

BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FUZZY NORMLU LİNEER UZAYLARDA SÜREKLİLİK VE LİNEER
OPERATÖRLER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZÜLAL DERİN

OCAK 2016

BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FUZZY NORMLU LİNEER UZAYLARDA SÜREKLİLİK VE LİNEER
OPERATÖRLER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Zülal DERİN

DANIŞMAN : DOÇ. DR. TÜLİN COŞKUN

ZONGULDAK

Ocak 2016

KABUL:

Zülal DERİN tarafından hazırlanan “Fuzzy Normlu Lineer Uzaylarda Süreklilik ve Lineer Operatörler” başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 14/01/2016

Danışman: Doç. Dr. Tülin COŞKUN

Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Doç. Dr. İlhan KARATAŞ

Bülent Ecevit Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Bölümü

Üye: Yrd. Doç. Dr. Nazmiye GÖNÜL BİLGİN

Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

2../2/2016

Prof. Dr. Kemal BÜYÜKGÜZEL
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

“Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim.”



Zülal DERİN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

FUZZY NORMLU LİNEER UZAYLARDA SÜREKLİLİK VE LİNEER OPERATÖRLER

Zülal DERİN

Bülent Ecevit Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Tülin COŞKUN

Ocak 2016, 101 sayfa

Bu tezde ilk olarak karakteristik fonksiyon, fuzzy küme tanımı gibi temel kavramlar ve bu kavramların bazı özellikleri verilmiştir.

Daha sonra Katsaras, Felbin, Bag-Samanta ve Saadati Vaezpour tarafından literatürde tanımlanan bazı farklı norm tanımları verildi. Bu tanımlar örnekler, bazı özellikler, teoremler ve ispatlarla desteklenmiştir. Ardından Bag-Samanta'nın makalesinden yararlanılarak fuzzy yakınsaklık tanımları ve örnekleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise, Bag-Samanta'nın fuzzy norm karşılaştırmaları makalesinden yararlanılarak ilk olarak; Fuzzy anti norm tanım ve örnekleri ardından Felbin- Bag Samanta, Katsaras-Bag Samanta fuzzy norm karşılaştırmalarına yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise, fuzzy normlu lineer uzaylarda lineer operatörlere yer verilmiştir. Fuzzy sürekli operatör, fuzzy sınırlı lineer operatör ve onlar arasındaki ilişki verilmiştir. Ayrıca fuzzy dizisel sürekli, fuzzy güçlü sürekli ve düzgün sürekli fuzzy operatörler ile ilgili bazı tanımlar, örnekler ve teoremler verilmiştir.

ÖZET (devam ediyor)

Son bölümde, yapılan çalışma ile ilgili önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fuzzy küme, Fuzzy sayı, Fuzzy normlu lineer uzay, Fuzzy anti-norm, Fuzzy lineer operatör.

Bilim Kodu: 403.03.01

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

FUZZY NORMED LINEAR SPACES CONTINUOUS AND LINEAR OPERATORS

Zülal DERİN

Bülent Ecevit University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Thesis Advisor: Assoc. Prof. Dr. Tülin COŞKUN

Ocak 2016, 101 pages

The firstly in this thesis, basic concepts like characteristic function, fuzzy set definition and some poperties of these concepts are given.

Later some different fuzzy normed definition are given which are defined by Katsaras, Felbin, Bag-Samanta and Saadati Vaezpour in literature. These definitions are supported with examples, some properties, theorems and proofs. After, by using from article of Bag-Samanta fuzzy convergence definitions and examles are given.

In the thirth chapter, by using from article of Bag-Samanta firstly; fuzzy anti norm definition and examples after Felbin- Bag ve Samanta, Katsaras- Bag ve Samanta comparative of fuzzy norms and examples are introduced.

ABSTRACT (continued)

In the fourth chapter are given place to fuzzy linear operators in fuzzy normed linear spaces. Continuous fuzzy operator, fuzzy bounded linear operator and relationship between them are introduced. Also, some definitions, examples and theorems related to fuzzy sequentially continuous, fuzzy strong continuous and uniformly continuous fuzzy operator are given.

In the final chapter are given place to suggestions with study.

Keywords: Fuzzy sets, Fuzzy numbers, Fuzzy normed linear space, Fuzzy anti norm, Fuzzy linear operator.

Science Code: 403.03.01

TEŞEKKÜR

Tez konumu verip beni fuzzy uzaylarına yönlendiren, tezin hazırlanması ve yazılması sırasında yardımlarını ve değerli zamanını esirgemeyen, araştırma süresi boyunca bilgi ve deneyimlerini paylaşarak değerli görüş ve önerileriyle bana yol gösteren hocalarım danışman hocam Sayın Doç. Dr. Tülin COŞKUN'a, Sayın Prof. Dr. Erdal COŞKUN'a, çalışmalarım boyunca ve tezin yazımı, düzeltilmesi sırasında büyük emeği geçen yakın ilgisi ve sevgisiyle bana destek olan Yrd. Doç. Dr. Nazmiye GÖNÜL'e, çalışmalarımın her anında yanımda olup, desteklerini asla esirgemeyen biricik aileme, kardeşlerim Zafer DERİN ve Abdurrahman DERİN'e, bana güç veren Abdul Bari YAQUB'a, çalışmalarımız boyunca yardımını esirgemeyen arkadaşım Melih ÇINAR'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
KABUL	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vii
İÇİNDEKİLER.....	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	xiii
BÖLÜM 1 GİRİŞ	1
1.1 FUZZY KÜMELER HAKKINDA TEMEL KAVRAMLAR	2
1.2 FUZZY KÜMELERDE CEBİRSEL ÖZELLİKLER.....	6
BÖLÜM 2 FUZZY NORMLU LİNEER UZAYLAR.....	15
2.1 KATSARAS ANLAMINDA FUZZY NORMLU UZAY.....	15
2.2 FELBİN ANLAMINDA FUZZY NORMLU UZAY.....	18
2.3 BAG VE SAMANTA ANLAMINDA FUZZY NORMLU UZAY.....	21
2.4 SAADATİ VAEZPOUR ANLAMINDA FUZZY NORMLU UZAY.....	56
BÖLÜM 3 BİR LİNEER UZAYDAKİ FUZZY NORMLARIN KARŞILAŞTIRILMASI... 61	

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

Sayfa

3.1 B-S FUZZY NORM VE B-S FUZZY TERS NORMUN BAZI ÖZELLİKLERİ.....	62
3.2 FELBİN FUZZY NORM VE B-S FUZZY NORMUN	66
KARŞILAŞTIRILMASI	
3.3 KATSARAS FUZY NORM VE B-S FUZZY NORMUN.....	75
KARŞILAŞTIRILMASI	
BÖLÜM 4 FUZZY NORMLU LİNEER UZAYLARDA LİNEER OPERATÖRLER.....	81
4.1 LİNEER OPERATÖRLER İLE İLGİLİ TEMEL ÖZELLİKLER.....	81
4.2 FUZZY SÜREKLİLİK, GÜÇLÜ SÜREKLİLİK VE DÜZGÜN SÜREKLİ.....	90
OPERATÖRLER	
GÖRÜŞ VE ÖNERİLER.....	97
KAYNAKLAR.....	99
ÖZGEÇMİŞ	101

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>No</u>	<u>Sayfa</u>
Şekil 1.1 Kesin Grafik	3
Şekil 1.2 Fuzzy (Bulanık) Grafik	3
Şekil 1.3 Her $x \in \mathbb{R}$ için $(\tilde{A}, \mu_{\tilde{A}}(x))$ fuzzy kümesi	4
Şekil 1.4 α – ve α' – kesimleri	8
Şekil 1.5 $\tilde{A}$ konveks fuzzy küme	9
Şekil 1.6 $\tilde{A}$ normal fuzzy küme	10
Şekil 1.7 $\tilde{x}$ negatif olmayan fuzzy sayısı	11

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

- $\mathbb{R}$: Gerçel sayıların cümlesi
 $\mathbb{N}$: Doğal sayıların cümlesi
 I^X : X üzerindeki bütün fuzzy kümelerin ailesi
 $\mathcal{F}(\mathbb{R})$: $\mathbb{R}$ üzerindeki bütün fuzzy kümelerin ailesi
 $[A]_\alpha$: A nın α kesimi
 $N(x, .)$: Bag- Samanta fuzzy norm

KISALTMALAR

- B-S : Bag- Samanta
 $N(x, .)$: Bag- Samanta Fuzzy Norm

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Fuzzy (bulanık) mantık ve ondan kaynaklanan sistemler ilk defa Azerbaycanlı Lütü Aliasker Zadeh tarafından 1965 yılında ortaya atılmıştır. O tarihten sonra önemi gittikçe artarak günümüze gelen fuzzy (bulanık) mantık, belirsizliklerin anlatımı ve belirsizliklerle çalışılabilmesi için kurulmuş bir matematik düzen olarak tanımlanabilir.

Fuzzy mantığın temeli fuzzy küme ve alt kümelere dayanır. Klasik yaklaşımda bir nesne ya kümenin elemanıdır ya da değildir. Matematiksel olarak ifade edildiğinde nesne küme ile olan üyelik ilişkisi bakımından kümenin elemanı olduğunda 1, kümenin elemanı olmadığı durumda 0 değerini alır. Fuzzy kümesinde her bir nesnenin üyelik derecesi vardır. Nesnelerin üyelik derecesi $[0,1]$ aralığında herhangi bir değer olabilir. Fuzzy küme yaklaşımında üyelik dereceleri $[0,1]$ aralığında sonsuz sayıda değişebilir.

Bu çalışmada;

İlk olarak karakteristik fonksiyon, fuzzy küme tanımı, fuzzy küme gibi temel kavramlar ve bu kavramların bazı özellikleri verilmiştir.

İkinci bölümde Katsaras, Felbin, T. Bag. Samanta ve Saadati Vaezpour tarafından literatürde tanımlanan farklı fuzzy norm tanımları örnekler ve özellikler verildi.

Üçüncü bölümde ise, T. Bag. Samanta' nın Fuzzy Norm karşılaştırmaları makalesinden yararlanılarak ilk olarak Fuzzy anti norm tanım ve örnekleri ardından Felbin-T. Bag Samanta, Katsaras-T. Bag and Samanta fuzzy norm karşılaştırmalarına yer verildi.

Daha sonra T. Bag and Samanta' nın makalesinden yararlanılarak fuzzy yakınsaklık tanımları ve örnekleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise, Fuzzy normlu lineer uzaylarda lineer operatörlere yer verilmiştir. Fuzzy sürekli, güçlü sürekli ve düzgün sürekli operatörler ile ilgili tanım, örnek ve teoremler verilmiştir.

Son bölümde, çalışma ile ilgili önerilere yer verilmiştir.

1.1 FUZZY KÜMELER HAKKINDA TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezde kullanılacak temel tanım ve teoremlere yer verilecektir.

Tanım 1.1.1

X herhangi bir küme olmak üzere $A \subset X$ olsun.

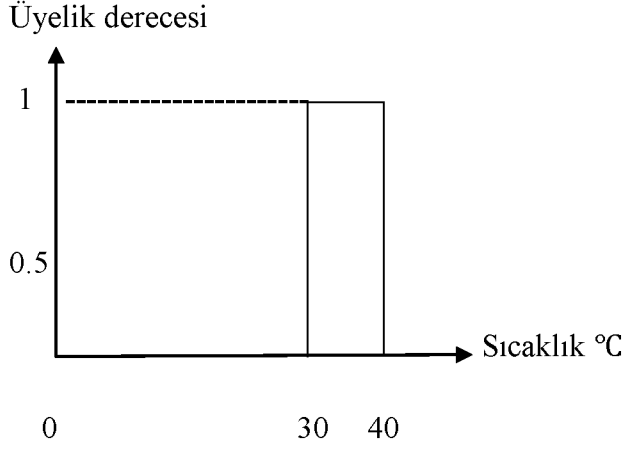
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in A \\ 0 & , \quad x \notin A \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $\chi_A: X \rightarrow [0,1]$ fonksiyonuna A kümesinin *karakteristik fonksiyonu* denir.

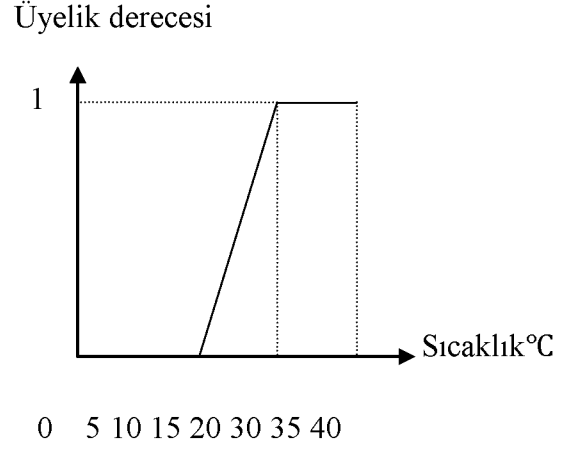
Karakteristik fonksiyonun tanımından X uzayının elemanlarının ya A alt kümesinin elemanı olduğunu ya da elemanı olmadığını görürüz. Yani X uzayının elemanları kesin olarak ya A alt kümesinin elemanıdır ya da elemanı değildir.

Çoğu kez reel uzayda karşılaşılan nesnelerin sınıfı için karakteristik kriteri kesin olarak belirlenemez. Örneğin, kesin küme teorisine göre 32 °C’ de hava sıcak, 31°C’ de sıcak sayılmamaktadır. Fakat bu durum değişik kişiler tarafından değişik şekillerde yorumlanabilir. Bir kişiye göre hava sıcak bir diğer kişiye göre hava biraz sıcak, daha sıcak ya da çok sıcak olabilir. Dolayısıyla biraz sıcak kavramı matematiksel anlamdaki kümeleri oluşturmaz. İşte bu şekilde kesin olarak ifade edilemeyen kümelerin varlığından *Fuzzy küme* kavramı doğmuştur.

1.1.1 de tanımlanmış olan karakteristik fonksiyon bu şekilde belirtilen kümeleri karakterize etmek için kullanılamaz. 25°C klasik küme kavramına göre sıcak sayılmıyor fakat fuzzy küme kavramına göre bu değer sıcaklık kümesine üyeliği 0.5 diyebiliriz. Yani 25°C tam sıcak değil ama soğukta değildir.



Şekil 1.1 Kesin Grafik



Şekil 1.2 Fuzzy (Bulanık) Grafik

Böylece bu şekildeki kümeler için X uzayının herhangi bir elemanının bu kümeye ait olmasını başka formda derecelendirmek gerekir. Bu durumda kesin kümelerden farklı olarak, elemanın kümeye ait olması kesin olmayıp herhangi bir olasılıkla verilmesi gerekir.

Buna göre *fuzzy kümeyi* aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz.

Tanım 1.1.2

X herhangi bir küme ve $I = [0,1]$ olmak üzere $\mu_{\tilde{A}}: X \rightarrow I$ üyelik fonksiyonu ile karakterize edilen $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) : x \in X\}$ kümesine X ' in bir *fuzzy kümesi* denir.

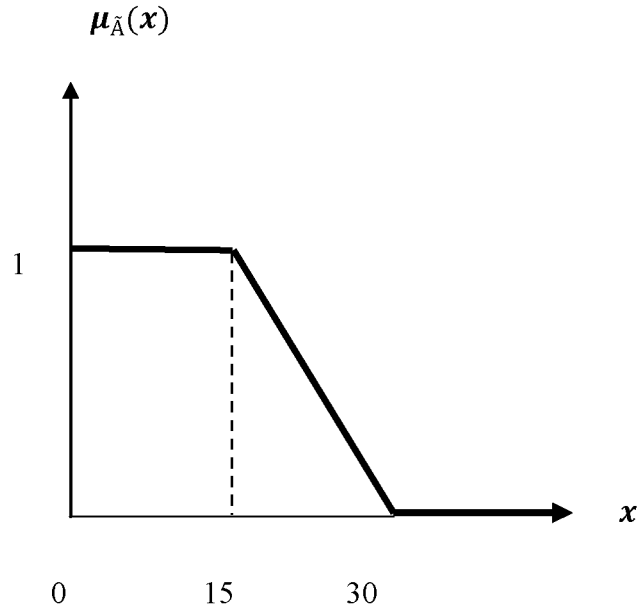
Burada $\mu_{\tilde{A}}$ ya $\tilde{A}$ fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu, her $x \in X$ için $\mu_{\tilde{A}}(x) \in I$ değeri de, x 'in $\tilde{A}$ fuzzy kümesine üyelik derecesidir denir. X 'den $[0,1]$ 'e tanımlı tüm fuzzy kümelerin ailesi I^X ile gösterilecektir.

Örnek 1.1.3

Üyelik fonksiyonu,

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq x \leq 15 \\ (30 - x)/15 & , \quad 15 < x < 30 \\ 0 & , \quad x \geq 30 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $\mu_{\tilde{A}}: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ ile karakterize edilen $\tilde{A} \subset \mathbb{R}$ kümesi bir fuzzy kümedir.



Şekil 1.3 Her $x \in \mathbb{R}$ için $(\tilde{A}, \mu_{\tilde{A}}(x))$ fuzzy kümesi

Tanım 1.1.4

X herhangi bir küme olsun. $\mu_X: X \rightarrow [0,1]$ üyelik fonksiyonu her $x \in X$ için 1 değerini alırsa, fuzzy kümesi;

$$\tilde{X} = \{ (x, 1) : x \in X \}$$

şeklinde tanımlanır.

Benzer olarak $\mu_{\tilde{\emptyset}}: X \rightarrow [0,1]$, her $x \in X$ için $\mu_{\tilde{\emptyset}}(x) = 0$ ise $\tilde{\emptyset}$ fuzzy kümesi

$$\tilde{\emptyset} = \{ (x, 0) : x \in X \}$$

şeklinde tanımlıdır (Zadeh 1965).

Tanım 1.1.5

X herhangi bir küme ve $\mu_{\tilde{A}}: X \rightarrow [0,1]$, $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere her $x \in X$ için $\mu_{\tilde{A}}(x) = \alpha$ olsun. Bu durumda $\tilde{A}$ fuzzy kümesine *sabit fuzzy küme* denir (Zadeh 1965).

Tanım 1.1.6

X herhangi bir küme $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$, X ' de iki fuzzy küme olsun. Bu durumda

1. Her $x \in X$ için $\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x)$ oluyor ise $\tilde{A}$ fuzzy kümesi $\tilde{B}$ fuzzy kümesinin alt kümesidir denir ve $\tilde{A} \subset \tilde{B}$ ile gösterilir.

2. Her $x \in X$ için $\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x)$ ise $\tilde{A}$ fuzzy kümesi $\tilde{B}$ fuzzy kümesine eşittir denir ve $\tilde{A} = \tilde{B}$ ile gösterilir.

3. Her $x \in X$ için $1 - \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{A}^c}$ ile karakterize edilen fuzzy kümeye $\tilde{A}$ *fuzzy kümesinin tümleyeni* denir ve $\tilde{A}^c$ ile gösterilir.

4. Her $x \in X$ için $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ herhangi iki fuzzy küme olmak üzere bu *fuzzy kümelerinin birleşimi* bir fuzzy kümedir ve birleşim kümesinin üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\tilde{C} = \tilde{A} \cup \tilde{B} \Leftrightarrow \text{Her } x \in X \text{ için } \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\} = \mu_{\tilde{A}}(x) \vee \mu_{\tilde{B}}(x)$$

$\tilde{A} \cup \tilde{B}$ fuzzy kümesi $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ yi kapsayan en küçük fuzzy kümedir.

5. Her $x \in X$ için $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ herhangi iki fuzzy küme olmak üzere bu *fuzzy kümelerinin kesişimi* bir fuzzy kümedir ve kesişim kümesinin üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\tilde{D} = \tilde{A} \cap \tilde{B} \Leftrightarrow \text{Her } x \in X \text{ için } \mu_{\tilde{D}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\} = \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x)$$

$\tilde{A} \cap \tilde{B}$ fuzzy kümesi $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ fuzzy kümelerinde kapsanan en büyük fuzzy kümedir.

(Zadeh 1965)

Fuzzy kümelerde birleşim, kesişim ve tümlemenin bazı özellikleri verilecektir.

1) Fuzzy kümelerde birleşim ve kesişimin komütatif (değişme) özelliği vardır. $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ herhangi iki fuzzy küme ise üyelik fonksiyonları $\mu_{\tilde{A}}(x)$ ve $\mu_{\tilde{B}}(x)$ mevcuttur,

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \vee \mu_{\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x) \vee \mu_{\tilde{A}}(x)$$

dir. Benzer olarak,

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x) \wedge \mu_{\tilde{A}}(x).$$

2) Fuzzy kümelerde birleşim ve kesişimin asosyatif (bileşim) özelliği vardır. $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ herhangi fuzzy kümeler ve $\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x), \mu_{\tilde{C}}(x)$ ise üyelik fonksiyonları olmak üzere;

$$[\mu_{\tilde{A}}(x) \vee \mu_{\tilde{B}}(x)] \vee \mu_{\tilde{C}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \vee [\mu_{\tilde{B}}(x) \vee \mu_{\tilde{C}}(x)]$$

dir. Kesişim için de;

$$[\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x)] \wedge \mu_{\tilde{C}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge [\mu_{\tilde{B}}(x) \wedge \mu_{\tilde{C}}(x)]$$

1.2 FUZZY KÜMELERDE CEBİRSEL ÖZELLİKLER

1) $\tilde{A}, \tilde{B}$ fuzzy kümeler olmak üzere $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ 'nin cebirsel çarpımı ; $\tilde{A}\tilde{B}$ ile gösterilir ve üyelik fonksiyonu, her $x \in X$ için,

$$\mu_{\tilde{A}\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)$$

biçiminde tanımlanır.

$0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x) \leq 1$ ve $0 \leq \mu_{\tilde{B}}(x) \leq 1$ olduğundan

$$\mu_{\tilde{A}\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x) \leq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}$$

dir. $\tilde{A}\tilde{B} \subset \tilde{A} \cap \tilde{B}$ olur.

2) $\tilde{A}, \tilde{B}$ fuzzy kümeler olmak üzere $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ 'nin cebirsel toplamı $\tilde{A} + \tilde{B}$ ile gösterilir ve üyelik fonksiyonu, her $x \in X$ için

$$\mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x)$$

şeklindedir. Cebirsel toplamın olması için $\mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) \leq 1$ koşulunun olması gereklidir.

Tanım 1.2.1

X boştan farklı herhangi bir küme ve $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere X 'deki bir $\tilde{A}$ fuzzy kümesinin, $\mu_{\tilde{A}}: X \rightarrow I$ üyelik fonksiyonu;

$$\mu_{\tilde{A}}(t) = \begin{cases} \alpha & , \quad t = x \\ 0 & , \quad t \neq x \end{cases}$$

şeklinde tanımlı ise $\tilde{A}$ fuzzy kümesine X 'de bir *fuzzy nokta* denir. Burada x noktasına *fuzzy noktasının dayanağı*, α sayısına da *fuzzy noktasının değeri* denir.

Tanım 1.2.2

Klasik küme teorisinde $A \subset \mathbb{R}$ kümesinin konveks olması için her $x_1, x_2 \in A$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in A$ ise A kümesine *konvektir (dışbükey)* denir.

Uyarı 1.2.3

- i) Boş küme konvektir.
- ii) Tek elemanlı küme konvektir.
- iii) Doğru parçası konvektir.
- iv) $\mathbb{R}$ 'nin konveks alt kümeleri aralıklardır.
- v) Bir Öklid uzayında tüm kapalı ve açık yuvarlar konvektir.

Tanım 1.2.4 (Konveks Fonksiyon)

A kümesi $\mathbb{R}$ de konveks bir küme, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun A kümesi üzerinde konveks olması için gerek ve yeter şart her $x_1, x_2 \in A$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$ olmasıdır. Tanım kümesi konveks olmadıkça konveks fonksiyonlardan bahsedilemez.

Teorem 1.2.5

f_1, f_2 konveks fonksiyonlar c_1, c_2 negatif olmayan sayılar olmak üzere $f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ de konveks fonksiyondur.

Kanıt

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve A kümesi $\mathbb{R}^n$ de konveks bir kümedir. Her $x_1, x_2 \in A$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere $x_\lambda = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in A$ dir.

$$f(x_\lambda) = c_1 f_1(x_\lambda) + c_2 f_2(x_\lambda)$$

Buradan $x_\lambda = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ ifadesi eşitlikte yerine yazılırsa,

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = c_1 f_1(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) + c_2 f_2(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)$$

elde edilir. f_1, f_2 konveks fonksiyonlar olduğundan

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) &= c_1 f_1(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) + c_2 f_2(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \\ &\leq c_1 \lambda f_1(x_1) + c_1 (1 - \lambda) f_1(x_2) + c_2 \lambda f_2(x_1) + c_2 (1 - \lambda) f_2(x_2) \end{aligned}$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) &\leq \lambda (c_1 f_1(x_1) + c_2 f_2(x_1)) + (1 - \lambda) (c_1 f_1(x_2) + c_2 f_2(x_2)) \\ f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) &\leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2) \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 1.2.6 (Konkav Fonksiyon)

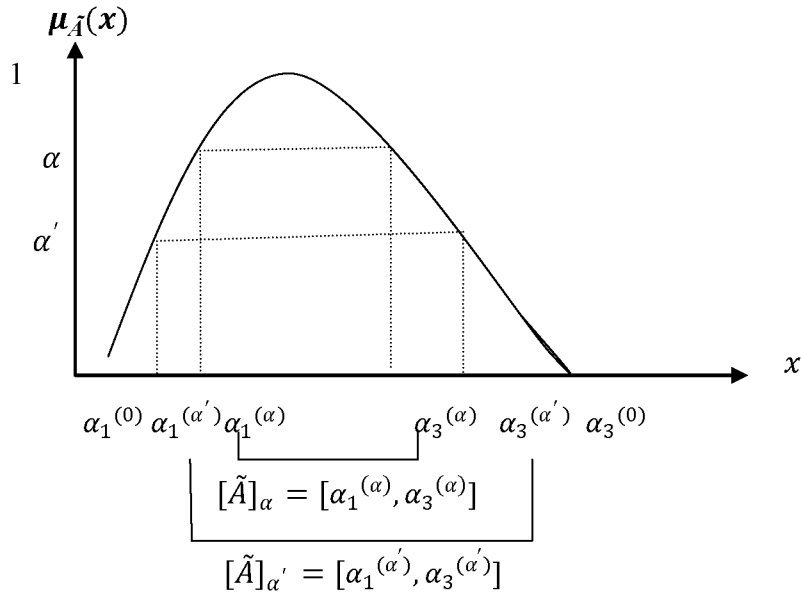
Her $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere,

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2)$$

şartını sağlayan $f(x)$ fonksiyonuna ***konkav (içbükey)*** denir.

Tanım 1.2.7

$\tilde{A}$, $\mathbb{R}$ ' nin bir fuzzy kümesi olsun. $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere $[\tilde{A}]_\alpha$ ile gösterilen $\{x: \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$ kümesine $\tilde{A}$ fuzzy kümesinin ***α -kesim kümesi*** denir.



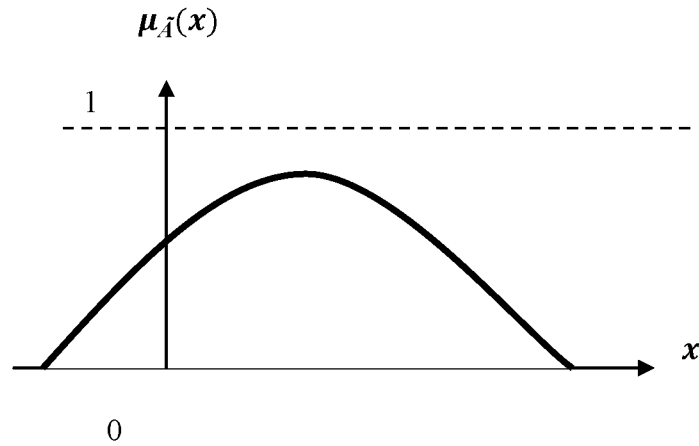
Şekil 1.4 α – ve α' – kesimleri

Tanım 1.2.8 (Konvekslik)

Her $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ve her $\lambda \in [0,1]$ için

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}$$

eşitsizliğini sağlayan $\mu_{\tilde{A}}$ konveks fonksiyonu ile belirli $\tilde{A}$ fuzzy kümesine **konvektir** denir.



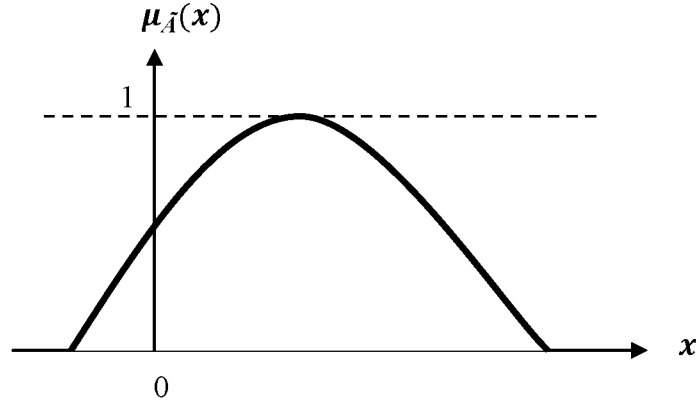
Şekil 1.5 $\tilde{A}$ konveks fuzzy küme

Konveks fuzzy küme tanımı aşağıdaki gibi de verilebilir.

X herhangi bir küme $\tilde{A}$ X de bir fuzzy küme olsun. Bu durumda her $\alpha \in [0,1]$ için $[x]_{\alpha}$ α –kesim kümesi konveks (klasik) ise $\tilde{A}$ fuzzy kümesine **konvektir** denir.

Tanım 1.2.9 (Normallik)

$\tilde{A}$ bir fuzzy kümesi olsun. En az bir $x_0 \in \mathbb{R}$ için $\mu_{\tilde{A}}(x_0) = 1$ oluyorsa $\tilde{A}$ fuzzy kümesine **normaldir** denir.



Şekil 1.6 $\tilde{A}$ normal fuzzy küme

Tanım 1.2.10 (Üst Yarı Süreklilik)

$\tilde{A}$, $\mathbb{R}$ 'nin bir fuzzy alt kümesi olsun. Her $t \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon > 0$ için $\mu_{\tilde{A}}(t) = q$ ve $|s - t| < c = c(t)$ için $\mu_{\tilde{A}}(s) < q + \varepsilon$ olacak şekilde bir $c > 0$ varsa $\mu_{\tilde{A}}$ ile belirli $\tilde{A}$ fuzzy kümesine **üstten yarı süreklidir** denir.

Bu tanıma denk olarak şu tanım da verilebilir;

Her $t \in [0,1]$ için $\{x: \mu_{\tilde{A}}(x) < t\}$ kümesi açık ise $\mu_{\tilde{A}}$ ile belirli $\tilde{A}$ fuzzy kümesine **üst yarı süreklidir** denir.

Tanım 1.2.11 (Fuzzy sayı)

$\tilde{A}$, $\mathbb{R}$ 'nin bir fuzzy kümesi ve $\mu_{\tilde{A}}$, $\tilde{A}$ nin üyelik fonksiyonu olsun.

- i) $\tilde{A}$ fuzzy kümesi normaldir.
- ii) $\tilde{A}$ fuzzy kümesi konvektir.
- iii) $\tilde{A}$ fuzzy kümesi üst yarı süreklidir.
- iv) $[\tilde{A}]_0 = \{t \in \mathbb{R}: \mu_{\tilde{A}}(t) > 0\}$ kümesi kompaktır.

özelliklerini sağlayan $\tilde{A}$ fuzzy kümesine bir *fuzzy sayı* denir.

Tüm fuzzy sayıların ailesi $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ ile gösterilecektir. Tezin bundan sonraki bölümünde fuzzy sayılar $\tilde{A}$ yerine $\bar{x}$ ile gösterilecektir.

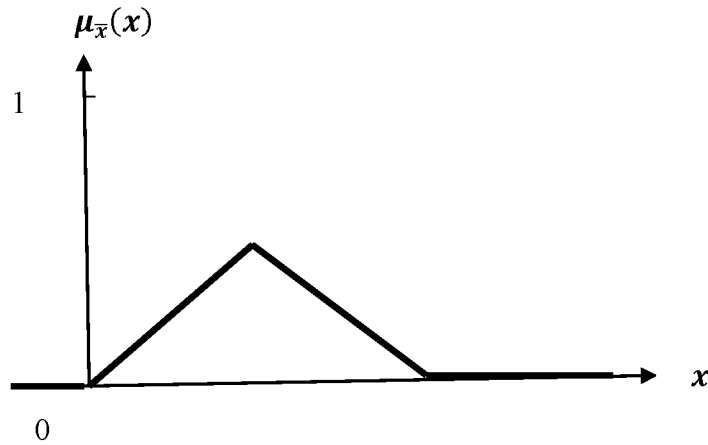
Uyarı 1.2.12

$\alpha \in [0,1]$ için fuzzy sayıların α –kesim kümeleri kapalı aralıklardır. Yani $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere üstten yarı sürekli, konveks ve normal fuzzy kümelerinin α –kesim kümesi kapalı bir aralıktır. Bu aralıklar için $[a^\alpha, b^\alpha]$ gösterimi kullanılacaktır.

Tanım 1.2.13

$\bar{x}$ bir fuzzy sayısı olmak üzere her $t < 0$ için $\mu_{\bar{x}}(t) = 0$ oluyorsa $\bar{x}$ *negatif olmayan fuzzy sayısı* denir.

Tüm negatif olmayan fuzzy sayıların ailesi $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$ ile gösterilecektir.



Şekil 1.7 $\bar{x}$ negatif olmayan fuzzy sayısı

Örnek 1.2.14

$\bar{3} : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ ’ e tanımlı olsun.

$$\mu_{\bar{3}}(t) = \begin{cases} 1 & , \quad t = 3 \\ 0 & , \quad t \neq 3 \end{cases}$$

$\bar{3}$ ile belirli fuzzy kümesi bir fuzzy sayıdır.

Çözüm

i) $\bar{3}$ normaldir. Yani en az bir $t_0 \in \mathbb{R}$ için $\mu_{\bar{3}}(t_0) = 1$ olmalıdır.

Açıkça $t_0 = 3$ için $\mu_{\bar{3}}(3) = 1$ dir.

ii) $\bar{3}$ konvektir. Her $x, y \in \mathbb{R}$ ve $\lambda \in [0,1]$ için,

$$\mu_{\bar{3}}(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min \{\mu_{\bar{3}}(x), \mu_{\bar{3}}(y)\}$$

olduğu gösterilecektir. Genelliği bozmadan,

$$\min \{\mu_{\bar{3}}(x), \mu_{\bar{3}}(y)\} = \mu_{\bar{3}}(x)$$

olsun. Yani $\mu_{\bar{3}}(x) \leq \mu_{\bar{3}}(y)$ dir. Bu durumda;

a) $x = 3, y = 3$ ise;

$$\mu_{\bar{3}}(x) \leq \mu_{\bar{3}}(y) \text{ olduğundan } 1 = \mu_{\bar{3}}(3) \leq \mu_{\bar{3}}(y) = 1.$$

Bu durumda eşitsizlik sağlanır.

$$\mu_{\bar{3}}(\lambda 3 + (1 - \lambda)3) = 1$$

dir.

b) $x \neq 3, y = 3$ ise;

$$\mu_{\bar{3}}(x) = 0 \text{ ve } \mu_{\bar{3}}(y) = 1 \text{ olduğundan } \mu_{\bar{3}}(x) \leq \mu_{\bar{3}}(y) \text{ dir. Buradan } \mu_{\bar{3}}(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq 0.$$

c) $x \neq 3$ ve $y \neq 3$ ise;

$$\mu_{\bar{3}}(\lambda x + (1 - \lambda)y) = 0.$$

$x = 3$ ise $\mu_{\bar{3}}(x) \leq \mu_{\bar{3}}(y)$ olduğundan $y \neq 3$ olma durumu söz konusu değildir. Benzer şekilde $\mu_{\bar{3}}(y) \leq \mu_{\bar{3}}(x)$ için de yapılabilir.

Bu durumda konvekslik şartı sağlanır.

iii) $\bar{3}$ üst yarı süreklidir. Çünkü her $\alpha \in [0,1]$ için

$$\mu_{\bar{3}}^{-1}(-\infty, \alpha) = \{x \in \mathbb{R} : \mu_{\bar{3}}(x) < \alpha\}$$

$\mathbb{R}$ de alışılmış topolojiye göre açıktır.

- 1) $x = 3$ ise $\mu_3(x) = 1 < \alpha$, $\mu_3^{-1}(-\infty, \alpha) = \emptyset$
- 2) $x \neq 3$ ise $\mu_3(x) = 0 < \alpha$, $\mu_3^{-1}(-\infty, \alpha) = \mathbb{R}/\{3\}$

dir.

Gösterim 1.2.15

$\alpha \in [0,1]$ olmak üzere $[\tilde{A}]_\alpha = [a_\alpha^1, b_\alpha^1]$ ve $[\tilde{B}]_\alpha = [a_\alpha^2, b_\alpha^2]$ olsun. " $\lesssim$ " kısmi sıralama bağıntısını göstermek üzere bu durumda $a_\alpha^1 \leq a_\alpha^2$ ve $b_\alpha^1 \leq b_\alpha^2$ eşitsizlikleri sağlanıyorsa kısmi sıralama bağıntısı olmak üzere $\tilde{A} \lesssim \tilde{B}$ gösterimi kullanılır.

Her $k > 0$ için kx ;

$(kx)(t) = x(\frac{t}{k})$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.2.16

ii) $\{\alpha_k\}$, $]0,1[$ de α' ya yakınsayan artan bir dizi olsun. $[a_\alpha, b_\alpha]$ ailesi için

$$\left[\lim_{k \rightarrow \infty} a_{\alpha_k}, \lim_{k \rightarrow \infty} b_{\alpha_k} \right] = [a_\alpha, b_\alpha]$$

eşitliği sağlanıyorsa bu durumda $[a_{\alpha_k}, b_{\alpha_k}]$ dizisi $[a_\alpha, b_\alpha]$ ya yakınsar denir.

Uyarı 1.2.17

$\alpha \in]0,1[$ ve $[a_\alpha, b_\alpha]$ boştan farklı bir aralıklar ailesi olsun. Bu durumda her $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2$ için,

$$[a_{\alpha_1}, b_{\alpha_1}] \supseteq [a_{\alpha_2}, b_{\alpha_2}]$$

kapsaması geçerlidir.

Tanım 1.2.18

Her $\alpha \in]0,1]$ için $[\bar{x}]_\alpha = [a_\alpha, b_\alpha]$ ve $[\bar{x}_k]_\alpha = [a_{k,\alpha}, b_{k,\alpha}]$ olsun.

$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{k,\alpha} = a_\alpha$ ve $\lim_{k \rightarrow \infty} b_{k,\alpha} = b_\alpha$ oluyorsa $\{x_k\}$, $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ de x 'e yakınsar denir. Bu yakınsamaya **α -kesim yakınsaklık** da denir.

Önerme 1.2.19

$f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. O halde X deki bir x_α fuzzy noktası için $f(x_\alpha)$, Y 'de bir fuzzy noktadır ve $f(x_\alpha) = f(x)_\alpha$ dır.

Tanım 1.2.20

X , $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzay ve $\tilde{A}$, X ' de bir fuzzy kümesi olsun. Her $x, y \in X$ ve $\lambda \in \mathbb{K}$ için üyelik fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlayan sağlayan $\tilde{A}$ ya X in bir **fuzzy alt uzayı** denir.

$$(i) \mu_{\tilde{A}}(x + y) \geq \wedge \{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(y)\}$$

$$(ii) \mu_{\tilde{A}}(\lambda x) \geq \lambda \mu_{\tilde{A}}(x)$$

BÖLÜM 2

FUZZY NORMLU LİNER UZAYLAR

Bu bölümde literatürde tanımlanmış fuzzy normlu uzay tanımlarından Katsaras, Felbin, T.Bag Samanta, Saadati Vaezpour , Jihad R. Kider'in yaptığı tanımlara yer verilmiştir. Bu tanımlar kullanılarak fuzzy norm örnekleri ve bazı temel teoremler kanıtlanmıştır.

2.1 KATSARAS ANLAMINDA FUZZY NORMLU UZAY TANIMI

Tanım 2.1.1

Bir X lineer uzayı üzerinde $\tilde{A}, \tilde{B}$ iki fuzzy küme ve μ, v sırasıyla bu kümelerin üyelik fonksiyonları olsun. $\mu + v$ ve $t\mu$ üyelik fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$(i) (\mu + v)(x) = \bigvee_{x=x_1+x_2} \{ \mu(x_1) \wedge v(x_2) \}$$

$$(ii) (t\mu)(x) = \begin{cases} \mu\left(\frac{x}{t}\right) & , \quad t \neq 0 \\ 0 & , \quad t = 0, x \neq 0 \\ \bigvee_{y \in X} \mu(y) & , \quad t = 0, x = 0 \end{cases}$$

(Katsaras 1984).

Tanım 2.1.2

X bir lineer uzay olsun. $\tilde{A}$, X de bir fuzzy küme olsun $\mu: X \rightarrow [0,1]$ $\tilde{A}$ nın üyelik fonksiyonu olmak üzere;

(i) Her $t \in [0,1]$ için $t\mu(x) + (1-t)\mu(x) \leq \mu(x)$ ise $\tilde{A}$ ya **konvektir** denir.

(ii) Her t skaleri için $|t| \leq 1$ olmak üzere $t\mu(x) \leq \mu(x)$ ise $\tilde{A}$ ya **dengelidir** denir.

(iii) $\tilde{A}$ konveks ve dengeli ise $\tilde{A}$, **mutlak konvektir** denir.

(iv) $\max_{t>0} t\mu(x) = 1$ ise $\tilde{A}$, **yutandır** denir. (Katsaras 1984)

Tanım 2.1.3

X deki bir $\tilde{A}$ fuzzy kümesinin mutlak konveks ve yutan özelliklerini sağlayan μ üyelik fonksiyonuna X lineer uzayında bir fuzzy yarı normdur denir. Ayrıca $x \neq \underline{0}$ için $\bigwedge_{t>0} (t\mu)(x) = 0$ özelliği de sağlanıyorsa μ ' ye **Katsaras-fuzzy norm** denir. (Katsaras 1984)

Örnek 2.1.4

X bir lineer uzay ve aşağıdaki şekilde tanımlı $N: X \times \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu $x \neq 0$ için $t = 0$ da üst yarı sürekli ise bu durumda $\mu: X \rightarrow [0,1]$ ' e tanımlı fonksiyonu her $x \in X$ için $\mu(x) = N(x, 1)$ olarak tanımlanırsa μ fonksiyonu bir **Katsaras-fuzzy norm** olur.

Her $x, y \in X$ ve $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $s, t \in \mathbb{R}$ için,

(N₁) Her $t \leq 0$, $N(x, t) = 0$

(N₂) $x = 0$ ancak ve ancak her $t > 0$ için $N(x, t) = 1$

(N₃) $N(cx, t) = N(x, \frac{t}{|c|})$

(N₄) $N(x + y, s + t) \geq \min\{N(x, s), N(y, t)\}$

(N₅) $N(x, \cdot)$ $\mathbb{R}$ ' de azalmayan bir fonksiyon ve $\lim_{t \rightarrow \infty} N(x, t) = 1$

özellikleri sağlansın.

Kanıt

$t, t\mu$ skalerleri için, $t\mu(x)$;

$$(t\mu)(x) = \begin{cases} \mu\left(\frac{x}{t}\right) & , \quad t \neq 0 \\ 0 & , \quad t = 0, x \neq \underline{0} \\ \bigvee_{y \in X} \mu(y) & , \quad t = 0, x = \underline{0} \end{cases}$$

ile tanımlanırsa X 'in μ_1 ve μ_2 iki fuzzy altkümesi için,

$(\mu_1 + \mu_2)(x) = \sup_{x=x_1+x_2} \min\{\mu_1(x_1), \mu_2(x_2)\}$ tanımlıdır. (N2) koşulundan $\mu(\underline{0}) = N(\underline{0}, 1) = 1$ dir.

iv) $\forall_{t>0} t\mu(x) = \forall_{t>0} \mu\left(\frac{x}{t}\right) = \forall_{t>0} N\left(\frac{x}{t}, 1\right) = \forall_{t>0} N(x, t) = 1$ ((N5) den)

v) $x \neq 0$ için $N(x, \cdot)$, $t = 0$ da üst yarı sürekli olduğundan,

$x \neq 0$ için $\bigwedge_{t>0} t\mu(x) = \bigwedge_{t>0} N(x, t) = 0$ dır.

ii) Şimdi $|t| \leq 1$ iken $t\mu \leq \mu$ olduğu gösterilecektir.

$-1 \leq t < 0$ için $t\mu(x) \leq \mu\left(\frac{x}{t}\right) = N\left(\frac{x}{t}, 1\right) = N(x, |t|) \leq N(x, 1) = \mu(x)$

$t = 0, x \neq \underline{0}$ için $t\mu$ nun tanımından $t\mu(x) = 0$ dır. Yani $t\mu(x) \leq \mu(x)$ dır.

$t = 0, x = \underline{0}$ için $t\mu = \bigvee_{y \in U} \mu(y) \leq 1 = N(\underline{0}, 1) = \mu(x)$.

$0 < t \leq 1$ için $t\mu(x) = N(x, t) \leq N(x, 1) = \mu(x)$.

Böylece $|t| \leq 1$, her $x \in X$ için $t\mu(x) \leq \mu(x)$.

i) Şimdi her $t \in [0, 1]$ için, $t\mu + (1 - t)\mu \leq \mu$ olduğu gösterilecektir.

$[t\mu + (1 - t)\mu](x) = \bigvee_{u+v=x} \{(t\mu)(u) \wedge (1 - t)\mu(v)\}$

Eğer $t = 0, u \neq 0$ ise bu durumda $(t\mu)(u) = 0$ dır.

Böylece $(t\mu)(u) \wedge (1 - t)\mu(v) = 0 \leq \mu(x)$ dır.

Eğer $t = 0, u = \underline{0}$ ise $(t\mu)(u) \leq 1$ dir. Bu nedenle ;

$(t\mu)(u) \wedge (1 - t)\mu(v) \leq 1 \wedge \mu(v) = \mu(v) = \mu(x)$, burada $u + v = x$, $u = \underline{0}$ dir.

Böylece $t=0$ için,

$\bigvee_{u+v=x} \{(t\mu)(u) \wedge (1 - t)\mu(v)\} \leq \mu(x)$ dir.

Benzer şekilde $t = 1$ için bu geçerlidir.

$0 < t < 1$ ise bu durumda,

$$\begin{aligned}
[t\mu + (1-t)\mu](x) &= \bigvee_{u+v=x} \{(t\mu)(u) \wedge (1-t)\mu(v)\} \\
&= \bigvee_{u+v=x} \{N(u, t) \wedge N(v, 1-t)\} \leq \bigvee_{u+v=x} \{N(u+v, 1)\} = N(x, 1) = \mu(x)
\end{aligned}$$

iii) i ve ii den mutlak konvektir.

Bu durumda her $t \in [0,1]$, $t\mu + (1-t)\mu \leq \mu$.

Dolayısıyla üst yarı sürekli $N(x, 1)$ e eşit olan μ fonksiyonu ***Katsaras anlamında fuzzy normdur.***

2.2 FELBİN ANLAMINDA FUZZY NORMLU UZAY

Tanım 2.2.1

X , $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzay olsun. $L, R: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$, $L(0,0) = 0$, $R(1,1) = 1$ koşullarını sağlayan simetrik azalmayan dönüşümler olsun. Her $x \in X$ ve $0 < \alpha_0 \leq 1$ koşulunu sağlayan uygun her $\alpha < \alpha_0$ için;

A) $\|x\|_{\alpha}^{+} < \infty$

B) $\inf \|x\|_{\alpha}^{-} > 0$

koşulları sağlanmak üzere $[\|x\|]_{\alpha} = [\|x\|_{\alpha}^{-}, \|x\|_{\alpha}^{+}]$ olsun. Bu durumda

$$\bar{0}(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

olmak üzere,

i) $\|x\| = \bar{0} \Leftrightarrow x = \underline{0}$

ii) $x \in X, r \in \mathbb{R}, \|rx\| = \|x\||r|, x, y \in X, s, t \in \mathbb{R}$ için,

iii) $\forall x, y \in X$ ve $s, t \in \mathbb{R}$ için $L(x, y) = \min\{x, y\}$ ve $R(x, y) = \max\{x, y\}$ olmak üzere,

1) $s \leq \|x\|_{\alpha}^{-}, t \leq \|x\|_{\alpha}^{-} s + t \leq \|x + y\|_{\alpha}^{-}$

$$\|x + y\| (s + t) \geq L(\|x\|(s), \|y\|(t))$$

ve

2) $s \geq \|x\|_{\alpha}^{-}, t \geq \|x\|_{\alpha}^{-} s + t \geq \|x + y\|_{\alpha}^{-}$ ise,

$$\|x + y\|(s + t) \leq R(\|x\|(s), \|y\|(t))$$

özelliklerini sağlayan $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ şeklinde tanımlı dönüşüme **fuzzy norm** ve $(X, \|\cdot\|, L, R)$ uzayına da **fuzzy normlu lineer uzay** denir (Felbin 1992).

Örnek 2.2.2

$X = \mathbb{R}^n$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ olsun. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ olmak üzere,

$$\|x\|(t) = \begin{cases} 1 & , \quad t = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $(X, \|\cdot\|)$ bir fuzzy normlu uzaydır.

Çözüm

Felbin tanımdaki şartların sağlandığı gösterilecektir.

i. $(\Rightarrow) x = \underline{0}$ olsun. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0)$ için tanım uygulanırsa

$$\|x\|(t) = \begin{cases} 1 & , \quad t = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \\ 0 & , \quad \text{diğer durumda} \end{cases} = \begin{cases} 1 & , \quad t = \sqrt{0^2 + 0^2 + \dots + 0^2} \\ 0 & , \quad t \neq 0 \end{cases}$$

olur. Buradan

$$\|x\|(t) = \begin{cases} 1 & , \quad t = 0 \\ 0 & , \quad t \neq 0 \end{cases}$$

olduğundan $\|x\|(t) = \bar{0}(t)$.

$(\Leftarrow)$ Diğer taraftan $\|x\|(t) = \bar{0}(t)$ olsun.

$$\|x\|(t) = \begin{cases} 1 & , \quad t = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \\ 0 & , \quad \text{diğer durumda} \end{cases}$$

$\|x\|(t) = 1$ ise $\bar{0}(t)$ nin tanımından $t = 0$ dır. Bu durumda $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = 0$ olur.

Yani $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0$ dır. Buradan $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ dır.

$t \neq 0$ ise; $\|x\|(t) = 0$ olacağından yine $\bar{0}(t)$ nin tanımından $t = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ eşitliği kullanılarak $x = 0 = (0, 0, \dots, 0)$ olur.

ii. $x \in X$ ve $r \in \mathbb{R}$ olsun.

$$|r|\|x\|(t) = \|x\|\left(\frac{t}{|r|}\right)$$

olduğundan,

$$\|x\|\left(\frac{t}{|r|}\right) = \begin{cases} 1, & \frac{t}{|r|} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

ve eşitliğine denk olan

$$\|x\|\left(\frac{t}{|r|}\right) = \begin{cases} 1, & t = \sqrt{r^2 x_1^2 + r^2 x_2^2 + \dots + r^2 x_n^2} \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

ifadesi kullanılırsa, açıkça

$$|r|\|x\|(t) = \|rx\|(t)$$

olur.

$$\text{iii. } \|x + y\|(s + t) \geq \min(\|x\|(s), \|y\|(t))$$

ve

$$\|x + y\|(s + t) \leq \max(\|x\|(s), \|y\|(t))$$

eşitsizlikleri gösterilmelidir. Bunun için

$$\|x\|(s) = \begin{cases} 1, & s = \sqrt{(x_1)^2 + \dots + (x_n)^2} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ve

$$\|x + y\|(s + t) = \begin{cases} 1, & s + t = \sqrt{(x_1 + y_1)^2 + \dots + (x_n + y_n)^2} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

eşitlikleri kullanılarak

$\|x + y\|(s + t) = 0$ ise, $s + t \neq \sqrt{(x_1 + y_1)^2 + \dots + (x_n + y_n)^2}$ olacaktır.

Bu durumda ya $s \neq \sqrt{(x_1)^2 + \dots + (x_n)^2}$ ya da $y \neq \sqrt{(y_1)^2 + \dots + (y_n)^2}$ dır.

Buradan ya $\|x\|(s) = 0$ ya da $\|y\|(t) = 0$ dır. O halde $\min(\|x\|(s), \|y\|(t)) = 0$ olur. Bu

ise eşitsizliğin sağlandığını gösterir. Dolayısıyla

$$\|x + y\|(s + t) \geq \min(\|x\|(s), \|y\|(t))$$

ve

$$\|x + y\|(s + t) \leq \max(\|x\|(s), \|y\|(t))$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Uyarı 2.2.3

$(x \oplus y)(t) = \sup_{s \in \mathbb{R}} \inf\{x(s), y(t - s)\}$ olmak üzere tanımda $L = \Lambda$ ($\inf$) ve $U = V$ ($\sup$)

dönüşümü olarak alınırsa tanımdaki üçgen eşitsizliği $\|x + y\| \leq \|x\| \oplus \|y\|$ halini alır. (Felbin 1992).

2.3 BAG VE SAMANTA ANLAMINDA FUZZY NORMLU UZAY

Tanım 2.3.1

X , $\mathbb{R}$ de lineer uzay olsun. $N: X \times \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu X üzerinde eğer aşağıdaki şartları sağlarsa N ' ye **Bag-Samanta anlamında fuzzy normdur** denir. Her $x, y \in X$ ve $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $s, t \in \mathbb{R}$ için,

(N₁) Her $t \leq 0$ için, $N(x, t) = 0$ dır.

(N₂) $x = 0$ olması için gerekli ve yeterli koşul her $t > 0$ için $N(x, t) = 1$ olmasıdır.

(N₃) $N(cx, t) = N(x, \frac{t}{|c|})$ eşitliği geçerlidir.

(N₄) $N(x + y, s + t) \geq \min\{N(x, s), N(y, t)\}$ dır.

(N_5) $N(x, \cdot) : \mathbb{R}^+$ de azalmayan bir fonksiyon ve $\lim_{t \rightarrow \infty} N(x, t) = 1$ olur.

(X, N) çiftine B-S anlamında fuzzy normlu lineer uzay denir. Her $x, y \in X$ ve $t \in \mathbb{R}^+$ için x 'in normu $N(x, t) \in [0, 1]$ ile gösterilir. (Bag /and Samanta 2003).

Kısaca Bag-Samanta anlamında fuzzy norm B-S fuzzy norm olarak gösterilecektir.

Örnek 2.3.2

$(X, \|\cdot\|)$ normlu lineer uzay olmak üzere

$N: X \times \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$,

$$N(x, t) = \begin{cases} 0 & , \quad t \leq \|x\| \\ 1 & , \quad t > \|x\| \end{cases}$$

şeklinde tanımlı N fonksiyonu X üzerinde bir fuzzy normdur.

Çözüm

(N1) Her $t \in \mathbb{R}^+$ ve $t \leq 0$ için $t \leq 0 \leq \|x\|$ olduğundan $N(x, t) = 0$ dır.

(N2) Her $t \in \mathbb{R}^+$ ve $t > 0$ için $N(x, t) = 1$ olsun. Tanımdan $t > \|x\|$ olmalıdır. Bu durumda $t > 0$ olduğundan $\|x\| = 0$ ve böylece klasik anlamda norm tanımından $x = 0$ dır. Şimdi de $x = 0$ alınsın. Bu durumda her $t \in \mathbb{R}^+$ ve $t > 0$ için $t > \|x\|$ olduğundan $N(x, t) = 1$ dir.

(N3) Her $t \in \mathbb{R}^+$ ve $t > 0$ ve $c \neq 0$ için

$$N(cx, t) = \begin{cases} 0 & , \quad t \leq \|cx\| \\ 1 & , \quad t > \|cx\| \end{cases} = \begin{cases} 0 & , \quad \frac{t}{|c|} \leq \|x\| \\ 1 & , \quad \frac{t}{|c|} > \|x\| \end{cases} = N(x, \frac{t}{|c|})$$

olur.

(N4) Her $t, s \in \mathbb{R}^+$ ve $x, y \in X$ için $N(x + y, s + t) \geq \min\{N(x, s), N(y, t)\}$

olduğu gösterilmelidir. İlk olarak $\min\{N(x, s), N(y, t)\} = N(x, s)$ olsun. Bu durumda

$N(x + y, s + t) = 0$ ise $s + t \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

olduğundan aşağıdaki üç durum söz konusudur.

$$a) s \leq \|x\| \text{ ve } t \leq \|y\| \text{ ise } N(x+y, s+t) = 0 = \min\{N(x, s) = 0, N(y, t) = 0\}$$

$$b) s \leq \|x\| \text{ ve } t > \|y\| \text{ ise } N(x+y, s+t) = 0 = \min\{N(x, s) = 0, N(y, t) = 1\}$$

$$c) s > \|x\| \text{ ve } t \leq \|y\| \text{ ise } N(x+y, s+t) = 0 = \min\{N(x, s) = 1, N(y, t) = 0\}$$

$$\text{Eğer } N(x+y, s+t) = 1 \text{ ise } \min\{N(x, s), N(y, t)\} \leq 1$$

olduğundan,

$$N(x+y, s+t) = 1 \geq \min\{N(x, s), N(y, t)\}$$

dir. Dolayısıyla her iki durumda da $N(x+y, s+t) \geq \min\{N(x, s), N(y, t)\}$ olur.

(N5) Tanımdan açıktır ki $N(x, \cdot)$ $\mathbb{R}'$ de azalmayan bir fonksiyondur ve $\lim_{t \rightarrow \infty} N(x, t) = 1$ dir.

(N1)-(N5) den N fonksiyonu X uzayında bir fuzzy norm ve (X, N) bir fuzzy normlu bir lineer uzaydır.

Örnek 2.3.3

$(X, \|\cdot\|)$ bir normlu lineer uzay olsun. Her $x \in X, t \in \mathbb{R}$ için

$$N(x, t) = \begin{cases} \frac{t}{t + \|x\|} & , \quad t > 0 \\ 0 & , \quad t \leq 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa (X, N) fuzzy normlu lineer uzaydır. (Bag /and Samanta 2003).

Çözüm

(N1) Her $t \in \mathbb{R}$ ve $t \leq 0$ için $N(x, t)$ nin tanımından açıkça $N(x, t) = 0$ olur.

$$\begin{aligned} (N2) \quad N(x, t) = 1 &\Leftrightarrow \frac{t}{t + \|x\|} = 1 \\ &\Leftrightarrow t = t + \|x\| \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \|x\| = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

olur.

(N3) Her $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$ için, $c \neq 0$ olduğundan

$$N(cx, t) = \frac{t}{t + \|cx\|} = \frac{\frac{t}{|c|}}{\frac{t}{|c|} + \|x\|} = N(x, \frac{t}{|c|})$$

olur bu ise istenendir.

(N4) Her $t, s \in \mathbb{R}$ ve $x, y \in X$ için $N(x + y, s + t) \geq \min\{N(x, t), N(y, s)\}$ olduğu gösterilecektir.

a) $s + t < 0$ olsun. Bu durumda $s < 0$ veya $t < 0$ dır. Buradan $N(y, s) = 0$ veya

$N(x, t) = 0$ olur. Yani,

$$N(x + y, t + s) = 0 = \min\{N(x, t), N(y, s)\}$$

bulunur.

b) $s + t = 0$ olsun. Bu durumda $s = t = 0$ veya $s = -t$ olur.

Eğer $s = t = 0$ ise,

$$N(x + y, t + s) = 0 = \min\{N(x, t) = 0, N(y, s) = 0\}$$

olacaktır. Benzer şekilde,

$$s = -t \text{ ise } N(x, t) = 0 \text{ veya } N(y, s) = 0$$

olacağından

$$N(x + y, t + s) = 0 = \min\{N(x, t), N(y, s)\}$$

eşitliği geçerlidir.

c) $s + t > 0$ ise,

i) $s < 0 < t$

ii) $t < 0 < s$

iii) $s, t > 0$

durumları söz konusu olacaktır.

i) ve ii) durumları için $N(y, s) = 0$ ya da $N(x, t) = 0$ olacağından iki durum için de

$\min\{N(x, t), N(y, s)\} = 0$ eşitliği geçerlidir. Yani $N(x + y, t + s) \geq \min\{N(x, t), N(y, s)\}$ olur.

iii) $s, t > 0$ olsun. Bu durumda,

$$N(x, t) = \frac{t}{t + \|x\|} \text{ ve } N(y, s) = \frac{s}{s + \|y\|}$$

dir. Genelliği bozmadan

$$\min\{N(x, t), N(y, s)\} = N(y, s)$$

kabul edilsin. (Diğer durum benzer şekilde yapılabilir.)

Yani,

$N(x, t) > N(y, s)$ eşitsizliği doğru olsun. Bu durumda,

$$N(x, t) = \frac{t}{t + \|x\|} > \frac{s}{s + \|y\|} = N(y, s)$$

olduğundan,

$$N(x + y, t + s) \geq N(y, s)$$

eşitsizliğinin doğru olduğu gösterilmelidir.

$$N(x, t) > N(y, s)$$

eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned} \frac{t}{t + \|x\|} > \frac{s}{s + \|y\|} &\Leftrightarrow \frac{t}{t + \|x\|} - \frac{s}{s + \|y\|} > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{t\|y\| - s\|x\|}{(t + \|x\|)(s + \|y\|)} > 0 \\ &\Leftrightarrow t\|y\| - s\|x\| > 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

bulunur.

Bu eşitsizlikten yararlanarak

$$\frac{t+s}{t+s+\|x+y\|} \geq \frac{t+s}{t+s+\|x\|+\|y\|}$$

eşitsizliğinden yola çıkılarak

$$\frac{t+s}{t+s+\|x\|+\|y\|} - \frac{s}{s+\|y\|} = \frac{t\|y\| - s\|x\|}{(t+s+\|x\|+\|y\|)(s+\|y\|)}$$

olup (2.1) den yararlanılarak

$$\frac{t\|y\| - s\|x\|}{(t+s+\|x\|+\|y\|)(s+\|y\|)} > 0$$

dır. Yani,

$$\frac{t+s}{t+s+\|x+y\|} - \frac{s}{s+\|y\|} > 0$$

olduğundan,

$$\frac{t+s}{t+s+\|x+y\|} > \frac{s}{s+\|y\|}$$

eşitsizliği doğrudur. Benzer kanıt $N(x+y, t+s) > \frac{t}{t+\|x\|}$ için de yapılabilir. Böylece

$$N(x+y, t+s) \geq \min\{N(x, t), N(y, s)\}$$

eşitsizliği geçerlidir.

(N5) $t_1 < t_2 \leq 0$ için $N(x, t_1) = N(x, t_2) = 0$ olur.

Diğer taraftan $0 < t_1 < t_2$ ise ;

$$N(x, t_1) - N(x, t_2) = \frac{t_1}{t_1 + \|x\|} - \frac{t_2}{t_2 + \|x\|} = \frac{(t_1 - t_2)\|x\|}{(t_1 + \|x\|)(t_2 + \|x\|)}$$

olur.

$t_1 < t_2$ olduğundan $N(x, t_1) - N(x, t_2) < 0$ bulunur.

Yani $N, \mathbb{R}$ de artan bir fonksiyondur. $\lim_{t \rightarrow \infty} N(x, t)$ ifadesi için iki durum vardır.

$x = 0$ ise,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(x, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{t + \|0\|} = 1.$$

$x \neq 0$ ise,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(x, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{t + \|x\|} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{\|x\|}{t}} = \frac{1}{1 + 0} = 1$$

bulunur. Her iki durum içinde $\lim_{t \rightarrow \infty} N(x, t) = 1$ dir.

(N1)-(N5) koşulları sağlandığından N fonksiyonu, X uzayında bir B-S fuzzy normdur.

Teorem 2.3.4

(X, N) fuzzy normlu lineer uzay olsun. (N1)-(N5) koşullarına ilaveten

(N₆) Her $t > 0$ için $N(x, t) > 0 \Rightarrow x = 0$ özelliği sağlansın.

$\alpha \in (0,1)$ olmak üzere $\|x\|_\alpha = \wedge \{t > 0 : N(x, t) \geq \alpha\}$ şeklinde tanımlı ifade

$\{\|x\|_\alpha : \alpha \in (0,1)\}$; X üzerinde normun azalmayan bir ailesidir ve X üzerinde α -norm olarak adlandırılır. (Bag /and Samanta 2003)

Kanıt

Öncelikle $\|\cdot\|_\alpha$ nın klasik norm koşullarını sağladığı gösterilecektir.

i) $x \in X, t > 0$ ve $N(x, t) \geq 0$ için, $\alpha \in (0,1)$ olduğundan $\wedge \{t : N(x, t) \geq \alpha\} \geq 0$

olur. Böylece $\|x\|_\alpha \geq 0$ olacaktır.

ii) $(\Rightarrow) \|x\|_\alpha = 0$ ise, $\wedge \{t : N(x, t) \geq \alpha\} = 0$ dır. Her $t \in \mathbb{R}, t > 0$ için

$N(x, t) \geq \alpha > 0$ ise (N6) dan $x = \underline{0}$ dır.

$(\Leftarrow) x = \underline{0}$ ise her $t > 0$ için $N(x, t) = 1$ olur. Böylece $\wedge \{t : N(x, t) \geq \alpha\} = 0$ olup $\|x\|_\alpha = 0$ olacaktır.

iii) $c \neq 0$ ise,

$$\|cx\|_\alpha = \wedge \{t : N(cx, t) \geq \alpha\}$$

$$= \bigwedge \left\{ t: N\left(x, \frac{t}{|c|}\right) \geq \alpha \right\}$$

$$= \bigwedge \{|c|t, N(x, t) \geq \alpha\}$$

$$= \bigwedge |c| \{t: N(x, t) \geq \alpha\}$$

olur.

Böylece,

$$\|cx\|_\alpha = |c| \|x\|_\alpha$$

dır.

Diğer taraftan $c = 0$ ise, her $\alpha \in (0,1)$ için,

$$\|cx\|_\alpha = \|\underline{0}\|_\alpha = 0 = 0 \|x\|_\alpha = |c| \|x\|_\alpha \text{ olur.}$$

$$\begin{aligned} \text{(iv)} \quad \|x\|_\alpha + \|y\|_\alpha &= \bigwedge \{t: N(x, t) \geq \alpha\} + \bigwedge \{s: N(y, s) \geq \alpha\} \\ &= \bigwedge \{t + s: N(x, t) \geq \alpha, N(y, s) \geq \alpha\} \\ &\geq \bigwedge \{t + s: N(x + y, t + s) \geq \alpha\} \\ &= \bigwedge \{r: N(x + y, r) \geq \alpha\} \end{aligned}$$

Burada $r = t + s$ olmak üzere $N(x, t) \geq \alpha$, $N(y, s) \geq \alpha$ olduğundan $N(x + y, t + s) \geq \alpha$ dır. Böylece $\|x + y\|_\alpha \leq \|x\|_\alpha + \|y\|_\alpha$ olur. Yani $\|\cdot\|_\alpha$ klasik anlamda bir normdur. Şimdi $\|\cdot\|_\alpha$ nın artan bir fonksiyon olduğu gösterilecektir.

$0 < \alpha_1 < \alpha_2$ alınsın.

$\|x\|_{\alpha_1} = \bigwedge \{t: N(x, t) \geq \alpha_1\}$, $\|x\|_{\alpha_2} = \bigwedge \{t: N(x, t) \geq \alpha_2\}$ şeklinde tanımlı olduğundan,

$\{t: N(x, t) \geq \alpha_2\} \subset \{t: N(x, t) \geq \alpha_1\}$ olur. Buradan

$\bigwedge \{t: N(x, t) \geq \alpha_2\} \geq \bigwedge \{t: N(x, t) \geq \alpha_1\}$ olup, $\|x\|_{\alpha_2} \geq \|x\|_{\alpha_1}$ dir.

Teorem 2.3.5

$\{\|\cdot\|_\alpha: \alpha \in (0,1)\}$ ailesi, X lineer uzayı üzerinde normların artan bir ailesi ve $N': X \times \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ e tanımlı foksiyonu

$$N'(x, t) = \begin{cases} \bigvee \{ \alpha \in (0,1) : \|x\|_\alpha \leq t \} & , \quad (x, t) \neq (\underline{0}, 0) \\ 0 & , \quad (x, t) = (\underline{0}, 0) \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda N' , X üzerinde B-S anlamında bir fuzzy normdur.

Kanıt

$N'(x, t)$ nin B-S anlamında bir fuzzy norm koşullarını sağladığı gösterilmelidir.

(N1) Her $x \in X, t \in \mathbb{R}, t < 0$ için $N'(x, t) = \bigvee \{ \alpha \in (0,1) : \|x\|_\alpha \leq t \} = 0$ dir. (Çünkü $t < 0$ olduğunda her $x \in X$ için $\bigvee \{ \alpha : \|x\|_\alpha \leq t \} = \emptyset$).

$t = 0$ ve $x \neq 0$ için $\bigvee \{ \alpha : \|x\|_\alpha \leq t \} = \emptyset$ ise $N'(x, t) = 0$.

$x = \underline{0}$ ve $t = 0$ olduğunda tanımdan $N'(x, t) = 0$ dir.

Böylece her $t \in \mathbb{R}, t \leq 0$ ve her $x \in X$ için $N'(x, t) = 0$ dir.

(N2) ($\Rightarrow$) Her $t \in \mathbb{R}^+$ için $N'(x, t) = 1$ olsun. Bu durumda herhangi bir $t > 0$ için en az bir $\alpha_i \in (\varepsilon, 1]$ vardır öyle ki $\|x\|_{\alpha_i} \leq t$ iken $\varepsilon \in (0,1)$ olmak üzere, $\|x\|_\varepsilon \leq t$ dir.

$t > 0$ keyfi olduğundan $\|x\|_\varepsilon = 0$ iken $x = \underline{0}$ dir.

($\Leftarrow$) $x = \underline{0}$ ise bu durumda $t > 0$ için,

$$\begin{aligned} N'(\underline{0}, t) &= \bigvee \{ \alpha : \|\underline{0}\|_\alpha \leq t \} \\ &= \bigvee \{ \alpha : \alpha \in (0,1) \} = 1 \end{aligned}$$

bulunur.

(N3) Her $x \in X, t \in \mathbb{R}^+$ için $c \neq 0$ skaleri için,

$$N'(cx, t) = \bigvee \{ \alpha : \|cx\|_\alpha \leq t \} = \bigvee \{ \alpha : |c| \|x\|_\alpha \leq t \} = \bigvee \left\{ \alpha : \|x\|_\alpha \leq \frac{t}{|c|} \right\} = N' \left(x, \frac{t}{|c|} \right)$$

olur. Bu ise $N'(cx, t) = N' \left(x, \frac{t}{|c|} \right)$ demektir.

(N4) Her $s, t \in \mathbb{R}$ için,

$$N'(x + y, s + t) \geq \min \{ N'(x, s), N'(y, t) \}$$

olduğu gösterilecektir.

- (a) $s + t < 0$
- (b) $s = t = 0$
- (c) $s + t > 0; s > 0, t < 0; s < 0, t > 0$

durumları açıkça görülür.

(d) $s > 0, t > 0$ için, $p = N'(x, s), q = N'(y, t)$ ve $p \leq q$ olsun.

$p = 0, q = 0$ ise (N4) koşulu açıkça sağlanır.

$0 < r < p \leq q$ olsun. Bu durumda en az bir $\alpha > r$ vardır öyle ki $\|x\|_\alpha \leq s$ ve en az bir $\beta > r$ vardır öyle ki $\|y\|_\beta \leq t$ dir.

$\gamma = \alpha \wedge \beta > r$ olsun. Böylece,

$$\|x\|_\gamma \leq \|x\|_\alpha \leq s \text{ ve } \|y\|_\gamma \leq \|y\|_\beta \leq t$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Dolayısıyla

$$\|x + y\|_\gamma \leq \|x\|_\gamma + \|y\|_\gamma \leq s + t$$

dir. Böylece $N'(x + y, s + t) \geq \gamma > r$ olur. $0 < r < \gamma$ olduğundan,

$$N'(x + y, s + t) \geq p = \min\{N'(x, s), N'(y, t)\}$$

yazılabilir. Bu ise istenendir.

Benzer şekilde, $p \geq q$ için de eşitsizliğin doğru olduğu gösterilebilir.

(N5) $x \in X, \alpha \in (0,1)$ olsun. $t > \|x\|_\alpha$ ise;

$$N'(x, t) = V\{\alpha: \|x\|_\alpha \leq t\} \geq \alpha$$

dir. Bu nedenle

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N'(x, t) = 1$$

dir. Diğer taraftan $N'(x, .)$ fonksiyonunun $\mathbb{R}'$ nin artan fonksiyonu olduğu gösterilmelidir.

$t_1 < t_2 \leq 0$ ise, açıkça $N'(x, t_1) = N'(x, t_2) = 0$ dir.

$t_2 > t_1 > 0$ ise;

$\{\alpha: \|x\|_\alpha \leq t_1\} \subset \{\alpha: \|x\|_\alpha \leq t_2\}$ olacağından

$$V\{\alpha: \|x\|_\alpha \leq t_1\} \leq V\{\alpha: \|x\|_\alpha \leq t_2\}$$

olur. Yani

$$N'(x, t_1) \leq N'(x, t_2)$$

eşitsizliği geçerlidir.

O halde $N'(x, \cdot)$, $\mathbb{R}$ nin artan bir fonksiyonudur.

(N1)-(N5) den N' , X üzerinde B-S fuzzy normdur. ■

Aşağıda fuzzy norm tanımlarının karşılaştırılması için gerekli olması nedeniyle bir özellik daha tanımlanacaktır.

(N7) $x \neq 0$ için $N(x, \cdot)$, $\mathbb{R}$ de sürekli fonksiyon olsun. $N(x, \cdot)$ fonksiyonu, $\mathbb{R}$ nin $\{t: 0 < N(x, t) < 1\}$ alt kümesi üzerinde kesin artan bir fonksiyonudur.

Aşağıdaki iki lemma N ve N' fonksiyonları arasında bir bağıntı kurmak amacıyla bir hazırlık niteliğindedir.

Lemma 2.3.6

(X, N) fuzzy normlu lineer uzayı (N6) ve (N7) şartlarını sağlasın. $\{\|\cdot\|_\alpha: \alpha \in (0,1)\}$ ailesi, $\|x\|_\alpha = \bigwedge\{t > 0: N(x, t) \geq \alpha\}$, $\alpha \in (0,1)$ olarak tanımlanan X normunun artan bir ailesi olsun. Bu durumda $x_0 \neq 0$, $x_0 \in X$, her $\alpha \in (0,1)$ için, $N(x_0, \|x_0\|_\alpha) \geq \alpha$ dir.

Kanıt

$\|x_0\|_\alpha = T$ olsun. Klasik norm tanımı ve $x_0 \neq 0$ olduğundan bu durumda $T > 0$ dir. $t_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere en az bir $\{t_n\}_n$ dizisi vardır öyle ki $N(x_0, t_n) \geq \alpha$ ve $t_n \downarrow T$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_0, t_n) \geq \alpha$ iken ((N7) deki süreklilik koşulundan)

$$N(x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} t_n) \geq \alpha \text{ olur.}$$

Bu ise $\alpha \in (0,1)$ için $N(x_0, \|x_0\|_\alpha) \geq \alpha$ olması demektir. Bu ise kanıtı tamamlar.

Lemma 2.3.7

(X, N) , (N6) ve (N7) şartlarını sağlayan fuzzy normlu lineer uzay ve $\{\|\cdot\|_\alpha : \alpha \in (0,1)\}$ ailesi, $\|x\|_\alpha = \Lambda\{t > 0 : N(x, t) \geq \alpha\}$, $\alpha \in (0,1)$ olarak tanımlanan X uzayında normların artan bir ailesi olsun. Bu durumda $x_0 \neq 0$, $x_0 \in X$, her $\alpha \in (0,1)$, $t' \in \mathbb{R}^+$ için, $\|x_0\|_\alpha = t'$ olması için gerekli ve yeterli koşul $N(x_0, t') = \alpha$ olmasıdır.

Kanıt

$N(x_0, t') \geq \alpha$ ve $N(x_0, t) \leq \alpha$ olduğu gösterilmeli. İlk olarak $N(x_0, t') \geq \alpha$ olduğu gösterilecektir.

($\Rightarrow$) $\alpha \in (0,1)$, $x_0 \neq 0$ ve $t' = \|x_0\|_\alpha = \Lambda\{s : N(x_0, s) \geq \alpha\}$. (N7) özelliği sağladığı kabul edilen $N(x, \cdot)$, sürekli olduğundan Lemma 2.3.6 kullanılarak

$$N(x_0, t') \geq \alpha \quad (2.2)$$

yazılabilir. Diğer taraftan, $\|\cdot\|_\alpha$ nın artanlığından $N(x_0, t') \leq N(x_0, s)$ dir. $\|\cdot\|_\alpha$ nın tanımı ile $N(x_0, s) \geq \alpha$

dır. Kabul edelim ki $N(x_0, t') > \alpha$ olsun. $N(x_0, \cdot)$ nin t' de sürekliliğinden en az bir $t'' < t'$ vardır öyle ki $N(x_0, t'') > \alpha$ dir. Ancak bu $t' = \Lambda\{s : N(x_0, s) \geq \alpha\}$ olduğundan $N(x_0, t') > \alpha$ olması mümkün değildir. O halde kabul yanlış olup

$$N(x_0, t') \leq \alpha \quad (2.3)$$

olmalıdır. (2.2) ve (2.3) den $N(x_0, t') = \alpha$ elde edilir.

Böylece $t' = \|x_0\|_\alpha$ olduğunda $N(x_0, t') = \alpha$ eşitliği sağlanır.

($\Leftarrow$) Tersine $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere $N(x_0, t') = \alpha$ olsun. Bu durumda tanımdan,

$$\|x_0\|_\alpha = \Lambda\{s : N(x_0, s) \geq \alpha\} = t'$$

olduğu biliniyor. Dolayısıyla $\alpha \in (0,1)$, $x_0 \neq 0$ ve $t' > 0$ için, $\|x_0\|_\alpha = t'$ dir. Bu ise kanıtı tamamlar.

Teorem 2.3.8

(X, N) fuzzy normlu lineer uzayı (N6) ve (N7) şartlarını sağlasın.

$\|x\|_\alpha = \bigwedge \{t > 0 : N(x, t) \geq \alpha\}$, $\alpha \in (0,1)$ ve $N' : X \times \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu

$$N'(x, t) = \begin{cases} \bigvee \{\alpha \in (0,1) : \|x\|_\alpha \leq t\} & , \quad (x, t) \neq (\underline{0}, 0) \\ 0 & , \quad (x, t) = (\underline{0}, 0) \end{cases}$$

şekilde tanımlansın. Bu durumda;

$$N' = N$$

dır.

Kanıt

$(x_0, t_0) \in X \times \mathbb{R}$ ve $N(x_0, t_0) = \alpha_0$ olsun.

1. Durum. $x_0 = \underline{0}$, $t_0 \leq 0$ olsun. Bu durumda B-S fuzzy norm tanımından

$N(x_0, t_0) = 0$ dır. Böylece

$$N(x_0, t_0) = N'(x_0, t_0) = 0$$

dır.

2. Durum. $x_0 = \underline{0}$, $t_0 > 0$ olsun. Bu durumda açıkça $N(x_0, t_0) = N'(x_0, t_0) = 1$.

3. Durum. $x_0 \neq \underline{0}$, $t_0 \leq 0$ olsun. Bu durumda $N(x_0, t_0) = N'(x_0, t_0) = 0$.

4. Durum. $x_0 \neq \underline{0}$ ve $t_0 > 0$ için öyle ki $N(x_0, t_0) = 0$ olsun.

Bu durumda $a \in (0,1)$ için,

$$\|x_0\|_\alpha = \bigwedge \{t : N(x_0, t) \geq \alpha\}$$

dır. Lemma 2.3.6'dan her $a \in (0,1)$ için $N(x_0, \|x_0\|_\alpha) \geq \alpha$ olduğu biliniyor.

$N(x_0, t_0) = 0 < \alpha$ olduğundan, her $\alpha > 0$ için, $t_0 < \|x_0\|_\alpha$ dır.

Bu yüzden,

$$N'(x_0, t_0) = \bigvee \{a \in (0,1) : \|x_0\|_\alpha \leq t_0\} = \bigvee \emptyset = 0$$

olur. Böylece,

$$N(x_0, t_0) = N'(x_0, t_0) = 0$$

dır.

5. Durum. $x_0 \neq \underline{0}$ ve $t_0 > 0$ ve $0 < N(x_0, t_0) < 1$ olsun. $N(x_0, t_0) =: a_0$ olarak

tanımlanırsa bu durumda $0 < a_0 < 1$ dir.

Şimdi $(x, t) \neq (\underline{0}, 0)$ iken,

$$N'(x, t) = \bigvee \{a: \|x\|_a \leq t\} \quad (2.4)$$

$0 < a_0 < 1$ olduğunda her $x \in X$ için $\|x\|_a = \bigwedge \{t: N(x, t) \geq a\}$

$N(x_0, t_0) = a_0$ olduğundan

$$\|x_0\|_{a_0} \leq t_0 \quad (2.5)$$

dır. (2.5) kullanılarak (2.4) den,

$$N'(x_0, t_0) \geq a_0 \Rightarrow N'(x_0, t_0) \geq N(x_0, t_0) \quad (2.6)$$

elde edilir.

Lemma 2.3.7 den $N(x_0, t_0) = a_0 \Leftrightarrow \|x_0\|_{a_0} = t_0$ dır.

$1 > a > a_0$ için, $\|x_0\|_a = t'$ olsun. Bu durumda Lemma 2.3.7 den $N(x_0, t') = a$ dır. Bu yüzden,

$$N(x_0, t') = a > a_0 = N(x_0, t_0)$$

$N(x_0, \cdot), S_{x_0} = \{t: N(x_0, t) \in (0, 1)\}, t, t_0 \in S_{x_0}$ da kesin monoton artan ve

$N(x_0, t') > N(x_0, t_0)$ olduğundan $t' > t_0$ dır. Bu yüzden $1 > a > a_0$ için, $\|x_0\|_a = t' \not\leq t_0$ dır. Böylece,

$$N'(x_0, t_0) \leq a_0 = N(x_0, t_0) \quad (2.7)$$

(2.6) ve (2.7) den $N'(x_0, t_0) = N(x_0, t_0)$ dır.

6. Durum. $x_0 \neq \underline{0}$, $t_0 > 0$ ve $N(x_0, t_0) = 1$ olsun.

$(x, t) \neq (\underline{0}, 0)$ için $N'(x, t) = \bigvee \{a: \|x\|_a \leq t\}$

$\|x\|_a = \bigwedge \{t: N(x, t) \geq a\}, a \in (0, 1], x \in X$

oldüğundan her $a \in (0, 1)$ için,

$\|x_0\|_a \leq t_0$ ve $N(x_0, t_0) = 1$ olduğundan $N'(x_0, t_0) = 1$ dir

Böylece $N(x_0, t_0) = N'(x_0, t_0) = 1$ dir. Dolayısıyla her $(x, t) \in X \times \mathbb{R}$ için

$$N(x, t) = N'(x, t)$$

olur.

Tanım 2.3.9

(X, N) fuzzy normlu lineer uzay ve $\{x_n\}$, X uzayında bir dizi olsun. Her $t > 0$ için,

$\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n - x, t) = 1$ olacak şekilde en az bir $x \in X$ varsa, $\{x_n\}$ dizisine X uzayında x 'e yakınsaktır denir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ şeklinde gösterilir. (Bag /and Samanta 2003)

Tanım 2.3.10

(X, N) fuzzy normlu lineer uzay ve $\{x_n\}$, X uzayında bir dizi olsun. Her $t > 0$ ve $p \in \mathbb{N}$ için,

$\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_{n+p} - x_n, t) = 1$ ise $\{x_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisidir denir.

Tanım 2.3.11

A , X fuzzy normlu lineer uzayında bir alt küme olsun. Her $x \in A$ ve $0 < r < 1$ için

$N(x, t) > 1 - r$ olacak şekilde en az bir $t > 0$ varsa A kümesine **sınırlıdır** denir.

Uyarı 2.3.12

(X, N) fuzzy normlu lineer uzayı (N6) ve (N7) şartlarını sağlasın ve $\{x_n\}$, X da bir dizi olsun.

Bu durumda, her $t > 0$ için, $\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n - x, t) = 1$ olması her $\alpha \in (0,1)$ için

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_\alpha = 0$ eşitliğine denktir.

Teorem 2.3.13

(X, N) fuzzy normlu lineer uzayı (N6) ve (N7) şartlarını sağlasın. $\{\|\cdot\|_\alpha : \alpha \in (0,1)\}$ ailesi

$\|x\|_\alpha = \bigwedge \{t > 0 : N(x, t) \geq \alpha\}$ olarak tanımlanan N' nin α -normuna karşılık gelmek üzere

$(0,1)$ de artan (veya azalan) bir dizi α_n dizisi için $\alpha \in (0,1)$ için $\alpha_n \rightarrow \alpha$ ise her $x \in X$ için $\|x\|_{\alpha_n} \rightarrow \|x\|_\alpha$ dır.

Kanıt

$x = \underline{0}$ için $\alpha_n \rightarrow \alpha$ olduğunda $\|x\|_{\alpha_n} \rightarrow \|x\|_\alpha$ durumu açıktır.

$x \neq \underline{0}$ olsun. 2.3.7 Lemmadan, $\alpha \in (0,1)$ ve $t' > 0$ için $\|x\|_\alpha = t'$ olması için gerekli ve yeterli koşul $N(x, t') = \alpha$ olmasıdır. $\{\alpha_n\}$, $(0,1)$ de artan bir dizi ve $\alpha_n \rightarrow \alpha$, $\alpha \in (0,1)$ olduğundan $\|x\|_{\alpha_n} = t_n$ ve $\|x\|_\alpha = t$ için $N(x, t_n) = \alpha_n$ ve $N(x, t) = \alpha$ olur. $\{\|\cdot\|_\alpha : \alpha \in (0,1)\}$ ailesi normların artan bir ailesi olduğundan $\{t_n\}$, gerçel sayıların artan bir dizisidir ve t ile üstten sınırlıdır. Yani (her $n \in \mathbb{N}$ için) $\|x\|_{\alpha_n} \leq \|x\|_\alpha$ dir. Böylece $\{t_n\}$ yakınsaktır.

Bu nedenle $N(x, \cdot)$ nin sürekliliğinden,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N(x, t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \text{ ise } N\left(x, \lim_{n \rightarrow \infty} t_n\right) = \alpha$$

olur (i) ve (ii) den $N\left(x, \lim_{n \rightarrow \infty} t_n\right) = N(x, t)$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t$

olacaktır. Böylece $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x\|_{\alpha_n} = \|x\|_\alpha$ eşitliği gösterilmiş olur.

Benzer şekilde $\{\alpha_n\}$ azalan dizi olmak üzere $\{\alpha_n\} \rightarrow \alpha \in (0,1)$ ise her $x \in X$ için

$\|x\|_{\alpha_n} \rightarrow \|x\|_\alpha$ olduğu kolayca gösterilebilir. ■

Teorem 2.3.14

X bir lineer uzay ve $\{\|\cdot\|_\alpha : \alpha \in (0,1)\}$, X üzerinde normların artan ailesi olsun ve Teorem 2.3.13' ün koşullarını sağlansın. N , X uzayı üzerinde

$$N(x, t) = \begin{cases} \bigvee \{\alpha \in (0,1) : \|x\|_\alpha \leq t\} & , \quad (x, t) \neq (\underline{0}, 0) \\ 0 & , \quad (x, t) = (\underline{0}, 0) \end{cases} \quad (2.8)$$

olarak tanımlı bir fuzzy normdur. Ayrıca $\|x\|'_\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu,

$\|x\|'_\alpha : \bigwedge \{t : N(x, t) \geq \alpha\}, \alpha \in (0,1)$ olarak tanımlı olsun. Bu durumda her $\alpha \in (0,1)$ için,

$$\|x\|'_\alpha = \|x\|_\alpha \quad (2.9)$$

olur.

Kanıt

Açıkça $x = \underline{0}$ ve her $\alpha \in (0,1)$ için, $\|x\|'_\alpha = \|x\|_\alpha = 0$ dır.

$x \neq \underline{0}$ olsun.

$\alpha_0 \in (0,1)$ için $\|x\|'_{\alpha_0} = t_0$, $t_0 > 0$ dır. Bu durumda

(3.2) den ve Lemma 2.3.6 den $N(x, t_0) \geq \alpha_0$ olur. Ayrıca (3.3) den $\|x\|'_{\alpha_0} \leq t_0 = \|x\|_{\alpha_0}$ dır. Böylece

$$\|x\|'_{\alpha_0} \leq \|x\|_{\alpha_0} \quad (2.10)$$

olur.

$r > \|x\|'_{\alpha_0}$ olsun. Bu durumda

$N(x, t_1) \geq \alpha_0$ olacak şekilde en az bir $t_1 < r$ vardır. Dolayısıyla

$\forall \{\alpha \in (0,1): \|x\|_\alpha \leq t_1\} \geq \alpha_0$ olur.

i) $\forall \{\alpha \in (0,1): \|x\|_\alpha \leq t_1\} = \alpha_0$ ise $\alpha_n \uparrow \alpha_0$ olacak şekilde $(0,1)$ de en az bir $\{\alpha_n\}$

artan dizisi vardır ve $\|x\|_{\alpha_n} \leq t_1$ dir.

Böylece Teorem 2.3.13 den $\|x\|_{\alpha_0} \leq t_1 \leq r$ olur.

ii) $\forall \{\alpha \in (0,1): \|x\|_\alpha \leq t_1\} > \alpha_0$ ise bu durumda da $\|x\|_{\alpha_0} \leq t_1 \leq r$ dir.

Yani her durumda $r > \|x\|_{\alpha_0}$ dır. Böylece

$$\|x\|'_{\alpha_0} \geq \|x\|_{\alpha_0} \quad (2.11)$$

olur. (2.10) ve (2.11) dan her $x \in X$ için $\|x\|'_{\alpha_0} = \|x\|_{\alpha_0}$ elde edilir. Dolayısıyla $\alpha_0 \in (0,1)$ keyfi olduğundan, her $x \in X$, her $\alpha \in (0,1)$ için $\|x\|'_\alpha = \|x\|_\alpha$ eşitliği gösterilmiş olur.

Tanım 2.3.15

(X, N) fuzzy normlu lineer uzay olsun. $\{x_n\}$, X de bir dizi ve her $t > 0$, $\alpha \in (0,1)$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n - x, t) > \alpha$ olacak şekilde en az bir $x \in X$ varsa $\{x_n\}$ dizisi X 'de $\alpha - yakınsaktır$ ve x 'e $\{x_n\}$ dizisinin limiti denir.

Not 2.3.16

(X, N) fuzzy normlu lineer uzayı (N6) şartını sağlasın. Bu durumda $\alpha - yakınsak$ olan bir dizinin limiti tektir.

Kanıt

Kabul edelim ki $\alpha - yakınsak$ olan bir $\{x_n\}$ dizisinin iki limiti olsun. x ve y , $\{x_n\}$ dizisinin X uzayında limitleri olsun. Bu durumda, her $t > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n - x, t) > \alpha$ ve her $\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n - y, t) > \alpha$ dır.

Şu halde her $n \in \mathbb{N}$ için (N4) den,

$$\begin{aligned} N(x - y, t) &= N(x - x_n + x_n - y, \frac{t}{2} + \frac{t}{2}) \\ &\geq \min\{N(x - x_n, \frac{t}{2}), N(x_n - y, \frac{t}{2})\} \end{aligned}$$

olduğundan,

$$N(x - y, t) \geq \min\{\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n - x, \frac{t}{2}), \lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n - y, \frac{t}{2})\} > \alpha > 0$$

dır ve (N6) özelliğinden ise $x - y = \underline{0}$ olur. Bu ise $x = y$ olması demektir. O halde kabul yanlışı olup $\{x_n\}$ dizisinin limiti tektir.

Önerme 2.3.17

(X, N) fuzzy normlu lineer uzayı (N6) özelliğini sağlasın. Eğer (X, N) deki bir $\{x_n\}$ dizisi α -yakınsak ise bu durumda $n \rightarrow \infty$ için $\|x_n - x\|_\alpha \rightarrow 0$ olur.

Kanıt

$\{x_n\}$ dizisi (X, N) de $x \in X$ 'e yakınsak α -yakınsak olsun. Bu durumda her $t > 0$ için, $\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n - x, t) > \alpha$ dır. Ayrıca her $t > 0$ için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ ve her $n \geq n_0(t)$ için $N(x_n - x, t) > \alpha$ olur. Yani her $t > 0$ ve $n \geq n_0(t)$ için $\|x_n - x\|_\alpha \leq t$ olur. $t > 0$ olduğundan, $n \rightarrow \infty$ için $\|x_n - x\|_\alpha \rightarrow 0$ olacaktır.

Aşağıdaki örnek bu önermenin tersinin doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 2.3.18

$X = l^\infty$, dizi uzayı olsun. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ ve $\|\cdot\|, \|\cdot\|_0$

$\|x\| = \sup\{|x_n|\}$ ve $\|x\|_0 = \sup\{\left|\frac{x_n}{n}\right|\}$ şeklinde tanımlı X uzayı üzerinde klasik normlar olmak üzere $N: X \times \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ 'e tanımlı fonksiyonu,

$$N(x, t) = \begin{cases} 1 & , \quad t > \sup\{|x_n|\} \\ 0.5 & , \quad \sup\{\left|\frac{x_n}{n}\right|\} < t \leq \sup\{|x_n|\} \\ 0 & , \quad t \leq \sup\{\left|\frac{x_n}{n}\right|\} \end{cases}$$

şeklinde verilsin. N fonksiyonu X uzayı üzerinde $B - S$ anlamında bir fuzzy normdur. Ancak bu norma göre yakınsak bir dizi α yakınsak değildir.

Kanıt

Her $n \in \mathbb{N}$ için,

(N1) $t \leq 0$ olsun. $t \leq \sup\{\left|\frac{x_n}{n}\right|\}$ iken açıkça $N(x, t) = 0$ dır.

(N2) Her $t > 0$ için $N(x, t) = 1$ olsun. Bu durumda $\sup\{|x_n|\} = 0$ olur. Yani $|x_n| = 0$ dır. Buradan, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = 0$ olup $x = \underline{0}$ olur.

Tersine $x = \underline{0}$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = 0$ olduğundan $\sup\{|x_n|\} = 0$ ise $N(x, t) = 1$ dir.

(N3) $c \neq 0$ için, $N(cx, t) = 1$ olsun. N fonksiyonunun tanımından $t > \sup\{|cx_n|\}$ yani $t/|c| > \sup\{|x_n|\}$ dır. Dolayısıyla $N(x, \frac{t}{|c|}) = 1$ olur.

$N(cx, t) = 0.5$ ise $\sup\{|cx_n/n|\} < t \leq \sup\{|cx_n|\}$ yani $\sup\{|x_n/n|\} < t/c \leq \sup\{|x_n|\}$ olup $N(x, \frac{t}{|c|}) = 0.5$ dir.

Bu nedenle $N(cx, t) = N(x, \frac{t}{|c|})$ olur.

$N(cx, t) = 0$ durumu da benzer şekilde gösterilebileceğinden

$N(cx, t) = N(x, \frac{t}{|c|})$ eşitliği gösterilmiş olur.

(N4) $N(x + y, s + t) \geq \min\{N(x, s), N(y, t)\}$ olduğu gösterilmelidir. Dört durum söz konusudur. (i)-(iii) durumu açıktır.

(i) $s + t < 0$

(ii) $s = t = 0$

(iii) $s + t > 0; s > 0, t < 0; s < 0, t > 0$.

(iv) $s > 0, t > 0$

Sadece (iv) durumunu göstermek yeterlidir.

$x, y \in X$ ve $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$ olmak üzere

a) $s > \sup\{|x_n|\}$, $t > \sup\{|y_n|\}$ ise bu durumda $N(x, s) = 1$ ve $N(y, t) = 1$ dir.

Açıkça $s + t > \sup\{|x_n|\} + \sup\{|y_n|\} \geq \sup\{|x_n + y_n|\}$ dir.

O halde $N(x + y, s + t) = 1$ dir. Bu durum $N(x + y, s + t) \geq \min\{N(x, s), N(y, t)\}$ olacaktır.

b) $s > \sup\{|x_n|\}$ ve $\sup\left\{\left|\frac{y_n}{n}\right|\right\} < t \leq \sup\{|y_n|\}$ olsun. Bu durumda,

$N(x, s) = 1$ ve $N(y, t) = 0.5$ olur. Dolayısıyla

$s + t > \sup\{|x_n|\} + \sup\left\{\left|\frac{y_n}{n}\right|\right\} \geq \sup\left\{\left|\frac{x_n}{n}\right|\right\} + \sup\left\{\left|\frac{y_n}{n}\right|\right\} \geq \sup\left\{\left(\frac{x_n + y_n}{n}\right)\right\}$

olacaktır. Buradan açıkça

$N(x + y, s + t) = 0.5 \geq \min\{N(x, s), N(y, t)\}$

eşitsizliği geçerlidir. Diğer durumlar da benzer şekilde gösterilebilir.

(N5) $N(x, .)$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ 'nin azalmayan bir fonksiyon olduğu kolayca gösterilebilir.

Açıkça $\lim_{t \rightarrow \infty} N(x, t) = 1$ dir.

Böylece N , X üzerinde bir fuzzy normdur.

Şimdi de 2.3.17 önermenin tersinin sağlanmadığı gösterilecektir. Öncelikle önermedeki (N6) koşulunun sağlandığı gösterilmelidir.

(N6) Her $t > 0$ için $N(x, t) > 0$ olduğundan $\sup\{x_n\} = 0$ dir. Böylece $x = \underline{0}$ olur.

N nin α -normları;

$1 > \alpha > 0.5$ iken $\|x\|_\alpha = \|x\|$

$0 < \alpha \leq 0.5$ iken $\|x\|_\alpha = \|x\|_0$ şeklinde verilsin.

$e_1 = (1, 0, 0, \dots)$

$e_2 = (0, 1, 0, \dots)$

.....

$e_n = (0, 0, \dots, \underbrace{1}_{n.\text{terim}}, 0, \dots)$

olacak şekilde X ' de $\{e_n\}$ dizisi göz önüne alınsın.

$\{e_n\}$ dizisi ve $\|\cdot\|_{0.5}$ normuna göre $x = (0, 0, 0, \dots)$ noktasına 0.5 –yakınsaktır: Çünkü,

$$\|e_n - x\|_{0.5} = \|e_n\|_{0.5} = \sup \left\{ \frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{0}{n+1}, \dots \right\} = \frac{1}{n}$$

O halde $\lim_{n \rightarrow \infty} \|e_n - x\|_{0.5} = 0$ dir.

$t = \frac{1}{2}$ alınırsa $n \geq 3$ için

$$\sup \left\{ \frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \dots, \frac{0}{n-1}, \frac{1}{n}, \frac{0}{n+1}, \dots \right\} = \frac{1}{n} < \sup\{0, 0, \dots, 1, 0, \dots\} = 1$$

olur. Buradan $\lim_{n \rightarrow \infty} N\left(e_n - x, \frac{1}{2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} N\left(e_n, \frac{1}{2}\right) = 0.5 \neq 0.5$ olacağından $\{e_n\}$ dizisi $\|\cdot\|_{0.5}$ göre x' e yakınsak olduğu halde $\{e_n\}$ 0.5-yakınsak değildir.

Tanım 2.3.19 (α -Cauchy dizisi)

(X, N) B-S fuzzy normlu lineer uzay ve $\alpha \in (0,1)$ olsun.

$\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n - x_{n+p}, t) \geq \alpha$ ise $\{x_n\}$ dizisine **α -Cauchy dizisi** denir.

Önerme 2.3.20

(X, N) fuzzy normlu lineer uzay ve $\alpha \in (0,1)$ olsun. (X, N) deki her α -yakınsak dizi, (X, N) de bir α -Cauchy dizisidir.

Kanıt

$\{x_n\}, x'$ e α -yakınsak bir dizi olsun. Böylece her $t > 0, p \in \mathbb{N}$ için,

$\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n - x, t) > \alpha$ dır.

$$N(x_n - x_{n+p}, t) = N(x_n - x + x - x_{n+p}, \frac{t}{2} + \frac{t}{2})$$

$$N(x_n - x + x - x_{n+p}, \frac{t}{2} + \frac{t}{2}) \geq \min\{\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n - x, \frac{t}{2}), \lim_{n \rightarrow \infty} N(x - x_{n+p}, \frac{t}{2})\} > \alpha$$

ise $\{x_n\}_n$ dizisi (X, N) de bir α -Cauchy dizisidir.

Önerme 2.3.21

(X, N) fuzzy normlu lineer uzayında her sabit dizi, $\alpha \in (0,1)$ için, α -Cauchy dizisidir.

Kanıt

α -Cauchy dizisi tanımından ispat açıktır.

Önerme 2.3.22

(X, N) fuzzy normlu lineer uzayı (N6) şartını sağlasın. $\alpha \in (0,1)$ için $\|\cdot\|_\alpha$, N nin α - normu olmak üzere, $(X, \|\cdot\|_\alpha)$ ' da her Cauchy dizisi (X, N) ' de bir α - Cauchy dizisidir.

Kanıt

$\alpha_0 \in (0,1)$ keyfi sabit ve $\{x_n\}$, $(X, \|\cdot\|_{\alpha_0})$ 'da bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $p \in \mathbb{N}$ için, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_{n+p}\|_{\alpha_0} = 0$ dir.

Böylece verilen $\varepsilon > 0$ için en az bir $N(\varepsilon) > 0$ tamsayısı vardır öyle ki her $n \geq N(\varepsilon)$ için $\|x_n - x_{n+p}\|_{\alpha_0} < \varepsilon$ dur.

Bu durumda her $n \geq N(\varepsilon)$ ve $p \in \mathbb{N}$ için $\wedge\{t > 0: N(x_n - x_{n+p}, t) \geq \alpha_0\} < \varepsilon$ dur.

O halde her $n \geq N(\varepsilon)$ ve $p \in \mathbb{N}$ için en az bir $t(n, p, \varepsilon) < \varepsilon$ vardır öyle ki;

$N(x_n - x_{n+p}, t(n, p, \varepsilon)) \geq \alpha_0$ dir. Dolayısıyla $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan her $t > 0$, $p \in \mathbb{N}$ için

$\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n - x_{n+p}, \varepsilon) \geq \alpha_0$ olup $\{x_n\}$, (X, N) 'de bir α_0 -Cauchy dizisidir.

Dolayısıyla $\alpha_0 \in (0,1)$ keyfi olduğundan $(X, \|\cdot\|_\alpha)$ ' deki her Cauchy dizisi (X, N) ' de bir α -Cauchy dizisidir. ■

Tanım 2.3.23

(X, N) fuzzy normlu lineer uzay ve $\alpha \in (0,1)$ olsun. X uzayında herhangi bir α -Cauchy dizisi X ' de bir noktaya α -yakınsak ise, bu durumda X uzayına **α -tamdır** denir.

Önerme 2.3.24

(N6) şartını sağlayan (X, N) fuzzy normlu lineer uzayı α -tam ise, $X, \|\cdot\|_\alpha$ ya göre de tamdır. Bunun tersi doğru değildir.

Kanıt

(X, N) de her de α -Cauchy dizisinin α -yakınsak olduğu kabul edilsin. $0 < \alpha_0 < 1$ seçilsin. $\{x_n\}_n$ dizisi $(X, \|\cdot\|_{\alpha_0})$ ' de bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda Önerme 2.3.22 den $\{x_n\}_n$

dizisi (X, N) ' de α_0 -Cauchy dizisidir. (X, N) , α_0 -tam olduğundan en az bir $x \in X$ vardır öyle ki her $t > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n - x, t) > t_0$ dır. 2.3.15 Önermeden,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_{\alpha_0} = 0$ ise $\|\cdot\|_{\alpha_0}$ ' a göre $x_n \rightarrow x$ ise $(X, \|\cdot\|_{\alpha_0})$ tamdır. ■

Bu önermenin tersinin doğru olmadığını gösteren bir örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 2.3.25

X lineer uzayının elmanları $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 < \infty$ olmak üzere $(\xi_1, \xi_2, \dots)$ şeklindeki gerçel sayıların bir dizisi ve $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in X$ olmak üzere

$\|x\|_0 = (\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2)^{\frac{1}{2}}$ ve $\|x\| = \sup\{|\xi_i|\}$ şeklinde tanımlansın. $\|\cdot\|_0$ ve $\|\cdot\|$ normları X ' deki klasik normlar olmak üzere da normlardır ve $(X, \|\cdot\|_0)$, $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzaylardır.

$N: X \times \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$N(x, t) = \begin{cases} 1 & , \quad t > (\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2)^{\frac{1}{2}} \\ 0.5 & , \quad \sup\{|\xi_i|\} < t \leq (\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2)^{\frac{1}{2}} \\ 0 & , \quad t \leq \sup\{|\xi_i|\} \end{cases}$$

N fonksiyonunun, X de fuzzy norm olduğu gösterilecektir.

(N1) $t \leq 0$ ise bu durumda $t \leq \sup\{|\xi_i|\}$ ise $N(x, t) = 0$ dır.

(N2) $t > 0$ için $N(x, t) = 1 \Leftrightarrow (\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2)^{\frac{1}{2}} = 0$

$\Leftrightarrow$ Her $i=1,2,\dots$ için $\xi_i = 0$.

$\Leftrightarrow x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ olmak üzere $x = \underline{0}$ dır.

(N3) $c \neq 0$ için eğer $N(cx, t) = 1$ ise, bu durumda

$$t > (\sum_{i=1}^{\infty} |c\xi_i|^2)^{\frac{1}{2}} = |c|(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2)^{\frac{1}{2}}$$

olur. Yani

$$\frac{t}{|c|} > \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

dir. O halde

$$N(cx, t) = N\left(x, \frac{t}{|c|}\right) = 1$$

dir.

Eğer $N(cx, t) = 0.5$ ise bu durumda

$$\sup\{|c\xi_i|\} < t \leq \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |c\xi_i|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

olur. Yani

$$\sup\{|\xi_i|\} < \frac{t}{|c|} \leq \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

olup

$$N\left(x, \frac{t}{|c|}\right) = 0.5$$

dir.

Diğer taraftan $N(cx, t) = 0$ olduğunda $N(cx, t) = N\left(x, \frac{t}{|c|}\right) = 0$ dır.

(N4) Her $x, y \in X$ ve her $s, t \in \mathbb{R}$ için $N(x + y, s + t) \geq \min\{N(x, s), N(y, t)\}$ olduğu gösterilecektir.

$x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ ve $y = (\eta_1, \eta_2, \dots)$ alınsın.

(i) $s + t < 0$

(ii) $s = t = 0$

(iii) $s + t > 0; s > 0, t < 0; s < 0, t > 0$ durumları için

$$N(x + y, s + t) \geq \min\{N(x, s), N(y, t)\}$$

olduğu açıktır. Şimdi de,

(iv) $s > 0, t > 0$ durumu ele alınsın.

Eğer $s > \{\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2\}^{\frac{1}{2}}, t > \{\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^2\}^{\frac{1}{2}}$ ise, bu durumda $N(x, s) = 1$ ve $N(y, t) = 1$ olur.

$$s + t > \{\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2\}^{\frac{1}{2}} + \{\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^2\}^{\frac{1}{2}} \geq \{\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i + \eta_i|^2\}^{\frac{1}{2}} \text{ ise,}$$

$$N(x + y, s + t) = 1 \text{ olduğundan } N(x + y, s + t) \geq \min\{N(x, s), N(y, t)\} .$$

$$\text{Eğer } s > \{\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2\}^{\frac{1}{2}} \text{ ve } \sup\{|\eta_i|\} < t \leq \{\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2\}^{\frac{1}{2}} \text{ ise,}$$

bu durumda $N(x, s) = 1$ ve $N(y, t) = 0.5$ dır. Tanımdan

$$s + t > \{\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2\}^{\frac{1}{2}} + \sup\{|\eta_i|\} \geq \sup\{|\xi_i|\} + \sup\{|\eta_i|\} \geq \sup\{|\xi_i + \eta_i|\}$$

olacağından

$$N(x + y, s + t) \geq 0.5 \geq \min\{(N(x, s), N(y, t))\}$$

bulunur. Diğer durumlar da benzer şekilde gösterilebilir.

(N5) $N(x, .)$ nin tanımından azalmayan bir fonksiyonu olduğu kolayca görülebilir ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N(x, t) = 1$$

dir. Böylece N, X üzerinde bir B-S fuzzy normdur.

(N6) Her $t > 0, N(x, t) > 0$ ise $\sup\{|\xi_i|\} = 0$ olduğundan her $i \in \mathbb{N}$ için, $\xi = 0$ ise $x = 0$ dır.

N' nin α -normları:

$1 > \alpha > 0.5$ için $\|x\|_\alpha = \|x\|_0$ olur.

$0 < \alpha < 0.5$ durumunda $\|x\|_\alpha = \|x\|$ şeklinde olacağından;

açıkça $X, \|x\|_{0.5}$ göre tamdır.

$$x_1 = (1, 0, 0, \dots)$$

$$x_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots \right)$$

$$x_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \dots \right)$$

.....

$$x_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{n.\text{terim}}, 0, \dots \right)$$

olmak üzere X da $\{x_n\}_n$ dizisi göz önüne alınsın. Bu durumda $\|x_n\| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ ve $\|x\|_0 = 1$ dir. O halde,

$$\|x_n - x_{n+p}\| = \max\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+p}}, \frac{1}{\sqrt{n+p}} \right\}$$

böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_{n+p}\| = 0$$

dır. Ayrıca her $t > 0$ için, $\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n - x_{n+p}, t) \geq 0.5$.

Böylece $\{x_n\}_n$ dizisi (X, N) 'de 0.5-Cauchy dizisidir.

Eğer $x = (0, 0, 0, \dots)$ ise, bu durumda $0 < t \leq 1$ olduğunda;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n - x, t) = 0.5 \tag{2.12}$$

olur.

$t > 1$ olduğunda ise;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n - x, t) = 1 \quad (2.13)$$

En az bir $x \neq 0$ ve her $t > 0$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n - x, t) > 0.5$$

olduğu kabul edilsin. Bu durumda Önerme 2.3.15 den,

$$n \rightarrow \infty \text{ iken } \|x_n - x\|_{0.5} \rightarrow 0 \text{ elde edilir.}$$

Her $\alpha \leq 0.5$ için, $\|\cdot\|_\alpha$ ya göre $x_n \rightarrow 0$ olduğundan bu mümkün değildir. Bu durumda (2.12)

ve (2.13) den $\{x_n\}_n$ 0.5-yakınsak değildir.

Dolayısıyla $\|\cdot\|_\alpha$ ya göre tam olan bir dizi α – tam olmak zorunda değildir.

Tanım 2.3.26

$*$: $[0,1] \rightarrow [0,1]$ ikili işlemi verilsin. Eğer $*$ işlemi

(1) $*$ birleşmeli ve değişmeli

(2) Her $a \in [0,1]$ için $a * 1 = a$

(3) Her $a \leq c$ ve $b \leq d$ özelliğini sağlayan her $a, b, c, d \in [0,1]$ için $a * b \leq c * d$ koşulları sağlanıyorsa ve $*$ işlemi sürekli ise bu işleme **sürekli t-norm** denir.

Sıklıkla kullanılan t-normların bazıları aşağıda verilmektedir. Her $a, b \in [0,1]$ için,

$$(i) \ a * b = \min(a, b)$$

$$(ii) \ a * b = ab$$

$$(iii) \ a * b = \max(0, a + b - 1)$$

$*$ işlemlerinin her biri sürekli t-normdur.

$$a * b = \begin{cases} a & , & b = 1 \\ b & , & a = 1 \\ 0 & , & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

t –normlar arasında, $a * b \leq \max(0, a + b - 1) \leq ab \leq \min(a, b)$ ilişkisi vardır. (Bag /and Samanta 2011).

Aşağıdaki tanımda lineer uzaydaki bir B-S anlamında fuzzy normun Tanım 2.3.1 deki (N4) koşulunda “ $\min$ ” ifadesi yerine onun genel bir şekli ele alınmıştır. 2003 de “ $\min$ ” ile verilen tanım 2011 de $*$ ikili işlemi olarak genelleştirilmiştir.

Tanım 2.3.27

$X, \mathbb{R}$ cismi üzerinde bir lineer uzay ve $N, X \times \mathbb{R}$ nin bir fuzzy alt kümesi olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanırsa N' ye bir ***B-S fuzzy norm*** denir.

Her $x, u \in X$ ve $c \in \mathbb{R}$ için,

(N1) Her $t \in \mathbb{R}$ ve $t \leq 0$ için, $N(x, t) = 0$ olur.

(N2) Her $t \in \mathbb{R}$ ve $t > 0$ için $N(x, t) = 1$ olması için gerek ve yeter koşul $x = \underline{0}$ olmasıdır.

(N3) Her $t \in \mathbb{R}$ ve $t > 0, c \neq 0$ için $N(cx, t) = N(x, \frac{t}{|c|})$ dir.

(N4) Her $s, t \in \mathbb{R}$ ve $x, u \in U$ için, $N(x + u, s + t) \geq N(x, s) * N(u, t)$ eşitsizliği geçerlidir.

(N5) $N(x, .), \mathbb{R}$ nin azalmayan bir fonksiyonu ve $\lim_{t \rightarrow \infty} N(x, t) = 1$ eşitsizliğini sağlar.

Bu özellikleri sağlayan $(X, N, *)$ üçlüsüne fuzzy normlu lineer uzay denir. (Bag /and Samanta 2011).

Not 2.3.28

(N4) ten açıkça,

$$N(x_1 + \dots + x_n, t_1 + \dots + t_n) \geq N(x_1, t_1) * \dots * N(x_n, t_n)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Örnek 2.3.29

$X, \mathbb{R}$ cismi üzerinde bir lineer uzay ve $N: X \times \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ tanımlı fonksiyonu,

$$N(x, t) = \begin{cases} \frac{t - \|x\|}{t + \|x\|} & t > \|x\| \\ 0 & t \leq \|x\| \end{cases}$$

olarak verilsin. Bu durumda $(X, N, *)$ fuzzy normlu lineer uzaydır.

Kanıt

(N1), (N2) koşulları tanımdan açıkça sağlanır.

$$(N3) \ t \in \mathbb{R}, t > 0 \text{ ve } c \neq 0 \text{ için, } N(cx, t) = \frac{t - \|cx\|}{t + \|cx\|} = \frac{t - |c|\|x\|}{t + |c|\|x\|} = \frac{\frac{t}{|c|} - \|x\|}{\frac{t}{|c|} + \|x\|} = N(x, \frac{t}{|c|})$$

olup $N(cx, t) = N(x, \frac{t}{|c|})$ eşitliği gösterilmiş olur.

(N4) $x, y \in X$ ve $s, t \in \mathbb{R}$ olsun.

$t \leq \|x\|$ ve $s \leq \|y\|$ için,

$$N(x + y, t + s) = \frac{t + s - \|x + y\|}{t + s + \|x + y\|} \geq \frac{t + s - \|x\| - \|y\|}{t + s + \|x\| + \|y\|}$$

eşitsizliği yazılabilir. Genelliği bozmadan,

$$N(x, t) < N(y, s)$$

olsun. Bu durumda

$$\min\{N(x, t), N(y, s)\} = N(x, t)$$

dir. $N(x + y, s + t)$ için,

$$\frac{t + s - (\|x\| + \|y\|)}{t + s + (\|x\| + \|y\|)} - \frac{t - \|x\|}{t + \|x\|}$$

ifadesinde paydalar eşitlendiğinde,

$$\frac{t\|x\| + s\|y\|}{t + s + (\|x\| + \|y\|)}$$

ifadesi elde edilir. Burada pay ve payda pozitif olduğundan,

$$\frac{t\|x\| + s\|y\|}{t + s + (\|x\| + \|y\|)} > 0$$

dır. O halde

$$\frac{t + s - (\|x\| + \|y\|)}{t + s + (\|x\| + \|y\|)} > \frac{t - \|x\|}{t + \|x\|}$$

olur. Bu durumda,

$$N(x + y, t + s) > N(x, t) = \min\{N(x, t), N(y, s)\}$$

eşitsizliği yazılabilir. Böylece

$$\begin{aligned} N(x + y, t + s) &= \frac{t + s - \|x + y\|}{t + s + \|x + y\|} \geq \frac{t + s - \|x\| - \|y\|}{t + s + \|x\| + \|y\|} \geq \min\left\{\frac{t - \|x\|}{t + \|x\|}, \frac{s - \|y\|}{s + \|y\|}\right\} \\ &\geq N(x, t) * N(y, s) \end{aligned}$$

olup özellik kanıtlanmış olur.

(N5) $N(x, \cdot)$ azalmayandır. Gerçekten,

$$1) \quad t_1 \leq t_2 \leq \|x\| \text{ olsun.}$$

$$N(x, t_1) = 0 = N(x, t_2)$$

eşitliği elde edilir.

$$2) \quad \|x\| < t_1 \leq t_2 \text{ olsun. Bu durumda,}$$

$$N(x, t_1) = \frac{t_1 - \|x\|}{t_1 + \|x\|} \text{ ve } N(x, t_2) = \frac{t_2 - \|x\|}{t_2 + \|x\|} \text{ şeklinde tanımlı olup,}$$

$t_1 \leq t_2$ olduğundan,

$$\frac{t_1 - \|x\|}{t_2 + \|x\|} \leq \frac{t_1 - \|x\|}{t_1 + \|x\|} \leq \frac{t_2 - \|x\|}{t_2 + \|x\|}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Buradan

$$N(x, t_1) \leq N(x, t_2)$$

eşitsizliği doğrudur.

$$3) \quad t_1 \leq \|x\| < t_2 \text{ için,}$$

$$N(x, t_1) = 0 \text{ ve } N(x, t_2) = \frac{t_2 - \|x\|}{t_2 + \|x\|}$$

olduğundan,

$$t_2 > 0, N(x, t_1) = 0 < N(x, t_2)$$

olup $N(x, \cdot)$ azalmayandır.

Böylece (N1)-(N5) den $(X, N, *)$ fuzzy normlu lineer uzaydır.

Örnek 2.3.30

$(X = \mathbb{R}^2)$, $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $x = (x_1, x_2) \in X$, $N: X \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$

$$N(x, t) = \begin{cases} \frac{t^2}{(t + |x_1|)(t + |x_2|)} & , \quad t > 0 \\ 0 & , \quad t \leq 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı ve

$$a * b = \begin{cases} a & , \quad b = 1 \\ b & , \quad a = 1 \\ 0 & , \quad \text{aksi durumda} \end{cases}$$

olarak verilsin. $(X, N, *)$, $a * b = \min(a, b)$ olarak alınırsa, $(X, N, *)$ fuzzy normlu lineer uzay değildir. Fakat $a * b = ab$ t -norm sürekli olarak alınırsa fuzzy normlu lineer uzaydır.

Kanıt

İlk olarak $(X, N, *)$, $a * b = \min(a, b)$ olarak alındığında fuzzy normlu lineer uzay olmadığı gösterilecektir.

$x = (1, 0)$, $y = (0, 1)$, $t = s = 1$ olarak alınırsa;

$$N(x, t) = \frac{1}{2} = N(y, s) \text{ ve } N(x + y, t + s) = \frac{4}{9}$$

eşitlikleri geçerlidir. Buradan

$N(x + y, t + s) < \min\{N(x, t), N(y, s)\}$ olacaktır. Dolayısıyla N , (N4) koşulunu sağlamaz.

Yani $a * b = \min(a, b)$ olarak alınırsa $(X, N), *$ fuzzy normlu lineer uzay değildir.

$a * b = ab$ olarak alındığında fuzzy norm koşullarının sağlandığı gösterilmelidir.

(N1) Her $t \in \mathbb{R}$, $t \leq 0$ için, tanımdan açıkça $N(x, t) = 0$ dır.

(N2) Her $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$ için, $N(x, t) = 1$ olsun. Bu durumda

$$\frac{t^2}{(t + |x_1|)(t + |x_2|)} = 1$$

dir. Bu ise

$$t^2 = t^2 + t(|x_1| + |x_2|) + |x_1 x_2|$$

olması demektir. Böylece her $t > 0$ için,

$$t(|x_1| + |x_2|) + |x_1 x_2| = 0$$

olur. Dolayısıyla

$$|x_1| = 0, |x_2| = 0 \text{ yani } x = \underline{0} \text{ dır.}$$

Tersine $x = \underline{0}$ olsun. Her $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$ için, tanımdan açıkça $N(x, t) = 1$ dir.

(N3) Her $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$ ve $c \neq 0$ için,

$$N(cx, t) = \frac{t^2}{(t + |x_1|)(t + |x_2|)} = \frac{\left(\frac{t}{c}\right)^2}{\left(\frac{t}{|c|} + |x_1|\right)\left(\frac{t}{|c|} + |x_2|\right)} = N\left(x, \frac{t}{|c|}\right)$$

eşitliği geçerlidir.

(N4) $t > 0, s > 0$ olsun. Bu durumda,

$$N(x + y, t + s) - (N(x, t) * N(y, s)) = \frac{(t+s)^2}{(t+s+|x_1+y_1|)(t+s+|x_2+y_2|)} - \frac{t^2 s^2}{(t+|x_1|)(t+|x_2|)(s+|y_1|)(s+|y_2|)}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{t^2+2st+s^2}{(t+s+|x_1|+|y_1|)(t+s+|x_2|+|y_2|)} - \frac{t^2s^2}{(t^2+t|x_1|+t|x_2|+|x_1x_2|)(s^2+s|y_1|+s|y_2|+|y_1y_2|)} \\
&= \{(t^2+2st+s^2)(t^2s^2+t^2s|y_1|+t^2s|y_1|+t^2s|y_2|+t^2|y_1y_2|+ts^2|x_1|+ \\
&ts|x_1y_1|ts|x_1y_2|+t|x_1y_1y_2|+t^2s|x_2|+ts|x_2y_1|+ts|x_2y_2|+t|x_2y_1y_2|+s^2|x_1x_2|+ \\
&s|x_1x_2y_2|+s|x_1x_2y_2|+|x_1x_2y_1y_2|)-t^2s(t^2s^2(t^2+st+t|x_2|+t|y_2|+st+s^2+ \\
&s|x_2|+s|y_2|+t|x_1|+s|x_1|+|x_1x_2|+|x_1y_2|+t|y_1|+s|y_1|+|y_1x_2|+|y_1y_2|))\} \\
&\times \left(\frac{1}{(t+s+|x_1|+|y_1|)(t+s+|x_2|+|y_2|)(t^2+t|x_1|+t|x_2|+|x_1x_2|)(s^2+s|y_1|+s|y_2|+|y_1y_2|)} \right) \\
&= \{(t^4s^2+t^4s|y_1|+t^4s|y_2|+t^4|y_1y_2|+t^3s^2|x_1|+t^3s|x_1y_2|+t^3|x_1x_2y_2|+ \\
&t^3s^2|x_2|+t^3s|x_2y_1|+t^3s|x_2y_2|+t^3|x_2y_1y_2|+t^2s^2|x_1x_2|+t^2s^2|x_1x_2|+ \\
&t^2s|x_1x_2y_1|+t^2s|x_1x_2y_2|+t^2|x_1x_2y_1y_2|+2s^3t^3+2s^2t^3|y_1|+2s^2t^3|y_2|+ \\
&2st^3|y_1y_2|+2s^3t^2|x_1|+2t^2s^2|x_1y_1|+2t^2s^2|x_1y_2|+2st^2|x_1y_1y_2|+2t^2s^3|x_2|+ \\
&2t^2s^2|x_2y_1|+2s^2t^2|x_2y_2|+2st^2|x_2y_1y_2|+2s^3t|x_1x_2|+2s^2t|y_1x_1x_2|+ \\
&2s^2t|y_2x_1x_2|+2st|y_1y_2x_1x_2|+s^4t^2+s^3t^2|y_1|+s^3t^2|y_2|+s^2t^2|y_1y_2|+s^4t|x_1|+ \\
&s^3t|y_1x_1|+s^3t|x_1y_2|+s^2t|y_1x_1y_2|+s^4t|x_2|+s^3t|y_1x_2|+s^3t|y_2x_2|+s^2t|y_1y_2x_2|+ \\
&s^4|x_1x_2|+s^3|y_1x_1x_2|+s^3|y_2x_1x_2|+s^2|y_1y_2x_1x_2|)-(s^2t^4+s^3t^3+s^2t^3|x_2|+ \\
&s^2t^3|y_2|+s^3t^3+s^4t^2+s^3t^2|x_2|+s^2t^3|x_1|+s^3t^2|x_1|+s^3t^2|x_1|+s^2t^2|x_1x_2|+ \\
&s^2t^2|x_1y_2|+s^2t^3|y_1|+s^3t^2|y_1|+s^2t^2|y_1y_2|+s^2t^2|y_1x_2|s^2t^2|y_1y_2|)\} \\
&\times \left\{ \frac{1}{(t+s+|x_1|+|y_1|)(t+s+|x_2|+|y_2|)(t^2+t|x_1|+t|x_2|+|x_1x_2|)(s^2+s|y_1|+s|y_2|+|y_1y_2|)} \right\} \\
&= \{(\underbrace{t^4s^2}_{(i)}+t^4s|y_1|+t^4s|y_2|+t^4|y_1y_2|+\underbrace{t^3s^2|x_1|}_{(ii)}+t^3s|x_1y_1|+t^3s|x_1y_2|+t^3|x_1y_1y_2| \\
&+\underbrace{t^3s^2|x_2|}_{(iii)}+t^3s|x_2y_1|+t^3s|x_2y_2|+t^3|x_2y_1y_2|+\underbrace{t^2s^2|x_1x_2|}_{(iv)}+t^2s|x_1x_2y_1| \\
&+t^2s|x_1x_2y_2|+t^2|x_1x_2y_1y_2|+\underbrace{2s^3t^3}_{(v)}+\underbrace{2s^2t^3|y_1|}_{(vi)}+\underbrace{2s^2t^3|y_2|}_{(vii)}+2st^3|y_1y_2|+\underbrace{2s^3t^2|x_1|}_{(viii)} \\
&+2t^2s^2|x_1y_1|+\underbrace{2t^2s^2|x_1y_2|}_{(ix)}+2st^2|x_1y_1y_2|+\underbrace{2t^2s^3|x_2|}_{(x)}+\underbrace{2t^2s^2|x_2y_1|}_{(xi)}+2s^2t^2|x_2y_2| \\
&+2st^2|x_2y_1y_2|+2s^3t|x_1x_2|+2s^2t|y_1x_1x_2|+2s^2t|y_2x_1x_2|+2st|y_1y_2x_1x_2|+\underbrace{s^4t^2}_{(xii)})\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \underbrace{s^3 t^2 |y_1|}_{(xiii)} + \underbrace{s^3 t^2 |y_2|}_{(xiv)} + \underbrace{s^2 t^2 |y_1 y_2|}_{(xv)} + s^4 t |x_1| + s^3 t |y_1 x_1| + s^3 t |x_1 y_2| + s^2 t |y_1 x_1 y_2| \\
& + s^4 t |x_2| + s^3 t |y_1 x_2| + s^3 t |y_2 x_2| + s^2 t |y_1 y_2 x_2| + s^4 |x_1 x_2| + s^3 |y_1 x_1 x_2| + s^3 |y_2 x_1 x_2| + \\
& s^2 |y_1 y_2 x_1 x_2| - (\underbrace{s^2 t^4}_{(i)} + \underbrace{2s^3 t^3}_{(ii)} + \underbrace{s^2 t^3 |x_2|}_{(iii)} + \underbrace{s^2 t^3 |y_2|}_{(iv)} + \underbrace{s^4 t^2}_{(v)} + \underbrace{s^3 t^2 |x_2|}_{(vi)} + \underbrace{s^3 t^2 |y_2|}_{(vii)} + \\
& \underbrace{s^2 t^3 |x_1|}_{(viii)} + \underbrace{s^3 t^2 |x_1|}_{(ix)} + \underbrace{s^2 t^2 |x_1 x_2|}_{(x)} + \underbrace{s^2 t^2 |x_1 y_2|}_{(xi)} + \underbrace{s^2 t^3 |y_1|}_{(xii)} + \underbrace{s^3 t^2 |y_1|}_{(xiii)} + \underbrace{s^2 t^2 |y_1 x_2|}_{(xiv)} \\
& + \underbrace{s^2 t^2 |y_1 y_2|}_{(xv)}) \times \left\{ \frac{1}{(t+s+|x_1|+|y_1|)(t+s+|x_2|+|y_2|)(t^2+t|x_1|+t|x_2|+|x_1 x_2|)(s^2+s|y_1|+s|y_2|+|y_1 y_2|)} \right\} > 0.
\end{aligned}$$

Gerekli sadeleştirmeler yapılarak $N(x+y, t+s) \geq N(x, t) * N(y, s)$ eşitsizliği gösterilmiş olur.

$$(N5) \lim_{t \rightarrow \infty} N(x, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2}{(t+|x_1|)(t+|x_2|)} = 1.$$

Böylece $a * b = ab$ olarak alındığında $(X, N, *)$ fuzzy normlu lineer uzaydır.

Uyarı 2.3.31

Bu örnekte verilen ikili işlem $a * b = ab$ olarak alınırsa $N(x, t)$ yardımıyla elde edilen $\|x\|_\alpha$ klasik anlamda bir norm değildir.

$N(x, t) \geq \alpha$ olsun. Bu durumda,

$$\frac{t^2}{(t+|x_1|)(t+|x_2|)} \geq \alpha$$

dır. Buradan,

$$t^2 \geq \alpha t^2 + t\alpha(|x_1| + |x_2|) + \alpha|x_1||x_2|$$

olacaktır. O halde,

$$(1 - \alpha)t^2 - t\alpha(|x_1| + |x_2|) - \alpha|x_1||x_2| \geq 0$$

eşitsizliği doğru olur. Bu durumda

$$(t - \alpha)(t - b) \geq 0$$

yazılabileceğinden

$$(1 - \alpha)t^2 - t\alpha(|x_1| + |x_2|) - \alpha|x_1||x_2| = 0$$

denkleminin kökleri,

$$a = \frac{\alpha(|x_1| + |x_2|) + \sqrt{\alpha^2(|x_1| + |x_2|)^2 + 4\alpha(1 - \alpha)|x_1||x_2|}}{2(1 - \alpha)}$$

ve

$$b = \frac{\alpha(|x_1| + |x_2|) - \sqrt{\alpha^2(|x_1| + |x_2|)^2 + 4\alpha(1 - \alpha)|x_1||x_2|}}{2(1 - \alpha)}$$

olur. Bu nedenle her $\alpha \in (0,1)$ için,

$$\|x\|_\alpha = \wedge\{t > 0 : N(x, t) \geq \alpha\} = \frac{\alpha(|x_1| + |x_2|) + \sqrt{\alpha^2(|x_1| + |x_2|)^2 + 4\alpha(1 - \alpha)|x_1||x_2|}}{2(1 - \alpha)}$$

dır. $x = (1,0)$ ve $y = (0,1)$ alınsın. Bu durumda her $\alpha \in (0,1)$ için,

$$\|x\|_\alpha = \frac{\alpha}{1 - \alpha}, \|y\|_\alpha = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \text{ ve } \|x + y\|_\alpha = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha}}{1 - \alpha}$$

olacaktır. Dolayısıyla her $\alpha \in (0,1)$ için,

$$\|x\|_\alpha + \|y\|_\alpha = \frac{2\alpha}{1 - \alpha} = \frac{\alpha + \alpha}{1 - \alpha} < \frac{\alpha + \sqrt{\alpha}}{1 - \alpha} = \|x + y\|_\alpha$$

bulunur. Bu durumda normun üçgen eşitsizliği sağlanmaz.

2.4 SAADATİ VAEZPOUR ANLAMINDA FUZZY NÖRMLÜ UZAY

Tanım 2.4.1

X bir vektör uzay, $*$ dönüşümü sürekli bir t -norm ve N 'de $X \times]0, +\infty[$ üzerinde bir fuzzy küme olsun. Her $x, y \in X$ ve $t, s > 0$ için aşağıdaki koşulları sağlayan N 'ye fuzzy norm denir.

- i) $N(x, t) > 0$
- ii) $N(x, t) = 1 \Leftrightarrow x = 0$

- iii) $\forall \alpha \neq 0$ için $N(\alpha x, t) = N(x, t / |\alpha|)$
- iv) $N(x, t) * N(y, s) \leq N(x + y, s + t)$
- v) $N(x, \cdot) :]0, \infty[\rightarrow [0, 1]$ 'e sürekli
- vi) $\lim_{t \rightarrow \infty} N(x, t) = 1$

$(X, N, *)$ üçlüsüne Saadati -Vaezpour anlamında fuzzy norm denir (Saadati /and Vaezpour 2005).

Kısaca S-V fuzzy norm ile gösterilecektir.

Örnek 2.4.2

$X = \mathbb{R}$ olsun. $a, b \in [0, 1]$ için $a * b = ab$ olsun. $N, \mathbb{R} \times (0, \infty)$ üzerinde şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda $(X, N, *)$ üçlüsü bir fuzzy normlu uzaydır.

Çözüm

(i) Açıkça $N(x, t) = \frac{1}{e^{\frac{\|x\|}{t}}} > 0$

(ii) $N(x, t) = \frac{1}{e^{\frac{\|x\|}{t}}} = 1 \Leftrightarrow e^{\frac{\|x\|}{t}} = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{\|x\|}{t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \|x\| = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

olur.

(iii) $(\alpha \neq 0)$ için norm kullanılarak,

$$N(\alpha x, t) = \frac{1}{e^{\frac{\|\alpha x\|}{t}}} = \frac{1}{e^{\frac{|\alpha| \|x\|}{t}}} = \frac{1}{e^{\frac{\|x\|}{t/|\alpha|}}} = N(x, \frac{t}{|\alpha|})$$

eşitliği geçerli olur.

(iv) $x, y \in X$ ve $t, s > 0$ için

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

olduğundan

$$\|x + y\| \leq \left(\frac{t+s}{t}\right)\|x\| + \left(\frac{t+s}{s}\right)\|y\|$$

bulunur. Buradan

$$\frac{\|x + y\|}{t+s} \leq \frac{\|x\|}{t} + \frac{\|y\|}{s}$$

elde edilir. Üstel fonksiyonun özelliğinden

$$e^{\frac{\|x+y\|}{t+s}} \leq e^{\frac{\|x\|}{t} + \frac{\|y\|}{s}} = e^{\frac{\|x\|}{t}} \cdot e^{\frac{\|y\|}{s}}$$

olup

$$\frac{1}{e^{\frac{\|x\|}{t}}} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\|y\|}{s}}} \leq \frac{1}{e^{\frac{\|x+y\|}{t+s}}}$$

bulunur. Buradan

$$N(x, t) * N(y, s) \leq N(x + y, t + s)$$

eşitsizliği elde edilir.

(v) e^x üstel fonksiyonu sürekli olduğundan $N(x, .): (0, \infty) \rightarrow (0, 1]$ süreklidir.

$$(vi) \lim_{t \rightarrow \infty} N(x, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\frac{\|x\|}{t}}} = \frac{1}{e^0} = 1.$$

O halde $(X, N, *)$ bir fuzzy normlu uzaydır.

Uyarı 2.4.3

2.4.2 deki Örnek Bag-Samanta tanımıyla incelenirse,

(N1) Her $t \leq 0$ için $N(x, t) = \frac{1}{e^{\frac{\|x\|}{t}}} \neq 0$ olduğundan $N(x, t) = 0$ koşulunu sağlamaz ancak

$$N(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{e^{\frac{\|x\|}{t}}} & , \quad t > 0 \\ 0 & , \quad t = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa (N1) koşulu sağlanır. Açıkça diğer koşullarda geçerlidir. O halde $t = 0$ durumunu da içeren bu fonksiyon Bag-Samanta anlamında da bir fuzzy normdur.

Örnek 2.4.4

$(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun. $a, b \in [0,1]$ için $a * b = ab$ ve $x \in X, t > 0$ olmak üzere

$$N(x, t) = \frac{t}{t + \|x\|}$$

biçiminde tanımlanan N dönüşümü, X üzerinde Saadati Vaezpour anlamında fuzzy norm olup $(X, N, *)$ bir fuzzy normlu uzaydır.

Kanıt

(i) Açıkça $N(x, t) = \frac{t}{t + \|x\|} > 0$

(ii) $N(x, t) = \frac{t}{t + \|x\|} = 1 \Leftrightarrow t = t + \|x\|$

$$\Leftrightarrow \|x\| = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

dır.

(iii) $(\alpha \neq 0)$ olmak üzere,

$$N(\alpha x, t) = \frac{t}{t + \|\alpha x\|} = \frac{t}{t + |\alpha| \|x\|} = \frac{\frac{t}{|\alpha|}}{\frac{t}{|\alpha|} + \|x\|} = N(x, \frac{t}{|\alpha|})$$

eşitliklerinden $N(\alpha x, t) = N(x, \frac{t}{|\alpha|})$ dir.

(iv) $x, y \in X$ ve $t, s > 0$ olsun. Klasik normun $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
 N(x, t) * N(y, s) &= \frac{t}{t + \|x\|} \cdot \frac{s}{s + \|y\|} = \frac{t \cdot s}{(t + \|x\|)(s + \|y\|)} \\
 &\leq \frac{t + s}{t + s + \|x\|} \cdot \frac{s + t}{s + t + \|y\|} \\
 &= \frac{(t + s)^2}{(t + s)^2 + (t + s)\|y\| + (t + s)\|x\| + \|x\| \cdot \|y\|} \\
 &\leq \frac{(t + s)^2}{(t + s)^2 + (t + s)(\|x\| + \|y\|)} \\
 &\leq \frac{(t + s)^2}{(t + s)(\|x\| + \|y\|)} \\
 &= \frac{t + s}{(t + s)(t + s + \|x + y\|)} \\
 &= \frac{t + s}{t + s + \|x + y\|} \\
 &= N(x + y, t + s)
 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $N(x + y, t + s) \geq N(x, t) * N(y, s)$ eşitsizliği kanıtlanmış olur.

$t > 0$ olduğundan,

(v) $N(x, .): (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonunun sürekli olduğu açıktır.

(vi) Açıkça $\lim_{t \rightarrow \infty} N(x, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{t + \|x\|} = 1$ sağlanır.

O halde $(X, N, *)$ Sadati Vaezpour anlamında bir fuzzy normlu uzaydır. Bu norma $\|\cdot\|$ normu tarafından indirgenmiş standart fuzzy norm denir.

BÖLÜM 3

BİR LİNEER UZAYDAKİ FUZZY NORMLARIN KARŞILAŞTIRILMASI

Şimdi literatürdeki farklı yazarlar tarafından tanımlanan fuzzy norm ve fuzzy lineer uzay tanımlarının karşılaştırması yapılacaktır.

Felbin tanımını ve Bag-Samanta tanımını şu şekildeydi.

Tanım 2.2.1

X , $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzay olsun. $L, R: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$, $L(0,0) = 0$, $R(1,1) = 1$ koşullarını sağlayan simetrik azalmayan dönüşümler olsun. Her $x \in X$ ve $0 < \alpha_0 \leq 1$ koşulunu sağlayan uygun her $\alpha < \alpha_0$ için;

$$A) \|x\|_{\alpha}^{+} < \infty$$

$$B) \inf \|x\|_{\alpha}^{-} > 0$$

koşulları sağlanmak üzere $[\|x\|]_{\alpha} = [\|x\|_{\alpha}^{-}, \|x\|_{\alpha}^{+}]$ olsun. Bu durumda

$$\bar{0}(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

olmak üzere,

$$i) \|x\| = \bar{0} \Leftrightarrow x = \underline{0}$$

$$ii) x \in X, r \in \mathbb{R}, \|rx\| = \|x\||r|, x, y \in X, s, t \in \mathbb{R} \text{ için,}$$

$$iii) \forall x, y \in X \text{ ve } s, t \in \mathbb{R} \text{ için } L(x, y) = \min\{x, y\} \text{ ve } R(x, y) = \max\{x, y\} \text{ olmak üzere,}$$

$$1) s \leq \|x\|_{\alpha}^{-}, t \leq \|x\|_{\alpha}^{-} s + t \leq \|x + y\|_{\alpha}^{-}$$

$$\|x + y\| (s + t) \geq L(\|x\|(s), \|y\|(t))$$

ve

$$2) s \geq \|x\|_{\alpha}^{-}, t \geq \|x\|_{\alpha}^{-} s + t \geq \|x + y\|_{\alpha}^{-} \text{ ise,}$$

$$\|x + y\|(s + t) \leq R(\|x\|(s), \|y\|(t))$$

özelliklerini sağlayan $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ şeklinde tanımlı dönüşüme **fuzzy norm** ve $(X, \|\cdot\|, L, R)$ uzayına da **fuzzy normlu lineer uzay** denir.

Uyarı 2.2.3

Tanımda $L = \wedge (min)$ ve $U = \vee (max)$ dönüşümü olarak alınırsa tanımdaki üçgen eşitsizliği

$$\|x + y\| \leq \|x\| \oplus \|y\| \text{ halini alır. } (x \oplus y)(t) = \sup_{s \in \mathbb{R}} \min\{x(s), y(t-s)\}$$

Tanım 3.1.2

$X, \mathbb{R}$ de lineer uzay olsun. $N: X \times \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu X üzerinde eğer aşağıdaki şartları sağlarsa N ' ye **Bag-Samanta anlamında fuzzy normdur** denir. Her $x, y \in X$ ve $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $s, t \in \mathbb{R}$ için,

(N₁) Her $t \leq 0$ için, $N(x, t) = 0$ dır.

(N₂) $x = 0$ olması için gerekli ve yeterli koşul her $t > 0$ için $N(x, t) = 1$ olmasıdır.

(N₃) $N(cx, t) = N(x, \frac{t}{|c|})$ eşitliği geçerlidir.

(N₄) $N(x + y, s + t) \geq \min\{N(x, s), N(y, t)\}$ dır.

(N₅) $N(x, \cdot)$ $\mathbb{R}^+$ de azalmayan bir fonksiyon ve $\lim_{t \rightarrow \infty} N(x, t) = 1$ olur.

(X, N) çiftine $B - S$ anlamında fuzzy normlu lineer uzay denir. Her $x, y \in X$ ve $t \in \mathbb{R}$ için x' in normu $N(x, t) \in [0,1]$ ile gösterilir.

3.1 B-S FUZZY NORM VE B-S FUZZY TERS NORMUN BAZI ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde norm tanımları arasında karşılaştırma yapabilmek için daha önce Teorem 2.3.3 de verilen N' fonksiyonunun tanımında kullanılan $\alpha, (0,1]$ aralığına genişletilerek fuzzy ters norm ve bazı özellikleri verilecektir.

Teorem 3.1.1

$\|\cdot\|_\alpha: \alpha \in (0,1], X$ lineer uzayı üzerinde normların artan ailesi ve $N: X \times \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ e tanımlı foksiyonu,

$$N'(x, t) = \begin{cases} \vee \{ \alpha \in (0,1): \|x\|_\alpha \leq t \} , & (x, t) \neq (0, 0) \\ 0 , & (x, t) = (0,0) \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olsun.

(a) N' , X üzerinde bir B-S fuzzy normdur.

(b) Her $x \in X$ için en az bir $t = t(x) > 0$ vardır öyle ki her $s \geq t$ için $N(x, s) = 1$ dir.

(Bag /and Samanta 2007)

Kanıt

(a) nın ispatı 2.3.5 Teoremde yapılmıştı. Bu nedenle yalnızca (b) şıkkı kanıtlanacaktır.

(b) Her $x \in X$ için, $\|x\|_1$ tanımlıdır ve böylece $\|x\|_1 \leq t$ olacak şekilde en az bir

$t = t(x) > 0$ vardır. Bu durumda $N'(x, t) = \max\{\alpha \in (0,1]: \|x\|_1 \leq t\} = 1$ bulunur.

Tanım 3.1.2

$X, \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı bir lineer uzay olsun. Her $x, u \in X$ ve $c \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki özellikleri sağlayan $X \times \mathbb{R}$ nin bir N^* fuzzy alt kümesine ***B-S fuzzy anti norm*** denir.

(N^*1) Her $t \in \mathbb{R}$, $t \leq 0$ için $N^*(x, t) = 1$ dir.

(N^*2) Her $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$ için $N^*(x, t) = 0$ olması için gerekli ve yeterli koşul $x = \underline{0}$ olmasıdır.

(N^*3) Her $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$ ve $c \neq 0$ için $N^*(cx, t) = N^*(x, \frac{t}{|c|})$ dir.

(N^*4) Her $s, t \in \mathbb{R}$ ve $x, u \in X$ için, $N^*(x + u, s + t) \geq \max\{N^*(x, s), N^*(u, t)\}$ dir.

(N^*5) $N^*(x, .)$, $\mathbb{R}$ nin artmayan bir fonksiyonudur ve $\lim_{t \rightarrow \infty} N^*(x, t) = 0$ dir.

(X, N^*) uzayına ***fuzzy anti normlu lineer uzay*** denir. (Bag /and Samanta 2007)

Uyarı 3.1.3

N^* fonksiyonu X üzerinde bir B-S fuzzy anti norm olması ile $1 - N^*$ ın X üzerinde bir fuzzy norm olması denk kavramlardır.

(N^*6) Her $t > 0$ için $N^*(x, t) < 1$ olması durumunda açıkça $x = \underline{0}$ özeliği sağlanır.

Teorem 3.1.4

N^* X lineer uzayı üzerinde (N^*6) yı sağlayan B-S fuzzy anti norm olsun. $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere, $\|x\|_\alpha^* = \bigwedge \{t > 0: N^*(x, t) < \alpha\}$ olarak tanımlanırsa bu durumda,

$\{\|\cdot\|_\alpha^*: \alpha \in (0,1]\}$ ailesi X üzerinde normun artmayan ailesidir.

Kanıt

(i) Her $\alpha \in (0,1]$ ve her $x \in X$ için açıkça $\|x\|_\alpha^* \geq 0$ dır.

(ii) $N^*(x, t)$ nin tanımından $\|x\|_\alpha^* = 0$ olması için gerekli ve yeterli koşul $x = \underline{0}$ olmasıdır.

(iii) Her $\alpha \in (0,1]$ ve c skaleri için açıkça $\|cx\|_\alpha^* = |c|\|x\|_\alpha^*$ dir.

O halde yalnızca iv) özelliğin gösterilmesi yeterlidir.

(iv) Her $\alpha \in (0,1]$ için $\|x + y\|_\alpha^* \leq \|x\|_\alpha^* + \|y\|_\alpha^*$ olduğu gösterilmelidir.

$$\|x\|_\alpha^* + \|y\|_\alpha^* = \min\{s > 0: N^*(x, s) < \alpha\} + \min\{t > 0: N^*(y, t) < \alpha\}$$

$$= \min\{s + t > 0: N^*(x, s) < \alpha, N^*(y, t) < \alpha\}$$

$$\geq \min\{s + t > 0: N^*(x + y, s + t) < \alpha\} = \|x + y\|_\alpha^*$$

dır. Açıkça $\alpha_2 > \alpha_1$ için, $\|x\|_{\alpha_1}^* \geq \|x\|_{\alpha_2}^*$ dir. Böylece $\{\|\cdot\|_\alpha^*: \alpha \in (0,1]\}$ ailesi X lineer uzayı üzerinde normun artmayan ailesidir.

Teorem 3.1.5

$\{\|\cdot\|_\alpha^* : \alpha \in (0,1]\}$, X üzerinde normun artmayan ailesi olsun. $N' : X \times \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ tanımlı fonksiyonu,

$$N''(x, t) = \begin{cases} \bigwedge \{ \alpha \in (0,1] : \|x\|_\alpha^* \leq t \}, & (x, t) \neq (\underline{0}, 0) \\ 1 & , (x, t) = (\underline{0}, 0) \end{cases}$$

ile verilsin. Bu durumda N'' , X üzerinde B-S fuzzy anti normdur.

Kanıt

(N^*1) Her $x \in X$ ve her $t \leq 0$ için, $N''(x, t) = 1$ dir.

(N^*2) Her $t > 0$ için, $N''(x, t) = 0$ olması için gerekli ve yeterli koşul $x = \underline{0}$ olmasıdır.

(N^*3) Her $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$ ve $c \neq 0$ için açıkça $N''(cx, t) = N''\left(x, \frac{t}{|c|}\right)$ dır.

(N^*4) Her $s, t \in \mathbb{R}$ ve $x, u \in X$ için ;

$N''(x + u, s + t) \leq \max\{N''(x, s), N''(u, t)\}$ olduğu gösterilmelidir.

Kabul edelim ki $N''(x + u, s + t) > \max\{N''(x, s), N''(u, t)\}$ olsun. Bu durumda

$$N''(x + u, s + t) > k > \max\{N''(x, s), N''(u, t)\} \quad (3.1)$$

olacak şekilde bir k seçilirse,

$N''(x + u, s + t) > k$ olduğundan

$\bigwedge \{ \alpha \in (0,1] : \|x + u\|_\alpha^* \leq s + t \} > k$ dır.

$\|x\|_k^* + \|u\|_k^* > s + t$ olur.

Diğer taraftan yine (3.1) den $k > \max\{N''(x, s), N''(u, t)\}$ olduğundan $k > N''(x, s)$ ve $k > N''(u, t)$ olur.

Bu durumda,

$\|x\|_k^* \leq s$ ve $\|u\|_k^* \leq t$ olduğundan $\|x\|_k^* + \|u\|_k^* \leq s + t$ olur.

O halde,

$$s + t < \|x\|_k^* + \|u\|_k^* \leq s + t$$

olur. Bu ise bir çelişkidir. Yani,

$$N''(x + u, s + t) \leq \max\{N''(x, s), N''(u, t)\}$$

olmalıdır.

(N*5) Tanımdan $N''(x, \cdot)$, $\mathbb{R}'$ nin artmayan bir fonksiyonudur ve $\lim_{t \rightarrow \infty} N''(x, t) = 0$ dır. Dolayısıyla N'' , X üzerinde bir B-S fuzzy anti normdur.

Uyarı 3.1.6

$x \neq \underline{0}$ için $\|x\|_1^* > 0$. Böylece $\|x\|_1^* > t(x) > 0$ olacak şekilde en az bir $t = t(x) > 0$ vardır. Yani her $\alpha \in (0,1]$, $\|x\|_\alpha^* > t(x)$ iken $N''(x, t) = 1$ dir.

3.2 FELBİN FUZZY NORM VE B-S FUZZY NORMUN KARŞILAŞTIRMASI

Önerme 3.2.1

$(X, \|\cdot\|)$ Felbin fuzzy normlu uzay ve her $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere, $[\|x\|]_\alpha = [\|x\|_\alpha^1, \|x\|_\alpha^2]$ olsun. N ve N^* $X \times \mathbb{R}$ de tanımlı iki fonksiyon olmak üzere,

$$N'(x, t) = \begin{cases} \bigvee \{ \alpha \in (0,1] : \|x\|_\alpha^1 \leq t \} , & (x, t) \neq (\underline{0}, 0) \\ 0 & , \quad (x, t) = (\underline{0}, 0) \end{cases}$$

ve

$$N^*(x, t) = \begin{cases} \bigwedge \{ \alpha \in (0,1] : \|x\|_\alpha^2 \leq t \} , & (x, t) \neq (\underline{0}, 0) \\ 1 & , \quad (x, t) = (\underline{0}, 0) \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa N' bir B-S fuzzy norm ve N^* B-S fuzzy anti normdur. Ayrıca aşağıdaki koşullar sağlanır.

(i) N (N6) koşulunu sağlar.

(ii) N^* , (N^*6) koşulunu sağlar.

(iii) Her $x \neq \underline{0}$ için en az bir $r = r(x) > 0$ vardır öyle ki her $t \geq r$ için $N(x, t) = 1$ dir.

(iv) Her $x \neq \underline{0}$ için en az bir $t_1 = t_1(x) > 0$ vardır ve $N(x, t_1) = 0$ dir.

(v) $N(x, t+) = \lim_{s \downarrow t} N(x, s)$ olmak üzere $N^*(x, t) < 1 \Rightarrow N(x, t+) = 1$ dir.

Kanıt

N' , 3.1.5 ve 2.3.5 Teoremlerden X üzerinde bir B-S fuzzy norm ve N^*, X üzerinde bir B-S fuzzy anti normdur.

(i) Her $t > 0$ için, $N'(x, t) > 0$ olduğundan, her $t > 0$ keyfi olduğundan

$$\max \{ \alpha \in (0,1] : \|x\|_\alpha^1 \leq t \} > 0$$

olur. Ayrıca her $t > 0$ için en az bir $\alpha = \alpha(t) \in (0,1]$ vardır öyle ki $\|x\|_\alpha^1 \leq t$ dir.

$t > 0$ keyfi olduğundan $\inf_{\alpha \in (0,1]} \|x\|_\alpha^1 = 0$ olur.

Bu ise $x = \underline{0}$ (Felbin-fuzzy normun (B) koşulundan) olması demektir.

Dolayısıyla N' normu, (N6) koşulunu sağlar.

(ii) Her $t > 0$ için $N^*(x, t) < 1$ olsun. Bu durumda

Her $t > 0$ için, $\wedge \{ \alpha \in (0,1] : \|x\|_\alpha^2 \leq t \} < 1$ olur.

Buradan her $t > 0$ için en az bir $\alpha = \alpha(t) \in (0,1]$ vardır öyle ki $\|x\|_\alpha^2 \leq t$ eşitsizliği sağlanır.

$\| \cdot \|_{\alpha}^1 \leq \| \cdot \|_{\alpha}^2$ olduğundan $\|x\|_{\alpha}^1 \leq t$ dir.

$t > 0$ keyfi olduğundan $\bigwedge_{\alpha \in (0,1]} \|x\|_{\alpha}^1 = 0$ olur. Yani $x = \underline{0}$ dır.

Felbin normundaki B koşulu kullanılarak (N^*6) koşulu sağlandığı gösterilmiş olur.

(iii) Bu koşulun sağlandığı kolayca görülebilir.

(iv) Her $x \neq \underline{0}$ için Felbin-fuzzy normun (B) koşulu kullanılarak $\bigwedge_{\alpha \in (0,1]} \|x\|_{\alpha}^1 > 0$ dir.

Bu nedenle en az bir $t_1 = t_1(x) > 0$ vardır ve her $\alpha \in (0,1]$ için $\|x\|_{\alpha}^1 > t_1$ dir. Bu yüzden

en az bir $t_1 = t_1(x) > 0$ ve her $\alpha \in (0,1]$ için $N(x, t_1) \leq \alpha$ dır. Buradan α keyfi olduğundan en az bir $t_1 = t_1(x) > 0$ için $N(x, t) = 0$ dır.

(v) $N^*(x, t) < 1$ olsun. N^* ın tanımından

$$\bigwedge \{\alpha \in (0,1]: \|x\|_{\alpha}^2 \leq t\} < 1$$

dir. Bu durumda en az bir $\alpha_0 \in (0,1)$ vardır öyle ki $\|x\|_{\alpha_0}^2 \leq t$ dır. Buradan

$$\|x\|_1^2 \leq \|x\|_{\alpha_0}^2 \leq t$$

olur. Böylece her $\alpha \in (0,1]$ için,

$$\|x\|_{\alpha}^1 \leq \|x\|_1^1 \leq \|x\|_1^2 \leq t$$

olduğundan iii) özeliğini kullanarak $N(x, t) = 1$ olur.

Dolayısıyla $N(x, t +) = 1$ eşitliği geçerlidir.

Önerme 3.2.2

X lineer uzayı üzerinde N , B-S fuzzy norm ve N^* , B-S fuzzy anti norm olsun. Önerme 3.2.1 in

(i) ve (v) koşulları sağlanırsa bu durumda, X üzerinde en azından bir Felbin fuzzy norm vardır.

Kanıt

Her $\alpha \in (0,1]$ için

$$\|x\|'_\alpha = \Lambda\{t > 0: N(x, t) \geq \alpha\}$$

ve

$$\|x\|''_\alpha = \Lambda\{t > 0: N(x, t) < \alpha\}$$

olsun. Bu durumda her $\alpha \in (0,1]$ için $(\|x\|'_\alpha, \|x\|''_\alpha)$ çifti klasik normlardır.

Ayrıca $\{\|x\|'_\alpha, \alpha \in (0,1]\}$ ve $\{\|x\|''_\alpha, \alpha \in (0,1]\}$; X üzerinde normların bir ailesidir. Şimdi her $\alpha \in (0,1]$ için;

$$\|x\|'_\alpha \leq \|x\|''_\alpha$$

olduğu gösterilmelidir.

$\|x\|''_\alpha$ nün tanımından $N^*(x, t_n) < 1$ olacak şekilde en az bir $\{t_n\}$ pozitif sayıların dizisi vardır. Böylece;

$$t_n \rightarrow \|x\|''_1$$

olur. Bir önceki önerme 3.2.1'in (v) özelliğinden, her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$N\left(x, t_n + \frac{1}{n}\right) = 1$$

dir. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\|x\|'_1 \leq t_n + \frac{1}{n}$$

eşitsizliği yazılabilir. Dolayısıyla $\|x\|'_1 \leq \|x\|''_1$ olur.

Her $\alpha \in (0,1]$ için,

$$\|x\|'_\alpha \leq \|x\|'_1 \leq \|x\|''_1 \leq \|x\|''_\alpha$$

eşitsizliği geçerli olacaktır. O halde $\{[\|x\|'_\alpha, \|x\|''_\alpha], \alpha \in (0,1]\}$ aralıkların bir ailesidir.

$\{\alpha_n\},]0,1]$ de artan bir dizi ve $\alpha_n \rightarrow \alpha$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x\|'_{\alpha_n} = \|x\|'_\alpha$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x\|''_{\alpha_n} = \|x\|''_\alpha$$

eşitlikleri gösterilmelidir.

Her $n \in \mathbb{N}$ için (α_n) artan ve $\alpha_n \rightarrow \alpha$ olduğundan

$$\|x\|'_{\alpha_n} \leq \|x\|'_\alpha$$

alınsın. Kabul edilsin ki,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x\|'_{\alpha_n} < \|x\|'_\alpha$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda bir k sayısı vardır öyle ki

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x\|'_{\alpha_n} < k < \|x\|'_\alpha$$

eşitsizliği geçerlidir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x\|'_{\alpha_n} < k$$

için bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $\|x\|'_{\alpha_n} < k$ olmalıdır. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\|x\|'_{\alpha_n} = \bigwedge \{t > 0 : N(x, t) \geq \alpha_n\} < k$$

olur. Buradan her $n \in \mathbb{N}$ için

$N(x, k) \geq \alpha_n$ olduğundan $N(x, k) \geq \alpha$ dır. O halde,

$$\bigwedge \{t > 0 : N(x, t) \geq \alpha\} \leq k$$

dır. Buradan ise,

$$k < \|x\|'_\alpha \leq k$$

bulunur ki bu bir çelişkidir. Böylece kabul yanlış olup

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x\|_{\alpha_n}' = \|x\|_{\alpha}'$$

olmalıdır. Benzer şekilde,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x\|_{\alpha_n}'' = \|x\|_{\alpha}''$$

olduğu gösterilebilir. Böylece $[\|x\|_{\alpha}', \|x\|_{\alpha}'']$ bir fuzzy aralığın α -kesim kümesidir. Kısıklık olması bakımından bu küme $\alpha \in (0,1]$ için, $[\|x\|_{\alpha}^*]_{\alpha} = [\|x\|_{\alpha}', \|x\|_{\alpha}'']$ ile gösterilecektir. Son olarak $\|x\|_{\alpha}^*$ ın Felbin anlamında fuzzy norm koşullarını sağladığı gösterilirse ispat biter.

Açıkça $[\| \cdot \|_{\alpha}']$ ve $[\| \cdot \|_{\alpha}'']$ klasik anlamda norm olduğundan

$$1) \|x\|_{\alpha}^* = \underline{0} \Leftrightarrow x = \underline{0}$$

$$2) \|rx\|_{\alpha}^* = |r| \cdot \|x\|_{\alpha}^*$$

$$3) \text{ Her } x, y \in X \text{ için,}$$

$$\|x + y\|_{\alpha}^* \leq \|x\|_{\alpha}^* \oplus \|y\|_{\alpha}^*$$

ifadeleri geçerlidir.

Ayrıca $\|x\|_{\alpha}''$ her $\alpha \in (0,1]$ için klasik bir norm olduğundan $\|x\|_{\alpha}'' < \infty$.

Yani Felbin anlamında norm tanımının (A) koşulu sağlanır.

iv) Özelliğinden her $x \neq \underline{0}$ için $N(x, t) = 0$ olacak şekilde en az bir $t_1 = t_1(x) > 0$ bulunabilir. Yani her $\alpha \in (0,1]$ için $N(x, t_1) = 0 < \alpha$ olmalıdır.

Böylece her $\alpha \in (0,1]$ için $\|x\|_{\alpha}' \geq t_1$ olacaktır. Buradan

$\inf_{\alpha \in (0,1]} \|x\|_{\alpha}' \geq t_1 > 0$ elde edilir. Yani Felbin fuzzy normun (B) şartı sağlanır.

Önerme 3.2.3

$(X, \| \cdot \|)$ Felbin anlamında fuzzy normlu uzay ve $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere,

$$[\|x\|]_{\alpha} = [\|x\|_{\alpha}^1, \|x\|_{\alpha}^2] \text{ olsun.}$$

$$N_1(x, t) = \begin{cases} \sup\{\alpha \in (0,1]: \|x\|_\alpha^1 \leq t\}, & (x, t) \neq (\underline{0}, 0) \\ 0 & , \quad (x, t) = (\underline{0}, 0) \end{cases}$$

olarak tanımlı N_1 fonksiyonu, bir B-S fuzzy normdur ve N6 koşulu sağlanır.

Ayrıca $\alpha \in (0,1]$ için,

$$\|x\|'_\alpha = \bigwedge \{t > 0: N_1(x, t) \geq \alpha\}$$

olarak tanımlanırsa $\|x\|'_\alpha$, X üzerinde bir normdur ve her $\alpha \in (0,1]$ için $\|x\|_\alpha^1 = \|x\|'_\alpha$ olur.

Kanıt

Önerme 3.2.1'den N_1 , B-S fuzzy normdur ve (N6) özelliğini sağlar. Açıkça $\|x\|'_\alpha$ X üzerinde bir normdur. Her $\alpha \in (0,1]$ için $\|x\|_\alpha^1 = \|x\|'_\alpha$ olduğunu gösterilmesi yeterlidir.

Eğer $x = \underline{0}$ ise, her $\alpha \in (0,1]$ için $\|x\|_\alpha^1 = \|x\|'_\alpha$ dır.

Eğer $x \neq \underline{0}$ ise, her $\alpha \in (0,1]$ için $\|x\|_{\alpha_0}^1 = t_0$ olsun. Açıkça $t_0 > 0$ dır. $N_1(x, t)$ nin tanımından $N_1(x, t_0) \geq \alpha_0$ dır. $\|x\|'_\alpha$ nün tanımından ise bir $t_0 > 0$ vardır öyle ki

$$\|x\|'_{\alpha_0} \leq t_0 = \|x\|_{\alpha_0}^1$$

olur. Böylece

$$\|x\|'_{\alpha_0} \leq \|x\|_{\alpha_0}^1 \text{ bulunur.} \quad (3.2)$$

$\|x\|'_{\alpha_0} < r$ için $N_1(x, t_1) \geq \alpha_0$ olacak şekilde en az bir $t_1 < r$ vardır. Böylece

$$\sup\{\alpha \in]0,1]: \|x\|_\alpha^1 \leq t_1\} \geq \alpha_0$$

olur. Eğer,

$$(i) \bigvee \{\alpha \in]0,1]: \|x\|_\alpha^1 \leq t_1\} = \alpha_0$$

ise en az bir $\{\alpha_n\}$ artan dizisi vardır öyle ki $\alpha_n \uparrow \alpha_0$ ve $\|x\|_{\alpha_n}^1 \leq t_1$ dir. Böylece $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x\|_{\alpha_n}^1 \leq t_1$ dir. Yani $\|x\|_{\alpha_0}^1 \leq t_1 < r$.

(ii) Eğer

$$\forall \{\alpha \in]0,1]: \|x\|_{\alpha}^1 \leq t_1\} > \alpha_0$$

ise,

$$\|x\|_{\alpha_0}^1 \leq t_1 < r \text{ olur. Böylece}$$

$$\|x\|_{\alpha_0}' = \bigwedge \{t > 0: N_1(x, t) \geq \alpha_0\} = \left\{t > 0: \sup\{\alpha_0: \|x\|_{\alpha_0}' \leq t\}\right\} \geq \alpha_0$$

olduğundan

$$\|x\|_{\alpha_0}' \geq \|x\|_{\alpha_0}^1 \quad (3.3)$$

eşitsizliği geçerlidir.

(3.2) ve (3.3) den $\|x\|_{\alpha_0}' = \|x\|_{\alpha_0}^1$ bulunur. $\alpha_0 \in]0,1]$ keyfi olduğundan her $\alpha \in]0,1]$ için,

$$\|x\|_{\alpha}' = \|x\|_{\alpha}^1$$

dır. Böylece kanıt tamamlanmış olur. ■

Önerme 3.2.4

$(X, \|.\|)$ Felbin anlamında bir fuzzy normlu lineer uzay ve $\alpha \in]0,1]$ olmak üzere,

$[\|x\|_{\alpha}] = [\|x\|_{\alpha}^1, \|x\|_{\alpha}^2]$ olsun. $]0,1]$ deki $\alpha_k \downarrow \alpha$ olan her $\{\alpha_k\}$ dizisi için $\|x\|_{\alpha_k}^2 \uparrow \|x\|_{\alpha}^2$ olmak üzere,

$$N_2(x, t) = \begin{cases} \bigwedge \{\alpha \in (0,1]: \|x\|_{\alpha}^2 \leq t\}, & (x, t) \neq (\underline{0}, 0) \\ 1 & , (x, t) = (\underline{0}, 0) \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $\alpha \in]0,1]$ için,

$$\|x\|_{\alpha}'' = \bigwedge \{t > 0 : N_2(x, t) < \alpha\}$$

olarak tanımlanmak üzere $\|x\|_{\alpha}''$; X üzerinde bir normdur ve her $\alpha \in]0,1]$ için,

$$\|x\|_{\alpha}^2 = \|x\|_{\alpha}''$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt

$\|x\|_\alpha^2$ klasik anlamda norm olduğundan,

$N_2(x, t)$ açıkça B-S fuzzy normdur ve (N^*6) özelliğini sağlar. Ayrıca

$\{\|x\|_\alpha'' : \alpha \in (0,1]\}$, X üzerinde normların azalan bir ailesidir. O halde yalnızca her $\alpha \in (0,1]$ için $\|x\|_\alpha^2 = \|x\|_\alpha''$ eşitliğinin gösterilmesi yeterlidir.

$x = \underline{0}$ ise $\|x\|_\alpha^2 = \|x\|_\alpha''$ olur.

$x \neq \underline{0}$ olsun. $\alpha_0 \in]0,1]$ için $\|x\|_{\alpha_0}^2 > t_0 > 0$ olacak şekilde t_0 vardır.

Böylece $N_2(x, t)$ nin tanımından $N_2(x, t_0) \geq \alpha_0$ olur. $\|x\|_\alpha''$ nin tanımından ise $\|x\|_{\alpha_0}'' \geq t_0$ olmalıdır. Böylece

$$\|x\|_{\alpha_0}'' \geq \|x\|_{\alpha_0}^2$$

eşitsizliği geçerlidir. Ayrıca $x \neq 0$ için $\|x\|_{\alpha_0}'' > r$ ise $N_2(x, r) \geq \alpha_0$. Fakat $N_2(x, r) \neq \alpha_0$ dır. Diğer taraftan

$$N_2(x, r) = \bigwedge \{\alpha \in (0,1] : \|x\|_\alpha^2 \leq r\} = \alpha_0$$

dır. $]0,1]$ de bir α_k dizisi vardır öyle ki $\alpha_k \downarrow \alpha_0$ ve $\|x\|_{\alpha_k}^2 \leq r$ olur. Dolayısıyla kabulden

$$\|x\|_{\alpha_0}^2 \leq r \tag{3.5}$$

olmalıdır. Eğer

$$\bigwedge \{\alpha \in]0,1] : \|x\|_\alpha^2 \leq r\} = \alpha_0 > 0$$

ise bu durumda bir $\{\alpha_n'\}$ dizisi vardır öyle ki her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n' \uparrow \alpha_0$ ve $\|x\|_{\alpha_n'}^2 > r$ dir.

Yani $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x\|_{\alpha_n'}^2 \geq r$ olup

$$\|x\|_{\alpha_0}^2 \geq r \tag{3.6}$$

dir. Böylece (3.5) ve (3.6) dan $\|x\|_{\alpha_0}^2 = r$ bulunur.

α_0 ve r keyfi olarak seçildiğinden $\|x\|_{\alpha_0}'' > r$. Genelliği bozmadan, $N_2(x, r) > \alpha_0$ olarak alınırsa $\|x\|_{\alpha_0}^2 > r$ olacaktır. Böylece

$$\|x\|_{\alpha_0}^2 \geq \|x\|_{\alpha_0}''$$

olur. Buradan $\|x\|_{\alpha_0}'' \geq \|x\|_{\alpha_0}^2$ ve $\|x\|_{\alpha_0}^2 \geq \|x\|_{\alpha_0}''$ eşitsizlikleri yardımıyla

$$\|x\|_{\alpha}^2 = \|x\|_{\alpha_0}''$$

eşitliği elde edilmiş olur. Bu ise kanıtı tamamlar.

3.3 KATSARAS FUZZY NORM VE B-S FUZZY NORMUN KARŞILAŞTIRILMASI

Tanım 2.1.1' den Katsaras'ın tanımı şu şekilde verilmişti.

Tanım 2.1.1

$\mu, v \in V$ lineer uzayında iki fuzzy küme t skaler olsun. Bu durumda $\mu + v$ ve $t\mu$ aşağıdaki şekilde tanımlı olan fuzzy kümelerdir.

$$(i) (\mu + v)x = \sup_{x_1+x_2} \min\{\mu(x_1) + v(x_2)\}$$

$$(ii) (t\mu) = \begin{cases} \mu\left(\frac{x}{t}\right) & , t \neq 0 \\ 0 & , t = 0, x = \underline{0} \\ \max_{y \in V} \mu(y) & , t = 0, x = \underline{0} \end{cases}$$

Tanım 2.1.2

V bir lineer uzay olsun. μ, V de bir fuzzy küme ve $\mu: V \rightarrow [0,1]$ ' e tanımlı dönüşümü için

(i) Her $t \in [0,1]$ için $\mu + (1 - t)\mu \leq \mu$ ise konvektir.

(ii) Her t skaleri için $|t| \leq 1$ olmak üzere $t\mu \leq \mu$ ise dengededir.

(iii) μ konveks ve dengeli ise mutlak konvektir.

(iv) $\max_{t>0} t\mu = 1$ ise yutandır.(absorbing)

(Katsaras 1984)

tanımları verilmişti.

Tanım 2.1.3

V' deki bir ρ fuzzy küme mutlak konvex ve yutan özellikleri ile V lineer uzayında bir fuzzy yarı normdur. Ek olarak $x = \underline{0}$ için $\bigwedge_{t>0} (t\rho)(x) = 0$ sağlandığında ρ' ya bir **Katsaras-fuzzy norm** denir. Aşağıdaki önerme Bag-Samanta anlamında tanımlı bir fuzzy normun hangi koşullar altında Katsaras fuzzy norm olduğunu vermektedir. (Katsaras 1984)

Önerme 3.3.1

X bir lineer uzay ve aşağıdaki şekilde tanımlı $N: X \times \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu $x \neq 0$ için $t = 0$ da üst yarı sürekli ise bu durumda $\mu: X \rightarrow [0,1]$ e tanımlı fonksiyonu her $x \in X$ için $\mu(x) = N(x, 1)$ olarak tanımlanırsa ρ fonksiyonu bir **Katsaras-fuzzy norm** olur.

Kanıt

$t, t\mu$ skalerleri için, $t\mu(x)$

$$(t\mu)(x) = \begin{cases} \mu\left(\frac{x}{t}\right) & , \quad t \neq 0 \\ 0 & , \quad t = 0, x \neq \underline{0} \\ \bigvee_{y \in X} \mu(y) & , \quad t = 0, x = \underline{0} \end{cases}$$

ile tanımlanırsa X 'in μ_1 ve μ_2 iki fuzzy altkümesi için,

$(\mu_1 + \mu_2)(x) = \sup_{x=x_1+x_2} \min\{\mu_1(x_1), \mu_2(x_2)\}$ tanımlıdır. (N2) koşulundan

$\mu(\underline{0}) = N(\underline{0}, 1) = 1$ dir.

vi) $\bigvee_{t>0} t\mu(x) = \bigvee_{t>0} \mu\left(\frac{x}{t}\right) = \bigvee_{t>0} N\left(\frac{x}{t}, 1\right) = \bigvee_{t>0} N(x, t) = 1$ ((N5) den)

v) $x \neq 0$ için $N(x, \cdot)$, $t = 0$ da üst yarı sürekli olduğundan ,

$x \neq 0$ için $\bigwedge_{t>0} t\mu(x) = \bigwedge_{t>0} N(x, t) = 0$ dir.

ii) Şimdi $|t| \leq 1$ iken $t\mu \leq \mu$ olduğu gösterilecektir.

$-1 \leq t < 0$ için $t\mu(x) \leq \mu\left(\frac{x}{t}\right) = N\left(\frac{x}{t}, 1\right) = N(x, |t|) \leq N(x, 1) = \mu(x)$

$t = 0, x \neq \underline{0}$ için $t\mu$ nun tanımından $t\mu(x) = 0$ dır. Yani $t\mu(x) \leq \mu(x)$ dır.

$t = 0, x = \underline{0}$ için $t\mu = \bigvee_{y \in U} \mu(y) \leq 1 = N(\underline{0}, 1) = \mu(x)$.

$0 < t \leq 1$ için $t\mu(x) = N(x, t) \leq N(x, 1) = \mu(x)$.

Böylece $|t| \leq 1$, her $x \in X$ için $t\mu(x) \leq \mu(x)$

i) Şimdi her $t \in [0,1]$ için, $t\mu + (1-t)\mu \leq \mu$ olduğu gösterilecektir.

$$[t\mu + (1-t)\mu](x) = \bigvee_{u+v=x} \{(t\mu)(u) \wedge (1-t)\mu(v)\} \quad (i)$$

Eğer $t = 0, u \neq \underline{0}$ ise bu durumda $(t\mu)(u) = 0$ dır.

Böylece $(t\mu)(u) \wedge (1-t)\mu(v) = 0 \leq \mu(x)$ dır.

Eğer $t = 0, u = \underline{0}$ ise $(t\mu)(u) \leq 1$ dır. Bu nedenle ;

$(t\mu)(u) \wedge (1-t)\mu(v) \leq 1 \wedge \mu(v) = \mu(v) = \mu(x)$, burada $u + v = x, u = \underline{0}$ dır.

Böylece $t=0$ için,

$$\bigvee_{u+v=x} \{(t\mu)(u) \wedge (1-t)\mu(v)\} \leq \mu(x) \text{ dir.}$$

Benzer şekilde $t = 1$ için bu geçerlidir.

$0 < t < 1$ ise bu durumda,

$$[t\mu + (1-t)\mu](x) = \bigvee_{u+v=x} \{(t\mu)(u) \wedge (1-t)\mu(v)\}$$

$$= \bigvee_{u+v=x} \{N(u, t) \wedge (v, 1-t) \leq \bigvee_{u+v=x} \{N(u+v, 1)\} = N(x, 1) = \mu(x)$$

iii) i ve ii den mutlak konvektir.

Bu durumda her $t \in [0,1]$, $t\mu + (1-t)\mu \leq \mu$.

Dolayısıyla $N(.,.)$, X' de B-S fuzzy norm ve $N(x,.)$ $x \neq 0$ için $t = 0$ da üst yarı sürekli ise $N(x, 1)$ e eşit olan μ fonksiyonu X' de Katsaras anlamında bir fuzzy normdur. ■

Önerme 3.3.2

ρ , X uzayında Katsaras anlamında fuzzy norm olsun. Bu durumda

$$N(x, t) = \begin{cases} t\rho(x) & , \quad t > 0 \\ 0 & , \quad t \leq 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanan $x \neq \underline{0}$, $t = 0$ da üst yarı sürekli $N(.,.)$ fonksiyonu, B-S fuzzy normdur.

Kanıt

(N1) $N(x, t)$ nin tanımından açıkça her $t \leq 0$ ve her $x \in X$ için $N(x, t) = 0$ dır.

(N2) ($\Rightarrow$) Her $t > 0$ için $N(x, t) = 1$ olsun. Bu durumda her $t > 0$ için

$\rho\left(\frac{x}{t}\right) = 1$ olur. Dolayısıyla her $t > 0$ için

$$\rho\left(\frac{x}{t}\right) = \rho(0) \tag{3.7}$$

dır. $x \neq 0$ için, $\bigwedge_{t>0} t\rho(x) = 0$ olur buradan $\bigwedge \rho\left(\frac{x}{t}\right) = 0$ dır. Bu durumda en az bir $t > 0$ vardır öyle ki

$$\rho\left(\frac{x}{t}\right) < \frac{1}{2} \neq \rho(0) \tag{3.8}$$

dır. (3.7) ve (3.8) den her $t > 0$ için $N(x, t) = 1$ olduğunda $x = \underline{0}$ olur.

($\Leftarrow$) Diğer taraftan $x = \underline{0}$ olsun. Bu durumda her $t \geq 0$ için

$$N(x, t) = t\rho(x) = \rho\left(\frac{x}{t}\right) = \rho(0) = 1$$

olur. Böylece her $t \geq 0$ için $x = \underline{0}$ için $N(x, t) = 1$ dir. O halde (N2) sağlanır.

(N3) ρ dengede olduğundan $|t| \leq 1$ için $t\rho(x) = \rho(x)$ dır. Böylece $t = -1$ için,

–1. $\rho(x) \leq \rho(x)$ dir. Bu durumda

$$\rho(-x) \leq \rho(x) \quad (3.9)$$

olur. Ayrıca

$$\rho(x) = \rho(-(-x)) \leq \rho(-x) \quad (3.10)$$

eşitsizliği geçerlidir. (3.9) ve (3.10) dan $\rho(x) = \rho(-x)$ dir.

$c \neq 0$ için ($\rho(x) = \rho(-x)$ olduğundan)

$$N(cx, t) = t\rho(cx) = t\rho(|c|x) = \rho(x) = N(x, \frac{t}{|c|})$$

Böylece (N3) sağlanır.

(N4) $s = t = 0$; $s < 0, t < 0$; $s > 0, t < 0$; $s = 0$ veya $t = 0$ durumlarında

$$N(x + y, s + t) \geq \min\{N(x, s), N(y, t)\}$$

eşitsizliği açıktır.

$s > 0, t > 0$ olduğu durumları göz önüne alınırsa ρ konveks olduğundan her $t \in [0,1]$, her $x \in X$ için,

$$t\rho(x) + (1 - t)\rho(x) \leq \rho(x)$$

dir. Böylece her $t > 0$, her $s > 0$ ve her $x, y \in X$ için,

$$\rho\left(\frac{x+y}{s+t}\right) \geq \frac{s}{s+t}\rho\left(\frac{x+y}{s+t}\right) + \frac{t}{s+t}\rho\left(\frac{x+y}{s+t}\right)$$

olur. Buradan $\rho\left(\frac{x+y}{s+t}\right) \geq s\rho(x+y) + t\rho(x+y)$ bulunur.

Böylece,

$$\rho\left(\frac{x+y}{s+t}\right) \geq \bigvee_{x_1+x_2=x+y} \{s\rho(x_1) \wedge t\rho(x_2)\}$$

oldüğundan,

$$(s+t)\rho(x+y) \geq s\rho(x) \wedge t\rho(y)$$

dir. Yani,

$$N(x + y, s + t) \geq \min\{N(x, s), N(y, t)\}$$

olur. O halde (N4) sağlanır.

(N5) Bu özellik için, $s \leq t \leq 0$ ise tanımdan her $x \in X$ için, $N(x, t) \geq N(x, s)$ dir.

$s > t > 0$ ise buradan $0 < \frac{t}{s} < 1$ yazılabilir. ρ nun konveks olma özelliğinden her $x \in X$ için,

$$\frac{t}{s}\rho(x) + \left(1 - \frac{t}{s}\right)\rho(x) \leq \rho(x)$$

$$\frac{t}{s}\rho\left(\frac{x}{s}\right) + \left(1 - \frac{t}{s}\right)\rho\left(\frac{x}{s}\right) \leq \rho\left(\frac{x}{s}\right)$$

$$\rho\left(\frac{x}{t}\right) + \rho\left(\frac{x}{s-t}\right) \leq \rho\left(\frac{x}{s}\right)$$

$$t\rho(x) + (s-t)\rho(x) \leq s\rho(x)$$

olur. Buradan ise $s\rho(x) \geq t\rho(x)$ olarak yazılabileceğinden $N(x, s) \geq N(x, t)$ dir. Böylece $N(x, \cdot)$ $\mathbb{R}$ 'de azalmayandır.

Ayrıca her $x \in X$ için $\bigvee_{t>0} t\rho(x) = 1$ olduğundan $\bigvee_{t>0} N(x, t) = 1$ eşitliği doğrudur.

O halde $\lim_{t \rightarrow \infty} N(x, t) = 1$ dir. Böylece (N5) sağlanır.

Yani N bir B-S fuzzy normdur. (Bag /and Samanta 2008)

Şimdi $N(x, \cdot)$ in $x \neq \underline{0}$ için $t = 0$ da üst yarı sürekli olduğu gösterilecektir.

ρ , Katsaras-fuzzy norm olduğundan $x \neq \underline{0}$ için $\bigwedge_{t>0} t\rho(x) = 0$ ve

$$N(x, t) = \begin{cases} t\rho(x) & , \quad t > 0 \\ 0 & , \quad t \leq 0 \end{cases}$$

şeklindedir.

$\varepsilon > 0$ seçilirse, $x \neq \underline{0}$ için $\bigwedge_{t>0} t\rho(x) = 0 < \varepsilon$ olur. O halde $N(x, t_0) = t_0\rho(x) < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $t_0 > 0$ vardır. Her $t \in (-t_0, t_0)$ için $N(x, t) < \varepsilon$ olduğundan $N(x, \cdot)$, t nin monoton azalmayan fonksiyonu olduğundan $N(x, \cdot)$, $t = 0$ da üst yarı sürekli olur. Bu ise ispatı tamamlar.

BÖLÜM 4

FUZZY NORMLU LİNEER UZAYLARDA LİNEER OPERATÖRLER

Bu bölümde B-S fuzzy norm tanımını kullanılarak inşa edilen lineer uzaylarda operatörler ve bazı temel özellikler verilecektir. B-S fuzzy norm tanımında $*$ ikili işlemi yerine minimum ($\min$) işlemi alınacaktır.

4.1 LİNEER OPERATÖRLER İLE İLGİLİ TEMEL ÖZELLİKLER

Tanım 4.1.1

(X, N) ve (Y, N) iki fuzzy normlu lineer uzay ve $T: X \rightarrow Y$ bir operatör olsun.

Her $x, y \in X$, $\alpha \in \mathbb{R}$ için,

$$T(x + y) = Tx + Ty \text{ ve } T(\alpha x) = \alpha T(x)$$

eşitliklerini sağlayan ***T dönüşümüne lineer operatör*** denir.

Tanım 4.1.2

X ve Y fuzzy normlu lineer uzaylar olsun her $x \in X$ için, $0.x = 0$ ile tanımlı operatöre ***sıfır operatör*** denir.

Tanım 4.1.3

X ve Y fuzzy normlu lineer uzaylar ve $T: X \rightarrow Y$ bir operatör olsun. $0 < r < 1$ olmak üzere $N(Tx, t) > rN(x, t)$ olan bir $t > 0$ sayısı varsa T operatörüne ***sınırlıdır*** denir.

Gösterim 4.1.4

X ve Y fuzzy normlu lineer uzaylar ve X den Y ye tanımlı tüm sınırlı lineer operatörlerin kümesi $L(X, Y)$ ile gösterilecektir.

Uyarı 4.1.5

$L(X, Y)$ bir vektör uzaydır $T_1, T_2 \in L(X, Y)$ iki operatörün toplamı $T_1 + T_2$,

$$(T_1 + T_2)x = T_1x + T_2x$$

ve çarpımı $\alpha \in \mathbb{R}, T \in L(X, Y)$ olmak üzere αT ,

$$(\alpha T)x = \alpha T(x)$$

şeklinde tanımlıdır.

Teorem 4.1.6

X den Y ye tanımlı tüm sınırlı lineer operatörlerin normu aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|Tx\|$$

ve norm koşulları sağlanır.

Tanım 4.1.7

$L(X, Y)$, $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $L(X, Y)$ üzerinde bir fuzzy norm aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$A = \{((T, t), N(T, t)): (T, t) \in L(X, Y) \times \mathbb{R}^+\}$$

Burada $N, L(X, Y) \times \mathbb{R}^+$ nın fuzzy alt kümesi eğer aşağıdaki koşulları sağlarsa $L(X, Y)$ üzerinde bir fuzzy norm olarak adlandırılır.

Her $T_1, T_2 \in L$ ve $c \in \mathbb{R}$,

(N1) Her $t \in \mathbb{R}, t \leq 0, N(T, t) > 0$.

(N2) Her $t \in \mathbb{R}, t > 0$ için $N(T, t) = 1$ olması için gerekli ve yeterli koşul $T = 0$ olmasıdır.

(N3) Her $t \in \mathbb{R}$ ve $t > 0$ için $N(cT, t) = N(T, \frac{t}{|c|})$.

(N4) Her $s, t \in \mathbb{R}, T_1, T_2 \in L(X, Y)$ için,

$$N(T_1 + T_2, s + t) \geq \min\{N(T_1, s), (T_2, h)\}.$$

(N5) $N(T, .), \mathbb{R}$ nin azalmayan fonksiyonu ve $\lim_{n \rightarrow \infty} N(T, t) = 1$.

Bu durumda $(L(X, Y), A)$ uzayı **fuzzy normlu lineer operatör uzay** olarak adlandırılır.

Teorem 4.1.8

$L((X, Y), \|\cdot\|)$ normlu lineer uzay ve

$$N(T, t) = \begin{cases} \frac{t}{t + \|T\|} & , \quad t > 0, t \in \mathbb{R}, T \in L \\ 0 & , \quad t < 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$$A = \{(T, t), N(T, t) : (T, t) \in L(X, Y) \times \mathbb{R}^+\}$$

yardımla tanımlı $L((X, Y), A)$ ikilisi fuzzy normlu lineer operatör uzayıdır.

Kanıt

(N1) Açıkça $N(T, t) > 0$.

$$(N2) N(T, t) = 1 \Leftrightarrow \frac{t}{t + \|T\|} = 1$$

$$\Leftrightarrow t = t + \|T\|$$

$$\Leftrightarrow \|T\| = 0 \Leftrightarrow T = 0.$$

(N3) $c \neq 0$ olmak üzere,

$$N\left(T, \frac{t}{|c|}\right) = \frac{\frac{t}{|c|}}{\frac{t}{|c|} + \|T\|} = \frac{\frac{t}{|c|}}{\frac{t + |c|\|T\|}{|c|}} = \frac{t}{t + |c|\|T\|} = \frac{t}{t + \|cT\|} = N(cT, t).$$

(N4) Genelliği bozulmaksızın

$$N(T_1, s) \leq N(T_2, t)$$

olduğu kabul edilsin. Bu durumda

$$\frac{s}{s + \|T_1\|} \leq \frac{t}{t + \|T_2\|}$$

olacağından

$$t(s + \|T_1\|) \leq s(t + \|T_2\|)$$

yazılabilir. Buradan

$$t\|T_1\| \leq s\|T_2\|$$

elde edilir. Bu durumda

$$\|T_1\| \leq \frac{s}{t}\|T_2\|$$

yazılabileceğinden,

$$\|T_1\| + \|T_2\| \leq \frac{s}{t}\|T_2\| + \|T_2\| \leq \left(\frac{s}{t} + 1\right)\|T_2\| \leq \frac{s + t}{t}\|T_2\|$$

olur. Buradan,

$$\|T_1 + T_2\| \leq \|T_1\| + \|T_2\| \leq \frac{s + t}{t}\|T_2\|$$

olur. Böylece

$$\frac{\|T_1 + T_2\|}{s + t} \leq \frac{\|T_2\|}{t}$$

yazılabilir. Buradan

$$1 + \frac{\|T_1 + T_2\|}{s + t} \leq 1 + \frac{\|T_2\|}{t}$$

eşitsizliği geçerlidir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{s + t + \|T_1 + T_2\|}{s + t} \leq \frac{t + \|T_2\|}{t}$$

ise

$$\frac{s + t}{s + t + \|T_1 + T_2\|} \geq \frac{t}{t + \|T_2\|}$$

olur.

Benzer şekilde,

$$\frac{s + t}{s + t + \|T_1 + T_2\|} \geq \frac{s}{s + \|T_2\|}$$

olduğu gösterilebilir. Böylece,

$$N(T_1 + T_2, s + t) \geq \min\{N(T_1, s), (T_2, h)\}.$$

(N5) Her $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ için eğer $t_1 < t_2 \leq 0$ olsun. Tanımdan $N(T, t_1) = N(T, t_2) = 0$.

$t_2 > t_1$ olsun. Bu durumda her $T \in L(X, Y)$ için,

$$\frac{t_2}{t_2 + \|T\|} - \frac{t_1}{t_1 + \|T\|} = \frac{(t_2 - t_1)\|T\|}{(t_2 + \|T\|)(t_1 + \|T\|)} \geq 0$$

olur. Buradan,

$$\frac{t_2}{t_2 + \|T\|} \geq \frac{t_1}{t_1 + \|T\|}$$

dir. Böylece,

$$N(T, t_2) \geq N(T, t_1)$$

sağlanır. O halde $N(T, t)$ azalmayan bir fonksiyondur. Diğer taraftan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N(T, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t}{t + \|T\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t}{t(1 + \frac{1}{n})\|T\|} = 1$$

olup N bir fuzzy normdur.

Tanım 4.1.9

$\{T_n\}$, $(L(X, Y), A)$ fuzzy normlu lineer operatör uzayda bir dizi olsun. $r > 0$, $t > 0$, $0 < r < 1$ verildiğinde her $n \geq n_0$ için $N(T_n - T, t) > 1 - r$ olacak şekilde en az bir $n_0 \in \mathbb{R}$ var ise $\{T_n\}$ dizisi $T \in L(X, Y)$ ye *yakınsaktır* denir.

Teorem 4.1.10

A , operatörlerin fuzzy normlu lineer bir uzayı olsun. $\{T_n\}$ dizisinin A da T_0 a yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul $\lim_{n \rightarrow \infty} N(T_n - T_0, t) = 1$ olmasıdır.

Kanıt

($\Rightarrow$) $t > 0$ sabit ve $\{T_n\}$ dizisi A da T_0 a yakınsak olsun. O halde $r < 0 < 1$ olmak üzere en az bir $n_0 \in \mathbb{Z}$ tamsayısı vardır öyle ki $N(T_n - T_0, t) > 1 - r$ olur. Buradan $1 - N(T_n - T_0, t) < r$ dir. Dolayısıyla $n \rightarrow \infty$ için $N(T_n - T_0, t) \rightarrow 1$ dir.

($\Leftarrow$) Tersine, herhangi bir $t > 0$ ve $n \rightarrow \infty$ için $N(T_n - T_0, t) \rightarrow 1$ ise $r < 0 < 1$ olmak üzere en az bir $n_0 \in \mathbb{Z}$ tamsayısı vardır öyle ki $r < 0 < 1$ için en az bir $n_0 \in \mathbb{Z}$ tamsayısı vardır. Bu durumda her $n \geq n_0$ için $1 - N(T_n - T_0, t) < r$ dir. Buradan her $n \geq n_0$ için $N(T_n - T_0, t) > 1 - r$ dir. Böylece $\{T_n\}$ dizisi A da T_0 a yakınsaktır.

Teorem 4.1.11

$L(X, Y)$ uzayında yakınsak bir $\{T_n\}$ dizisinin limiti tektir.

Kanıt

$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T_1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T_2$ ve $s, t \in \mathbb{R}^+$ olsun. Bu durumda

$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T_1$ ise,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N(T_n - T_1, t) = 1$$

ve $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T_2$ ise,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N(T_n - T_2, t) = 1$$

eşitlikleri yazılabilir. Böylece,

$$N(T_1 - T_2, s + t) = N(T_1 + T_n - T_n - T_2, s + t) \geq \min\{N(T_n - T_1, s), N(T_n - T_2, t)\}$$

olacağından limit alınır,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N(T_1 - T_2, s + t) \geq \min\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} N(T_n - T_1, s) * \lim_{n \rightarrow \infty} N(T_n - T_2, t)\right\} = 1$$

olacaktır. Bu ise

$\lim_{n \rightarrow \infty} N(T_1 - T_2, s + t) = 1$ olması demek olup $T_1 - T_2 = 0$ dır. Buradan $T_1 = T_2$ bulunur.

Teorem 4.1.12

$L(X, Y)$ fuzzy normlu lineer uzayındaki her yakınsak dizinin alt dizisi, dizinin limitine yakınsar.

Kanıt

$\{T_n\}$, T ye yakınsak bir dizi ve $\{T_{n_k}\}$, $\{T_n\}$ in T_0 a yakınsak bir altdizisi olsun. $\{T_{n_k}\}$ yakınsak olduğundan 4.1.10 Teoremden, $\lim_{n \rightarrow \infty} N(T_{n_k} - T_0, t) = 1$ olur.

Bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} N(T_{n_k} - T_n + T_n - T_0, t) = 1$ yazılabileceğinden

$$\min\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} \left[N\left(T_n - T_{n_k}, \frac{t}{2}\right), \lim_{n \rightarrow \infty} N\left(T_n - T_0, \frac{t}{2}\right)\right]\right\} = 1$$

dir. Böylece,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N\left(T_n - T_0, \frac{t}{2}\right) = 1$$

bulunur. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $T_0 = T$ bulunur.

Tanım 4.1.13

$\{T_n\}$, $L(X, Y)$ de bir dizi olsun. Eğer $p \in \mathbb{N}$ ve $t > 0$ olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} N(T_{n+p} - T_n, t) = 1$ ise $\{T_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisidir denir.

Teorem 4.1.14

Fuzzy normlu lineer operatör uzayındaki her yakınsak dizi bir Cauchy dizisidir.

Kanıt

$\{T_n\}$, $(L(X, Y), A)$ daki yakınsak bir dizi olsun. Yani $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$ olsun.

$s, t \in \mathbb{R}^+$ ve $p \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} N(T_{n+p} - T_n, s + t) &= N(T_{n+p} - T + T - T_n, s + t) \\ &\geq \min\{N(T_{n+p} - T, s), N(T - T_n, t)\} = \min\{N(T_{n+p} - T, s), N(T_n - T, t)\} \end{aligned}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Her iki tarafın limiti alınırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N(T_{n+p} - T_n, s + t) \geq \min\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} N(T_{n+p} - T, s), \lim_{n \rightarrow \infty} N(T_n - T, t)\right\} = \min\{1, 1\} = 1.$$

Buradan

Her $s, t \in \mathbb{R}^+$ ve $p \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $\lim_{n \rightarrow \infty} N(T_{n+p} - T_n, s + t) = 1$ bulunur. Dolayısıyla $\{T_n\}$, $(L(X, Y), A)$ da bir Cauchy dizisidir. ■

Teorem 4.1.15

$(L(X, Y), A)$ fuzzy normlu lineer operatör uzay olsun. $(L(X, Y), A)$ da her Cauchy dizisi yakınsak alt diziye sahiptir. Bu durumda $(L(X, Y), A)$ tamdır.

Kanıt

$\{T_n\}$, $(L(X, Y), A)$ da bir Cauchy dizisi olsun ve $t > 0$ olmak üzere $\{T_{n_k}\}$, $T \in L(X, Y)$ ye yakınsayan $\{T_n\}$ in bir alt dizisi olsun. Bu durumda $\{T_n\}$, $(L(X, Y), A)$ da bir Cauchy dizisi olduğundan,

$$\lim_{t, k \rightarrow \infty} N\left(T_n - T_{n_k}, \frac{t}{2}\right) = 1$$

eşitliği yazılabilir. T_{n_k} , T ye yakınsak olduğundan,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} N\left(T_{n_k} - T, \frac{t}{2}\right) = 1$$

olacağından

$$N(T_n - T, t) = N(T_n - T_{n_k} + T_{n_k} - T, t)$$

$$\geq \min\left\{N\left(T_n - T_{n_k}, \frac{t}{2}\right), N\left(T_{n_k} - T, \frac{t}{2}\right)\right\} = \min\{1, 1\} = 1$$

bulunur. Buradan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N(T_n - T, t) = 1$$

olacaktır. Dolayısıyla $\{T_n\}$, $(L(X, Y), A)$ da T ye yakınsar.

Bu durumda $(L(X, Y), A)$ tamdır. ■

4.2 FUZZY SÜREKLİLİK GÜÇLÜ SÜREKLİLİK VE DÜZGÜN SÜREKLİ OPERATÖRLER

Bu bölümde fuzzy operatörlerin süreklilik türleri ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 4.2.1

(X, N) ve (Y, N) $\mathbb{R}$ cismi üzerinde iki fuzzy normlu uzaylar olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $\alpha \in (0,1)$ için en az bir $\delta = \delta(\alpha, \varepsilon)$, $\beta = \beta(\alpha, \varepsilon) \in (0,1)$ vardır öyle ki her $Tx \in L(X, Y)$ için,

$N(x - x_0, \delta) > 1 - \beta$ iken $N(Tx - Tx_0, \varepsilon) > 1 - \alpha$ oluyorsa $T: (X, N) \rightarrow (Y, N)$ operatörü $Tx_0 \in L(X, Y)$ de fuzzy süreklidir denir.

Teorem 4.2.2

$T: (X, N) \rightarrow (Y, N)$ bir lineer operatör olsun. Bu durumda T nin sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul T nin sınırlı olmasıdır.

Kanıt

T için iki durum vardır:

$T = 0$ için kanıt açıktır.

($\Leftarrow$): $T \neq 0$ olsun. Bu durumda $\|T\| \neq 0$ olup T fuzzy sınırlı olsun. Herhangi bir $x_0 \in (X, N)$ için $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\delta = \delta(\alpha, \varepsilon)$, $\beta = \beta(\alpha, \varepsilon) \in (0,1)$ vardır öyle ki,

T lineer olduğundan her $x \in X$ için,

$$N(x - x_0, \delta) > 1 - \beta \text{ için } \|x - x_0\| < \frac{\delta\beta}{1-\beta} \text{ dır.}$$

$$\frac{\delta\beta}{1-\beta} = \frac{\varepsilon\alpha}{\|T\|(1-\alpha)} \text{ olsun.}$$

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| < \|T\| \|x - x_0\| \leq \|T\| \frac{\varepsilon\alpha}{\|T\|(1-\alpha)} = \frac{\varepsilon\alpha}{1-\alpha}$$

ise,

$$\|Tx - Tx_0\| < \frac{\varepsilon\alpha}{1-\alpha}$$

olur. Bu durumda

$$\|Tx - Tx_0\|(1-\alpha) + \varepsilon - \varepsilon - \varepsilon\alpha < 0$$

dır.

$$\|Tx - Tx_0\|(1-\alpha) - \varepsilon + \varepsilon(1-\alpha) < 0$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(1-\alpha)(\|Tx - Tx_0\| + \varepsilon) < \varepsilon$$

yazılabilir. Buradan

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon + \|Tx - Tx_0\|} > 1 - \alpha$$

olur. Bu durumda ise

$$N(Tx - Tx_0, \varepsilon) > 1 - \alpha$$

elde edilir. $x_0 \in (X, N)$ keyfi olduğundan T süreklidir.

($\Rightarrow$) Tersine T , keyfi $x_0 \in (X, N)$ noktasında sürekli olsun. Bu durumda $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere $N(x - x_0, \delta) > 1 - \beta$ için $N(Tx - Tx_0, \varepsilon) > 1 - \alpha$ olacak şekilde

$\delta = \delta(\alpha, \varepsilon)$, $\beta = \beta(\alpha, \varepsilon) \in (0,1)$ vardır.

Herhangi bir $y \neq 0 \in (X, N)$ alınsın.

$$x = x_0 + \frac{\delta\beta}{(1-\beta)\|y\|} y \text{ ise } x - x_0 = \frac{\delta\beta}{(1-\beta)\|y\|} y \text{ olacaktır.}$$

T sürekli olduğundan,

$N(Tx - Tx_0, \varepsilon) > 1 - \alpha$ olacaktır. Böylece

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon + \|Tx - Tx_0\|} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \|T(x - x_0)\|} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \left\|T\left(\frac{\delta\beta}{(1-\beta)\|y\|}\right)y\right\|} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \|Ty\| \frac{\delta\beta}{(1-\beta)\|y\|}}$$

olup

$$\|Ty\| \frac{\delta\beta}{(1-\beta)\|y\|} < \frac{\varepsilon\alpha}{1-\alpha} \Rightarrow \|Ty\| < \frac{\varepsilon\alpha(1-\beta)}{(1-\alpha)\delta\beta} \|y\|$$

olacaktır.

$r = \frac{\varepsilon\alpha(1-\beta)}{(1-\alpha)\delta\beta}$ şeklinde seçilirse $\|Ty\| < r\|y\|$ olduğundan $\frac{t}{t+\|Ty\|} > r \frac{t}{t+\|y\|}$ yazılabilir. Buradan $N(Ty, t) > rN(y, t)$ olacaktır. Böylece T fuzzy sınırlı operatördür. ■

Tanım 4.2.3

$T: (X, N) \rightarrow (Y, N)$ operatörü eğer herhangi bir $\{x_n\}$ dizisi, her $n \in \mathbb{N}$ ve $x_n \in (X, N)$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n - x_0, t) = 1$ olduğunda $\lim_{n \rightarrow \infty} (Tx_n - Tx_0, t) = 1$ oluyorsa T ye $Tx_0 \in L(X, Y)$ de *dizisel fuzzy süreklidir* denir.

Teorem 4.2.4

$T: X \rightarrow Y$ olsun. T nin, (X, N) de fuzzy sürekli operatör olması için gerekli ve yeterli koşul T , (X, N) de dizisel fuzzy süreklidir.

Kanıt

($\Rightarrow$) T nin $x_0 \in X$ de fuzzy sürekli, $\{x_n\}$, X de bir dizi ve $x_n \rightarrow x_0$ olsun. $\varepsilon > 0$ ve $\alpha \in (0, 1)$ için T , $x_0 \in X$ de fuzzy sürekli olduğundan, her $x \in X$ için $N(x - x_0, \delta) > 1 - \beta$ iken

$N(Tx - Tx_0, \varepsilon)$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon, \alpha)$, $\beta = \beta(\varepsilon, \alpha) \in (0, 1)$ vardır.

$x_n \rightarrow x_0$ olduğundan tanımdan her $n \geq n_0$ için, $N(x_n - x_0, \delta) > 1 - \beta$ iken $N(Tx_n - Tx_0, \varepsilon) > 1 - \alpha$ olacak şekilde bir n_0 pozitif tamsayısı vardır.

Böylece $Tx_n \rightarrow Tx_0$ dır yani T , x_0 de dizisel fuzzy süreklidir.

($\Leftarrow$) Diğer taraftan T dizisel fuzzy sürekli olsun. T nin, x_0 da fuzzy sürekli olmadığı kabul edilsin. Bu durumda $\varepsilon > 0$ ve $\alpha \in (0, 1)$ olmak üzere herhangi bir $\delta > 0$ ve $\beta \in (0, 1)$ için, $N(x_0 - y, \delta) > \beta$ iken $N(Tx_0 - Ty, \varepsilon) \leq \alpha$ olacak şekilde en az bir $y(\delta, \beta$ ya bağlı) vardır.

Böylece $n = 1, 2, \dots$ ve $\beta = 1 - \frac{1}{n+1}$, $\delta = \frac{1}{n+1}$ için,

$N\left(x_0 - y, \frac{1}{n+1}\right) > 1 - \frac{1}{n+1}$ ve $N(Tx_0 - Ty_n, \varepsilon) \leq \alpha$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ noktasına yakınsak bir y_n vardır. Bu durumda $\delta > 0$ olmak üzere her $n \geq n_0$ ve $\frac{1}{n+1} < \delta$ için en az bir n_0 doğal sayısı vardır öyle ki $N(x_0 - y_n, \delta) \geq N\left(x_0 - y_n, \frac{1}{n+1}\right) > 1 - \frac{1}{n+1}$ eşitsizliği sağlanır.

Böylece $\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_0 - y_n, \delta) = 1$ ancak $N(Tx_0 - Ty_n, \varepsilon) \leq \alpha$ dır. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N(Tx_0 - Ty_n, \varepsilon) \neq 1$$

olur. Böylece $y_n \rightarrow x_0$ olduğu halde $\{Ty_n\}$, Tx_0 a yakınsak değildir. Bu bir çelişkidir. O halde kabul yanlış olup T , x_0 da fuzzy süreklidir.

Tanım 4.2.5

$T: (X, N) \rightarrow (Y, N)$ bir operatör olsun. Her $\varepsilon > 0$, $\alpha \in (0, 1)$ ve her $x \in X$ için, $N(Tx - Tx_0, \varepsilon) \geq N(x - x_0, \delta)$ olacak şekilde en az bir $\delta(\alpha, \varepsilon) > 0$ var ise bu durumda T ye $x_0 \in X$ de **güçlü fuzzy süreklidir** denir.

Eğer T , X in her bir noktasında güçlü ise, T ye X üzerinde güçlü fuzzy süreklidir denir.

Teorem 4.2.6

$T: (X, N) \rightarrow (Y, N)$ bir operatör olsun. Eğer T güçlü fuzzy sürekli ise dizisel fuzzy süreklidir.

Kanıt

$T: (X, N) \rightarrow (Y, N)$, X üzerinde ve $x_0 \in X$ de güçlü fuzzy sürekli olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$, $\alpha \in (0, 1)$ ve her $x \in X$ için, $N(Tx - Tx_0, \varepsilon) \geq N(x - x_0, \delta)$ olacak şekilde en az bir $\delta(\alpha, \varepsilon) > 0$ vardır.

$\{x_n\}$, X de bir dizi ve $x_n \rightarrow x_0$ olsun. Yani, her $t > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n - x_0, t) = 1$ dir. Burada

$N(Tx - Tx_0, \varepsilon) \geq N(x - x_0, \delta)$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} N(Tx_n - Tx_0, \varepsilon) = 1$ dir.

Yani $Tx_0 \in (Y, N)$, $Tx_n \rightarrow Tx_0$ dır.

Örnek 4.2.7

T nin dizisel fuzzy sürekli olması X üzerinde T nin güçlü fuzzy sürekli olduğu anlamına gelmez.

$(L(X, Y), \|\cdot\|)$ normlu lineer uzayı göz önüne alınırsa her $x \in X$ için $\|T\| = |T|$ ve her $a, b \in [0, 1]$ için, $a * b = \min\{a, b\}$ şeklinde tanımlansın.

Ayrıca $N_1, N_2: L(X, Y) \times \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$,

$$N_1(T, t) = \frac{t}{t+|T|} \text{ ve } N_2(T, t) = \frac{t}{t+K|x|} \text{ ve}$$

$$A = \{(T, t), N_1\}: (T, t) \in L(X, Y) \times \mathbb{R}^+\}$$

$$B = \{(T, t), N_2\}: (T, t) \in L(X, Y) \times \mathbb{R}^+\}$$

olsun. Bu durumda

$(L(X, Y), A)$ ve $(L(X, Y), B)$ nin fuzzy normlu lineer uzay oldukları kolayca görülebilir.

Şimdi her $x \in X$ için, $T(x) = \frac{x^4}{1+x^2}$ tanımlansın.

X deki $\{x_n\}$ dizisi, $x_0 \in X$ olmak üzere $x_n \rightarrow x_0$ olsun.

Yani her $t > 0$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_1(x_n - x_0, t) = 1$$

olur. Yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t}{t+|x_n - x_0|} = 1.$$

Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x_0| = 0. \tag{4.1}$$

Her $t > 0$ için,

$$N_2(Tx_n - Tx_0, t) = \frac{t}{t + K|Tx_n - Tx_0|}$$

$$= \frac{t}{t + K \left| \frac{x_n^4}{1+x_n^2} - \frac{x_0^4}{1+x_0^2} \right|}$$

$$= \frac{t|1+x_n^2||1+x_0^2|}{t|1+x_n^2||1+x_0^2| + K|x_n^4(1+x_0^2) - x_0^4(1+x_n^2)|}$$

$$= \frac{t|1+x_n^2||1+x_0^2|}{t|1+x_n^2||1+x_0^2| + K|(x_n^2 - x_0^2)(x_n^2 + x_0^2) + x_n^2x_0^4(x_n^2 - x_0^2)|}$$

elde edilir. Bu durumda (4.1) den her $t > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} N(Tx_n - Tx_0, \varepsilon) = 1$ dir. Böylece

$Tx_n \rightarrow Tx_0$ (B' de) dır.

$\varepsilon > 0$ verilsin.

$$N_2(Tx - Tx_0, \varepsilon) \geq N_1(x_n - x_0, \delta)$$

dir. Bu durumda

$$\frac{\varepsilon|1+x^2||1+x_0^2|}{\varepsilon|1+x^2||1+x_0^2| + K|(x-x_0)|(x-x_0)(x^2+x_0^2) + x^2x_0^2(x+x_0)|} \geq \frac{\delta}{\delta + |x-x_0|}$$

olur. Buradan

$$K\delta|x-x_0||x+x_0||x^2+x_0^2+x^2x_0^2| \leq \varepsilon|1+x^2||1+x_0^2||x-x_0|$$

eşitsizliği yazılabilir. Böylece

$$\delta \leq \frac{\varepsilon|1+x^2||1+x_0^2|}{K|x+x_0||x^2+x_0^2+x^2x_0^2|} \quad (x \neq x_0) \quad (4.2)$$

dır. Her $x \neq x_0$ için en az bir $\delta > 0$ var olduğundan T, x_0 da süreklidir. Her $x \neq x_0$ için,

$$\delta_1 = \inf \frac{h|1+x^2||1+x_0^2|}{K|x-x_0||x^2+x_0^2+x^2x_0^2|}$$

olsun. Bu durumda, $\delta = \frac{\varepsilon}{K} \delta_1$ (4.2) yi sağlar.

Ancak $\delta_1 = 0$ için mümkün değildir. Kabul yanlış olup T güçlü fuzzy sürekli değildir.

Tanım 4.2.8

$T: (X, N) \rightarrow (Y, N)$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere her $x_1, x_2 \in X$ için,

$N(x_1 - x_2, \delta) > 1 - \beta$ iken $N(Tx_1 - Tx_2, \varepsilon) > 1 - \alpha$ olacak şekilde en az bir

$\delta = \delta(\alpha, \varepsilon) > 0, \beta = \beta(\alpha, \varepsilon) > 0$ var ise T, X üzerinde **düzgün fuzzy sürekli** denir.

Teorem 4.2.9

T, X üzerinde düzgün fuzzy sürekli olsun. Eğer $\{x_n\}, (X, N)$ deki bir Cauchy dizisi ise $\{Tx_n\}, (Y, N)$ de bir Cauchy dizisidir.

Kanıt

T, X üzerinde düzgün fuzzy sürekli olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere her $x_1, x_2 \in X$ için $N(x_1 - x_2, \delta) > 1 - \beta$ iken $N(Tx_1 - Tx_2, \varepsilon) > 1 - \alpha$ olacak şekilde en az bir $\delta = \delta(\alpha, \varepsilon) > 0, \beta = \beta(\alpha, \varepsilon) > 0$ vardır.

$\{x_n\}, (X, N)$ deki bir Cauchy dizisi olduğundan her $m, n \geq k$ ve $\delta = \delta(\alpha, \varepsilon) > 0, \beta \in (0,1)$ için $N(x_n - x_m, \delta) > 1 - \beta$ iken $N(Tx_n - Tx_m, \varepsilon) > 1 - \alpha$ olacak şekilde en az bir $k \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece $\{Tx_n\}, (Y, N)$ de bir Cauchy dizisidir. ■

BÖLÜM 5

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, kronolojik olarak farklı norm tanımları verilerek, bazı norm karşılaştırmalarına yer verilmiştir. Ayrıca B-S fuzzy norm üzerindeki lineer operatör tanımı ve özelliklerine yer verilmiştir.

Yeni araştırmacılara;

Lineer operatörler ile ilgili kısmın B-S dışındaki normlar yardımıyla da çalışılabileceği önerilebilir.

KAYNAKLAR

Bag T and Samanta S K (2003) Finite Dimensional Fuzzy Normed Linear Spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 11 (3): 687-705.

Bag T and Samanta S K (2005) Fuzzy bounded linear operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 151: 513-547.

Bag T and Samanta S K (2008) A comparative Study of Fuzzy Norms on Linear Spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 159: 670-684.

Bag T and Samanta S K (baskıda) Finite dimensional fuzzy normed linear spaces. *Annals of Fuzzy Mathematic and Informatics*.

Cheng S C and Mordeson J M (1994) Fuzzy linear operators and fuzzy normed linear spaces. *Bull. Calcutta Math. Soc.*, 86 (5): 429–436.

Felbin C (1992) Finite dimensional fuzzy normed linear spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 48: 239-248.

Katsaras A K (1984) Fuzzy Topological Vector Spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 12: 143-154.

Kider J R (2012) New Fuzzy Normed Spaces. *J. Baghdad for Sci.*, 9 (3): 559-664.

Saadati R and Vaezpour S M (2005) Some results on fuzzy Banach spaces. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 17 (1-2): 475-484.

Rano G and Bag T (2012) Fuzzy Normed Linear Spaces. *International Journal of Mathematics and Scientific Computing*, ISSN: 2231-5330, 2 (2): 16-19.

Thoubaan M G (2011) Operator Fuzzy Normed Linear Space. *Al- Mustansiriyah J. Sci.*, 22 (7): 53-66.

Zadeh A L (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8: 338-353.

ÖZGEÇMİŞ

Zülal Derin 1989'da Zonguldak'ta doğdu. İlk ve ortaöğrenimini Zonguldak'ta tamamladı. 2008 yılında Zonguldak Karaelmas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde öğrenime başladı. 2012 yılında onur belgesi alarak mezun oldu. 2012 yılında BEÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans programında öğrenime başladı ve yüksek lisans öğrenimini sürdürmektedir.

ADRES BİLGİLERİ:

Adres: Gebze/Kocaeli

Tel: 0(262)6552731

E-posta: derinzulal@gmail.com