

FUZZY NORMLU LİNEER UZAYLAR VE SÜREKLİLİK

Ayşe GİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OCAK 2011

ANKARA

Ayşe GİR tarafından hazırlanan “FUZZY NORMLU LİNEER UZAYLAR VE SÜREKLİLİK” adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof.Dr.Cemil YILDIZ

.....

Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Erdal GÜNER

.....

Matematik Anabilim Dalı, A. Ü.

Prof. Dr. Cemil YILDIZ

.....

Matematik Anabilim Dalı, G. Ü.

Doç. Dr. Çetin VURAL

.....

Matematik Anabilim Dalı, G. Ü.

Tarih: 26/01/2011

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU

.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Ayşe GİR

FUZZY NORMLU LİNEER UZAYLAR VE SÜREKLİLİK

(Yüksek Lisans Tezi)

Ayşe GİR

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2011

ÖZET

Bu tez çalışmasında; fuzzy normlu lineer uzaylar ve süreklilik ele alınmıştır. Tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde girişe yer verilmiştir. İkinci bölümde daha sonraki bölümlere yardımcı olması için fuzzy uzaya ait tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde fuzzy normlu lineer uzay ve ilgili kavramlar verilmiştir. Dördüncü bölümde ise, fuzzy sınırlı lineer uzaylar ve ilgili kavramlar verilmiştir. Beşinci bölümde ise, fuzzy lineer operatörlerin sürekliliği ve sınırlılığı ile ilgili kavramlar verilmiştir. Son bölümde ise fuzzy dual uzay ve ilgili kavramlar verilmiştir.

Bilim Kodu	:204.1.132
Anahtar Kelimeler	:Fuzzy norm, Fuzzy normlu lineer uzaylar, Fuzzy süreklilik, Fuzzy sınırlı lineer uzaylar
Sayfa Adedi	: 76
Tez Yöneticisi	: Prof. Dr. Cemil YILDIZ

FUZZY NORMED LINEAR SPACES AND CONTINUITY

(M.Sc. Thesis)

Ayşe GİR

GAZI UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

January 2011

ABSTRACT

In this thesis, we have related fuzzy normed linear spaces and continuity. The thesis consists of six sections. In the first part the introduction takes place. In order assist next sections, definition and theorems of fuzzy space are included in the second section. In the third section, fuzzy norm linear space and relevant concept are given. In the fourth section, fuzzy limited linear spaces and relevant concept are given. In the fifth section, concepts related with continuity and finiteness of fuzzy linear operator are given. In the last section, concepts related with fuzzy dual spaces are given.

Science Code	: 204.1.132
Key Words	: Fuzzy norm, Fuzzy normed linear spaces, Fuzzy continuity, Fuzzy limited linear spaces
Page Number	: 76
Adviser	: Prof. Dr. Cemil YILDIZ

TEŞEKKÜR

Tez konumu verip, beni fuzzy uzaylarına yönlendiren, çalışmalarım boyunca yardımlarını ve değerli zamanını hiçbir zaman esirgemeyen Sayın Hocam Prof. Dr. Cemil YILDIZ'a, ayrıca manevi destekleri ile beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme, yardımları için Sayın Hocam Yrd. Doç. Dr. Hakan EFE'ye, tezin yazımı aşamasında bana yardımcı olan kardeşlerim Mehmet ve Hüseyin GİR'e teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER	ix
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. Fuzzy Küme ve Fuzzy Kümeler ile İlgili İşlemler.....	3
2.2. Fuzzy Topolojik Uzaylar ve Fuzzy Topolojik Uzaylarında Temel Kavramlar	10
2.3. Fuzzy Çarpım ve Bölüm Uzayları	18
3. FUZZY NORMLU LİNEER UZAYLAR	22
3.1. Fuzzy Normlu Uzaylar ve Özellikleri	22
3.2. Fuzzy Topolojik Vektör Uzayları	29
4. FUZZY SINIRLI LİNEER OPERATÖRLER	36
4.1. Fuzzy Sınırlı Lineer Operatörler ve Özellikleri	36
5. FUZZY LİNEER OPERATÖRLERİN SÜREKLİLİĞİ VE SINIRLILIĞI	49
5.1. Fuzzy Lineer Operatörlerin Süreklilik Çeşitleri	49
5.2. Fuzzy Lineer Operatörlerin Sınırlılığı ve Çeşitleri	53

Sayfa

6. FUZZY DUAL UZAYLAR	66
6.1. Fuzzy Dual Uzaylar ve Özellikleri	66
KAYNAKLAR	74
ÖZGEÇMİŞ	76

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
I^X	X 'den I 'ya tanımlanan bütün fonksiyonların kümesi
μ_A	A fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu
$[\cdot]_\alpha$	α -seviye kümesi
τ	Fuzzy topolojisi
(X, N)	Fuzzy normlu lineer uzay
$B(x, \alpha, t)$	Fuzzy normlu lineer uzayında açık yuvar
$\ \cdot\ _\alpha$	α - normu
X^*	(X, N_1) 'deki tüm güçlü fuzzy sınırlı lineer fonksiyoneller
X'	(X, N_1) 'deki tüm zayıf fuzzy sınırlı lineer fonksiyoneller

1. GİRİŞ

Bilimsel çalışmalarda son 40 yıla kadar sadece iki çıktılı olan Aristo mantığı kullanılmıştır. Aristo mantığına göre siyah veya beyaz çıktılardan birini tercih etmek gereklidir. Ancak, insanın düşünce sisteminde arada olan değişik derecede gri tercihlerinde yapılması söz konusudur. Buna imkan verecek olan fuzzy (bulanık) mantık ve ondan kaynaklanan sistemler ilk defa Azerbaycanlı Lütfü Askerzade tarafından 1965 yılında ortaya atılmıştır. O tarihten sonra önemi gittikçe artarak günümüze kadar gelen fuzzy (bulanık) mantık, belirsizliklerin anlatımı ve belirsizliklerle çalışılabilmesi için kurulmuş bir matematik düzen olarak tanımlanabilir. Bulanık mantık teorisi: Aristo mantığının siyah-beyaz ikilemine karşılık, Lütfü Asker Zadeh' in grinin çeşitli derecelerinin varlığını bilimsel olarak ifade edebilmesidir.

Fuzzy mantığın temeli fuzzy küme ve alt kümelerine dayanır. Klasik yaklaşımda bir nesne ya kümenin elemanıdır ya da değildir. Matematiksel olarak ifade edildiğinde nesne küme ile olan üyelik ilişkisi bakımından kümenin elemanı olduğunda (1), kümenin elemanı olmadığı zaman (0) değerini alır. Fuzzy kümesinde her bir nesnenin üyelik derecesi vardır. Nesnelerin üyelik derecesi, $[0,1]$ aralığında herhangi bir değer olabilir ve üyelik fonksiyonu $\mu(x)$ ile gösterilir. Örnek olarak normal oda sıcaklığını 21 derece olarak kabul edersek, klasik küme kuramına göre 21 derecenin üzerindeki sıcaklık derecelerini sıcak olarak kabul ederiz ve bu derecelerın sıcak kümesindeki üyelik dereceleri (1) olur. 21 derecenin altındaki sıcaklık dereceleri ise soğuktur ve sıcak kümesindeki üyelik dereceleri (0) olur. Soğuk kümesini temel aldığımızda bu değerler tersine döner. Fuzzy küme yaklaşımında üyelik değerleri $[0,1]$ aralığında değerler almaktadır. Fuzzy küme yaklaşımında üyelik dereceleri $[0,1]$ aralığında sonsuz sayıda değişebilir.

Fuzzy kavramı doğal dildeki belirsizliği modellemek için ortaya konmuştur. Batı dünyasında şüphe ile karşılaşmış ve oldukça yoğun tenkitler almıştır. Bunun nedeni batı dünyasında Aristo mantığının kullanılmasıdır. Fakat 1970'li yıllardan sonra doğu dünyasında özellikle de Japonya'da fuzzy mantık ve sistem kavramlarına önem verilmiştir. Mamdani ve Assilian tarafından 1975 yılında ilk defa bir buhar

makinesinin kontrolü fuzzy sistem ile modellenmiştir. Bu çalışmadan, fuzzy sistemlerle çalışmanın ne kadar kolay ve sonuçlarının da ne kadar etkili olduğunu anlamışlardır. 1978 yılında Holmblad ve Östergaard fuzzy sistem uygulamasını çimento fabrikasının işletilmesi ve kontrolü için yapınca; fuzzy kavramlar dünyanın birçok yerinde gittikçe yaygın şekilde kullanılmaya başlanmıştır. Özellikle de Japonya, Singapur, Kore ve Malezya’da fazlaca kendisini göstermiştir. Japonya’da özellikle fuzzy process controller olarak adlandırılan özel amaçlı mikroişlemci çipi’nin üretilmesi üzerinde çalışılmaktadır. Daha sonraki yıllarda fuzzy sistem Japonya’da elektrikli süpürgeler, çamaşır makineleri, asansörler, metro, şirket işletimi ve veri tabanlarının sözcükleştirilmesi gibi konularda yaygın şekilde kullanılmaya başlanmıştır. Fuzzy alanındaki gelişmelerden uzay araştırmaları ve havacılık alanlarında da yararlanılmıştır. Başka uygulama alanı olarak otomatik cıvatalamaların değerlendirilmesinde fuzzy sistem kullanılmaktadır. Günümüzde özellikle mühendislik alanında fuzzy sistem oldukça yoğun bir şekilde kullanılmaktadır. Tüm bunların doğal sonucu olarak matematiğinde fuzzy küme kavramına göre yeniden şekillenmesi gerekmiş ve bu alanlarda çalışmalar artmakla birlikte birçok makale yayınlanmıştır.

Bu tez çalışmamızın ikinci bölümde Zadeh [1] in fuzzy küme tanımı, fuzzy küme ile ilgili temel kavramlar ve bu kavramların bazı özellikleri verilmiştir. Chang [2] ve Nanda[7] ın ortaya koyduğu fuzzy topolojik uzay tanımı ve bazı özellikleri gösterilmiş, fuzzy çarpım ve fuzzy bölüm uzayı tanımı verilmiştir. Üçüncü bölümde ilk önce I. Sadeqi [11] makalesinden yararlanarak fuzzy normlu lineer uzay tanımı verildi. Fuzzy normlu lineer uzayda açık yuvar ve iç nokta tanımlanarak bunların oluşturduğu topolojilerin eşitliği gösterildi. I. Sadeqi [11] makalesinden yararlanarak fuzzy topolojik vektör uzayı tanımı verildi. Fuzzy dengeli, fuzzy konveks ve fuzzy emen(yutan, absorbing) kümeleri tanımlandı. Dördüncü bölümde T.Bag[14] makalesinden yararlanarak fuzzy sınırlı lineer uzaylar tanımlanarak bazı teoremlere yer verildi. Beşinci bölümde ise, fuzzy süreklilik ve sınırlılık çeşitleri tanımlandı ve bunlar arasındaki ilişkiler verildi. Altıncı bölümde T.Bag[14] makalesinden yararlanarak fuzzy dual uzay kavramı verildi.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde fuzzy küme tanımı ve fuzzy kümeler ile ilgili işlemlere yer verilecektir. Ayrıca fuzzy topolojik uzay ve fuzzy topolojik uzayların özellikleri hakkında tanımlar verilmiş ve teoremler ispatlanacaktır. Bölümün sonunda fuzzy çarpım uzayı ve fuzzy bölüm uzayı tanımlanacaktır.

2.1. Fuzzy Küme ve Fuzzy Kümeler ile İlgili İşlemler

2.1. Tanım

X boştan farklı herhangi bir küme ve $I = [0,1]$ olmak üzere X 'den I 'ya tanımlanan bütün fonksiyonların kümesini I^X ile gösterelim. I^X 'in her bir elemanına X 'in bir fuzzy kümesi denir [1].

2.2. Tanım

$X \neq \emptyset$ ve $I=[0,1]$ olmak üzere $\mu_A : X \rightarrow I$ üyelik fonksiyonu ile karakterize edilen $A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X\} \subset X \times I$ kümesine X 'in bir A fuzzy alt kümesi denir. Burada $\mu_A(x)$, x 'in A fuzzy kümesine üyelik derecesidir. Bundan sonra zaman zaman μ_A yerine A , $\mu_A(x)$ yerine $A(x)$ alınacaktır [1].

2.3. Tanım

X ve $\emptyset$ kümeleri birer fuzzy kümesi olup,

$$\forall x \in X \text{ için } \mu_X(x) = 1 \Rightarrow X = \{(x,1) : x \in X\}$$

$$\forall x \in X \text{ için } \mu_{\emptyset}(x) = 0 \Rightarrow \emptyset = \{(x,0) : x \in X\} \text{ şeklinde ifade edilir [2].}$$

Kümeler teorisinde bilinen kapsama " $\subset$ ", eşitlik " $=$ ", birleşim " $\cup$ " ve kesişim " $\cap$ " işlemleri yerine sırasıyla $\leq$, $=$, $\vee$, $\wedge$ işaretleri kullanılarak aşağıdaki gibi tanımlanır.

2.4. Tanım

X 'deki herhangi iki fuzzy küme A ve B olsun. A ve B 'nin üyelik fonksiyonları sırasıyla μ_A ve μ_B olmak üzere;

$$(1) A \leq B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \quad (\forall x \in X)$$

$$(2) A = B \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x) \quad (\forall x \in X)$$

$$(3) A \vee B = C \Leftrightarrow \mu_C(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad (\forall x \in X)$$

$$(4) A \wedge B = D \Leftrightarrow \mu_D(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad (\forall x \in X)$$

$$(5) A^c \Leftrightarrow \mu_A = 1 - \mu_A(x) \quad (\forall x \in X)$$

şeklinde tanımlanır [2].

2.5. Tanım

X'deki fuzzy kümelerin bir ailesi $\{A_i\}_{i \in I}$ olsun. Buna göre birleşim ve kesişim işlemlerinin genelleştirilmiş hali

$$1) C = \bigvee_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \mu_C(x) = \sup_{i \in I} \{\mu_{A_i}(x)\} \quad (\forall x \in X)$$

$$2) D = \bigwedge_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \mu_D(x) = \inf_{i \in I} \{\mu_{A_i}(x)\} \quad (\forall x \in X)$$

şeklinde tanımlanır [2].

2.6. Tanım

A ve B, X'deki herhangi iki fuzzy küme olmak üzere A ve B fuzzy kümelerinin farkı $A - B = A \wedge B^c \Leftrightarrow \mu_{A-B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B^c(x)\} \quad (\forall x \in X)$ şeklinde tanımlanır [2].

2.1. Teorem

X'de iki fuzzy küme A ve B olmak üzere;

i) $A \vee B$ fuzzy kümesi A ve B'yi ihtiva eden en küçük fuzzy kümesidir.

ii) $A \wedge B$ fuzzy kümesi A ve B kümelerini tarafından ihtiva edilen en büyük fuzzy kümesidir [3].

İspat

i) A ve B, fuzzy kümelerinin üyelik fonksiyonları sırasıyla μ_A ve μ_B olsun.

$A \vee B = C$, $\mu_C(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ ($\forall x \in X$) olduğundan $A \leq C$ ve $B \leq C$ dir. Kabul edelim ki A ve B 'i ihtiva eden en küçük fuzzy küme D olsun. D fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu μ_D olmak üzere;

$$A \leq D \Rightarrow \mu_A(x) \leq \mu_D(x)$$

$$B \leq D \Rightarrow \mu_B(x) \leq \mu_D(x) \text{ dir. Buradan}$$

$$\max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \leq \mu_D(x) \Rightarrow \mu_{A \vee B}(x) = \mu_C(x) \leq \mu_D(x)$$

$A \vee B = C$ fuzzy kümesi A ve B 'yi ihtiva eden bir küme olup kabulden dolayı

$$\mu_A(x) \leq \mu_D(x) \leq \mu_C(x) \text{ ve } \mu_B(x) \leq \mu_D(x) \leq \mu_C(x)$$

$$\Rightarrow \mu_D(x) \leq \mu_C(x). \text{ O halde her } x \in X \text{ için,}$$

$$\Rightarrow \mu_D(x) = \mu_C(x) \Rightarrow C = D$$

Buna göre A ve B 'i ihtiva eden en küçük fuzzy küme $A \vee B$ dir.

ii) de i) şikkına benzer şekilde ispat edilir.

Örnek

$X = \{x_1, x_2\}$, $I = [0,1]$ olmak üzere, X 'de fuzzy kümeleri A ve B

$A = \{(x_1/0,2), (x_2/0,7)\}$, $B = \{(x_1/0,5), (x_2/0,3)\}$ olarak verilsin. Böylece $A \vee B$, $A \wedge B$

fuzzy kümelerini ve Teorem 2.1.' in doğru olduğunu gösteriniz?

Çözüm

A ve B fuzzy kümelerinin $x \in X$ için üyelik fonksiyonlarının değerleri sırasıyla $\mu_A(x)$ ve $\mu_B(x)$ olsun. Buna göre;

$$x_1 \in X \text{ için } \mu_A(x_1) = 0,2 \text{ ve } x_1 \in X \text{ için } \mu_B(x_1) = 0,5$$

$$x_2 \in X \text{ için } \mu_A(x_2) = 0,7 \text{ ve } x_2 \in X \text{ için } \mu_B(x_2) = 0,3 \text{ dir.}$$

$$A \wedge B = C \Leftrightarrow \mu_C(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad (\forall x \in X)$$

$$\mu_C(x) = \{(x_1/0,2), (x_2/0,3)\}$$

$$A \wedge B = \{(x_1/0,2), (x_2/0,3)\}$$

Gerçekten $C \leq A$ ve $C \leq B$ 'dir.

$$A \vee B = D \Leftrightarrow \mu_D(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad (\forall x \in X)$$

$$\mu_D(x) = \{(x_1/0,5), (x_2/0,7)\}$$

$$A \vee B = \{(x_1/0,5), (x_2/0,7)\}$$

Gerçekten $A \leq A \vee B$ ve $B \leq A \vee B$ dir.

2.1. Özellikler

A, B ve C, X 'deki fuzzy kümeleri olmak üzere;

$$i) A \vee \emptyset = A, A \wedge \emptyset = \emptyset, A \vee X = X, A \wedge X = A$$

$$ii) A \vee B = B \vee A, A \wedge B = B \wedge A, A \vee A = A, A \wedge A = A$$

$$iii) A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C, A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$$

$$iv) A \leq B \Rightarrow A \vee B = B, A \leq B \Rightarrow A \wedge B = A$$

$$v) A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C), A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C) \text{ dir [3].}$$

2.2. Özellikler

A ve B, X 'de iki fuzzy küme olmak üzere;

$$i) A - \emptyset = A$$

$$ii) \emptyset^C = X, X^C = \emptyset, (A^C)^C = A$$

$$iii) A \leq B \Leftrightarrow B^C \leq A^C$$

$$iv) (A \wedge B)^C = A^C \vee B^C, (A \vee B)^C = A^C \wedge B^C \text{ dir [3].}$$

2.2. Teorem

X kümesi üzerindeki herhangi bir fuzzy kümesi A olsun.

i) $A \wedge A^C = \emptyset$ olmak zorunda değildir.

ii) $A \vee A^C = X$ olmak zorunda değildir [3].

İspat

Bu teoremi doğrulayan örnek aşağıda verilmiştir.

$X = \{a, b\}$ olmak üzere, X 'de bir fuzzy kümesi $A = \{(a, 0.2), (b, 0.9)\}$ olarak verilsin.

i) $A \wedge A^C = \emptyset$ midir?

ii) $A \vee A^C = X$ midir?

$$A^C = \{(a, 0.8), (b, 0.1)\}$$

$$i) A \wedge A^C = \{(a, 0.2), (b, 0.1)\} \Rightarrow A \wedge A^C \neq \emptyset$$

$$ii) A \vee A^C = \{(a, 0.8), (b, 0.9)\} \Rightarrow A \vee A^C \neq X$$

2.7. Tanım

X, Y iki küme olmak üzere $g: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve A , üyelik fonksiyonu μ_A olan X 'de bir fuzzy kümesi olsun. $\forall y \in Y$ için,

$$\mu_{g(A)}(y) = \begin{cases} \sup_{x \in g^{-1}(y)} \{ \mu_A(x) \}, & g^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & g^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlanan $g(A) = g(\mu_A)$ fuzzy kümesine A 'nın g altındaki görüntüsü denir [2].

2.8. Tanım

X ve Y iki küme olmak üzere $g: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve B , üyelik fonksiyonu μ_B olan, Y 'de bir fuzzy kümesi olsun. $\forall x \in X$ için,

$$\mu_{g^{-1}(B)}(x) = \mu_B(g(x))$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlanan $g^{-1}(B) = g^{-1}(\mu_B)$ ifadesine B 'nin ters görüntüsü

denir [2].

2.3. Teorem

$g: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon, A , X 'de ve B , Y 'de fuzzy kümeleri olmak üzere aşağıdaki özellikler vardır [2].

$$a) \forall B \in I^Y \Rightarrow g^{-1}(B^C) = [g^{-1}(B)]^C$$

$$b) \forall A \in I^X \Rightarrow g(A^C) \geq [g(A)]^C$$

$$c) \forall B_1, B_2 \in I^Y \text{ için } B_1 \leq B_2 \Rightarrow g^{-1}(B_1) \leq g^{-1}(B_2)$$

$$d) \forall A_1, A_2 \in I^X \text{ için } A_1 \leq A_2 \Rightarrow g(A_1) \leq g(A_2)$$

$$e) \forall B \in I^Y \Rightarrow g(g^{-1}(B)) \leq B$$

$$f) \forall A \in I^X \Rightarrow A \leq g^{-1}(g(A))$$

2.9. Tanım

X boştan farklı herhangi bir küme ve $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere X 'deki x_α fuzzy kümesinin $x_\alpha: X \rightarrow I$ üyelik fonksiyonu;

$$x_\alpha(t) = \begin{cases} \alpha, & t = x \\ 0, & t \neq x \end{cases}$$

şeklinde tanımlı ise, bu durumda x_α fuzzy kümesine X 'de bir fuzzy nokta denir. Burada $x \in X$ noktasına x_α fuzzy noktasının desteği (dayanağı), $\alpha \in (0,1]$ sayısına da x_α 'nın değeri denir [4].

Eğer A , X 'de bir fuzzy kümesi olmak üzere;

$\alpha \leq A(x)$ ise, x_α fuzzy noktası bir A fuzzy kümesi tarafından kapsanır [6-9].

2.10. Tanım

A , X 'de bir fuzzy kümesi ve $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere;

$$[A]_\alpha = \{x \in X: \mu(x) \geq \alpha\} = [A]_\alpha \subset X$$

kümesine, A fuzzy kümesinin α -seviye kümesi denir [4].

2.4. Teorem

A ve B , X 'in herhangi iki fuzzy kümeleri olsun. $\forall \alpha, \beta \in (0,1]$ için,

$$i) [A]_\alpha = [B]_\alpha \Leftrightarrow A = B$$

$$ii) [A]_\alpha \subset [A]_\beta \Leftrightarrow \beta \leq \alpha [5].$$

İspat

i) İspatı açıktır.

ii) $\Leftarrow \beta \leq \alpha$ olsun. $[A]_\alpha \subset [A]_\beta$ ifadesi açıktır.

$\Rightarrow [A]_\alpha \subset [A]_\beta$ ve $\beta > \alpha$ olsun.

$$[A]_\alpha = \{x \in X : A(x) \geq \alpha\},$$

$$[A]_\beta = \{x \in X : A(x) \geq \beta\}.$$

O zaman en az bir $x_0 \in X$ var öyle ki $x_0 \in [A]_\beta$ ve $x_0 \notin [A]_\alpha$ dır. O halde $x_0 \in [A]_\beta$ ise, $\beta \leq A(x_0)$ ve $x_0 \notin [A]_\alpha$ ise, $A(x_0) < \alpha$ dır. $\beta > \alpha$ iken $A(x_0) < \alpha < \beta \leq A(x_0)$ dır. Böylece $x_0 \in [A]_\alpha$ elde edilir. $\forall x \in [A]_\beta$ ise, $\beta \leq A(x)$ dır. $\Rightarrow \alpha < \beta \leq A(x)$ ise, $\forall x \in [A]_\beta$ ise, $x \in [A]_\alpha$ dır. $\Rightarrow [A]_\beta \subset [A]_\alpha$.

Bu eşitsizlikle çelişkiye düştük. Çünkü $\beta > \alpha$ almıştık. Böylece,

$$[A]_\alpha \subset [A]_\beta \Rightarrow \beta \leq \alpha \text{ dır.}$$

2.11. Tanım

X vektör uzayının iki fuzzy kümesi A ve B olsun. $A + B$ şeklinde iki fuzzy

kümesinin toplama işlemi şöyle tanımlanır;

$$(A+B)(x) = \sup_{x=x_1+x_2} \{A(x_1) \wedge B(x_2)\}, \quad \forall x = x_1 + x_2 \in X.$$

X 'de bir x_α fuzzy noktası için, toplama işlemi kolayca aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$(x_\alpha + A)(y) = \alpha \wedge A(y - x)$ ve özellikle, $(x+A)(y) = A(y-x)$ olarak gösterilebilir [4].

2.12. Tanım

X vektör uzayının bir fuzzy alt kümesi A ve $t \in \mathcal{R}$ bir sabit olsun. Böylece,

a) $t \neq 0$, $\forall x \in X$ için $(t.A)(x) = A(t^{-1}.x)$.

b) $t = 0$ için

$$(t.A)(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \sup A(x), & x = 0 \end{cases}$$

dır [4].

2.13. Tanım

X bir vektör uzayı ve bu uzayın fuzzy alt kümesi A olsun. Her $x, y \in X$ ve $k \in [0,1]$ için,

$$A(kx + (1-k)y) \geq \min\{A(x), A(y)\}$$

şartını sağlayan A fuzzy alt kümesine X vektör uzayının bir konveks fuzzy kümesi

denir [5].

Aynı şekilde her $\alpha \in (0,1]$ için,

$[A]_\alpha = \{x \in X: A(x) \geq \alpha\}$ şeklindeki küme de bir konveks kümedir.

2.2. Fuzzy Topolojik Uzaylar ve Fuzzy Topolojik Uzaylarında Temel Kavramlar

2.14. Tanım

X boştan farklı bir küme ve $\tau \leq I^X$ fuzzy kümelerinin bir ailesi olsun.

Aşağıdaki şartları sağlayan τ ailesine X üzerinde fuzzy topolojisi, (X, τ) ikilisine de fuzzy topolojik uzay denir [2].

$t_1) \emptyset, X \in \tau$ (veya $0, 1 \in \tau$)

$t_2) \forall A_1, A_2, \dots, A_n \in \tau \Rightarrow \bigwedge_{i \in I} A_i \in \tau$

$$t_3) \forall i \in I \text{ için, } A_i \in \tau \Rightarrow \bigvee_{i \in I} A_i \in \tau$$

τ topolojisinin her bir elemanına X 'de fuzzy açık küme, X uzayına göre tümleyeni fuzzy açık olan kümeye de fuzzy kapalı küme denir [2].

Genel topolojide olduğu gibi τ ailesi sadece 0 ve 1'den oluşuyorsa, (X, τ) fuzzy topolojik uzayına indiskret, tüm fuzzy kümelerinden oluşuyorsa, yani $\tau = I^X$ ise, (X, τ) fuzzy topolojik uzayına da diskret fuzzy topolojik uzay denir [6].

Örnek

$X = \{a, b\}$ olmak üzere, X kümesi üzerine de bir fuzzy topolojisi oluşturalım.

$$A_1 = \{(a/0,4), (b/0,7)\}, A_1(a) = 0,4, A_1(b) = 0,7$$

$$A_2 = \{(a/0,5), (b/0,2)\}, A_2(a) = 0,5, A_2(b) = 0,2$$

$$A_3 = \{(a/0,4), (b/0,2)\}, A_3(a) = 0,4, A_3(b) = 0,2$$

$$A_4 = \{(a/0,5), (b/0,7)\}, A_4(a) = 0,5, A_4(b) = 0,7$$

$$1 = X = \{(a/1), (b/1)\} \quad 0 = \emptyset = \{(a/0), (b/0)\}$$

Fuzzy kümelerini alacak olursak $\tau = \{0,1, A_1, A_2, A_3, A_4\}$ şeklinde tanımlanan τ ailesi X üzerinde bir fuzzy topolojisi oluşturur [3].

Çözüm

$t_1)$ 0 ve 1 fuzzy kümeleri τ ailesine ait olduğundan 0 ve $1 \in \tau$ dır.

$t_2)$ τ ailesine ait her sonlu elemanın arakesiti τ ailesine aittir. Fuzzy kümelerinde arakesit tanımında “0” kümesinin diğerleri ile arakesiti 0 ve 1 in diğerleri ile arakesiti

diğer fuzzy kümeleri olduğundan, sonlu arakesit sağlanır. Ayrıca,

$$A_1 \wedge A_2 = \{(a/0,4), (b/0,2)\} = A_3 \in \tau,$$

$$A_1 \wedge A_3 = \{(a/0,4), (b/0,2)\} = A_3 \in \tau,$$

$$A_1 \wedge A_4 = \{(a/0,4), (b/0,7)\} = A_1 \in \tau,$$

$$A_2 \wedge A_3 = \{(a/0,4), (b/0,2)\} = A_3 \in \tau,$$

$$A_3 \wedge A_4 = \{(a/0,5), (b/0,2)\} = A_2 \in \tau,$$

$$A_3 \wedge A_4 = \{(a/0,4), (b/0,2)\} = A_3 \in \tau.$$

Benzer olarak;

$$A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 = (A_1 \wedge A_2) \wedge A_3 = A_3 \in \tau,$$

$$A_1 \wedge A_2 \wedge A_4 = (A_1 \wedge A_2) \wedge A_4 = A_3 \in \tau,$$

$$A_1 \wedge A_3 \wedge A_4 = (A_1 \wedge A_3) \wedge A_4 = A_3 \in \tau,$$

$$A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4 = (A_1 \wedge A_2) \wedge (A_3 \wedge A_4) = A_3 \in \tau.$$

Fuzzy kümelerinin sonlu arakesitleri yine τ ailesine aittir.

t_3) Keyfi birleşimleri de τ ailesine ait olduğu (t_2) dekine benzer olarak gösterilebilir.

O halde, τ ailesi X üzerinde bir fuzzy topolojisi.

2.5. Teorem

(X, τ) fuzzy topolojik uzay olmak üzere;

$$\kappa = \{K \in I^X: K \text{ fuzzy kapalı} \Leftrightarrow K^C \in \tau\}$$

şeklinde tanımlı κ (kapalılar) ailesi aşağıdaki şartları sağlar [2].

$$k_1) \emptyset, X \in \kappa$$

$$k_2) \forall K_1, K_2, \dots, K_n \in \kappa \Rightarrow \bigvee_{i \in I} K_i \in \kappa$$

$$k_3) \forall i \in I \text{ için } K_i \in \kappa \Rightarrow \bigwedge_{i \in I} K_i \in \kappa$$

2.15. Tanım

(X, τ) fuzzy topolojik uzay ve $A \in I^X$ olsun.

$$A^0 = \bigvee \{B: B \leq A, B \in \tau\} = \sup \{B: B \leq A, B \in \tau\}$$

şeklinde tanımlanan fuzzy kümesine A fuzzy kümesinin içi denir. Tanımdan da anlaşıldığı gibi A^0 fuzzy açık bir kümedir. Üstelik A^0 , A 'nın kapsadığı en geniş fuzzy açık kümedir [2].

2.6. Teorem

(X, τ) fuzzy topolojik uzay ve $A \in I^X$ olsun. A 'nın fuzzy açık küme olması için gerekli ve yeterli koşul $A = A^0$ olmasıdır [7].

2.1. Sonuç

(X, τ) fuzzy topolojik uzay $A, B \in I^X$ A^0, A fuzzy kümesinin içi olsun. Bu durumda;

$$i) X^0 = X, \quad \emptyset^0 = \emptyset$$

$$ii) A^0 \leq A$$

$$iii) A^{00} = A^0$$

$$iv) A \leq B \Rightarrow A^0 \leq B^0$$

$$v) (A \wedge B)^0 = A^0 \wedge B^0$$

sağlanır [3].

2.16. Tanım

(X, τ) fuzzy topolojik uzay ve $A \in I^X$ olsun.

$$\bar{A} = \bigwedge \{B: A \leq B, B^C \in \tau\} = \inf \{B: A \leq B, B^C \in \tau\}$$

ile tanımlanan fuzzy kümesine A fuzzy kümesinin kapanışı denir. $\bar{A}$ kümesi tanımdan da anlaşıldığı gibi fuzzy kapalı bir kümedir. Ayrıca $\bar{A}$, A 'yı kapsayan en küçük fuzzy kapalı kümedir [2].

2.7. Teorem

(X, τ) fuzzy topolojik uzay ve $A \in I^X$ olsun. A 'nın fuzzy kapalı küme olması için gerekli ve yeterli koşul $\bar{A} = A$ olmasıdır [7].

2.2. Sonuç

(X, τ) fuzzy topolojik uzay A ve B , X 'in iki fuzzy kümesi ve $\bar{A}$, A 'nın kapanışı olsun. Bu durumda;

$$i) \bar{\bar{X}} = X, \bar{\emptyset} = \emptyset$$

$$ii) A \leq \bar{A}$$

$$iii) \bar{\bar{A}} = \bar{A}$$

$$iv) A \leq B \Rightarrow \bar{A} \leq \bar{B}$$

$$v) \overline{(A \vee B)} = \bar{A} \vee \bar{B}$$

özellikleri vardır [2].

2.17. Tanım

(X, τ) fuzzy topolojik uzay ve $x_\alpha = p$, X 'in fuzzy noktası olsun. p fuzzy noktasını içeren bir A fuzzy açık kümesini kapsayan her N fuzzy kümesine p 'nin fuzzy komşuluğu denir ve p 'nin bütün fuzzy komşuluklarının ailesi $N(p)$ ile gösterilir. O zaman $N \in N(p) \Leftrightarrow \exists A \in \tau \text{ var } p < A \leq N$ [4].

2.18. Tanım

(X, τ) fuzzy topolojik uzay ve $A \in I^X$ olsun. A 'yı ihtiva eden bir B fuzzy açık kümesini kapsayan N kümesine, A fuzzy kümesinin bir komşuluğu denir. Buna göre N , A 'nın fuzzy komşuluğu $\Leftrightarrow \exists B \in \tau \text{ var } \text{öyle ki } A \leq B \leq N$ [4].

2.19. Tanım

(X, τ) fuzzy topolojik uzay, $p \in I^X$ ve $N(p)$ de p 'nin fuzzy komşuluklar ailesi olsun.

Aşağıdaki ifadeler vardır;

$N_1)$ Her $N \in N(p) \Rightarrow p < N$

$N_2)$ $\forall N_1, N_2 \in N(p) \Rightarrow N_1 \wedge N_2 \in N(p)$

$N_3)$ Herhangi bir $N \in N(p)$ ve $N \leq B \Rightarrow B \in N(p)$

$N_4)$ Her $N \in N(p)$ için $A \leq N$ olacak şekilde öyle bir A fuzzy kümesi var $\exists q < A$ şartını sağlayan her q fuzzy noktası için $N \in N(q)$ [4].

2.20. Tanım

(X, τ) fuzzy topolojik uzay, $N(p)$ X kümesinde p fuzzy noktasının komşuluklar ailesi ve $E(p)$ 'de, $N(p)$ 'nin bir alt ailesi olsun. $N(p)$ 'nin her N elemanına karşılık $E \leq N$ olacak biçimde $E(p)$ 'nin bir E elemanı varsa, $E(p)$ 'ye p 'nin fuzzy komşuluklar tabanı (fuzzy yerel tabanı) denir [4].

2.21. Tanım

(X, τ) fuzzy topolojik uzay ve $\beta \leq \tau$ olsun. Her $A \in \tau$ için $A = \bigvee_{i \in I} B_i$ olacak şekilde

$\{B_i\}_{i \in I} \leq \beta$ alt ailesi varsa, β 'ya τ için bir taban denir. Yani,

β, τ için taban $\Leftrightarrow \forall A \in \tau$ için $\exists \beta' \leq \beta$ var $\exists A = \bigvee_{B \in \beta'} B$ [8].

2.22. Tanım

(X, τ) fuzzy topolojik uzay ve $\mathfrak{f}_l \leq \tau$ olsun. $\mathfrak{f}_l$ 'nin elemanlarının her sonlu kesişimlerinin oluşturduğu kümeler ailesi τ için bir taban oluşturuyor ise, $\mathfrak{f}_l$ ailesine τ için bir alt taban denir. Yani,

$\mathfrak{f}_l, \tau$ için alt tabandır $\Leftrightarrow \{ \bigwedge_{s \in \theta} S : \theta \leq \mathfrak{f}_l \text{ ve } \theta \text{ sonlu} \}$ ailesi τ için tabandır [8].

2.23. Tanım

(X, τ) fuzzy topolojik uzay ve β, τ için bir taban olsun. X 'in bir p fuzzy noktası için $\beta_p = \{B : p < B, B \in \beta\}$ ailesini göz önüne alalım. $p < A$ olmak üzere, her $A \in \tau$ için

$p < B \leq A$ olacak şekilde en az bir $B \in \beta_p$ varsa, β_p ailesine p fuzzy noktasının τ topolojisine göre yerel tabanı (lokal tabanı) denir [3].

2.24. Tanım

X ve Y herhangi iki küme olsun. X 'den, Y 'ye birebir ve örten bir fonksiyon varsa, X ve Y kümelerine elemanları sayısı bakımından denktir yada aynı kardinal sayıya sahiptir denir. Herhangi bir X kümesinin kardinal sayısı bu kümenin kardinalitesiyle belirlenir ve $|X|$ ile gösterilir. Bütün pozitif tam sayıların, $\mathbb{Z}^+$ kümesinin kardinal sayısı N_0 (alef sıfır) ile gösterilir [9].

2.25. Tanım

Bir küme sonlu ya da kardinalitesi N_0 (alef sıfır) ise, bu kümeye sayılabilir küme, aksi halde sayılamaz küme denir [9].

2.26. Tanım

(X, τ) fuzzy topolojik uzayının her fuzzy noktasının sayılabilir bir komşuluklar tabanı varsa bu uzaya birinci sayılabilir fuzzy topolojik uzayı denir [3].

2.27. Tanım

(X, τ) fuzzy topolojik uzayı sayılabilir bir tabana sahipse, bu uzaya ikinci sayılabilir fuzzy topolojik uzayı denir [3].

2.8. Teorem

Her ikinci sayılabilir fuzzy topolojik uzayı, birinci sayılabilir fuzzy topolojik uzayıdır [3].

İspat

(X, τ) ikinci sayılabilir fuzzy topolojik uzayı olsun. O halde sayılabilir bir tabana sahiptir. β, τ 'nin sayılabilir tabanı olsun. $\beta_p = \{\beta: p < \beta \mid B \in \beta\}$ ailesini göz önüne alalım ve bu ailenin p fuzzy noktasının komşuluklar tabanı olduğunu gösterelim. Öncelikle $\beta_p \leq \beta$ ve β sayılabilir olduğundan β_p ailesi sayılabilir. Şimdi $p < A$

olacak şekilde $A \in \tau$ alalım. B, τ 'nın tabanı olduğundan $p \leq B < A$ olacak şekilde $B \in \beta$ vardır.

$$p < B \text{ ve } B \in \beta \Rightarrow B \in \beta_p$$

O halde $p < A$ olacak şekilde $A \in \tau$ için, $p \leq B < A$ olacak şekilde en az bir $B \in \beta_p$ elemanı bulunduğundan β_p, p noktasının komşuluklar tabanıdır. Bu durumda (X, τ) fuzzy topolojik uzayının her noktasının sayılabilir bir komşuluklar tabanı vardır. Böylece (X, τ) birinci sayılabilir fuzzy topolojik uzaydır.

2.28. Tanım

(X, τ) fuzzy topolojik uzay ve $\mathfrak{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ fuzzy açık kümelerin bir ailesi olsun. Eğer $X = \bigcup_{i \in I} A_i$ ise, $\mathfrak{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ ailesine X 'in bir fuzzy açık örtüsü denir [10].

2.29. Tanım

(X, τ) fuzzy topolojik uzay olsun. X 'in her $\mathfrak{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ fuzzy açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa, (τ, X) fuzzy topolojik uzayına fuzzy kompakt uzay denir [10].

2.30. Tanım

(X, τ) fuzzy topolojik uzay olsun. X 'deki her dizinin X 'nin bir noktasına yakınsayan alt dizileri varsa, X 'e dizisel kompakt denir [11].

2.31. Tanım

(X, τ) fuzzy topolojik uzay olsun. X 'nin her sayılabilir fuzzy açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa, X kümesine sayılabilir kompakt küme denir [11].

2.32. Tanım

(X, τ) ve (Y, τ') fuzzy topolojik uzaylar ve $g: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Y 'deki her fuzzy açık kümenin g altındaki ters görüntüsü X 'de fuzzy açık ise, g fonksiyonu fuzzy süreklidir denir. Yani,

$$g \text{ fuzzy sürekli (F-sürekli)} \Leftrightarrow \forall U \in \tau' \text{ için } g^{-1}(U) \in \tau \text{ [2].}$$

2.9. Teorem

(X, τ) , (Y, τ') ve (Z, τ'') fuzzy topolojik uzaylar ve $g: X \rightarrow Y$, $h: Y \rightarrow Z$ fonksiyonları verilmiş olsun. g ve h fonksiyonları sürekli ise, $hog: X \rightarrow Z$ fonksiyonu da fuzzy süreklidir [2].

İspat

$g: X \rightarrow Y$, $h: Y \rightarrow Z$ fuzzy sürekli ve her $\omega \in \tau''$ olsun. h fonksiyonu fuzzy sürekli olduğundan, $h^{-1}(\omega) \in \tau'$ dür. Ayrıca g fonksiyonu fuzzy sürekli olduğundan, $h^{-1}(\omega) \in \tau'$ için $g^{-1}(h^{-1}(\omega)) \in \tau$ dur. Ayrıca $(hog)^{-1}(\omega) = g^{-1}(h^{-1}(\omega))$ olduğunu biliyoruz.

Bu ise, $hog: X \rightarrow Z$ fonksiyonunun fuzzy sürekli olması demektir.

2.33. Tanım

(X, τ) ve (Y, τ') fuzzy topoloji uzay ve $g: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer g fonksiyonu fuzzy sürekli ve tersi g^{-1} , var ve g^{-1} de fuzzy sürekli ise, g' ye bir fuzzy homeomorfizm denir [13]. Eğer iki fuzzy topolojik uzay arasında bir fuzzy homeomorfizm varsa, bunlara fuzzy homeomorf uzaylar denir [8].

2.34. Tanım

Fuzzy topolojik uzaylarda fuzzy homeomorfizm altında değişmeyen özelliklere, fuzzy topolojik özellik (fuzzy topolojik invaryant) denir [2,7].

2.3. Fuzzy Çarpım ve Bölüm Uzayları

A , X 'in B ise Y 'nin fuzzy kümeleri ise, $A \times B$ 'de $X \times Y$ 'nin bir fuzzy kümesi olup, bu kartezyen çarpım şu şekilde tanımlanır;

$$\forall (x,y) \in X \times Y \text{ için } A \times B \Leftrightarrow (A \times B)(x,y) = \min\{A(x), B(y)\}$$

$f_1: X_1 \rightarrow Y_1$ ve $f_2: X_2 \rightarrow Y_2$ iki fonksiyon olsun.

$f_1 \times f_2: X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2$ bir fonksiyon olup, şu şekilde tanımlanır:

$$\forall (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \text{ için } (f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (f(x_1), f(x_2)) \text{ dir [12].}$$

$f: X \rightarrow Y$ ve $g: X \rightarrow X \times Y$ ve $\forall x \in X$ için $g(x) = (x, f(x))$, $\{(x, f(x)): x \in X\} \subset X \times Y$ 'dir [12].

2.10. Teorem

$i = 1, 2$ olmak üzere $f_i: X_i \rightarrow Y_i$, B_i , Y_i 'nin fuzzy alt kümesi olsun. Bu durumda

$$(f_1 \times f_2)^{-1}(B_1 \times B_2) = f_1^{-1}(B_1) \times f_2^{-1}(B_2) \text{ dir [12].}$$

İspat

$\forall (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ için

$$(f_1 \times f_2)^{-1}(B_1 \times B_2)(x_1, x_2) = (B_1 \times B_2)(f_1(x_1), f_2(x_2)) = \min\{B_1 f_1(x_1), B_2 f_2(x_2)\}$$

$$= \min\{f_1^{-1}B_1(x_1), f_2^{-1}B_2(x_2)\} = (f_1^{-1}B_1 \times f_2^{-1}B_2)(x_1, x_2)$$

$$\Rightarrow (f_1 \times f_2)^{-1}(B_1 \times B_2) = f_1^{-1}(B_1) \times f_2^{-1}(B_2) \text{ olur.}$$

2.35. Tanım

(X, τ) , (Y, τ') fuzzy topoloji uzayı olsun. X ve Y uzaylarının çarpım topolojisi,

$$\{P_1^{-1}(A_\alpha), P_2^{-1}(B_\beta): A_\alpha \in \tau, B_\beta \in \tau', P_1, P_2 \text{ projeksiyonlar}\}$$

ailesiyle oluşturulan ($i = 1, 2$) P_i fonksiyonu sürekli yapan $X \times Y$ üzerinde tanımlı en kaba fuzzy topolojisine denir [12].

Burada

$$P_1^{-1}(A_\alpha) = A_\alpha \times 1 \quad P_2^{-1}(B_\beta) = 1 \times B_\beta$$

$$\{P_1^{-1}(A_\alpha) \wedge P_2^{-1}(B_\beta) = (A_\alpha \times 1) \wedge (1 \times B_\beta): A_\alpha \in \tau, B_\beta \in \tau'\} \text{ dır.}$$

Fuzzy çarpım uzayı tanımını daha genel olarak aşağıdaki şekilde verebiliriz.

2.36. Tanım

Her $\alpha \in J$ için (X_α, τ_α) bir fuzzy topolojik uzay $X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ bu uzayların kartezyen çarpımı ve her $\alpha \in J$ için $P_\alpha: X \rightarrow X_\alpha$ bir α -inci projeksiyon olsun.

$$\mathcal{A} = \{P_\alpha^{-1}(U_\alpha): U_\alpha \in \tau_\alpha, \alpha \in J\}$$

$$\mathcal{B} = \{\bigcap_{\alpha \in \varphi} P_{\alpha}^{-1}(U_{\alpha}) : U_{\alpha} \in \tau_{\alpha}, \varphi \in J \text{ sonlu}\}$$

olarak tanımlansın. $\mathcal{B}$ 'nin elemanlarının bütün keyfi birleşimlerinin ailesini τ ile gösterelim. Bu durumda $\mathcal{B}$, τ için taban, $\mathcal{A}$ ise bir alt tabanıdır. Öyle ki $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \tau$ dır. Bu şekilde tanımlanan τ topolojisine fuzzy çarpım topolojisi ve (X, τ) 'ya da fuzzy çarpım uzayı denir [12].

2.37. Tanım

(X, τ) bir fuzzy topoloji uzayı ve $\mathcal{R}$, X üzerinde tanımlanan bir denklik bağıntısı, $X/\mathcal{R}$ bölüm kümesi ve $q: X \rightarrow X/\mathcal{R}$, $x \rightarrow [x]$ bölüm dönüşümü olsun. $X/\mathcal{R}$ 'deki fuzzy kümelerinin $\mathcal{U} = \{B: q^{-1}(B) \in \tau\}$ ailesi q 'yu F -süreklili yapan bir fuzzy topolojisi. Bu topolojiye fuzzy bölüm topolojisi ve $(X/\mathcal{R}, \mathcal{U})$ ikilisine de fuzzy bölüm uzayı denir [12].

2.38. Tanım

$X \neq \emptyset$ bir küme ve F cismi için $F = \mathcal{R}$ (veya $K = C$) olsun.

$$+: X \times X \rightarrow X, \quad (x, y) \rightarrow x+y$$

$$\bullet: F \times X \rightarrow X, \quad (\lambda, x) \rightarrow \lambda x$$

dönüşümleri ile toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayalım.

$\forall x, y, z \in X$ ve $a, b \in F$ için aşağıdaki koşullar sağlansın:

$$1) x+y = y+x$$

$$2) x+(y+z) = (x+y)+z$$

$$3) \forall x \in X \text{ için } x+\theta = \theta+x = x \text{ olacak şekilde bir tek } \theta \in X \text{ var.}$$

$$4) \forall x \in X \text{ için } x+(-x) = (-x)+x = \theta \text{ olacak şekilde bir tek } -x \in X \text{ var.}$$

$$5) \forall x \in X \text{ için } 1.x = x.1 = x$$

$$6) a.(x+y) = ax+ay$$

$$7) (a+b)x = ax+bx$$

$$8) (a.b)x = a(bx)$$

X 'e F üzerinde vektör uzayı denir [12].

3. FUZZY NORMLU LİNEER UZAYLAR

Bu bölümde fuzzy uzayları üzerindeki normlu yapılar tanımlanacak ve fuzzy normlu lineer uzaylardaki bazı teoremlere yer verilecektir. Fuzzy normlu lineer uzayların oluşturdukları topolojiler tanımlanarak, karşılaştırılacaktır. Ayrıca her fuzzy normlu lineer uzayın bir topolojik vektör uzayı olduğu ifade edilecektir.

3.1. Fuzzy Normlu Lineer Uzaylar ve Özellikleri

3.1. Tanım

$X, \mathcal{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $X \times \mathcal{R}$ 'nin bir fuzzy kümesi N 'ye X üzerinde bir fuzzy norm denir, eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa;

$\forall x, y \in X$ ve $c \in \mathcal{R}$ için,

$$N_1) \forall t \in \mathcal{R} \text{ ve } t \leq 0 \text{ ise, } N(x, t) = 0$$

$$N_2) \forall t \in \mathcal{R} \text{ ve } t > 0 \text{ için } N(x, t) = 1 \Leftrightarrow x=0$$

$$N_3) \forall t \in \mathcal{R} \text{ } t > 0 \text{ için } c \neq 0 \text{ ise, } N(cx, t) = N(x, \frac{t}{|c|})$$

$$N_4) \forall x, y \in X \text{ ve } \forall s, t \in \mathcal{R}, N(x+y, s+t) \geq \min\{N(x, s), N(y, t)\}$$

$$N_5) \mathcal{R} \text{ üzerinde } N(x, \cdot) \text{ bir azalmayan fonksiyon ve } \lim_{t \rightarrow \infty} N(x, t) = 1$$

(X, N) ikilisine de fuzzy normlu lineer uzay denir [11].

$x \in X$ ve $t \in \mathcal{R}$ için N, X üzerinde bir fuzzy norm olsun. x 'in normu, t reel sayısı olmak üzere $N(x, t) \in [0, 1]$ ile gösterilir [14].

Örnek

$(X, \|\cdot\|)$ bir normlu lineer uzay, $N(x, t)$ aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$N(x, t) = \begin{cases} \frac{t}{t + \|x\|}, & t \in \mathcal{R}, t > 0 \text{ ve } \forall x \in X \\ 0, & t \in \mathcal{R}, t \leq 0 \text{ ve } \forall x \in X \end{cases}$$

Bu durumda (X, N) bir fuzzy normlu lineer uzaydır [14].

3.1. Teorem

(X, N) fuzzy normlu lineer uzay olsun.

$$N_6) \quad \forall t > 0, \quad N(x, t) > 0 \implies x = 0.$$

$\|x\|_\alpha = \inf\{t > 0: N(x, t) \geq \alpha\} \quad \alpha \in (0, 1)$ tanımlandığında $\{\|x\|_\alpha: \alpha \in (0, 1)\}$, X üzerindeki normun artan ailesidir [15].

İspat

$$i) \quad \forall x \in X \text{ ve } \forall \alpha \in (0, 1) \text{ için, } \|x\|_\alpha \geq 0$$

$$ii) \quad \forall \alpha \in (0, 1), \quad \|x\|_\alpha = 0 \iff x = 0$$

$$iii) \quad \forall \alpha \in (0, 1) \text{ ve } c \text{ skaleri için } \|cx\|_\alpha = |c| \|x\|_\alpha$$

$$iv) \quad \forall \alpha \in (0, 1), \quad \|x + y\|_\alpha \leq \|x\|_\alpha + \|y\|_\alpha \text{ olduğunu gösterelim.}$$

$$\|x\|_\alpha + \|y\|_\alpha = \inf\{t > 0: N(x, t) \geq \alpha\} + \inf\{s > 0: N(y, s) \geq \alpha\}$$

$$\geq \inf\{s+t > 0: N(x+y, s+t) \geq \alpha\} = \|x + y\|_\alpha$$

Şimdi artan aile olduğunu gösterelim.

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \text{ olsun. } \|x\|_{\alpha_1} = \inf\{t > 0: N(x, t) \geq \alpha_1\} \text{ dır. Bu da}$$

$$\|x\|_{\alpha_2} = \inf\{s > 0: N(x, s) \geq \alpha_2\} \text{ olduğundan,}$$

$$\inf\{t > 0: N(x, t) \geq \alpha_1\} \leq \inf\{s > 0: N(y, s) \geq \alpha_2\} \text{ dır. Buradan artan aile olduğu gösterir.}$$

3.2. Teorem

X lineer uzayında $\{\|x\|_\alpha: \alpha \in (0, 1)\}$ normun bir artan ailesi olsun. $N': X \times \mathcal{R} \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$N'(x, t) = \begin{cases} \sup\{\alpha \in (0, 1) \mid \|x\|_\alpha \leq t\}, & (x, t) \neq 0 \\ 0, & (x, t) = (0, 0) \text{ veya } \{\alpha \in (0, 1) \mid \|x\|_\alpha \leq t\} = \emptyset \end{cases}$$

Bu durumda N' , X üzerinde bir fuzzy normdur [15].

İspat

$N_1) \forall t \in \mathcal{R}$ ve $t < 0$ için, $N'(x, t) = \sup\{\alpha \in (0, 1) : \|x\|_\alpha \leq t\} = 0 \quad \forall x \in X$ dır.

$t = 0$ ve $x \neq 0$ ise, bu durumda $N'(x, t) = 0$ dır.

$t = 0$ ve $x = 0$ ise, $N'(x, t)$ tanımından $N'(x, t) = 0$ dır. Böylece $\forall t \in \mathcal{R}$ ve $t \leq 0$ ise, $\forall x \in X$, $N'(x, t) = 0$ dır. O halde N_1 şartı sağlanır.

$N_2) \Rightarrow \forall t \in \mathcal{R}$ ve $t > 0$ için, $N'(x, t) = 1$ olsun. $\varepsilon \in (0, 1)$ seçelim. Bu durumda her bir $t > 0$, $\exists \alpha_t \in (\varepsilon, 1)$ var öyle ki $\|x\|_{\alpha_t} \leq t$ ve dolayısıyla $\|x\|_\varepsilon \leq t$ dır. $t > 0$ keyfi olduğundan, $\|x\|_\varepsilon = 0$ buradan $x = 0$ yazabiliriz.

$\Leftarrow$ Eğer $x = 0$ ise, bu durumda $t > 0$ için,

$N'(0, t) = \sup\{\alpha : \|0\|_\alpha \leq t\} = \sup\{\alpha \in (0, 1] : \|0\|_\alpha \leq t\} = 1$ böylece

$\forall t \in \mathcal{R}$ ve $t > 0$ için, $N'(x, t) = 1 \Leftrightarrow x = 0$ sağlanır.

$N_3) \forall t \in \mathcal{R}$ ve $t > 0$ için $c \neq 0$ olsun.

$N'(cx, t) = N(x, \frac{t}{|c|})$ şartı kolaylıkla gösterilebilir.

$N_4) \forall x, y \in X, \forall s, t \in \mathcal{R}$ için $N'(x+y, s+t) \geq \min\{N(x, s), N(y, t)\}$

$\forall x, y \in X, \forall s, t \in \mathcal{R}$ olsun. Eğer

i) $s + t < 0$,

ii) $s = t = 0$,

iii) $t+s > 0$; $s > 0, t < 0$; $s < 0, t > 0$ ise, bu durumda

$N'(x+y, s+t) \geq \min\{N'(x, s), N'(y, t)\}$ olduğu açıktır.

iv) $s > 0, t > 0$ için, $p = N'(x, s)$ $q = N'(y, t)$ ve $p \leq q$ olsun.

Eğer $p = 0$ ve $q = 0$ ise, bu durumda N_4 şartı açıktır.

$0 < r < p \leq q$ olsun. Bu durumda $\exists \alpha > r$ var öyle ki $\|x\|_\alpha \leq s$ ve $\exists \beta > r$ iken

$\|y\|_\beta \leq t$ dır. $\gamma = \min\{\alpha, \beta\} > r$ buradan

$\|x\|_\gamma \leq \|x\|_\alpha \leq s$ ve $\|y\|_\gamma \leq \|x\|_\beta \leq t$ dır. Böylece

$\|x + y\|_\gamma \leq \|x\|_\gamma + \|y\|_\gamma \leq s + t$. O halde $N'(x + y, s + t) \geq \gamma > r$ dır.

$0 < r < p$ keyfi olduğundan $N'(x+y, s+t) \geq p = \min\{N'(x, s), N'(y, t)\}$ dır.

Eğer $p \geq q$ ise, benzer şekilde gösterilir. Buradan N_4 şartı sağlanır.

$N_5)$ $x \in X$ ve $\alpha \in (0,1)$ alalım. Şimdi $t > \|x\|_\alpha \Rightarrow N'(x, t) = \sup \{\beta: \|x\|_\beta \leq t\} \geq \alpha$

buradan $\lim_{t \rightarrow \infty} N'(x, t) = 1$ dır.

$N'(x, .)$, $\mathcal{R}'$ 'de azalmayan fonksiyon olduğunu gösterelim.

$\forall x, \in X$ için eğer $t_1 < t_2 \leq 0$ ise, bu durumda $N'(x, t_1) = N'(x, t_2) = 0$.

Eğer $t_2 > t_1 \geq 0$ ise, $\{\alpha \in (0,1): \|x\|_\alpha \leq t_1\} \subset \{\alpha \in (0,1): \|x\|_\alpha \leq t_2\} \Rightarrow$

$\sup \{\alpha \in (0,1): \|x\|_\alpha \leq t_1\} \leq \sup \{\alpha \in (0,1): \|x\|_\alpha \leq t_2\} \Rightarrow N'(x, t_1) \leq N'(x, t_2)$

Buradan $N'(x, .)$ 'in $\mathcal{R}'$ 'de azalmayan fonksiyon olduğunu ve N_5 şartının sağlandığını söyleyebiliriz.

(X, N) fuzzy normlu uzay olsun. Ayrıca (X, N) normu aşağıdaki şartları sağlasın.

$N_7)$ Sıfırdan farklı her bir x elemanı için, $N(x, .)$ $\mathcal{R}'$ 'de sürekli fonksiyon ve

$\{t: 0 < N(x, t) < 1\}$ 'de kesin artandır [11].

3.1. Lemma

(X, N) fuzzy normlu lineer uzayı N_6 ve N_7 şartlarını sağlasın ve $\{\alpha \in (0,1): \|x\|_\alpha \leq t\}$, $\|x\|_\alpha = \inf\{t > 0: N(x, t) \geq \alpha\}$ $\alpha \in (0,1)$ olarak tanımlanan X normunun bir artan ailesi ise, bu durumda $x_0 \neq 0$ $x_0 \in X$ için, $N(x_0, \|x_0\|_\alpha) \geq \alpha$ $\forall \alpha \in (0,1)$ [11].

3.2. Lemma

(X, N) fuzzy normlu lineer uzayı N_6 ve N_7 şartlarını sağlasın ve $\{\|x\|_\alpha: \alpha \in (0,1)\}$, $\|x\|_\alpha = \inf\{t > 0: N(x, t) \geq \alpha\}$ $\alpha \in (0,1)$ olarak tanımlanan X normunun bir ailesi

ise, bu durumda $x \neq 0$, $\alpha \in (0,1)$ ve $t' \in \mathcal{R}$, $t' > 0$ için $\|x\|_\alpha = t' \Leftrightarrow N(x, t') = \alpha$ dır [14].

3.3. Teorem

(X, N) fuzzy normlu lineer uzayı N_6 ve N_7 şartlarını sağlasın.

$\|x\|_\alpha = \inf \{t > 0: N(x,t) \geq \alpha\}$ ve $N': X \times \mathcal{R} \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlansın;

$$N'(x,t) = \begin{cases} \sup\{\alpha \in (0,1): \|x\|_\alpha \leq t\}, & (x,t) \neq (0,0) \\ 0, & (x,t) = (0,0) \text{ veya } \{\alpha \in (0,1) : \|x\|_\alpha \leq t\} = \emptyset \end{cases}$$

Bu durumda;

i) $\{\|x\|_\alpha : \alpha \in (0,1)\}$ X üzerindeki normun bir artan ailesidir.

ii) $N'(x,t)$, X üzerinde bir fuzzy normundur.

iii) $N = N'$ dır [11].

3.2. Tanım

(X,N) fuzzy normlu lineer uzay olsun. $B(x,\alpha,t) = \{y: N(x-y, t) > 1-\alpha\}$ kümesine, (X,N) fuzzy normlu lineer uzayında bir açık yuvar denir [11].

3.4. Teorem

(X,N) fuzzy normlu lineer uzay olsun.

$\tau_1 = \{G \subset X : x \in G \Leftrightarrow \alpha \in (0,1), \exists t > 0 \text{ var öyle ki } B(x, \alpha, t) \subset G\}$ şeklinde tanımlanan τ_1 , (X,N) 'de bir topolojidir [14].

İspat

$t_1) \emptyset, X \in \tau_1$ mı?

$\emptyset$ kümenin hiç bir elemanı olmadığından $\emptyset$ kümenin elemanlarını merkez kabul

eden açık yuvar boştur. Dolayısıyla $\emptyset \in \tau_1$

$x \in X$ için $t > 0$ seçelim ve $\alpha \in (0,1)$ olacak şekilde $B(x, \alpha, t) \subset X$, $X \in \tau_1$ bulunabilir.

$t_2) G_1, G_2, G_3, \dots, G_n \in \tau_1$ olsun.

Eğer $\bigcap_{i=1}^n G_i = \emptyset$ ise, t_1 den dolayı $\bigcap_{i=1}^n G_i \in \tau_1$ dır.

$G = \bigcap_{i=1}^n G_i$ ve $x \in G$ alalım. Bu durumda her $i=1,2,\dots,n$ için, $x \in G_i$. Böylece $\exists t_i > 0$ ve $\alpha_i \in (0,1)$ var öyle ki

$B(x, \alpha_i, t_i) \subset G_i \Rightarrow \{y: N(x-y, t_i) > 1-\alpha_i\} \subset G_i$ dır.

$t_0 = \min\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ ve $\alpha_0 = \min\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ alalım. Bu durumda

$B(x, \alpha_0, t_0) \subset \bigcap_{i=1}^n G_i = G$ böylece $G \in \tau_1$ dır.

$t_3) G = \bigcup_{i \in I} G_i$ alalım. Şimdi $x \in G \Rightarrow r = i$ için, $x \in G_r \Rightarrow \exists t_r > 0$ ve $\alpha_r \in (0,1)$ var öyle ki $B(x, \alpha_r, t_r) \subset G_r$ dır. $\Rightarrow B(x, \alpha_r, t_r) \subset G_r \subset G$.

x, G 'den keyfi seçilmiş bir nokta olduğundan $G \in \tau_1$ dır. Sonuç olarak τ_1, X 'de bir topolojidir.

3.3. Tanım

(X, N) fuzzy normlu lineer uzay olsun. Teorem 3.4.'deki τ_1 'ın elemanları (X, N) 'de açık kümeler olarak adlandırılır [14].

3.4. Tanım

(X, N) fuzzy normlu lineer uzayı N_6 şartını sağlasın. $x \in O \subseteq X$ noktası $\|\cdot\|_\alpha$ göre bir iç noktası olarak tanımlanır, eğer her $\varepsilon > 0$ için $\exists O'$ nun S alt kümesi var öyle ki $y \in S \Rightarrow \|x - y\|_\alpha < \varepsilon$ ise [11]. ($\alpha \in (0,1)$ olmak üzere $\|\cdot\|_\alpha, N$ 'deki α -normunu göstermektedir.)

3.5. Tanım

$\|\cdot\|_\alpha, N$ 'de α -normları olmak üzere $t > 0$ için,

$S_\alpha(x, t) = \{y \in O_i: \|x - y\|_\alpha < t\}$ kümesine, $(X, \|\cdot\|_\alpha)$ normlu uzayında bir açık yuvar denir. N_6 şartını sağlayan (X, N) fuzzy normlu uzayında $O_i \subset X$ iken, $S_{\alpha_x^i}(x, t) = \{y \in O_i: \|x - y\|_{\alpha_x^i} < t_x^i\}$ şeklinde gösterilir [11].

3.5. Teorem

(X, N) fuzzy normlu lineer uzayı N_6 şartını sağlasın.

$\tau_2 = \{O \subset X; \text{eğer } O\text{'nun her } x \text{ noktası, } \|\cdot\|_\alpha \text{ göre bir iç nokta ise}\}$ α, x 'e bağlı olduğunda $\tau_2, (X, N)$ üzerinde bir topolojidir [14].

İspat

Bütün noktaları iç nokta olan küme, açık küme olduğundan ispat Teorem 3.4.'e benzer olarak yapılır.

3.6. Teorem

(X, N) fuzzy normlu lineer uzayı N_6 ve N_7 şartını sağlasın. O halde Teorem 3.4.'deki τ_1 ve Teorem 3.5.'deki τ_2 topolojileri eşittir [14].

İspat

$O \in \tau_2$ olsun. α, x 'e bağlı olmak üzere, O 'nun her x noktası $\|\cdot\|_\alpha$ göre bir iç noktadır. $x_0 \in O$ alalım. $x_0, \|\cdot\|_{\alpha_{x_0}}$ göre bir iç noktadır. Böylece $\exists t_{x_0} > 0$ var öyle ki $S_{\alpha_{x_0}}(x_0, t_{x_0}) \subset O$. Yani $\{y: \|x_0 - y\|_{\alpha_{x_0}} < t_{x_0}\} \subset O$ dır.

$\alpha_{x_0} = 1 - \beta_{x_0}$ olmak üzere, $\{y: \|x_0 - y\|_{1-\beta_{x_0}} < t_{x_0}\} \subset O$ dır.

Şimdi $y \in X$ için, $N(x_0 - y, \frac{t_{x_0}}{2}) > 1 - \beta_{x_0} \Rightarrow \|x_0 - y\|_{1-\beta_{x_0}} < \frac{t_{x_0}}{2} < t_{x_0}$.

$\Rightarrow B(x_0, \beta_{x_0}, \frac{t_{x_0}}{2}) \subset \{y: \|x_0 - y\|_{1-\beta_{x_0}} < t_{x_0}\} \subset O$ yazabiliriz. Böylece O, τ_1 'in

elemanlarının birleşimi olarak yazılabilir ve dolayısıyla $O \in \tau_1$ dır. $\Rightarrow \tau_2 \subset \tau_1$

Şimdi de $O \in \tau_1$ olsun. $O, B(x, \alpha(x), t(x))$ biçimindeki kümelerin birleşimi olarak yazılabilir. $\alpha_0 \in (0,1), t_0 > 0$ için, $y \in B(x_0, \alpha_0, t_0)$ alalım. Bu durumda $N(x_0 - y, t_0) > 1 - \alpha_0$ dır.

N, N_7 şartını sağlaması ve $N(x_0 - y, .)$ sürekliliğinden $\exists t' < t_0$ var öyle ki

$$N(x_0 - y, t'(x_0 - y)) > 1 - \alpha_0 \implies \|x_0 - y\|_{1-\alpha_0} \leq t'(x_0 - y) < t_0. \text{ (i)}$$

$y_0 \in B(x_0, \alpha_0, t_0)$ alalım. Böylece $N(x_0 - y_0, t_0) > 1 - \alpha_0$ dır.

$N(x_0 - y_0, t_0) > \beta_0 > 1 - \alpha_0$ olacak şekilde β_0 seçelim, (i)'den $\|x_0 - y_0\|_{\beta_0(x_0 - y_0)} < t_0$.

$s_0 = \frac{t_0 - \|x_0 - y_0\|_{\beta_0}}{2} > 0$ iken $y \in S_{\beta_0}(y_0, s_0)$ alalım. Şimdi

$$\begin{aligned} \|x_0 - y\|_{\beta_0} &\leq \|x_0 - y_0\|_{\beta_0} + \|y_0 - y\|_{\beta_0} < \|x_0 - y_0\|_{\beta_0} + \frac{t_0 - \|x_0 - y_0\|_{\beta_0}}{2} \\ &= \frac{t_0 + \|x_0 - y_0\|_{\beta_0}}{2} < t_0. \end{aligned}$$

Böylece N_7 'den $\forall y \in S_{\beta_0}(y_0, s_0), N(x_0 - y, t_0) > \beta_0 > 1 - \alpha_0$.

$y \in B(x_0, \alpha_0, t_0)$ olur. Bu durumda $y \in S_{\beta_0}(y_0, s_0) \subset B(x_0, \alpha_0, t_0)$ dır. Böylece $y_0, \| \cdot \|_{\beta_0}$ göre bir iç noktadır. Buradan her $x \in B(x_0, \alpha_0, t_0)$ bir iç nokta ve dolayısıyla $B(x_0, \alpha_0, t_0) \in \tau_2$ dır. Sonuç olarak $O \in \tau_2$ dır. $\implies \tau_1 \subset \tau_2$

3.2. Fuzzy Topolojik Vektör Uzayları

Şimdi fuzzy normlu lineer uzayların, klasik analizdeki anlamda bir topolojik vektör uzayı olduğu tanımı verilerek, ilgili tanım ve teoremler incelenecektir.

3.6. Tanım

τ', X vektör uzayı üzerinde bir topoloji olsun. Eğer vektör uzayı operatörleri X 'deki her noktaya göre kapalı ve τ'' ye göre sürekli ise, (X, τ') topolojik vektör uzayı denir.

3.7. Tanım

τ , X vektör uzayı üzerinde bir fuzzy topoloji olsun. Eğer vektör uzayı operatörleri X 'deki her fuzzy noktaya göre kapalı ve τ göre sürekli ise, (X, τ) fuzzy topolojik vektör uzayı denir [11].

3.1. Not

Her fuzzy normlu lineer uzay bir topolojik vektör uzayıdır [11].

3.3. Lemma

(X, N) fuzzy normlu lineer uzay olsun. $\alpha \in (0,1)$, $t > 0$ için

$B(0, \alpha, t) = \{x: N(x, t) > 1 - \alpha\}$ kümesi aşağıdaki ifadeleri sağlar [11].

- a) $B(x, \alpha, t) = x + B(0, \alpha, t)$
- b) $B(0, \alpha, t) = tB(x, \alpha, 1)$
- c) Eğer $t_1 \leq t_2$ ise, $B(0, \alpha, t_1) \subset B(0, \alpha, t_2)$
- d) Eğer $\alpha_1 \leq \alpha_2$ ise, $B(0, \alpha_1, t) \subseteq B(0, \alpha_2, t)$

İspat

$$\begin{aligned}
 \text{a) } x + B(0, \alpha, t) &= x + \{y: N(y, t) > 1 - \alpha\} \\
 &= \{x+y: N(y, t) > 1 - \alpha\}, \quad x+y = z \text{ için} \\
 &= \{z: N(z-x, t) > 1 - \alpha\} \\
 &= B(x, \alpha, t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } tB(0, \alpha, 1) &= t\{y: N(y, 1) > 1 - \alpha\} \\
 &= \{ty: N(y, 1) > 1 - \alpha\}, \quad ty = x \text{ için} \\
 &= \{x: N(\frac{x}{t}, 1) > 1 - \alpha\} \\
 &= \{x: N(x, t) > 1 - \alpha\}
 \end{aligned}$$

$$= B(0, \alpha, t)$$

c) $t_1 \leq t_2$ olsun. $x \in B(0, \alpha, t_1)$ alalım. $N(x, .), \mathcal{R}$ üzerinde bir azalmayan fonksiyon olduğundan, $1 - \alpha < N(x, t_1) \leq N(x, t_2)$ ve böylece $x \in B(0, \alpha, t_2)$ dır. Buradan $B(0, \alpha, t_1) \subset B(0, \alpha, t_2)$ yazılabilir.

d) $\alpha_1 \leq \alpha_2$ olsun. $x \in B(0, \alpha_1, t)$ alalım. $1 - \alpha_2 < 1 - \alpha_1 < N(x, t)$ bu durumda $x \in B(0, \alpha_2, t)$ olur ve buradan $B(0, \alpha_1, t) \subseteq B(0, \alpha_2, t)$ yazabiliriz.

3.7. Teorem

(X, N) , fuzzy normlu lineer uzayı N_7 şartını sağlasın. Bu durumda (X, N) Hausdorff topolojik vektör uzayıdır, öyle ki (X, N) 'de 0 'ın(orijinin) yerel komşuluklar tabanı $\{B(0, \alpha, t): t > 0, \alpha \in (0, 1)\}$ dır [11].

İspat

$W_1 = B(0, \alpha_1, t_1)$ ve $W_2 = B(0, \alpha_2, t_2)$ alalım. $\alpha_0 = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$

$t_0 = \min\{t_1, t_2\}$ seçildiğinde $W_0 = B(0, \alpha_0, t_0)$ var öyle ki $W_0 \subseteq W_1 \cap W_2$ dır. O halde $\{B(0, \alpha, t): t > 0, \alpha \in (0, 1)\}$, X üzerindeki topolojinin tabanıdır. Şimdi X üzerindeki topoloji ile birlikte topolojik vektör uzayı olduğunu gösterelim.

a) (X, N) Hausdorff uzaydır.

Eğer $x \in X$ ve $x \neq 0$ N_7 şartından, $N(x, .), \mathcal{R}'$ 'nin $\{t: 0 < N(x, t) < 1\}$ altkümesi üzerinde kesin artandır. Yani $N(x, t) \neq 0$ olduğunda, $t_0 > 0, \alpha_0 \in (0, 1)$ var öyle ki $N(x, t_0) < 1 - \alpha_0$, böylece $x \notin B(0, \alpha_0, t_0)$ 'dır. O halde $B(0, \alpha_0, \frac{t_0}{2}) \cap B(x, \alpha_0, \frac{t_0}{2}) = \emptyset$, aksine $y \in B(0, \alpha_0, \frac{t_0}{2}) \cap B(x, \alpha_0, \frac{t_0}{2})$ kabul edelim. Bu durumda $N(y, \frac{t_0}{2}) > 1 - \alpha_0$ ve $N(x - y, \frac{t_0}{2}) > 1 - \alpha_0$ dır.

$N(x, t_0) \geq \min\{N(x - y, \frac{t_0}{2}), N(y, \frac{t_0}{2})\} > 1 - \alpha_0$ dır. Dolayısıyla

$x \in B(0, \alpha_0, t_0)$ olur ancak, biz $x \notin B(0, \alpha_0, t_0)$ seçmiştik, kabulümüz ile çelişti.

b) Bu topolojiye göre vektör uzayı operatörleri (toplama ve skaler ile çarpma) süreklidir. Gösterelim ki $W = B(0, \alpha, t)$ iken $W_1 = B(0, \alpha_1, t_1)$ ve $W_2 = B(0, \alpha_2, t_2)$ var öyle ki $W_1 + W_2 \subset W$ ve $W = B(0, \alpha, t)$ için $W_1 = B(0, \alpha_1, t_1)$ ve $N_r(\lambda); \lambda > 0$ var öyle ki $N_r(\lambda)W_1 \subseteq W$ dır.

$\alpha_1, \alpha_2 < \alpha$ $t_1, t_2 < \frac{t}{2}$ seçelim, $N(x+y, t) > 1 - \alpha$ dır.

$x \in W_1 = B(0, \alpha_1, t_1) = \{x: N(x, t_1) > 1 - \alpha_1\}$ ve

$y \in W_2 = B(0, \alpha_2, t_2) = \{x: N(x, t_2) > 1 - \alpha_2\}$ olduğundan

$N(x+y, t) \geq \min \{N(x, \frac{t}{2}), N(y, \frac{t}{2})\}$ buradan $x+y \in W = B(0, \alpha, t)$ dır. Dolayısıyla

toplam vektörü süreklidir. Şimdi skaler ile çarpımın sürekliliğini gösterelim:

$x \in W_1 = B(0, \alpha_1, t_1)$ ve $\beta \in N_r(\lambda)$ alalım. Bu durumda $N(x, t_1) > 1 - \alpha_1$, $|\beta - \lambda| < r$ dır. Buradan

$N(\beta x, t) = N(\beta x - \lambda x + \lambda x, t) = N((\beta - \lambda)x + \lambda x, t) \geq \min \{N(x, \frac{t}{2|\beta - \lambda|}), N(x, \frac{t}{2|\lambda|})\}$ dır.

$\alpha_1 < \alpha$, $t_1 < \frac{t}{2|\lambda|}$, $r = \frac{t}{2t_1}$ seçildiğinde, $|\beta - \lambda| < \frac{t}{2t_1}$ ve $N(\beta x, t) > 1 - \alpha$ bu durumda $\beta x \in W = B(0, \alpha, t)$ dır.

Sonuç olarak (X, N) bir topolojik vektör uzayıdır.

3.2. Not

(X, N) bir fuzzy normlu lineer uzayı N_6 ve N_7 şartlarını sağlıyor ise, bu durumda (X, N) birinci sayılabilir. Lemma 3.3.'den ve $\alpha \in Q$ bir rasyonel sayı olmak üzere, $\{B(0, \alpha, t): \alpha \in (0, 1) t > 0 t \text{ ve } \alpha \in Q\}$ ailesi topolojinin tabanıdır. Böylece (X, N) çifti birinci sayılabilir [11].

Şimdi aşağıdaki sonucu verebiliriz.

3.1. Sonuç

(X, N) bir fuzzy normlu lineer uzay olsun. Bu durumda (X, N) çifti metrikleşebilir buradaki metrik klasik haldedir [11].

İspat

Teorem 3.7.'den (X, N) , N_7 şartlarını sağlayan bir topolojik vektör uzayıdır ve bir Not 3.2.'den (X, N) çifti birinci sayılabilir. [16] (1. kısım: 1.24)'den X metrikleşebilir.

3.8. Teorem

(X, N) fuzzy normlu lineer uzayı N_7 şartını sağlasın. Bu durumda aşağıdaki ifadeler eş değerdir [11].

- a) X fuzzy kompakttır.
- b) X fuzzy sayılabilir kompakttır.
- c) X fuzzy dizisel kompakttır.

3.8. Tanım

X topolojik vektör uzayı olmak üzere A, B ve C , X 'de birer fuzzy kümeleri olsun.

- a) $A \subseteq X$ dengelidir (balance), eğer her $\lambda \in F$ ve $|\lambda| \leq 1$ için $\lambda A \subseteq A$ ise.
- b) $B \subseteq X$ fuzzy konvektir, eğer her $\lambda \in F$ ve $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$ için $\lambda B + (\frac{1}{2} - \lambda)B \subseteq B$ ise.
- c) C fuzzy konveks küme olsun. C' ye fuzzy emen (yutan, absorbing) küme denir, eğer her $x \in X$ için $\exists t = t(\alpha) > 0$ öyle ki $x \in tC$ ise [11].

3.4. Lemma

(X, N) fuzzy normlu lineer uzay olsun. O zaman

- a) $W = B(0, \alpha, t)$ dengeli (balance)
- b) $W = B(0, \alpha, t)$ fuzzy konveks

c) $W = B(0, \alpha, t)$, N_6 ve N_7 şartlarını sağlarsa fuzzy absorbing (emen, yutan)'dır [11].

İspat

a) Eğer $\lambda = 0$ ise, $0B(0, \alpha, t) = \{0\} \subseteq B(0, \alpha, t)$

Eğer $\lambda \neq 0$ ise, $\lambda.B(0, \alpha, t) = \{ \lambda y : N(x - y, t) > 1 - \alpha \}$

$$= \{ x : N(x, |\lambda|t) > 1 - \alpha \}$$

$|\lambda| \leq 1$ alalım. Bu durumda $|\lambda|t \leq t$ dir. N_5 şartından $1 - \alpha < N(x, |\lambda|t) \leq N(x, t)$ ve $x \in B(0, \alpha, t)$ dir.

b) Her $x, y \in B(0, \alpha, t)$ ve $\lambda \in [0, \frac{1}{2}]$ için

$$N[\lambda x + (\frac{1}{2} - \lambda)y, t] \geq \min\{N(x, \frac{1}{2|\lambda|}), N(y, \frac{1}{2(\frac{1}{2}-\lambda)})\}$$
 buradan eğer $x, y \in B(0, \alpha, t)$ ise,

bu durumda $N(x, t) > 1 - \alpha$ ve $N(y, t) > 1 - \alpha$ N_5 şartından;

$$N(x, \frac{t}{2|\lambda|}) > 1 - \alpha \text{ ve } N(y, \frac{t}{2(\frac{1}{2}-\lambda)}) > 1 - \alpha \text{ olur. Bu durumda } N(\lambda x + (\frac{1}{2} - \lambda)y, t) > 1 - \alpha$$

yazılır sonuç olarak $\lambda x + (\frac{1}{2} - \lambda)y \in B(0, \alpha, t)$.

c) (X, N) , N_6 şartını sağlasın. Bu durumda eğer $x \in X$ için $\lambda = \frac{t}{t + \|x\|_\alpha}$ seçersek,

$$\text{öyle bir } N(\lambda x, t) = N(x, \frac{t}{|\lambda|}) = N(x, t + \|x\|_\alpha), \text{ } N_5 \text{'den dolayı}$$

$1 - \alpha < N(x, \|x\|_\alpha) \leq N(x, t + \|x\|_\alpha)$ böylece $\lambda x \in B(0, \alpha, t)$ olur, (X, N) N_7 şartını sağlaması Teorem 3.7. uygulanırsa, (X, N) topolojik vektör uzayıdır. Böylece $B(0, \alpha, t)$ topolojinin bir komşuluğu olarak absorbing (emen ,yutan)'dır.

3.9. Tanım

(X, N) fuzzy normlu lineer uzay ve $\{x_n\}$ X 'de bir dizi olsun.

$\forall t > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n - x, t) = 1$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, $\{x_n\}$ dizisine X de yakınsak denir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ şeklinde gösterilir [11].

3.10. Tanım

(X, N) fuzzy normlu lineer uzay ve $\{x_n\}$ X 'de bir dizi olsun.

$\forall t > 0, p = 1, 2, 3, \dots$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_{n+p} - x_n, t) = 1$ ise $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir [11].

3.11. Tanım

(X, N) fuzzy normlu lineer uzay ve $G \subseteq X$ olsun.

Eğer G 'deki her Cauchy dizisi G 'de yakınsak ise, bu durumda G 'ye fuzzy tam uzay denir [11].

3.1. Özellik

(X, N) fuzzy normlu lineer uzayı N_6 ve N_7 şartlarını sağlasın ve $\{x_n\}$ X 'de bir dizi olsun. Bu durumda;

$\forall t > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n - x, t) = 1 \Leftrightarrow \forall \alpha \in (0, 1), \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_\alpha = 0$ dır [14].

4. FUZZY SINIRLI LİNEER OPERATÖRLER

Bu bölümde fuzzy normlu lineer uzayda fuzzy kümenin sınırlılığı, normun sınırlılığı, dönüşümün sınırlılığı, α -yakınsaklığı, α -Cauchy dizisi, α -tam olma tanımları verilerek aralarındaki ilişkiler incelenecektir.

4.1. Fuzzy Sınırlı Lineer Operatörler ve Özellikleri

Önce klasik analizdeki bazı tanımları hatırlayalım.

4.1. Tanım

X , $\mathcal{R}$ reel sayılar cismi üzerinde bir topolojik vektör uzayı ve $E \subset X$ olsun. X 'de 0 'ın her V komşuluğu için $E \subseteq t_\alpha V$ olacak şekilde bir $t_\alpha > 0$ sayısı varsa E sınırlıdır denir [11].

4.2. Tanım

X ve Y , $\mathcal{R}$ reel sayılar cismi üzerinde birer topolojik vektör uzayı ve $T: X \rightarrow Y$ lineer dönüşüm olmak üzere, T sınırlı kümeleri sınırlı kümelere dönüştürüyor ise, T lineer dönüşümüne sınırlıdır denir [11].

4.3. Tanım

X ve Y , $\mathcal{R}$ reel sayılar cismi üzerinde birer topolojik vektör uzayı ve $T: X \rightarrow Y$ lineer dönüşüm olmak üzere, eğer $\forall x \in X$ ve $T(x)$ 'in her bir V komşuluğu için, x 'in bir U komşuluğu var öyle ki $T(U) \subseteq V$ ise, T dönüşümü süreklidir denir [11].

Şimdi klasik analizdeki kavramların fuzzy uzayındaki karşılıklarını verelim;

4.4. Tanım

(X, N) fuzzy normlu uzayın bir G alt kümesi sınırlıdır denir $\Leftrightarrow \exists t > 0$ ve $0 < r < 1$ var öyle ki $\forall x \in X$ için $N(x, t) = 1 - r$ [14].

4.5. Tanım

N_6 şartını sağlayan (X, N_1) ve (Y, N_2) fuzzy normlu lineer uzaylar,

$T:(X,N_1) \rightarrow (Y,N_2)$ bir dönüşüm olsun. X 'in her bir G fuzzy sınırlı alt kümesi ve $\forall \alpha > 0$ için $t_1(\alpha) > 0$ var öyle ki $\|x\|_\alpha \leq t_1(\alpha)$ iken $t_2(\alpha)$ var öyle ki $\forall x \in G$ $\|Tx\|_\alpha \leq t_2(\alpha)$ ise, bu durumda T fuzzy sınırlıdır [11].

4.6. Tanım

(X,N_1) ve (Y,N_2) fuzzy normlu lineer uzaylar, $T:(X,N_1) \rightarrow (Y,N_2)$ bir dönüşüm olsun. T dönüşümü (X,N_1) 'in fuzzy sınırlı alt uzayından, (Y,N_2) 'nin fuzzy sınırlı alt uzayının üzerine ise, bu durumda T fuzzy sınırlıdır denir [11].

4.1. Teorem

(X,N) fuzzy normlu lineer uzay olsun. $G \subseteq X$ bir fuzzy sınırlı kümedir $\Leftrightarrow G, X$ 'in sınırlı alt kümesidir [11].

İspat

$\Rightarrow G \subseteq X$ fuzzy sınırlı küme olsun. $\forall t > 0$ ve $\alpha \in (0,1)$ için bir M_α var öyle ki $G \subseteq B(0, \alpha, M_\alpha)$ dır. Bu durumda $\lambda = \frac{\mu_\alpha}{t}$ seçersek $G \subseteq tB(0, \alpha, \lambda)$ dır. O halde G sınırlıdır.

$\Leftarrow G$ X 'in sınırlı altkümesi olsun. Eğer $\alpha \in (0,1)$ ve $t = 1$ ise, bu durumda $M_\alpha \neq 0$ var öyle ki $G \subseteq M_\alpha B(0, \alpha, 1)$ ve $M_\alpha B(0, \alpha, 1) = B(0, \alpha, M_\alpha)$ olduğundan $G \subseteq B(0, \alpha, M_\alpha)$ dır. Böylece G fuzzy sınırlı kümedir.

4.2. Teorem

(X,N) fuzzy normlu lineer uzayı N_6 ve N_7 şartlarını sağlasın ve $\alpha \in (0,1)$ için, $\|x\|_\alpha = \inf\{t > 0: N(x,t) \geq \alpha\}$ şeklinde tanımlanan X 'deki, N 'in α - normlarının $\{\| \cdot \|_\alpha: \alpha \in (0,1)\}$, ailesi olsun. Bu durumda $(0,1)$ aralığında her bir artan veya azalan $\{\alpha_n\}$ dizi için, $\forall x \in X$ ve $\alpha \in (0,1)$, $\alpha_n \rightarrow \alpha \Rightarrow \|x\|_{\alpha_n} \rightarrow \|x\|_\alpha$ dır [14].

İspat

$x = 0$ için, $\alpha_n \rightarrow \alpha \Rightarrow \|x\|_{\alpha_n} \rightarrow \|x\|_\alpha$ olduğu açıktır.

$x \neq 0$ olsun. Lemma 3.2.'den $x \neq 0, \alpha \in (0,1)$ ve $t' > 0$ için $\|x\|_\alpha = t' \Leftrightarrow N(x, t') = \alpha$ yazabiliriz. $\{\alpha_n\}$, $(0, 1)$ aralığında artan bir dizi öyle ki $\alpha \in (0,1), \alpha_n \rightarrow \alpha$ dır.

$\|x\|_{\alpha_n} = t_n$ ve $\|x\|_\alpha = t$ alalım. Bu durumda $N(x, t_n) = \alpha_n$ ve $N(x, t) = \alpha$ dır. (i) $\{\| \cdot \|_\alpha : \alpha \in (0,1)\}$ normların artan bir ailesi olduğundan $\{t_n\}$ reel sayıların artan bir dizisidir ve üstten t ile sınırlıdır. $\forall n \in \mathbb{N}$ için, $\|x\|_{\alpha_n} \leq \|x\|_\alpha$ olduğundan dolayısıyla $\{t_n\}$ yakınsaktır. O halde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N(x, t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \Rightarrow N(x, \lim_{n \rightarrow \infty} t_n) = \alpha. (ii)$$

(i) ve (ii)'den $N(x, \lim_{n \rightarrow \infty} t_n) = N(x, t) \Rightarrow N_7$ şartından $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t$ yazabiliriz.

O halde $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x\|_{\alpha_n} = \|x\|_\alpha$ dır.

Benzer şekilde $\{\alpha_n\}$, $(0,1)$ aralığında azalan bir dizidir ve $\alpha_n \rightarrow \alpha \in (0,1)$ ise, bu durumda $\forall x \in X$ için, $\|x\|_{\alpha_n} \rightarrow \|x\|_\alpha$ gösterilebilir.

4.1. Sonuç

X bir lineer uzay ve $\{\| \cdot \|_\alpha : \alpha \in (0,1)\}$, X üzerindeki α -normların bir artan ailesi olsun. $\{\alpha_n\}$, $(0,1)$ aralığında artan veya azalan her dizi için, $\forall x \in X$ ve $\alpha \in (0,1), \alpha_n \rightarrow \alpha \Rightarrow \|x\|_{\alpha_n} \rightarrow \|x\|_\alpha$ dır [14].

4.3. Teorem

X bir lineer uzay ve $\{\| \cdot \|_\alpha : \alpha \in (0,1)\}$, X üzerindeki normların bir artan ailesi Sonuç 4.1.'i sağlasın. X üzerindeki N fuzzy normunu aşağıdaki gibi tanımlayalım;

$$N(x, t) = \begin{cases} \sup\{\alpha \in (0,1) : \|x\|_\alpha \leq t\}, & (x, t) \neq (0,0) \\ 0, & (x, t) = (0,0) \end{cases}$$

$\| \cdot \|'_\alpha : X \rightarrow \mathcal{R}^+$ fonksiyon, $\alpha \in (0,1), \|x\|'_\alpha = \inf\{t : N(x, t) \geq \alpha\}$ ile tanımlayalım. Bu durumda $\forall \alpha \in (0,1)$ için, $\|x\|'_\alpha = \|x\|_\alpha$ dır [14].

İspat

$x = 0$ ve $\forall \alpha \in (0,1)$ için, $\|x\|'_\alpha = \|x\|_\alpha$ dır.

$x \neq 0$ ve $\alpha_0 \in (0,1)$ için, $\|x\|_{\alpha_0} = t_0$ alalım. Bu durumda $t_0 > 0$ dir. $N(x, t)$ tanımından $N(x, t_0) \geq \alpha_0$ dir. $\|x\|_{\alpha}$ tanımından $\|x\|_{\alpha_0} \leq t_0 = \|x\|_{\alpha_0}$ dir. Bu suretle, $\|x\|_{\alpha_0} \leq \|x\|_{\alpha_0}$ dir. (i)

$r > \|x\|_{\alpha_0} \Rightarrow \exists t_1 < r$ var öyle ki $N(x, t_1) \geq \alpha_0$

$\Rightarrow \sup\{\alpha \in (0,1): \|x\|_{\alpha} \leq t_1\} \geq \alpha_0$. Eğer $\sup\{\alpha \in (0,1): \|x\|_{\alpha} \leq t_1\} = \alpha_0$ ise, bu durumda en az bir $\{\alpha_n\}$, $(0,1)$ aralığında artan dizisi var öyle ki $\alpha_n \uparrow \alpha_0$ ve $\|x\|_{\alpha_n} \leq t_1$ dir. Böylece Sonuç 4.1.' den $\|x\|_{\alpha_0} \leq t_1 < r$ yazabiliriz.

Eğer $\sup\{\alpha \in (0,1): \|x\|_{\alpha} \leq t_1\} > \alpha_0$ ise, bu durumda $\|x\|_{\alpha_0} \leq t_1 < r$ dir.

Her hangi bir durumda $r > \|x\|_{\alpha_0}$ dir. Sonuç olarak $\|x\|_{\alpha_0} \geq \|x\|_{\alpha_0}$ dir. (ii)

(i) ve (ii)'den $\forall x \in X, \|x\|_{\alpha_0} = \|x\|_{\alpha_0}$ yazabiliriz. $\alpha_0 \in (0,1)$ keyfi olduğundan $\forall \alpha \in (0,1), \forall x \in X, \|x\|_{\alpha} = \|x\|_{\alpha}$ dir.

4.7. Tanım

(X, N) fuzzy normlu lineer uzay ve $\alpha \in (0,1)$ olsun. $\{x_n\}$, X 'de bir dizi olmak üzere,

eğer $\exists x \in X$ var $\exists \forall t > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n - x, t) > \alpha$ ise, bu durumda $\{x_n\}$ X 'de α -yakınsaktır denir.

Burada x , $\{x_n\}$ dizisinin limitidir [14].

4.4. Teorem

(X, N) fuzzy normlu lineer uzayı N_6 şartını sağlasın. Bu durumda α -yakınsak dizinin limiti tektir [14].

İspat

$\{x_n\}$ α -yakınsak dizi olsun. Kabul edelim ki $\{x_n\}$ dizisi x ve y noktalarına

α -yakınsak olsun.

$\forall t > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n - x, t) > \alpha$ ve $\forall t > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n - y, t) > \alpha$ olur.

$$N(x-y, t) = N(x - x_n + x_n - y, \frac{t}{2} + \frac{t}{2}) \geq \min\{N(x - x_n, \frac{t}{2}), N(x_n - y, \frac{t}{2})\}$$

$$\Rightarrow N(x-y, t) \geq \min\{\lim_{n \rightarrow \infty} N(x - x_n, \frac{t}{2}), \lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n - y, \frac{t}{2})\}$$

$$\Rightarrow \forall t > 0 \quad N(x-y, t) > \alpha > 0$$

$$\Rightarrow N_6 \text{ şartından } x-y = 0$$

$$\Rightarrow x = y \text{ dir.}$$

4.1. Lemma

(X, N) fuzzy normlu lineer uzayı N_6 şartını sağlasın. $\{x_n\}$, (X, N) 'de α -yakınsak bir dizi ise, bu durumda $n \rightarrow \infty$ iken $\|x_n - x\|_\alpha \rightarrow 0$ dır. Fakat tersi genelde doğru değildir ($\|\cdot\|_\alpha$, N 'in α - normu göstermektedir.) [14].

İspat

$\{x_n\}$, (X, N) 'de α -yakınsak bir dizi ve x noktasına yakınsak olsun. Bu durumda $\forall t > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n - x, t) > \alpha$

$$\Rightarrow \forall t > 0, \exists n_0(t) \text{ var öyle ki } \forall n \geq n_0(t) \text{ iken } N(x_n - x, t) > \alpha$$

$$\Rightarrow \forall t > 0, \exists n_0(t) \text{ var öyle ki } \forall n \geq n_0(t) \text{ iken } \|x_n - x\| \leq t \text{ dır.}$$

$t > 0$ keyfi olduğundan $n \rightarrow \infty$ iken $\|x_n - x\|_\alpha \rightarrow 0$ dır. Şimdi tersinin her zaman doğru olmadığını gösteren bir örnek verelim.

Örnek

$X = l^\infty$ bir dizi uzayı olsun. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ olmak üzere $\|x\| = \sup\{|x_n|\}$ ve

$\|x\|_0 = \sup\{\left|\frac{x_n}{n}\right|\}$ şeklinde tanımlarsak, bu durumda $\|\cdot\|$ ve $\|\cdot\|_\alpha$ X 'de normlardır.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ olduğunda $N: X \times \mathcal{R} \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım;

$$N(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } t > \sup\{|x_n|\} \\ 0,5 & \text{eğer } \sup\{\left|\frac{x_n}{n}\right|\} < t \leq \sup\{|x_n|\} \\ 0 & \text{eğer } t \leq \sup\{\left|\frac{x_n}{n}\right|\} \end{cases}$$

Şimdi N 'nin X 'de bir fuzzy norm olduğunu gösterelim.

N_1) Eğer $t \leq 0$ ise, bu durumda $t \leq \sup\left\{\left|\frac{x_n}{n}\right|\right\}$ olup buradan $N(x, t) = 0$ dır.

N_2) $\forall t > 0 \ N(x, t) = 1 \Rightarrow \sup\{|x_n|\} = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \ |x_n| = 0$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \ x_n = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ dır.}$$

$x = 0 \Leftrightarrow \sup\{|x_n|\} = 0 \Rightarrow \forall t > 0 \text{ için, } N(x, t) = 1 \text{ dır.}$

N_3) $c \neq 0$ için, eğer $N(cx, t) = 1$ ise, bu durumda $t > \sup\{|cx_n|\}$ dır. Yani

$\frac{t}{|c|} > \sup\{|x_n|\} \Rightarrow N(x, \frac{t}{|c|}) = 1$. O halde $N(cx, t) = N(x, \frac{t}{|c|})$ dır. Yine eğer

$N(cx, t) = 0,5$ ise, bu durumda $\sup\left\{\left|\frac{cx_n}{n}\right|\right\} < t \leq \sup\{|cx_n|\}$ dır.

Yani $\sup\left\{\left|\frac{x_n}{n}\right|\right\} < \frac{t}{|c|} \leq \sup\{|x_n|\} \Rightarrow N(x, \frac{t}{|c|}) = 0,5$. O halde $N(cx, t) = N(x, \frac{t}{|c|})$ dır.

Benzer şekilde $N(cx, t) = 0$ ise, bu durumda $N(cx, t) = N(x, \frac{t}{|c|}) = 0$ dır.

O halde $c \neq 0$ için, $N(cx, t) = N(x, \frac{t}{|c|})$ dır.

N_4) $\forall x, y \in X$ ve $\forall s, t \in \mathcal{R}$ $N(x+y, s+t) \geq \min\{N(x, s), N(y, t)\}$ olduğunu gösterelim.

Eğer

i) $s + t < 0$,

ii) $s = t = 0$,

iii) $s + t > 0$; $s > 0, t < 0$; $s < 0, t > 0$ ise, bu durumda $N(x+y, s+t) \geq \min\{N(x, s), N(y, t)\}$ açıktır.

iv) $s > 0, t > 0$ durumunda, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n \dots)$ ve $y = (y_1, y_2, \dots, y_n \dots)$ olmak üzere $x, y \in X$ alalım. Eğer $s > \sup\{|x_n|\}$, $t > \sup\{|y_n|\}$ ise, bu durumda $N(x, s) = 1$ ve $N(y, t) = 1$ dır. Şimdi,

$$s + t > \sup\{|x_n|\} + \sup\{|y_n|\} \geq \sup\{|x_n + y_n|\} \Rightarrow N(x+y, s+t) = 1 \\ \Rightarrow N(x+y, s+t) \geq \min\{N(x, s), N(y, t)\} \text{ dır. Eğer } s > \sup\{|x_n|\} \text{ ve}$$

$\sup\left\{\left|\frac{y_n}{n}\right|\right\} < t \leq \sup\{|y_n|\}$ ise, buradan $N(x, s) = 1$ ve $N(y, t) = 0,5$ dır.

$$s + t > \sup\{|x_n|\} + \sup\left\{\left|\frac{y_n}{n}\right|\right\} \geq \sup\left\{\left|\frac{x_n}{n}\right|\right\} + \sup\left\{\left|\frac{y_n}{n}\right|\right\} \geq \sup\left\{\left|\frac{x_n + y_n}{n}\right|\right\}$$

$\Rightarrow N(x + y, s + t) = 0,5 \geq \min\{N(x,s), N(y,t)\}$ dır. Benzer şekilde diğer durumlarda sağlanır.

$N_5)$ $N(x, \cdot), \mathcal{R}$ üzerinde bir azalmayan fonksiyon olduğu kolayca gösterilebilir. Ayrıca $\lim_{t \rightarrow \infty} N(x, t) = 1$ dir. Böylece N, X 'de bir fuzzy normdur.

$$N_6) \forall t > 0, N(x, t) > 0 \Rightarrow \sup\left\{\left|\frac{x_n}{n}\right|\right\} = 0 \Rightarrow x = 0.$$

N 'nın α -normları;

$$1 > \alpha > 0,5 \text{ iken } \|x\|_\alpha = \|x\|$$

$$0 < \alpha \leq 0,5 \text{ iken } \|x\|_\alpha = \|x\|_0 \text{ şeklinde verilsin.}$$

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots)$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \dots)$$

.....

$e_n = (0, 0, \dots, \underbrace{1}_{n.\text{terim}}, \dots)$ olacak şekilde X 'de $\{e_n\}_n$ göz önüne alalım. Bu durumda

$\{e_n\}_n$ dizisi $\|\cdot\|_{0,5}$ göre $x = (0, 0, 0, \dots)$ yakınsaktır.

$$\|e_n - x\|_{0,5} = \|e_n\|_{0,5} = \sup\left(\frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{0}{n+1}, \dots\right) = \frac{1}{n}. \text{ O halde}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|e_n - x\|_{0,5} = 0 \text{ dır. } t = \frac{1}{2} \text{ alalım, eğer } n \geq 3 \text{ ise,}$$

$$\sup\left(\frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{0}{n+1}, \dots\right) = \frac{1}{n} < \sup(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \text{ dır.}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} N(e_n - x, \frac{1}{2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} N\left(e_n, \frac{1}{2}\right) = 0,5 \neq 0,5$ dır. Böylece $\{e_n\}_n$ dizisi 0,5-yakınsak olmadığı halde $\{e_n\}_n$ dizisi $\|\cdot\|_{0,5}$ göre x 'e yakınsaktır.

4.1. Not

(X, N) fuzzy normlu lineer uzayında eğer $\alpha \in (0, 1)$ ise, bu durumda $B(x, \alpha, t) = \{y: N(x-y, t) > 1-\alpha\}$ ve

$B_\alpha(x, t) = \{y: \exists s = s(y) < t \text{ var öyle ki } N(x-y, s) \geq \alpha\}$ olduğunda;

$\tau = \{G \subset X: x \in G \Leftrightarrow \exists t > 0, \alpha \in (0, 1) \text{ var öyle ki } B(x, \alpha, t) \subset G\}$,

$\tau_\alpha = \{O \subset X: x \in O \Leftrightarrow \exists t > 0, \text{ var öyle ki } B(x, \alpha, t) \subset O\}$,

$\tau'_\alpha = \{O \subset X: x \in O \Leftrightarrow \exists t > 0, \text{ var öyle ki } B_\alpha(x, t) \subset O\}$,

τ, τ_α ve τ'_α nın X üzerinde topolojiler olduğunu gösterilebilir.

$\tau, \cup\{\tau_\alpha: \alpha \in (0, 1)\}$ tabanın oluşturmuş olduğu topolojiyi göstermektedir. N, N_7 şartını sağlıyor ise, bu durumda (X, N) 'de herhangi bir $\{x_n\}$ dizisi yakınsaktır $\Leftrightarrow \tau$ 'a göre yakınsaktır. Eğer $\{x_n\}$ dizisi α -yakınsak (Tanım 4.7.) ise, bu durumda $\alpha \in (0, 1)$ olmak üzere τ_α 'a göre de yakınsaktır. Eğer N, N_6 şartlarını sağlıyorsa $\{x_n\}$ dizisi τ'_α 'a göre de yakınsaktır $\Leftrightarrow \alpha \in (0, 1)$ için $\{x_n\}$ dizisi $\|\cdot\|_\alpha$ göre de yakınsaktır. Eğer N, N_6 ve N_7 şartlarını sağlıyorsa, bu durumda $\alpha \in (0, 1)$ için $\tau_\alpha = \tau'_\alpha$ dır.

4.8. Tanım

(X, N) fuzzy normlu lineer uzay ve $\alpha \in (0, 1)$ olsun. Eğer $\forall t > 0, p = 1, 2, 3, \dots$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n - x_{n+p}, t) \geq \alpha$ ise, $\{x_n\}$ dizisine α -Cauchy dizisi denir [14].

4.2. Lemma

(X, N) fuzzy normlu lineer uzay ve $\alpha \in (0, 1)$ olsun. Bu durumda (X, N) 'de her α -yakınsak dizi, (X, N) 'de bir α -Cauchy dizisidir [14].

İspat

$\{x_n\}, x$ 'e α -yakınsak bir dizi olsun. Böylece $\forall t > 0$ için,

$\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n - x, t) > \alpha$ dır. $p = 1, 2, 3, \dots$ için

$$N(x_n - x_{n+p}, t) = N\left(x_n - x + x - x_{n+p}, \frac{t}{2} + \frac{t}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
N\left(x_n - x + x - x_{n+p}, \frac{t}{2} + \frac{t}{2}\right) &\geq \min\left\{N\left(x_n - x, \frac{t}{2}\right), N\left(x - x_{n+p}, \frac{t}{2}\right)\right\} \Rightarrow \\
\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n - x_{n+p}, t) &\geq \min\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} N\left(x_n - x, \frac{t}{2}\right), \lim_{n \rightarrow \infty} N\left(x - x_{n+p}, \frac{t}{2}\right)\right\} > \alpha \\
&\Rightarrow \{x_n\}_n (X, N)'de \text{ bir } \alpha\text{-Cauchy dizisidir.}
\end{aligned}$$

4.3. Lemma

(X, N) normlu lineer uzayında her sabit dizi, $\alpha \in (0, 1)$ için, α -Cauchy dizisidir [14].

İspat

α -Cauchy dizisi tanımından ispat açıktır.

4.4. Lemma

(X, N) fuzzy normlu lineer uzayı N_6 şartını sağlasın. $\alpha \in (0, 1)$ için, $\|\cdot\|_\alpha$ N 'ın α -normu olmak üzere, $(X, \|\cdot\|_\alpha)$ 'da her Cauchy dizisi (X, N) 'de bir α -Cauchy dizisidir [14].

İspat

$\alpha_0 \in (0, 1)$ keyfi sabit ve $\{x_n\}$, $(X, \|\cdot\|_{\alpha_0})$ 'de bir Cauchy dizisi olsun.

Bu durumda $p = 1, 2, \dots$ için, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_{n+p}\|_{\alpha_0} = 0$ dır. Böylece verilen

$\varepsilon > 0$ için $\exists N(\varepsilon) > 0$ tamsayısı var öyle ki $\forall n \geq N(\varepsilon)$ için $\|x_n - x_{n+p}\|_{\alpha_0} < \varepsilon$,
 $p = 1, 2, \dots$

$\Rightarrow \forall n \geq N(\varepsilon)$ ve $p = 1, 2, \dots$ için, $\inf\{t > 0: N(x_n - x_{n+p}, t) \geq \alpha_0\} < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall n \geq N(\varepsilon)$ ve her $p = 1, 2, \dots$ için, $\exists t(n, p, \varepsilon) < \varepsilon$ var öyle ki

$N(x_n - x_{n+p}, t(n, p, \varepsilon)) \geq \alpha_0$.

$\Rightarrow \forall n \geq N(\varepsilon)$ için, $N(x_n - x_{n+p}, \varepsilon) \geq \alpha_0$, $p = 1, 2, \dots$

$\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $\forall t > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n - x_{n+p}, t) \geq \alpha_0$.

$\Rightarrow \{x_n\}$ (X, N) 'de α_0 -Cauchy dizisidir.

$\alpha_0 \in (0,1)$ keyfi olduğundan $(X, \|\cdot\|_\alpha)$ 'deki her Cauchy dizisi her $\alpha \in (0,1)$ için (X, N) 'de bir α -Cauchy dizisidir.

4.9. Tanım

(X, N) fuzzy normlu lineer uzay ve $\alpha \in (0,1)$ olsun. Eğer X 'de herhangi bir α -Cauchy dizisi X 'de bir noktaya α -yakınsak ise, bu durumda X 'e α -tamdır denir [14].

4.5. Lemma

(X, N) fuzzy normlu lineer uzayı N_6 şartını sağlasın. $\alpha \in (0,1)$ için $X, \|\cdot\|_\alpha$ göre tamdır eğer (X, N) α -tam ise. Bunun tersi doğru değildir [14].

İspat

$0 < \alpha_0 < 1$ seçelim. $\{x_n\}_n$ $(X, \|\cdot\|_{\alpha_0})$ 'de bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda Lemma 4.4. den $\{x_n\}_n$, (X, N) de α_0 -Cauchy dizisidir. (X, N) , α_0 -tam olduğundan $\exists x \in X$ var öyle ki $\forall t > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n - x, t) > \alpha_0$ dır. Lemma 4.1.'den $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_{\alpha_0} = 0 \Rightarrow \|\cdot\|_{\alpha_0}$ göre, $x_n \rightarrow x \Rightarrow (X, \|\cdot\|_{\alpha_0})$ tamdır.

Bu lemmanın tersinin doğru olmadığını gösteren bir örnek verelim.

Örnek

X lineer uzayının elemanları, $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 < \infty$ olmak üzere $(\xi_1, \xi_2, \dots)$ biçimindeki kompleks sayıların dizisidir. $\|x\|_0 = (\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2)^{\frac{1}{2}}$ ve $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in X$ olmak üzere

$\|x\| = \sup\{|\xi_i|\}$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $\|\cdot\|_0$ ve $\|\cdot\|$ X 'de normlardır ve $(X, \|\cdot\|_0), (X, \|\cdot\|)$ Banach uzaylarıdır. Şimdi

$N: X \times \mathcal{R} \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlayalım;

$$N(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } t > \{\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2\}^{\frac{1}{2}} \\ 0,5 & \text{eğer } \sup\{|\xi_i|\} < t \leq \{\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2\}^{\frac{1}{2}} \\ 0 & \text{eğer } t \leq \sup\{|\xi_i|\} \end{cases}$$

N , X 'de bir fuzzy norm olduğunu gösterelim.

N_1) Eğer $t \leq 0$ ise, bu durumda $t \leq \sup\{|\xi_i|\} \Rightarrow N(x,t) = 0$.

N_2) $t > 0$ için $N(x,t) = 1 \Leftrightarrow \{\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2\}^{\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow \forall i$ için $\xi_i = 0 \Leftrightarrow x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ olmak üzere $x = 0$ dır.

N_3) $c \neq 0$ için eğer $N(cx, t) = 1$ ise, bu durumda $t > \{\sum_{i=1}^{\infty} |c\xi_i|^2\}^{\frac{1}{2}} = |c|\{\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2\}^{\frac{1}{2}}$.

Yani $\frac{t}{|c|} > \{\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2\}^{\frac{1}{2}}$. O halde $N(cx, t) = N(x, \frac{t}{|c|}) = 1$ dır.

Eğer $N(cx, t) = 0,5$ ise, bu durumda $\sup\{|c\xi_i|\} < t \leq \{\sum_{i=1}^{\infty} |c\xi_i|^2\}^{\frac{1}{2}}$.

Yani $\sup\{|\xi_i|\} < \frac{t}{|c|} \leq \{\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2\}^{\frac{1}{2}} \Rightarrow N(x, \frac{t}{|c|}) = 0,5$ dır. Böylece

$N(cx, t) = N(x, \frac{t}{|c|}) = 0,5$ dır.

Benzer şekilde $N(cx, t) = 0$ olduğunda $N(cx, t) = N(x, \frac{t}{|c|}) = 0$ dır.

N_4) $\forall x, y \in X$ ve $\forall s, t \in \mathcal{R}$, $N(x+y, s+t) \geq \min\{N(x,s), N(y,t)\}$ olduğunu gösterelim.

$x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ ve $y = (\eta_1, \eta_2, \dots)$ alalım. Eğer,

i) $s + t < 0$

ii) $s = t = 0$

iii) $s + t > 0$; $s > 0, t < 0$; $s < 0, t > 0$ ise, bu durumda

$N(x+y, s+t) \geq \min\{N(x,s), N(y,t)\}$ açıktır.

iv) $s > 0, t > 0$ olduğunu düşünelim.

Eğer $s > \{\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2\}^{\frac{1}{2}}$, $t > \{\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^2\}^{\frac{1}{2}}$ ise, bu durumda $N(x,s) = 1$ ve $N(y,t) = 1$ dır.

$s+t > \{\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2\}^{\frac{1}{2}} + \{\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^2\}^{\frac{1}{2}} \geq \{\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i + \eta_i|^2\}^{\frac{1}{2}} \Rightarrow N(x+y, s+t) = 1$

$\Rightarrow N(x+y, s+t) \geq \min\{N(x,s), N(y,t)\}$.

Eğer $s > \{\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2\}^{\frac{1}{2}}$ ve $\sup\{|\eta_i|\} < t \leq \{\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2\}^{\frac{1}{2}}$ ise, bu durumda $N(x,s) = 1$ ve $N(y,t) = 0,5$ dir.

$$s + t > \{\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2\}^{\frac{1}{2}} + \sup\{|\eta_i|\} \geq \sup\{|\xi_i|\} + \sup\{|\eta_i|\} \geq \sup\{|\xi_i + \eta_i|\}.$$

$\Rightarrow N(x+y, s+t) \geq 0,5 \geq \min\{N(x,s), N(y,t)\}$ dir. Diğer durumlarda benzer şekilde sağlanır.

N_5) $N(x, \cdot)$ $\mathcal{R}$ 'nin bir azalmayan fonksiyonu olduğu kolayca gösterilebilir. Ayrıca

$\lim_{t \rightarrow \infty} N(x, t) = 1$ dir. Böylece N , X üzerinde bir fuzzy normdur.

N_6) $\forall t > 0, N(x,t) > 0 \Rightarrow \sup\{|\xi_i|\} = 0 \Rightarrow \forall i \in \mathbb{N}$ için, $\xi_i = 0 \Rightarrow x=0$ dir.

N 'nın α -normları;

$$1 > \alpha > 0,5 \text{ iken } \|x\|_{\alpha} = \|x\|_0$$

$0 < \alpha \leq 0,5$ iken $\|x\|_{\alpha} = \|x\|$ şeklinde verilsin. Açıkça $X, \|x\|_{0,5}$ göre tamdır.

$$x_1 = (1, 0, 0, \dots)$$

$$x_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots)$$

$$x_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \dots)$$

.....

$x_n = (\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{n.\text{terim}}, 0, \dots)$ olmak üzere, X 'de $\{x_n\}_n$ bir dizi göz önüne alalım.

Bu durumda $\|x_n\| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ ve $\|x\|_0 = 1$ dir. O halde

$$\|x_n - x_{n+p}\| = \max\{\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+p}}, \frac{1}{\sqrt{n+p}}\} \text{ böylece } \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_{n+p}\| = 0 \text{ dir. O halde}$$

$\forall t > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n - x_{n+p}, t) \geq 0,5$. Böylece $\{x_n\}_n$ (X, N) 'de 0,5-Cauchy dizisidir.

Eğer $x = (0, 0, 0, \dots)$ ise, bu durumda

$$0 < t \leq 1 \text{ olduğunda } \lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n - x, t) = 0,5$$

$t > 1$ olduğunda $\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n - x, t) = 1$ dır. (i)

Eğer $\exists x' \neq 0$ varsa, $\forall t > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n - x', t) > 0,5$ dır. Bu durumda Lemma 4.1.'den $n \rightarrow \infty$ iken $\|x_n - x'\|_{0,5} \rightarrow 0$ elde edilir. $\forall \alpha \leq 0,5$ için, $\| \cdot \|_\alpha$ göre $x_n \rightarrow 0$ olduğundan bu mümkün değildir. Böylece (i)'den $\{x_n\}_n$ 0,5-yakınsak değildir.

5. FUZZY LİNEER OPERATÖRLERİN SÜREKLİLİĞİ VE SINIRLILIĞI

Bu bölümde fuzzy normlu lineer uzaylarda bir operatörün sürekliliği, güçlü fuzzy sürekliliği, zayıf fuzzy sürekliliği ve dizisel fuzzy sürekliliği tanımları verilecek ve aralarındaki ilişkiler incelenecektir. Ayrıca fuzzy normlu lineer uzaylardaki lineer operatörler için, zayıf fuzzy sınırlılığı ve güçlü fuzzy sınırlılığı tanımlanarak, sınırlılık ile süreklilik arasındaki ilişki incelenecektir.

5.1. Fuzzy Linear Operatörlerin Süreklilik Çeşitleri

5.1. Tanım

(X, N_1) ve (Y, N_2) fuzzy normlu lineer uzaylar, $T: (X, N_1) \rightarrow (Y, N_2)$ dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer her bir $\varepsilon > 0$ sayısı $\alpha \in (0,1)$ için, $\exists \delta = \delta(\alpha, \varepsilon) > 0$, $\beta = \beta(\alpha, \varepsilon) \in (0,1)$ var öyle ki $\forall x \in X$ için $N_1(x - x_0, \delta) > \beta$ olduğunda $N_2(T(x) - T(x_0), \varepsilon) > \alpha$ ise, bu durumda T dönüşümüne $x_0 \in X$ noktasında fuzzy sürekli denir.

Eğer T , X 'in her noktasında fuzzy sürekli ise, bu durumda T 'ye X üzerinde fuzzy sürekli denir [11].

5.2. Tanım

(X, N_1) ve (Y, N_2) fuzzy normlu lineer uzaylar, $T: (X, N_1) \rightarrow (Y, N_2)$ dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer her bir $\varepsilon > 0$ sayısı $\alpha \in (0,1)$ için, $\exists \delta = \delta(\alpha, \varepsilon) > 0$ var öyle ki $N_2(T(x) - T(x_0), \varepsilon) \geq N_1(x - x_0, \delta)$ ise, bu durumda T dönüşümüne $x_0 \in X$ noktasında güçlü fuzzy sürekli denir.

Eğer T , X 'in her noktasında güçlü fuzzy sürekli ise, bu durumda T 'ye X üzerinde güçlü fuzzy sürekli denir [14].

5.3. Tanım

(X, N_1) ve (Y, N_2) fuzzy normlu lineer uzaylar, $T: (X, N_1) \rightarrow (Y, N_2)$ dönüşüm olsun $x_0 \in X$ olsun. Eğer her bir $\varepsilon > 0$ sayısı $\alpha \in (0,1)$ için, $\exists \delta = \delta(\alpha, \varepsilon) > 0$ var öyle ki $N_1(x - x_0, \delta) \geq \alpha \Rightarrow N_2(T(x) - T(x_0), \varepsilon) \geq \alpha$ ise, bu durumda T dönüşümüne $x_0 \in X$ noktasında zayıf fuzzy sürekli denir.

Eğer T , X 'in her noktasında zayıf fuzzy sürekli ise, bu durumda T 'ye X üzerinde zayıf fuzzy sürekli denir [14].

5.4. Tanım

(X, N_1) ve (Y, N_2) fuzzy normlu lineer uzaylar, $T: (X, N_1) \rightarrow (Y, N_2)$ bir lineer dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer $\{x_n\}$, X 'de her hangi bir dizi $x_n \in X$, $\forall \alpha \in (0, 1)$ için, $x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow T(x_n) \rightarrow T(x_0)$ ise, bu durumda T dönüşümüne $x_0 \in X$ noktasında dizisel fuzzy sürekli denir. Yani $\forall t > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} N_1(x_n - x_0, t) = 1 \Rightarrow \forall t > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_2(T(x_n) - T(x_0), t) = 1 \text{ dır [11].}$$

5.1. Teorem

(X, N_1) ve (Y, N_2) fuzzy normlu lineer uzaylar, $T: (X, N_1) \rightarrow (Y, N_2)$ bir dönüşüm olsun. T güçlü fuzzy sürekli ise, bu durumda T dizisel fuzzy sürekli, fakat tersi doğru değildir [14].

İspat

Önce T , $x_0 \in X$ noktasında güçlü fuzzy sürekli olsun. O halde her bir $\varepsilon > 0$ sayısı $\alpha \in (0, 1)$, $\exists \delta = \delta > 0$ var öyle ki $\forall x \in X$, $N_2(T(x) - T(x_0), \varepsilon) \geq N_1(x - x_0, \delta)$ dır. (i) $\{x_n\}_n$ X 'de bir dizi öyle ki $x_n \rightarrow x_0$ olsun. Yani $\forall t > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} N_1(x_n - x_0, t) = 1$ dır. (ii) (i)'den, $n = 1, 2, \dots$ için $N_2(T(x_n) - T(x_0), \varepsilon) \geq N_1(x_n - x_0, \delta)$ yazabiliriz.

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} N_2(T(x_n) - T(x_0), \varepsilon) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} N_1(x_n - x_0, \delta)$$

$$\Rightarrow \text{(ii)'den } \lim_{n \rightarrow \infty} N_2(T(x_n) - T(x_0), \varepsilon) = 1.$$

ε istenildiği kadar küçük pozitif sayı olduğunda, $T(x_n) \rightarrow T(x_0)$ dır.

Şimdi dizisel fuzzy sürekli T dönüşümün, güçlü fuzzy sürekli olmadığı ile ilgili bir örnek verelim.

Örnek

$\forall x \in \mathcal{R}$ için $\|x\| = |x|$ olmak üzere, $(X = \mathcal{R}, \|\cdot\|)$ bir normlu lineer uzay olsun. $k > 0$ bir sabit olmak üzere, $N_1: X \times \mathcal{R} \rightarrow [0,1]$ ve $N_2: X \times \mathcal{R} \rightarrow [0,1]$ fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlansın;

$$N_1(x, t) = \begin{cases} \frac{t}{t+|x|}, & \text{eğer } t > 0, \forall x \in X \\ 0, & \text{eğer } t \leq 0, \forall x \in X \end{cases} \quad \text{ve}$$

$$N_2(x, t) = \begin{cases} \frac{t}{t+k|x|}, & \text{eğer } t > 0, \forall x \in X \\ 0, & \text{eğer } t \leq 0, \forall x \in X \end{cases}$$

N_1 ve N_2 'nin X de fuzzy norm oldukları kolaylıkla gösterilebilir, böylece (X, N_1) ve (Y, N_2) fuzzy normlu lineer uzaylardır. Bir $T(x) = \frac{x^4}{1+x^2}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $\{x_n\}_n$ dizisi seçelim $x_n \in X$ var öyle ki $x_n \rightarrow x_0$,

$$\forall t > 0 \text{ için, } \lim_{n \rightarrow \infty} N_1(x_n - x_0, t) = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t}{t+|x_n - x_0|} = 1.$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x_0| = 0 \text{ yazabiliriz. (iii)}$$

$$\begin{aligned} N_2(T(x_n) - T(x_0), t) &= \frac{t}{t+k \left| \frac{x_n^4}{1+x_n^2} - \frac{x_0^4}{1+x_0^2} \right|} = \frac{t|1+x_n^2||1+x_0^2|}{t|1+x_n^2||1+x_0^2| + k|x_n^4+x_n^2x_0^2-x_0^4-x_n^2x_0^4|} \\ &= \frac{t|1+x_n^2||1+x_0^2|}{t|1+x_n^2||1+x_0^2| + k|(x_n-x_0)(x_n+x_0)(x_n^2+x_0^2)+x_n^2x_0^2(x_n^2-x_0^2)|} \\ &= \frac{t|1+x_n^2||1+x_0^2|}{t|1+x_n^2||1+x_0^2| + k|x_n-x_0|(x_n+x_0)(x_n^2+x_0^2)+x_n^2x_0^2(x_n+x_0)|} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{(iii) kullanıldığında } \forall t > 0 \text{ için, } \lim_{n \rightarrow \infty} N_2(T(x_n) - T(x_0), t) = 1$$

$$\Rightarrow (X, N_2) \text{ de } T(x_n) \rightarrow T(x_0) \text{ dır.}$$

$$\varepsilon > 0 \text{ olsun. } \forall x \in X, N_2(T(x) - T(x_0), \varepsilon) \geq N_1(x - x_0, \delta)$$

$$\Rightarrow N_2\left(\left(\frac{x^4}{1+x^2}\right) - \left(\frac{x_0^4}{1+x_0^2}\right), \varepsilon\right) \geq N_1(x - x_0, \delta)$$

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon}{\varepsilon + k \left| \frac{x^4}{1+x^2} - \frac{x_0^4}{1+x_0^2} \right|} \geq \frac{\delta}{\delta + |x - x_0|} \Rightarrow \frac{\varepsilon |1+x^2| |1+x_0^2|}{\varepsilon |1+x^2| |1+x_0^2| + k |x^4 + x^4 x_0^2 - x_0^4 - x_0^4 x^2|} \geq \frac{\delta}{\delta + |x - x_0|}$$

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon |1+x^2| |1+x_0^2|}{\varepsilon |1+x^2| |1+x_0^2| + k |x - x_0| |x + x_0| |x^2 + x_0^2 + x_0^2 x^2|} \geq \frac{\delta}{\delta + |x - x_0|}$$

$$\Rightarrow k\delta |x - x_0| |x + x_0| |x^2 + x_0^2 + x_0^2 x^2| \leq \varepsilon |1 + x^2| |1 + x_0^2| |x - x_0|$$

$$\Rightarrow x \neq x_0 \text{ için } \delta \leq \frac{\varepsilon |1+x^2| |1+x_0^2|}{k |x+x_0| |x^2(1+x_0^2)+x_0^2|} \cdot (iv)$$

$\forall x \in X, x \neq x_0$ için $\exists \delta > 0$ var öyle ki (iv) sağlanırsa, T, x_0 noktasında sürekli olduğunu gösterebiliriz.

$\forall x \in X, x \neq x_0$ üzerinde inf alınarak $\delta_1 = \inf \left| \frac{(1+x^2)(1+x_0^2)}{(x+x_0)(x^2(1+x_0^2)+x_0^2)} \right|$ olsun. Bu durumda $\delta = \frac{\varepsilon}{k} \delta_1$ (iv) sağlar. Fakat $\delta_1 = 0$ olması halinde bu imkansızdır. O halde T güçlü fuzzy sürekli değildir.

5.2. Teorem

(X, N_1) ve (Y, N_2) fuzzy normlu lineer uzaylar, $T: (X, N_1) \rightarrow (Y, N_2)$ bir dönüşüm olsun.

T fuzzy süreklidir $\Leftrightarrow T$ dizisel fuzzy süreklidir [11].

İspat

$\Rightarrow T, x_0 \in X$ noktasında fuzzy sürekli olsun. $\{x_n\}_n$ dizisi x_0 noktasına yakınsayan X de herhangi bir dizi olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin, $\alpha \in (0,1)$ seçelim. T, x_0 noktasında fuzzy sürekli olduğundan $\exists \delta = \delta(\alpha, \varepsilon) > 0$ ve $\exists \beta = \beta(\alpha, \varepsilon) \in (0,1)$ var öyle ki $\forall x \in X$ için

$$N_1(x - x_0, \delta) > \beta \Rightarrow N_2(T(x) - T(x_0), \varepsilon) > \alpha \text{ dır.}$$

X 'de $x_n \rightarrow x_0$ olduğundan $\exists n_0 \in \mathbb{Z}^+$ var öyle ki $\forall n \geq n_0$ için $N_1(x_n - x_0, \delta) > \beta$ dır. O halde $\forall n \geq n_0$ için $N_2(T(x_n) - T(x_0), \varepsilon) > \alpha$ dır.

Böylece verilen bir $\varepsilon > 0$ ve her bir $\alpha \in (0,1)$ için, $\exists n_0 \in \mathbb{Z}^+$ var öyle ki $\forall n \geq n_0$, $N_2(T(x_n) - T(x_0), \varepsilon) > \alpha$ dır. Buradan $\lim_{n \rightarrow \infty} N_2(T(x_n) - T(x_0), \varepsilon) = 1$ yazabiliriz. $\varepsilon > 0$ keyfi seçilmiş olduğundan (Y, N_2) 'de $T(x_n) \rightarrow T(x_0)$ dır.

$\Leftarrow$ T , $x_0 \in X$ noktasında dizisel fuzzy sürekli olsun. Kabul edelim ki T , $x_0 \in X$ noktasında fuzzy sürekli olmasın. O zaman $\exists \varepsilon > 0$ ve $\alpha > 0$ var $\exists$ her bir $\delta > 0$ ve $\beta \in (0,1)$ için δ, β bağlı $\exists y$ var öyle ki $N_1(x_0 - y, \delta) > \beta$ dır. Fakat

$$N_2(T(x_0) - T(y), \varepsilon) \leq \alpha. \quad (i)$$

Buradan $\beta = 1 - \frac{1}{n+1}$ $\delta = \frac{1}{n+1}$ $n = 1, 2, 3, \dots$ için $\exists y_n$ var öyleki

$$N_1(x_0 - y_n, \frac{1}{n+1}) > 1 - \frac{1}{n+1} \text{ fakat } N_2(T(x_0) - T(y_n), \varepsilon) \leq \alpha \text{ olur.}$$

$\delta > 0$ alalım, $\exists n_0$ var öyle ki $\forall n \geq n_0$, $\frac{1}{n+1} < \delta$. Bu durumda $\forall n \geq n_0$ için

$$N_1(x_0 - y_n, \delta) \geq N_1(x_0 - y_n, \frac{1}{n+1}) > 1 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} N_1(x_0 - y_n, \delta) \geq 1 \\ \Rightarrow y_n \rightarrow x_0$$

Fakat (i)'den $N_2(T(x_0) - T(y_n), \varepsilon) \leq \alpha$ bu yüzden $n \rightarrow \infty$ iken

$N_2(T(x_0) - T(y_n), \varepsilon) \not\rightarrow 1$ dır. O halde N_1 'e göre $y_n \rightarrow x_0$ iken $T(y_n)$, $T(x_0)$ 'a yakınsak değildir. Bu bizim kabulümüz ile çelişti. Sonuç olarak T x_0 'da fuzzy süreklidir.

5.2. Fuzzy Lineer Operatörlerin Sınırlılığı ve Çeşitleri

5.5. Tanım

(X, N_1) ve (Y, N_2) fuzzy normlu lineer uzaylar, $T: (X, N_1) \rightarrow (Y, N_2)$ lineer operatör olsun. Bu durumda T , X üzerinde güçlü fuzzy sınırlıdır $\Leftrightarrow \exists M \in \mathcal{R}^+$ var öyle ki $\forall x \in X$ ve $\forall s \in \mathcal{R}$ için $N_2(T(x), s) \geq N_1(x, \frac{s}{M})$ [14].

Örnek

Her sıfır ve birim operatör güçlü fuzzy sınırlıdır [14].

Örnek

Sıfır veya birim operatörden farklı olarak bir güçlü fuzzy sınırlı lineer operatör örneği verelim [14].

$(X, \| \cdot \|)$ normlu lineer uzay α_1, α_2 pozitif reel sayılar ve $\alpha_1 > \alpha_2$ olmak üzere, $N_1: X \times \mathcal{R} \rightarrow [0,1]$ ve $N_2: X \times \mathcal{R} \rightarrow [0,1]$ fonksiyonlarını aşağıdaki gibi tanımlayalım;

$$N_1(x,t) = \begin{cases} \frac{t}{t+\alpha_1\|x\|} & , \text{ eğer } t > 0 \\ 0 & , \text{ eğer } t \leq 0 \end{cases} \quad \text{ve} \quad N_2(x,t) = \begin{cases} \frac{t}{t+\alpha_2\|x\|} & , \text{ eğer } t > 0 \\ 0 & , \text{ eğer } t \leq 0 \end{cases}$$

N_1 ve N_2 'nin X 'de fuzzy norm olduğunu gösterelim.

$N_1) \forall t \in \mathcal{R}$ ve $t \leq 0$ ise, tanımdan $N_1(x, t) = 0$ dır.

$N_2) \forall t \in \mathcal{R}$ ve $t > 0$ için $N(x, t) = 1 \Leftrightarrow \frac{t}{t+\alpha_1\|x\|} = 1 \Leftrightarrow \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$N_3) \forall t \in \mathcal{R}$ ve $t > 0$ için $c \in F, c \neq 0$ ise, $N_1(cx, t) = \frac{t}{t+\alpha_1\|cx\|} = \frac{\frac{t}{|c|}}{\frac{t}{|c|} + \alpha_1\|x\|} = N_1(x, \frac{t}{|c|})$ dır.

$N_4) \forall x, y \in X$ ve $\forall s, t \in \mathcal{R}$ $N_1(x+y, s+t) \geq \min\{N_1(x,s), N_1(y,t)\}$ olduğunu gösterelim.

Eğer $s+t < 0$; $s=t=0$; $s+t > 0$; $s > 0, t < 0$; $s < 0, t > 0$ ise, bu durumda

$N_1(x+y, s+t) \geq \min\{N_1(x,s), N_1(y,t)\}$ olduğu açıkça görülür.

Eğer $t > 0, s > 0$ ise, $N_1(x+y, s+t) = \frac{s+t}{s+t+\alpha_1\|x+y\|} \geq \frac{s+t}{s+t+\alpha_1\|x\|+\alpha_1\|y\|}$.

Şimdi $\frac{s}{s+\alpha_1\|x\|} \geq \frac{t}{t+\alpha_1\|y\|} \Rightarrow \frac{s}{s+\alpha_1\|x\|} - \frac{t}{t+\alpha_1\|y\|} \geq 0 \Rightarrow s\|y\| - t\|x\| \geq 0$ dır.

Buradan $\frac{s+t}{s+t+\alpha_1\|x\|+\alpha_1\|y\|} - \frac{t}{t+\alpha_1\|y\|} = \frac{\alpha_1(s\|y\| - t\|x\|)}{(s+t+\alpha_1\|x\|+\alpha_1\|y\|)(t+\alpha_1\|y\|)}$. Böylece

$\frac{s}{s+\alpha_1\|x\|} \geq \frac{t}{t+\alpha_1\|y\|} \Rightarrow \frac{s+t}{s+t+\alpha_1\|x+y\|} \geq \frac{t}{t+\alpha_1\|y\|}$ dır. Benzer olarak

$\frac{t}{t+\alpha_1\|y\|} \geq \frac{s}{s+\alpha_1\|x\|} \Rightarrow \frac{s+t}{s+t+\alpha_1\|x+y\|} \geq \frac{s}{s+\alpha_1\|x\|}$ de gösterilir. Dolayısıyla

$N_1(x+y, s+t) \geq \min\{N_1(x,s), N_1(y,t)\}$ dır.

N₅) Eğer $t_1 < t_2 \leq 0$ ise, bu durumda $\forall x \in X$ için $N_1(x, t_1) = N_1(x, t_2) = 0$.

Eğer, $t_2 > t_1 > 0$ ise, $\forall x \in X$ için $\frac{t_2}{t_2 + \alpha_1 \|x\|} - \frac{t_1}{t_1 + \alpha_1 \|x\|} = \frac{\alpha_1 \|x\| (t_2 - t_1)}{(t_2 + \alpha_1 \|x\|)(t_1 + \alpha_1 \|x\|)} \geq 0$
 $\Rightarrow \forall x \in X, N_1(x, t_2) \geq N_1(x, t_1)$ dir. O halde $N_1(x, \cdot)$ $\mathcal{R}$ 'nin bir azalmayan fonksiyondur.

Eğer $x \neq 0$ ise, $\lim_{t \rightarrow \infty} N_1(x, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{t + \alpha_1 \|x\|} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{\alpha_1 \|x\|}{t}} = 1$.

Eğer $x = 0$ ise, $\lim_{t \rightarrow \infty} N_1(x, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} N_1(0, t) = 1$ dir. Böylece $\forall x \in X$ için, $\lim_{t \rightarrow \infty} N_1(x, t) = 1$ dir.

Sonuç olarak (X, N_1) bir fuzzy normlu lineer uzaydır. Benzer olarak (X, N_2) 'nin de bir fuzzy normlu lineer uzay olduğu gösterilebilir.

$T: (X, N_1) \rightarrow (X, N_2)$ tanımlansın. $r \in \mathcal{R}$ $r \neq 0$ bir sabit olmak üzere, $T(x) = rx$. Buradan T lineer operatördür. Eğer bir pozitif M sayısı var öyle ki $M \geq |r|$ ise, bu durumda $\forall t \in \mathcal{R}, \forall x \in X$ için $N_2(T(x), t) \geq N_1(x, \frac{t}{M})$ olduğunu gösterebiliriz. $\forall x \in X, M \geq |r|$ için $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$ olduğunda $\alpha_1 M \|x\| > \alpha_2 |r| \|x\| \Rightarrow \forall t > 0$ için $t + \alpha_1 M \|x\| \geq t + \alpha_2 |r| \|x\|$

$$\Rightarrow \frac{1}{t + \alpha_2 |r| \|x\|} \geq \frac{1}{t + \alpha_1 M \|x\|} \Rightarrow \forall t > 0 \text{ için, } \frac{t}{t + \alpha_2 |r| \|x\|} \geq \frac{t}{t + \alpha_1 M \|x\|}$$

$$\Rightarrow \forall t > 0 \text{ için } \frac{t}{t + \alpha_2 |r| \|x\|} \geq \frac{\frac{t}{M}}{\frac{t}{M} + \alpha_1 \|x\|} \text{ dir.}$$

Buradan $\forall t > 0, \forall x \in X$ için $N_2(T(x), t) \geq N_1(x, \frac{t}{M})$ dir. Eğer $t \leq 0$ ise, bu durumda $\forall x \in X$ için sağlanır. Dolayısıyla T güçlü fuzzy sınırlı lineer operatördür.

5.6. Tanım

(X, N_1) ve (Y, N_2) fuzzy normlu lineer uzaylar, $T: (X, N_1) \rightarrow (Y, N_2)$ bir lineer operatör olsun.

Eğer her bir $\alpha \in (0,1)$ için $\exists M_\alpha > 0$, öyle ki $\forall x \in X$ ve $\forall t \in \mathcal{R}$ için $N_1(x, \frac{t}{M_\alpha}) \geq N_2(T(x), t) \geq \alpha$ ise, bu durumda T 'e X üzerinde zayıf fuzzy sınırlıdır denir [14].

5.3. Teorem

(X, N_1) ve (Y, N_2) fuzzy normlu lineer uzaylar, $T: (X, N_1) \rightarrow (Y, N_2)$ bir lineer operatör olsun. Eğer T güçlü fuzzy sınırlı ise, bu durumda T fuzzy zayıf sınırlıdır, fakat tersi doğru değildir [14].

İspat

İlk olarak kabul edelim ki T güçlü fuzzy sınırlı olsun. O halde $\exists M > 0$ var öyle ki $\forall t \in \mathcal{R}, \forall x \in X$ için $N_2(T(x), t) \geq N_1(x, \frac{t}{M})$ dır. Her bir $\alpha \in (0,1)$ için $\exists M_\alpha = M > 0$ var öyle ki $N_1(x, \frac{t}{M_\alpha}) \geq \alpha \Rightarrow \forall t \in \mathcal{R}, \forall x \in X$ $N_2(T(x), t) \geq \alpha$ dır.

Buradan T zayıf fuzzy sınırlıdır. Bu teoremin tersinin doğru olmadığını gösteren bir örnek verelim

Örnek

$(X, \|\cdot\|)$ bir normlu lineer uzay olsun. N_1 ve N_2 fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$N_1(x, t) = \begin{cases} \frac{t^2 - \|x\|^2}{t^2 + \|x\|^2} & , \text{ eğer } t > \|x\| \\ 0 & , \text{ eğer } t \leq \|x\| \end{cases} \quad \text{ve}$$

$$N_2(x, t) = \begin{cases} \frac{t}{t + \|x\|} & , \text{ eğer } t > 0, \forall x \in X \\ 0 & , \text{ eğer } t \leq 0, \forall x \in X \end{cases}$$

N_2 'nin X 'de bir fuzzy norm olduğunu biliyoruz. N_1 'in de X 'de bir fuzzy norm olduğunu gösterelim.

N_1) $\forall t \in \mathcal{R}$ ve $t \leq 0$ ise, bu durumda tanımdan $N_1(x, t) = 0$ dır.

$$N_2) \forall t \in \mathcal{R} \text{ ve } t > 0 \text{ için, } N_1(x, t) = 1 \Leftrightarrow \frac{t^2 - \|x\|^2}{t^2 + \|x\|^2} = 1 \Leftrightarrow t^2 - \|x\|^2 = t^2 + \|x\|^2$$

$$\Leftrightarrow \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ dır.}$$

N_3) $c \neq 0$ için, eğer $t > \|cx\|$ ise, bu durumda

$$N_1(cx, t) = \frac{t^2 - \|cx\|^2}{t^2 + \|cx\|^2} = \frac{(\frac{t}{|c|})^2 - \|x\|^2}{(\frac{t}{|c|})^2 + \|x\|^2} = N_1(x, \frac{t}{|c|}) \text{ dır. } c \neq 0 \text{ için, eğer } t \leq \|cx\| \text{ ise, bu}$$

durumda $\frac{t}{|c|} \leq \|x\|$ ve buradan $N_1(cx, t) = 0 = N_1(x, \frac{t}{|c|})$ dır.

N_4) $\forall x, y \in X$ ve $\forall s, t \in \mathcal{R}$ $N_1(x+y, s+t) \geq \min\{N_1(x, s), N_1(y, t)\}$ olduğunu gösterelim. $s \leq \|x\|$ veya $t \leq \|y\|$ ise bu durumda ispat açıktır.

$s > \|x\|$ ve $t > \|y\|$ kabul edelim. Bu durumda

$$N_1(y, t) \geq N_1(x, s) \Rightarrow \frac{t^2 - \|y\|^2}{t^2 + \|y\|^2} \geq \frac{s^2 - \|x\|^2}{s^2 + \|x\|^2}$$

$$\Rightarrow t^2 s^2 - s^2 \|y\|^2 + t^2 \|x\|^2 - \|y\|^2 \|x\|^2 \geq t^2 s^2 - t^2 \|x\|^2 + s^2 \|y\|^2 - \|y\|^2 \|x\|^2$$

$$\Rightarrow t^2 \|x\|^2 - s^2 \|y\|^2 \geq 0 \text{ dır. (i)}$$

$s + t > \|x\| + \|y\| \geq \|x + y\|$. Böylece

$$N_1(x+y, s+t) = \frac{(s+t)^2 - \|x+y\|^2}{(s+t)^2 + \|x+y\|^2} \geq \frac{(s+t)^2 - (\|x\| + \|y\|)^2}{(s+t)^2 + (\|x\| + \|y\|)^2}.$$

$$\frac{(s+t)^2 - (\|x\| + \|y\|)^2}{(s+t)^2 + (\|x\| + \|y\|)^2} - \frac{s^2 - \|x\|^2}{s^2 + \|x\|^2} = A = \{(s+t)^2 + (\|x\| + \|y\|)^2\}(s^2 + \|x\|^2) \text{ olmak üzere,}$$

$$= \frac{\|x\|^2(s+t)^2 - s^2(\|x\| + \|y\|)^2 - s^2(\|x\| + \|y\|)^2 + \|x\|^2(s+t)^2}{A}$$

$$= \frac{2}{A} [\|x\|^2(s+t)^2 - s^2(\|x\| + \|y\|)^2] = \frac{2}{A} [\|x\|^2 t^2 - 2st\|x\|^2 + s^2\|y\|^2 - 2s^2\|x\|\|y\|]$$

$$= \frac{2}{A} [\|x\|^2 t^2 - \|y\|^2 s^2 + 2s\|x\|(t\|x\| - s\|y\|)] \geq 0 \text{ (i)'den.}$$

Dolayısıyla $N_1(x+y, s+t) \geq \min\{N_1(x, s), N_1(y, t)\}$ dır.

N_5) $t_1 < t_2 \leq \|x\|$ olduğunda, $N_1(x, t_1) = N_1(x, t_2) = 0$

Eğer $t_2 > t_1 > \|x\|$ ise, $B = (t_2^2 + \|x\|^2)(t_1^2 + \|x\|^2) = \frac{\|x\|^2}{B} (t_2 + t_1)(t_2 - t_1) \geq 0$ için

$$\frac{t_2^2 - \|x\|^2}{t_2^2 + \|x\|^2} - \frac{t_1^2 - \|x\|^2}{t_1^2 + \|x\|^2} = \frac{(t_2^2 \|x\|^2 - t_1^2 \|x\|^2)}{B} \text{ dır. Dolayısıyla } N_1(x, t_2) \geq N_1(x, t_1) \text{ dır.}$$

$\forall x \in X$ için, $\lim_{t \rightarrow \infty} N_1(x, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2 - \|x\|^2}{t^2 + \|x\|^2} = 1$ dır. Sonuç olarak (X, N_1) bir fuzzy normlu lineer uzaydır.

$T: (X, N_1) \rightarrow (Y, N_2)$ bir lineer operatör, $\forall x \in X$ için, $T(x) = x$ şeklinde tanımlansın.

$$\forall \alpha \in (0, 1), M_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \text{ seçelim. Bu durumda } N_1(x, \frac{t}{M_\alpha}) \geq \alpha \Rightarrow \frac{(1-\alpha)^2 t^2 - \|x\|^2}{(1-\alpha)^2 t^2 + \|x\|^2} \geq \alpha$$

$$\Rightarrow t^2(1-\alpha)^2 - \|x\|^2 \geq \alpha(1-\alpha)^2 t^2 + \alpha \|x\|^2$$

$$\Rightarrow t^2(1-\alpha)^2 - \alpha(1-\alpha)^2 t^2 \geq (1+\alpha) \|x\|^2$$

$$\Rightarrow t^2(1-\alpha)^3 \geq (1+\alpha) \|x\|^2$$

$$\Rightarrow \|x\| \leq \frac{t(1-\alpha)\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{1+\alpha}}$$

$$\Rightarrow t + \|x\| \leq \frac{t(1-\alpha)\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{1+\alpha}} + t = t \frac{(1-\alpha)\sqrt{1-\alpha} + \sqrt{1+\alpha}}{\sqrt{1+\alpha}}$$

$$\Rightarrow \frac{t}{t+\|x\|} \geq \frac{\sqrt{1+\alpha}}{(1-\alpha)\sqrt{1-\alpha} + \sqrt{1+\alpha}} \text{ dır. (ii)}$$

$$\text{Şimdi } \frac{\sqrt{1+\alpha}}{(1-\alpha)\sqrt{1-\alpha} + \sqrt{1+\alpha}} \geq \alpha \Leftrightarrow \sqrt{1+\alpha} \geq \alpha(1-\alpha)\sqrt{1-\alpha} + \alpha\sqrt{1+\alpha}$$

$$\Leftrightarrow (1-\alpha)\sqrt{1+\alpha} \geq \alpha(1-\alpha)\sqrt{1-\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+\alpha} \geq \alpha\sqrt{1-\alpha} \quad (\alpha \neq 1 \text{ için})$$

$$\Leftrightarrow 1+\alpha \geq \alpha^2(1-\alpha)$$

$$\Leftrightarrow 1+\alpha+\alpha^3 \geq \alpha^2 \text{ bu } \forall \alpha \in (0, 1) \text{ için doğrudur. O halde (ii)'den } \forall \alpha \in (0, 1) \text{ için,}$$

$$\frac{t}{t+\|x\|} \geq \alpha \Rightarrow t > \|x\| \text{ ise, bu durumda } N_2(T(x), t) \geq \alpha \text{ dır.}$$

$$t \leq \|x\| \text{ ise, } \frac{t^2 - \|x\|^2}{t^2 + \|x\|^2} = 0 \text{ buradan } \forall \alpha \in (0, 1) \text{ için, } N_1(x, \frac{t}{M_\alpha}) \geq \alpha \Rightarrow N_2(T(x), t) \geq \alpha.$$

Dolayısıyla T zayıf fuzzy sınırlıdır. $t > \|x\|$ ve $x \neq 0$ için, $N_2(T(x), t) \geq N_1(x, \frac{t}{M})$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{t+\|x\|} \geq \frac{t^2-M^2\|x\|^2}{t^2+M^2\|x\|^2} \Leftrightarrow t^3 + tM^2\|x\|^2 \geq t^3 - M^2t\|x\|^2 + t^2\|x\| - M^2\|x\|^3$$

$$\Leftrightarrow tM^2\|x\| \geq -M^2t\|x\| + t^2\|x\| - M^2\|x\|^3$$

$$\Leftrightarrow tM^2\|x\|^2 \geq -M^2t\|x\|^2 + t^2 - M^2\|x\|^2 \quad (\|x\| \neq 0 \text{ için})$$

$$\Leftrightarrow M^2(2t\|x\| + \|x\|^2) \geq t^2 \Leftrightarrow M^2 \geq \frac{t^2}{2t\|x\| + \|x\|^2} \quad (\|x\| > 0 \text{ için})$$

$$\Leftrightarrow M \geq \frac{t}{(2t\|x\| + \|x\|^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (\|x\| > 0 \text{ için})$$

$$\Leftrightarrow t \rightarrow \infty \text{ iken } M = \infty \text{ dır. Sonuç olarak } T \text{ güçlü fuzzy sınırlı değildir.}$$

5.7.Tanım

(X, N_1) ve (Y, N_2) fuzzy normlu lineer uzaylar ve $T: X \rightarrow Y$ bir lineer operatör olsun.

Eğer $\exists M > 0$ var öyle ki $\|Tx\|_\alpha^2 \leq M\|x\|_\alpha^1 \quad \forall \alpha \in (0,1)$ ise, bu durumda T düzgün sınırlıdır denir. (Burada $\|\cdot\|_\alpha^1$ ve $\|\cdot\|_\alpha^2$ sırasıyla N_1 ve N_2 'nın α -normlarıdır)[14].

5.4. Teorem

(X, N_1) ve (Y, N_2) fuzzy normlu lineer uzayları N_6 ve N_7 şartlarını sağlasın.

$T: (X, N_1) \rightarrow (Y, N_2)$ bir lineer operatör olsun. T güçlü fuzzy sınırlıdır $\Leftrightarrow T, N_1$ ve

N_2 'nin α -normlarına göre düzgün sınırlıdır [14].

İspat

$\|\cdot\|_\alpha^1$ ve $\|\cdot\|_\alpha^2$ sırasıyla N_1 ve N_2 'nin α -normlarının karşılığı olsun.

Kabul edelim ki T güçlü fuzzy sınırlı olsun. Böylece

$\exists M > 0$ var öyle ki $\forall x \in X$ ve $\forall s \in \mathcal{R}$ için, $N_2(T(x), s) \geq N_1(x, \frac{s}{M})$ dır. (i)

Yani $N_2(T(x), s) \geq N_1(Mx, s)$ dır. Şimdi

$$\|Mx\|_\alpha^1 < t \Rightarrow \inf\{s: N_1(Mx, s) \geq \alpha\} < t \Rightarrow \exists s_0 < t \text{ var öyle ki } N_1(Mx, s_0) \geq \alpha$$

$\Rightarrow$ (i)'den dolayı $\exists s_0 < t$ öyle ki $N_2(T(x), s_0) \geq \alpha$, $\Rightarrow \|T(x)\|_\alpha^2 \leq s < t$ dır.

Böylece $\forall \alpha \in (0,1)$ için, $\|T(x)\|_\alpha^2 \leq \|Mx\|_\alpha^1 = M\|x\|_\alpha^1$. Buradan $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere, T 'nin α -normlarına göre düzgün sınırlıdır.

Tersini kabul edelim ki $\exists M > 0$ var öyle ki $\forall \alpha \in (0,1)$ ve $x \in X$ için

$$\|T(x)\|_\alpha^2 \leq M\|x\|_\alpha^1. \text{ (ii)}$$

Şimdi $r < N_1(Mx, s)$ alalım.

$$\Rightarrow r < \sup\{\alpha \in (0,1): \|Mx\|_\alpha^1 \leq s\} \Rightarrow \exists \alpha_0 \in (0,1) \text{ var öyle ki } r < \alpha_0 \text{ ve } \|Mx\|_\alpha^1 \leq s$$

$$\Rightarrow \text{(ii)'den dolayı } \|T(x)\|_\alpha^2 \leq s \Rightarrow N_2(T(x), s) \geq \alpha_0 > r \text{ dır.}$$

Böylece $N_2(T(x), s) \geq N_1(Mx, s) = N_1(x, \frac{s}{M})$ dır. Yani T güçlü fuzzy sınırlıdır.

5.5. Teorem

(X, N_1) ve (Y, N_2) fuzzy normlu lineer uzayları N_6 ve N_7 şartlarını sağlasın.

$T: (X, N_1) \rightarrow (Y, N_2)$ bir lineer operatör olsun. Bu durumda;

a) Eğer T , bir $x_0 \in X$ noktasında güçlü fuzzy sürekli ise, bu durumda T , X 'in her yerinde güçlü fuzzy sürekli dir.

b) T , güçlü fuzzy sürekli dir $\Leftrightarrow T$, güçlü fuzzy sınırlıdır [14].

İspat

a) T , bir $x_0 \in X$ noktasında güçlü fuzzy sürekli olduğundan, her bir $\varepsilon > 0$ sayısı $\alpha \in (0,1)$ için, $\exists \delta = \delta > 0$ var öyle ki $N_2(T(x) - T(x_0), \varepsilon) \geq N_1(x - x_0, \delta)$ dır. Her bir $y \in X$ ve x yerine $x + x_0 - y$ alarak,

$$N_2(T(x + x_0 - y) - T(x_0), \varepsilon) \geq N_1(x + x_0 - y - x_0, \delta)$$

$$\Rightarrow N_2(T(x) + T(x_0) - T(y) - T(x_0), \varepsilon) \geq N_1(x - y, \delta)$$

$$\Rightarrow N_2(T(x) - T(y), \varepsilon) \geq N_1(x - y, \delta) \text{ elde edilir.}$$

y keyfi seçildiğinden T , X' 'de güçlü fuzzy süreklidir.

b) İlk olarak kabul edelim ki T güçlü fuzzy sınırlı olsun. O halde $\exists M > 0$ var öyle ki $\forall x \in X$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için $N_2(T(x), \varepsilon) \geq N_1(x, \frac{\varepsilon}{M})$ dır. Yani $\forall x \in X$ $\forall \varepsilon > 0$ için, $N_2(T(x) - T(0), \varepsilon) \geq N_1(x - 0, \frac{\varepsilon}{M})$ dır.

$\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ olmak üzere $N_2(T(x) - T(0), \varepsilon) \geq N_1(x - 0, \delta)$ dır. Buradan T , 0 noktasında güçlü fuzzy süreklidir ve dolayısıyla X' 'de güçlü fuzzy süreklidir.

Tersine T , X' 'de güçlü fuzzy sürekli olsun.

$x = 0$ 'da T 'nın güçlü fuzzy süreklilik tanımından $\varepsilon = 1$ için, $\exists \delta > 0$ var öyle ki $\forall x \in X$, $N_2(T(x) - T(0), 1) \geq N_1(x - 0, \delta)$ dır.

$x \neq 0$ ve $t > 0$ olsun. $y = \frac{x}{t}$ alalım, bu durumda $M = \frac{1}{\delta}$ olmak üzere,

$$N_2(T(x), t) = N_2(tT(y), t) = N_2(T(y), 1) \geq N_1(y, \delta) = N_1(\frac{x}{t}, \delta) = N_1(x, \frac{t}{M}) \text{ dır.}$$

Böylece $N_2(T(x), t) \geq N_1(x, \frac{t}{M})$ dır.

Eğer $x \neq 0$ ve $t \leq 0$ ise, bu durumda $N_2(T(x), t) = 0 = N_1(x, \frac{t}{M})$.

Eğer $x = 0$ ve $t \in \mathcal{R}$ ise, bu durumda $T(0_X) = 0_Y$ ve

$$t > 0 \text{ ise, } N_2(0_Y, t) = N_1(0_X, \frac{t}{M}) = 1$$

$t \leq 0$ ise, $N_2(0_Y, t) = N_1(0_X, \frac{t}{M}) = 0$ dır. Sonuç olarak T fuzzy güçlü sınırlıdır.

5.1. Not

T , X' 'de güçlü fuzzy sınırlı ise, T dizisel fuzzy süreklidir[14].

5.6. Teorem

(X, N_1) ve (Y, N_2) fuzzy normlu lineer uzaylar, $T: (X, N_1) \rightarrow (Y, N_2)$ bir lineer operatör olsun. T , X 'in bir noktasında dizisel fuzzy sürekli ise, bu durumda T X' 'de dizisel fuzzy süreklidir [14].

İspat

$x \in X$ keyfi seçilmiş bir nokta ve $\{x_n\}$, X de bir dizi öyle ki $x_n \rightarrow x$ olsun. O halde

$$\forall t > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} N_1(x_n - x, t) = 1 \text{ yani}$$

$$\forall t > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} N_1((x_n - x + x_0) - x_0, t) = 1 \text{ dir. } T, x_0 \text{'da sürekli olduğundan}$$

$$\forall t > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} N_2(T(x_n - x + x_0) - T(x_0), t) = 1 \text{ yazabiliriz. Yani}$$

$$\forall t > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} N_2(T(x_n) - T(x) + T(x_0) - T(x_0), t) = 1 \text{ buda}$$

$$\forall t > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} N_2(T(x_n) - T(x), t) = 1 \text{ dir.}$$

O halde

$$\forall t > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} N_1(x_n - x, t) = 1 \Rightarrow \forall t > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} N_2(T(x_n) - T(x), t) = 1$$

buradan T, X 'de dizisel fuzzy süreklidir.

5.7. Teorem

(X, N_1) ve (Y, N_2) fuzzy normlu lineer uzaylar, $T: (X, N_1) \rightarrow (Y, N_2)$ bir lineer operatör olsun. Bu durumda;

a) Eğer T , bir $x_0 \in X$ noktasında zayıf fuzzy sürekli ise, bu durumda T, X 'in her yerinde zayıf fuzzy süreklidir.

b) T zayıf fuzzy süreklidir $\Leftrightarrow T$ zayıf fuzzy sınırlıdır [14].

İspat

a) T , bir $x_0 \in X$ noktasında zayıf fuzzy sürekli olduğundan, her bir $\varepsilon > 0, \alpha \in (0, 1)$ için, $\exists \delta = \delta(\alpha, \varepsilon) > 0$ var öyle ki $N_1(x - x_0, \delta) \geq \alpha \Rightarrow N_2(T(x) - T(x_0), \varepsilon) \geq \alpha$ dir. $y \in X$ ve x yerine $x + x_0 - y$ aldığımızda;

$$N_1(x + x_0 - y - x_0, \delta) \geq \alpha \Rightarrow N_2(T(x + x_0 - y) - T(x_0), \varepsilon) \geq \alpha, \text{ yani}$$

$$N_1(x - y, \delta) \geq \alpha \Rightarrow N_2(T(x) - T(y), \varepsilon) \geq \alpha$$

y keyfi seçildiğinden T, X 'de zayıf fuzzy süreklidir.

b) T zayıf fuzzy sınırlı olsun. O halde her bir $\alpha \in (0,1)$ için, $\exists M_\alpha > 0$ var öyle ki

$\forall x \in X$ ve $\forall t \in \mathcal{R}$ $N_1(x, \frac{t}{M_\alpha}) \geq \alpha \Rightarrow N_2(T(x), t) \geq \alpha$ yazabiliriz. Yani

$N_1(x-0, \frac{t}{M_\alpha}) \geq \alpha \Rightarrow N_2(T(x) - T(0), t) \geq \alpha$ dır.

Buradan $\varepsilon > 0$ için, $N_1(x-0, \frac{\varepsilon}{M_\alpha}) \geq \alpha \Rightarrow N_2(T(x) - T(0), \varepsilon) \geq \alpha$ dır. Yani $\delta = \frac{\varepsilon}{M_\alpha}$

için, $N_1(x-0, \delta) \geq \alpha \Rightarrow N_2(T(x) - T(0), \varepsilon) \geq \alpha$.

T, $x = 0$ noktasında zayıf fuzzy süreklidir ve dolayısıyla X' de zayıf fuzzy süreklidir.

T, X' de zayıf fuzzy sürekli olsun.

Eğer $x = 0$ ise, T'nin 0'da zayıf fuzzy süreklilik tanımından $\varepsilon = 1$ için, $\forall \alpha \in (0,1)$, $\forall x \in X$, $\exists \delta(\alpha, t) > 0$ var öyle ki $N_1(x - x_0, \delta) \geq \alpha \Rightarrow N_2(T(x) - T(0), 1) \geq \alpha$ dır. Yani $N_1(x, \delta) \geq \alpha \Rightarrow N_2(T(x), 1)$ dır.

Eğer $x \neq 0$ ve $t > 0$ ise, $x = \frac{y}{t}$ alalım. Buradan $N_1(\frac{y}{t}, \delta) \geq \alpha \Rightarrow N_2(T(\frac{y}{t}), 1) \geq \alpha$ yazabiliriz. Yani $N_1(y, t\delta) \geq \alpha \Rightarrow N_2(T(y), t) \geq \alpha$ dır. $M_\alpha = \frac{1}{\delta(\alpha, t)}$ olmak üzere $N_1(y, \frac{t}{M_\alpha}) \geq \alpha \Rightarrow N_2(T(y), t) \geq \alpha$. Bu durumlarda T zayıf fuzzy sınırlıdır.

Eğer $x \neq 0$ ve $t \leq 0$ ise, bu durumda her bir $M_\alpha > 0$ için $N_1(x, \frac{t}{M_\alpha}) = 0 = N_2(T(x), t)$.

Eğer $x = 0$ ise, bu durumda $M_\alpha > 0$ için $t > 0$ ise, $N_1(x, \frac{t}{M_\alpha}) = N_2(T(x), t) = 1$ dır.

$t \leq 0$ ise, $N_1(x, \frac{t}{M_\alpha}) = N_2(T(x), t) = 0$ dır. Bu üç durumda da $\alpha \in (0,1)$ için, $\exists M_\alpha > 0$ var öyle ki $\forall x \in X$ ve $\forall s \in \mathcal{R}$, $N_1(y, \frac{t}{M_\alpha}) \geq \alpha \Rightarrow N_2(T(y), t) \geq \alpha$ dır. Dolayısıyla T zayıf fuzzy sınırlıdır.

5.8. Teorem

(X, N_1) ve (Y, N_2) fuzzy normlu lineer uzayları N_6 ve N_7 şartlarını sağlasın ve

$T: (X, N_1) \rightarrow (Y, N_2)$ bir lineer operatör olsun. Bu durumda T zayıf fuzzy sınırlıdır $\Leftrightarrow \forall \alpha \in (0,1)$ için T, N_1 ve N_2 'nin α -normlarına göre sınırlıdır [14].

İspat

T zayıf fuzzy sınırlı olsun. O halde $\forall \alpha \in (0,1), \exists M_\alpha > 0$ var öyle ki $\forall x \in X, \forall t \in \mathbb{R}$

$$N_1\left(x, \frac{t}{M_\alpha}\right) \geq \alpha \Rightarrow N_2(T(x), t) \geq \alpha. \text{ Yani } N_1(M_\alpha x, t) \geq \alpha \Rightarrow N_2(T(x), t) \geq \alpha \text{ dır.}$$

Buradan

$$\sup\{\beta \in (0,1): \|M_\alpha x\|_\beta^1 \leq t\} \geq \alpha \Rightarrow \sup\{\beta \in (0,1): \|T(x)\|_\beta^2 \leq t\} \geq \alpha \text{ yazabiliriz. (i)}$$

Şimdi gösterelim ki; $\sup\{\beta \in (0,1): \|M_\alpha x\|_\beta^1 \leq t\} \geq \alpha \Leftrightarrow \|M_\alpha x\|_\alpha^1 \leq t$ dır.

Eğer $x = 0$ ise, bu durumda açıktır.

$x \neq 0$ olsun. Eğer $\sup\{\beta \in (0,1): \|M_\alpha x\|_\beta^1 \leq t\} > \alpha$ ise, bu durumda

$$\|M_\alpha x\|_\alpha^1 \leq t \text{ dır. (ii)}$$

Eğer $\sup\{\beta \in (0,1): \|M_\alpha x\|_\beta^1 \leq t\} = \alpha$ ise, bu durumda $(0,1)$ 'de $\exists \{\alpha_n\}$ artan dizisi var öyle ki $\alpha_n \uparrow \alpha$ ve $\|M_\alpha x\|_{\alpha_n}^1 \leq t$ dır. Bu durumda Teorem 4.2.'den $\|M_\alpha x\|_\alpha^1 \leq t$ yazabiliriz. (iii)

$$\text{Böylece (ii) ve (iii)'den, } \sup\{\beta \in (0,1): \|M_\alpha x\|_\beta^1 \leq t\} \geq \alpha \Rightarrow \|M_\alpha x\|_\alpha^1 \leq t. \text{ (iv)}$$

$\|M_\alpha x\|_\alpha^1 \leq t$ olduğunu kabul edelim. Eğer $\|M_\alpha x\|_\alpha^1 < t$ ise, bu durumda $N_1(M_\alpha x, t) \geq \alpha$ dır. Yani $\sup\{\beta \in (0,1): \|M_\alpha x\|_\beta^1 \leq t\} \geq \alpha$ dır. (v)

Eğer $\|M_\alpha x\|_\alpha^1 = t$ yani $\inf\{s: N_1(M_\alpha x, s) \geq \alpha\} = t$ ise, bu durumda $\mathcal{R}$ 'de $\exists \{s_n\}$ azalan dizisi var öyle ki $s_n \downarrow t$ ve $N_1(M_\alpha x, s_n) \geq \alpha$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} N_1(M_\alpha x, s_n) \geq \alpha \Rightarrow N_7\text{'den } N_1(M_\alpha x, \lim_{n \rightarrow \infty} s_n) \geq \alpha \Rightarrow N_1(M_\alpha x, t) \geq \alpha.$$

$$\Rightarrow \sup\{\beta \in (0,1): \|M_\alpha x\|_\beta^1 \leq t\} \geq \alpha \text{ dır. (vi)}$$

$$(v) \text{ ve (vi)'dan, } \|M_\alpha x\|_\alpha^1 \leq t \Rightarrow \sup\{\beta \in (0,1): \|M_\alpha x\|_\beta^1 \leq t\} \geq \alpha. \text{ (vii)}$$

$$(iv) \text{ ve (vii)'den, } \sup\{\beta \in (0,1): \|M_\alpha x\|_\beta^1 \leq t\} \geq \alpha \Leftrightarrow \|M_\alpha x\|_\alpha^1 \leq t. \text{ (viii)}$$

Benzer şekilde,

$$\sup\{\beta \in (0,1): \|T(x)\|_{\beta}^2 \leq t\} \geq \alpha \Leftrightarrow \|T(x)\|_{\alpha}^2 \leq t \text{ dır. (ix)}$$

Dolayısıyla (viii) ve (ix)'dan $N_1(M_{\alpha}x, t) \geq \alpha \Rightarrow N_2(T(x), t) \geq \alpha$ bu durumda

$$\|M_{\alpha}x\|_{\alpha}^1 \leq t \Rightarrow \|T(x)\|_{\alpha}^2 \leq t \text{ dır. Buda } \forall \alpha \in (0,1) \text{ için, } \|T(x)\|_{\alpha}^2 \leq M_{\alpha}\|x\|_{\alpha}^1 \text{ dır.}$$

Tersine $\forall \alpha \in (0,1), \exists M_{\alpha} > 0$ var öyle ki $\forall x \in X, \|T(x)\|_{\alpha}^2 \leq M_{\alpha}\|x\|_{\alpha}^1$ olsun. Bu durumda $x \neq 0$ için, $\forall t > 0, \|M_{\alpha}x\|_{\alpha}^1 \leq t \Rightarrow \|T(x)\|_{\alpha}^2 \leq t$ yani

$$\inf\{s: N_1(M_{\alpha}x, s) \geq \alpha\} \leq t \Rightarrow \inf\{s: N_2(T(x), s) \geq \alpha\} \leq t \text{ dır.}$$

Benzer şekilde,

$$\inf\{s: N_1(M_{\alpha}x, s) \geq \alpha\} \leq t \Leftrightarrow N_1(M_{\alpha}x, t) \geq \alpha \text{ ve}$$

$$\inf\{s: N_2(T(x), s) \geq \alpha\} \leq t \Leftrightarrow N_2(T(x), t) \geq \alpha \text{ dır. Böylece } \forall x \in X \text{ için,}$$

$N_1\left(x, \frac{t}{M_{\alpha}}\right) \geq \alpha \Rightarrow N_2(T(x), t) \geq \alpha$ dır. Eğer $x \neq 0, t \leq 0$ ve $x = 0, t > 0$ ise, bu durumda ispat açıktır.

5.9. Teorem

(X, N_1) ve (Y, N_2) fuzzy normlu lineer uzayları N_6 ve N_7 şartlarını sağlasın ve

$T: (X, N_1) \rightarrow (Y, N_2)$ bir lineer operatör olsun. Eğer X sonlu boyutlu ise, bu durumda T zayıf fuzzy sınırlıdır [14].

İspat

(X, N_1) ve (Y, N_2) fuzzy normlu lineer uzayları N_6 şartını sağlasın. $\|\cdot\|_{\alpha}^1$ ve $\|\cdot\|_{\alpha}^2$, sırasıyla N_1 ve N_2 'nin α -normlarını karşılık geldiğini kabul edelim. T sonlu boyutlu olduğundan $\forall \alpha \in (0,1)$ için, $T: (X, \|\cdot\|_{\alpha}^1) \rightarrow (Y, \|\cdot\|_{\alpha}^2)$ bir sınırlı lineer operatördür. Teorem 5.8. uygulandığında T 'nin fuzzy zayıf sınırlı olduğu bulunur.

6. FUZZY DUAL UZAYLAR

Bu bölümde (X, N_1) ve (Y, N_2) fuzzy normlu lineer uzaylar, $F(X, Y)$, (X, N_1) 'den (Y, N_2) 'e tüm güçlü fuzzy sınırlı lineer operatörlerin kümesini ve benzer şekilde $F'(X, Y)$, (X, N_1) 'den (Y, N_2) 'e tüm zayıf fuzzy sınırlı lineer operatörlerin kümesi olsun. $F(X, Y)$ ve $F'(X, Y)$ kümeleri üzerinde fuzzy normlar tanımlayarak, bunların birer fuzzy normlu lineer uzay olduğu gösterilecektir. Önce $F(X, Y)$ 'nin lineer uzay olduğunu gösterelim.

6.1. Fuzzy Dual Uzaylar ve Özellikleri

6.1. Teorem

$F(X, Y)$ bir lineer uzaydır [14].

İspat

$x \in X$ ve $T_1, T_2 \in F(X, Y)$ için $(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x)$ ve her bir λ skaleri için $(\lambda T_1)(x) = \lambda T_1(x)$ olduğunu gösterelim. T_1 ve T_2 güçlü fuzzy sınırlı olduğundan, en az iki pozitif M_1 ve M_2 sayısı var öyle ki

$$\forall x \in X \text{ ve } \forall t \in \mathcal{R} \text{ için } N_2(T_1 x, t) \geq N_1(x, \frac{t}{M_1})$$

$$\forall x \in X \text{ ve } \forall t \in \mathcal{R} \text{ için } N_2(T_2 x, t) \geq N_1(x, \frac{t}{M_2}) \text{ dir. } \forall x \in X \text{ ve her bir } \alpha \text{ ve } \beta \text{ skaleri için,}$$

$$\begin{aligned} N_2((\alpha T_1 + \beta T_2)x, t) &= N_2(\alpha T_1(x) + \beta T_2(x), t) \geq \min\{N_2(T_1(\alpha x), \frac{t}{2}), N_2(T_2(\beta x), \frac{t}{2})\} \\ &\geq \min\{N_1(\alpha x, \frac{t}{2M_1}), N_1(\beta x, \frac{t}{2M_2})\} = \min\{N_1(x, \frac{t}{2|\alpha|M_1}), N_1(x, \frac{t}{2|\beta|M_2})\} \text{ dir. (i)} \end{aligned}$$

$$M = \max\{2|\alpha|M_1, 2|\beta|M_2\} + 1 \text{ seçelim. Bu durumda } \forall t \geq 0, \frac{t}{2|\alpha|M_1} \geq \frac{t}{M} \text{ ve}$$

$$\frac{t}{2|\beta|M_2} \geq \frac{t}{M}. \text{ Böylece } N_1(x, \frac{t}{2|\alpha|M_1}) \geq N_1(x, \frac{t}{M}) \text{ ve } N_1(x, \frac{t}{2|\beta|M_2}) \geq N_1(x, \frac{t}{M}) \text{ dir.}$$

$$\text{Böylece } \min\{N_1(x, \frac{t}{2|\alpha|M_1}), N_1(x, \frac{t}{2|\beta|M_2})\} \geq N_1(x, \frac{t}{M}). \forall t \geq 0 \text{ için, (i)'den}$$

$$N_2((\alpha T_1 + \beta T_2)x, t) \geq N_1(x, \frac{t}{M}). \text{ Eğer } t < 0 \text{ ise, bu durumda açıktır. Böylece } \forall x \in X,$$

$$\forall t \in \mathcal{R} \text{ için } \exists M > 0 \text{ var öyle ki } N_2((\alpha T_1 + \beta T_2)x, t) \geq N_1(x, \frac{t}{M}) \text{ dir.}$$

Bu da $\alpha T_1 + \beta T_2 \in F(X, Y)$ dir. Dolayısıyla $F(X, Y)$ bir lineer uzaydır.

6.1.Lemma

(X, N_1) ve (Y, N_2) fuzzy normlu lineer uzayları N_6 ve N_7 şartlarını sağlasın.

$T \in F(X, Y)$ için, $\beta \in (0, 1)$, $\|T\|'_\beta = V_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Tx\|_\beta^2}{\|x\|_\beta^1}$, ve $\alpha \in (0, 1)$, $\|T\|_\alpha = V_{\beta \leq \alpha} \|T\|'_\beta$.

Bu durumda $\{\|x\|_\alpha : \alpha \in (0, 1)\}$, $F(X, Y)$ de normun artan ailesidir ve $N: F(X, Y) \times \mathcal{R} \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın;

$$N(T, s) = \begin{cases} V\{\alpha \in (0, 1): \|T\|_\alpha \leq s\}, & (T, s) \neq (0, 0) \\ 0, & (T, s) = (0, 0) \end{cases}$$

$F(X, Y)$ 'de bir fuzzy normdur[14].

İspat

i) $\forall \alpha \in (0, 1)$ için, tanımından $\|T\|_\alpha \geq 0$ yazılabilir.

ii) Eğer $\|T\|_\alpha = 0$ ise, bu durumda $V_{\beta \leq \alpha} \|T\|'_\beta = 0 \Rightarrow \forall \beta \leq \alpha, \|T\|'_\beta = 0 \Rightarrow T = 0$ dir.

Tersine olarak eğer $T = 0$ ise, bu durumda $\forall \beta \in (0, 1)$, $\|T\|'_\beta = 0 \Rightarrow \forall \beta \in (0, 1), \forall \alpha \in (0, 1), V_{\beta \leq \alpha} \|T\|'_\beta = 0 \Rightarrow \forall \alpha \in (0, 1), \|T\|_\alpha = 0$ dir.

iii) Her bir λ skaleri için, $\|\lambda T\|_\alpha = V_{\beta \leq \alpha} \|\lambda T\|'_\beta = |\lambda| V_{\beta \leq \alpha} \|T\|'_\beta = |\lambda| \|T\|_\alpha$.

iv) $T_1, T_2 \in F(X, Y)$ için

$$\begin{aligned} V_{\beta \leq \alpha} (\|T_1 + T_2\|'_\beta) &\leq V_{\beta \leq \alpha} (\|T_1\|'_\beta + \|T_2\|'_\beta) \leq V_{\beta \leq \alpha} \|T_1\|'_\beta + V_{\beta \leq \alpha} \|T_2\|'_\beta \\ \Rightarrow \forall \alpha \in (0, 1), \|T_1 + T_2\|_\alpha &\leq \|T_1\|_\alpha + \|T_2\|_\alpha \text{ dir.} \end{aligned}$$

Eğer $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1)$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2$ ise, bu durumda

$\|T\|_{\alpha_1} = V_{\beta \leq \alpha_1} \|T\|'_\beta \leq V_{\beta \leq \alpha_2} \|T\|'_\beta = \|T\|_{\alpha_2}$ dir. Dolayısıyla $\{\|x\|_\alpha : \alpha \in (0, 1)\}$, $F(X, Y)$ 'de normun artan ailesidir. Teorem 3.2.'den $N: F(X, Y) \times \mathcal{R} \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlandığında;

$$N(T, s) = \begin{cases} \sup\{\alpha \in (0, 1): \|T\|_\alpha \leq s\}, & (T, s) \neq (0, 0) \\ 0, & (T, s) = (0, 0) \end{cases}$$

$F(X,Y)$ 'de bir fuzzy normdur.

6.2. Lemma

$F'(X,Y)$ bir lineer uzaydır [14].

İspat

$x \in X$ ve $T_1, T_2 \in F'(X,Y)$ için $(T_1+T_2)(x) = T_1(x)+T_2(x)$ ve her bir λ skaleri için $(\lambda T_1)(x) = \lambda T_1(x)$ olduğunu gösterelim. T_1 ve T_2 zayıf fuzzy sınırlı olduğundan, $\forall \alpha \in (0,1)$ için en az iki pozitif M_α^1 ve M_α^2 sayısı var öyle ki

$$\forall x \in X \text{ ve } \forall t \in \mathcal{R} \text{ için } N_1(x, \frac{t}{M_\alpha^1}) \geq \alpha \Rightarrow N_2(T_1(x), t) \geq \alpha \text{ ve}$$

$$\forall x \in X \text{ ve } \forall t \in \mathcal{R} \text{ için } N_1(x, \frac{t}{M_\alpha^2}) \geq \alpha \Rightarrow N_2(T_2(x), t) \geq \alpha \text{ dır. Her bir sıfırdan farklı}$$

$$k_1 \text{ ve } k_2 \text{ skaleri için, } N_1(x, \frac{t}{2|k_1|M_\alpha^1}) = N_1(k_1x, \frac{t}{2M_\alpha^1}) \geq \alpha \Rightarrow N_2(T_1(k_1x), \frac{t}{2}) \geq \alpha \text{ ve}$$

$$N_1(x, \frac{t}{2|k_2|M_\alpha^2}) = N_1(k_2x, \frac{t}{2M_\alpha^2}) \geq \alpha \Rightarrow N_2(T_2(k_2x), \frac{t}{2}) \geq \alpha \text{ yazabiliriz.}$$

$M_\alpha = 2|k_1|M_\alpha^1 + 2|k_2|M_\alpha^2$ seçelim. Şimdi

$$N_1(x, \frac{t}{M_\alpha}) = N_1(x, \frac{t}{2|k_1|M_\alpha^1 + 2|k_2|M_\alpha^2}) \geq \alpha \Rightarrow N_1(x, \frac{t}{2|k_1|M_\alpha^1}) \geq \alpha \text{ ve } N_1(x, \frac{t}{2|k_2|M_\alpha^2}) \geq \alpha$$

$$\Rightarrow N_2(T_1(k_1x), \frac{t}{2}) \geq \alpha \text{ ve } N_2(T_2(k_2x), \frac{t}{2}) \geq \alpha \Rightarrow N_2((k_1T_1 + k_2T_2)x, t) \geq \alpha$$

$$\Rightarrow k_1T_1 + k_2T_2 \in F'(X,Y) \text{ dır.}$$

k_1 ve k_2 skaleri 0 eşit olduğunda, $k_1T_1 + k_2T_2 \in F'(X,Y)$ açıktır. Dolayısıyla $F'(X,Y)$ lineerdir.

$Y = \mathcal{R}$ veya $\mathbb{C}$ olmak üzere, Y lineer uzay olsun. $N_2: Y \times \mathcal{R} \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın;

$$N_2(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{eğer } t \leq |x| \\ 1, & \text{eğer } t > |x| \end{cases} \quad (A)$$

Bu durumda N_2 , Y 'de bir fuzzy norm ve böylece (Y, N_2) 'in fuzzy normlu lineer uzay olduğu kolaylıkla gösterilir.

6.1. Not

(Y, N_2) , N_6 şartını sağlıyorsa, $t > 0$ için, $N_2(x, t) > 0 \Rightarrow \forall t > 0$ için $|x| < t$

$\Rightarrow |x| = 0 \Rightarrow x = 0$ dır.

Böylece $\forall t > 0$ için, $N_2(x, t) > 0 \Rightarrow x = 0$ dır. Şimdi $\| \cdot \|_\alpha^2$ N_2 'nin α - normları ise, bu durumda $\|x\|_\alpha^2 = \inf\{ t > 0: N_2(x, t) \geq \alpha \}$, $\alpha \in (0,1) = \inf\{ t > 0: t > |x| \} = |x|$ [14].

6.1. Tanım

(Y, N_2) , (A) 'daki gibi tanımlanmak üzere, (X, N_1) 'den (Y, N_2) 'e tanımlanan güçlü fuzzy sınırlı lineer operatörlere, güçlü fuzzy sınırlı lineer fonksiyonel denir [14].

X^* , (X, N_1) 'deki tüm güçlü fuzzy sınırlı lineer fonksiyonelleri göstermektedir [14].

6.2. Tanım

(Y, N_2) , (A) 'daki gibi tanımlanmak üzere, (X, N_1) 'den (Y, N_2) 'e tanımlanan zayıf fuzzy sınırlı lineer operatörlere, zayıf fuzzy sınırlı lineer fonksiyonel denir [14].

X' , (X, N_1) 'deki tüm zayıf fuzzy sınırlı lineer fonksiyonelleri göstermektedir [14].

6.3. Tanım

(X, N_1) fuzzy normlu lineer uzayı N_6 ve N_7 şartlarını sağlasın. $T \in X^*$ ve $\{ \|x\|_\alpha^1 : \alpha \in (0,1) \}$, N_1 'in α - normlarının ailesi olsun.

$\|T\|_\alpha^* = \bigvee_{x \in X, x \neq 0} \frac{|T(x)|}{\|x\|_{1-\alpha}^1} \quad \forall \alpha \in (0,1)$ olarak tanımlasın. Bu durumda

$\{ \| \cdot \|_\alpha^* : \alpha \in (0,1) \}$, X^* 'in normlarının bir artan ailesidir. T güçlü fuzzy sınırlı olduğundan, $\forall x \in X, \exists M > 0$ var öyle ki $|T(x)| \leq M \|x\|_{1-\alpha}^1$ ve böylece

$\forall \alpha \in (0,1)$ için $\|T\|_\alpha^* \leq M$ dır. Ayrıca

$$N^*(T, s) = \begin{cases} \sup\{\alpha \in (0,1) \mid \|T\|_\alpha^* \leq s\}, & (T, s) \neq 0 \text{ için} \\ 0, & (T, s) = (0,0) \text{ için} \end{cases}$$

Bu durumda Teorem 3.2.'den N^* , X^* 'da bir fuzzy normdur ve böylece (X^*, N^*) fuzzy normlu lineer uzaydır. X^* , X 'in birinci güçlü fuzzy dual uzayıdır [14].

6.4. Tanım

(X, N_1) fuzzy normlu lineer uzayı N_6 ve N_7 şartlarını sağlasın ve X' lineer uzayı, X 'in tüm zayıf fuzzy sınırlı lineer fonksiyonları olsun. $T \in X'$ ve $\{\|\cdot\|'_\alpha : \alpha \in (0,1)\}$, N_1 'in α -normlarının ailesi olsun.

$$\|T\|'_\alpha = \bigvee_{x \in X, x \neq 0} \frac{|T(x)|}{\|x\|_{1-\alpha}^1} \quad \forall \alpha \in (0,1) \text{ olarak tanımlasın. Bu durumda}$$

$\{\|\cdot\|'_\alpha : \alpha \in (0,1)\}$, X' 'in normlarının bir artan ailesidir. T zayıf fuzzy sınırlı olduğundan, $\forall x \in X, \exists M_\alpha > 0$ var öyle ki $|T(x)| \leq M_\alpha \|x\|_{1-\alpha}^1$ ve böylece

$$\forall \alpha \in (0,1) \text{ için } \|T\|'_\alpha \leq M_\alpha \text{ dır. Ayrıca}$$

$$N'(T, s) = \begin{cases} \sup\{\alpha \in (0,1) \mid \|T\|'_\alpha \leq s\}, & (T, s) \neq 0 \text{ için} \\ 0, & (T, s) = (0,0) \text{ için} \end{cases}$$

Bu durumda Teorem 3.2.'den N' , X' 'de bir fuzzy normdur ve böylece (X', N') bir fuzzy normlu lineer uzaydır. X' , X 'in birinci zayıf fuzzy dual uzayıdır [14].

6.1. Lemma

(X, N_1) fuzzy normlu lineer uzayı N_6 ve N_7 şartlarını sağlasın ve (Y, N_2) fuzzy normlu lineer uzayı (A) 'daki gibi tanımlansın. $\{\|\cdot\|'_\alpha : \alpha \in (0,1)\}$ normların bir artan ailesi olmak üzere, N' , X' 'de fuzzy normu aşağıdaki şekilde tanımlayalım;

$$N'(T, s) = \begin{cases} \sup\{\alpha \in (0,1) : \|T\|'_\alpha \leq s\}, & (T, s) \neq 0 \text{ için} \\ 0, & (T, s) = (0,0) \text{ için} \end{cases} \quad (i)$$

Eğer $\|\cdot\|'_\alpha : X' \rightarrow \mathcal{R}^+$ fonksiyonu, $\forall \alpha \in (0,1)$ için $\|T\|'_\alpha = \inf \{t : N'(T, t) \geq \alpha\}$ şeklinde tanımlanıyorsa, bu durumda $\|T\|'_\alpha = \|T\|'_\alpha$ dır [14]. (ii)

İspat

Teorem 4.2.'den $(0,1)$ aralığında her bir artan veya azalan $\{\alpha_n\}$ dizi için, $\forall x \in X$ ve $\alpha \in (0,1)$, $\alpha_n \rightarrow \alpha \Rightarrow \|x\|_{1-\alpha_n}^1 \rightarrow \|x\|_{1-\alpha}^1$ dir. (iii)

Eğer $T = 0$ ise, bu durumda $\forall \alpha \in (0,1)$ için $\|T\|'_\alpha = \|T\|'_\alpha = 0$ dir.

$T \neq 0$ olduğunda $\alpha_0 \in (0,1)$ ve $\|T\|'_{\alpha_0} = t_0$ alalım, bu durumda $t_0 > 0$ dir. (i)'den

$N'(T, t_0) \geq \alpha_0$ dir. (ii)'den $\|T\|'_{\alpha_0} \leq t_0 = \|T\|'_{\alpha_0}$ yazabiliriz.

Böylece $\|T\|'_{\alpha_0} \leq \|T\|'_{\alpha_0}$ dir. (iv)

$r > \|T\|'_{\alpha_0}$ alalım $\Rightarrow \exists t_1 < r$ var öyle ki $N'(T, t_1) \geq \alpha_0$

$\Rightarrow \exists t_1 < r$ var öyle ki $\sup\{\alpha \in (0,1): \|T\|'_\alpha \leq t_1\} \geq \alpha_0$ dir. Eğer

$\sup\{\alpha \in (0,1): \|T\|'_\alpha \leq t_1\} = \alpha_0$ ise, $\exists (0,1)$ 'de $\{\alpha_n\}$ dizisi var öyle ki $\alpha_n \uparrow \alpha_0$ ve

$\forall n \in \mathbb{N}$ için, $\|T\|'_{\alpha_n} \leq t_1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ için, $\forall x \in X, x \neq 0$ $\frac{|T(x)|}{\|x\|_{1-\alpha_n}^1} \leq t_1$

$\Rightarrow x \neq 0, \forall x \in X$ için, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{|T(x)|}{\|x\|_{1-\alpha_n}^1} \leq t_1$

$\Rightarrow x \neq 0, \forall x \in X$ için, $\frac{|T(x)|}{\|x\|_{1-\alpha_0}^1} \leq t_1 \Rightarrow \forall x \in X, x \neq 0$ $\frac{|T(x)|}{\|x\|_{1-\alpha_0}^1} \leq t_1 \Rightarrow \|T\|'_{\alpha_0} \leq t_1 < r$

$\Rightarrow \|T\|'_{\alpha_0} \geq \|T\|'_{\alpha_0}$ dir. (v)

Eğer $\sup\{\alpha \in (0,1): \|T\|'_\alpha \leq t_1\} > \alpha_0$ ise, bu durumda

$\|T\|'_{\alpha_0} \leq t_1 < r \Rightarrow \|T\|'_{\alpha_0} \geq \|T\|'_{\alpha_0}$. (vi)

(iv), (v) ve (vi)'dan $\|T\|'_{\alpha_0} = \|T\|'_{\alpha_0}$ yazabiliriz. $\alpha_0 \in (0,1)$ keyfi olduğundan,

$\forall \alpha \in (0,1), \forall T \in X'$ için, $\|T\|'_\alpha = \|T\|'_\alpha$ dir.

6.1. Teorem

(X, N_1) fuzzy normlu lineer uzayı N_6 ve N_7 şartlarını sağlasın. Bu durumda (X', N') birinci zayıf dual uzayı, bir tam fuzzy normlu lineer uzaydır [14].

İspat

$\{T_n\}$, (X', N') 'de bir Cauchy dizisi olsun. Böylece $\forall t > 0, p = 1, 2, 3, \dots$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} N(T_n - T_{n+p}, t) = 1$. Bu durumda Özellik 3.1. ve Lemma 4.1. uygularsak, $\forall \alpha \in (0, 1)$ ve $n \rightarrow \infty$ iken $\|T_n - T_{n+p}\|'_\alpha \rightarrow 0$ dır. (i) $\forall \alpha \in (0, 1)$ ve $\forall x \in X$ için

$$|T_n(x) - T_{n+p}(x)| = |(T_n - T_{n+p})x| \leq \|T_n - T_{n+p}\|'_\alpha \|x\|_{1-\alpha}^1$$

$\Rightarrow$ (i)'den $\forall x \in X$ için $n \rightarrow \infty$ iken $\|T_n(x) - T_{n+p}(x)\|'_\alpha \rightarrow 0$ dır. Böylece $\{T_n(x)\}$, Y' 'de bir Cauchy dizidir. $(Y, \|\cdot\|)$ tam olduğundan, $(Y, \|\cdot\|)$ 'de $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) = y$ vardır. Bu da (X, N_1) 'de her x için doğru olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) = T(x)$ dır. Bu durumda T lineer olduğunu kolaylık görebiliriz. (i)'den $\forall \alpha \in (0, 1)$ ve $n \rightarrow \infty$ iken

$|\|T_n\|'_\alpha - \|T_{n+p}\|'_\alpha| \leq \|T_n - T_{n+p}\|'_\alpha \rightarrow 0$. Dolayısıyla $\forall \alpha \in (0, 1)$ için, negatif olmayan reel sayıların $\{\|T_n\|'_\alpha\}$ bir Cauchy dizisidir ve yakınsaktır. Böylece her bir $\alpha \in (0, 1)$ için $\{\|T_n\|'_\alpha\}$ sınırlıdır. Böylece her bir $\alpha \in (0, 1)$ için, $\exists K_\alpha > 0$ var öyle ki $n = 1, 2, 3, \dots$ için $\|T_n\|'_\alpha \leq K_\alpha$ dır.

$\forall \alpha \in (0, 1)$ ve $\forall x \in X$ için $|T(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |T_n(x)| \leq K_\alpha \|x\|_{1-\alpha}^1$. Buradan her bir $\alpha \in (0, 1)$ için, T sınırlıdır ve dolayısıyla T zayıf fuzzy sınırlıdır. O halde $T \in X'$ dır. (i)'den $\forall \alpha \in (0, 1)$, $n \rightarrow \infty$ iken $\|T_n - T_{n+p}\|'_\alpha \rightarrow 0$ yazabiliriz. Böylece her bir $\varepsilon > 0$ için, $\exists N_\alpha(\varepsilon)$ var öyle ki

$\forall n \geq N_\alpha(\varepsilon)$, $\|T_n - T_{n+p}\|'_\alpha < \varepsilon$ dır. Bu durumda $\forall x \in X$ $\forall n \geq N_\alpha(\varepsilon)$ ve $p=1, 2, 3, \dots$ için $|T_n(x) - T_{n+p}(x)| \leq \|T_n - T_{n+p}\|'_\alpha \|x\|_{1-\alpha}^1 < \varepsilon \|x\|_{1-\alpha}^1$.

$\forall x \in X$ $\forall n \geq N_\alpha(\varepsilon)$ için, $p \rightarrow \infty$ alırsak, $|T_n(x) - T(x)| \leq \varepsilon \|x\|_{1-\alpha}^1$

$$\Rightarrow \forall n \geq N_\alpha(\varepsilon) \text{ için } \forall x \in X, x \neq 0 \frac{|(T_n - T)(x)|}{\|x\|_{1-\alpha}^1} \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall n \geq N_\alpha(\varepsilon) \text{ için } \|T_n - T\|'_\alpha \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall \alpha \in (0, 1), n \rightarrow \infty \text{ iken } \|T_n - T\|'_\alpha \rightarrow 0$$

$\Rightarrow$ Özellik 3.1.'den $\forall t > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} N(T_n - T, t) = 1$

$\Rightarrow (X', N')$ tamdır.

KAYNAKLAR

1. Zadeh, L.A., “Fuzzy Sets”, *Inform and Control*, 8: 338-358 (1965).
2. Chang, C.L., “Fuzzy Topological Spaces”, *J. Math. Anal. Appl.*, 24: 182-190 (1968).
3. Alaca, C., “Fuzzy Uzaylarında Süreklilik”, Yüksek Lisans Tezi, *Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara, 6-29 (2001).
4. Ming, P.P. and Liu Ying-Ming, “Fuzzy Topology”, I. Neighborhoud Structure of a Fuzzy Point and More-Smith Convergence, *J. Math. Anal. App.*, 76: 571-599 (1980).
5. Das, N.R., Das Pankaja, “Fuzzy Topology Generated by Fuzzy Norm”, *Fuzzy Sets and Systems*, 48:239-248 (1999).
6. 48: Felbin, C., “Finite Dimensional Fuzzy Normed Linear Space”, *Fuzzy Sets and Systems*, 239-248 (1984).
7. Nanda, S., “On Fuzzy Topological Spaces”, *Fuzzy Sets and Systems*, 19: 193-197 (1986).
8. Wong, C.K, “Fuzzy Topology: Product and Quotient Theorems”, *J. Math. Anal. Appl.*, 45: 512-521 (1974).
9. Yıldız, C., “Topolojik Uzayın Temel Kavramları”, Genel Topoloji, *Gazi Üniversitesi*, Ankara, 69-70 (2002).
10. Gürsul, Fatih “Belirtisiz Topolojik Uzaylarda Kompaktlık”, Yüksek Lisans Tezi, *Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara, 1-20 (2003)
11. I. Sadeqi , F. Solaty Kia “Fuzzy normed linear space and its topological structure” *Fuzzy Sets and Systems*, 40: 2576-2589 (2009)
12. Ercan, Mehmet Akif “Fuzzy Topolojik Vektör Uzayları” , Yüksek Lisans Tezi, *Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara, 3-20 (2007).
13. Bayraktar M.,” Sürekli ve Sınırlı Lineer Operatörler”, Fonksiyonel Analiz, *Gazi Üniversitesi*, Ankara, 145-150 (2006)
14. T.Bag, S.K Samanta “Fuzzy Bounded Linear Operators” *Fuzzy Sets and Systems*, 151:513-547 (2005)
15. T.Bag, S.K Samanta “A Comparative Study of Fuzzy Norms on a Linear Spaces” *Fuzzy Sets and Systems*, 673-680 (2007)

16. Rudin W. "topological Vector Spaces", Functional analysis" ***McGraw-Hill Publishing Company*** ; 1-20 (1990)

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : GİR, Ayşe
 Uyuğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 28.06.1985 / Yozgat
 Medeni hali : Bekar
 e-mail : aysegir06@hotmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Erciyes Üniversitesi /Matematik Bölümü	2007
Lise	Etimesgut Lisesi	2003

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2008–2009	İstiklal İ.Ö.O.	Öğretmen
2009–2010	Mahir Başer İ.Ö.O.	Öğretmen

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Kitap okumak, ebru sanatı, fotoğraf çekmek, yüzmek