^\alpha}{d^\alpha}, \frac{f^\alpha}{c^\alpha} \right]$$

$$[\eta \oslash \delta]_\alpha = \left[\frac{a^\alpha}{d^\alpha}, \frac{b^\alpha}{c^\alpha} \right].$$

Buradan,

$$\frac{e^\alpha}{d^\alpha} \leq \frac{a^\alpha}{d^\alpha}, \frac{f^\alpha}{c^\alpha} \leq \frac{b^\alpha}{c^\alpha},$$

böylece $\mu \oslash \delta \leq \eta \oslash \delta$ dır.

$$d) [\eta \odot (\mu \oslash \delta)]_\alpha = \left[\frac{a^\alpha \cdot e^\alpha}{d^\alpha}, \frac{b^\alpha \cdot f^\alpha}{c^\alpha} \right]$$

$$= [\eta \odot (\mu \odot \delta)]_\alpha.$$

2.2. Fuzzy Topolojik Uzay ve Fuzzy Topolojik Uzaylarda Bazı Temel Kavramlar

2.2.1. Tanım

$\tau \leq I^X$ fuzzy kümelerinin ailesi aşağıdaki şartları sağlıyorsa, τ ailesine X üzerinde fuzzy topolojisi,

$$(t_1) 0 \text{ ve } 1 \in \tau,$$

$$(t_2) \forall \mu_1, \mu_2 \in \tau \Rightarrow \mu_1 \wedge \mu_2 \in \tau,$$

$$(t_3) \forall i \in I \text{ için } \{\mu_i\} \in \tau \text{ ise } \bigvee_{i \in I} \mu_i \in \tau.$$

(X, τ) ikilisine de fuzzy topolojik uzay denir. τ topolojisinin her elemanına fuzzy açık küme; X uzayına göre tümleyeni açık olan kümeye de fuzzy kapalı küme denir. Genel topolojide olduğu gibi τ ailesi sadece 0 ve 1 den oluşuyorsa (X, τ) fuzzy topolojik uzayına indiskret, tüm fuzzy kümelerinden oluşuyorsa (X, τ) fuzzy topolojik uzayına da diskret fuzzy topolojik uzay denir [4,5].

2.2.1. Örnek

$X = \{a, b\}$ olmak üzere, X kümesi üzerine de bir fuzzy topolojisi oluşturalım.

$$\mu_1 = \{(a/0,4), (b/0,7)\}, \mu_1(a) = 0,4, \mu_1(b) = 0,7.$$

$$\mu_2 = \{(a/0,5), (b/0,2)\}, \mu_2(a) = 0,5, \mu_2(b) = 0,2.$$

$$\mu_3 = \{(a/0,4), (b/0,2)\}, \mu_3(a) = 0,4, \mu_3(b) = 0,2.$$

$$\mu_4 = \{(a/0,5), (b/0,7)\}, \mu_4(a) = 0,5, \mu_4(b) = 0,7.$$

$$1 = X = \{(a/1), (b/1)\} \quad 0 = \emptyset = \{(a/0), (b/0)\}$$

Fuzzy kümelerini alacak olursak $\tau = \{0, 1, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4\}$ şeklinde tanımlanan τ ailesi X üzerinde bir fuzzy topolojisi oluşturur. Gerçekten,

$$(t_1) 0 \text{ ve } 1 \text{ fuzzy kümeleri } \tau \text{ ailesine ait olduğundan } 0 \text{ ve } 1 \in \tau \text{ dır.}$$

(t_2) τ ailesine ait her sonlu elemanın arakesiti τ ailesine aittir. Fuzzy kümelerinde arakesit tanımında “0” kümesinin diğerleri ile arakesiti 0 ve 1 in diğerleri ile arakesiti diğer fuzzy kümeleri olduğundan, sonlu arakesit sağlanır. Ayrıca,

$$\mu_1 \wedge \mu_2 = \{(a/0,4),(b/0,2)\} = \mu_3 \in \tau,$$

$$\mu_1 \wedge \mu_3 = \{(a/0,4),(b/0,2)\} = \mu_3 \in \tau,$$

$$\mu_1 \wedge \mu_4 = \{(a/0,4),(b/0,7)\} = \mu_1 \in \tau,$$

$$\mu_2 \wedge \mu_3 = \{(a/0,4),(b/0,2)\} = \mu_3 \in \tau,$$

$$\mu_3 \wedge \mu_4 = \{(a/0,5),(b/0,2)\} = \mu_2 \in \tau,$$

$$\mu_3 \wedge \mu_4 = \{(a/0,4),(b/0,2)\} = \mu_3 \in \tau.$$

Benzer olarak;

$$\mu_1 \wedge \mu_2 \wedge \mu_3 = (\mu_1 \wedge \mu_2) \wedge \mu_3 = \mu_3 \in \tau,$$

$$\mu_1 \wedge \mu_2 \wedge \mu_4 = (\mu_1 \wedge \mu_2) \wedge \mu_4 = \mu_3 \in \tau,$$

$$\mu_1 \wedge \mu_3 \wedge \mu_4 = (\mu_1 \wedge \mu_3) \wedge \mu_4 = \mu_3 \in \tau,$$

$$\mu_1 \wedge \mu_2 \wedge \mu_3 \wedge \mu_4 = (\mu_1 \wedge \mu_2) \wedge (\mu_3 \wedge \mu_4) = \mu_3 \in \tau.$$

Fuzzy kümelerinin sonlu arakesitleri yine τ ailesine aittir.

(t_3) Keyfi birleşimleri de τ ailesine ait olduğu (t_2) dekine benzer olarak gösterilebilir.

O halde, τ ailesi X üzerinde bir fuzzy topolojisi.

2.2.2. Tanım

(X, τ) fuzzy topolojik uzayında τ da bir p var öyleki $p \leq \mu$ ve $\mu(x) = p(x) > 0$ ise μ fuzzy kümesine $x \in X$ noktasının komşuluğu denir [4].

2.2.3. Tanım

$f: (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \tau_2)$ fonksiyonu $x \in X$ noktasında süreklidir denir, eğer $f(x)$ in her μ komşuluğu için $f^{-1}(\mu)$, x in bir komşuluğu ise.

f her $x \in X$ için fuzzy sürekli ise f 'e X 'de fuzzy süreklidir denir. Buna denk olarak Y 'nin her fuzzy açık alt kümesinin ters görüntüsü X 'de fuzzy açık ise fuzzy süreklidir [4].

2.2.4. Tanım

(X, τ) fuzzy topolojik uzay, X 'de (x_n) dizisi ve $x \in X$ olsun. Eğer x in her μ açık komşuluğu için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ var $\ni \forall n \geq n_0$ için $\mu(x_n) > 0$ ise (x_n) dizisi x noktasına yakınsaktır denir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ile gösterilir [4].

2.2.5. Tanım

(X, τ) fuzzy topolojik uzay olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ ve $x \neq y$ için $\eta, \beta \in \tau$ var öyle ki: $\eta(x) = \beta(y) = 1$ ve $\eta \wedge \beta = 0$ ise, (X, τ) fuzzy topolojik uzayına fuzzy Hausdorfftur denir [4].

3. FUZZY NORMLU LİNEER UZAYLAR

Bu bölümde Clementina Felbin [5] tarafından tanımlanan fuzzy normlu lineer uzay ve bununla ilgili bazı kavramlar ele alınacaktır. Bu konuya geçmeden önce alışılmış normlu uzay tanımını verelim.

3.1. Normlu Uzay

3.1.1. Tanım

X bir reel (veya kompleks) vektör uzay olsun. Her $\vec{x} \in X$ vektörünü $\|\vec{x}\|$ reel sayısına dönüştüren ve aşağıdaki şartları sağlayan reel değerli $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm denir.

$$(i) \forall \vec{x} \in X (\vec{x} \neq \vec{0}) \text{ için } \|\vec{x}\| > 0 \text{ ve } \|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$$

$$(ii) \forall \vec{x} \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ için } \|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|$$

$$(iii) \forall \vec{x}, \vec{y} \in X \text{ için } \|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$

Üzerinde norm tanımlanmış bir lineer X vektör uzayına normlu vektör uzayı veya kısaca normlu uzay denir ve $(X, \|\cdot\|)$ ile gösterilir. $\|\vec{x}\|$ reel sayısına da $\vec{x}$ vektörünün normu denir [8].

3.1.1. Örnek

$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı ve her $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

şeklinde tanımlanan $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu gösterilebilir ki $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir normdur.

3.2. Fuzzy Normlu Lineer Uzay

3.2.1. Tanım

X , $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı, $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}^*(I)$ ve $L, R: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ fonksiyonları simetrik, her ikisi de azalmayan ve $L(0,0) = 0$, $R(1,1) = 1$ sağlasın.

$\bar{x} \in X$ ve $0 < \alpha \leq 1$ için,

$$[\|\bar{x}\|]_{\alpha} = [\|\bar{x}\|_1^{\alpha}, \|\bar{x}\|_2^{\alpha}]$$

yazarız ve kabul edelim ki her $\bar{x} \in X$, $\bar{x} \neq \vec{0}$ için $\bar{x}$ den bağımsız $\alpha_0 \in (0,1]$ var öyle ki her $\alpha \leq \alpha_0$,

$$(A) \|\bar{x}\|_2^{\alpha} < \infty$$

$$(B) \inf \|\bar{x}\|_1^{\alpha} > 0.$$

Bu durumda $(X, \|\cdot\|, L, R)$ dördlüsüne fuzzy normlu lineer uzay denir ve $\|\cdot\|$ ye bir fuzzy norm denir, eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa;

$$(i) \|\bar{x}\| = \vec{0} \Leftrightarrow \bar{x} = \vec{0} \text{ ise;}$$

$$(ii) \|r \cdot \bar{x}\| = |r| \cdot \|\bar{x}\|, \bar{x} \in X, r \in \mathbb{R};$$

$$(iii) \forall \bar{x}, \bar{y} \in X \text{ için}$$

$$(a) s \leq \|\bar{x}\|_1^{-1}, t \leq \|\bar{y}\|_1^{-1} \text{ ve } s+t \leq \|\bar{x} + \bar{y}\|_1^{-1}$$

olduğunda,

$$\|\bar{x} + \bar{y}\|(s+t) \geq L(\|\bar{x}\|(s), \|\bar{y}\|(t)),$$

$$(b) s \geq \|\bar{x}\|_1^{-1}, t \geq \|\bar{y}\|_1^{-1} \text{ ve } s+t \geq \|\bar{x} + \bar{y}\|_1^{-1}$$

olduğunda,

$$\|\bar{x} + \bar{y}\|(s+t) \leq R(\|\bar{x}\|(s), \|\bar{y}\|(t)) \quad [5].$$

Ayrıca, $x, y \in [0, 1]$ için;

$$L(x, y) = \min(x, y), \quad R(x, y) = \max(x, y).$$

L ve R fonksiyonu yukarıdaki gibi aldığımızda, bir fuzzy normlu lineer uzayını $(X, \|\cdot\|)$ olarak yazabiliriz [5].

Aşağıdaki sonuç, alışılmış üçgen eşitsizliğine bir ölçüde benzemektedir.

3.2.1. Teorem

$(X, \|\cdot\|)$ fuzzy normlu lineer uzayında Tanım 3.2.1 (iii) de tanımlanan üçgen eşitsizliği,

$$\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| \oplus \|\bar{y}\|$$

ifadesine denktir [5].

Bu teoremi, aşağıdaki iki lemma ile ispatlayalım:

3.2.1. Lemma

Tanım 3.2.1. (iii) (b) de tanımlanan üçgen eşitsizliği ($R = \max$ ile); $\forall \alpha \in (0, 1]$ ve $\bar{x}, \bar{y} \in X$ için,

$$\|\bar{x} + \bar{y}\|_2^\alpha \leq \|\bar{x}\|_2^\alpha + \|\bar{y}\|_2^\alpha \quad (3.1)$$

üçgen eşitsizliğine denktir [5].

İspat

Eş.3.1 deki kabulümüzü ve $\bar{x}, \bar{y} \in X$, $s \geq |||\bar{x}|||_1^1$, $t \geq |||\bar{y}|||_1^1$ ifadelerini alalım.

$\alpha = ||\bar{x} + \bar{y}|| (s+t)$ diye tanımlayalım. Bu durumda,

$$s+t \leq |||\bar{x} + \bar{y}|||_2^\alpha \leq |||\bar{x}|||_2^\alpha + |||\bar{y}|||_2^\alpha.$$

Bu nedenle $s \leq |||\bar{x}|||_2^\alpha$ veya $t \leq |||\bar{y}|||_2^\alpha$ dır. Bu $||\bar{x}|| (s) \geq \alpha$ veya $||\bar{y}|| (t) \geq \alpha$ gerektirir ve böylece,

$$\max(||\bar{x}|| (s), ||\bar{y}|| (t)) \geq \alpha = ||\bar{x} + \bar{y}|| (s+t).$$

Bu $R(\cdot, \cdot) = \max(\cdot, \cdot)$ ile tanımlanan Tanım 3.2.1 (iii) (b) dir.

Tam tersine, Tanım 3.2.1 (iii) (b) kabulümüzü varsayalım; $\alpha \in (0,1]$ ve $\bar{x}, \bar{y} \in X$ alalım. İspatlayalım ki,

$$|||\bar{x} + \bar{y}|||_2^\alpha > |||\bar{x}|||_2^\alpha + |||\bar{y}|||_2^\alpha \text{ dır.}$$

Bu durumda,

$$s > |||\bar{x}|||_2^\alpha \geq |||\bar{x}|||_1^1 \text{ ve } t > |||\bar{y}|||_2^\alpha \geq |||\bar{y}|||_1^1$$

vardır öyle ki;

$$s+t = |||\bar{x} + \bar{y}|||_2^\alpha \geq |||\bar{x} + \bar{y}|||_1^1.$$

Böylece Tanım 3.2.1 (iii) (b) ile

$$\alpha = ||\bar{x} + \bar{y}|| (s+t) \leq \max(||\bar{x}|| (s), ||\bar{y}|| (t)) < \alpha.$$

Bu bir çelişkidir.

Sonuç olarak; lemmanın ispatı tamamlanır.

3.2.2. Lemma

Tanım 3.2.1 (iii) (a) de tanımlanan üçgen eşitsizliği ($L = \min$ ile), $\forall \alpha \in (0,1]$ ve $\bar{x}, \bar{y} \in X$ için

$$\|\bar{x} + \bar{y}\|_1^\alpha \leq \|\bar{x}\|_1^\alpha + \|\bar{y}\|_1^\alpha \quad (3.2)$$

üçgen eşitsizliğine denktir [5].

İspat

Eş.3.2 kabulümüzü varsayalım. $\bar{x}, \bar{y} \in X$ ve $s \leq \|\bar{x}\|_1^1$ $t \leq \|\bar{y}\|_1^1$ alalım öyle ki $s+t \leq \|\bar{x} + \bar{y}\|_1^1$ dir.

$\alpha = \|\bar{x}\|(s)$, $\beta = \|\bar{y}\|(t)$ ve $\gamma = \min(\alpha, \beta)$ şeklinde tanımlayalım.

Şimdi $\|\bar{x}\|_1^\alpha \leq s$ ve $\|\bar{y}\|_1^\beta \leq t$ dir.

α için $\|\bar{x}\|_1^\alpha$ azalmayan olduğundan Eş.3.2 ile,

$$\|\bar{x} + \bar{y}\|_1^\gamma \leq \|\bar{x}\|_1^\gamma + \|\bar{y}\|_1^\gamma$$

$$\leq \|\bar{x}\|_1^\alpha + \|\bar{y}\|_1^\beta$$

$$\leq s + t$$

$$\leq \|\bar{x} + \bar{y}\|_1^1,$$

yazabiliriz. Bu da,

$$\|\bar{x} + \bar{y}\| (s+t) \geq \gamma = \min (\|\bar{x}\|(s), \|\bar{y}\|(t)) ,$$

$L(.,.) = \min (.,.)$ ile tanımlanan Tanım 3.2.1 (iii) (a) gerektirir.

Tam tersine $L = \min$ ile tanımlanan Tanım 3.2.1 (iii) (a) kabulümüzü varsayalım.

$\bar{x}, \bar{y} \in X$ ve $\alpha \in (0, 1]$ alalım. Bu durumda Tanım 3.2.1 (iii) (a) ile

$$\|\bar{x}\|_1^\alpha + \|\bar{y}\|_1^\alpha \leq \|\bar{x} + \bar{y}\|_1^1 \text{ olduğunda,}$$

$$\|\bar{x} + \bar{y}\| (\|\bar{x}\|_1^\alpha + \|\bar{y}\|_1^\alpha) \geq \min(\|\bar{x}\| (\|\bar{x}\|_1^\alpha), \|\bar{y}\| (\|\bar{y}\|_1^\alpha))$$

$$= \alpha \text{ dır.}$$

Bu da,

$$\|\bar{x} + \bar{y}\|_1^\alpha \leq \|\bar{x}\|_1^\alpha + \|\bar{y}\|_1^\alpha,$$

gerektirir. Diğer taraftan,

$$\|\bar{x}\|_1^\alpha + \|\bar{y}\|_1^\alpha \geq \|\bar{x} + \bar{y}\|_1^1$$

ise, bu durumda α referansına göre $\|\cdot\|_1^\alpha$ azalmayan olduğunda Eş.3.2 vardır.

3.2.1. Not

Yukarıdaki L ve R seçimi ile:

$$(i) \bar{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \|\bar{x}\| = \vec{0} \Leftrightarrow \|\bar{x}\|_1^\alpha = \vec{0} \text{ ve } \|\bar{x}\|_2^\alpha = \vec{0}.$$

(ii) $r = 0$ ise, bu durumda

$$[\|r \bar{x}\|]_\alpha = [\|\vec{0}\|]_\alpha = \{0\} = [|\bar{r}| \cdot \|\bar{x}\|]_\alpha.$$

$r \neq 0$ için,

$$[\|r \bar{x}\|]_\alpha = \{t : \|r \bar{x}\|(t) \geq \alpha\}$$

$$= \{t : (|\bar{r}| \cdot \|\bar{x}\|)(t) \geq \alpha\}$$

$$= \{t : \|\bar{x}\| (t/|r|) \geq \alpha\}.$$

$t/|r| = k$, $r \neq 0$ ise,

$$[\|r\bar{x}\|]_{\alpha} = \{k, |r| : \|\bar{x}\| (k) \geq \alpha\}$$

$$= [|r|, \|\bar{x}\|_1^{\alpha}, |r|, \|\bar{x}\|_2^{\alpha}]$$

$$= [|r|, \|\bar{x}\|]_{\alpha}.$$

Fakat

$$[\|r\bar{x}\|]_{\alpha} = [\|\bar{x}\|_1^{\alpha}, \|\bar{x}\|_2^{\alpha}].$$

Yani,

$$\|\bar{x}\|_1^{\alpha} = |r|, \|\bar{x}\|_1^{\alpha},$$

ve

$$\|\bar{x}\|_2^{\alpha} = |r|, \|\bar{x}\|_2^{\alpha}.$$

(iii) Eğer herhangi $\bar{x}, \bar{y} \in X$ çifti için

$$\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| \oplus \|\bar{y}\|.$$

Bu durumda $0 < \alpha \leq 1$ olacak şekilde her bir α için,

$$\|\bar{x} + \bar{y}\|_1^{\alpha} \leq \|\bar{x}\|_1^{\alpha} + \|\bar{y}\|_1^{\alpha}$$

ve

$$\|\bar{x} + \bar{y}\|_2^{\alpha} \leq \|\bar{x}\|_2^{\alpha} + \|\bar{y}\|_2^{\alpha} \quad [5].$$

3.2.1. Örnek

$X = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı, her $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$\| (x_1, x_2, \dots, x_n) \| (t) = \begin{cases} 1 & , \quad t = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan ve yukarıdaki L ve R seçimi ile tanımlanan, Tanım 3.2.1'e göre $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^*(I)$ fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir fuzzy normdur.

3.2.2. Tanım

$X \neq \emptyset$ bir küme, $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^*(I)$ bir fonksiyon ve $L, R : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ fonksiyonları simetrik, her ikisi de azalmayan ve $L(0,0) = 0$, $R(1,1) = 1$ sağlansın. $\forall x, y \in X, \alpha \in (0,1]$ için

$$[d(x,y)]_\alpha = [\lambda_\alpha(x,y), P_\alpha(x,y)]$$

şeklinde gösterelim.

Bu d fonksiyonu aşağıdaki üç şartı sağlıyorsa, (X, d, L, R) dörtlüsüne fuzzy metrik uzay ve d ye de fuzzy metrik denir;

$$(i) \quad d(x,y) = \bar{0} \Leftrightarrow x = y$$

$$(ii) \quad \forall x, y \in X \text{ için } d(x,y) = d(y,x)$$

$$(iii) \quad \forall x, y \in X \text{ için}$$

$$(1) \quad s \leq \lambda_1(x,z) , t \leq \lambda_1(z,y) \text{ ve } s+t \leq \lambda_1(x,y) \text{ olduğunda}$$

$$d(x,y)(s+t) \geq L(d(x,z)(s), d(z,y)(t)),$$

$$(2) \quad s \geq \lambda_1(x,z) , t \geq \lambda_1(z,y) \text{ ve } s+t \geq \lambda_1(x,y) \text{ olduğunda,}$$

$$d(x,y)(s+t) \leq R(d(x,z)(s), d(z,y)(t)) \quad [7].$$

[7] nin Teorem 3.1'den eğer $L = \min$ ve $R = \max$ seçilirse Tanım 3.2.2 (iii) üçgen eşitsizliği

$$d(x,y) \preceq d(x,z) \oplus d(z,y) ,$$

eşitsizliğine denktir [7].

3.2.1. Önerme

$(X, \|\cdot\|)$ bir fuzzy normlu uzay ve $d: X \times X \rightarrow R^*(I)$ bir fonksiyon olsun.

$$[d(\bar{x}, \bar{y})]_{\alpha} = [\lambda_{\alpha}(\bar{x}, \bar{y}), P_{\alpha}(\bar{x}, \bar{y})] = [\|\bar{x} - \bar{y}\|]_{\alpha}$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonu, $\forall \bar{x}, \bar{y} \in X$ ve $\alpha \in (0, 1]$ için bir fuzzy metriktir.

İspat

$$(i) [d(\bar{x}, \bar{y})]_{\alpha} = [\|\bar{x} - \bar{y}\|]_{\alpha} = \bar{0} \Leftrightarrow \lambda_{\alpha}(\bar{x}, \bar{y}) = \|\bar{x} - \bar{y}\|_1^{\alpha} = \bar{0} ,$$

$$P_{\alpha}(\bar{x}, \bar{y}) = \|\bar{x} - \bar{y}\|_2^{\alpha} = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y} (?).$$

$\lambda_{\alpha}(\bar{x}, \bar{y}) = \|\bar{x} - \bar{y}\|_1^{\alpha} = \bar{0}$ ise, $\|\bar{x} - \bar{y}\|_1^{\alpha}$ fuzzy normlu uzay olduğundan

$$\Leftrightarrow \bar{x} - \bar{y} = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y} \text{ dir.}$$

$P_{\alpha}(\bar{x}, \bar{y}) = \|\bar{x} - \bar{y}\|_2^{\alpha} = \bar{0}$ ise, $\|\bar{x} - \bar{y}\|_2^{\alpha}$ fuzzy normlu uzay olduğundan

$$\Leftrightarrow \bar{x} - \bar{y} = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y} \text{ dir.}$$

Böylece

$$[d(\bar{x}, \bar{y})]_{\alpha} = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y} \text{ dir.}$$

$$(ii) [d(\bar{x}, \bar{y})]_{\alpha} = [\|\bar{x} - \bar{y}\|]_{\alpha} = [\|\bar{y} - \bar{x}\|]_{\alpha} = [d(\bar{y}, \bar{x})]_{\alpha} (?).$$

$(X, \|\cdot\|)$ fuzzy norm olduğundan aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
[\|\bar{x} - \bar{y}\|_1]_\alpha &= \{t_1 : \|\bar{x} - \bar{y}\|_1(t_1) \geq \alpha\} \\
&= \{t_1 : \|\bar{y} - \bar{x}\|_1(t_1) \geq \alpha\} \\
&= \{t_1 : \|\bar{y} - \bar{x}\|_1(t_1) \geq \alpha\} \\
&= \{t_1 : \|\bar{y} - \bar{x}\|_1(t_1/| -1 |) \geq \alpha\} \\
&= \{t_1 : \|\bar{y} - \bar{x}\|_1(t_1) \geq \alpha\} \\
&= [\|\bar{y} - \bar{x}\|_1]_\alpha,
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
[\|\bar{x} - \bar{y}\|_2]_\alpha &= \{t_2 : \|\bar{x} - \bar{y}\|_2(t_2) \geq \alpha\} \\
&= \{t_2 : \|\bar{y} - \bar{x}\|_2(t_2) \geq \alpha\} \\
&= \{t_2 : \|\bar{y} - \bar{x}\|_2(t_2) \geq \alpha\} \\
&= \{t_2 : \|\bar{y} - \bar{x}\|_2(t_2/| -1 |) \geq \alpha\} \\
&= \{t_2 : \|\bar{y} - \bar{x}\|_2(t_2) \geq \alpha\} \\
&= [\|\bar{y} - \bar{x}\|_2]_\alpha.
\end{aligned}$$

Bu nedenle,

$$\begin{aligned}
[d(\bar{x}, \bar{y})]_\alpha &= [\|\bar{x} - \bar{y}\|]_\alpha = [\|\bar{x} - \bar{y}\|_1^\alpha, \|\bar{x} - \bar{y}\|_2^\alpha] = \\
&= [\|\bar{y} - \bar{x}\|_1^\alpha, \|\bar{y} - \bar{x}\|_2^\alpha] = [\|\bar{y} - \bar{x}\|]_\alpha = [d(\bar{y}, \bar{x})]_\alpha.
\end{aligned}$$

(iii) $(X, \|\cdot\|)$ fuzzy norm olduğundan ve $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in X$ için,

$$\begin{aligned}\lambda_\alpha(\bar{x}, \bar{y}) &= \|\bar{x} - \bar{y}\|_1^\alpha = \|\bar{x} - \bar{z} + \bar{z} - \bar{y}\|_1^\alpha \leq \|\bar{x} - \bar{z}\|_1^\alpha + \|\bar{z} - \bar{y}\|_1^\alpha \\ &= \lambda_\alpha(\bar{x}, \bar{z}) + \lambda_\alpha(\bar{z}, \bar{y}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_\alpha(\bar{x}, \bar{y}) &= \|\bar{x} - \bar{y}\|_2^\alpha = \|\bar{x} - \bar{z} + \bar{z} - \bar{y}\|_2^\alpha \leq \|\bar{x} - \bar{z}\|_2^\alpha + \|\bar{z} - \bar{y}\|_2^\alpha \\ &= P_\alpha(\bar{x}, \bar{z}) + P_\alpha(\bar{z}, \bar{y}).\end{aligned}$$

Bu iki ifadeden,

$$\|\bar{x} - \bar{y}\| \leq \|\bar{x} - \bar{z}\| \oplus \|\bar{z} - \bar{y}\|$$

$$d(\bar{x}, \bar{y}) \leq d(\bar{x}, \bar{z}) \oplus d(\bar{z}, \bar{y}).$$

Böylece; her fuzzy normlu uzay, fuzzy metriktir ama tersi her zaman doğru değildir.

3.2.3. Tanım

$(X, \|\cdot\|)$ bir fuzzy normlu lineer uzayı olsun. $(x_n) \in X$ dizisi, $x \in X$ noktasına yakınsaktır denir ve şöyle gösterilir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = \bar{0}$$

yani $\alpha \in (0, 1]$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_1^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_2^\alpha = 0 \quad [5].$$

3.2.4. Tanım

$(X, \|\cdot\|)$ fuzzy normlu lineer uzay olsun. Eğer,

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \|x_m - x_n\| = \bar{0} \quad \text{ise,}$$

(x_n) dizisine Cauchy dizisi denir.

Yani $\alpha \in (0,1]$ için,

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \|x_m - x_n\|_2^\alpha = 0 \quad [5].$$

3.2.2. Not

$\|x\| \geq \bar{0}$ olduğunda, $\forall \alpha \in (0,1]$ için $0 \leq \|x\|_1^\alpha \leq \|x\|_2^\alpha$ elde edilir. Böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = \bar{0} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_2^\alpha = 0 \quad [5].$$

3.2.5. Tanım

$(X, \|\cdot\|)$ bir fuzzy normlu lineer uzay olsun. (x_n) dizisi ve $\alpha \in (0,1]$ için $x \in X$ noktasına düzgün yakınsaktır denir gerek ve yeter şart, verilen $\varepsilon > 0$ için en az bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ var öyle ki $\forall n > n_0(\varepsilon)$ ve $\alpha \in (0,1]$ için $\|x_n - x\|_2^\alpha < \varepsilon$ [4].

3.2.6. Tanım

$(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|_*)$ iki fuzzy normlu lineer uzay ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer,

(x_n) dizisi X de $x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow Y$ de $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ ise

f fonksiyonuna x_0 noktasında dizisel süreklidir denir [4].

3.2.2. Önerme

$(X, \|\cdot\|)$ fuzzy normlu lineer uzayda yakınsak dizinin bütün alt dizileri de, bu dizinin limitine yakınsar [5].

İspat

$(x_n) \rightarrow x$ olsun. Bu durumda $\alpha \in (0,1]$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_2^\alpha = 0.$$

Yani herhangi bir sabitlenmiş $\alpha \in (0,1]$ için verilen $\varepsilon > 0$,

n_0 var öyle ki $\forall n \geq n_0(\alpha)$ için $\|x_n - x\|_2^\alpha < \varepsilon$.

$k(n): \mathbb{N} \rightarrow \{\mathbb{N}'\text{'nin bir alt kümesi}\}$ öyle ki $n < m$ için $k(n) < k(m)$ olmak üzere $(x_{k(n)})$ dizisi, (x_n) dizisinin bir alt dizisi olsun. $(x_{k(n)})$ alt dizisi olduğunda $m_0(\alpha)$ var öyle ki $n \geq m_0(\alpha)$ için $k(n) \geq n_0(\alpha)$. Böylece $n \geq m_0(\alpha)$ için $\|x_{k(n)} - x\|_2^\alpha < \varepsilon$ yani $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{k(n)} - x\| = 0$ veya $(x_{k(n)})$ alt dizisi x noktasına yakınsar.

3.2.3. Önerme

$(X, \|\cdot\|)$ bir fuzzy normlu lineer uzayında her yakınsak dizi Cauchy dizisidir [5].

İspat

(x_n) dizisi $x \in X$ e yakınsasın. Bu durumda $\forall \alpha \in (0,1]$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_2^\alpha = 0,$$

yani verilen $\varepsilon > 0$ ve $\alpha \in (0,1]$ için bir $n_0(\alpha)$ vardır öyle ki $\forall n \geq n_0(\alpha)$ için,

$$\|x_n - x\|_2^\alpha < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Şimdi, Lemma 3.2.1 deki tanıma göre $\|\cdot\|_2^\alpha$ bir norm olduğundan, $\forall m, n \geq n_0(\alpha)$ için,

$$\begin{aligned} \|x_m - x_n\|_2^\alpha &= \|(x_m - x) - (x_n - x)\|_2^\alpha \\ &\leq \|x_m - x\|_2^\alpha + \|x_n - x\|_2^\alpha \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

4. FUZZY NORMLA ELDE EDİLEN FUZZY TOPOLOJİK UZAYLAR

Bu bölümde, fuzzy normlu lineer uzaydan fuzzy topolojik uzay elde edilecek ve bu topolojiye ait bazı özellikler çalışılacaktır. Şimdi aşağıdaki gibi $(X, \|\cdot\|)$ fuzzy normlu lineer uzayda α -açık yuvar tanımını verelim.

4.1.1. Tanım

Sabitleştirilmiş $\alpha \in (0, 1]$ ve $\varepsilon > 0$ için $(X, \|\cdot\|)$ de

$$\mu_{\alpha}(x, \varepsilon)(y) = \begin{cases} \alpha & , \text{ ancak ve ancak } \|y - x\|_2^{\alpha} < \varepsilon \text{ ise} \\ 0 & , \text{ diğer durumlarda.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\mu_{\alpha}(x, \varepsilon)$ fuzzy kümesine $(X, \|\cdot\|)$ de α -açık yuvar denir [4].

Aşağıda fuzzy normlu lineer uzayda bir α -açık yuvar için örnek verelim.

4.1.1. Örnek

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ fuzzy normlu uzayı gözönüne alalım. Buradan $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^*(I)$

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|(t) = \begin{cases} 1 & , \quad t = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır. O halde her $\alpha \in (0, 1]$ için $\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_2^{\alpha} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

$x = 0 = (0, 0, \dots, 0)$ ve $\varepsilon = 1$ alalım. Bu durumda $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$\mu_{\alpha}(0, 1)(y) = \begin{cases} \alpha & \Leftrightarrow \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2} < 1 \text{ ise} \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ de α -açık yuvardır.

Yukarıdaki örnekte gördük ki $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mu_\alpha(0, 1) \Leftrightarrow \sqrt{\sum y_i^2} < 1$ ki bu alışılmış normlu lineer uzayda merkezi orijinde ve yarıçapı birim olan açık yuvar notasyonun genelleştirilmesidir [4].

4.1.2. Tanım

$\mu \in I^X$ herhangi bir fuzzy kümesi olsun. Eğer $\mu(x) > 0$ için $\exists \varepsilon > 0$ var öyle ki $\alpha \in (0, 1]$ için $\mu_\alpha(x, \varepsilon) \leq \mu$ ise μ fuzzy kümesine $\|\cdot\|$ -açık denir [4].

Aşağıdaki iki örnek bir fuzzy açık kümesinin açık küme olduğu fakat fuzzy alt kümesini açık olması gerekmediğini göstermektedir.

4.1.2. Örnek

Örnek 4.1.1. de tanımlanan $\mu_\alpha(0, 1)$ α -açık yuvarı $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ 'nin fuzzy $\|\cdot\|$ -açık alt kümesidir.

Bu, Önerme 4.1.2'den elde edilir.

4.1.3. Örnek

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ fuzzy normlu lineer uzayında μ fuzzy kümesini

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow \sqrt{\sum x_i^2} \leq 1, \\ 0 & , \text{ diğ} \text{er durumlarda.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ dir.

$y = (1, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ alalım. Bu durumda $\mu(y) > 0$.

$\varepsilon > 0$, $\alpha \in (0, 1]$ alalım. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ de $\mu_\alpha(y, \varepsilon)$ α -açık yuvarı

$$\mu_\alpha(y, \varepsilon)(x) = \begin{cases} \alpha & \Leftrightarrow \sqrt{(x_1 - 1)^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} < \varepsilon, \\ 0 & , \text{ diğ} \text{er durumlarda.} \end{cases}$$

$z = (1+\varepsilon/2, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ alalım. Bu durumda $\mu_\alpha(y, \varepsilon)(z) = \alpha$. Fakat $\mu(z) = 0$.

Böylece her $\alpha \in (0, 1]$ ve her $\varepsilon > 0$ için $\mu_\alpha(y, \varepsilon) \not\leq \mu$. O halde $\mu, (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ nın açık fuzzy alt kümesi değildir [4].

4.1.1. Önerme

$(X, \|\cdot\|)$ fuzzy normlu lineer uzayında,

$$\tau_{\|\cdot\|} = \{\mu : \mu, \|\cdot\| \text{-açık}\}$$

ailesi X üzerinde bir fuzzy topolojisi [4].

İspat

(i) Her $x \in X$ için $1(x) = 1 > 0$. Böylece herhangi $\varepsilon > 0$ ve $\alpha \in (0, 1]$ için $\mu_\alpha(x, \varepsilon) \leq 1$.

Yine $x \in X$ için $0(x) = 0 \not> 0$. Böylece 1 ve $0, \tau_{\|\cdot\|}$ elemanıdır.

(ii) $\mu_1, \mu_2 \in \tau_{\|\cdot\|}$ alalım. $(\mu_1 \wedge \mu_2)(x) > 0$ için $\mu_1(x) > 0, \mu_2(x) > 0$ dir. Böylece $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1]$ ve $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\mu_{\alpha_1}(x, \varepsilon_1) \leq \mu_1$ ve $\mu_{\alpha_2}(x, \varepsilon_2) \leq \mu_2$ vardır.

$\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$ ve $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ alalım. Eğer,

$$\|y - x\|_2^\alpha < \varepsilon \leq \varepsilon_1 \text{ ise bu durumda } \|y - x\|_2^{\alpha_1} \leq \|y - x\|_2^\alpha < \varepsilon \leq \varepsilon_1.$$

Böylece $\mu_\alpha(x, \varepsilon)(y) = \alpha \leq \alpha_1 = \mu_{\alpha_1}(x, \varepsilon_1)(y)$. O halde

$\mu_\alpha(x, \varepsilon) \leq \mu_{\alpha_1}(x, \varepsilon_1) \leq \mu_1$. Yine, eğer $\|y - x\|_2^\alpha > \varepsilon_1$ ise, bu durumda

$\|y - x\|_2^\alpha \geq \|y - x\|_2^{\alpha_1} > \varepsilon_1 \geq \varepsilon$. O halde $\mu_\alpha(x, \varepsilon)(y) = 0 = \mu_{\alpha_1}(x, \varepsilon_1)(y)$. Böylece,

$$\mu_\alpha(x, \varepsilon) \leq \mu_1. \quad (4.1)$$

Benzer şekilde,

$\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$ ve $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ alalım. Eğer $\|y-x\|_2^\alpha < \varepsilon \leq \varepsilon_2$ ise, bu durumda $\|y-x\|_2^{\alpha_2} \leq \|y-x\|_2^\alpha < \varepsilon \leq \varepsilon_2$. Böylece

$\mu_\alpha(x, \varepsilon)(y) = \alpha \leq \alpha_2 = \mu_{\alpha_2}(x, \varepsilon_2)(y)$. O halde $\mu_\alpha(x, \varepsilon) \leq \mu_{\alpha_2}(x, \varepsilon_2) \leq \mu_2$. Yine, eğer $\|y-x\|_2^\alpha > \varepsilon_2$ ise, bu durumda $\|y-x\|_2^\alpha \geq \|y-x\|_2^{\alpha_2} > \varepsilon_2 \geq \varepsilon$. O halde $\mu_\alpha(x, \varepsilon)(y) = 0 = \mu_{\alpha_2}(x, \varepsilon_2)(y)$. Böylece,

$$\mu_\alpha(x, \varepsilon) \leq \mu_2 \quad (4.2)$$

Eş.4.1 ve Eş.4.2 nin ara kesitlerini alırsak,

$$\mu_\alpha(x, \varepsilon) \leq \mu_1 \wedge \mu_2,$$

olup, $\mu_1 \wedge \mu_2 \in \tau_{\|\cdot\|}$ olduğunu gösterir.

(iii) $\{\mu_i\} \in \tau_{\|\cdot\|}$ alalım. Eğer $\bigvee_{i \in I} \mu_i(x) > 0$ ise, bu durumda $\exists i_0$ var öyle ki $\mu_{i_0}(x) > 0$.

Böylece $\mathbb{R}^+$ da $\varepsilon > 0$ ve $\alpha \in (0, 1]$ var öyle ki $\mu_\alpha(x, \varepsilon) \leq \mu_{i_0}$ dır. O halde $\mu_\alpha(x, \varepsilon) \leq \bigvee_{i \in I} \mu_i$

ve $\bigvee_{i \in I} \mu_i \in \tau_{\|\cdot\|}$ dır.

Sonuç olarak; $\tau_{\|\cdot\|}, (X, \|\cdot\|)$ üzerinde bir fuzzy topolojisidir.

4.1.2. Önerme

Her α -açık yuvar, fuzzy açık kümedir [4].

İspat

$\varepsilon > 0$ ve $\alpha_0 \in (0, 1]$ için $\mu_{\alpha_0}(x_0, \varepsilon)$ fuzzy kümesini

$$\mu_{\alpha_0}(x_0, \varepsilon)(y) = \begin{cases} \alpha_0 & \Leftrightarrow \|x_0 - y\|_2^{\alpha_0} < \varepsilon, \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. $\mu_{\alpha_0}(x_0, \varepsilon)$, $\tau_{||\cdot||}$ fuzzy topolojisine göre açık olduğunu göstermeliyiz.

$\mu_{\alpha_0}(x_0, \varepsilon)(y) > 0$ alalım. Bu $||x_0 - y||_2^{\alpha_0} < \varepsilon$ olduğunu verir.

$\delta = \varepsilon - ||x_0 - y||_2^{\alpha_0}$ ve $\alpha_1 < \alpha_0$ alalım. Eğer $||y - z||_2^{\alpha_1} < \delta$ ise, bu durumda

$$\begin{aligned} ||x_0 - z||_2^{\alpha_0} &= ||(x_0 - y) + (y - z)||_2^{\alpha_0} \\ &\leq ||x_0 - y||_2^{\alpha_0} + ||y - z||_2^{\alpha_0} \\ &< ||x_0 - y||_2^{\alpha_0} + ||y - z||_2^{\alpha_1} \\ &< ||x_0 - y||_2^{\alpha_0} + \delta = \varepsilon. \end{aligned}$$

O halde $\mu_{\alpha_1}(y, \delta)(z) = \alpha_1 < \alpha_0 = \mu_{\alpha_0}(x_0, \varepsilon)(z)$.

Yine eğer $||x_0 - z||_2^{\alpha_0} \geq \varepsilon$ ise, bu durumda,

$$\begin{aligned} ||y - z||_2^{\alpha_1} &> ||y - z||_2^{\alpha_0} > ||x_0 - z||_2^{\alpha_0} - ||x_0 - y||_2^{\alpha_0} \\ &> \varepsilon - (\varepsilon - \delta) = \delta. \end{aligned}$$

Böylece,

$$\mu_{\alpha_1}(y, \delta)(z) = 0 = \mu_{\alpha_0}(x_0, \varepsilon)(z).$$

O halde, $\alpha_1 \in (0, 1]$ ve $\delta > 0$ var öyle ki $\mu_{\alpha_1}(y, \delta) \leq \mu_{\alpha_0}(x_0, \varepsilon)$ olup, bu da $\mu_{\alpha_0}(x_0, \varepsilon)$ nun $(X, \tau_{||\cdot||})$ da açık olduğunu verir.

4.1.3. Önerme

Fuzzy normlu lineer uzayında, $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere her α -açık yuvarı, fuzzy konvektir [4].

İspat

$x_0 \in X$, $\alpha \in (0,1]$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere $\mu_\alpha(x_0, \varepsilon)$ α -açık kümesini gözönüne alalım ve aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\mu_\alpha(x_0, \varepsilon)(y) = \begin{cases} \alpha & \Leftrightarrow \|x_0 - y\|_2^\alpha < \varepsilon, \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

Konveksliği ispatlamak için herhangi bir $\beta \in (0,1]$ ($\beta \leq \alpha$) için $\mu_\alpha(x_0, \varepsilon)$ nun β -seviye kümesinin konveks olduğunu göstermek yeterlidir (Tanım 2.1.13).

$$[\mu_\alpha(x_0, \varepsilon)]_\beta = \{y \in X : \|y - x_0\|_2^\alpha < \varepsilon\}$$

β seviye kümesinin x_1, y_1 noktaları ve $[0,1]$ deki k için aşağıdaki eşitsizlik vardır.

$\|x_1 - x_0\|_2^\alpha < \varepsilon$ ve $\|y_1 - x_0\|_2^\alpha < \varepsilon$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \|kx_1 + (1-k)y_1 - x_0\|_2^\alpha &= \|kx_1 + (1-k)y_1 - kx_0 + kx_0 - x_0\|_2^\alpha \\ &= \|kx_1 + (1-k)y_1 - kx_0 - (1-k)x_0\|_2^\alpha \\ &= \|k(x_1 - x_0) + (1-k)(y_1 - x_0)\|_2^\alpha \\ &\leq \|k \cdot (x_1 - x_0)\|_2^\alpha + \|(1-k) \cdot (y_1 - x_0)\|_2^\alpha \\ &= |k| \cdot \|x_1 - x_0\|_2^\alpha + |1-k| \cdot \|y_1 - x_0\|_2^\alpha \\ &\leq k \cdot \varepsilon + (1-k) \varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Bu durumda, $kx_1 + (1-k)y_1 \in [\mu_\alpha(x_0, \varepsilon)]_\beta$ dır. O halde $\forall \beta \in (0, 1], \beta \leq \alpha$ için $[\mu_\alpha(x_0, \varepsilon)]_\beta$ kümesi konvektir. Bu da $\mu_\alpha(x, \varepsilon)$ 'nin $(X, \|\cdot\|)$ fuzzy konveks olduğunu gösterir.

Aşağıdaki önerme, $(X, \|\cdot\|)$ fuzzy normlu uzayında fuzzy kümesinin açıklığı dönüşüm ve skaler çarpım altında korunduğunu gösterir.

4.1.4. Önerme

$(X, \tau_{\|\cdot\|})$ fuzzy topolojik uzay ve x_α bir fuzzy noktası olsun. Eğer $\mu, (X, \tau_{\|\cdot\|})$ da açık ise, bu durumda $x_\alpha + \mu$ de açıktır [4].

İspat

$(X_\alpha + \mu)(y) > 0$ alalım. Bu $\mu(y-x) \wedge \alpha > 0$ gerektirir. Böylece $\mu(y-x) > 0$ dır. μ açık olduğundan, $\varepsilon > 0$ var öyle ki $\alpha \in (0, 1]$ için $\mu_\alpha(y-x, \varepsilon) \leq \mu$.

$\alpha^1 < \alpha$ ve $\varepsilon^1 < \varepsilon$ seçelim. $\|y-z\|_2^{\alpha^1} < \varepsilon^1$ olduğunda,

$$\|z - x + x - y\|_2^\alpha = \|(z-x) - (y-x)\|_2^\alpha = \|y-z\|_2^\alpha$$

$$< \|y-z\|_2^{\alpha^1} < \varepsilon^1 < \varepsilon.$$

Böylece

$$\mu_\alpha(y-x, \varepsilon)(z-x) = \alpha < \mu(z-x) \quad (4.3)$$

Ayrıca, $\|y-z\|_2^{\alpha^1} < \varepsilon^1$ olduğunda

$$\mu_{\alpha^1}(y, \varepsilon^1)(z) = \alpha^1 < \alpha < \mu(z-x) \quad (4.4)$$

Bu nedenle Eş.4.3 ve Eş.4.4 den

$$\mu_{\alpha^1}(y, \varepsilon^1)(z) \leq \alpha \wedge \mu(z-x) = (x_\alpha + \mu)(z).$$

Böylece $\mu_{\alpha^1}(y, \varepsilon^1) \leq x_\alpha + \mu$ ve $x_\alpha + \mu, (X, \tau_{||\cdot||})$ da açıktır.

4.1.5. Önerme

$(X, \tau_{||\cdot||})$ fuzzy topolojik uzay olsun. $(X, \tau_{||\cdot||})$ da X 'in μ fuzzy alt kümesi açık ise, bu durumda $t \neq 0$ için $t\mu$ 'de açıktır [4].

İspat

$t\mu(x) > 0$ alalım. Bu da bize $\mu(x/t) > 0$ olduğunu verir. O halde $\varepsilon > 0, \alpha \in (0,1]$ var öyle ki $\mu_\alpha(x/t, \varepsilon) \leq \mu$ dir.

Şimdi $\alpha^1 < \alpha$ ve $\varepsilon^1 = \varepsilon \cdot |t|$ seçelim.

Eğer $|||z-x|||_2^{\alpha^1} < \varepsilon^1$ ise, bu durumda $|||z-x|||_2^{\alpha^1} < \varepsilon \cdot |t|$. Böylece $|||z/t-x/t|||_2^{\alpha^1} < \varepsilon$ dur. Bu nedenle $|||z/t-x/t|||_2^\alpha < \varepsilon$. O halde $\mu_{\alpha^1}(x, \varepsilon^1)(z) = \alpha^1$ olduğundan, $\mu_\alpha(x/t, \varepsilon)(z/t) = \alpha$ ya sahibiz. Böylece

$$\mu_{\alpha^1}(x, \varepsilon^1)(z) = \alpha^1 < \alpha = \mu_\alpha(x/t, \varepsilon)(z/t) \leq \mu(z/t) = t \cdot \mu(z)$$

olur öyle ki:

$$\mu_{\alpha^1}(x, \varepsilon^1) \leq t\mu.$$

Sonuç olarak; $t\mu, (X, \tau_{||\cdot||})$ da açıktır.

Aşağıdaki önermeler $(X, ||\cdot||)$ fuzzy normlu uzayında bir dizinin yakınsaklığı ve bir fuzzy norm tarafından oluşturulan $\tau_{||\cdot||}$ fuzzy topolojisine göre bir dizinin yakınsaklığına denk olduğunu ispatladık.

4.1.6. Önerme

$(X, \|\cdot\|)$ bir fuzzy normlu uzayında herhangi bir (x_n) dizisi, $x \in X$ noktasına yakınsaması için gerek ve yeter şart $\tau_{\|\cdot\|}$ fuzzy topolojisine göre $x_n \rightarrow x$ olmasıdır [4].

İspat

$\|x_n - x\| \rightarrow \bar{0}$ olsun. $\mu, (X, \tau_{\|\cdot\|})$ nın herhangi bir fuzzy açık alt kümesi ve $\mu(x) > 0$ olsun. Bu durumda $\varepsilon > 0$ var öyle ki $\alpha \in (0, 1]$ için $\mu_\alpha(x, \varepsilon) \leq \mu$ dır.

Şimdi $\|x_n - x\| \rightarrow \bar{0}$ olduğundan, $\|x_n - x\|_2^\alpha \rightarrow 0$ dır, yani $n_0 \in \mathbb{N}$ var öyle ki $\varepsilon > 0$ ve her $n \geq n_0$ ise $\|x_n - x\|_2^\alpha < \varepsilon$.

O halde $\forall n \geq n_0$ için $\mu_\alpha(x, \varepsilon)(x_n) = \alpha$ dır. Böylece $(X, \tau_{\|\cdot\|})$ da $\mu(x_n) > 0$, yani $x_n \rightarrow x$.

Ters olarak; $(X, \tau_{\|\cdot\|})$ de $x_n \rightarrow x$ yakınsasın. O halde herhangi $\mu \in \tau_{\|\cdot\|}$ ve $\mu(x) > 0$ için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var $\forall n > n_0$ olduğunda $\mu(x_n) > 0$ dır. Biz $(X, \tau_{\|\cdot\|})$ da, $\mu_{\alpha_0}(x, \varepsilon_0)$ fuzzy açık yuvarını gözönüne alalım.

$\mu_{\alpha_0}(x, \varepsilon_0)(x) = \alpha_0 > 0$ olduğunda en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var öyle ki $\mu_{\alpha_0}(x, \varepsilon_0)(x_n) > 0$ dır.

Bu bize $\forall n > n_0$ için $\|x_n - x\|_2^{\alpha_0} < \varepsilon_0$ olduğunu verir. Sabit bir α_0 ve $\mathbb{R}^+$ da bütün ε üzerinde değişen ε_0 ile biz,

$$\|x_n - x\|_2^{\alpha_0} \rightarrow 0$$

sahibiz. Eğer α_0 keyfi ise $\forall n > n_0$ için

$$\|x_n - x\|_2^\alpha \rightarrow 0$$

olduğunu verir.

Böylece, $\|x_n - x\| \rightarrow \bar{0}$ dır.

4.1.7. Önerme

$\|\cdot\|$ ve $\|\cdot\|_*$ fuzzy normları ile oluşturulan fuzzy topolojik uzayları sırasıyla $(X, \tau_{\|\cdot\|})$ ve $(Y, \tau_{\|\cdot\|_*})$ olsun. Bu durumda $f: (X, \tau_{\|\cdot\|}) \rightarrow (Y, \tau_{\|\cdot\|_*})$ fonksiyonu bir noktada dizisel sürekli olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun o noktada sürekli olmasıdır [4].

İspat

İlk olarak; $f: (X, \tau_{\|\cdot\|}) \rightarrow (Y, \tau_{\|\cdot\|_*})$ fonksiyonu $x \in X$ de fuzzy sürekli olsun ve $\tau_{\|\cdot\|}$ fuzzy topolojisine göre X de (x_n) dizisi x 'e yakınsasın. Gösterelim ki $f(x_n) \rightarrow f(x)$ dir. $\mu \in \tau_{\|\cdot\|_*}$, $\mu(x) > 0$ ve $\rho = f^{-1}(\mu)$ alalım. f sürekli olduğundan, ρ , x in bir açık komşuluğudur, yani $\rho \in \tau_{\|\cdot\|}$ ve $\rho(x) > 0$ dir.

Şimdi

$$\begin{aligned} f(\rho)(y) &= \sup_{x \in f^{-1}(y)} \rho(x) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} f^{-1}(\mu)(x) \\ &= \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu(f(x)) = \begin{cases} \mu(y) & , \quad y = f(x) \text{ ise} \\ 0 & , \quad y \neq f(x) \text{ ise.} \end{cases} \end{aligned}$$

O halde, $\forall y \in Y$ için $f(\rho)(y) \leq \mu(y)$ dir. ($\mu(y) > 0$ olduğundan) yani $f(\rho) \leq \mu$ dür.

Ayrıca $x_n \rightarrow x_0$ olduğunda $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ var öyle ki $\forall n > n_0$ ise $\rho(x_n) > 0$.

Yine

$$f(\rho)(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \rho(x) \text{ dir.}$$

Böylece,

$$f(\rho)(f(x_n)) = \sup_{u \in f^{-1}(f(x_n))} \rho(u).$$

Bu bize $f(p)(f(x_n)) > 0$ verir, yani $\mu(f(x_n)) > 0$ dir. ($f(p) \leq \mu$ olduğundan). O halde her $n > n_0$ için $f(x_n) \in \mu$ dir. Sonuç olarak $(X, \tau_{||\cdot||})$ da $f(x_n) \rightarrow f(x)$ dir. Bu da f in dizisel sürekli olduğunu gösterir.

Tersine; $f, x_0 \in X$ noktasında dizisel sürekli olsun. Kabul edelim ki f, x_0 noktasında sürekli olmasın. Böylece $\tau_{||\cdot||}$ da $f(x_0)$ in μ açık komşuluğu vardır öyle ki $\tau_{||\cdot||}$ da $f^{-1}(\mu)$, x_0 in bir açık komşuluğu değildir, yani $f^{-1}(\mu)(x_0) > 0$, $\forall \varepsilon > 0$ ve $\alpha \in (0,1]$ için $\mu_\alpha(x_0, \varepsilon) \leq f^{-1}(\mu)$ vardır. Böylece her $\alpha \in (0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $||x_n - x_0||_2^\alpha < 1/n$ olacak şekilde x_n vardır fakat $x_n \notin f^{-1}(\mu)$ dir. Bundan dolayı $\mu(f(x_0)) > 0$ dir, ancak $\mu(f(x_n)) \not> 0$, yani $\tau_{||\cdot||}$ da $x_n \rightarrow x_0$ iken $\tau_{||\cdot||}$ $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ dir. Bu bir çelişkidir.

Sonuç olarak; $f, x_0 \in X$ de süreklidir.

4.1.8. Önerme

$(X, \tau_{||\cdot||})$ fuzzy topolojik uzayı, fuzzy Hausdorff'tur [3].

İspat

$a, b \in X$ ve $a \neq b$ alalım. Böylece $a - b \neq 0$, yani $\inf_\alpha ||a - b||_1^\alpha > 0$.

$\inf_\alpha ||a - b||_1^\alpha = \delta$ alalım. $\mu_1(a, \delta/2)(a) = 1$ ve $\mu_1(b, \delta/2)(b) = 1$ olmak üzere $(X, \tau_{||\cdot||})$ da $\mu_1(a, \delta/2)$ ve $\mu_1(b, \delta/2)$ fuzzy açık yuvarlarını göz önüne alalım, iddia ediyoruz ki $\mu_1(a, \delta/2) \wedge \mu_1(b, \delta/2) = 0$, yani $\forall x \in X$ ise

$$\min(\mu_1(a, \delta/2)(x), \mu_1(b, \delta/2)(x)) = 0.$$

Eğer bu doğru değilse, $x_0 \in X$ var öyle ki

$$\mu_1(a, \delta/2)(x_0) > 0 \text{ ve } \mu_1(b, \delta/2)(x_0) > 0,$$

yani,

$$||x_0 - a||_2^1 < \delta/2 \text{ ve } ||x_0 - b||_2^1 < \delta/2.$$

Şimdi,

$$\delta \leq \|a-b\|_1^1 \leq \|a-b\|_2^1$$

$$\leq \|x_0-a\|_2^1 + \|x_0-b\|_2^1$$

$$< \delta/2 + \delta/2 = \delta$$

Bu bir çelişkidir.

Sonuç olarak; $(X, \tau_{\|\cdot\|})$ bir fuzzy Hausdorfftur.

KAYNAKLAR

1. Zadeh, L.A., "Fuzzy Sets", *Inform and Control*, 8: 338-358 (1965).
2. Chang, C.L., "Fuzzy Topological Spaces", *J. Math. Anal. Appl.*, 24: 182-190 (1968).
3. Alaca, C., "Fuzzy Uzaylarında Süreklilik", Yüksek Lisans Tezi, *Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara, 6-29 (2001).
4. Das, N.R., Das Pankaja, "Fuzzy Topology Generated by Fuzzy Norm", *Fuzzy Sets and Systems*, 48:239-248 (1999).
5. Felbin, C., "Finite Dimensional Fuzzy Normed Linear Space", *Fuzzy Sets and Systems*, 48: 239-248 (1984).
6. Ming, P.P. and Liu Ying-Ming, "Fuzzy Topology", I. Neighborhood Structure of a Fuzzy Point and More-Smith Convergence, *J. Math. Anal. App.*, 76: 571-599 (1980).
7. Kaleva, O., Seikkala, S., "On Fuzzy Metric Spaces", *Fuzzy Sets and Systems*, 12: 215-229 (1987).
8. Yıldız, C., "Metrik Uzaylar", Genel Topoloji, *Kalkan Matbaacılık*, Ankara, 15-18 (2002).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : ÖZBEY, Mustafa
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 20.06.1979 Baskil
Medeni hali : Bekar
Telefon : 0(505)750 54 49
e-mail : dertli44@yahoo.co.uk

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Erciyes Üniversitesi Matematik Bölümü	2002
Lise	Turgut Özal Lisesi	1997

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2003–2005	Bayburt/Ş. Mete Okur İ.Ö.O.	Öğretmen
2005–...	Ankara/Şereflikoçhisar Lisesi	Öğretmen

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Kitap okumak, yüzmek