

FUZZY RIESZ UZAYLARI

Ercan TAŞ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**TEMMUZ 2013
ANKARA**

Ercan TAŞ tarafından hazırlanan FUZZY RIESZ UZAYLARI adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Cüneyt ÇEVİK
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Cemil YILDIZ
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Doç. Dr. Cüneyt ÇEVİK
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Doç. Dr. İbrahim BÜYÜKYAZICI
Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 17 / 07 / 2013

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Şeref SAĞIROĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Ercan TAŞ

FUZZY RIESZ UZAYLARI**(Yüksek Lisans Tezi)****Ercan TAŞ****GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ****Temmuz 2013****ÖZET**

Bu tezin amacı fuzzy sıralı vektör uzayları ve fuzzy Riesz uzaylarını incelemektir. Fuzzy kümeler üzerindeki sıra yapısıyla ilgili kavramlar ve konular ele alınmış ve örneklerle açıklanmıştır.

Bilim Kodu : 204.1.095**Anahtar Kelimeler : Fuzzy küme, fuzzy topoloji, fuzzy süreklilik, fuzzy sıralı vektör uzayı, fuzzy Riesz uzayı****Sayfa Adedi : 64****Tez Yöneticisi : Doç. Dr. Cüneyt ÇEVİK**

FUZZY RIESZ SPACES**(M.Sc. Thesis)****Ercan TAŞ****GAZİ UNIVERSITY****GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES****July 2013****ABSTRACT**

The aim of this thesis is to examine fuzzy ordered vector spaces and fuzzy Riesz spaces. The related concepts and subjects of the order structure on fuzzy sets are discussed and illustrated by examples.

Science Code : 204.1.095

Key Words : Fuzzy set, fuzzy topology, fuzzy continuity, fuzzy ordered space, fuzzy Riesz space

Page Number : 64

Adviser : Doç. Dr. Cüneyt ÇEVİK

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, yanı sıra düştüğümde bana doğru yolu gösteren Sayın Hocam Doç. Dr. Cüneyt ÇEVİK'e, beni en başından beri her zaman cesaretlendiren ve desteklerini bir an dahi olsun benden esirgemeyen eşim ve kızım Sevay TAŞ ve A.Berra TAŞ' a teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. Riesz Uzayları ve Sıra Sınırlı Operatörler.....	3
2.2. Fuzzy Kümeler.....	7
2.3. Fuzzy Topolojik Uzaylar	14
2.4. Fuzzy Sürekli Fonksiyonlar	20
3. FUZZY SIRA BAĞINTILARI VE FUZZY RIESZ UZAYLARI.....	31
3.1. Fuzzy Sıralı Kümeler.....	31
3.2. Fuzzy Sıralı Vektör Uzayları.....	36
3.3. Fuzzy Riesz Uzayları.....	49
4. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	62
KAYNAKLAR.....	63
ÖZGEÇMİŞ.....	64

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simge ve kısaltmalar, açıklamalar ile aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
x^+	x in pozitif kısmı
x^-	x in negatif kısmı
$x \perp y$	x diktir y
$x_n \uparrow$	(x_n) artan dizi
$x_n \downarrow$	(x_n) azalan dizi
I^X	X den I birim aralığına tanımlanan fonksiyonların kümesi
τ	fuzzy topoloji
A°	A fuzzy kümesinin içi
$\overline{A}$	A fuzzy kümesinin kapanışı
A^c	A fuzzy kümesinin tümleyeni
(X, τ)	fuzzy topolojik uzayı
$U(A)$	A nın üst sınırı
$L(A)$	A nın alt sınırı

1. GİRİŞ

Cantor tarafından 1879 yılında yapılan küme tanımının ardından matematikte incelenen her konuda kesinlik aranmıştır. Böylece olaylar karşısındaki düşünce sistemimiz iki değerli mantığa göre oluşmuştur. Klasik küme tanımına göre bir şey ya doğru yada yanlış (ya var yada yok, ya beyaz yada siyah, ya 1 yada 0)'dır. Ancak günlük hayatımızdaki birçok olay bu şekilde açıklanamayacak kadar karmaşıktır. Bu durum rastgelelik değil, ancak belirsizlik ima eder. Bu belirsizlikler fuzzy (bulanık) kelimesiyle açıklanır. Böyle bir durum karşısında kesin bir yargı yoktur. İki değerli mantığa dayanan matematik kesinlik göstermeyen olaylar karşısında yetersiz kalmıştır. Bu sebeple Cantor tarafından verilen küme tanımı 1965 yılında Zadeh tarafından fuzzy (belirtisiz) küme kavramı tanımlanarak klasik küme kavramı genişletilmiştir [1]. Fuzzy mantık sayısal değerleri sözel ifadelerden yola çıkarak bilgi tabanlı denetleyiciler arasında insan düşünce yapısına yakınlaşmayı sağlamıştır. Bu kavram, bir nesnenin istediğimiz belirli bir kategoriye daha az veya daha çok karşılık geldiğini göstermeye çalışır. Fuzzy küme kavramı rastgele değişkenlerin varlığından daha çok, bir sınıfa kesin olarak karşılık gelen kriterlerin yokluğunda belirsizlik kaynağındaki problemlerle ilgili doğal bir yol sağlar. Aslında gerçekliğin her tonunu açıklayan fikir, bazı mantıkçılar için 1965'e kadar uzun süreli bir saplantı idi. Son kırk yılda fuzzy küme teorisi hem bilimsel bakış, hem de uygulama açısından hızla gelişti. Bu teoriye mevcut bilgi, çok değerli katkı sunan bir alan oluşturdu.

Denklik, benzerlik, kümeleme gibi kavramları içeren problemlerle başa çıkmak için çok çeşitli teknikler vardır. Fuzzy bağıntıları üzerine çalışma da yine Zadeh tarafından başlatıldı. 1971'deki ünlü makalesinde Zadeh denklik kavramını tanımlayan ve fuzzy sıra kavramını veren fuzzy bağıntısını tanıttı [2]. Fuzzy sıra kavramı, çeşitli alanlarda bilinen sonuçların çıkarımını kolaylaştıran ve yenilerini keşfetmeyi teşvik eden yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerinin genelleştirilmesiyle tanımlandı. Fuzzy sıralamada birçok yarar vardır. Mesela, alternatif bir küme ile bizim tercihlerimiz ifade edildiğinde kullanılabilir. Kesin sıralama ile karşılaştırıldığında daha fazla açıklama gücü vardır. Sadece

seeneğimizden diğerine tercihimizi değil, bu tercihin gücünü de ifade etmemize imkân sağlar. Bu tezde, son yıllarda basılmış makalelerdeki fuzzy sıralama bağıntısı ve bu bağıntıyla oluşturulan uzaylar ile ilgili sonuçlar sunulmuştur [9-12].

İkinci bölümde, sıralama bağıntısı ile ilgili olarak sıralı vektör uzayları, Riesz uzayları ve diğer kavramlar tanıtılmıştır. Diğer yanda, fuzzy kümeler, bunların topolojik yapıları ve fuzzy topolojik uzaylar arasındaki fuzzy sürekli fonksiyonlar verilmiş ve örneklerle açıklamalar yapılmıştır.

nc bölümde ise, fuzzy ve sıra kavramları bir arada ele alınarak fuzzy sıralı kümeler, fuzzy sıralı vektör uzayları, fuzzy Riesz uzayları ve bunlarla ilgili kavramlar ayrıntılı olarak incelenmiş, ilgili sonuçlar verilmiştir.

Dördüncü bölümde, elde edilen sonuçların ilgili teoriye katkısından ve bu sonuçların kullanılmasıyla yapılacak çalışmaların öneminden bahsedilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Riesz Uzayları ve Sıra Sınırlı Operatörler

2.1. Tanım (sıralı vektör uzayı)

E reel vektör uzayı ve üzerindeki sıralama bağıntısı $\leq$ olmak üzere, $x \leq y$ iken her $z \in E$ ve her $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $x + z \leq y + z$ ve $\lambda x \leq \lambda y$ oluyorsa, E ye *sıralı vektör uzayı* denir.

2.2. Tanım (Riesz uzayı)

E sıralı vektör uzayı olmak üzere, her $x, y \in E$ için $x \vee y = \sup\{x, y\} \in E$ (veya $x \wedge y = \inf\{x, y\} \in E$) oluyorsa, E ye *Riesz uzayı* denir.

2.3. Tanım (bir elemanın pozitif kısmı, negatif kısmı ve modülü)

Bir Riesz uzayının herhangi bir x elemanı için; $x^+ = x \vee 0$, $x^- = x \wedge 0$, $|x| = x \vee (-x)$ eşitlikleriyle verilen elemanlarına sırasıyla, x in *pozitif kısmı*, x in *negatif kısmı* ve x in *modülü* denir.

2.1. Teorem (Aliprantis and Burkinshaw, 1985)

Bir Riesz uzayının herhangi bir x elemanı için aşağıdakiler sağlanır:

- 1) $x = x^+ - x^-$;
- 2) $|x| = x^+ + x^-$;
- 3) $x^+ \wedge x^- = 0$.

2.4. Tanım (iki elemanın dikliği, bir kümenin diki)

E Riesz uzayı olmak üzere, $x, y \in E$ için $|x| \wedge |y| = 0$ oluyorsa, x ve y birbirlerine

diktir denir ve bu durum $x \perp y$ ile gösterilir. E nin D altkümesinin diki ise, $D^d = \{x \in E : \text{her } y \in D \text{ için } x \perp y\}$ ile tanımlanır.

2.5. Tanım (sıra yakınsaklık)

E Riesz uzayı olmak üzere $\{x_a\} \subseteq E$ ve $x \in E$ için $|x_a - x| \leq y_a \downarrow 0$ ($\{y_a\}$ azalan ve infimumu 0) olacak şekilde $\{y_a\} \subseteq E$ ağı varsa, $\{x_a\}$ ağı x elemanına *sıra yakınsaktır* denir.

2.6. Tanım (düzgün yakınsaklık, göreceli düzgün yakınsaklık, düzgün Cauchy dizisi)

E Riesz uzayı $\{x_n\} \subseteq E$ ve $x \in E$ olmak üzere,

- (a) $0 \leq u \in E$ alındığında, her $\varepsilon > 0$ için $n_\varepsilon \leq n$ iken $|x_n - x| \leq \varepsilon u$ olacak şekilde $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ varsa, $\{x_n\}$ dizisi x elemanına *u-düzgün yakınsak* (düzgün yakınsak),
- (b) $x_n \rightarrow x$ (*u-düzgün yakınsak*) olacak şekilde $0 \leq u \in E$ varsa, $\{x_n\}$ dizisi x elemanına *göreceli düzgün yakınsak*,
- (c) Her $\varepsilon > 0$ için $n_\varepsilon \leq n, m$ iken $|x_n - x_m| \leq \varepsilon u$ olacak şekilde $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ ve (ε dan bağımsız) $0 \leq u \in E$ varsa, $\{x_n\}$ dizisine *düzgün Cauchy dizisi* denir.

2.7. Tanım (düzgün kapalı küme, düzgün tam Riesz uzayı)

E Riesz uzayı olmak üzere,

- (a) E nin D altkümesindeki her $\{x_n\}$ dizisi için $x_n \rightarrow x$ (*göreceli düzgün yakınsak*) iken $x \in D$ oluyorsa, D ye *düzgün kapalı küme*,
- (b) E nin her düzgün Cauchy dizisi göreceli düzgün yakınsak oluyorsa, E ye *düzgün tam Riesz uzayı* denir.

2.8. Tanım (Arşimedyen Riesz uzayı, Dedekind tam Riesz uzayı, Riesz altuzayı, sıra yoğun Riesz altuzayı, ideal, band)

E Riesz uzayı olmak üzere,

- (a) Her $x \in E^+$ için $n^{-1}x \downarrow 0$ oluyorsa, E ye *Arşimedyan Riesz uzayı*,
- (b) E nin üstten sınırlı her altkümesi supremuma sahipse, E ye *Dedekind tam Riesz uzayı*,
- (c) G altuzayı için $x, y \in G$ iken $x \vee y \in G$ (veya $x \wedge y \in G$) oluyorsa, G ye E nin *Riesz altuzayı*,
- (d) G Riesz altuzayı için $0 < x \in E$ iken $0 < y \leq x$ olacak şekilde $y \in G$ varsa, G ye E nin *sıra yoğun Riesz altuzayı*,
- (e) I altuzayı için $|x| \leq |y|$ ve $y \in I$ iken $x \in I$ oluyorsa, I ya E de *(sıra) ideal*,
- (f) B ideal ve her bir $\{x_\alpha\} \subseteq B; 0 \leq x_\alpha \uparrow x(\{x_\alpha\}$ artan ve supremumu 0) ağı için $x \in B$ oluyorsa, B ye E de *band* denir.

2.9. Tanım (bir kümenin ürettiği Riesz altuzayı (ideal, band))

E Riesz uzayının boştan farklı D altkümesini kapsayan en küçük Riesz altuzayına (ya da ideale, banda) D nin *ürettiği Riesz altuzayı* (ya da *ideal, band*) denir.

- Bir Riesz uzayı Dedekind tam ise, Arşimedyanıdır. E Riesz uzayının D altkümesinin ürettiği ideal ve band sırasıyla,

$$I_D = \{x \in E : |x| \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i| \text{ olacak şekilde } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+ \text{ ve } x_1, \dots, x_n \in E \text{ var}\}$$

$$B_D = \{x \in E : 0 \leq x_\alpha \uparrow |x| \text{ olacak şekilde } \{x_\alpha\} \subseteq D^+ \text{ var}\}$$

biçimindedir. E nin herhangi bir x elemanının ürettiği ideal ve band sırasıyla,

$$I_x = \{y \in E : |y| \leq \lambda x \text{ olacak şekilde } \lambda \in \mathbb{R} \text{ var}\} \text{ ve } B_x = \{y \in E : |y| \wedge n|x| \uparrow |y|\}$$

biçiminde elde edilir.

2.10. Tanım (sıra birim, zayıf sıra birim)

E Riesz uzayı, $0 < e \in E$ olmak üzere,

(a) $I_e = E$ oluyorsa; yani her $x \in E^+$ için $x \leq \lambda e$ olacak şekilde $\lambda \in \mathbb{R}^+$ varsa, e ye E nin *sıra birimi*,

(b) $B_e = E$ oluyorsa; yani her $x \in E^+$ için $x \wedge n|e| \uparrow x$ oluyorsa, e ye E nin *zayıf sıra birimi* denir.

- E Riesz uzayının zayıf sıra birimi, aynı zamanda sıra birimidir. E nin her $x > 0$ elemanı, ürettiği idealin sıra birimi; ürettiği bandın zayıf sıra birimidir. Arşimedyan Riesz uzayında $e > 0$ elemanının zayıf sıra birim olması için gerek ve yeter şart $x \perp e$ iken $x = 0$ olmasıdır.

2.11. Tanım (sıralı aralık, sıra sınırlı küme)

x ve y , E Riesz uzayında $x \leq y$ olacak şekilde iki eleman iken $[x, y] = \{z \in E : x \leq z \leq y\}$ kümesine *sıralı aralık*; E nin bir sıralı aralığı tarafından kapsanan altkümeye de *sıra sınırlı küme* denir.

2.12. Tanım (sıra sınırlı operatör, pozitif operatör, aralık koruyan operatör, Riesz homomorfizması, sıra sürekli operatör)

E ve F Riesz uzayları, $T : E \rightarrow F$ operatör (lineer dönüşüm) olmak üzere,

(a) E deki her D sıra sınırlı küme için F de $T(D)$ sıra sınırlı küme oluyorsa, T ye *sıra sınırlı operatör*,

(b) E nin her $x \geq 0$ elemanı için F de $Tx \geq 0$ oluyorsa, T ye *pozitif operatör*,

(c) E de $x_a \rightarrow 0$ (*sıra yakınsak*) iken F de $Tx_a \rightarrow 0$ (*sıra yakınsak*) oluyorsa, T ye *sıra sürekli operatör*,

(d) Her $x, y \in E$ için $T(x \vee y) = Tx \vee Ty$ oluyorsa, T ye *Riesz homomorfizması*,

(e) T pozitif operatör ve her $x \in E^+$ için $T[0, x] = [0, Tx]$ oluyorsa, T ye *aralık koruyan operatör* denir.

• E Riesz uzayından F Riesz uzayına sıra sınırlı operatörlerin kümesi $L_b(E, F)$ ile gösterilir. $T_1, T_2 \in L_b(E, F)$ için

$$T_1 \leq T_2 \Leftrightarrow \text{Her } 0 \leq x \in E \text{ için } T_1 x \leq T_2 x$$

ile tanımlanan sıralama bağıntısıyla $L_b(E, F)$ sıralı vektör uzayıdır. Pozitif operatörler sıra sınırlıdır. F Dedekind tam olduğunda, $L_b(E, F)$ Dedekind tam Riesz uzayıdır ve bu durumda her sıra sınırlı operatör, iki pozitif operatörün farkı olarak yazılabilir. Bu tezde her operatör lineer olarak alındığından ve Riesz uzayından Riesz uzayına tanımlandığından, operatörün pozitifliği ile monoton artanlığı denktir.

2.2. Fuzzy Kümeler

2.13. Tanım (fuzzy küme)

X boştan farklı herhangi bir küme ve $I = [0, 1]$ olmak üzere X den I ya tanımlanan bütün fonksiyonların kümesini I^X ile gösterelim. I^X in her bir elemanına X in bir *fuzzy kümesi* denir [1].

2.14. Tanım (fuzzy alt küme)

$X \neq \emptyset$ ve $I = [0, 1]$ olmak üzere $f_A : X \rightarrow I$ üyelik fonksiyonu ile karakterize edilen $A = \{(x, f_A(x)) : x \in X\} \subset X \times I$ kümesine X in bir *fuzzy alt kümesi* denir. Bundan sonra zaman zaman f_A yerine A , $f_A(x)$ yerine $A(x)$ alınacaktır [1].

Örnek 1

$X=\{7,8,9,10,11,12,13\}$ kümesi üzerinde bir fuzzy küme bulalım.

$f_A(x) = \frac{1}{1+(x-10)^2}$ ile tanımlanan $f_A : X \rightarrow [0,1]$ fonksiyonunu göz önüne alalım;

$$x = 7 \Rightarrow f_A(7) = 0.1$$

$$x = 8 \Rightarrow f_A(8) = 0.2$$

$$x = 9 \Rightarrow f_A(9) = 0.5$$

$$x = 10 \Rightarrow f_A(10) = 1$$

$$x = 11 \Rightarrow f_A(11) = 0.5$$

$$x = 12 \Rightarrow f_A(12) = 0.2$$

$$x = 13 \Rightarrow f_A(13) = 0.1$$

$(x, f_A(x))$ fuzzy kümesi

$(x, f_A(x)) = \{(7, 0.1), (8, 0.2), (9, 0.5), (10, 1), (11, 0.5), (12, 0.2), (13, 0.1)\}$ olur.

2.15. Tanım (fuzzy nokta, fuzzy noktasının desteği, fuzzy noktasının değeri)

X boştan farklı herhangi bir küme olmak üzere X deki x_α fuzzy kümesinin

$x_\alpha : X \rightarrow I$ üyelik fonksiyonu

$$x_\alpha(y) = \begin{cases} \alpha & , \quad y = x \\ 0 & , \quad y \neq x \end{cases}, \quad \alpha \in (0,1]$$

şeklinde tanımlı ise x_α ya X de *fuzzy noktası* denir. Burada $x \in X$ noktasına x_α *fuzzy noktasının desteği* (dayanağı) ve $\alpha \in (0,1]$ sayısına x_α *fuzzy noktasının değeri* denir [8].

Bundan sonra fuzzy noktasını x_α yerine p ile göstereceğiz.

2.16. Tanım (fuzzy kümenin desteği)

$x \in X$ ve A bir fuzzy küme olmak üzere

$$\text{Supp}A = A_0 = \{(x, f_A(x)) : f_A(x) > 0\}$$

kümesine A fuzzy kümesinin desteği denir [5].

2.17. Tanım

X boştan farklı herhangi bir küme, p X de bir fuzzy nokta ve A , X in bir fuzzy kümesi olsun. Eğer her $x \in X$ için $p(x) \leq A(x)$ ise p , A ya aittir (A , p yi içerir) denir ve $p \in A$ ile gösterilir.

2.18. Tanım

X ve $\emptyset$ kümeleri birer fuzzy küme olup her $x \in X$ için

$$f_X(x) = 1 \Rightarrow X = \{(x, 1) : x \in X\} \text{ ve } f_\emptyset(x) = 0 \Rightarrow \emptyset = \{(x, 0) : x \in X\}$$

şeklinde ifade edilir [5].

Buradan her klasik anlamdaki kümenin bir fuzzy kümesi olduğu sonucu çıkar.

2.19. Tanım

X deki herhangi iki fuzzy küme A ve B olsun. A ve B nin üyelik fonksiyonları sırasıyla f_A ve f_B olmak üzere, her $x \in X$ için

1. $A \leq B \Leftrightarrow f_A(x) \leq f_B(x),$
2. $A = B \Leftrightarrow f_A(x) = f_B(x),$
3. $C = A \wedge B \Leftrightarrow \min\{f_A(x), f_B(x)\} = f_C(x),$
4. $D = A \vee B \Leftrightarrow \max\{f_A(x), f_B(x)\} = f_D(x),$
5. $E = A^c \Leftrightarrow f_E(x) = 1 - f_A(x),$

şeklinde tanımlanır [5].

2.20. Tanım

X deki fuzzy kümelerin bir ailesi $\{A_j\}_{j \in J}$ olsun. Buna göre birleşim ve kesişim işlemlerinin genelleştirilmiş hali

$$C = \bigvee_{j \in J} A_j \Leftrightarrow f_C(x) = \sup_{j \in J} \{f_{A_j}(x)\}$$

$$D = \bigwedge_{j \in J} A_j \Leftrightarrow f_D(x) = \inf_{j \in J} \{f_{A_j}(x)\}$$

şeklinde tanımlanır [5].

2.21. Tanım

A ve B X de fuzzy kümeler olsun. Bu durumda A ile B nin farkı $A-B = A \wedge B^c$ ile tanımlanır. Eğer üyelik fonksiyonları sırasıyla f_A ve f_B ise, her $x \in X$ için

$$f_{A-B}(x) = \min_{x \in X} \{f_A(x), 1 - f_B(x)\} \text{ ve}$$

$$f_{B-A}(x) = \min_{x \in X} \{1 - f_A(x), f_B(x)\} \text{ şeklinde tanımlanır [5].}$$

Örnek 2

$X = \{x_1, x_2\}$ ve $I = [0,1]$ olmak üzere X üzerinde iki fuzzy küme $A = \{(x_1, 0.2), (x_2, 0.5)\}$ ve $B = \{(x_1, 0.1), (x_2, 0.7)\}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $A \vee B$, $A \wedge B$, A^c ve $A - B$ fuzzy kümelerini bulalım.

A ve B fuzzy kümelerinin her $x \in X$ için üyelik fonksiyonlarının değerleri sırasıyla $f_A(x)$ ve $f_B(x)$ olsun. Buna göre $x_1 \in X$ için $f_A(x_1) = 0.2$ ve $f_B(x_1) = 0.1$; $x_2 \in X$ için $f_A(x_2) = 0.5$ ve $f_B(x_2) = 0.7$ dir.

$$\begin{aligned} A \vee B = C &\Leftrightarrow f_C(x) = \max\{f_A(x), f_B(x)\} \\ &\Leftrightarrow f_C(x_1) = 0.2 \text{ ve } f_C(x_2) = 0.7 \\ &\Leftrightarrow A \vee B = \{(x_1, 0.2), (x_2, 0.7)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \wedge B = D &\Leftrightarrow f_D(x) = \min\{f_A(x), f_B(x)\} \\ &\Leftrightarrow f_D(x_1) = 0.1 \text{ ve } f_D(x_2) = 0.5 \\ &\Leftrightarrow A \wedge B = \{(x_1, 0.1), (x_2, 0.5)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^c = X - A &\Leftrightarrow f_{A^c}(x) = 1 - f_A(x) \\ &\Leftrightarrow f_{A^c}(x_1) = 0.8 \text{ ve } f_{A^c}(x_2) = 0.5 \\ &\Leftrightarrow A^c = \{(x_1, 0.8), (x_2, 0.5)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A - B = A \wedge B^c &\Leftrightarrow f_{A-B}(x) = \min\{f_A(x), f_{B^c}(x)\} \\ &\Leftrightarrow f_{A-B}(x_1) = 0.2 \text{ ve } f_{A-B}(x_2) = 0.3 \\ &\Leftrightarrow A - B = \{(x_1, 0.2), (x_2, 0.3)\} \end{aligned}$$

2.2. Teorem

X de iki fuzzy küme A ve B olmak üzere

- i) $A \vee B$ fuzzy kümesi A ve B yi ihtiva eden en küçük fuzzy kümedir [4].
- ii) $A \wedge B$ fuzzy kümesi A ve B kümeleri tarafından ihtiva edilen en büyük fuzzy kümedir [7].

İspat

i) A ve B fuzzy kümelerinin üyelik fonksiyonları sırasıyla f_A ve f_B olsun. $A \vee B = C$
 $\Leftrightarrow f_C(x) = \max\{f_A(x), f_B(x)\}$ olduğundan $A \leq C$ ve $B \leq C$ dir. D nin A ve B yi
 ihtiva eden en küçük fuzzy küme olduğunu kabul edelim. D fuzzy kümesinin üyelik
 fonksiyonu f_D olmak üzere $A \leq D$ olduğundan $f_A(x) \leq f_D(x)$ ve $B \leq D$ olduğundan
 $f_B(x) \leq f_D(x)$ dir. Buradan

$$\max\{f_A(x), f_B(x)\} \leq f_D(x) \Rightarrow f_{A \vee B}(x) = f_C(x) \leq f_D(x)$$

olur. $A \vee B = C$ fuzzy kümesi A ve B yi ihtiva eden bir küme olup kabulden dolayı

$$f_A(x) \leq f_D(x) \leq f_C(x) \text{ ve } f_B(x) \leq f_D(x) \leq f_C(x) \Rightarrow f_D(x) \leq f_C(x)$$

bulunur. O halde her $x \in X$ için $f_D(x) = f_C(x)$ olup $C = D$ dir. Buna göre A ve B yi
 ihtiva eden en küçük fuzzy küme $A \vee B$ dir.

ii) (i) şikkına benzer şekilde ispat yapılır.

2.1. Özellik

X deki fuzzy kümeler A , B ve C olmak üzere

1. $A \wedge \emptyset = \emptyset, A \vee \emptyset = A, A \vee X = X, A \wedge X = A$
2. $A \wedge B = B \wedge A, A \vee B = B \vee A, A \wedge A = A, A \vee A = A$
3. $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C), (A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$

$$4. C \vee (A \wedge B) = (C \vee A) \wedge (C \vee B), C \wedge (A \vee B) = (C \wedge A) \vee (C \wedge B)$$

$$5. A \leq B \Rightarrow A \vee B = B, A \leq B \Rightarrow A \wedge B = A$$

dir [7].

2.2. Özellik

A ve B , X de iki fuzzy küme olmak üzere

$$1. A - \emptyset = A$$

$$2. \emptyset^c = X, X^c = \emptyset, (A^c)^c = A$$

$$3. A \leq B \Leftrightarrow A^c \leq B^c$$

$$4. (A \vee B)^c = A^c \wedge B^c, (A \wedge B)^c = A^c \vee B^c$$

dir [7].

2.3. Teorem

X kümesi üzerindeki herhangi bir fuzzy kümesi A olsun.

i) $A \wedge A^c = \emptyset$ olmak zorunda değildir [7].

ii) $A \vee A^c = X$ olmak zorunda değildir [7].

Örnek 3

$X = \{x_1, x_2\}$ olmak üzere X de bir fuzzy kümesi $A = \{(x_1, 0.2), (x_2, 0.9)\}$ olarak verilsin. $A \wedge A^c = \emptyset$ ve $A \vee A^c = X$ olup olmadığını görelim.

$$A^c = \{(x_1, 0.8), (x_2, 0.1)\}$$

$$A \wedge A^c = \{(x_1, 0.2), (x_2, 0.1)\} \Rightarrow A \wedge A^c \neq \emptyset$$

$$A \vee A^c = \{(x_1, 0.8), (x_2, 0.9)\} \Rightarrow A \vee A^c \neq X$$

2.3. Fuzzy Topolojik Uzaylar

2.22. Tanım (fuzzy topolojik uzay, fuzzy açık küme, fuzzy kapalı küme)

X boştan farklı bir küme ve $\tau \leq I^X$ fuzzy kümelerinin bir ailesi olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan τ ailesine X üzerinde fuzzy topoloji, (X, τ) ikilisine de *fuzzy topolojik uzay* denir.

$$ft_1) \emptyset, X \in \tau \quad (0, 1 \in \tau)$$

$$ft_2) \text{ Her } A_1, A_2, \dots, A_n \in \tau \text{ için } \bigwedge_{i=1}^n A_i \in \tau$$

$$ft_3) \forall i \in I \text{ için } A_i \in \tau \Rightarrow \bigvee_{i \in I} A_i \in \tau$$

τ topolojisinin her bir elemanına X de *fuzzy açık küme*, X uzayına göre tümleyeni fuzzy açık olan kümeye de *fuzzy kapalı küme* denir [5].

2.4. Teorem

(X, τ) fuzzy topolojik uzay olmak üzere

$$\kappa = \{K \in I^X : K \text{ fuzzy kapalı} \Leftrightarrow K^c \in \tau\}$$

şeklinde tanımlı κ (kapalılar) ailesi aşağıdaki şartları sağlar [5].

$$k_1) \emptyset, X \in \kappa$$

$$k_2) \forall K_1, K_2, \dots, K_n \in \kappa \Rightarrow \bigvee_{i=1}^n K_i \in \kappa$$

$$k_3) \forall i \in I \text{ için } K_i \in \kappa \Rightarrow \bigwedge_{i \in I} K_i \in \kappa$$

2.23. Tanım (fuzzy kümesinin içi)

(X, τ) fuzzy topolojik uzay ve $A \in I^X$ olsun.

$$A^\circ = \bigvee \{B : A \leq B, B \in \tau\} = \sup \{B : A \leq B, B \in \tau\}$$

şeklinde tanımlanan fuzzy kümesine A fuzzy kümesinin içi denir.

Tanımdan da anlaşıldığı gibi A° fuzzy açık bir kümedir. Üstelik A° , A nın kapsadığı en geniş fuzzy açık kümedir [5].

2.5. Teorem

(X, τ) fuzzy topolojik uzay ve $A \in I^X$ olsun. A nın fuzzy açık küme olması için gerekli ve yeterli koşul $A = A^\circ$ olmasıdır [6].

2.1. Sonuç

(X, τ) fuzzy topolojik uzay ve $A, B \in I^X$ ve A° , A fuzzy kümesinin içi olsun. Bu durumda

i) $X^\circ = X, \emptyset^\circ = \emptyset$

ii) $A^\circ \leq A$

iii) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$

iv) $A \leq B \Rightarrow A^\circ \leq B^\circ$

v) $(A \wedge B)^\circ = A^\circ \wedge B^\circ$

sağlanır [7].

2.24. Tanım (fuzzy kümesinin kapanışı)

(X, τ) fuzzy topolojik uzay ve $A \in I^X$ olsun.

$$\overline{A} = \bigwedge \{B : A \leq B, B^c \in \tau\} = \inf \{B : A \leq B, B^c \in \tau\}$$

ile tanımlanan fuzzy küme A *fuzzy kümesinin kapanışı* denir. $\overline{A}$ kümesi tanımdan da anlaşıldığı gibi fuzzy kapalı bir kümedir. Ayrıca $\overline{A}$, A 'yı kapsayan en küçük fuzzy kapalı kümedir [5].

2.6. Teorem

(X, τ) fuzzy topolojik uzay ve $A \in I^X$ olsun. A 'nın fuzzy kapalı küme olması için gerekli ve yeterli koşul $A = \overline{A}$ olmasıdır [6].

2.2. Sonuç

(X, τ) fuzzy topolojik uzay ve $A, B \in I^X$ in iki fuzzy kümesi ve $\overline{A}$, A 'nın kapanışı olsun. Bu durumda;

i) $\overline{\overline{X}} = X, \overline{\emptyset} = \emptyset$

ii) $A \leq \overline{A}$

iii) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

iv) $A \leq B \Rightarrow \overline{A} \leq \overline{B}$

v) $\overline{(A \vee B)} = \overline{A} \vee \overline{B}$ [5].

2.7. Teorem

(X, τ) fuzzy topolojik uzay ve $A \in I^X$ olsun. Bu durumda $(A^\circ)^c = \overline{A^c}$ ve $(\overline{A})^c = (A^c)^\circ$

dir [7].

İspat

$A \in I^X$ olsun.

$$\begin{aligned}
 (A^\circ)^c &= (\sup\{B : B \leq A, B \in \tau\})^c \\
 &= \inf\{B : B \leq A, B \in \tau\}^c \\
 &= \inf\{C = B^c : A^c \leq B^c = C, C \in \tau\} \\
 &= \inf\{C : A^c \leq C, C \in \tau\} \\
 &= \overline{A^\circ}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\overline{A})^c &= (\inf\{B : A \leq B, B^c \in \tau\})^c \\
 &= \sup\{B : A \leq B, B^c \in \tau\}^c \\
 &= \sup\{B^c = D : D = B^c \leq A^c, B^c \in \tau\} \\
 &= \sup\{D : D \leq A^c, D \in \tau\} \\
 &= (A^c)^\circ
 \end{aligned}$$

2.25. Tanım (fuzzy kümesinin komşuluğu)

(X, τ) fuzzy topolojik uzay ve $A \in I^X$ olsun. A yı ihtiva eden bir B fuzzy açık kümesini kapsayan N kümesine, A fuzzy kümesinin bir *komşuluğu* denir. Buna göre

N, A nın fuzzy komşuluğu $\Leftrightarrow \exists B \in \tau$ var $\ni A \leq B \leq N$ [7].

2.26. Tanım (fuzzy noktasının komşuluğu)

(X, τ) fuzzy topolojik uzay ve p, X in bir fuzzy noktası olsun. p fuzzy noktasını içeren bir A fuzzy açık kümesini kapsayan N kümesine, p nin *fuzzy komşuluğu* denir

ve p nin bütün fuzzy komşuluklar ailesi $N(p)$ ile gösterilir. Buna göre

$$N \in N(p) \Leftrightarrow \exists A \in \tau \text{ var } p < A \leq N \text{ [7].}$$

2.8. Teorem

(X, τ) fuzzy topolojik uzay, $p \in I^X$ ve $N(p)$, p fuzzy noktasının komşuluklar ailesi olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler vardır.

- i) Her $N \in N(p)$ için $p < N$
- ii) Her $N_1, N_2 \in N(p)$ için $N_1 \wedge N_2 \in N(p)$
- iii) Herhangi bir $N \in N(p)$ ve $N \leq B \Rightarrow B \in N(p)$
- iv) Her $N \in N(p)$ için $A \leq N$ olacak şekilde öyle bir $A \in N(p)$ vardır ki $q < A$ şartını sağlayan her q fuzzy noktası için $N \in N(q)$ dur [8].

İspat

i) Her $N \in N(p)$ için tanımdan $p < A \leq N$ olacak şekilde $A \in \tau$ vardır. O halde $p < N$ olur.

ii) Her N_1 ve $N_2 \in N(p)$ için tanımdan $p < A_1 \leq N_1$ ve $p < A_2 \leq N_2$ olacak şekilde $A_1, A_2 \in \tau$ vardır. Buradan $p < A_1 \wedge A_2$ ve $A_1 \wedge A_2 \in \tau$ dur. $p < A_1 \wedge A_2 \leq N_1 \wedge N_2$ olup buradan $N_1 \wedge N_2 \in N(p)$ olur.

iii) $N \in N(p)$ ve $N \leq B$ olsun. Bu durumda $p < A \leq N \leq B$ olacak şekilde $A \in \tau$ vardır. Buradan $p < A \leq B$ olacak şekilde $A \in \tau$ bulunmuş olur. Bu durumda $B \in N(p)$ olur.

iv) $N \in N(p)$ olsun. Bu durumda $p < A \leq N$ olacak şekilde $A \in \tau$ vardır. $q < A$ veya $A \in \tau$ olduğundan $A \in N(q)$ olur. $A \leq N$ olduğundan (ii) $N \in N(q)$ olur.

2.27. Tanım (fuzzy topoloji tabanı)

(X, τ) fuzzy topolojik uzay ve $\beta \leq \tau$ olsun. $\forall A \in \tau$ için $A = \bigvee_{j \in J} B_j$ olacak şekilde

$\beta = \{B_j\}_{j \in J} \leq \beta$ alt ailesi varsa β ye τ için bir *taban* denir. Yani,

β, τ için bir taban $\Leftrightarrow \forall A \in \tau$ için $\exists \beta' \subset \beta$ var $\ni A = \bigvee_{B \in \beta'} B$ [7].

2.28. Tanım (fuzzy topolojinin alt tabanı)

(X, τ) fuzzy topolojik uzay, $\varphi \leq \tau$ olsun. φ nın elemanlarının her sonlu kesişimlerinin oluşturduğu fuzzy küme sınıfı τ için bir taban oluşturuyor ise, φ ailesine τ için bir *alt taban* denir. Yani;

φ, τ için alt taban $\Leftrightarrow \{ \bigwedge_{S \in \varphi} S : \varphi \leq A, \varphi \text{ sonlu} \} \tau$ için taban

şeklindedir [7].

2.29. Tanım (fuzzy topolojide yerel taban)

(X, τ) fuzzy topolojik uzay ve β, τ için bir taban olsun. X in bir p fuzzy noktası için

$$\beta_p = \{B : p < B \text{ ve } B \in \beta\}$$

ailesini göz önüne alalım. $p < A$ olmak üzere $\forall A \in \tau$ için $p < B \leq A$ olacak şekilde en az bir $B \in \beta_p$ varsa β_p ailesine p noktasının τ topolojisine göre *yerel tabanı* (*lokal tabanı*) denir [7].

2.4. Fuzzy Sürekli Fonksiyonlar

2.30. Tanım

X ve Y herhangi iki küme ve $g: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer A , X de bir fuzzy kümesi ve üyelik fonksiyonu f_A ise, bu durumda $g(A)$ A nın f fonksiyonu altında görüntüsü denir ve $g(A)$ da Y de bir fuzzy kümesi olup üyelik fonksiyonu, $\forall y \in Y$ için

$$f_{g(A)}(y) = \begin{cases} \sup_{x \in g^{-1}(y)} \{f_A(x)\} & , \quad g^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & , \quad g^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $g^{-1}(y) = \{x \in X: g(x) = y\}$ dir [5]. Şema ile gösterecek olursak;

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Y \\ f_A \swarrow & & \searrow g \circ f_A \\ & I & \end{array}$$

2.31. Tanım

X ve Y herhangi iki küme olmak üzere $g: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve B , Y de bir fuzzy küme olsun. $\forall x \in X$ için, $f_{g^{-1}(B)}(x) = f_B(g(x))$ üyelik fonksiyonu ile tanımlanan $g^{-1}(B) = g^{-1}(f_B)$ ifadesine B in *ters görüntüsü* denir [5]. Şema ile gösterecek olursak;

$$\begin{array}{ccc} & \xleftarrow{g^{-1}} & \\ & X \xrightarrow{g} Y & \\ g^{-1}(f_B) \swarrow & & \searrow f_B \\ & I & \end{array}$$

2.9. Teorem

X, Y herhangi iki küme $g: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon, A X de ve B Y de fuzzy kümeleri olsun. Aşağıdaki özellikler vardır;

- i) $\forall B \leq Y$ de bir fuzzy küme $\Rightarrow g^{-1}(B^c) = (g^{-1}(B))^c$
- ii) $\forall A \leq X$ de bir fuzzy küme $\Rightarrow g(A^c) \geq (g(A))^c$
- iii) $\forall B_1, B_2 \leq Y$ için $B_1 \leq B_2 \Rightarrow g^{-1}(B_1) \leq g^{-1}(B_2)$
- iv) $\forall A_1, A_2 \leq X$ için $A_1 \leq A_2 \Rightarrow g(A_1) \leq g(A_2)$
- v) $\forall B \leq Y \Rightarrow g(g^{-1}(B)) \leq B$
- vi) $\forall A \leq X \Rightarrow A \leq g^{-1}(g(A))$
- vii) $\forall j \in J$ için $B_j \leq Y \Rightarrow g^{-1}(\bigvee_{j \in J} B_j) = \bigvee_{j \in J} g^{-1}(B_j)$
- viii) $\forall A, B \leq X \Rightarrow g(A \wedge B) \leq g(A) \wedge g(B)$
- ix) $\forall j \in J$ için $B_j \leq Y \Rightarrow g^{-1}(\bigwedge_{j \in J} B_j) = \bigwedge_{j \in J} g^{-1}(B_j)$
- x) $g: X \rightarrow Y$ ve $h: Y \rightarrow Z$ fonksiyonları verilsin. Her $p \in Z$ fuzzy kümesi için;

$$(h \circ g)^{-1}(p) = g^{-1}(h^{-1}(p)) \text{ dır [5].}$$

İspat

- i) Her $x \in X$ için,

$$f_{g^{-1}(B^c)}(x) = f_{B^c}(g(x)) = 1 - f_B(g(x)) = 1 - f_{g^{-1}(B)}(x) = f_{[g^{-1}(B)]^c}(x)$$

Üyelik fonksiyonlarının eşitliğinden, $g^{-1}(B^c) = [g^{-1}(B)]^c$ elde edilir.

- ii) Her $y \in Y$ için $g^{-1}(y) \neq \emptyset$ ise,

$$f_{g(A^c)}(y) = \sup_{x \in g^{-1}(y)} \{ f_{A^c}(x) \} = \sup_{x \in g^{-1}(y)} \{ 1 - f_A(x) \} = 1 - \inf_{x \in g^{-1}(y)} \{ f_A(x) \} \quad (1)$$

$$f_{[g(A)]^c}(y) = 1 - f_{g(A)}(y) = 1 - \sup_{x \in g^{-1}(y)} \{ f_A(x) \} \quad (2)$$

olur. (1) ve (2) den, her $y \in Y$ için $f_{g(A^c)}(y) \geq f_{[g(A)]^c}(y)$ olur. Böylece, $g(A^c) \supseteq [g(A)]^c$ elde edilir.

iii) Her $x \in X$ için $f_{g^{-1}(B_1)}(x) = f_{B_1}(g(x))$, $f_{g^{-1}(B_2)}(x) = f_{B_2}(g(x))$ ve

$$B_1 \leq B_2 \Leftrightarrow f_{B_1}(g(x)) \leq f_{B_2}(g(x))$$

olduğundan $f_{g^{-1}(B_1)}(x) \leq f_{g^{-1}(B_2)}(x)$ ve dolayısıyla $g^{-1}(B_1) \leq g^{-1}(B_2)$ elde edilir.

iv) Her $y \in Y$ için $g^{-1}(y) \neq \emptyset$ olsun.

$$f_{g(A_1)}(y) = \sup_{x \in g^{-1}(y)} \{ f_{A_1}(x) \}, \quad f_{g(A_2)}(y) = \sup_{x \in g^{-1}(y)} \{ f_{A_2}(x) \} \text{ ve}$$

$$A_1 \leq A_2 \Leftrightarrow f_{A_1}(x) \leq f_{A_2}(x)$$

olduğundan $\sup_{x \in g^{-1}(y)} \{ f_{A_1}(x) \} \leq \sup_{x \in g^{-1}(y)} \{ f_{A_2}(x) \}$ olur. Buradan

$$f_{g(A_1)}(y) \leq f_{g(A_2)}(y) \xRightarrow{\forall y \in Y} g(A_1) \leq g(A_2)$$

elde edilir.

v) Her $y \in Y$ için

(a) $g^{-1}(y) \neq \emptyset$ ise,

$$f_{g[g^{-1}(B)]}(y) = \sup_{x \in g^{-1}(y)} \{ f_{g^{-1}(B)}(x) \} = \sup_{x \in g^{-1}(y)} \{ f_B(g(x)) \} = f_B(y)$$

üyelik fonksiyonlarının eşitliğinden $g[g^{-1}(B)] \leq B$ bulunur.

(b) $g^{-1}(y) = \emptyset$ ise, $f_{g[g^{-1}(B)]}(y) = 0 = f_{\emptyset}(y)$ üyelik fonksiyonlarının eşitliğinden, $g[g^{-1}(B)] = \emptyset$ dir. (i) ve (ii) den dolayı $g[g^{-1}(B)] \leq B$ olur.

vi) Her $x \in X$ için, $f_{g^{-1}(g(A))}(x) \geq f_{g(A)}(g(x)) = \sup_{x \in g^{-1}(y)} \{ f_A(x) \}$ ve buradan g fonksiyonunun özellikleri dikkate alınır,

$$f_{g^{-1}(g(A))}(x) \leq f_{g(A)}(x) \xRightarrow{\forall x \in X} g^{-1}(A) \geq A$$

olmasını gerektirir.

vii) Her $x \in X$ için

$$f_{g^{-1}(\bigvee_{i \in J} B_i)}(x) = f_{\bigvee_{i \in J} B_i}(g(x)) = \sup_{i \in J} \{ f_{B_i}(x) \} = \sup_{i \in J} \{ f_{g^{-1}(B_i)}(x) \} = f_{\bigvee_{i \in J} g^{-1}(B_i)}(x)$$

üyelik fonksiyonlarının eşitliğinden $g^{-1}(\bigvee_{i \in J} B_i) = \bigvee_{i \in J} g^{-1}(B_i)$ bulunur.

viii) $A \wedge B \leq A$ ve $A \wedge B \leq B$ olduğundan (vi) şikkından dolayı $g(A \wedge B) \leq g(A)$ ve $g(A \wedge B) \leq g(B)$ elde edilir. Her $y \in Y$ için $f_{g(A \wedge B)}(y) \leq f_{g(A)}(y)$, $f_{g(A \wedge B)}(y) \leq f_{g(B)}(y)$ ve buradan

$$f_{g(A \wedge B)}(y) \leq \min\{ f_{g(A)}(y), f_{g(B)}(y) \} = f_{g(A) \wedge g(B)}(y) \Rightarrow g(A \wedge B) \leq g(A) \wedge g(B)$$

bulunur.

ix) Her $x \in X$ için

$$f_{g^{-1}(\bigwedge_{i \in J} B_i)}(x) = f_{\bigwedge_{i \in J} B_i}(g(x)) = \inf_{i \in J} \{ f_{B_i}(x) \} = \inf_{i \in J} \{ f_{g^{-1}(B_i)}(x) \} = f_{\bigwedge_{i \in J} g^{-1}(B_i)}(x)$$

üyelik fonksiyonlarının eşitliğinden, $g^{-1}(\bigwedge_{j \in J} B_j) = \bigwedge_{i \in J} g^{-1}(B_i)$ olur.

x) Her $x \in X$ için

$$f_{(h \circ g)^{-1}(p)}(x) = f_p((h \circ g)(x)) = f_p(h(g(x))) = f_{h^{-1}(p)}(g(x)) = f_{g^{-1}(h^{-1}(p))}(x)$$

üyelik fonksiyonlarının eşitliğinden $(h \circ g)^{-1}(p) = g^{-1}(h^{-1}(p))$ elde edilir.

2.32. Tanım (fuzzy sürekli fonksiyon)

(X, τ) , (Y, τ') fuzzy topolojik uzaylar ve $g: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Y deki her fuzzy açık kümenin g altındaki ters görüntüsü X de fuzzy açık ise, g fonksiyonuna *fuzzy sürekli* denir. Yani,

$$g \text{ fuzzy sürekli (} f\text{-sürekli) } \Leftrightarrow \forall A \in \tau' \text{ için } g^{-1}(A) \in \tau$$

sağlanır [5].

Örnek 4

$X=[0,1]=I$ üzerindeki fuzzy kümeleri,

$$f_A(x) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2x-1 & , \quad 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \text{ ve } f_B(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq x \leq 1/4 \\ -4x+2 & , \quad 1/4 \leq x \leq 1/2 \\ 0 & , \quad 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

I üzerinde fuzzy topolojiler, $\tau = \{\emptyset, X, A^c\}$, $\tau' = \{\emptyset, X, A, B, A \vee B\}$ ve $g: (I, \tau) \rightarrow (I, \tau')$ fonksiyonu, $g(x) = \frac{x}{2}$ olarak tanımlansın. Buna göre, g fonksiyonun f -sürekliliğini, yani herhangi bir $A \in \tau'$ için $g^{-1}(A) \in \tau$ olduğunu göstermeliyiz.

$$f_{A^c}(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq x \leq 1/2 \\ -2x+2 & , \quad 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \text{ ve } f_{A \vee B}(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq x \leq 1/4 \\ -4x+2 & , \quad 1/4 \leq x \leq 1/2 \\ 2x-1 & , \quad 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

olduğu, fuzzy kümelerinde tümlene ve birleşim tanımlarından açıktır.

$$\emptyset \in \tau' \Rightarrow \text{Her } x \in X \text{ için } f_{g^{-1}(\emptyset)}(x) = f_{\emptyset}(g(x))$$

$$\Rightarrow g^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau \Rightarrow g^{-1}(\emptyset) \in \tau$$

$$X \in \tau' \Rightarrow \text{Her } x \in X \text{ için } f_{g^{-1}(X)}(x) = f_X(g(x))$$

$$\Rightarrow g^{-1}(X) = X \in \tau \Rightarrow g^{-1}(X) \in \tau$$

Diğer yandan,

$$A \in \tau' \Rightarrow f_{g^{-1}(A)}(x) = f_A(g(x)) = f_A\left(\frac{x}{2}\right) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ x-1 & , \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_{g^{-1}(A)}(x) = f_A(g(x)) = f_A\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \quad (I = [0,1] \text{ olduğundan})$$

$$\Rightarrow g^{-1}(A) = \emptyset \in \tau \Rightarrow g^{-1}(A) \in \tau ,$$

$$\begin{aligned}
B \in \tau' \quad \Rightarrow \quad f_{g^{-1}(B)}(x) &= f_B(g(x)) = f_B\left(\frac{x}{2}\right) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq x \leq 1/2 \\ -2x+2 & , \quad 1/2 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq x \leq 1/2 \\ -2x+2 & , \quad 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} = f_{A^c}(x)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Her } x \in X \text{ için } f_{g^{-1}(B)}(x) = f_{A^c}(x)$$

$$\Rightarrow g^{-1}(B) = A^c \in \tau$$

$$\Rightarrow g^{-1}(B) \in \tau,$$

$$\begin{aligned}
A \vee B \in \tau' \quad \Rightarrow \quad f_{g^{-1}(A \vee B)}(x) &= f_{A \vee B}(g(x)) = f_{A \vee B}\left(\frac{x}{2}\right) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq x \leq 1/2 \\ -2x+2 & , \quad 1/2 \leq x \leq 1 \\ x-1 & , \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq x \leq 1/2 \\ -2x+2 & , \quad 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} = f_{A^c}(x)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Her } x \in X \text{ için } f_{g^{-1}(A \vee B)}(x) = f_{A^c}(x)$$

$$\Rightarrow g^{-1}(A \vee B) = A^c \in \tau$$

$$\Rightarrow g^{-1}(A \vee B) \in \tau$$

Böylece, her $A \in \tau'$ için $g^{-1}(A) \in \tau$ olur. O halde $g: I \rightarrow I$, $g(x) = \left(\frac{x}{2}\right)$ fonksiyonu fuzzy süreklidir.

2.10. Teorem

(X, τ) ve (Y, τ') iki fuzzy topolojik uzay ve $g: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

i) g fonksiyonu fuzzy süreklidir [5].

ii) τ' ye göre kapalı her fuzzy kümesinin ters görüntüsü τ ya göre kapalıdır [5].

İspat

(i) $\Rightarrow$ (ii): g fuzzy sürekli olsun. κ' τ' ye göre kapalılar ailesi olmak üzere, her $K \in \kappa'$ için $g^{-1}(K) \in \kappa$ olduğunu göstermeliyiz. Burada κ , τ ya göre kapalılar ailesidir.

$$\begin{aligned} K \in \kappa' &\Rightarrow K^c \in \tau' \\ &\Rightarrow g^{-1}(K^c) \in \tau \text{ (} g, \text{ fuzzy sürekli olduğundan)} \\ &\Rightarrow [g^{-1}(K)]^c \in \tau \\ &\Rightarrow g^{-1}(K) \in \kappa \end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i): τ' ye göre fuzzy kapalı kümenin g altındaki ters görüntüsü τ ya göre fuzzy kapalı olsun. Yani, her $K \in \kappa'$ için $g^{-1}(K) \in \kappa$ olsun. Her $A \in \tau'$ için $g^{-1}(A) \in \tau$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} A \in \tau' &\Rightarrow A^c \in \kappa' \\ &\Rightarrow g^{-1}(A^c) \in \kappa \\ &\Rightarrow [g^{-1}(A)]^c \in \kappa \\ &\Rightarrow g^{-1}(A) \in \tau \end{aligned}$$

2.11. Teorem

(X, τ) ve (Y, τ') iki fuzzy topolojik uzay ve $g: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. g fonksiyonu fuzzy sürekli ise, bu durumda $A \leq X$ fuzzy kümesi için $g(A) \leq Y$ kümesinin her komşuluğunun ters görüntüsü A nın bir komşuluğudur [5].

İspat

g fuzzy sürekli olsun. Komşuluk tanımından B nin $g(A)$ nın bir komşuluğu olması için gerek ve yeter şart $g(A) \leq U \leq B$ olacak biçimde $U \in \tau'$ nün var olmasıdır. Bu ifadeye g^{-1} uygulanırsa $g^{-1}(g(A)) \leq g^{-1}(U) \leq g^{-1}(B)$ olur. $A \leq g^{-1}(g(A))$ ve $g^{-1}(U)$ açık olduğundan $g^{-1}(U) \in \tau$ ve $A \leq g^{-1}(U) \leq g^{-1}(B)$ sağlanır. Böylece, $g^{-1}(B)$ A nın komşuluğu olur.

2.12. Teorem

(X, τ) ve (Y, τ') iki fuzzy topolojik uzay ve $g: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

- i) g , fonksiyonu fuzzy süreklidir [5].
- ii) τ' nün alt tabanına (ya da tabanına) ait her B kümesi için $g^{-1}(B) \in \tau$ olur [5].

İspat

(i) $\Rightarrow$ (ii): g fonksiyonu fuzzy sürekli ve β' de τ' için bir taban olsun. Buna göre her $B \in \tau'$ ve her $p < B$ için $p < B_p \leq B$ olacak biçimde $B_p \in \beta'$ vardır. g fonksiyonu fuzzy sürekli olduğundan, $g^{-1}(B) \in \tau$, $g^{-1}(p) \leq g^{-1}(B)$ dir ve $g^{-1}(B_p) \in \beta$, $g^{-1}(p) \leq g^{-1}(B_p) \leq g^{-1}(B)$ sağlanır. Buradan $g^{-1}(B) \in \tau$ elde edilir.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Açıktır.

2.13. Teorem

(X, τ) ve (Y, τ') iki fuzzy topolojik uzay ve $g: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

- i) g , fonksiyonu fuzzy süreklidir [1-5].

ii) Her $A \leq X$ fuzzy kümesi için $g(\bar{A}) \leq \overline{g(A)}$ dir [1-5].

İspat

(i) $\Rightarrow$ (ii): g fonksiyonu fuzzy sürekli olsun. Kapanış tanımından her $A \leq X$ için $g(A) \leq \overline{g(A)}$ dir. Buradan $A \leq g^{-1}(g(A)) \leq g^{-1}(\overline{g(A)})$ dir. $\overline{g(A)}$, fuzzy kapalı ve g nin sürekli olmasından, $g^{-1}(\overline{g(A)})$, X de fuzzy kapalıdır ve A kümesini kapsar. Halbuki, A yı kapsayan en dar küme $\bar{A}$ dir. O halde $A \leq \bar{A} \leq g^{-1}(\overline{g(A)}) \Rightarrow g(\bar{A}) \leq \overline{g(A)}$ olur.

ii) $\Rightarrow$ (i) Her $A \leq X$ için $g(\bar{A}) \leq \overline{g(A)}$ ve $K \leq Y$ herhangi bir kapalı küme olsun. $g^{-1}(K) \leq X$ nin kapalı olduğunu gösterelim. Özel olarak $A = g^{-1}(K)$ alırsak

$$\bar{A} = \overline{g^{-1}(K)} \Rightarrow g(\bar{A}) = g(\overline{g^{-1}(K)}) \leq \overline{g(g^{-1}(K))} \leq \bar{K} = K \Rightarrow g(\bar{A}) \leq K$$

olur. Diğer taraftan $\bar{A} \leq g^{-1}(g(\bar{A})) \leq g^{-1}(K) = A \Rightarrow \bar{A} \leq A$ dir. Böylece $A = g^{-1}(K)$ kapalıdır. Teorem 2.11 den dolayı g fuzzy süreklidir.

2.14. Teorem

(X, τ) , (Y, τ') , (Z, τ'') fuzzy topolojik uzaylar ve $g : X \rightarrow Y, h : Y \rightarrow Z$ fonksiyonları verilmiş olsun. g ve h fonksiyonları fuzzy sürekli ise, $h \circ g : X \rightarrow Z$ fonksiyonu da fuzzy süreklidir [1-5].

İspat

$g : X \rightarrow Y, h : Y \rightarrow Z$ fuzzy sürekli ve her $W \in \tau''$ olsun. h fonksiyonu fuzzy sürekli olduğundan, fuzzy sürekli olma tanımından $h^{-1}(W) \in \tau'$ dir. Ayrıca, g fonksiyonu fuzzy sürekli olduğundan, fuzzy sürekli olma tanımından $h^{-1}(W) \in \tau'$ için $g^{-1}(h^{-1}(W)) \in \tau$ dir. Teorem 2.10 (vii) şıktan dan dolayı $(h \circ g)^{-1}(W) = g^{-1}(h^{-1}(W))$

olduğunu biliyoruz. Bu ise $h \circ g : X \rightarrow Z$ fonksiyonunun fuzzy sürekli olması demektir.

3. FUZZY SIRA BAĞINTILARI VE FUZZY RIESZ UZAYLARI

Bu bölümde fuzzy Riesz uzayı tanımı ve fuzzy Riesz uzayları ile ilgili bazı teoremleri vereceğiz.

3.1. Fuzzy Sıralı Kümeler

3.1. Tanım (fuzzy sıralı küme)

X kesin küme (crisp set) olmak üzere, $x, y, z \in X$ ve $\mu : X \times X \rightarrow [0, 1]$ $X \times X$ in fuzzy altkümelerinin üyelik fonksiyonu iken

- 1) $\mu(x, x) = 1$
- 2) $\mu(x, y) + \mu(y, x) > 1 \Rightarrow x = y$
- 3) $\max_y (\min\{\mu(x, y), \mu(y, z)\}) \leq \mu(x, z)$

sağlanıyorsa, X e *fuzzy sıralı küme* denir ve (X, μ) veya kısaca X ile gösterilir [11].

3.2. Tanım (fuzzy sıralı kümede üst sınır, alt sınır, supremum, infimum)

A , X fuzzy sıralı kümesinin kesin kümesi olsun. A nın X üzerinde

$$U(A)(y) = \begin{cases} 0 & , \exists x \in A \text{ için } \mu(x, y) \leq \frac{1}{2} \\ \bigwedge_{x \in A} \mu(x, y) & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçimde tanımlanan $U(A)$ fuzzy kümesine A nın *üst sınırı* olur. A nın $L(A)$ *alt sınırı*

$$L(A)(y) = \begin{cases} 0 & , \exists x \in A \text{ için } \mu(x, y) \leq \frac{1}{2} \\ \bigwedge_{x \in A} \mu(y, x) & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan X üzerindeki fuzzy kümesidir. Bir $z \in U(A)$ ve $y \in U(A) \Rightarrow y \in U(z)$ ($y \in U(\{z\})$) oluyorsa z ye A nın supremumu denir. Bir w elemanı için $w \in L(A)$ ve $y \in L(A) \Rightarrow y \in L(w)$ ($y \in L(\{w\})$) oluyorsa w ya A nın infimumu denir [12].

3.3. Tanım (fuzzy sıralı kümede artan dizi, azalan dizi)

X fuzzy sıralı küme olsun. X in bir (x_n) dizisi için $m \leq n$ iken $\mu(x_m, x_n) > \frac{1}{2}$ oluyorsa (x_n) ye artan dizi denir ve $x_n \uparrow$ yazılır. Ayrıca $x = \sup \{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} x_n$ mevcutsa $x_n \uparrow x$ yazılır. Benzer olarak azalan dizi tanımlanır ve böyle dizi için $x_n \downarrow$ yazılır. $x = \inf \{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} x_n$ mevcutsa $x_n \downarrow x$ yazılır [11].

3.4. Tanım (fuzzy sıralı kümede yakınsaklık ve limit)

X fuzzy sıralı kümesinde bir dizi (x_n) ve $x \in X$ olsun.

(a) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mu(a_n, x_n) > \frac{1}{2}$ ve $\mu(x_n, b_n) > \frac{1}{2}$

(b) $a_n \uparrow x$ ve $b_n \downarrow x$

olacak biçimde X in (a_n) ve (b_n) dizileri varsa (x_n) dizisi x e fuzzy sıra bağıntısına göre yakınsaktır veya kısaca (o_F) -yakınsak denir ve $x_n \xrightarrow{o_F} x$ yazılır. x elemanına fuzzy sıra bağıntısına göre limiti denir ve $x = (o_F)\text{-lim } x_n$ yazılır [10].

3.1. Önerme

Fuzzy sıra bağıntısına göre yakınsaklık aşağıdaki özelliklere sahiptir.

- i) $x_n \uparrow$ iken $x_n \xrightarrow{\circ_F} x \Leftrightarrow x_n \uparrow x$,
 $x_n \downarrow$ iken $x_n \xrightarrow{\circ_F} x \Leftrightarrow x_n \downarrow x$,
- ii) Her $(\circ_F)$ -yakınsak dizi sınırlıdır,
- iii) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mu(x_n, y_n) > \frac{1}{2}$ ve $x_n \xrightarrow{\circ_F} x, y_n \xrightarrow{\circ_F} y \Rightarrow \mu(x, y) > \frac{1}{2}$,
- iv) $x_n \xrightarrow{\circ_F} x$ ve $x_n \xrightarrow{\circ_F} y \Rightarrow x = y$,
- v) $x_n \xrightarrow{\circ_F} x$ yakınsak ise, (x_n) nin her bir alt dizisi aynı limite $(\circ_F)$ -yakınsaktır.
- vi) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mu(y_n, x_n) > \frac{1}{2}$ ve $\mu(x_n, z_n) > \frac{1}{2}$ ve $y_n \xrightarrow{\circ_F} x$ ve $z_n \xrightarrow{\circ_F} x$ ise $x_n \xrightarrow{\circ_F} x$ olur [10].

İspat

- i) $(\Rightarrow)$: $x_n \xrightarrow{\circ_F} x$ ve (a_n) ile (b_n) önceki tanımdaki diziler olsun. $x_n \uparrow$ iken $x_n \xrightarrow{\circ_F} x$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $\mu(a_n, x_n) > \frac{1}{2}$ ve $\mu(x_n, b_n) > \frac{1}{2}$ dir. Ayrıca $b_n \downarrow x$ olduğundan $x \in L(\{b_n : n \in \mathbb{N}\})$ olur. Buradan her $n \in \mathbb{N}$ için $\mu(x, b_n) > \frac{1}{2}$ sağlanır. (b_n) azalan bir dizi olduğundan sabit bir m ve herhangi bir $n \leq m$ için $\mu(b_m, b_n) > \frac{1}{2}$ ve ayrıca $\mu(x_m, b_m) > \frac{1}{2}$ dir. Geçişme özelliğinden her $n \leq m$ için $\mu(x_m, b_n) > \frac{1}{2}$ sağlanır. $n > m$ iken (x_n) artan bir dizi olduğundan $\mu(x_m, x_n) > \frac{1}{2}$ ve ayrıca $\mu(x_n, b_n) > \frac{1}{2}$ dir. Geçişme özelliğinden $\mu(x_m, b_n) > \frac{1}{2}$ elde edilir. $m \in \mathbb{N}$ için $x_m \in L(\{b_n : n \in \mathbb{N}\})$ dir. $x = \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} b_n$ olduğundan her $m \in \mathbb{N}$ için $x_m \in L(x)$ olur. Böylece her $m \in \mathbb{N}$ için $\mu(x_m, x) > \frac{1}{2}$ ve dolayısıyla $x \in U(\{x_m : m \in \mathbb{N}\})$ dir. Ayrıca her $m \in \mathbb{N}$ için $\mu(a_m, x_m) > \frac{1}{2}$ olduğundan $\mu(a_m, y) > \frac{1}{2}$ olur. O halde

$y \in U(\{a_m : m \in \mathbb{N}\})$ ve $x = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} a_n$ olduğundan $y \in U(x)$ olur. Dolayısıyla

$x = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} x_n$ yani $x_n \uparrow x$ sağlanır.

($\Leftarrow$): $x_n \uparrow x$ olsun ve her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n = x_n$ ve $b_n = x$ alalım. (a_n) artan (b_n) azalan ve $a_n \uparrow x$, $b_n \downarrow x$ sağlanır. Üstelik her $n \in \mathbb{N}$ için $\mu(a_n, x_n) > \frac{1}{2}$ ve $\mu(x_n, b_n) = \mu(x_n, x) > \frac{1}{2}$ dir. Tanım 3.4 den $x_n \xrightarrow{o_F} x$ olur. Azalan dizi durumu da benzer şekilde yapılır.

ii) $x_n \xrightarrow{o_F} x$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mu(a_n, x_n) > \frac{1}{2}$, $\mu(x_n, b_n) > \frac{1}{2}$ ve $a_n \uparrow x$, $b_n \downarrow x$ olacak biçimde (a_n) ve (b_n) dizileri vardır. $a_n \uparrow$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $\mu(a_1, a_n) > \frac{1}{2}$ ve böylece $a_1 \in L(\{a_n : n \in \mathbb{N}\})$ dir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mu(a_n, x_n) > \frac{1}{2} \Rightarrow \mu(a_1, a_n) > \frac{1}{2}$ olduğundan $a_1 \in L(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$ olur ki, bu (x_n) dizisinin alttan sınırlı olmasını verir. $b_n \downarrow$ olduğundan $b_1 \in U(\{b_n : n \in \mathbb{N}\})$ dir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mu(b_n, b_1) > \frac{1}{2}$ olur. O halde $b_1 \in U(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$ dir ve böylece (x_n) alttan sınırlıdır.

iii) $x_n \xrightarrow{o_F} x$ ise, $a_n \uparrow x$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $\mu(a_n, x_n) > \frac{1}{2}$ olacak biçimde X in bir (a_n) dizisi vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mu(x_n, y_n) > \frac{1}{2}$ olduğundan $\mu(a_n, y_n) > \frac{1}{2}$ olur.

Yine $y_n \xrightarrow{o_F} y$ ise, $b_n \downarrow y$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\mu(y_n, b_n) > \frac{1}{2}$ olacak biçimde X in bir (b_n) dizisi vardır. Sabit bir $m \in \mathbb{N}$ için $n \leq m$ iken (a_n) nin artan olmasından dolayı $\mu(a_n, a_m) > \frac{1}{2}$ olur. Her $m \in \mathbb{N}$ için $\mu(a_m, y_m) > \frac{1}{2}$ olduğundan her $n \leq m$ için

$\mu(a_n, y_m) > \frac{1}{2}$ dir. Diğer yandan her $m \in IN$ için $\mu(y_m, b_m) > \frac{1}{2}$ olduğundan $n \leq m$ iken $\mu(a_n, y_m) > \frac{1}{2}$ dir. $n > m$ iken $b_n \downarrow$ olmasından $\mu(b_n, b_m) > \frac{1}{2}$ olur. Her $n > m$ için $\mu(y_n, b_n) > \frac{1}{2}$ olduğundan $\mu(y_n, b_m) > \frac{1}{2}$ dir. $\mu(a_n, y_n) > \frac{1}{2}$ den dolayı her $n > m$ için $\mu(a_n, b_m) > \frac{1}{2}$ olur. Böylece her $n \in IN$ için $\mu(a_n, b_m) > \frac{1}{2}$; yani $b_m \in U(\{a_n : n \in IN\})$ dir. $x = \bigvee_{n \in IN} a_n$ olduğundan $b_m \in U(x)$ olur. $m \in IN$ keyfi sabit olduğundan her $m \in IN$ için $\mu(x, b_m) > \frac{1}{2}$; yani $x \in L(\{b_m : m \in IN\})$ dir. $y = \bigwedge_{n \in IN} b_n$ olması $x \in L(y)$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla $\mu(x, y) > \frac{1}{2}$ bulunur.

iv) Her $n \in IN$ için $\mu(x_n, x_n) > \frac{1}{2}$ olduğu için (iii) den $\mu(x, x) > \frac{1}{2}$ olur. Ters durumda $\mu(y, x) > \frac{1}{2}$ dir. $\mu(x, y) + \mu(y, x) > 1$ olması ve fuzzy sıra bağıntısının ters simetri özelliğinden $x = y$ elde edilir.

v) (a_n) ve (b_n) tanımındaki özellikte verilen diziler olsun. Her $n \in IN$ için $\mu(a_n, x_n) > \frac{1}{2}$, $\mu(x_n, b_n) > \frac{1}{2}$ ve $a_n \uparrow x$, $b_n \downarrow x$ dir. $(x_{n_k}), (x_n)$ nin bir alt dizisi iken her $n_k \in IN$ için $\mu(a_{n_k}, x_{n_k}) > \frac{1}{2}$ ve $\mu(x_{n_k}, b_{n_k}) > \frac{1}{2}$ dir ve $a_{n_k} \uparrow x$, $b_{n_k} \downarrow x$ olur. Geriye $a_{n_k} \uparrow x$ olduğunu göstermek kalır. Her $k \in IN$ için $\mu(a_{n_k}, x) > \frac{1}{2}$ olduğundan $x \in U(\{a_{n_k} : k \in IN\})$ dir. $y \in U(\{a_{n_k} : k \in IN\})$ olsun. Bu durumda her $k \in IN$ için $\mu(a_{n_k}, y) > \frac{1}{2}$ olduğundan her $n \in IN$ için $\mu(a_n, y) > \frac{1}{2}$ olur. $a_n \uparrow x$

olduğundan $\mu(x, y) > \frac{1}{2}$; yani $y \in U(x)$ bulunur. Böylece $x = \bigvee_{k \in IN} a_{n_k}$ bulunur. Benzer olarak $b_{n_k} \downarrow x$ dir. Dolayısıyla $x_{n_k} \xrightarrow{o_F} x$ sağlanır.

vi) $y_n \xrightarrow{o_F} x$ ise $a_n \uparrow x$ ve $n \in IN$ için $\mu(a_n, y_n) > \frac{1}{2}$ olacak biçimde (a_n) dizisi vardır. $z_n \xrightarrow{o_F} x$ ise, $b_n \downarrow x$ ve her $n \in IN$ için $\mu(z_n, b_n) > \frac{1}{2}$ olacak biçimde (b_n) dizisi vardır. Her $n \in IN$ için

$$\mu(a_n, y_n) > \frac{1}{2} \text{ ve } \mu(y_n, x_n) > \frac{1}{2} \Rightarrow \mu(a_n, x_n) > \frac{1}{2}$$

dir ve

$$\mu(x_n, z_n) > \frac{1}{2} \text{ ve } \mu(z_n, b_n) > \frac{1}{2} \Rightarrow \mu(x_n, b_n) > \frac{1}{2}$$

olur. Diğer yandan $a_n \uparrow x$ ve $b_n \downarrow x$ olduğundan $x_{n_k} \xrightarrow{o_F} x$ elde edilir.

3.2. Fuzzy Sıralı Vektör Uzayları

3.5. Tanım

X vektör uzayı olmak üzere $x_1, x_2 \in X$ için $\mu(x_1, x_2) > \frac{1}{2}$ iken

$$1) x \in X \text{ için } \mu(x_1, x_2) \leq \mu(x_1 + x, x_2 + x)$$

2) $0 < \alpha \in IR$ için $\mu(x_1, x_2) \leq \mu(\alpha x_1, \alpha x_2)$ özelliklerini sağlayan fuzzy sıralı küme ise X e *fuzzy sıralı vektör uzayı* denir [9].

Örnek 5

$X = \mathbb{R}^n$ olsun. $\mu : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0,1]$ dönüşümü $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ iken

$$\mu(x, y) = \begin{cases} 1 & , \quad x = y \\ \frac{2}{3} & , \quad i = 1, \dots, n \text{ için } x_i \leq y_i \text{ ve } x \neq y \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın μ yansımalı ve ters simetriktir. μ nün geçişmeli olduğunu gösterelim.

$x = (x_1, \dots, x_n)$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in X$ olsun. $z = x$ ise, $\mu(x, z) \geq \bigvee_{y \in X} [\mu(x, y) \wedge \mu(y, z)]$

sağlanır. $x \neq z$ olması halinde iki durum vardır:

1) $\mu(x, z) = \frac{2}{3}$ iken her $i = 1, 2, \dots, n$ için $x_i \leq z_i$ dir. Bir $y = (y_1, \dots, y_n) \in X$ için $y = x$ veya $y = z$ ise

$$\mu(x, z) \geq \mu(x, y) \wedge \mu(y, z) \quad (3)$$

sağlanır. $y \neq x$ ve $y \neq z$ ise, $\mu(x, y) \leq \frac{2}{3}$ ve $\mu(y, z) \leq \frac{2}{3}$ olduğundan (3) sağlanır.

Böylece

$$\mu(x, z) \geq \bigvee_{y \in X} [\mu(x, y) \wedge \mu(y, z)]$$

olur.

2) $\mu(x, z) = 0$ ve $y \in X$ olsun. $y = x$ veya $y = z$ ise (3) ün sağlandığı açıktır. $y \neq x$ ve $y \neq z$ olsun. $\mu(x, y) = \frac{2}{3}$ olduğundan her $i = 1, 2, \dots, n$ için $x_i \leq y_i$ dir. $\mu(x, z) = 0$ olduğundan en az bir $j = 1, 2, \dots, n$ için $x_j > z_j$ olur. Aynı j için $z_j < x_j \leq y_j$ olduğundan $\mu(y, z) = 0$ olur ve (3) sağlanır. $\mu(x, y) = 0$ ise (3) ün sağlandığı açıktır. Böylece

$$\mu(x, z) \geq \bigvee_{y \in X} [\mu(x, y) \wedge \mu(y, z)]$$

elde edilir. O halde μ geçişkendir. Sonuç olarak, μ fuzzy sıra bağıntısıyla $X = IR^n$ fuzzy sıralı kümedir.

$X = IR^n$ nin fuzzy sıralı vektör uzayı olduğunu gösterelim:

(i) $x, y \in X$ için $\mu(x, y) > \frac{1}{2}$ olsun. $x = y$ ise her $z \in X$ için

$$x + z = y + z \Rightarrow \mu(x + z, y + z) = 1 = \mu(x, y)$$

olur. $x \neq y$ ise $\mu(x, y) = \frac{2}{3}$ dir ve her $i = 1, 2, \dots, n$ için $x_i \leq y_i$ olur. Herhangi

bir $z = (z_1, \dots, z_n) \in X$ ve her $i = 1, 2, \dots, n$ için $x_i + z_i \leq y_i + z_i$ ve

$$x + z = y + z \Rightarrow \mu(x + z, y + z) = \frac{2}{3} \text{ olduğundan } \mu(x, y) \leq \mu(x + z, y + z) \text{ sağlanır.}$$

(ii) $x, y \in X$ ve $\mu(x, y) > \frac{1}{2}$ olsun. $x = y$ ise her $0 \leq \alpha \in IR$ için

$$\alpha x = \alpha y \Rightarrow 1 = \mu(x, y) \leq \mu(\alpha x, \alpha y) = 1$$

olur. $x \neq y$ ise, $\mu(x, y) > \frac{1}{2}$ olduğundan $\mu(x, y) = \frac{2}{3}$ olur. Bu durumda her $i = 1, 2, \dots, n$ için $x_i \leq y_i$ ve $0 \leq \alpha \in IR$ iken $\alpha x_i \leq \alpha y_i$ olur. Aynı zamanda $\alpha x \neq \alpha y$ dir. Böylece $\mu(\alpha x, \alpha y) = \frac{2}{3}$ dür. $\alpha = 0$ iken $\mu(\alpha x, \alpha y) = 1$ dir. O halde her $0 \leq \alpha \in IR$ için $\mu(x, y) \leq \mu(\alpha x, \alpha y)$ olur. Sonuç olarak, μ fuzzy sıra bağıntısına göre $X = IR^n$ fuzzy sıralı vektör uzayıdır [10].

Örnek 6

X , $[0,1]$ üzerinde sürekli reel değerli fonksiyonların vektör uzay, yani $X = C[0,1]$ olsun. $C[0,1]$ üzerinde

$$\mu(f, g) = \begin{cases} 1 & , \quad f = g \\ \frac{3}{4} & , \quad f \leq g \text{ ve } f \neq g \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dönüşümünü tanımlayalım. μ nün yansımali ve ters simetrik olduğu açıktır. Geçişmeli olduğunu görmek için $f, h \in C[0,1]$ alalım. $f = h$ durumunda geçişkenlik sağlanır. $f \neq h$ ise iki durumda söz konusudur.

1) $\mu(f, h) = \frac{3}{4}$ olsun. Herhangi bir $g \in C[0,1]$ için $g = h$ veya $g = f$ ise

$$\mu(f, h) \geq \mu(f, g) \wedge \mu(g, f) \quad (4)$$

sağlanır. $g \neq f$ ve $g \neq h$ olsun. $\mu(f, h) \leq \frac{3}{4}$ ve $\mu(g, h) \leq \frac{3}{4}$ olduğundan (4)

sağlanır. Böylece

$$\mu(f, h) \geq \bigvee_g [\mu(f, g) \wedge \mu(g, f)]$$

olur.

2) $\mu(f, h) = 0$ ve $g \in X$ olsun. $g = f$ veya $g = h$ iken (4) sağlanır. $g \neq f$ ve $g \neq h$ olsun. $\mu(f, g) = \frac{3}{4}$ ise, her $x \in [0, 1]$ için $f(x) \leq g(x)$ olur. $\mu(f, h) = 0$ olduğundan $f(x_0) \leq h(x_0)$ olacak biçimde $x_0 \in [0, 1]$ vardır. O halde $h(x_0) \leq g(x_0)$ yani $\mu(g, h) = 0$ dır ve (4) sağlanır. Sonuç olarak μ geçişkendir.

Şimdi $C \in [0, 1]$ in μ ye göre fuzzy sıralı vektör uzayı olduğunu gösterelim.

(i) $f, g \in C[0, 1]$ ve $\mu(f, g) > \frac{3}{4}$ olsun. $\mu(f, g) = 1$ ise $f = g$ olduğundan her $h \in C[0, 1]$ için $\mu(f + h, g + h) = 1$ olur. $\mu(f, g) = \frac{3}{4}$ ise $f \leq g$ ve $f \neq g$ dir. Bu durumda her $h \in C[0, 1]$ için $f + h \neq g + h$ olduğundan $\mu(f + h, g + h) = \frac{3}{4}$ olur. Böylece her $f, g, h \in C[0, 1]$ için

$$\mu(f, g) \leq \mu(f + h, g + h)$$

sağlanır.

(ii) $f, g \in C[0, 1]$ ve $\mu(f, g) > \frac{1}{2}$ olsun. $\mu(f, g) = 1$ ise $0 \leq \alpha \in \mathbb{R}$ için $\mu(\alpha f, \alpha g) = 1$ dir. $\mu(f, g) > \frac{3}{4}$ ise $f \leq g$ ve $f \neq g$ olmasından her $0 \leq \alpha \in \mathbb{R}$ için $\alpha f \leq \alpha g$ ve $\alpha f \neq \alpha g$ olur ki, bu durumda $\mu(\alpha f, \alpha g) = \frac{3}{4}$ sağlanır. $\alpha = 0$ için $\mu(\alpha f, \alpha g) = 1$ dir. Böylece her bir durum için $0 \leq \alpha \in \mathbb{R}$ iken

$$\mu(f, g) \leq \mu(\alpha f, \alpha g)$$

sağlanır. Sonuç olarak $C[0,1]$, μ fuzzy sıralı bağıntısıyla birlikte fuzzy sıralı vektör uzayıdır [10].

Not

$$\mu(x_1, y_1) > \frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad \mu(x_2, y_2) > \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \mu(x_1 + x_2, y_1 + y_2) > \frac{1}{2} \quad \text{dir.} \quad \text{Gerçekten}$$

$$\mu(x_1, y_1) > \frac{1}{2} \Rightarrow \mu(x_1 + x_2, y_1 + x_2) > \frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad \mu(x_2, y_2) > \frac{1}{2} \Rightarrow \mu(y_1 + x_2, y_1 + y_2) > \frac{1}{2}$$

dir. Geçişme özelliğinden $\mu(x_1 + x_2, y_1 + y_2) > \frac{1}{2}$ olur [7].

3.2. Önerme

X fuzzy sıralı vektör uzayı $x, x_1, x_2 \in X$ ve $\alpha, \beta \in IR$ olmak üzere aşağıdakiler sağlanır.

$$a) \quad \mu(0, x) > \frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad \mu(0, y) > \frac{1}{2} \Rightarrow \mu(0, x + y) > \frac{1}{2}$$

$$b) \quad \mu(0, x) > \frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad \mu(0, -x) > \frac{1}{2} \Rightarrow x = 0$$

$$c) \quad \mu(0, x) > \frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad \alpha \geq 0 \Rightarrow \mu(0, \alpha x) > \frac{1}{2}$$

$$d) \quad \mu(x, y) > \frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad \alpha \leq 0 \Rightarrow \mu(\alpha x, \alpha y) > \frac{1}{2}$$

$$e) \quad \mu(0, x) > \frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad \alpha \leq \beta \Rightarrow \mu(\alpha x, \beta y) > \frac{1}{2} \quad [10].$$

İspat

a) Yukarıda verilen nottan sağlanır.

b) $\mu(0, -x) > \frac{1}{2} \Rightarrow \mu(0, -x) \leq \mu(0+x, x-x) \Rightarrow \mu(x, 0) > \frac{1}{2}$ olduğundan ters

simetri özelliğinden $x = 0$ olur.

c) Fuzzy sıralı vektör uzayı tanımının ikinci özelliğinden sağlanır.

d) $\mu(x, y) > \frac{1}{2} \Rightarrow \mu(0, y-x) > \frac{1}{2}$ dir. $\alpha \geq 0$ olduğundan $\mu(0, \alpha x - \alpha y) > \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\mu(\alpha y, \alpha x) > \frac{1}{2}$ olur.

e) $\mu(0, x) > \frac{1}{2}$ ve $\alpha \leq \beta \Rightarrow \frac{1}{2} < \mu(0, x) \leq \mu(0, \beta y - \alpha x) \Rightarrow \mu(\alpha x, \beta y) > \frac{1}{2}$ olur.

3.3. Önerme

$\{x_j\}_{j \in J}$, fuzzy sıralı vektör uzayındaki elemanların bir sistemi olsun. $\bigvee_{j \in J} x_j$ varsa,

$\bigwedge_{j \in J} (-x_j)$ de vardır ve $\bigvee_{j \in J} x_j = -\bigwedge_{j \in J} (-x_j)$ sağlanır [10].

İspat

$a = \bigvee_{j \in J} x_j$ alalım $a \in U(\{x_j : j \in J\})$ veya her $j \in J$ için $\mu(x_j, a) > \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\mu(-a, -x_j) > \frac{1}{2}$ olduğundan $-a \in L(\{-x_j : j \in J\})$ olur. $x \in L(\{-x_j : j \in J\})$ olsun.

Her $j \in J$ için $-x \in U(\{x_j : j \in J\})$ olur. $a = \bigvee_{j \in J} x_j$ olduğundan $-x \in U(a)$ dir. Yani

$\mu(a, -x) > \frac{1}{2}$ dolayısıyla $\mu(-x, a) > \frac{1}{2} \Rightarrow x \in L(-a)$ olur. Böylece $-a = \bigwedge_{j \in J} (-x_j)$

olur.

3.4. Önerme

Bir fuzzy sıralı vektör uzayının elemanlarının iki sistemi $\{x_j\}_{j \in J}$ ve $\{y_k\}_{k \in K}$ olsun.

$\bigvee_{j \in J} x_j$ ve $\bigvee_{k \in K} y_k$ varsa $\bigvee_{j \in J, k \in K} (x_j + y_k)$ da vardır ve $\bigvee_{j \in J, k \in K} (x_j + y_k) = \bigvee_{j \in J} x_j + \bigvee_{k \in K} y_k$ sağlanır [10].

İspat

$a = \bigvee_{j \in J} x_j$ ve $b = \bigvee_{k \in K} y_k$ olsun. Her $j \in J$ ve $k \in K$ için

$$\begin{aligned} \mu(x_j, a) > \frac{1}{2} \text{ ve } \mu(y_k, b) > \frac{1}{2} &\Rightarrow \mu(x_j + y_k, a + b) > \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow a + b \in U(\{x_j + y_k : j \in J \text{ ve } k \in K\}) \end{aligned}$$

olur. Herhangi bir $z \in U(\{x_j + y_k : j \in J \text{ ve } k \in K\})$ için $\mu(x_j + y_k, z) > \frac{1}{2}$ olduğundan k yı sabit alarak her $j \in J$ için

$$\mu(x_j, z - y_k) > \frac{1}{2} \Rightarrow z - y_k \in U(\{x_j : j \in J\}) \Rightarrow z - y_k \in U(a)$$

elde edilir. Böylece her $k \in K$ için $\mu(a, z - y_k) > \frac{1}{2} \Rightarrow \mu(y_k, z - a) > \frac{1}{2}$ olduğundan $z - a \in U(\{y_k : k \in K\})$ olur. O halde

$$z - a \in U(b) \Rightarrow \mu(b, z - a) > \frac{1}{2} \Rightarrow \mu(a + b, z) > \frac{1}{2} \Rightarrow z \in U(a + b)$$

olduğundan $a + b = \bigvee_{j \in J, k \in K} (x_j + y_k)$ eşitliği elde edilir.

Benzer önerme en büyük alt sınır için de verilebilir.

3.5. Önerme

X fuzzy sıralı vektör uzayının elemanlarının bir sistemi $\{x_j\}_{j \in J}$ olsun. $\bigvee_{j \in J} x_j$ var ve

$0 < \alpha \in IR$ ise, $\bigvee_{j \in J} (\alpha x_j)$ de vardır ve $\bigvee_{j \in J} (\alpha x_j) = \alpha(\bigvee_{j \in J} x_j)$ sağlanır [10].

İspat

$a = \bigvee_{j \in J} x_j$ alınırsa, her $j \in J$ için $\mu(x_j, a) > \frac{1}{2}$ olur. $0 < \alpha \in IR$ iken

$\mu(\alpha x_j, \alpha a) > \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha a \in U(\{\alpha x_j : j \in J\})$ dir. $x \in U(\{\alpha x_j : j \in J\})$ ve $0 < \alpha$ iken

$$\begin{aligned} \mu(x_j, \frac{1}{\alpha} x) > \frac{1}{2} (\forall j) &\Rightarrow \frac{1}{\alpha} x \in U(\{x_j : j \in J\}) \Rightarrow \frac{1}{\alpha} x \in U(a) \Rightarrow \mu(\alpha, \frac{1}{\alpha} x) > \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \mu(\alpha a, x) > \frac{1}{2} \Rightarrow x \in U(\alpha a) \end{aligned}$$

olduğundan $\alpha a = \alpha(\bigvee_{j \in J} x_j) = \bigvee_{j \in J} (\alpha x_j)$ bulunur.

3.6. Önerme

$\bigvee_{j \in J} x_j$ var ve $0 < \alpha$ ise, $\bigwedge_{j \in J} (\alpha x_j)$ de vardır ve $\bigwedge_{j \in J} (\alpha x_j) = \alpha(\bigvee_{j \in J} x_j)$ sağlanır.

İspat

$-\alpha > 0$ olduğundan bir önceki önermeden $\bigvee_{j \in J} ((-\alpha)x_j)$ vardır ve

$$\bigvee_{j \in J} ((-\alpha)x_j) = (-\alpha)(\bigvee_{j \in J} x_j) = -(\alpha(\bigvee_{j \in J} x_j)) \Rightarrow -\bigvee_{j \in J} (-\alpha x_j) = \alpha(\bigvee_{j \in J} x_j)$$

sağlanır. Önerme 3.3 den $\bigwedge_{j \in J} (\alpha x_j) = \alpha(\bigvee_{j \in J} x_j)$ elde edilir [10].

3.7. Önerme

Bir fuzzy sıralı vektör uzayında aşağıdakiler sağlanır.

$$(a) \quad x_n \xrightarrow{o_F} x \text{ ve } y_n \xrightarrow{o_F} y \Rightarrow x_n + y_n \xrightarrow{o_F} x + y$$

$$(b) \quad x_n \xrightarrow{o_F} x \text{ ve } \alpha \in IR \Rightarrow \alpha x_n \xrightarrow{o_F} \alpha x \quad [10].$$

İspat

$$(a) \quad (o_F)\text{-yakınsaklık tanımından her } n \in IN \text{ için } \mu(a_n, x_n) > \frac{1}{2}, \quad \mu(x_n, b_n) > \frac{1}{2},$$

$$\mu(a'_n, y_n) > \frac{1}{2} \text{ ve } \mu(y_n, b'_n) > \frac{1}{2} \text{ olacak biçimde } (a_n), (b_n), (a'_n), (b'_n) \text{ dizileri vardır}$$

ve $a_n \uparrow x, b_n \downarrow x, a'_n \uparrow y, b'_n \downarrow y$ sağlanır. Her n için

$$\mu(a_n, x_n) > \frac{1}{2} \text{ ve } \mu(a'_n, y_n) > \frac{1}{2} \Rightarrow \mu(a_n + a'_n, x_n + y_n) > \frac{1}{2}$$

$$\mu(x_n, b_n) > \frac{1}{2} \text{ ve } \mu(y_n, b'_n) > \frac{1}{2} \Rightarrow \mu(x_n + y_n, b_n + b'_n) > \frac{1}{2}$$

dir. Ayrıca $(a_n + a'_n)$ artan ve $(b_n + b'_n)$ azalandır. Geriye $x + y = \bigvee_{n \in IN} (a_n + a'_n)$ ve

$x + y = \bigwedge_{n \in IN} (b_n + b'_n)$ olduğunu göstermek kalır. Her $n \in IN$ için $\mu(a_n, x_n) > \frac{1}{2}$ ve

$$\mu(a'_n, y_n) > \frac{1}{2} \Rightarrow \mu(a_n + a'_n, x + y) > \frac{1}{2} \quad \text{olduğundan} \quad x + y \in U(\{a_n + a'_n : n \in IN\})$$

olur. $z \in U(\{a_n + a'_n : n \in IN\})$ alınırsa, her $n \in IN$ için $\mu(a_n + a'_n, z) > \frac{1}{2}$ olduğundan

her $m, n \in \mathbb{N}$ için $\mu(a_m + a'_n, z) > \frac{1}{2}$ dir. n sabit ve $m \leq n$ iken $\mu(a_m, a_n) > \frac{1}{2} \Rightarrow \mu(a_m + a'_n, a_n + a'_n) > \frac{1}{2}$ dir. Ayrıca $\mu(a_m + a'_n, z) > \frac{1}{2}$ olur. Diğer yandan, $m > n$ ise (a'_n) artan olduğundan

$$\mu(a'_m, a'_n) > \frac{1}{2} \Rightarrow \mu(a_m + a'_n, a_m + a'_m) > \frac{1}{2}$$

dir. Ayrıca $\mu(a_m + a'_m, z) > \frac{1}{2}$ olduğundan yine geçime özelliğinden $\mu(a_m + a'_n, z) > \frac{1}{2}$ olur. n keyfî sabit olduğundan her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\mu(a_m + a'_n, z) > \frac{1}{2} \Rightarrow z \in \left(\left\{ a_m + a'_n : m, n \in \mathbb{N} \right\} \right) \Rightarrow z \in U \left(\bigvee_{m, n \in \mathbb{N}} (a_m + a'_n) \right)$$

elde edilir. $\bigvee_{m \in \mathbb{N}} a_m$ ve $\bigvee_{n \in \mathbb{N}} a'_n$ nün varlığı $\bigvee_{m, n \in \mathbb{N}} (a_m + a'_n)$ nun varlığını garanti eder ve böylece Önerme 3.4 den

$$\bigvee_{m, n \in \mathbb{N}} (a_m + a'_n) = \bigvee_{m \in \mathbb{N}} a_m + \bigvee_{n \in \mathbb{N}} a'_n = x + y$$

olur. Böylece $z \in U(x + y)$ ve dolayısıyla $x + y = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} (a_n + a'_n)$ sağlanır. Benzer

yöntemle $x + y = \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} (b_n + b'_n)$ sağlanır. O halde $x_n + y_n \xrightarrow{o_F} x + y$ olur.

(b) $x_n \xrightarrow{o_F} x$ ise, $a_n \uparrow x$, $b_n \downarrow x$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\mu(a_n, x_n) > \frac{1}{2}$, $\mu(x_n, b_n) > \frac{1}{2}$

olacak biçimde (a_n) ve (b_n) dizleri vardır. $\alpha > 0$ iken her $n \in \mathbb{N}$ için

$\mu(\alpha a_n, \alpha x_n) > \frac{1}{2}$ ve $\mu(\alpha x_n, \alpha b_n) > \frac{1}{2}$ olur. (a_n) artan olduğundan $m \leq n$ iken $\mu(a_m, a_n) > \frac{1}{2} \Rightarrow \mu(\alpha a_m, \alpha a_n) > \frac{1}{2}$ den (αa_n) de artandır. Benzer yolla (αb_n) nin azalan dizi olduğu gösterilir. Önerme 3.5 den

$$\bigvee_{n \in \mathbb{N}} (\alpha a_n) = \alpha(\bigvee_{n \in \mathbb{N}} a_n) = \alpha x \text{ ve } \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} (\alpha b_n) = \alpha(\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} b_n) = \alpha x$$

dir. O halde $\alpha x_n \xrightarrow{o_F} \alpha x$ olur. $\alpha < 0$ ise, her $n \in \mathbb{N}$ için $\mu(a_n, x_n) > \frac{1}{2}$ ve $\mu(x_n, b_n) > \frac{1}{2} \Rightarrow \mu(\alpha b_n, \alpha x_n) > \frac{1}{2}$ ve $\mu(\alpha x_n, \alpha a_n) > \frac{1}{2}$ olur. (b_n) azalan olduğundan (αb_n) artan, (a_n) artan olduğundan (αa_n) azalandır. Önerme 3.6 dan

$$\bigvee_{n \in \mathbb{N}} (\alpha b_n) = \alpha(\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} b_n) = \alpha x \text{ ve } \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} (\alpha a_n) = \alpha(\bigvee_{n \in \mathbb{N}} a_n) = \alpha x$$

dır. O halde $\alpha x_n \xrightarrow{o_F} \alpha x$ olur. $\alpha = 0$ durumu ise aşıkardır.

3.6. Tanım (fuzzy sıralı kümede yönlendirilmiş küme)

D, X fuzzy sıralı kümesinin alt kümesi olmak üzere D nin her F sonlu alt kümesi için $D \cap U(F) \neq \emptyset$ ve $D \cap L(F) \neq \emptyset$ oluyorsa D ye *yönlendirilmiş küme* denir [9].

3.7. Tanım (yönlendirilmiş fuzzy sıralı vektör uzayı, fuzzy Arşimedyan uzay)

(a) Yönlendirilmiş küme olan fuzzy sıralı vektör uzayına *yönlendirilmiş fuzzy sıralı vektör uzayı* denir [12].

(b) X yönlendirilmiş fuzzy sıralı vektör uzayındaki herhangi bir negatif olmayan $x \in X$ elemanı için $\{\alpha x : 0 < \alpha \in \mathbb{R}\}$ kümesi üstten sınırlı değilse, X e *fuzzy Arşimedyan uzay* denir [12].

3.1. Teorem

X yönlendirilmiş fuzzy sıralı vektör uzayının, fuzzy Arşimedyan uzay olması için

gerek ve yeter şart $\alpha_n \rightarrow \alpha$ iken $\mu(\alpha_n x, y) > \frac{1}{2}$ olacak biçimde $x, y \in X$ için $\mu(\alpha x, y) > \frac{1}{2}$ olmasıdır [12].

İspat

X fuzzy Arşimedyan uzay ve $\{\alpha_n\}$, $\alpha_n \rightarrow \alpha$ olacak biçimde reel sayıların artan bir dizisi olsun, yani $\alpha_n \uparrow \alpha$ ($\alpha = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n$) olsun. Her n için $\varepsilon_n = \alpha - \alpha_n$ alınırsa $0 \leq \varepsilon_n \downarrow$.

Gerçekten, $m \leq n \Rightarrow \alpha_m \leq \alpha_n \Rightarrow \alpha - \alpha_m \geq \alpha - \alpha_n \Rightarrow \varepsilon_m \geq \varepsilon_n$ dir. Ayrıca

$\inf \varepsilon_n = \inf (\alpha - \alpha_n) = \alpha - \sup \alpha_n = 0$ olur, yani $\varepsilon_n \downarrow 0$ dir. O halde her $0 \leq z \in X$ için

$\varepsilon_n z \downarrow 0$. Her $x, y \in X$ için $n \in \mathbb{N}$ iken $\mu(\alpha_n x, y) > \frac{1}{2}$ ise X yönlendirilmiş olduğu

için $\mu(x, z) > \frac{1}{2}$ olacak biçimde pozitif bir $z \in X$ in varlığı düşünüldüğünde

$\alpha x - y = (\alpha_n + \varepsilon_n)x - y = (\alpha_n x - y) + \varepsilon_n x$ ve dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$ için

$\mu(\alpha x - y, (\alpha_n x - y) + \varepsilon_n x) > \frac{1}{2}$ sağlanır. Yani $\mu(\alpha_n x, y) > \frac{1}{2}$ olmasından,

$\mu(\alpha_n x - y + \varepsilon_n x, \varepsilon_n x) > \frac{1}{2}$ olur. Üçgen eşitsizliğinden her $n \in \mathbb{N}$ için

$\mu(\alpha x - y, \varepsilon_n x) > \frac{1}{2}$ olur. Ayrıca $\mu(x, z) > \frac{1}{2}$ ve $\varepsilon_n \geq 0 \Rightarrow \mu(\varepsilon_n x, \varepsilon_n z) > \frac{1}{2}$ olduğundan

$n \in \mathbb{N}$ iken $\mu(\alpha x - y, \varepsilon_n z) > \frac{1}{2}$, yani $(\alpha x - y) \in L(\{\varepsilon_n z : n \in \mathbb{N}\})$ olur. Böylece

$(\alpha x - y) \in L(0) \Rightarrow \mu(\alpha x - y, 0) > \frac{1}{2} \Rightarrow \mu(\alpha_n x, y) > \frac{1}{2}$ elde edilir. $\alpha_n \downarrow \alpha$ olsun. Bu

durumda $-\alpha_n \downarrow -\alpha$ olur. $\alpha_n x = (-\alpha_n)(-x)$ eşitliği ele alındığında yukarıdaki ispattan

$\mu((- \alpha)(-x), y) > \frac{1}{2} \Rightarrow \mu(\alpha_n x, y) > \frac{1}{2}$ bulunur. Son olarak $\{\alpha_n\}$ monoton değilse $\alpha_{k_n} \rightarrow \alpha$ olacak biçimde $\{\alpha_n\}$ nin monoton bir $\{\alpha_{k_n}\}$ alt dizisi vardır ve bu alt dizisi üzerinde yapılan ispatla $\mu(\alpha_n x, y) > \frac{1}{2}$ bulunur.

Tersine her $0 < \alpha \in IR$ için $\mu(\alpha_n x, y) > \frac{1}{2}$ ise $\mu\left(x, \frac{1}{\alpha} y\right) > \frac{1}{2} \Rightarrow \mu\left(\frac{1}{\alpha}(-y), -x\right) > \frac{1}{2}$ olduğundan her $n \in IN$ için $\mu\left(\frac{1}{\alpha}(-y), -x\right) > \frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ olduğundan $\mu(0(-y), -x) > \frac{1}{2} \Rightarrow \mu(x, 0) > \frac{1}{2}$ elde edilir, yani x negatif olur. O halde $x \in X$ için $\{\alpha x : 0 < \alpha \in IR\}$ üstten sınırlı ise, x negatif olur ki bu x in fuzzy Arşimedyen uzay olması demektir.

3.3. Fuzzy Riesz Uzayları

3.8. Tanım (fuzzy pozitif, fuzzy negatif elemanlar)

X fuzzy sıralı vektör uzayındaki bir x elemanı için $\mu(0, x) > \frac{1}{2}$ oluyorsa x e *fuzzy pozitif*, $\mu(x, 0) > \frac{1}{2}$ oluyorsa x e *fuzzy negatif* denir. X in tüm fuzzy pozitif elemanlarının kümesi X_+ ile fuzzy negatif elemanlarının kümesi X_- gösterilir [9].

3.9. Tanım (fuzzy Riesz uzayı)

X fuzzy sıralı vektör uzayının sonlu her altkümesinin supremumu ve infimumu varsa (yani X e aitse), X e *fuzzy Riesz uzayı* denir [9].

Örnek 7

$X = IR^2$ olsun. $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ olmak üzere

$$\mu: X \times X \rightarrow [0,1]; \mu(x,y) = \begin{cases} 1 & , \quad x = y \\ 3/4 & , \quad x_1 \leq y_1, x_2 \leq y_2 \text{ ve } x \neq y \\ 2/3 & , \quad x_1 < y_1 \text{ ve } x_2 > y_2 \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dönüşümünü tanımlayalım. Pozitif elemanların kümesi,

$$P = \{(x,y) \in IR^2 : x \geq 0 \text{ ve } y \geq 0\} \cup \{(x,y) \in IR^2 : x > 0 \text{ ve } y < 0\}$$

ve negatif elemanların kümesi,

$$Q = \{(x,y) \in IR^2 : x \leq 0 \text{ ve } y \leq 0\} \cup \{(x,y) \in IR^2 : x < 0 \text{ ve } y > 0\}$$

dir. μ bağıntısı yansımali ve ters simetriktir. Geçişme özelliğinin sağlandığını görelim. $x, z \in X$ olsun. Dört durum söz konusudur:

(i) $\mu(x,z) = 1$ iken $x \neq z$ dir.

$$\mu(x,z) \geq \bigvee_y [\mu(x,y) \wedge \mu(y,z)] \quad (5)$$

olur.

(ii) $\mu(x,z) = \frac{3}{4}$ iken $x \neq z$ dir. Herhangi bir $y \in X$ için $y = x$ veya $y = z$ ise

$$\mu(x,z) \geq \mu(x,y) \wedge \mu(y,z) \quad (6)$$

sağlanır. $y \neq x$ ve $y \neq z$ ise, $\mu(x, y) \leq \frac{3}{4}$ ve $\mu(y, z) \leq \frac{3}{4}$ olur. Bu durumda (6) sağlanır. O halde (5) bu durumda da sağlanır.

(iii) $\mu(x, z) = \frac{2}{3}$ iken $x_1 < z_1$ ve $x_2 > z_2$ dir. $y = x$ veya $y = z$ ise (6) sağlanır.

$\mu(x, y) = \frac{3}{4}$ olduğundan $x_1 \leq y_1$ ve $x_2 \leq y_2$ dir. Böylece $y_2 \geq z_2$ olur. O halde $\mu(y, z) \leq \frac{2}{3}$ ve tekrar (6) sağlanır. $\mu(x, y) < \frac{2}{3}$ ise (6) sağlanır. Bu durumda (5) sağlanır.

(iv) $\mu(x, z) = 0$ iken $x_1 \geq z_1$ dir. $x_1 = z_1$ ise, $x_2 > z_2$ olur. Herhangi bir $y \in X$ için, $y = x$ veya $y = z$ olduğundan (6) bağıntısının doğruluğu açıktır. $y \neq x$ ve $y \neq z$ olsun. $\mu(x, y) = \frac{3}{4}$ ise $x_1 \leq y_1$ ve $x_2 \leq y_2$ dir. Dolayısı ile $y_1 \geq z_1$ ve $y_2 > z_2$ olur.

Böylece $\mu(y, z) = 0$ ve (6) sağlanır. $\mu(x, z) = \frac{2}{3}$ ise $x_1 < y_1$ veya $x_2 > y_2$ dir. Bu durumda $y_1 > z_1$ ve $\mu(y, z) = 0$ olur. O halde $x_1 = z_1$ iken herhangi bir $y \in X$ için (6) sağlanır. $x_1 > z_1$ ve $y \in X$ olsun. $\mu(x, y) = 1$ ise (6) sağlanır. $\mu(x, y) = \frac{3}{4}$ ise $x_1 \leq y_1$ ve $x_2 \leq y_2$ olur. Bu $y_1 > z_1$ olduğunu gösterir. O halde $\mu(y, z) = 0$ dır ve (6) sağlanır. $\mu(x, y) = \frac{2}{3}$ ise $x_1 < y_1$ ve $x_2 > y_2$ dir. Bu durumda $y_1 > z_1$ olur ve $\mu(y, z) = 0$ sağlanır. Böylece herhangi bir $y \in X$ için (6) sağlanır. Sonuç olarak (5) bu durumda da sağlanır. Böylece μ bağıntısı geçişkendir.

$X = IR^2$ koordinat cebir işlemleriyle reel vektör uzaydır. μ fuzzy sıra bağıntısıyla IR^2 fuzzy sıralı vektör uzayıdır. Gerçekten

i) $x, y \in IR^2$ için $\mu(x, y) = \frac{1}{2}$ olsun. $x = y$ ise her $z \in X$ için $x + z = y + z$ ve buradan

$$\mu(x, y) \leq \mu(x+z, y+z) \quad (7)$$

sağlanır. $\mu(x, y) = \frac{3}{4}$ ise $x_1 \leq y_1$, $x_2 \leq y_2$ ve $x \neq y$ olur. Herhangi bir z için

$$x_1 + z_1 \leq y_1 + z_1 \text{ ve } x_2 + z_2 \leq y_2 + z_2 \text{ ve } x + z \neq y + z \text{ olduğundan } \mu(x+z, y+z) = \frac{3}{4}$$

ve böylece (7) sağlanır. $\mu(x, y) = \frac{2}{3}$ ise $x_1 < y_1$ ve $x_2 > y_2$ dir. Herhangi bir $z \in X$

$$\text{için } x_1 + z_1 < y_1 + z_1 \text{ ve } x_2 + z_2 > y_2 + z_2 \text{ olduğundan } \mu(x+z, y+z) = \frac{2}{3} \text{ ve böylece}$$

(7) sağlanır.

ii) $x, y \in X$ için $\mu(x, y) > \frac{1}{2}$ olsun. $\mu(x, y) = 1$ ise $x = y$ ve her $0 \leq \alpha \in IR$ için

$$\alpha x = \alpha y \text{ olduğundan } \mu(\alpha x, \alpha y) = 1 \text{ olur. Böylece her } 0 \leq \alpha \in IR \text{ için}$$

$$\mu(x, y) \leq \mu(\alpha x, \alpha y) \quad (8)$$

olur. $\mu(x, y) = \frac{3}{4}$ ise $x_1 \leq y_1$, $x_2 \leq y_2$ ve $x \neq y$ olur. Herhangi bir $0 < \alpha \in IR$ için

$$\alpha x_1 \leq \alpha y_1, \alpha x_2 \leq \alpha y_2, \alpha x \neq \alpha y \text{ olduğundan } \mu(\alpha x, \alpha y) = \frac{3}{4} \text{ olur. } \alpha = 0 \text{ ise}$$

$$\alpha x = 0 = \alpha y \Rightarrow \mu(\alpha x, \alpha y) = 1 \text{ dir. O halde (8) sağlanır. } \mu(x, y) = \frac{2}{3} \text{ ise } x_1 < y_1 \text{ ve}$$

$$x_2 > y_2 \text{ dir. Herhangi bir } 0 < \alpha \in IR \text{ için } \alpha x_1 < \alpha y_1 \text{ ve } \alpha x_2 > \alpha y_2 \text{ ve böylece}$$

$$\mu(\alpha x, \alpha y) = \frac{2}{3} \text{ olur. } \alpha = 0 \text{ ise, } \alpha x = 0 = \alpha y \text{ ve böylece } \mu(\alpha x, \alpha y) = 1 \text{ olur ve (8)}$$

sağlanır. Böylece μ fuzzy sırası ile $X = IR^2$ fuzzy sıralı vektör uzayıdır.

Geriye IR^2 nin bir sonlu alt kümesinin supremum ve infimuma sahip olduğunu göstermek kalır. $A = \{x_i : x_i = (a_i, b_i) \in IR^2, i = 1, \dots, n\}$ sonlu alt kümesini alalım ve

$$a = \sup \{a_i : i = 1, \dots, n\} \text{ olsun. } (a, b_{i_1}), \dots, (a, b_{i_m}) \in A \text{ ise, } b = \inf \{b_{i_1}, \dots, b_{i_m}\} \text{ olsun.}$$

$(a, b) \in A$ dir ve $(a, b) = \bigvee_{i=1}^n x_i = \sup A$ sağlanır. Benzer olarak, $a' = \inf \{a_i : i = 1, \dots, n\}$ ve $(a', b_{k_1}), \dots, (a', b_{k_l}) \in A$ ise, $b' = \sup \{b_{k_1}, \dots, b_{k_l}\}$ olsun. $(a', b') \in A$ ve $(a', b') = \bigwedge_{i=1}^n x_i = \inf A$ sağlanır. Sonuç olarak, IR^2 μ fuzzy sırası ile fuzzy Riesz uzayıdır [11].

3.2. Teorem

Bir X fuzzy Riesz uzayında $\mu\left(|x+y|, |x|+|y| > \frac{1}{2}\right)$ sağlanır [9].

İspat

$$\begin{aligned} \mu\left((x+y)_+, x_+ + y_+\right) &> \frac{1}{2} \text{ ve } \mu\left((x+y)_-, x_- + y_-\right) > \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \mu\left((x+y)_+ + (x+y)_-, x_+ + x_- + y_+ + y_-\right) &> \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \mu\left(|x+y|, |x|+|y|\right) &> \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3.1. Lemma

Bir X fuzzy Riesz uzayında herhangi üç pozitif eleman x, x_1, x_2 için

$$\mu\left(x \wedge (x_1 + x_2), x \wedge x_1 + x \wedge x_2\right) > \frac{1}{2} \text{ sağlanır [9].}$$

İspat

$y = x \wedge (x_1 + x_2)$ olsun. Bu durumda $\mu(y, x_1 + x_2) > \frac{1}{2}$ ve y pozitiftir. O halde

$y = y_1 + y_2$ olacak biçimde iki pozitif y_1 ve y_2 elemanı için $\mu(y_1, x_1) > \frac{1}{2}$, $\mu(y_2, x_2) > \frac{1}{2}$ sağlanır. $\mu(y, x) > \frac{1}{2}$ ve $y = y_1 + y_2$ olduğundan $\mu(y_1, x) > \frac{1}{2}$ ve $\mu(y_2, x) > \frac{1}{2}$ olur. Böylece $i = 1, 2$ için $y_i \in L(\{x, x_i\}) \Rightarrow y_i \in L(x \wedge x_i) \Rightarrow \mu(y_i, x \wedge x_i) > \frac{1}{2} \Rightarrow \mu(y_i, x \wedge x_i) > \frac{1}{2}$ olduğundan $\mu(y_1 + y_2, x \wedge x_1 + x \wedge x_2) > \frac{1}{2}$ elde edilir.

3.10. Tanım (fuzzy pozitif operatör)

X fuzzy sıralı vektör uzayını Y fuzzy sıralı vektör uzayına dönüştüren bir U operatörü, η Y üzerinde fuzzy sıra olmak üzere,

$$\mu(x, 0) > \frac{1}{2} \text{ iken } \eta(0, U(x)) \geq \mu(0, x)$$

şartını sağlıyorsa U ya *fuzzy pozitif operatör* denir [12]

• $U : X \rightarrow Y$ toplamsal fuzzy pozitif operatör ise $\mu(x_1, x_2) > \frac{1}{2}$ iken $\eta(U(x_1), U(x_2)) \geq \mu(x_1, x_2)$ sağlanır.

• X ile Y iki fuzzy Riesz uzayı ve $U : X \rightarrow Y$ toplamsal fuzzy pozitif operatörse Teorem 3.2 den $\eta(|U(x_+) - U(x_-)|, |U(x_+)| + |U(x_-)|) > \frac{1}{2}$ sağlanır. Böylece $x \in X$ iken $\eta(|U(x)|, U(|x|)) > \frac{1}{2}$ olur.

3.2. Lemma

X bir fuzzy Riesz uzayı ve Y bir fuzzy Arşimedyan uzay olsun $U : X \rightarrow Y$ toplamsal

fuzzy pozitif operatör ise U operatörü homojendir [12].

İspat

α her hangi bir reel sayı olsun. Bu durumda $a_n \uparrow \alpha$ ve $b_n \downarrow \alpha$ olacak biçimde $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ve $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ rasyonel sayı dizileri mevcuttur. Herhangi bir sıfırdan farklı pozitif $x \in X$ için $\mu(a_n x, \alpha x) > \frac{1}{2}$ ve $\mu(\alpha x, b_n x) > \frac{1}{2}$ olsun. Bu durumda $\eta(U(a_n x), U(\alpha x)) > \frac{1}{2}$ ve $\eta(U(\alpha x), U(b_n x)) > \frac{1}{2}$ sağlanır. Böylece $\mu((a_n U(x), U(\alpha x)) > \frac{1}{2}$ ve $\mu(U(\alpha x), b_n U(x)) > \frac{1}{2}$ olur. Teorem 3.1 den $\eta(\alpha U(x), U(\alpha x)) > \frac{1}{2}$ ve $\eta(U(\alpha x), \alpha U(x)) > \frac{1}{2}$ ve dolayısıyla $U(\alpha x) = \alpha U(x)$ sağlanır.

3.3. Lemma

X bir fuzzy Riesz uzayı ve Y bir vektör uzay olsun. $x, y \in X_+$ iken $U(x+y) = U(x) + U(y)$ olacak biçimdeki $U : X_+ \rightarrow Y$ operatörünün bir tek $V : X \rightarrow Y$ genişlemesi vardır. Üstelik her $x \in X$ için

$$V(x) = U(x_+) - U(x_-) \quad (9)$$

sağlanır [12].

İspat

(9) eşitliği X fuzzy Riesz uzayı üzerinde bir toplamsal operatör tanımlar. Gerçekten, $x \in X$ alınırsa X in

$$(x+y)_+ + a = x_+ + y_+ \text{ ve } (x+y)_- + a = x_- + y_-$$

şartlarını sağlayan $a \geq 0$ elemanı vardır. Böylece

$$U(x+y)_+ + U(a) = U(x_+) + U(y_+) \text{ ve } U(x+y)_- + U(a) = U(x_-) + U(y_-) \text{ olur.}$$

Dolayısıyla $V(x+y) = V(x) + V(y)$ sağlanır. Aynı zamanda V, U operatörünün tek genişlemesidir.

f ve g X fuzzy Riesz uzayı üzerinde iki lineer fonksiyonel olsun. X in cebirsel duali üzerinde sıralama bağıntısı

$$f \leq g \Leftrightarrow g - f \text{ fuzzy pozitif}$$

biçiminde tanımlanır.

3.3. Teorem

f X fuzzy Riesz uzayı üzerinde tanımlanan fuzzy pozitif lineer fonksiyonel, X^* X in cebirsel duali olmak üzere, herhangi bir $x \in X$ için $f(x_+) = \sup \{g(x) : g \in X^*, 0 \leq g \leq f\}$ olur [12].

İspat

Herhangi bir $a \in X$ için $\sup \{g(a) : g \in X^*, 0 \leq g \leq f\} \leq f(a) \leq f(a_+)$ sağlanır.

X_+ üzerinde $U(x) = \sup \{f(x \wedge \alpha a_+) : 0 \leq \alpha \in IR\}$ biçiminde tanımlanan U fonksiyonu toplamsaldır. Gerçekten herhangi bir $\alpha \geq 0$ için. Lemma 3.1 den $\mu((x_1 + x_2) \wedge \alpha a_+, (x_1 \wedge \alpha a_+) + (x_2 \wedge \alpha a_+)) > \frac{1}{2}$ sağlanır. Bu durumda η IR üzerinde

fuzzy sıralama bağıntısı iken $\eta(f((x_1 + x_2) \wedge \alpha a_+), f(x_1 \wedge \alpha a_+) + f(x_2 \wedge \alpha a_+)) > \frac{1}{2}$

ve dolayısıyla $\eta(U(x_1 + x_2), U(x_1) + U(x_2)) > \frac{1}{2}$ olur. Diğer yandan. Önerme 3.4 den $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ iken $\mu((x_1 \wedge \alpha_1 a_+) + (x_2 \wedge \alpha_2 a_+), (x_1 + x_2) \wedge (\alpha_1 + \alpha_2) a_+) > \frac{1}{2}$ sağlanır. Bu durumda $\eta(f(x_1 \wedge \alpha_1 a_+) + f(x_2 \wedge \alpha_2 a_+), f((x_1 + x_2) \wedge (\alpha_1 + \alpha_2) a_+)) > \frac{1}{2}$ ve dolayısıyla $\eta((U(x_1) + U(x_2)), U(x_1 + x_2)) > \frac{1}{2}$ olur. Böylece $U(x_1 + x_2) = U(x_1) + U(x_2)$ elde edilir. Lemma 3.3 den U nun X üzerinde tanımlı bir V toplamsal operatörüne tek genişlemesi vardır. $x \in X_+$ iken $V(x) = U(x) \leq f(x)$ olduğundan $V \leq f$ olur. Bu durumda $0 \leq V \leq f$ ve $V \in X^*$ elde edilir. $V(a_-) = 0$ olmasından dolayı

$$V(a) = U(a_+) = f(a_+) < \sup\{g(x) : g \in X^*, 0 \leq g \leq f\}$$

olur. O halde $f(a_+) < \sup\{g(x) : g \in X^*, 0 \leq g \leq f\}$ sağlanır.

3.11. Tanım (yeten küme)

S X fuzzy Riesz uzayı üzerinde fuzzy pozitif lineer fonksiyonellerin bir kümesi olmak üzere, sıfırdan farklı herhangi bir $x \in X$ için $f(x) \neq 0$ olacak biçimde $f \in S$ varsa S ye *yeten küme* denir [12].

3.4. Teorem

X fuzzy Riesz uzayı, üzerindeki fuzzy pozitif lineer fonksiyonellerin *yeten kümesi* ile verilsin ve $a \in X$ olsun. Her fuzzy pozitif lineer f fonksiyoneli için $\eta(0, f(a)) > \frac{1}{2}$

ise $\mu(0, a) > \frac{1}{2}$ sağlanır.

İspat

f ve g X üzerinde fuzzy lineer fonksiyoneller ve $0 \leq g \leq f$ iken $\eta(g(a), f(a)) > \frac{1}{2}$ olsun. Teorem 3.3 den her fuzzy pozitif lineer f fonksiyoneli için $f(a_+) = f(a)$ olur. X üzerinde fuzzy pozitif lineer fonksiyonellerin bir yeten kümesi var olduğundan $a_+ = a$ sağlanır. Böylece $\mu(0, a) > \frac{1}{2}$ sağlanır.

3.12. Tanım (başlıca (majorizing) alt vektör uzay)

Z , X fuzzy Riesz uzayının alt vektör uzayı olmak üzere, herhangi bir $x \in X$ için $\mu(x_1, x) > \frac{1}{2}$ ve $\mu(x, x_2) > \frac{1}{2}$ olacak biçimde $x_1, x_2 \in Z$ varsa Z ye *başlıca (majorizing) alt vektör uzay* denir [12].

3.5. Teorem

Z , X fuzzy Riesz uzayının başlıca alt vektör uzayı, Y tam fuzzy Riesz uzayı olsun. $U : Z \rightarrow Y$ fuzzy pozitif lineer operatör ise $x \in X$ iken $V(x) = U(x)$ olacak biçimde $V : X \rightarrow Y$ fuzzy pozitif lineer operatörü vardır [12].

İspat

$v \in Z^c$ ve $x_1, x_2 \in Z$ için $\mu(x_1, v) > \frac{1}{2}$ ve $\mu(v, x_2) > \frac{1}{2}$ olsun. U fuzzy pozitif lineer operatör olduğundan $\eta(U(x_1), U(x_2)) > \frac{1}{2}$ olur.

$$a = \sup \left\{ U(x) : x \in Z \text{ ve } \mu(x, v) > \frac{1}{2} \right\}, \quad b = \sup \left\{ U(x) : x \in Z \text{ ve } \mu(v, u) > \frac{1}{2} \right\},$$

$y_1 \in [a, b]$ ve $x_1 = \sup(Z \cup \{v\})$ alalım. $x \in Z$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ iken

$$U_1 : X_1 \rightarrow Y ; U_1(x + \alpha v) = U(x) + \alpha y_1$$

biçiminde tanımlanan U_1 operatörü fuzzy pozitif lineer operatördür. Gerçekten $\alpha \neq 0$

için $\mu(0, x + \alpha v) > \frac{1}{2}$ alındığında, $\alpha > 0$ iken

$$\mu\left(-\frac{1}{\alpha}x, v\right) > \frac{1}{2} \Rightarrow \eta\left(-\frac{1}{\alpha}U(x), y_1\right) > \frac{1}{2} \Rightarrow \eta(0, U_1(x + \alpha v)) > \frac{1}{2}$$

olur. $\alpha < 0$ durumu da benzer olarak ispatlanır.

B , U nun tüm fuzzy pozitif lineer genişlemelerinin kümesi olsun. B üzerinde sıralama

$$V_1 \leq V_2 \Leftrightarrow V_2, V_1 \text{ in genişlemesidir}$$

biçiminde alınırsa, Zorn Lemmasından B nin X in tamamı üzerinde tanımlı bir V büyük (maksimal) elemanı vardır.

3.6. Teorem (Fuzzy Hahn-Banach Teoremi)

X (reel) vektör uzayı, Y tam fuzzy Arşimedian Riesz uzayı ve $p : X \rightarrow Y$ altlineer

operatör olsun. Z , X in alt uzayı ve $U : X \rightarrow Y$, her $x \in Z$ için $\eta(U(x), p(x)) > \frac{1}{2}$

olacak biçimde bir lineer operatör ise, $x \in Z$ iken $V(x) = U(x)$ ve $x \in X$ iken

$\eta(V(x), p(x)) > \frac{1}{2}$ olacak biçimde $V : X \rightarrow Y$ lineer operatörü vardır [12].

İspat

$v \in Z^c$ ve $X_1 = \sup(Z \cup \{v\})$ olsun. U nun bir genişlemesi $U_1 : X_1 \rightarrow Y$ ise, $z \in Z$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ iken $y_1 = U_1(v)$ alındığında,

$$U_1(z + \lambda v) = U(z) + \lambda y_1 \Rightarrow \eta(U(z) + \lambda y_1, p(z + \lambda v)) \geq \frac{1}{2} \quad (10)$$

Gerçekten, (10) ifadesi $z \in Z$ iken $\lambda > 0$ için

$$\eta(U(z) + \lambda y_1, p(z + v)) > \frac{1}{2}$$

ifadesine; $\lambda < 0$ için

$$\eta(U(z) - y_1, p(z - v)) > \frac{1}{2}$$

ifadesine denktir. O halde $x, z \in Z$ iken

$$\eta(U(z) - p(z - v), y_1) > \frac{1}{2} \text{ ve } \eta(p(z + v) - U(x), y_1) > \frac{1}{2} \quad (11)$$

olacak biçimde bir y_1 seçilebilir. Çünkü her $x, z \in Z$ için

$$\eta(U(z) - p(z - v), p(u + z) - U(u)) \geq \eta(U(z + v), p(z + u)) > \frac{1}{2}$$

olduğundan, Y nin tam olması

$$s = \sup\{U(z) - p(z - x) : z \in Z\} \text{ ve } t = \inf\{p(u + x) - U(u) : u \in Z\}$$

eşitlikleriyle verilen s ve t nin Y de mevcut olmasını gerektirir ve $\eta(s, t) > \frac{1}{2}$ olur.

$\eta(s, y) > \frac{1}{2}$ ve $\eta(y, t) > \frac{1}{2}$ şartlarını sağlayan bir $y \in Y$, (11)'i ve böylece (10)'u sağlar. Bundan sonraki kısımda teoremin ispatı Zorn Lemmasının bilinen uygulamasıdır.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Her ne kadar Zadeh fuzzy sıralamayı 1971 yılında tanımladıysa da, fuzzy sıralama ve bunun yardımıyla oluşturulan uzaylar son yirmi yılda çalışılmaya başlanmıştır. Genel olarak matematiğin hemen tüm alanlarında ilgili teoriler cebirsel ve topolojik kavramlarla oluşturulur. Ancak çoğunlukla sıralamanın rolü ya ele alınmaz, ya da kısıtlı bir şekilde düşünülür. Sıralı vektör uzaylarına örgü (lattice) yapısı eklenmesiyle oluşturulan Riesz uzaylarının teorisi, cebirsel ve topolojik kavramları daha genel bakış açısıyla tanımlayıp geliştirmeye imkân sağlar. Dolayısıyla tezimizde fuzzy sıralama için verilen kavramlar ve elde edilen sonuçlardan başka ilgili teoriyi geliştirecek yeni argümanlar bulmak pekâlâ mümkündür. Fuzzy kavramının matematikte disiplinler bir anlayışla ortaya konulması sonrasında, uygulamalı bilimlerde ve çeşitli mühendisliklerde ele alınmasıyla teknolojik pek çok gelişmeyi sağlaması ilgilendiğimiz konu üzerinde çalışmayı cazip kılmaktadır. Biz de bundan sonraki çalışmalarımızda bu argümanlar üzerine yoğunlaşmak niyetindeyiz.

KAYNAKLAR

1. Zadeh, L.A., “Fuzzy sets”, *Information and Control*, 8:338-353 (1965).
2. Zadeh, L.A., “Similarity relations and fuzzy orderings”, *Inform. Sciences*, 3:177-200 (1971).
3. Aliprantis, C.D.; Burkinshaw, O., “Positive Operators”, *Academic Press*, London, 1-3, 45-46, 181-182 (1985).
4. Zaanen, A.C., ‘Riesz Spaces II’, North-Holland Mathematical Library, 30. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 651-686 (1983).
5. Chang, C.L., “Fuzzy topological spaces”, *J. Math. Anal. Appl.*, 24:182-190 (1968).
6. Nanda, S., “On fuzzy topological spaces”, *Fuzzy Sets and Systems*, 19:193-197 (1986).
7. Alaca, C., “Fuzzy Uzaylarda Süreklilik”, Yüksek Lisans Tezi, *Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara, 6-20 (2001)
8. Pu, P.M., Liu, Y.M., “Fuzzy topology. I. Neighborhood structure of a fuzzy point and Moore-Smith convergence”, *J. Math. Anal. Appl.*, 76,2:571-599 (1980).
9. Beg, I., Islam, M.U., “Fuzzy Riesz spaces”, *J. Fuzzy Math.* 2,1:211-229 (1994).
10. Beg, I., Islam, M.U., “Fuzzy ordered linear spaces”, *J. Fuzzy Math.*, 3,3:659-670 (1995).
11. Beg, I., Islam, M.U., “Fuzzy Archimedean spaces”, *J. Fuzzy Math.*, 5,2:413-423 (1997).
12. Beg, I., “On fuzzy order relations”, *J. Nonlinear Sci. Appl.*, 5:357–378 (2012).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : TAŞ, Ercan
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 15.02.1981 Gaziantep
Medeni hali : Evli
Telefon : 0 (505) 2254425
e-mail : ercantas27@hotmail.com.

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Afyon Kocatepe Üniversitesi / Uşak Matematik Bölümü	2005
Lise	Gaziantep 19 Mayıs Lisesi	1998

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2005-	Ankara Özel Eğitim Kurumu	Öğretmenlik

Yabancı Dil

İngilizce

Hobileri

Kitap Okumak, Yüzmek, Gezi, Futbol