



**FUZZY NORMLU UZAYLARDA
İNVARYANT YAKINSAKLIK TİPLERİ**

DOKTORA TEZİ

Şeyma YALVAÇ

Danışman
Prof. Dr. Erdiñ DÜNDAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Temmuz 2023

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

FUZZY NORMLU UZAYLARDA
İNVARİYANT YAKINSAKLIK TİPLERİ

Şeyma YALVAÇ

Danışman
Prof. Dr. Erdiñ DÜNDAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Temmuz 2023

TEZ ONAY SAYFASI

Şeyma YALVAÇ tarafından hazırlanan “Fuzzy Normlu Uzaylarda İnvaryant Yakınsaklık Tipleri” adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 13/07/2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı’nda DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Erdiñ DÜNDAR

Başkan : Prof. Dr. Fatih NURAY
Afyon Kocatepe Üniversitesi,
Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Prof. Dr. Erdiñ DÜNDAR
Afyon Kocatepe Üniversitesi,
Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Doç. Dr. Uğur ULUSU
Sivas Cumhuriyet Üniversitesi,
Cumhuriyet Sosyal Bilimler MYO

Üye : Doç. Dr. Enes YAVUZ
Manisa Celal Bayar Üniversitesi,
Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Doç. Dr. Nimet AKIN
Afyon Kocatepe Üniversitesi,
Eğitim Fakültesi

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun
..... / / 2023 tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

.....

Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

13/07/2023

Şeyma YALVAÇ

ÖZET

Doktora Tezi

FUZZY NORMLU UZAYLARDA İNVARYANT YAKINSAKLIK TİPLERİ

Şeyma YALVAÇ

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Erdiç DÜNDAR

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, çalışmada ele alınan yakınsaklık türleri ve üzerinde çalışılan uzayın tarihsel gelişiminden bahsedilmiştir. İkinci bölümde, çalışmaya temel teşkil eden bazı kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde, fuzzy normlu uzaylarda invaryant yakınsaklık ve invaryant Cauchy dizisi tanımlanmış ve ilgili teoremler ispatlarıyla birlikte verilmiştir. Dördüncü bölümde, fuzzy norma göre lacunary invaryant yakınsaklık ile kuvvetli lacunary invaryant yakınsaklık tanımları verilerek bazı önemli özellikleri incelenmiştir. Beşinci bölümde, fuzzy norma göre invaryant istatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel invaryant yakınsaklık kavramları tanıtılarak bazı özellikleri verilmiş ve bu iki yakınsaklık tipinin birbiriyle ilişkisi incelenmiştir. Ayrıca, invaryant istatistiksel yakınsaklık ile invaryant yakınsaklık ilişkisi ispatlanmış ve son olarak invaryant istatistiksel Cauchy dizisi verilmiştir. Son olarak altıncı bölümde, tez çalışması boyunca yararlanılan makaleler ve kitaplar kaynaklar listesi olarak verilmiştir.

2023, v + 51 sayfa

Anahtar Kelimeler: Fuzzy norm, İnvaryant yakınsaklık, Lacunary dizi, İstatistiksel invaryant yakınsaklık, İnvaryant istatistiksel yakınsaklık.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

INVARIANT CONVERGENCE TYPES IN FUZZY NORMED SPACES

Şeyma YALVAÇ

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Erdinç DÜNDAR

This thesis study consists of six chapters.

In the first chapter, the types of convergence discussed in the study and the historical development of the studied space are mentioned. In the second part, some concepts that form the basis of the study are given. In the third chapter, invariant convergence and invariant Cauchy sequence in fuzzy normed spaces are defined and related theorems are given with their proofs. In the fourth chapter, lacunary invariant convergence and strong lacunary invariant convergence with respect to fuzzy norm are given and some important properties are examined. In the fifth chapter, the concepts of invariant statistical convergence and statistical invariant convergence according to fuzzy norm are introduced and some of their properties are given and the relationship between these two convergence types is examined. In addition, the relationship between invariant statistical convergence and invariant convergence has been proven and the invariant statistical Cauchy sequence is given. Finally, in the sixth chapter, the articles and books used throughout the thesis are listed as references.

2023, v + 51 pages

Keywords: Fuzzy norm, Invariant convergence, Lacunary sequence, Statistical invariant convergence, Invariant statistical convergence.

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca bilgi ve deneyimleriyle desteğini eksik etmeyen; tez çalışmam için konu belirlemede ve tezimin yazım aşamasında büyük katkısı olan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Erdiñ DÜNDAR'a teşekkürü bir borç bilirim.

Eğitim-öğretim hayatım boyunca üzerimde emeğı olan ve her konuda öneri ve eleştirileriyle yardımlarını gördüğüm tüm hocalarıma ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Ayrıca, hayatım boyunca her konuda maddi ve manevi destekleriyle hep yanımda olan aileme teşekkür ederim.

Şeyma YALVAÇ

Afyonkarahisar 2023

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ.....	iv
SİMGELER DİZİNİ	v
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1 Temel Tanımlar	4
2.2 Fuzzy Kümeleri, Fuzzy Sayıları ve Fuzzy Normlu Uzay	9
3. FUZZY NORMLU UZAYLARDA İNVARYANT VE KUVVETLİ İNVARYANT YAKINSAKLIK.....	16
3.1 Fuzzy Normlu Uzaylarda İnvaryant Yakınsaklık.....	16
3.2 Fuzzy Normlu Uzaylarda Kuvvetli İnvaryant Yakınsaklık.....	21
4. FUZZY NORMLU UZAYLARDA LACUNARY İNVARYANT VE KUVVETLİ LACUNARY İNVARYANT YAKINSAKLIK.....	27
4.1 Fuzzy Normlu Uzaylarda Lacunary İnvaryant Yakınsaklık.....	27
4.2 Fuzzy Normlu Uzaylarda Kuvvetli Lacunary İnvaryant Yakınsaklık.....	31
5. FUZZY NORMLU UZAYLARDA İSTATİSTİKSEL İNVARYANT YAKINSAKLIK.....	37
5.1 Fuzzy Normlu Uzaylarda İnvaryant İstatistiksel Yakınsaklık.....	37
5.2 Fuzzy Normlu Uzaylarda İstatistiksel İnvaryant Yakınsaklık.....	43
6. KAYNAKLAR.....	47
ÖZGEÇMİŞ.....	51

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$ K $	K kümesinin kardinalitesi
ℓ_∞	Reel terimli sınırlı dizilerin uzayı
$\delta(K)$	K kümesinin doğal yoğunluğu
$\delta_\sigma(K)$	K kümesinin invaryant yoğunluğu
$\theta = (k_r)$	Lacunary dizi
$[u]_\alpha = [u_\alpha^-, u_\alpha^+]$	u fuzzy kümesinin α -kesit kümesi
$L(\mathbb{R})$	Fuzzy sayıları kümesi
$L^*(\mathbb{R})$	Negatif olmayan fuzzy sayıları kümesi
$D(u, v)$	Supremum metriği
$st - \lim x_n$	(x_n) dizisinin istatistiksel limiti
$(D) - \lim x_n$	(x_n) dizisinin supremum metriğine göre limiti
$\ \cdot\ $	Fuzzy norm fonksiyonu
$(X, \ \cdot\ , L, R)$	Fuzzy normlu uzay
$x_n \xrightarrow{\sigma-FN} \ell$	(x_n) dizisinin ℓ ye fuzzy norma göre invaryant yakınsaklığı
$x_n \xrightarrow{[\sigma-FN]} \ell$	(x_n) dizisinin ℓ ye fuzzy norma göre kuvvetli invaryant yakınsaklığı
$x_n \xrightarrow{\sigma-FN_\theta} \ell$	(x_n) dizisinin ℓ ye fuzzy norma göre lacunary invaryant yakınsaklığı
$x_n \xrightarrow{[\sigma-FN]_\theta} \ell$	(x_n) dizisinin ℓ ye fuzzy norma göre kuvvetli lacunary invaryant yakınsaklığı
$x_n \xrightarrow{\sigma-st-FN} \ell$	(x_n) dizisinin ℓ ye fuzzy norma göre invaryant istatistiksel yakınsaklığı
$x_n \xrightarrow{st-\sigma-FN} \ell$	(x_n) dizisinin ℓ ye fuzzy norma göre istatistiksel invaryant yakınsaklığı

1. GİRİŞ

Temelleri dizi uzayları teorisine dayanan toplanabilme teorisi; analiz, fonksiyonel analiz, nümerik analiz vb. birçok matematiksel alanda büyük öneme sahiptir. Klasik toplanabilme teorisi real veya kompleks terimli dizi veya serilerin yakınsaklığının geliştirilmesi ile ilgilidir.

Temelleri doğal sayılar kümesinin alt kümelerinin doğal yoğunluğuna dayanan istatistiksel yakınsaklık kavramından ilk defa Zygmund (1959) un kitabında farklı bir isimle bahsedilmiştir. Yakınsaklık kavramının bir geliştirmesi olan istatistiksel yakınsaklık kavramından tam anlamıyla bahsedenler birbirinden bağımsız olarak Steihauss (1951) ve Fast (1951) olmuştur. Schoenberg (1959) istatistiksel yakınsaklığı bir toplanabilme methodu olarak çalışmış ve bazı temel özelliklerini vermiştir. Bu konuda temel teşkil edecek çalışmalara örnek olarak; Salat(1980) reel sayıların sınırlı istatistiksel yakınsak dizi uzayını incelemiş, Fridy (1985) istatistiksel Cauchy kavramını vererek istatistiksel yakınsaklıkla denk ifadeler olduğunu göstermiş ve Connor (1988) istatistiksel yakınsaklık ile kuvvetli p -Cesaro toplanabilme arasındaki ilişkiyi vermiştir.

Kuvvetli Cesàro toplanabilir dizi uzayı ile (2^r) dizisi arasındaki ilişki daha önce bazı çalışmalarda verilmiştir, ancak Freedman vd. (1978) tarafından (2^r) dizisi yerine daha genel olarak lacunary dizi ele alınarak lacunary yakınsaklık tanımlanmıştır. Ayrıca bu çalışmada lacunary yakınsaklığın hangi şartlarda kuvvetli Cesàro toplanabilirlikle aynı özelliklere sahip olduğu gösterilmiş ve her durumda kuvvetli hemen hemen yakınsak ile denk ifadeler olduğu ispatlanmıştır. Lacunary istatistiksel yakınsaklık ilk olarak Fridy ve Orhan (1993) tarafından tanımlanmıştır.

Banach (1932), Hahn-Banach teoremi uygulaması olarak sınırlı reel değerli dizilerin kümesi üzerinde Banach limiti olarak bilinen geliştirilmiş bir limit tanımlamıştır. Lorentz (1948), sınırlı bir dizinin bütün Banach limitlerinin aynı değeri aldığı durumlarda hemen hemen yakınsak olduğunu vermiştir. Kuvvetli hemen hemen yakınsaklık kavramı Maddox (1978) tarafından çalışılmıştır. Banach limitinin geliştirmesi

olarak invaryant limit kavramı ve sınırlı bir dizi için invaryant limitlerin aynı değeri aldığı durumlar için verilen invaryant yakınsaklık kavramı bir çok çalışmada karşımıza çıkmaktadır. (Dean ve Raimi 1960, Raimi 1963 ve Schaefer 1972). Ayrıca kuvvetli invaryant yakınsaklık (Mursaleen 1983), invaryant istatistiksel yakınsaklık (Mursaleen ve Edely 2009) bu alanda çalışılan önemli kavramlardır. Das ve Patel (1989) lacunary hemen hemen yakınsak kavramını vererek hemen hemen yakınsaklık ile olan ilişkisini ispatlamıştır. Benzer şekilde lacunary invaryant yakınsaklık kavramı ve invaryant yakınsaklık kavramı benzerliği Savaş (1990) tarafından çalışılmıştır. Daha sonra Savaş ve Nuray (1993) lacunary invaryant istatistiksel yakınsak kavramı ve önemli özelliklerini vermiştir.

Karmaşık sistemlerin kontrol problemlerinde karşılaştığı belirsizlikler için Zadeh (1965) fuzzy mantığı teorisini ileri sürmüştür. Elemanları belirli üyelik dereceleriyle kümeye ait olan fuzzy kümesi kavramı bilimsel çalışmalar için çığır açan bir yaklaşım olmuştur. Klasik küme kavramında, bir eleman kümeye ait olduğunda 1, ait olmadığına ise 0 değerini alan ve arada başka bir değer almayan karakteristik fonksiyon söz konusudur. Fuzzy kümesinde ise elemanın kümeye aidiyeti için $[0, 1]$ arasında herhangi bir değer alabilen üyelik fonksiyonu tanımlanmıştır. Fuzzy mantığının literatüre kazandırılmasıyla birlikte klasik matematiğin birçok tanım ve teoremi fuzzy anlamında tekrar yorumlanmıştır. Reel sayılar kümesi üzerinde belli özelliklere sahip fuzzy kümeler fuzzy sayısı olarak ele alınmıştır (Dubois ve Prade 1978, 1979). Nanda (1989) tarafından çalışılan fuzzy sayı dizileri üzerinde birçok yakınsaklık tipi tanımlanmıştır (Nuray ve Savaş 1995, Nuray 1998, Talo ve Çakan 2012). Goetschel ve Voxman (1986) tarafından fuzzy calculus alanında çalışmalar yapılmıştır. Matematiğin temel konularından biri olan topoloji, fuzzy anlamında ilk olarak Chang (1968) tarafından verilmiş ve Wong (1973, 1974) un çalışmaları ile zenginleştirilmiştir. Ayrıca Kromasil ve Michalek (1975) istatistiksel metrik kavramıyla ilişkili bir fuzzy metrik tanımlamıştır. Kaleva ve Seikkala (1984) ise iki nokta arasındaki mesafeyi negatif olmayan bir fuzzy sayısı ile ifade ettiği yeni bir fuzzy metrik kavramı ortaya atmıştır. Fuzzy topolojik vektör uzayları üzerinde çalışan Katsaras (1984) iki nokta arasında belli bir değere göre yakınlık derecesi manasına gelen fuzzy normu

tanımlamıştır. Kaleva ve Seikkala'nın fuzzy metriği ile ilişkili olarak Felbin (1992) lineer uzaydaki her bir elemanı negatif olmayan bir fuzzy sayısına götüren fuzzy normu vermiştir. Ayrıca fuzzy norma göre yakınsaklık, fuzzy norma göre Cauchy dizisi kavramlarını çalışmıştır. Ayrıca fuzzy norma göre istatistiksel yakınsaklık Sençimen ve Pehlivan (2008) tarafından, fuzzy norma göre lacunary istatistiksel yakınsaklık Türkmen ve Çınar (2017) ile Türkmen ve Dündar (2019) tarafından verilmiştir.

Tez çalışmasının birinci bölümünde, çalışmada ele alınan yakınsaklık türleri ve üzerinde çalışılan uzayın tarihsel gelişiminden bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, çalışmaya temel teşkil eden bazı kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, fuzzy normlu uzaylarda invaryant yakınsaklık kavramı tanımlanarak limitin tekliği ve lineerliği gibi bazı özellikleri ispatlanmıştır. Ayrıca fuzzy norma göre Cauchy dizisi ve ilgili teorem verilmiştir.

Dördüncü bölümde, fuzzy norma göre lacunary invaryant yakınsaklık ile kuvvetli lacunary invaryant yakınsaklık kavramları verilerek limitin tekliği ve lineerliği incelenmiştir.

Beşinci bölümde, fuzzy norma göre invaryant istatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel invaryant yakınsaklık kavramları tanıtılarak bazı özellikleri verilmiş ve bu iki yakınsaklık tipinin birbiriyle ilişkisi incelenmiştir. Ayrıca, invaryant istatistiksel yakınsaklık ile invaryant yakınsaklık ilişkisi ispatlanmış ve son olarak invaryant istatistiksel Cauchy dizisi verilmiştir.

Son olarak altıncı bölümde, tez çalışması boyunca yararlanılan makaleler ve kitaplar kaynaklar listesi olarak verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez çalışmasının orijinal bölümlerinde kullanılacak olan bazı temel tanımlar ve kavramlar not edilmiştir. Dizi, sınırlı dizi, metrik uzay, vektör uzayı, normlu uzay, topolojik uzay, altuzay ve “hemen hemen her a için” gibi bazı kavramların bilindiği kabul edilmiştir.

2.1. Temel Tanımlar

Bu kısımda, tez çalışmasında kullanılacak olan Cesàro toplanabilirlik tipleri, doğal yoğunluk, istatistiksel yakınsaklık, Banach limiti, hemen hemen yakınsaklık, invaryant yakınsaklık tipleri, lacunary dizi ve lacunary yakınsaklık tipleri gibi temel tanımlar verilecektir.

Tanım 2.1.1 Bir (x_n) dizisi için, eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \ell$$

olacak şekilde bir ℓ sayısı bulunabiliyorsa, (x_n) dizisi ℓ ye Cesàro toplanabilir denir (Volkov 2001).

Tanım 2.1.2 Bir (x_n) dizisi için, eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \ell| = 0$$

olacak şekilde bir ℓ sayısı bulunabiliyorsa, (x_n) dizisi ℓ ye kuvvetli Cesàro toplanabilir denir (Freedman vd. 1978).

Tanım 2.1.3 $0 < p < \infty$ olmak üzere bir (x_n) dizisi için, eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \ell|^p = 0$$

olacak şekilde bir ℓ sayısı bulunabiliyorsa, (x_n) dizisi ℓ ye kuvvetli p -Cesàro toplanabilir denir (Connor 1988).

Tanım 2.1.4 $K \subset \mathbb{R}$ olsun. $|K|$, K kümesinin eleman sayısı (kardinalitesi) ve

$$K_n = \{k \leq n : k \in K\}$$

olmak üzere

$$\underline{\delta}(K) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |K_n| \quad \text{ve} \quad \bar{\delta}(K) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |K_n|$$

limitlerine K kümesinin sırasıyla alt ve üst doğal yoğunluğu denir.

$$\underline{\delta}(K) = \bar{\delta}(K)$$

olması durumunda

$$\delta(K) = \underline{\delta}(K) = \bar{\delta}(K),$$

$K \subset \mathbb{R}$ kümesinin doğal yoğunluğudur. Yani, $K \subset \mathbb{R}$ kümesinin doğal yoğunluğu

$$\delta(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|K_n|}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in K\}|$$

dır (Niven vd. 1991).

Tanım 2.1.5 Bir (x_n) dizisi ve her $\varepsilon > 0$ için, eğer

$$K(\varepsilon) = |\{n \in \mathbb{N} : |x_n - \ell| \geq \varepsilon\}|$$

kümesinin doğal yoğunluğu sıfır yani,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - \ell| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ya da başka bir ifadeyle hemen hemen her n için

$$|x_n - \ell| < \varepsilon$$

ise, (x_n) dizisi ℓ ye istatistiksel yakınsaktır denir (Fast 1951).

Tanım 2.1.6 L, ℓ_∞ sınırlı diziler uzayı üzerinde tanımlı bir lineer fonksiyonel olsun.

Eğer L lineer fonksiyoneli için

(i) Her $n \in \mathbb{N}$ için $(x_n) \geq 0$ ise $L(x_n) \geq 0$,

(ii) $e = (1, 1, \dots)$ olmak üzere $L(e) = 1$,

(iii) $L(x_{n+1}) = L(x_n)$

şartları sağlanıyorsa, bu durumda L lineer fonksiyoneline bir Banach limitidir denir

(Banach 1932).

Banach limitleri eşit olan sınırlı diziye hemen hemen yakınsak dizi denir.

Tanım 2.1.7 Bir (x_n) dizisi için, eğer m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=m+1}^{m+n} x_i = \ell$$

olacak şekilde bir ℓ sayısı bulunabiliyorsa, bu durumda (x_n) dizisi ℓ ye hemen hemen yakınsaktır denir (Lorentz 1948).

Tanım 2.1.8 Bir (x_n) dizisi için, eğer m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=m+1}^{m+n} |x_i - \ell| = 0$$

olacak şekilde bir ℓ sayısı bulunabiliyorsa, bu durumda (x_n) dizisi ℓ ye kuvvetli hemen hemen yakınsaktır denir (Maddox 1978).

Tanım 2.1.9 $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ birebir bir dönüşüm olsun ve $m = 1, 2, \dots$ için

$$\sigma^m(n) = \sigma(\sigma^{m-1}(n))$$

olmak üzere her $m, n \in \mathbb{N}$ için $\sigma^m(n) \neq n$ şartını sağlasın. $\varphi : \ell_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli lineer fonksiyoneli için

(i) Her $n \in \mathbb{N}$ için $(x_n) \geq 0$ ise $\varphi(x_n) \geq 0$,

(ii) $e = (1, 1, \dots)$ olmak üzere $\varphi(e) = 1$,

(iii) Her $(x_n) \in \ell_\infty$ için $\varphi(x_{\sigma(n)}) = \varphi(x_n)$

şartları sağlanıyorsa, φ lineer fonksiyoneline invaryant limittir veya σ -limittir denir (Schaefer 1972).

Özel olarak $\sigma(n) = n + 1$ olması halinde φ Banach limitidir. İnvaryat limitleri eşit olan sınırlı diziye invaryant yakınsak veya σ -yakınsak dizi denir.

Tanım 2.1.10 Bir (x_n) dizisi için, eğer n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_{\sigma^i(n)} = \ell$$

olacak şekilde bir ℓ sayısı bulunabiliyorsa, bu durumda (x_n) dizisi ℓ ye invaryant yakınsaktır denir (Schaefer 1972).

Tanım 2.1.11 Bir (x_n) dizisi için, eğer n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |x_{\sigma^i(n)} - \ell| = 0$$

olacak şekilde bir ℓ sayısı bulunabiliyorsa, bu durumda (x_n) dizisi ℓ ye kuvvetli invaryant yakınsaktır denir (Mursaleen 1983).

Tanım 2.1.12 $0 < p < \infty$ olmak üzere bir (x_n) dizisi için, eğer n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |x_{\sigma^i(n)} - \ell|^p = 0$$

olacak şekilde bir ℓ sayısı bulunabiliyorsa, bu durumda (x_n) dizisi ℓ ye kuvvetli p -invaryant yakınsaktır denir (Mursaleen ve Edely 2009).

Tanım 2.1.13 E pozitif tam sayıların bir alt kümesi olmak üzere, eğer n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} |\{E \cap \{\sigma(n), \sigma^2(n), \dots, \sigma^m(n)\}\}| = 0$$

ise, bu durumda E kümesi düzgün invaryant sıfır yoğunluğa sahiptir denir ve bu durum $\delta_\sigma(E) = 0$ ile gösterilir (Raimi 1963).

Tanım 2.1.14 Bir (x_n) dizisi ve her $\varepsilon > 0$ için, eğer n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} |\{k \leq m : |x_{\sigma^k(n)} - \ell| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ya da

$$K(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - \ell| \geq \varepsilon\}$$

olmak üzere $\delta_\sigma(K(\varepsilon)) = 0$ olacak şekilde bir ℓ sayısı bulunabiliyorsa, bu durumda (x_n) dizisi ℓ ye invaryant istatistiksel yakınsaktır denir (Savaş ve Nuray 1993).

Tanım 2.1.15 Bir $\theta = (k_r)$ dizisi için $k_0 = 0$ ve $r \rightarrow \infty$ iken $h_r = k_r - k_{r-1}$ dizisi negatif olmayan tam sayıların artan bir dizisi ise $\theta = (k_r)$ dizisine lacunary dizi denir. θ lacunary dizisinin ardışık terimlerinin aralıkları ve oranları sırasıyla

$$I_r = (k_{r-1}, k_r] \text{ ve } q_r = \frac{k_r}{k_{r-1}}$$

ile gösterilir (Freedman vd. 1978).

Tanım 2.1.16 $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizi olsun. Bir (x_n) dizisi için, eğer

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} x_i = \ell$$

olacak şekilde bir ℓ sayısı bulunabiliyorsa, bu durumda (x_n) dizisi ℓ ye lacunary toplanabilirdir denir (Freedman vd. 1978).

Tanım 2.1.17 $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizi olsun. Bir (x_n) dizisi için, eğer

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} |x_i - \ell| = 0$$

olacak şekilde bir ℓ sayısı bulunabiliyorsa, bu durumda (x_n) dizisi ℓ ye kuvvetli lacunary toplanabilirdir denir (Freedman vd. 1978).

Tanım 2.1.18 $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizi ve $0 < p < \infty$ olsun. Bir (x_n) dizisi için, eğer

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} |x_i - \ell|^p = 0$$

olacak şekilde bir ℓ sayısı bulunabiliyorsa, bu durumda (x_n) dizisi ℓ ye kuvvetli p -lacunary toplanabilirdir denir (Mursaleen ve Alotaibi 2011).

Tanım 2.1.19 $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizi olsun. Bir (x_n) dizisi ve her $\varepsilon > 0$ için, eğer

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - \ell| \geq \varepsilon\}| = 0$$

yani,

$$K(\varepsilon) = |\{k \in \mathbb{N} : |x_k - \ell| \geq \varepsilon\}|$$

olmak üzere

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{|I_r \cap K(\varepsilon)|}{h_r} = 0$$

olacak şekilde bir ℓ sayısı bulunabiliyorsa, bu durumda (x_n) dizisi ℓ ye lacunary istatistiksel yakınsaktır denir (Fridy ve Orhan 1993).

2.2. Fuzzy Kümeleri, Fuzy Sayıları ve Fuzzy Normlu Uzay

Bu kısımda, tez çalışmasında kullanılacak olan fuzzy kümeleri, fuzzy sayıları ve fuzzy normlu uzay ile ilgili temel kavram ve tanımlar verilecektir.

Tanım 2.2.1 X boştan farklı bir evrensel küme olsun. $u : X \rightarrow [0, 1]$ üyelik fonksiyonuyla verilen

$$A = \{(x, u(x)) : x \in X\}$$

kümesi fuzzy kümesidir (Zadeh 1965).

u üyelik fonksiyonu ile verilen A fuzzy kümesini sadece u notasyonu ile gösterebiliriz.

Tanım 2.2.2 X evrensel kümesinde A ve B fuzzy kümeleri ve bu kümelerin üyelik fonksiyonları sırasıyla u_A ve u_B olsun. Fuzzy kümeleri üzerinde işlemler; her $x \in X$ için,

- (i) $A = B \Leftrightarrow u_A(x) = u_B(x)$,
- (ii) $A \subset B \Leftrightarrow u_A(x) \leq u_B(x)$,
- (iii) $C = A \cup B \Leftrightarrow u_C(x) = u_A(x) \vee u_B(x) = \max\{u_A(x), u_B(x)\}$,
- (iv) $D = A \cap B \Leftrightarrow u_D(x) = u_A(x) \wedge u_B(x) = \min\{u_A(x), u_B(x)\}$,
- (v) $A' = X \setminus A \Leftrightarrow u_{A'}(x) = 1 - u_A(x)$

şeklindedir (Chang 1968).

Tanım 2.2.3 Bir u fuzzy kümesinin α -seviye kümesi,

$$[u]_\alpha = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} : u(x) \geq \alpha\}, & \alpha \in (0, 1], \\ cl \{x \in \mathbb{R} : u(x) > \alpha\}, & \alpha = 0 \end{cases}$$

olarak verilir (Kaleva ve Seikkala 1984).

Tanım 2.2.4 Bir u fuzzy kümesi için

- (i) u normaldir, yani $u(x_0) = 1$ olacak şekilde bir $x_0 \in \mathbb{R}$ vardır,
- (ii) u konvektir, yani her $x, y \in \mathbb{R}$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{u(x), u(y)\},$$

- (iii) u üstten yarı süreklidir,

- (iv) $[u]_0$ kompakt kümedir,

şartları sağlanıyorsa, u fuzzy sayısıdır (Fang 2002).

u fuzzy kümesinin bir fuzzy sayısı olması için gerek ve yeter şart her bir $\alpha \in [0, 1]$ için $[u]_\alpha$ kesit kümesinin boştan farklı, kapalı ve sınırlı bir aralık olmasıdır. Bu aralık

$$[u]_\alpha = [u_\alpha^-, u_\alpha^+]$$

biçiminde yazılır. Kaleva ve Seikkala (1984) tarafından yapılan fuzzy sayısı tanımında yukarıda verilen *iv.* madde yerine

“(iv)’ $[u]_\alpha = [u_\alpha^-, u_\alpha^+]$ aralığı için $u_\alpha^- = -\infty$ ve $u_\alpha^+ = \infty$ durumları kabul edilebilir” şartı verilmiştir.

$\mathbb{R}$ üzerindeki bütün fuzzy sayıları kümesi $L(\mathbb{R})$ ile gösterilir. $u \in L(\mathbb{R})$ olmak üzere her $x < 0$ için $u(x) = 0$ oluyorsa, u ya negatif olmayan fuzzy sayısı denir. $\mathbb{R}$ üzerindeki bütün negatif olmayan fuzzy sayıları kümesi $L^*(\mathbb{R})$ ile gösterilir.

Her $r \in \mathbb{R}$ sayısı

$$\tilde{r}(t) = \begin{cases} 1, & t = r, \\ 0, & t \neq r \end{cases}$$

olarak tanımlanan bir fuzzy sayısıdır. Bu durumda, fuzzy sayıları reel sayıların genelleştirilmesidir.

$u, v \in L(\mathbb{R})$ fuzzy sayılarının $u = v$ şeklinde eşit olması için gerek ve yeter şart her $x \in \mathbb{R}$ için $u(x) = v(x)$ olmasıdır.

Tanım 2.2.5 $u, v \in L(\mathbb{R})$ olmak üzere $L(\mathbb{R})$ fuzzy sayı kümesi üzerinde aritmetik işlemler

- (i) $(u \oplus v)(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} \{u(y) \wedge v(x - y)\}, x \in \mathbb{R},$
- (ii) $(u \ominus v)(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} \{u(y) \wedge v(y - x)\}, x \in \mathbb{R},$
- (iii) $(u \odot v)(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}, y \neq 0} \{u(y) \wedge v(x/y)\}, x \in \mathbb{R},$
- (iv) $(u \oslash v)(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} \{u(yx) \wedge v(y)\}, x \in \mathbb{R}$

biçimindedir (Kaleva ve Seikkala 1984).

Bu işlemler Zadeh’in genişleme prensibinin özel bir halidir.

Ayrıca skalerle çarpma işlemi; $(cu)(x) = u(x/c)$, $x \in \mathbb{R}$ biçimindedir. Özel olarak $0u = \tilde{0}$ dır (Felbin 1992).

Lemma 2.2.6 $L(\mathbb{R})$ fuzzy sayı kümesi üzerinde α -seviye kümeleri açısından aritmetik işlemler,

$$u, v \in L(\mathbb{R}) \text{ ve } [u]_\alpha = [u_\alpha^-, u_\alpha^+], [v]_\alpha = [v_\alpha^-, v_\alpha^+]$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned} (i) \quad [u \oplus v]_\alpha &= [u_\alpha^- + v_\alpha^-, u_\alpha^+ + v_\alpha^+], \\ (ii) \quad [u \odot v]_\alpha &= [u_\alpha^- \cdot v_\alpha^-, u_\alpha^+ \cdot v_\alpha^+], \quad u, v \in L^*(\mathbb{R}), \\ (iii) \quad [\tilde{1}/u]_\alpha &= \left[\frac{1}{u_\alpha^+}, \frac{1}{u_\alpha^-} \right] \end{aligned}$$

dir (Kaleva ve Seikkala 1984).

Ayrıca skalerle çarpma işlemi;

$$[ku]_\alpha = k[u]_\alpha = \begin{cases} [ku_\alpha^-, ku_\alpha^+], & k \geq 0, \\ [ku_\alpha^+, ku_\alpha^-], & k < 0 \end{cases}$$

biçimindedir.

Tanım 2.2.7 $L(\mathbb{R})$ fuzzy sayı kümesi üzerinde $\preceq$ kısmi sıralama bağlantısı

$$\mu \preceq \eta \Leftrightarrow \text{her } \alpha \in [0, 1] \text{ için } \mu_\alpha^- \leq \eta_\alpha^- \text{ ve } \mu_\alpha^+ \leq \eta_\alpha^+$$

biçimindedir (Kaleva ve Seikkala 1984).

Tanım 2.2.8 (u_n) dizisi $L(\mathbb{R})$ de bir dizi, $\ell \in L(\mathbb{R})$ ve

$$[u_n]_\alpha = [u_{n\alpha}^-, u_{n\alpha}^+], [\ell]_\alpha = [\ell_\alpha^-, \ell_\alpha^+]$$

olsun. Eğer her $\alpha \in (0, 1]$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n\alpha}^- = \ell_\alpha^- \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n\alpha}^+ = \ell_\alpha^+$$

ise (u_n) dizisi ℓ ye α -seviye yakınsaktır denir ve bu durum $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$ ile gösterilir (Kaleva ve Seikkala 1984).

Tanım 2.2.9 $[u]_\alpha = [u_\alpha^-, u_\alpha^+]$ ve $[v]_\alpha = [v_\alpha^-, v_\alpha^+]$ olmak üzere $u, v \in L(\mathbb{R})$ olsun. $L(\mathbb{R})$ üzerinde D supremum metriği

$$D(u, v) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \max \{ |u_\alpha^- - v_\alpha^-|, |u_\alpha^+ - v_\alpha^+| \}$$

biçimindedir (Nanda 1989).

Açık olarak

$$D(u, \tilde{0}) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \max \{ |u_\alpha^-|, |u_\alpha^+| \} = \max \{ |u_0^-|, |u_0^+| \}$$

dır. Eğer $u \in L^*(\mathbb{R})$ ise

$$D(u, \tilde{0}) = u_\alpha^+$$

dır.

Tanım 2.2.10 (u_n) , $L(\mathbb{R})$ de bir dizi ve $\ell \in L(\mathbb{R})$ olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(u_n, \ell) = 0$$

ise (u_n) fuzzy sayı dizisi ℓ ye yakınsaktır denir ve

$$(D) - \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$$

ile gösterilir (Nanda 1989).

Tanım 2.2.11 (u_n) , $L(\mathbb{R})$ de bir dizi ve $\ell \in L(\mathbb{R})$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : D(u_k, \ell) \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise, (u_n) fuzzy sayı dizisi ℓ ye istatistiksel yakınsaktır denir ve $st - \lim u_n = \ell$ ile gösterilir (Nuray ve Savaş 1995).

Tanım 2.2.12 (u_n) , $L(\mathbb{R})$ de bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : D(u_k, u_N) \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ var ise (u_n) fuzzy dizisi istatistiksel Cauchy dizisidir denir (Nuray ve Savaş 1995).

Tanım 2.2.13 $X, \mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı ve $\|\cdot\| : X \rightarrow L^*(\mathbb{R})$ olsun. L ve R

$$L, R : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad L(0, 0) = 0 \quad \text{ve} \quad R(1, 1) = 1$$

eşitliğini sağlayan simetrik, azalmayan dönüşümler olmak üzere her $x \in X$ ve $0 < \alpha \leq 1$ için

$$[\|x\|]_{\alpha} = [\|x\|_{\alpha}^{-}, \|x\|_{\alpha}^{+}]$$

olsun. Bu durumda,

(i) $x = (0, 0, \dots)$ ise ancak ve ancak $\|x\| = \tilde{0}$ dir,

(ii) $x \in X, c \in \mathbb{R}$ için $\|cx\| = |c| \|x\|$ dir,

(iii) Her $x, y \in X$ için

(a) $s \leq \|x\|_1^{-}, t \leq \|y\|_1^{-}$ ve $s + t \leq \|x + y\|_1^{-}$ ise

$$\|x + y\|(s + t) \geq L(\|x\|(s), \|y\|(t)),$$

(b) $s \geq \|x\|_1^{-}, t \geq \|y\|_1^{-}$ ve $s + t \geq \|x + y\|_1^{-}$ ise

$$\|x + y\|(s + t) \leq R(\|x\|(s), \|y\|(t))$$

şartları sağlanıyorsa, $(X, \|\cdot\|, L, R)$ uzayına fuzzy normlu uzay ve $\|\cdot\|$ dönüşümüne de fuzzy norm denir (Felbin 1992, Xiao ve Zhu 2002).

Tez çalışması boyunca $(X, \|\cdot\|)$ fuzzy normlu lineer uzay kısaca X olarak alınacaktır.

Lemma 2.2.14

(i) Eğer $R = \max$ dönüşümü alınırsa Tanım 2.2.13 (iii)(a) daki üçgen eşitsizliği her $\alpha \in (0, 1]$ ve $x, y \in X$ için

$$\|x + y\|_{\alpha}^{-} \leq \|x\|_{\alpha}^{-} + \|y\|_{\alpha}^{-}$$

üçgen eşitsizliğine dönüşür.

(ii) Eğer $L = \min$ dönüşümü alınırsa Tanım 2.2.13 (iii)(b) deki üçgen eşitsizliği her $\alpha \in (0, 1]$ ve $x, y \in X$ için

$$\|x + y\|_{\alpha}^{+} \leq \|x\|_{\alpha}^{+} + \|y\|_{\alpha}^{+}$$

üçgen eşitsizliğine dönüşür (Felbin 1992).

Teorem 2.2.15 Lemma 2.2.14 te verilen durumlar ele alındığında Tanım 2.2.13 (iii) deki üçgen eşitsizliği

$$\|x + y\| \preceq \|x\| \oplus \|y\|$$

ifadesine eşit olur (Felbin 1992).

Tanım 2.2.16 X fuzzy normlu uzayında x bir nokta olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $\alpha \in [0, 1]$ için x in (ε, α) -komşuluğu

$$\mathcal{N}_x(\varepsilon, \alpha) = \{y \in X : \|x - y\|_\alpha^+ < \varepsilon\}$$

biçimindedir (Kaleva ve Seikkala 1984).

Tanım 2.2.17 (x_n) , X de bir dizi ve $\ell \in X$ olsun. Eğer

$$(D) - \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - \ell\| = \tilde{0}$$

ya da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(\|x_n - \ell\|, \tilde{0}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - \ell\|_0^+ = 0$$

diğer bir ifadeyle her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n \geq n_0$ için

$$D(\|x_n - \ell\|, \tilde{0}) = \|x_n - \ell\|_0^+ < \varepsilon$$

ise veya

$$x_n \in \mathcal{N}_\ell(\varepsilon, 0)$$

olması durumunda, (x_n) dizisi ℓ ye fuzzy norma göre yakınsaktır denir (Felbin 1992, Fang 2002).

Tanım 2.2.18 (x_n) , X de bir dizi olsun. Eğer

$$(D) - \lim_{n, m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\| = \tilde{0}$$

diğer bir ifadeyle her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n, m \geq n_0$ için

$$D(\|x_n - x_m\|, \tilde{0}) = \|x_n - x_m\|_0^+ < \varepsilon$$

olması durumunda, (x_n) dizisine fuzzy norma göre Cauchy dizisidir denir (Felbin 1992, Fang 2002).

Tanım 2.2.19 (x_n) , X de bir dizi ve $\ell \in X$ olsun. Eğer

$$st - \lim x_n = \ell$$

diğer bir ifadeyle her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : D \left(\|x_k - \ell\|, \tilde{0} \right) \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

yani,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \|x_k - \ell\|_0^+ \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olması durumunda, (x_n) dizisi ℓ ye fuzzy norma göre istatistiksel yakınsaktır denir (Sençimen ve Pehlivan 2008).

Tanım 2.2.20 (x_n) , X de bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \|x_k - x_N\|_0^+ \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) fuzzy norma göre istatistiksel Cauchy dizisidir denir (Sençimen ve Pehlivan 2008).

Tanım 2.2.21 (x_n) , X de bir dizi, $\ell \in X$ ve $\theta = (k_r)$ lacunary dizi olsun. Eğer

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} D \left(\|x_i - \ell\|, \tilde{0} \right) = 0$$

diğer bir ifadeyle

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} \|x_i - \ell\|_0^+ = 0$$

olması durumunda, (x_n) dizisi ℓ ye fuzzy norma göre lacunary yakınsaktır denir (Türkmen ve Çınar 2017).

Tanım 2.2.22 (x_n) , X de bir dizi ve $\ell \in X$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : D \left(\|x_k - \ell\|, \tilde{0} \right) \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

yani,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \|x_k - \ell\|_0^+ \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olması durumunda, (x_n) dizisi ℓ ye fuzzy norma göre lacunary istatistiksel yakınsaktır denir (Türkmen ve Çınar 2017).

3. FUZZY NORMLU UZAYLARDA İNVARYANT VE KUVVETLİ İNVARYANT YAKINSAKLIK

Bu bölümde, öncelikle, fuzzy normlu uzaylarda invaryant yakınsaklık tanımı yapıldı ve limitin tekliği ile lineerliği incelendi. Daha sonra fuzzy normlu uzaylarda invaryant Cauchy dizi tanımı verilip, invaryant yakınsak dizi ile arasındaki ilişkiyi gösteren teorem ispatlandı. Ayrıca, kuvvetli invaryant yakınsaklık kavramı ile ilgili tanımlar yapılarak teoremler ispatlarıyla verildi.

3.1. Fuzzy Normlu Uzaylarda İnvaryant Yakınsaklık

Bu kısımda, öncelikle fuzzy norma göre invaryant yakınsaklık tanımı ve invaryant yakınsak olan bir dizinin limitinin tek olduğunu gösteren teorem verilecektir.

Tanım 3.1.1 (x_n) , X uzayında bir dizi olsun.

$$t_{mn} = \frac{x_{\sigma(n)} + x_{\sigma^2(n)} + \cdots + x_{\sigma^m(n)}}{m}$$

olmak üzere, eğer n ye göre düzgün olarak

$$(D) - \lim_{m \rightarrow \infty} \|t_{mn} - \ell\| = \tilde{0}$$

yani, her $\varepsilon > 0$ için en az bir $m_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $m > m_0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} D(\|t_{mn} - \ell\|, \tilde{0}) &= \sup_{\alpha \in [0,1]} \|t_{mn} - \ell\|_{\alpha}^{+} \\ &= \|t_{mn} - \ell\|_0^{+} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

ya da

$$t_{mn} \in \mathcal{N}_{\ell}(\varepsilon, 0)$$

olacak şekilde bir ℓ sayısı varsa, (x_n) dizisi ℓ ye fuzzy norma göre invaryant yakınsaktır denir ve bu durum

$$x_n \xrightarrow{\sigma-FN} \ell$$

ile gösterilir.

Örnek 3.1.2 (x_n) , X fuzzy normlu uzayında

$$x_n = \begin{cases} 1, & n \text{ çift}, \\ 0, & n \text{ tek} \end{cases}$$

olarak tanımlanan bir dizi olsun. $\sigma(n) = n + 1$ olarak alalım. (x_n) dizisi X de yakınsak olmayıp, $\frac{1}{2}$ sayısına invaryant yakınsaktır.

Teorem 3.1.3 (x_n) , X uzayında bir dizi olsun. (x_n) fuzzy norma göre invaryant yakınsak ise limiti tektir.

İspat: $\ell_1 \neq \ell_2$ olmak üzere $x_n \xrightarrow{\sigma-FN} \ell_1$ ve $x_n \xrightarrow{\sigma-FN} \ell_2$, olduğunu kabul edelim. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ için bir $m_1 = m_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $m > m_1$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} D(\|t_{mn} - \ell_1\|, \tilde{0}) &= \sup_{\alpha \in [0,1]} \|t_{mn} - \ell_1\|_{\alpha}^{+} \\ &= \|t_{mn} - \ell_1\|_0^{+} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

dir. Ayrıca, verilen $\varepsilon > 0$ için bir $m_2 = m_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $m > m_2$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} D(\|t_{mn} - \ell_2\|, \tilde{0}) &= \sup_{\alpha \in [0,1]} \|t_{mn} - \ell_2\|_{\alpha}^{+} \\ &= \|t_{mn} - \ell_2\|_0^{+} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

dir. Böylece, verilen her $\varepsilon > 0$ için bir $m_0 = \max\{m_1, m_2\}$ vardır öyle ki her $m > m_0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \|\ell_1 - \ell_2\|_0^{+} &= \|\ell_1 - t_{mn} + t_{mn} - \ell_2\|_0^{+} \\ &\leq \|\ell_1 - t_{mn}\|_0^{+} + \|t_{mn} - \ell_2\|_0^{+} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

dir ve buradan $\ell_1 = \ell_2$ elde edilir.

Şimdi, fuzzy norma göre invaryant yakınsaklığın lineerlik özelliklerini veren teoremler ispatlarıyla verilecektir.

Teorem 3.1.4 (x_n) ve (y_n) , X uzayında birer dizi olsun. Eğer

$$x_n \xrightarrow{\sigma-FN} \ell_1 \text{ ve } y_n \xrightarrow{\sigma-FN} \ell_2$$

ise

$$x_n + y_n \xrightarrow{\sigma-FN} \ell_1 + \ell_2$$

dir.

İspat: Kabul edelim ki

$$x_n \xrightarrow{\sigma-FN} \ell_1 \text{ ve } y_n \xrightarrow{\sigma-FN} \ell_2$$

olsun. Bu durumda

$$t_{mn} = \frac{x_{\sigma(n)} + x_{\sigma^2(n)} + \cdots + x_{\sigma^m(n)}}{m}$$

ve

$$k_{mn} = \frac{y_{\sigma(n)} + y_{\sigma^2(n)} + \cdots + y_{\sigma^m(n)}}{m}$$

olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için bir $m_1 = m_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $m > m_1$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} D(\|t_{mn} - \ell_1\|, \tilde{0}) &= \sup_{\alpha \in [0,1]} \|t_{mn} - \ell_1\|_{\alpha}^{+} \\ &= \|t_{mn} - \ell_1\|_0^{+} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

dir. Ayrıca, verilen $\varepsilon > 0$ için bir $m_2 = m_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $m > m_2$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} D(\|k_{mn} - \ell_2\|, \tilde{0}) &= \sup_{\alpha \in [0,1]} \|k_{mn} - \ell_2\|_{\alpha}^{+} \\ &= \|k_{mn} - \ell_2\|_0^{+} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece, verilen her $\varepsilon > 0$ için bir $m_0 = \max\{m_1, m_2\}$ vardır öyle ki her $m > m_0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
\|(t_{mn} + k_{mn}) - (\ell_1 + \ell_2)\|_0^+ &= \|t_{mn} - \ell_1 + k_{mn} - \ell_2\|_0^+ \\
&\leq \|t_{mn} - \ell_1\|_0^+ + \|k_{mn} - \ell_2\|_0^+ \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

dir ve buradan

$$x_n + y_n \xrightarrow{\sigma-FN} \ell_1 + \ell_2$$

elde edilir.

Teorem 3.1.5 (x_n) , X uzayında bir dizi ve c skaler bir değer olsun. Eğer

$$x_n \xrightarrow{\sigma-FN} \ell$$

ise

$$c x_n \xrightarrow{\sigma-FN} c \ell$$

dir.

İspat: Kabul edelim ki $x_n \xrightarrow{\sigma-FN} \ell$ ve c bir skaler olsun. $c = 0$ için ispat açıktır. $c \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, verilen her $\varepsilon > 0$ için bir $m_0 = m_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $m > m_0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|t_{mn} - \ell\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{|c|}$$

dir. Böylece,

$$\begin{aligned}
\|c t_{mn} - c \ell\|_0^+ &= |c| \|t_{mn} - \ell\|_0^+ \\
&< |c| \frac{\varepsilon}{|c|} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

olduğundan

$$c x_n \xrightarrow{\sigma-FN} c \ell$$

sonucuna varılır.

Şimdi de, fuzzy norma göre invaryant Cauchy dizi kavramı tanıtılacak ve invaryant yakınsaklık ile arasındaki ilişkiyi veren teorem ispatıyla birlikte verilecektir.

Tanım 3.1.6 (x_n) , X uzayında bir dizi olsun. n ye göre düzgün olarak

$$(D) - \lim_{m,k \rightarrow \infty} \|t_{mn} - t_{kn}\| = \tilde{0}$$

yani, her $\varepsilon > 0$ için en az bir $m_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $m, k > m_0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} D(\|t_{mn} - t_{kn}\|, \tilde{0}) &= \sup_{\alpha \in [0,1]} \|t_{mn} - t_{kn}\|_{\alpha}^{+} \\ &= \|t_{mn} - t_{kn}\|_0^{+} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

ise, (x_n) fuzzy norma göre invaryant Cauchy dizidir denir.

Teorem 3.1.7 (x_n) , X uzayında bir dizi olsun. (x_n) dizisinin fuzzy norma göre invaryant yakınsak olması için gerek ve yeter şart invaryant Cauchy dizisi olmasıdır.

İspat: (x_n) dizisi fuzzy norma göre ℓ sayısına invaryant yakınsak olsun. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ için bir $m_0 = m_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $m > m_0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} D(\|t_{mn} - \ell\|, \tilde{0}) &= \sup_{\alpha \in [0,1]} \|t_{mn} - \ell\|_{\alpha}^{+} \\ &= \|t_{mn} - \ell\|_0^{+} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

dir. Her $m, k > m_0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \|t_{mn} - t_{kn}\|_0^{+} &\leq \|t_{mn} - \ell\|_0^{+} + \|t_{kn} - \ell\|_0^{+} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

olduğundan, (x_n) fuzzy norma göre invaryant Cauchy dizisidir.

Tersine, (x_n) fuzzy norma göre invaryant Cauchy dizisi olsun. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ için bir $m_0 = m_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $m, k > m_0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} D(\|t_{mn} - t_{kn}\|, \tilde{0}) &= \sup_{\alpha \in [0,1]} \|t_{mn} - t_{kn}\|_{\alpha}^{+} \\ &= \|t_{mn} - t_{kn}\|_0^{+} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

dir. n yi $n = n_0$ olarak sabitleyelim. İnvaryant Cauchy dizisi tanımına göre $(t_{mn_0})_{m=0}^{\infty}$ bir Cauchy dizisidir ve herhangi bir ℓ sayısına yakınsar. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ için bir $m_1 = m_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $m > m_1$ için

$$\|t_{mn_0} - \ell\|_0^{+} < \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. Böylece, verilen her $\varepsilon > 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $m > \max\{m_0, m_1\}$ olduğunda,

$$\begin{aligned} \|t_{mn} - \ell\|_0^{+} &\leq \|t_{mn} - t_{mn_0}\| + \|t_{mn_0} - \ell\|_0^{+} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak (x_n) dizisi ℓ ye fuzzy norma göre invaryant yakınsaktır.

3.2. Fuzzy Normlu Uzaylarda Kuvvetli İnvaryant Yakınsaklık

Bu kısımda, fuzzy norma göre kuvvetli invaryant yakınsaklık tanımı yapılacak, daha sonra limitin tekliği ve lineerliğini veren teoremler ispatlanacaktır.

Tanım 3.2.1 (x_n) , X uzayında bir dizi olsun. n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m D(\|x_{\sigma^i(n)} - \ell\|, \tilde{0}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \|x_{\sigma^i(n)} - \ell\|_0^{+} = 0,$$

yani, her $\varepsilon > 0$ için bir $m_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $m > m_0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \|x_{\sigma^i(n)} - \ell\|_0^{+} < \varepsilon$$

olacak şekilde bir ℓ sayısı varsa, (x_n) dizisi ℓ ye fuzzy norma göre kuvvetli invaryant yakınsaktır denir ve bu durum

$$x_n \xrightarrow{[\sigma-FN]} \ell$$

ile gösterilir.

Teorem 3.2.2 (x_n) , X uzayında bir dizi olsun. (x_n) fuzzy norma göre kuvvetli invaryant yakınsak ise limiti tektir.

İspat: $\ell_1 \neq \ell_2$ olmak üzere

$$x_n \xrightarrow{[\sigma-FN]} \ell_1 \text{ ve } x_n \xrightarrow{[\sigma-FN]} \ell_2$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ için bir $m_1 = m_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $m > m_1$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \|x_{\sigma^i(n)} - \ell_1\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. Ayrıca, verilen $\varepsilon > 0$ için bir $m_2 = m_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $m > m_2$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \|x_{\sigma^i(n)} - \ell_2\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. Böylece, verilen her $\varepsilon > 0$ için bir $m_0 = \max\{m_1, m_2\}$ vardır öyle ki her $m > m_0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \|\ell_1 - \ell_2\|_0^+ &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \|\ell_1 - \ell_2\|_0^+ \\ &\leq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \|x_{\sigma^i(n)} - \ell_1\|_0^+ + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \|x_{\sigma^i(n)} - \ell_2\|_0^+ \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

dir ve sonuç olarak

$$\ell_1 = \ell_2$$

elde edilir.

Teorem 3.2.3 (x_n) ve (y_n) , X uzayında birer dizi olsun. Eğer

$$x_n \xrightarrow{[\sigma-FN]} \ell_1 \quad \text{ve} \quad y_n \xrightarrow{[\sigma-FN]} \ell_2$$

ise

$$x_n + y_n \xrightarrow{[\sigma-FN]} \ell_1 + \ell_2$$

dir.

İspat: Kabul edelim ki

$$x_n \xrightarrow{[\sigma-FN]} \ell_1 \quad \text{ve} \quad y_n \xrightarrow{[\sigma-FN]} \ell_2$$

olsun. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ için bir $m_1 = m_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $m > m_1$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \|x_{\sigma^i(n)} - \ell_1\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. Ayrıca, verilen $\varepsilon > 0$ için bir $m_2 = m_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $m > m_2$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \|y_{\sigma^i(n)} - \ell_2\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir. Böylece, verilen her $\varepsilon > 0$ için bir $m_0 = \max\{m_1, m_2\}$ vardır öyle ki her $m > m_0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \|(x_{\sigma^i(n)} + y_{\sigma^i(n)}) - (\ell_1 + \ell_2)\|_0^+ \\ & \leq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \|x_{\sigma^i(n)} - \ell_1\|_0^+ + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \|y_{\sigma^i(n)} - \ell_2\|_0^+ \\ & < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ & = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir ve

$$x_n + y_n \xrightarrow{[\sigma-FN]} \ell_1 + \ell_2$$

sonucuna varılır.

Teorem 3.2.4 (x_n) , X uzayında bir dizi ve c skaler bir değer olsun. Eğer

$$x_n \xrightarrow{[\sigma-FN]} \ell$$

ise

$$c x_n \xrightarrow{[\sigma-FN]} c \ell$$

dir.

İspat: $x_n \xrightarrow{[\sigma-FN]} \ell$ ve c nin bir skaler olduğunu farzedelim. $c = 0$ için ispat açıktır. $c \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, verilen her $\varepsilon > 0$ için bir $m_0 = m_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $m > m_0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \|x_{\sigma^i(n)} - \ell\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{|c|}$$

dir.

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \|c x_{\sigma^i(n)} - c \ell\|_0^+ &= |c| \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \|x_{\sigma^i(n)} - \ell\|_0^+ \\ &< |c| \frac{\varepsilon}{|c|} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

olduğundan,

$$c x_n \xrightarrow{[\sigma-FN]} c \ell$$

sonucuna varılır.

Şimdi, bir fuzzy normlu uzayda invaryant yakınsaklık ile kuvvetli invaryant yakınsaklık arasındaki ilişkiyi veren teorem ispatlanacaktır.

Teorem 3.2.5 (x_n) , X uzayında bir dizi olsun. (x_n) dizisi ℓ ye kuvvetli invaryant yakınsak ise, ℓ ye invaryant yakınsaktır.

İspat: X uzayında (x_n) dizisi ℓ ye kuvvetli invaryant yakınsak olsun. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ için bir $m_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $m > m_0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \|x_{\sigma^i(n)} - \ell\|_0^+ < \varepsilon$$

dir.

Bu durumda

$$\begin{aligned}
\|t_{mn} - \ell\|_{\alpha}^+ &= \left\| \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_{\sigma^i(n)} - \ell \right\|_{\alpha}^+ \\
&\leq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \|x_{\sigma^i(n)} - \ell\|_0^+ \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

eşitsizliğinden (x_n) dizisi ℓ ye invaryant yakınsaktır.

Lemma 3.2.6 (x_n) , X uzayında bir dizi olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ için her $n \geq n_0$ ve her $m \geq m_0$ olduğunda

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \|x_{\sigma^i(n)} - \ell\|_0^+ < \varepsilon$$

olacak şekilde $m_0 \in \mathbb{N}$ ve $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa, (x_n) dizisi ℓ ye fuzzy norma göre kuvvetli invaryant yakınsaktır.

İspat: Verilen keyfi bir $\varepsilon > 0$ için $m_1 \in \mathbb{N}$ ve $n_0 \in \mathbb{N}$ seçelim öyle ki her $m \geq m_1$ ve $n \geq n_0$ için

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \|x_{\sigma^i(n)} - \ell\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{2} \quad (3.1)$$

olsun. Şimdi bir $m_2 \in \mathbb{N}$ nin varlığını ispatlamalıyız, öyle ki her $m \geq m_2$ ve $0 \leq n \leq n_0$ için

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \|x_{\sigma^i(n)} - \ell\|_0^+ < \varepsilon \quad (3.2)$$

olsun. Çünkü böyle bir m_2 varsa $m_0 = \max\{m_1, m_2\}$ aldığımızda her $m \geq m_0$ ve her n için

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \|x_{\sigma^i(n)} - \ell\|_0^+ < \varepsilon$$

ifadesi sağlanır. Bu durum kuvvetli invaryant yakınsaklık tanımı olduğu için ispat tamamlanır. Seçilen n_0 için sabit bir M sayısı vardır öyle ki

$$\sum_{i=1}^{n_0} \|x_i - \ell\|_0^+ = M \quad (3.3)$$

dir.

Şimdi, $0 \leq n \leq n_0$ ve $m \geq m_0$ alalım. n_0 için bir m' vardır öyle ki $\sigma^{m'}(n) \leq n_0$ dır.

Bu durumda

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \|x_{\sigma^i(n)} - \ell\|_0^+ &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m'} \|x_{\sigma^i(n)} - \ell\|_0^+ + \frac{1}{m} \sum_{i=m'+1}^m \|x_{\sigma^i(n_0)} - \ell\|_0^+ \\
&\leq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n_0} \|x_i - \ell\|_0^+ + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \|x_{\sigma^i(n_0)} - \ell\|_0^+ \\
&\leq \frac{M}{m} + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \|x_{\sigma^i(n_0)} - \ell\|_0^+ \quad ((3.3) \text{ eşitliğinden}) \\
&\leq \frac{M}{m} + \frac{\varepsilon}{2} \quad ((3.1) \text{ eşitsizliğinden})
\end{aligned}$$

olup, yeterince büyük m ler için

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \|x_{\sigma^i(n)} - \ell\|_0^+ \leq \frac{M}{m} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

elde edilir. Sonuç olarak 3.2 şartı sağlanır ve böylece ispat tamamlanır.

4. FUZZY NORMLU UZAYLARDA LACUNARY İNVARYANT VE KUVVETLİ LACUNARY İNVARYANT YAKINSAKLIK

Bu bölümde, öncelikle fuzzy normlu uzaylarda lacunary invaryant yakınsaklık kavramı tanımlanarak limitin tekliği ve yakınsaklığın lineerlik özellikleri verildi. Ayrıca lacunary invaryant Cauchy dizi tanımı verilip lacunary invaryant yakınsaklık ile ilişkisi gösterildi. Daha sonra, fuzzy normlu uzaylarda kuvvetli lacunary invaryant yakınsaklık tanımı yapıp limitin tekliği ve yakınsaklığın lineerlik özellikleri incelendi.

Bölüm boyunca $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizi olarak kabul edilecektir.

4.1. Fuzzy Normlu Uzaylarda Lacunary İnvaryant Yakınsaklık

Bu kısımda, öncelikle fuzzy normlu uzaylarda lacunary invaryant yakınsaklık kavramı ve limitin tekliği ile lineerliğini verilecektir.

Tanım 4.1.1 (x_n) , X uzayında bir dizi olsun. n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r \rightarrow \infty} D \left(\left\| \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} x_{\sigma^i(n)} - \ell \right\|, \tilde{0} \right) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} x_{\sigma^i(n)} - \ell \right\|_0^+ = 0$$

ya da başka bir ifadeyle her $\varepsilon > 0$ için bir $r_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $r > r_0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$D \left(\left\| \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} x_{\sigma^i(n)} - \ell \right\|, \tilde{0} \right) = \left\| \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} x_{\sigma^i(n)} - \ell \right\|_0^+ < \varepsilon$$

olacak şekilde bir ℓ sayısı varsa, (x_n) dizisi ℓ ye fuzzy norma göre lacunary invaryant yakınsaktır denir ve bu durum

$$x_n \xrightarrow{\sigma-FN_\theta} \ell$$

ile gösterilir.

Teorem 4.1.2 (x_n) , X uzayında bir dizi olsun. (x_n) , fuzzy norma göre lacunary invaryant yakınsak ise limiti tektir.

İspat: $\ell_1 \neq \ell_2$ olmak üzere,

$$x_n \xrightarrow{\sigma-FN_\theta} \ell_1 \quad \text{ve} \quad x_n \xrightarrow{\sigma-FN_\theta} \ell_2$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda, verilen her $\varepsilon > 0$ için bir $r_1 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $r > r_1$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left\| \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} x_{\sigma^i(n)} - \ell_1 \right\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. Ayrıca, verilen $\varepsilon > 0$ için bir $r_2 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $r > r_2$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left\| \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} x_{\sigma^i(n)} - \ell_2 \right\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{2}$$

yazılabilir. Böylece, $r_0 = \max\{r_1, r_2\}$ olmak üzere her $r > r_0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \|\ell_1 - \ell_2\|_0^+ &\leq \left\| \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} x_{\sigma^i(n)} - \ell_1 \right\|_0^+ + \left\| \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} x_{\sigma^i(n)} - \ell_2 \right\|_0^+ \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

olduğundan her $\varepsilon > 0$ için

$$\|\ell_1 - \ell_2\|_0^+ < \varepsilon$$

dur ve sonuç olarak

$$\ell_1 = \ell_2$$

elde edilir.

Teorem 4.1.3 (x_n) ve (y_n) , X uzayında birer dizi olsun. Eğer

$$x_n \xrightarrow{\sigma-FN_\theta} \ell_1 \quad \text{ve} \quad y_n \xrightarrow{\sigma-FN_\theta} \ell_2$$

ise bu durumda

$$x_n + y_n \xrightarrow{\sigma-FN_\theta} \ell_1 + \ell_2$$

dir.

İspat: Hipotez gereği

$$x_n \xrightarrow{\sigma-FN_\theta} \ell_1$$

olduğundan, her $\varepsilon > 0$ için bir $r_1 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $r > r_1$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left\| \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} x_{\sigma^i(n)} - \ell_1 \right\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. Ayrıca

$$y_n \xrightarrow{\sigma-FN_\theta} \ell_2$$

olduğundan, verilen $\varepsilon > 0$ için bir $r_2 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $r > r_2$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left\| \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} y_{\sigma^i(n)} - \ell_2 \right\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. Böylece, $r_0 = \max\{r_1, r_2\}$ olmak üzere her $r > r_0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} (x_{\sigma^i(n)} + y_{\sigma^i(n)}) - (\ell_1 + \ell_2) \right\|_0^+ \\ &= \left\| \left(\frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} x_{\sigma^i(n)} + \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} y_{\sigma^i(n)} \right) - (\ell_1 + \ell_2) \right\|_0^+ \\ &\leq \left\| \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} x_{\sigma^i(n)} - \ell_1 \right\|_0^+ + \left\| \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} y_{\sigma^i(n)} - \ell_2 \right\|_0^+ \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

olduğundan,

$$x_n + y_n \xrightarrow{\sigma-FN_\theta} \ell_1 + \ell_2$$

elde edilir.

Teorem 4.1.4 (x_n) , X uzayında bir dizi olsun. Eğer

$$x_n \xrightarrow{\sigma-FN_\theta} \ell$$

ise, bu durumda c skaler bir değer olmak üzere

$$c x_n \xrightarrow{\sigma-FN_\theta} c \ell$$

dir.

İspat: $c = 0$ için ispat açıktır. $c \neq 0$ olduğunu kabul edelim.

$$x_n \xrightarrow{\sigma-FN_\theta} \ell$$

olduğundan, her $\varepsilon > 0$ için bir $r_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $r > r_0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left\| \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} x_{\sigma^i(n)} - \ell \right\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{|c|}$$

yazılabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} c x_{\sigma^i(n)} - c \ell \right\|_0^+ &= |c| \left\| \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} x_{\sigma^i(n)} - \ell \right\|_0^+ \\ &< |c| \frac{\varepsilon}{|c|} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

olduğundan,

$$c x_n \xrightarrow{\sigma-FN_\theta} c \ell$$

dir.

Şimdi, fuzzy normlu uzaylarda lacunary invaryant Cauchy dizi kavramı ve bu kavramın invaryant yakınsaklık ile ilişkisi verilecektir.

Tanım 4.1.5 (x_n) , X uzayında bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için bir $r_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $r, s > r_0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left\| \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} x_{\sigma^i(n)} - \frac{1}{h_s} \sum_{j \in I_s} x_{\sigma^j(n)} \right\|_0^+ < \varepsilon$$

ise, bu durumda (x_n) fuzzy norma göre lacunary invaryant Cauchy dizisidir denir.

Teorem 4.1.6 (x_n) , fuzzy norma göre lacunary invariant yakınsak ise lacunary invaryant Cauchy dizisidir.

İspat: Kabul edelim ki (x_n) dizisi ℓ sayısına fuzzy norma göre lacunary invariant yakınsak olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için bir $r_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $r > r_0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left\| \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} x_{\sigma^i(n)} - \ell \right\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. Böylece, her $r, s > r_0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} x_{\sigma^i(n)} - \frac{1}{h_s} \sum_{j \in I_s} x_{\sigma^j(n)} \right\|_0^+ &= \left\| \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} x_{\sigma^i(n)} - \ell \right\|_0^+ + \left\| \frac{1}{h_s} \sum_{j \in I_s} x_{\sigma^j(n)} - \ell \right\|_0^+ \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

olduğundan, (x_n) lacunary invariant Cauchy dizisidir.

4.2. Fuzzy Normlu Uzaylarda Kuvvetli Lacunary İnvaryant Yakınsaklık

Bu kısımda, öncelikle fuzzy normlu uzaylarda kuvvetli lacunary invaryant yakınsaklık kavramı tanıtılarak limitinin tekliği ve lineerliği verilecektir. Daha sonra kuvvetli lacunary invaryant yakınsaklık ile lacunary invaryant yakınsaklık arasındaki ilişki incelenecektir.

Tanım 4.2.1 (x_n) , X uzayında bir dizi olsun. n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} D(\|x_{\sigma^i(n)} - \ell\|, \tilde{0}) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} \|x_{\sigma^i(n)} - \ell\|_0^+ = 0$$

ya da başka bir ifadeyle her $\varepsilon > 0$ için bir $r_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $r > r_0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} D(\|x_{\sigma^i(n)} - \ell\|, \tilde{0}) = \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} \|x_{\sigma^i(n)} - \ell\|_0^+ < \varepsilon$$

olacak şekilde bir ℓ sayısı varsa, (x_n) dizisi ℓ ye fuzzy norma göre kuvvetli lacunary invaryant yakınsaktır denir ve bu durum

$$x_n \xrightarrow{[\sigma-FN]_\theta} \ell$$

ile gösterilir.

Teorem 4.2.2 (x_n) , X uzayında bir dizi olsun. (x_n) , fuzzy norma göre kuvvetli lacunary invaryant yakınsak ise limiti tektir.

İspat: $\ell_1 \neq \ell_2$ olmak üzere

$$x_n \xrightarrow{[\sigma-FN]_\theta} \ell_1 \quad \text{ve} \quad x_n \xrightarrow{[\sigma-FN]_\theta} \ell_2$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ için bir $r_1 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $r > r_1$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} \|x_{\sigma^i(n)} - \ell_1\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. Ayrıca, verilen $\varepsilon > 0$ için bir $r_2 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $r > r_2$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} \|x_{\sigma^i(n)} - \ell_2\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir. Üçgen eşitsizliğinden

$$\|\ell_1 - \ell_2\|_0^+ \leq \|x_{\sigma^i(n)} - \ell_1\|_0^+ + \|x_{\sigma^i(n)} - \ell_2\|_0^+$$

yazılabilir. Bu durumda, $r_0 = \max\{r_1, r_2\}$ olmak üzere her $r > r_0$ için

$$\begin{aligned} \|\ell_1 - \ell_2\|_0^+ &= \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} \|\ell_1 - \ell_2\|_0^+ \\ &\leq \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} \|x_{\sigma^i(n)} - \ell_1\|_0^+ + \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} \|x_{\sigma^i(n)} - \ell_2\|_0^+ \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

olduğundan, her $\varepsilon > 0$ için

$$\|\ell_1 - \ell_2\|_0^+ < \varepsilon$$

elde edilir ve buradan

$$\ell_1 = \ell_2$$

dir.

Teorem 4.2.3 (x_n) ve (y_n) , X uzayında iki dizi olsun.

$$x_n \xrightarrow{[\sigma-FN]_\theta} \ell_1 \quad \text{ve} \quad y_n \xrightarrow{[\sigma-FN]_\theta} \ell_2$$

ise bu durumda

$$x_n + y_n \xrightarrow{[\sigma-FN]_\theta} \ell_1 + \ell_2$$

dir.

İspat: Hipotez gereği

$$x_n \xrightarrow{[\sigma-FN]_\theta} \ell_1$$

olduğundan, her $\varepsilon > 0$ için bir $r_1 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $r > r_1$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} \|x_{\sigma^i(n)} - \ell_1\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{2}$$

ve ayrıca

$$y_n \xrightarrow{[\sigma-FN]_\theta} \ell_2$$

olduğundan, verilen $\varepsilon > 0$ için bir $r_2 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $r > r_2$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} \|y_{\sigma^i(n)} - \ell_2\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. Bu durumda, $r_0 = \max\{r_1, r_2\}$ olmak üzere her $r > r_0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} \|(x_{\sigma^i(n)} + y_{\sigma^i(n)}) - (\ell_1 + \ell_2)\|_0^+ \\ & \leq \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} \|x_{\sigma^i(n)} - \ell_1\|_0^+ + \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} \|y_{\sigma^i(n)} - \ell_2\|_0^+ \\ & < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ & = \varepsilon \end{aligned}$$

olduğundan,

$$x_n + y_n \xrightarrow{[\sigma-FN]_\theta} \ell_1 + \ell_2$$

elde edilir.

Teorem 4.2.4 (x_n) , X uzayında bir dizi olsun.

$$x_n \xrightarrow{[\sigma-FN]_\theta} \ell$$

ise, bu durumda c bir skaler olmak üzere

$$c x_n \xrightarrow{[\sigma-FN]_\theta} c \ell$$

dir.

İspat: $c = 0$ için ispat açıktır. $c \neq 0$ olduğunu kabul edelim.

$$x_n \xrightarrow{[\sigma-FN]_\theta} \ell$$

olduğundan, her $\varepsilon > 0$ için bir $r_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $r > r_0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} \|x_{\sigma^i(n)} - \ell\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{|c|}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} \|c x_{\sigma^i(n)} - c \ell\|_0^+ &= |c| \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} \|x_{\sigma^i(n)} - \ell\|_0^+ \\ &< |c| \frac{\varepsilon}{|c|} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

olduğundan,

$$c x_n \xrightarrow{[\sigma-FN]_\theta} c \ell$$

dir.

Teorem 4.2.5 (x_n) , X uzayında bir dizi olsun. (x_n) dizisi ℓ sayısına kuvvetli lacunary invaryant yakınsak ise ℓ ye lacunary invaryant yakınsaktır.

İspat: (x_n) dizisi ℓ sayısına kuvvetli lacunary invaryant yakınsak olsun. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ için bir $r_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $r \geq r_0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} \|x_{\sigma^i(n)} - \ell\|_0^+ < \varepsilon$$

dir.

Buradan

$$\left\| \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} x_{\sigma^i(n)} - \ell \right\|_0^+ \leq \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} \|x_{\sigma^i(n)} - \ell\|_0^+ < \varepsilon$$

olduğundan, (x_n) dizisi ℓ ye lacunary invaryant yakınsaktır.

Şimdi, fuzzy normlu uzaylarda kuvvetli lacunary invaryant yakınsaklık ile kuvvetli invaryant yakınsaklık arasındaki ilişki verilecektir.

Teorem 4.2.6 (x_n) , X uzayında bir dizi olsun. Bu durumda

$$x_n \xrightarrow{[\sigma-FN]_\theta} \ell \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{[\sigma-FN]} \ell$$

dır.

İspat: Kabul edelim ki

$$x_n \xrightarrow{[\sigma-FN]_\theta} \ell$$

olsun. Bu durumda, verilen her $\varepsilon > 0$ için bir $r_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $r \geq r_0$ ve $s > 0$ olmak üzere $n = \sigma^{k_r-1}(s)$ için

$$\frac{1}{h_r} \sum_{i=1}^{h_r} \|x_{\sigma^i(n)} - \ell\|_0^+ < \varepsilon$$

dir. t bir tamsayı ve $0 \leq q \leq h_r$ olmak üzere

$$m = th_r + q \tag{4.1}$$

olarak yazılan $m \geq h_r$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \|x_{\sigma^i(n)} - \ell\|_0^+ &\leq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{(t+1)h_r} \|x_{\sigma^i(n)} - \ell\|_0^+ \\ &= \frac{1}{m} \sum_{\mu=0}^t \sum_{i=\mu h_r}^{(\mu+1)h_r} \|x_{\sigma^i(\sigma^{k_r-1}(n))} - \ell\|_0^+ \\ &\leq \frac{t+1}{m} h_r \varepsilon \\ &\leq \frac{2th_r \varepsilon}{m} \quad (t \geq 1). \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca (4.1) den $\frac{th_r}{m} \leq 1$ olduğu açıktır. Bu durumda

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \|x_{\sigma^i(n)} - \ell\|_0^+ \leq 2\varepsilon$$

dur. Lemma 3.2.6 den

$$x_n \xrightarrow{[\sigma-FN]} \ell$$

dir. Ayrıca

$$x_n \xrightarrow{[\sigma-FN]} \ell$$

ise

$$x_n \xrightarrow{[\sigma-FN]_\theta} \ell$$

olduğu aşıkardır. Sonuç olarak

$$x_n \xrightarrow{[\sigma-FN]_\theta} \ell \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{[\sigma-FN]} \ell$$

olduğu ispatlanır.

5. FUZZY NORMLU UZAYLARDA İSTATİSTİKSEL İNVARİYANT YAKINSAKLIK

Bu bölümde, fuzzy normlu uzaylarda invaryant yakınsaklığın iki farklı istatistiksel yaklaşımı tanımlandı ve bu tanımların birbiri ile ilişkisi verildi. Ayrıca, invaryant istatistiksel yakınsaklık kavramının limitinin tekliği, lineerliği ve kuvvetli invaryant yakınsaklık ile ilişkisi incelendi. Son olarak invaryant istatistiksel Cauchy dizi tanımı ve ilgili teorem verildi.

5.1. Fuzzy Normlu Uzaylarda İnvaryant İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda, öncelikle fuzzy normlu uzaylarda invaryant istatistiksel yakınsaklık kavramı tanıtılarak, limitin tekliği ve lineerlik özellikleri verilecektir.

Tanım 5.1.1 (x_n) , X uzayında bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$K(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \|x_n - \ell\|_0^+ \geq \varepsilon\}$$

olmak üzere,

$$\delta_\sigma(K_\varepsilon) = 0$$

yani n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} |\{k \in \{\sigma(n), \sigma^2(n), \dots, \sigma^m(n)\} : \|x_k - \ell\|_0^+ \geq \varepsilon\}| = 0$$

ya da başka bir ifadeyle n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} |\{k \leq m : \|x_{\sigma^k(n)} - \ell\|_0^+ \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir ℓ sayısı varsa, (x_n) dizisi ℓ ye fuzzy norma göre invaryant istatistiksel yakınsaktır denir ve bu durum

$$x_n \xrightarrow{\sigma\text{-st-FN}} \ell$$

ile gösterilir.

Örnek 5.1.2 (x_n) , X de bir dizi olsun ve terimleri

$$x_n = \begin{cases} n, & n \text{ asal,} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $\sigma(n) = n + 1$ olarak alalım. Her $\varepsilon > 0$ ve her asal olmayan $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|x_n - 0\|_0^+ = \|0\|_0^+ = 0 < \varepsilon$$

olduğundan, her $\varepsilon > 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\delta(\{m \in \mathbb{N} : \|x_{\sigma^m(n)} - 0\|_0^+ \geq \varepsilon\}) = \delta(\{n \in \mathbb{N} : n \text{ asal sayı}\}) = 0$$

dir. Yani, (x_n) dizisi 0 a istatistiksel ve invaryant istatistiksel yakınsaktır fakat invaryant yakınsak değildir.

Teorem 5.1.3 (x_n) , X uzayında bir dizi olsun. (x_n) fuzzy norma göre invaryant istatistiksel yakınsak ise limiti tektir.

İspat: (x_n) birbirinden farklı ℓ_1 ve ℓ_2 değerlerine invaryant istatistiksel yakınsak olsun. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ için n ye göre düzgün olarak

$$\delta\left(\left\{m \in \mathbb{N} : \|x_{\sigma^m(n)} - \ell_1\|_0^+ \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) = 0$$

ve

$$\delta\left(\left\{m \in \mathbb{N} : \|x_{\sigma^m(n)} - \ell_2\|_0^+ \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) = 0$$

dır. Buradan, n ye göre düzgün olarak

$$\begin{aligned} \delta\left(\left\{m \in \mathbb{N} : \|x_{\sigma^m(n)} - \ell_1\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) &= 1 \text{ ve} \\ \delta\left(\left\{m \in \mathbb{N} : \|x_{\sigma^m(n)} - \ell_2\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) &= 1 \end{aligned} \tag{5.1}$$

olduğu açıktır.

$$\ell_1 \neq \ell_2. \tag{5.2}$$

olarak kabul ettiğimiz için bazı $\varepsilon > 0$ lar için

$$\|\ell_1 - \ell_2\|_0^+ \geq \varepsilon$$

dir. Bu yüzden

$$N_1 = \left\{ m \in \mathbb{N} : \|x_{\sigma^m(n)} - \ell_1\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

ve

$$N_2 = \left\{ m \in \mathbb{N} : \|x_{\sigma^m(n)} - \ell_2\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

olmak üzere

$$N_1 \cap N_2 = \emptyset$$

dir. $N_1 \cup N_2 \subseteq \mathbb{N}$ olduğunu biliyoruz. (5.1) den

$$\delta(N_1) + \delta(N_2) \leq \delta(\mathbb{N}) \Rightarrow 1 + 1 \leq 1,$$

yazılır ve çelişki elde edilir. Bu durumda

$$\ell_1 = \ell_2$$

dir.

Teorem 5.1.4 (x_n) ve (y_n) , X uzayında iki dizi olsun. Eğer

$$x_n \xrightarrow{\sigma-st-FN} \ell_1 \quad \text{ve} \quad y_n \xrightarrow{\sigma-st-FN} \ell_2$$

ise bu durumda

$$x_n + y_n \xrightarrow{\sigma-st-FN} \ell_1 + \ell_2$$

dir.

İspat: Kabul edelim ki

$$x_n \xrightarrow{\sigma-st-FN} \ell_1 \quad \text{ve} \quad y_n \xrightarrow{\sigma-st-FN} \ell_2$$

olsun. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$N_1 = \left\{ m \in \mathbb{N} : \|x_{\sigma^m(n)} - \ell_1\|_0^+ \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

ve

$$N_2 = \left\{ m \in \mathbb{N} : \|y_{\sigma^m(n)} - \ell_2\|_0^+ \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

olmak üzere,

$$\delta(N_1) = 0 \quad \text{ve} \quad \delta(N_2) = 0 \tag{5.3}$$

dır.

Bu durumda

$$\|(x_{\sigma^m(n)} + y_{\sigma^m(n)}) - (\ell_1 + \ell_2)\|_0^+ \leq \|x_{\sigma^m(n)} - \ell_1\|_0^+ + \|y_{\sigma^m(n)} - \ell_2\|_0^+ \quad (5.4)$$

olduğu için

$$N = \{m \in \mathbb{N} : \|(x_{\sigma^m(n)} + y_{\sigma^m(n)}) - (\ell_1 + \ell_2)\|_0^+ \geq \varepsilon\}$$

olmak üzere

$$N \subseteq N_1 \cup N_2 \quad (5.5)$$

elde edilir. (5.5) in doğru olduğunu göstermek için

$$m_0 \notin N_1 \cup N_2$$

olacak şekilde bir $m_0 \in N$ alalım. $m_0 \notin N_1 \cup N_2$ olduğundan aynı anda $m_0 \notin N_1$ ve $m_0 \notin N_2$ dir. Bu durumda m_0 için

$$\|x_{\sigma^{m_0}(n)} - \ell_1\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ve} \quad \|y_{\sigma^{m_0}(n)} - \ell_2\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{2}$$

eşitsizlikleri yazılır ve (5.4) den

$$\|(x_{\sigma^{m_0}(n)} + y_{\sigma^{m_0}(n)}) - (\ell_1 + \ell_2)\|_0^+ < \varepsilon$$

elde edilir. Bu durum $m_0 \in N$ kabulü ile çelişmektedir. Böylece (5.5) içermesi doğrulanmış olur. (5.3) ve (5.5) den $\delta(N) = 0$ elde edilir. Sonuç olarak

$$x_n + y_n \xrightarrow{\sigma-st-FN} \ell_1 + \ell_2$$

dir.

Teorem 5.1.5 (x_n) , X uzayında bir dizi ve c skaler bir değer olsun. Eğer

$$x_n \xrightarrow{\sigma-st-FN} \ell$$

ise, bu durumda

$$c x_n \xrightarrow{\sigma-st-FN} c \ell$$

dir.

İspat: Kabul edelim ki

$$x_n \xrightarrow{\sigma-st-FN} \ell$$

ve c skaler bir değer olsun. $c = 0$ için ispat açıktır. $c \neq 0$ olduğunu kabul edelim.

Böylece her $\varepsilon > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\delta \left(\left\{ m \in \mathbb{N} : \|x_{\sigma^m(n)} - \ell\|_0^+ \geq \frac{\varepsilon}{|c|} \right\} \right) = 0$$

dır. Bu durumda

$$\begin{aligned} \delta \left(\left\{ m \in \mathbb{N} : \|c x_{\sigma^m(n)} - c \ell\|_0^+ \geq \varepsilon \right\} \right) &= \delta \left(\left\{ k \in \mathbb{N} : |c| \|x_{\sigma^m(n)} - \ell\|_0^+ \geq \varepsilon \right\} \right) \\ &= \delta \left(\left\{ m \in \mathbb{N} : \|x_{\sigma^m(n)} - \ell\|_0^+ \geq \frac{\varepsilon}{|c|} \right\} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Sonuç olarak

$$c x_n \xrightarrow{\sigma-st-FN} c \ell$$

dir.

Şimdi, invaryant istatistiksel yakınsaklık ile kuvvetli invaryant yakınsaklık arasındaki ilişki incelenecektir.

Teorem 5.1.6 (x_n) , X uzayında bir dizi olsun. Bu durumda (x_n) dizisi ℓ sayısına kuvvetli invaryant yakınsak ise ℓ ye invaryant istatistiksel yakınsaktır.

İspat: (x_n) dizisi ℓ ye kuvvetli invaryant yakınsak olsun. Bu durumda n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m D(\|x_{\sigma^i(n)} - \ell\|, \tilde{0}) = 0$$

yani

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \|x_{\sigma^i(n)} - \ell\|_0^+ = 0$$

dır. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \|x_{\sigma^i(n)} - \ell\|_0^+ &> \frac{1}{m} \sum_{\substack{k=\sigma(n) \\ \|x_k - \ell\|_0^+ \geq \varepsilon}}^{\sigma^m(n)} \|x_k - \ell\|_0^+ \\ &> \frac{1}{m} \varepsilon \{k < m : \|x_{\sigma^k(n)} - \ell\|_0^+ \geq \varepsilon\} \end{aligned}$$

olduğundan, $m \rightarrow \infty$ için

$$\frac{1}{m} |\{k < m : \|x_{\sigma^k(n)} - \ell\|_0^+ \geq \varepsilon\}| \rightarrow 0$$

elde edilir ve böylece (x_n) dizisi ℓ ye invaryant istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 5.1.7 (x_n) , X uzayında bir dizi olsun. Bu durumda (x_n) dizisi sınırlı ve ℓ ye invaryant istatistiksel yakınsak ise ℓ ye kuvvetli invaryant yakınsaktır.

İspat: (x_n) dizisi sınırlı ve ℓ sayısına invaryant istatistiksel yakınsak olsun. Bu durumda bir M vardır öyle ki her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\|x_{\sigma^m(n)} - \ell\|_0^+ < M \quad \text{ve} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} |\{k < m : \|x_{\sigma^k(n)} - \ell\|_0^+ \geq \varepsilon\}| = 0$$

dır.

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \|x_{\sigma^i(n)} - \ell\|_0^+ &= \frac{1}{m} \sum_{\substack{k=\sigma(n) \\ \|x_k - \ell\|_0^+ \geq \varepsilon}}^{\sigma^m(n)} \|x_k - \ell\|_0^+ + \frac{1}{m} \sum_{\substack{k=\sigma(n) \\ \|x_k - \ell\|_0^+ < \varepsilon}}^{\sigma^m(n)} \|x_k - \ell\|_0^+ \\ &< \frac{1}{m} M |\{k < m : \|x_{\sigma^k(n)} - \ell\|_0^+ \geq \varepsilon\}| + \frac{1}{m} m \varepsilon \end{aligned}$$

olduğundan, $m \rightarrow \infty$ için

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \|x_{\sigma^i(n)} - \ell\|_0^+ \rightarrow 0$$

ve böylece (x_n) dizisi ℓ ye kuvvetli invaryant yakınsaktır.

Şimdi de, fuzzy normlu uzaylarda invaryant istatistiksel Cauchy dizisi tanımlanıp, invaryant istatistiksel yakınsaklık ile arasındaki ilişki verilecektir.

Tanım 5.1.8 (x_n) , X uzayında bir dizi olsun. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ için bir $N \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} |\{m \in \mathbb{N} : \|x_{\sigma^m(n)} - x_{\sigma^N(n)}\|_0^+ \geq \varepsilon\}| = 0$$

yani hemen hemen her m ve her n için

$$\|x_{\sigma^m(n)} - x_{\sigma^N(n)}\|_0^+ < \varepsilon$$

ise, (x_n) dizisi fuzzy norma göre invaryant istatistiksel Cauchy dizisidir denir.

Teorem 5.1.9 (x_n) , X uzayında bir dizi olsun. (x_n) , fuzzy norma göre invaryant istatistiksel yakınsak ise invaryant istatistiksel Cauchy dizisidir.

İspat: (x_n) dizisi fuzzy norma göre ℓ sayısına invaryant istatistiksel yakınsak olsun. Bu durumda, keyfi bir $\varepsilon > 0$ alalım öyle ki hemen hemen her m ve her n için

$$\|x_{\sigma^m(n)} - \ell\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. Ayrıca

$$\|x_{\sigma^N(n)} - \ell\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ alalım. Bu durumda hemen hemen her m ve her n için

$$\begin{aligned} \|x_{\sigma^m(n)} - x_{\sigma^N(n)}\|_0^+ &\leq \|x_{\sigma^m(n)} - \ell\|_0^+ + \|x_{\sigma^N(n)} - \ell\|_0^+ \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

olduğundan, (x_n) fuzzy norma göre invaryant istatistiksel Cauchy dizisidir.

5.2. Fuzzy Normlu Uzaylarda İstatistiksel İnvaryant Yakınsaklık

Şimdi, fuzzy normlu uzaylarda istatistiksel invaryant yakınsaklık kavramı tanıtılarak, invaryant istatistiksel yakınsaklık ile arasındaki ilişki verilecektir.

Tanım 5.2.1 (x_n) , X uzayında bir dizi olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ için n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} |\{k \leq m : \|t_{kn} - \ell\|_0^+ \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir ℓ sayısı varsa, (x_n) dizisi ℓ ye fuzzy norma göre istatistiksel invaryant yakınsaktır denir ve bu durum

$$x_n \xrightarrow{st-\sigma-FN} \ell$$

ile gösterilir.

Örnek 5.2.2 (x_n) , X de bir dizi olsun ve terimleri

$$x_n = \begin{cases} k^2, & n = k^2, \\ -k^2, & n = k^2 + 1, \\ (-1)^{n+1}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $\sigma(n) = n + 1$ olarak alalım. Eğer $x_{\sigma^m(n)} = k^2$, $(k \in \mathbb{N})$ ise $m \rightarrow \infty$ için $t_{mn} \rightarrow 1$ dir. Diğer durumlarda $m \rightarrow \infty$ için $t_{mn} \rightarrow 0$ olur. n ye göre düzgün olarak,

$$\delta(\{m \in \mathbb{N} : \|t_{mn} - 0\|_0^+ \geq \varepsilon\}) = \delta(\{n : n = k^2\}) = 0$$

olduğu için (x_n) dizisi 0 a istatistiksel invaryant yakınsaktır ama invaryant yakınsak değildir.

Teorem 5.2.3 (x_n) , X uzayında bir dizi olsun. (x_n) dizisi sınırlı ve ℓ ye invaryant istatistiksel yakınsak ise (x_n) dizisi ℓ ye istatistiksel invaryant yakınsaktır.

İspat: (x_n) dizisi sınırlı ve ℓ ye invaryant istatistiksel yakınsak olsun. Böylece her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\|x_{\sigma^m(n)} - \ell\|_0^+ < M$$

olacak şekilde bir $M \in \mathbb{N}$ vardır. Ayrıca, her $\varepsilon > 0$ için

$$K_\sigma(\varepsilon) = \{k < m : \|x_{\sigma^k(n)} - \ell\|_0^+ \geq \varepsilon\}$$

olmak üzere,

$$\delta(K_\sigma(\varepsilon)) = 0$$

dır.

Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\|t_{mn} - \ell\|_0^+ &= \left\| \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_{\sigma^i(n)} \right) - \ell \right\|_0^+ \\
&= \left\| \left(\frac{1}{m} \sum_{k=\sigma(n)}^{\sigma^m(n)} x_k \right) - \ell \right\|_0^+ \\
&= \left\| \frac{1}{m} \sum_{k=\sigma(n)}^{\sigma^m(n)} (x_k - \ell) \right\|_0^+ \\
&\leq \left\| \frac{1}{m} \sum_{k \in K_\sigma(\varepsilon)} (x_k - \ell) \right\|_0^+ \\
&\leq \frac{1}{m} (\sup_k \|x_k - \ell\|_0^+) |K_\sigma(\varepsilon)|
\end{aligned}$$

olduğundan n ye göre düzgün olarak

$$m \rightarrow \infty \text{ için } t_{mn} \rightarrow \ell$$

olur. Böylece (x_n) , ℓ ye invaryant yakınsak olduğu için istatistiksel invaryant yakınsaktır.

Teorem 5.2.4 (x_n) , X uzayında bir dizi olsun. (x_n) dizisi ℓ sayısına istatistiksel invaryant yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\delta(K) = 1$ ve $\sigma - \lim x_{n_k} = \ell$ olacak şekilde bir $K = \{n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots\} \subseteq \mathbb{N}$ alt kümesinin olmasıdır.

İspat: (x_n) dizisi ℓ sayısına istatistiksel invaryant yakınsak olsun. $r = 1, 2, 3, \dots$ için

$$K_r(\varphi) = \left\{ k \in \mathbb{N} : \varphi(\|x_{n_k} - \ell\|_0^+) \geq \frac{1}{r} \right\}$$

ve

$$M_r(\varphi) = \left\{ k \in \mathbb{N} : \varphi(\|x_{n_k} - \ell\|_0^+) < \frac{1}{r} \right\}$$

kümelerini tanımlayalım. (x_n) dizisi ℓ ye istatistiksel invaryant yakınsak olduğundan $r = 1, 2, 3, \dots$ için

$$\delta(K_r(\varphi)) = 0$$

ve

$$\delta(M_r(\varphi)) = 1 \tag{5.6}$$

dir.

Ayrıca

$$M_1(\varphi) \supset M_2(\varphi) \supset \cdots \supset M_i(\varphi) \supset M_{i+1}(\varphi) \supset \cdots \quad (5.7)$$

biçimindedir. Şimdi $k \in M_r(\varphi)$ için (x_{n_k}) , ℓ ye invaryant yakınsak olduğunu göstermeliyiz. Farzedelim ki (x_{n_k}) , ℓ ye invaryant yakınsak değildir. Bu durumda sonsuz terim için

$$\varphi(\|x_{n_k} - \ell\|_0^+) \geq \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ vardır. Şimdi

$$M_\varepsilon(\varphi) = \{k \in \mathbb{N} : \varphi(\|x_{n_k} - \ell\|_0^+) < \varepsilon\} \quad \text{ve} \quad \varepsilon > \frac{1}{r}$$

olmak üzere,

$$\delta(M_\varepsilon(\varphi)) = 0 \quad \text{ve} \quad (5.7) \text{ den } M_\varepsilon(\varphi) \supset M_r(\varphi)$$

elde ederiz. Buradan

$$\delta(M_r(\varphi)) = 0$$

olur ve bu (5.6) ile çelişir. Sonuç olarak (x_{n_k}) dizisi, ℓ ye invaryant yakınsaktır.

Şimdi kabul edelim ki

$$\delta(K) = 1 \quad \text{ve} \quad \sigma - \lim x_{n_k} = \ell$$

olacak şekilde bir $K = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\} \subseteq \mathbb{N}$ altkümesi vardır. Yani her $\varepsilon > 0$ için bir $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $k > k_0$ için

$$\varphi(\|x_{n_k} - \ell\|_0^+) < \varepsilon$$

dır.

$$K_\varepsilon(\varphi) = \{k \in \mathbb{N} : \varphi(\|x_{n_k} - \ell\|_0^+) \geq \varepsilon\} \quad \text{ve} \quad K' = \{n_{k_0+1}, n_{k_0+2}, \cdots\}$$

olmak üzere

$$\delta(K') = 1 \quad \text{ve} \quad K_\varepsilon(\varphi) \subseteq \mathbb{N} - K'$$

olduğundan

$$\delta(K_\varepsilon(\varphi)) \leq 1 - 1 = 0$$

elde edilir. Böylece (x_n) dizisi ℓ ye istatistiksel invaryant yakınsaktır.

6. KAYNAKLAR

- Banach S, 1932, Théorie des opérations linéaires, Warszawa.
- Chang C L, 1968, Fuzzy topological spaces, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 24, 182–190.
- Connor J, 1988, The statistical and strong p -Cesàro convergence of sequences, Analysis, 8, 47–63.
- Dean D and Raimi R A, 1960, Permutations with comparable sets of invariant means, Duke Mathematical Journal, 27, 467–480.
- Das G and Patel B K, 1989, Lacunary distribution of sequences, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 20, 64–74.
- Dubois D and Prade H, 1978, Operations on fuzzy numbers, International Journal of Systems Science, 9, 613–626.
- Dubois D and Prade H, 1979, Fuzzy real algebra: some results, Fuzzy Sets and Systems, 2, 327–348.
- Fang J-X, 2002, A note on the completions of fuzzy metric spaces and fuzzy normed space, Fuzzy Sets and Systems, 131, 399–407.
- Fast H, 1951, Sur la convergence statistique, Colloquium Mathematicae, 2, 241–244.
- Felbin C, 1992, Finite dimensional fuzzy normed linear space, Fuzzy Sets and Sytems, 48, 293–248.
- Fridy J A, 1985, On statistical convergence, Analysis, 5, 301–313.
- Fridy J A and Orhan C, 1993, Lacunary statistical convergence, Pacific Journal of Mathematics, 160, 43–51.
- Fridy J A and Orhan C, 1993, Lacunary statistical summability, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 173, 497–504.

- Freedman A R, Sember J J ve Raphael M, 1978, Some Cesàro-type summability spaces, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3, 508–520.
- Goetschel R and Voxman W, 1986, Elementary fuzzy calculus, *Fuzzy Sets and Systems*, 18, 31–43.
- Kaleva O and Seikkala S, 1984, On fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets and Sytems*, 12, 215–229.
- Katsaras A K, 1984, Fuzzy Topological Vector Spaces II, *Fuzzy Sets and Sytems*, 12, 143–154.
- Lorentz G, 1948, A contribution to the theory of divergent sequences, *Acta Mathematica*, 80, 167–190.
- Maddox I J, 1978, A new type of convergence, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 83, 61–64.
- Mursaleen M, 1983, Matrix transformations between some new sequence spaces, *Houston Journal of Mathematics*, 9, 505–509.
- Mursaleen M and Alotaibi A, 2011, Statistical lacunary summability and a Korovkin type approximation theorem, *Annali dell’Universita’ di Ferrara*, 57, 373–381.
- Mursaleen M and Edely O H H, 2009, On the invariant mean and statistical convergence, *Applied Mathematics Letters*, 22, 1700–1704.
- Nanda S, 1989, On sequences of fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems*, 33, 123–126.
- Niven I, Zuckermann H S and Montgomery H L, 1991, *An introduction to the theory of numbers*, John Wiley and Sons Incorporated Company, New York.
- Nuray F, 1998, Lacunary statistical convergence of sequences of fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Sytems*, 99, 353–355.

- Nuray F and Savaş E, 1995, Statistical convergence of sequences of fuzzy numbers, *Mathematica Slovaca*, 45, 269–273.
- Raimi R A, 1963, Invariant means and invariant matrix methods of summability, *Duke Mathematical Journal*, 30, 81–94.
- Salat T, 1980, On statistically convergent sequences of real numbers, *Mathematica Slovaca*, 30, 139–150.
- Savaş E, 1990, On lacunary strong σ -convergence, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 21, 359–365.
- Savaş E, Nuray F, 1993, On σ -statistically convergence and lacunary σ -statistically convergence, *Mathematica Slovaca*, 43, 309–315.
- Schaefer P, 1972, Infinite matrices and invariant means, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 36, 104–110.
- Sençimen C and Pehlivan S, 2008, Statistical convergence in fuzzy normed linear spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 159, 361–370.
- Schoenberg I T, 1959, The integrability of certain functions and Related summability methods, *The American Mathematical Monthly*, 66, 361–375.
- Steinhaus H, 1951, Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique, *Colloquium Mathematicum*, 2, 73–74.
- Talo Ö and Çakan C, 2012, On the Cesàro convergence of sequences of fuzzy numbers, *Applied Mathematics Letters*, 25, 676–681.
- Türkmen M R and Çınar M, 2017, Lacunary statistical convergence in fuzzy normed linear spaces, *Applied and Computational Mathematics*, 6, 233–237.
- Türkmen M R and Dündar E, 2019, On lacunary statistical convergence of double sequences and some properties in fuzzy normed spaces, *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 36(2), 1683–1690.

- Volkov I I, 2001, Cesàro summation methods, In: Hazewinkel, M., (Eds.), Encyclopedia of Mathematics, Springer, ISBN 978-1-55608-010-4.
- Xiao J and Zhu X, 2022, On linearly topological structure and property of fuzzy normed linear space, Fuzzy Sets and Systems, 125, 153–161.
- Wong C K, 1973, Covering properties of fuzzy topological spaces, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 43, 697–704.
- Wong C K, 1974, Fuzzy topology: product and quotient theorems, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 45, 512–521.
- Zygmund A, 1959, Trigonometric Series, The University Press, Cambridge, London.