

FUZZY TOPOLOJİK VEKTÖR UZAYLARI

Mehmet Akif ERCAN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**OCAK 2007
ANKARA**

Mehmet Akif ERCAN tarafından hazırlanan FUZZY TOPOLOJİK VEKTÖR UZAYLARI adlı bu tezin YÜKSEK LİSANS tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Cemil YILDIZ
Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile, MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Haydar EŞ

Üye : Prof. Dr. Cemil YILDIZ

Üye : Doç. Dr. Duran TÜRKOĞLU

Üye : Yrd. Doç. Dr. Erdal GÜNER

Üye : Yrd. Doç. Dr. Çetin VURAL

Tarih : 29.01.2007

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Mehmet Akif ERCAN

FUZZY TOPOLOJİK VEKTÖR UZAYLARI**(Yüksek Lisans Tezi)****Mehmet Akif ERCAN****GAZİ ÜNİVERSİTESİ****FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ****Ocak 2007****ÖZET**

Bu tez çalışmasında fuzzy topolojik vektör uzayları teorisinden çeşitli matematikçiler tarafından yapılmış olan çalışmaların bir derlemesi yapılmıştır. Tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde girişe yer verilmiştir. İkinci bölümde daha sonraki bölüme yardımcı olması için fuzzy küme, fuzzy nokta, fuzzy topoloji, fuzzy açık ve kapalı küme, fuzzy komşuluk, fuzzy süreklilik, fuzzy çarpım ve fuzzy bölüm uzayı tanımları verilmiştir. Son bölümde ise fuzzy alt uzay, konveks, dengeli, emen fuzzy kümeler, fuzzy topolojik vektör uzayları ve fuzzy lineer topolojiler verilmiştir. Bunlarla ilgili bazı önermeler ispatlanmış ve aralarındaki ilişkiler incelenmiştir.

Bilim Kodu : 403.04.01
Anahtar Kelimeler : Fuzzy küme, Fuzzy topoloji, Fuzzy süreklilik, Konveks, Dengeli, Emen fuzzy kümeleri, Fuzzy komşuluk, Fuzzy topolojik vektör uzayı
Sayfa Adedi : 45
Tez Yöneticisi : Prof. Dr. Cemil YILDIZ

FUZZY TOPOLOGICAL VECTOR SPACES**(M. Sc. Thesis)****Mehmet Akif ERCAN****GAZİ UNIVERSITY****INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY****October 2007****ABSTRACT**

This thesis is a compilation of the theory of fuzzy topological vector spaces which some mathematicians have studied on. There are three parts in this thesis. The first part is the introduction. In the second part, the definitions of fuzzy set, fuzzy point, fuzzy topology, fuzzy open and closed set, fuzzy neighborhoods, fuzzy continuity, fuzzy quotient and product space have been given to help to understand the next parts. Fuzzy subspace; convex, balanced, absorbing fuzzy sets, fuzzy topological vector spaces and fuzzy linear topologies have taken part in the last part. Some propositions related to these subject have been proved and the relationships between them have been studied.

Science Code : 403.04.01**Key Words : Fuzzy set, Fuzzy topology, Fuzzy continuity, Convex, Balanced, Absorbing fuzzy sets, Fuzzy neighborhoods, Fuzzy topological vector spaces****Page Number : 45****Adviser : Prof. Dr. Cemil YILDIZ**

TEŞEKKÜR

Tez konumu verip beni fuzzy uzaylarına yönlendiren, çalışmalarım boyunca yardımlarını ve değerli zamanını hiç bir zaman esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Cemil YILDIZ'a, ayrıca manevi destekleri ile beni hiç bir zaman yalnız bırakmayan aileme, tercümelerimdeki yardımlarından dolayı Hatice ERCAN ve Emre ERCAN'a ve yardımları için Mustafa ÖZBEY'e teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. Fuzzy Küme ve Fuzzy Kümeler ile İlgili İşlemler	3
2.2. Fuzzy Topolojik Uzaylar ve Fuzzy Topolojik Uzaylarında Temel Kavramlar	9
2.3. Fuzzy Süreklilik	12
2.4. Fuzzy Çarpım ve Bölüm Uzayları	14
3. FUZZY VEKTÖR UZAYLARI VE FUZZY TOPOLOJİK VEKTÖR UZAYLARI	20
3.1. Fuzzy Kümelerinin Toplamı ve Skalerle Çarpımı	20
3.2. Fuzzy Alt Uzay	25
3.3. Konveks, Dengeli, Emen Fuzzy Kümeleri	27
3.4. Bölüm Uzayı	32
3.5. Fuzzy Topolojik Vektör Uzayları	33
3.6. Fuzzy Lineer Topolojiler	36
KAYNAKLAR	44
ÖZGEÇMİŞ	45

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler açıklamaları ile birlikte sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$\Rightarrow$	Gerektirir
$\Leftarrow$	Yeterlidir
$\Leftrightarrow$	Çift yönlü gerektirme
I^X	X den I ya tanımlanan fonksiyonların kümesi
μ_A	A fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu
τ	Fuzzy topolojisi
κ	Fuzzy kapalılar ailesi
$\mathring{A}$	A fuzzy kümesinin içi
$\overline{A}$	A fuzzy kümesinin kapanışı
A^c	A fuzzy kümesinin tümleyeni
$N(p)$	p fuzzy noktasının fuzzy komşuluklar ailesi
β	τ fuzzy topolojisi için taban
$E(p)$	p fuzzy noktasının fuzzy komşuluklar tabanı
$\mathfrak{f}$	τ fuzzy topolojisi için alt taban
β_p	p fuzzy noktasının yerel tabanı
$Co(A)$	A nın konveks zarfı
$\mathcal{F}$	x'in tüm komşulukları için taban

1. GİRİŞ

1879 yılında Cantor'un vermiş olduğu küme tanımının ardından matematikte incelenen her konuda kesinlik aranmıştır. Böylece olaylar karşısındaki düşünce sistemimiz iki değerli mantığa göre oluşmuştur. Klasik küme tanımına göre doğru-yanlış ikilemi vardır. Ancak günlük hayatta; tam tanımlanmamış soğuk, hafif soğuk, ılık, sıcak, çok sıcak gibi herkes tarafından değişen kavramlar vardır. Birine göre hava sıcak iken, başka birisine göre hava ılık olabilir.

Görüldüğü gibi iki değerli mantığa dayanan matematiksel kesinlik göstermeyen olaylar karşısında yetersiz kalmıştır. 1965 yılında Prof. Dr. Lütü Askerzade tarafından fuzzy (belirtisiz) küme kavramı tanımlanarak klasik küme kavramı genişletilmiştir. Fuzzy mantık sayısal değerleri sözsöz ifadelerden yola çıkarak bilgi tabanlı denetleyiciler arasında insan düşünce yapısına yakınlaşmayı sağlamıştır.

Günümüzde fuzzy mantık otomobillerin vites kutularından bulaşık makinelerine, elektronik devrelerin ve yapay zekanın karar verme algoritmalarında, istatistik, askeri balistikte ve daha bir çok alanda kullanılır olmuştur.

Tüm bunların doğal sonucu olarak, matematiğin bu fuzzy küme kavramına göre yeniden düzenlenmesi ortaya çıkmış ve bu yeni düzenleme ile birlikte pek çok makale yayınlanmıştır.

Çalışmamızın ikinci bölümünde Zadeh [1] in fuzzy küme tanımı, fuzzy küme ile ilgili temel kavramlar ve bu kavramların bazı özellikleri verilmiştir. Chang [2] ve Nanda [3] ın ortaya koyduğu fuzzy topolojik uzay tanımı ve bazı özellikleri gösterilmiş, fuzzy çarpım ve fuzzy bölüm uzayı tanımı verilmiştir.

Tezimizin üçüncü bölümünde Katsaras [4,5] makalelerini açarak, fuzzy kümelerin toplamı ve skalerle çarpımını tanımladık. Fuzzy alt uzay tanımı ve fuzzy alt uzayları arasındaki ilişkiler verildi. Konveks, dengeli ve emen fuzzy kümeleri tanımları, bu kümeler ile ilgili işlemler ve lineer fonksiyon altındaki görüntüleri incelendi. Katsaras [4] makalesinden yararlanarak fuzzy topolojik vektör uzayı tanımı ve fuzzy

topolojik vektör uzaylarına örnekler verildi. Son olarak fuzzy topolojik vektör uzayındaki fuzzy küme ve açık fuzzy kümeler ile ilgili bazı ilişkiler incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Fuzzy Küme ve Fuzzy Kümeler ile İlgili İşlemler

2.1.1. Tanım

X boştan farklı herhangi bir küme ve $I = [0,1]$ olmak üzere X den I ya tanımlanan bütün fonksiyonların kümesini I^X ile gösterelim. I^X in her bir elemanına X in fuzzy kümesi denir [1].

2.1.2. Tanım

$X \neq \emptyset$ ve $I = [0,1]$ olmak üzere $\mu_A: X \rightarrow I$ üyelik fonksiyonu ile karakterize edilen $A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X\} \subset X \times I$ kümesine X in bir A fuzzy alt kümesi denir. Bundan sonra zaman zaman μ_A yerine A , $\mu_A(x)$ yerine $A(x)$ alınacaktır [1].

2.1.3. Tanım

X boştan farklı herhangi bir küme olmak üzere X deki x_α fuzzy kümesinin $x_\alpha: X \rightarrow I$ üyelik fonksiyonu

$$x_\alpha(y) = \begin{cases} \alpha & , y = x \\ 0 & , y \neq x \end{cases}$$

şeklinde tanımlı ise x_α ya X de fuzzy noktası denir. Burada $x \in X$ noktasına x_α fuzzy noktasının desteği (dayanağı) ve $\alpha \in (0,1]$ sayısına x_α fuzzy noktasının değeri denir [6]. Bundan sonra x_α noktası yerine p fuzzy noktası alınacaktır.

2.1.4. Tanım

X ve $\emptyset$ klasik kümeleri birer fuzzy kümesi olup

$$\forall x \in X \text{ için } \mu_X(x) = 1 \Rightarrow X = \{(x, 1) : x \in X\}$$

$$\forall x \in X \text{ için } \mu_\emptyset(x) = 0 \Rightarrow \emptyset = \{(x, 0) : x \in X\}$$

şeklinde ifade edilir [2].

Kümeler teorisinde bilinen altküme “ $\subset$ ”, eşitlik “ $=$ ”, birleşim “ $\cup$ ” ve kesişim “ $\cap$ ” işlemleri fuzzy kümelerinde sırasıyla $<$, $=$, $\vee$, $\wedge$ işaretleri kullanılarak aşağıdaki gibi tanımlanır.

2.1.5. Tanım

X deki herhangi iki fuzzy küme A ve B olsun. A ve B nin üyelik fonksiyonları sırasıyla μ_A ve μ_B olmak üzere

$$(1) A \leq B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \quad (\forall x \in X)$$

$$(2) A = B \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x) \quad (\forall x \in X)$$

$$(3) A \vee B = C \Leftrightarrow \mu_C(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad (\forall x \in X)$$

$$(4) A \wedge B = D \Leftrightarrow \mu_D(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad (\forall x \in X)$$

$$(5) A^C \Leftrightarrow \mu_{A^C}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad (\forall x \in X)$$

şeklinde tanımlanır [2].

2.1.6. Tanım

X deki fuzzy kümelerin bir ailesi $\{A_i\}_{i \in I}$ olsun. Buna göre birleşim ve kesişim işlemlerinin genelleştirilmiş hali

$$(1) C = \bigvee_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \mu_C(x) = \sup_{i \in I} \{\mu_{A_i}(x)\}$$

$$(2) D = \bigwedge_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \mu_D(x) = \inf_{i \in I} \{\mu_{A_i}(x)\}$$

şeklinde tanımlanır [2].

2.1.7. Tanım

A ve B X deki herhangi iki fuzzy küme olmak üzere A ve B fuzzy kümelerinin farkı

$$A - B = A \wedge B^C \Leftrightarrow \mu_{A-B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_{B^C}(x)\} \quad (\forall x \in X)$$

fuzzy kümesi olarak tanımlanır [2].

2.1.1. Teorem

X de iki fuzzy küme A ve B olmak üzere

- (i) $A \vee B$ fuzzy kümesi A ve B yi ihtiva eden en küçük fuzzy kümesidir.
- (ii) $A \wedge B$ fuzzy kümesi A ve B kümelerini tarafından ihtiva edilen en büyük fuzzy kümesidir [7].

İspat

- (i) A ve B fuzzy kümelerinin üyelik fonksiyonları sırasıyla μ_A ve μ_B olsun.

$$A \vee B = C \Leftrightarrow \mu_C(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad (\forall x \in X)$$

olduğundan $A \leq C$ ve $B \leq C$ dir.

Kabul edelim ki A ve B yi ihtiva eden en küçük fuzzy küme D olsun. D fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu μ_D olmak üzere

$$A \leq D \Rightarrow \mu_A(x) \leq \mu_D(x)$$

$$B \leq D \Rightarrow \mu_B(x) \leq \mu_D(x)$$

dir. Buradan

$$\max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \leq \mu_D(x) \Rightarrow \mu_{A \vee B}(x) = \mu_C(x) \leq \mu_D(x)$$

$A \vee B = C$ fuzzy kümesi A ve B yi ihtiva eden bir küme olup kabulden dolayı

$$\mu_A(x) \leq \mu_D(x) \leq \mu_C(x) \text{ ve } \mu_B(x) \leq \mu_D(x) \leq \mu_C(x)$$

$$\Rightarrow \mu_D(x) \leq \mu_C(x)$$

O halde her $x \in X$ için

$$\Rightarrow \mu_C(x) = \mu_D(x) \Rightarrow C = D$$

Buna göre A ve B yi ihtiva eden en küçük fuzzy küme $A \vee B$ dir.

(ii) (i)-şikkına benzer şekilde ispat görülür.

2.1.1. Özellikler

X deki fuzzy kümeler A, B ve C olmak üzere

$$(i) A \vee \emptyset = A, A \wedge \emptyset = \emptyset, A \vee X = X, A \wedge X = A$$

$$(ii) A \vee B = B \vee A, A \wedge B = B \wedge A, A \vee A = A = A \wedge A$$

$$(iii) A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C, A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$$

$$(iv) A \leq B \Rightarrow A \vee B = B, A \leq B \Rightarrow A \wedge B = A$$

$$(v) A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C), A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C) \text{ dir [7].}$$

2.1.2. Özellikler

A ve B X de iki fuzzy küme olmak üzere

$$(i) A - \emptyset = A$$

$$(ii) \emptyset^C = X, X^C = \emptyset, (A^C)^C = A$$

$$(iii) A \leq B \Leftrightarrow B^C \leq A^C$$

$$(iv) (A \wedge B)^C = A^C \vee B^C, (A \vee B)^C = A^C \wedge B^C$$

dir [7].

2.1.2. Teorem

X kümesi üzerindeki herhangi bir fuzzy kümesi A olsun.

$$(i) A \wedge A^C = \emptyset \text{ olmak zorunda değildir.}$$

$$(ii) A \vee A^C = X \text{ olmak zorunda değildir [7].}$$

2.1.1. Örnek

$X = \{a, b\}$ olmak üzere X de bir fuzzy kümesi $A = \{(a, 0.2), (b, 0.9)\}$ olarak verilsin.

$$(i) A \wedge A^C = \emptyset \text{ midir?}$$

$$(ii) A \vee A^C = X \text{ midir?}$$

Çözüm

$$A^C = \{(a, 0.8), (b, 0.1)\}$$

$$(i) A \wedge A^C = \{(a, 0.2), (b, 0.1)\}$$

$$\Rightarrow A \wedge A^C \neq \emptyset$$

$$(ii) A \vee A^C = \{(a, 0.8), (b, 0.9)\}$$

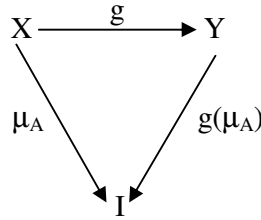
$$\Rightarrow A \vee A^C \neq X$$

2.1.8. Tanım

X, Y iki küme olmak üzere $g: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve μ_A , X de bir fuzzy kümesi olsun. $\forall y \in Y$ için,

$$\mu_{g(\mu_A)}(y) = \begin{cases} \sup_{x \in g^{-1}(y)} \{\mu_A(x)\} & , \quad g^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & , \quad g^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlanan $g(A) = g(\mu_A)$ fuzzy kümesine A'nın g altındaki görüntüsü denir [2]. Şema ile gösterecek olursak

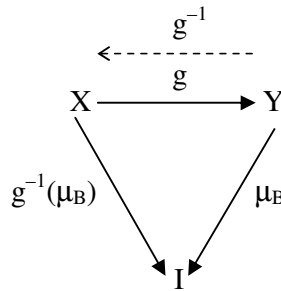


2.1.9. Tanım

X, Y iki küme olmak üzere $g: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve μ_B , Y de bir fuzzy kümesi olsun. $\forall x \in X$ için

$$\mu_{g^{-1}(\mu_B)}(x) = \mu_B(g(x))$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlanan $g^{-1}(B) = g^{-1}(\mu_B)$ ifadesine B'nin ters görüntüsü denir [2]. Şema ile gösterecek olursak



2.1.3. Teorem

$g: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon, A X de ve B Y de fuzzy kümeleri olmak üzere aşağıdaki özellikler vardır.

$$a) \forall B \in I^Y \Rightarrow g^{-1}(B^C) = [g^{-1}(B)]^C$$

$$b) \forall A \in I^X \Rightarrow g(A^C) \geq [g(A)]^C$$

$$c) \forall B_1, B_2 \in I^Y \text{ için } B_1 \leq B_2 \Rightarrow g^{-1}(B_1) \leq g^{-1}(B_2)$$

$$d) \forall A_1, A_2 \in I^X \text{ için } A_1 \leq A_2 \Rightarrow g(A_1) \leq g(A_2)$$

$$e) \forall B \in I^Y \Rightarrow g(g^{-1}(B)) \leq B$$

$$f) \forall A \in I^X \Rightarrow A \leq g^{-1}(g(A)) \quad [2]$$

2.2. Fuzzy Topolojik Uzaylar ve Fuzzy Topolojik Uzaylarında Temel Kavramlar

2.2.1. Tanım

X boştan farklı bir küme ve $\tau \leq I^X$ fuzzy kümelerinin bir ailesi olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan τ ailesine X üzerinde fuzzy topolojisi, (X, τ) ikilisine de fuzzy topolojik uzay denir [2].

$$(t_1) \emptyset, X \in \tau \text{ (veya } 0, 1 \in \tau)$$

$$(t_2) \forall A_1, A_2, \dots, A_n \in \tau \Rightarrow \bigwedge_{i=1}^n A_i \in \tau$$

$$(t_3) \forall i \in I \text{ için } A_i \in \tau \Rightarrow \bigvee_{i \in I} A_i \in \tau$$

τ topolojisinin her bir elemanına X de fuzzy açık küme, X uzayına göre tümleyeni fuzzy açık olan kümeye de fuzzy kapalı küme denir [2].

2.2.1. Teorem

(X, τ) fuzzy topolojik uzay olmak üzere

$$\kappa = \{K \in I^X: K \text{ fuzzy kapalı} \Leftrightarrow K^C \in \tau\}$$

şeklinde tanımlı κ (kapalılar) ailesi aşağıdaki şartları sağlar [2].

$$(k_1) \emptyset, X \in \kappa$$

$$(k_2) \forall K_1, K_2, \dots, K_n \in \kappa \Rightarrow \bigvee_{i \in I}^n K_i \in \kappa$$

$$(k_3) \forall i \in I \text{ için } K_i \in \kappa \Rightarrow \bigwedge_{i=1} K_i \in \kappa$$

2.2.2. Tanım

(X, τ) fuzzy topolojik uzay ve $A \in I^X$ olsun.

$$\mathring{A} = \bigvee \{B : B \leq A, B \in \tau\} = \sup \{B : B \leq A, B \in \tau\}$$

şeklinde tanımlanan fuzzy kümesine A fuzzy kümesinin içi denir. Tanımdan da anlaşıldığı gibi $\mathring{A}$ fuzzy açık bir kümedir. Üstelik $\mathring{A}$, A nın kapsadığı en geniş fuzzy açık kümedir [2].

2.2.2. Teorem

(X, τ) fuzzy topolojik uzay ve $A \in I^X$ olsun. A nın fuzzy açık küme olması için gerekli ve yeterli koşul $A = \mathring{A}$ olmasıdır [3].

2.2.3. Tanım

(X, τ) fuzzy topolojik uzay ve $A \in I^X$ olsun.

$$\overline{A} = \bigwedge \{B : A \leq B, B^C \in \tau\} = \inf \{B : A \leq B, B^C \in \tau\}$$

ile tanımlanan fuzzy kümesine A fuzzy kümesinin kapanışı denir. $\overline{A}$ kümesi tanımdan da anlaşıldığı gibi fuzzy kapalı bir kümedir. Ayrıca $\overline{A}$, A yı kapsayan en küçük fuzzy kapalı kümedir [2].

2.2.3. Teorem

(X, τ) fuzzy topolojik uzay ve $A \in I^X$ olsun. A nın fuzzy kapalı küme olması için gerekli ve yeterli koşul $A = \overline{A}$ olmasıdır [3].

2.2.4. Tanım

(X, τ) fuzzy topolojik uzay ve p, X in fuzzy noktası olsun. p fuzzy noktasını içeren bir A fuzzy açık kümesini kapsayan her N fuzzy kümesine p nin fuzzy komşuluğu denir ve p nin bütün fuzzy komşuluklarının ailesi $N(p)$ ile gösterilir. O zaman

$$N \in N(p) \Leftrightarrow \exists A \in \tau \text{ var } \exists p < A \leq N \quad [6].$$

2.2.5. Tanım

(X, τ) fuzzy topolojik uzay ve $A \in I^X$ olsun. A yı ihtiva eden bir B fuzzy açık kümesini kapsayan N kümesine A fuzzy kümesinin bir komşuluğu denir. Buna göre

$$N, A \text{ nın fuzzy komşuluğu} \Leftrightarrow \exists B \in \tau \text{ var } \exists A \leq B \leq N \quad [6].$$

2.2.6. Tanım

(X, τ) fuzzy topolojik uzay, $N(p)$ X kümesinde p fuzzy noktasının komşuluklar ailesi ve $E(p)$ de $N(p)$ nin bir alt ailesi olsun. $N(p)$ nin her N elemanına karşılık $E \leq N$ olacak biçimde $E(p)$ nin bir E elemanı varsa $E(p)$ ye p nin fuzzy komşuluklar tabanı (fuzzy yerel tabanı) denir [6].

2.2.4. Teorem

(X, τ) fuzzy topolojik uzay, $p \in I^X$ ve $N(p)$ de p nin fuzzy komşuluklar ailesi olsun. Aşağıdaki ifadeler vardır:

$$N_1) \text{ Her } N \in N(p) \Rightarrow p < N$$

$$N_2) \forall N_1, N_2 \in N(p) \Rightarrow N_1 \wedge N_2 \in N(p)$$

$N_3)$ Herhangi bir $N \in N(p)$ ve $N \leq B \Rightarrow B \in N(p)$

$N_4)$ Her $N \in N(p)$ için $A \leq N$ olacak şekilde öyle bir $A \in N(p)$ vardır ki $q < A$ şartını sağlayan her q fuzzy noktası için $N \in N(q)$ [6].

2.2.7. Tanım

(X, τ) fuzzy topolojik uzay ve $\beta \leq \tau$ olsun. Her $A \in \tau$ için $A = \bigvee_{i \in I} B_i$ olacak şekilde $\{B_i\}_{i \in I} \leq \beta$ alt ailesi varsa, β ya τ için bir taban denir. Yani;

β, τ için taban $\Leftrightarrow \forall A \in \tau$ için $\exists \beta' \leq \beta$ var $\ni A = \bigvee_{B \in \beta'} B$ [8].

2.2.8. Tanım

(X, τ) fuzzy topolojik uzay ve $\mathfrak{f}_l \leq \tau$ olsun. $\mathfrak{f}_l$ nın elemanlarının her sonlu kesişimlerinin oluşturduğu kümeler sınıfı τ için bir taban oluşturuyor ise $\mathfrak{f}_l$ ailesine τ için bir alt taban denir. Yani;

$\mathfrak{f}_l, \tau$ için alt taban $\Leftrightarrow \{ \bigwedge_{S \in \theta} S : \theta \leq \mathfrak{f}_l \text{ ve } \theta \text{ sonlu} \} \tau$ için taban [8].

2.2.9. Tanım

(X, τ) fuzzy topolojik uzay ve β, τ için bir taban olsun. X in bir p fuzzy noktası için $\beta_p = \{B : p < B, B \in \beta\}$ ailesini göz önüne alalım. $p < A$ olmak üzere, her $A \in \tau$ için $p < B \leq A$ olacak şekilde en az bir $B \in \beta_p$ varsa, β_p ailesine p fuzzy noktasının τ topolojisine göre yerel tabanı (lokal tabanı) denir [8].

2.3. Fuzzy Süreklilik

2.3.1. Tanım

$(X, \tau), (Y, \tau')$ fuzzy topolojik uzaylar ve $g: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Y deki her fuzzy açık kümenin g altındaki ters görüntüsü X de fuzzy açık ise, g fonksiyonu fuzzy süreklidir denir. Yani,

g fuzzy sürekli (F-sürekli) $\Leftrightarrow \forall U \in \tau' \text{ için } g^{-1}(U) \in \tau$ [2].

2.3.1. Teorem

(X, τ) , (Y, τ') fuzzy topolojik uzaylar ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki özellikler denktir [9].

i) f fonksiyonu F-sürekli.

ii) Y deki her F-kapalının ters görüntüsü X de F-kapalıdır.

iii) X deki her $\mu_A = A$ fuzzy kümesinin görüntüsü olan $f(\mu_A) = f(A)$ nın her komşuluğunun ters görüntüsü A nın komşuluğudur.

iv) Her $A \leq X$ fuzzy kümesi için $f(\bar{A}) \leq \overline{f(A)}$

v) Her $B \leq Y$ fuzzy kümesi için $\overline{f^{-1}(B)} \leq f^{-1}(\bar{B})$

2.3.2. Tanım

(X, τ) bir fuzzy topolojik uzay ve $\mu_A = A \in I^X$ olsun.

a) A fuzzy α -açıktır $\Leftrightarrow A \leq \overset{\circ}{\bar{A}}$ dır.

b) A fuzzy yarı açıktır $\Leftrightarrow A \leq \bar{\bar{A}}$ dır.

c) A fuzzy ön açıktır $\Leftrightarrow A \leq \overset{\circ}{\bar{A}}$ dır.

d) A fuzzy β -açıktır $\Leftrightarrow A \leq \bar{\bar{\bar{A}}}$ dır.

e) A fuzzy kuvvetli yarı açıktır $\Leftrightarrow B \leq A \leq \overset{\circ}{\bar{B}}$ olacak şekilde bir $B \in \tau$ vardır.

f) A fuzzy regüler açıktır $\Leftrightarrow A = \overset{\circ}{\bar{A}}$ [9].

2.3.2. Teorem

(X, τ) , (Y, τ') , (Z, τ'') fuzzy topolojik uzaylar ve $g: X \rightarrow Y$, $h: Y \rightarrow Z$ fonksiyonları verilmiş olsun. g ve h fonksiyonları sürekli ise, $hog: X \rightarrow Z$ fonksiyonu da fuzzy süreklidir [2].

İspat

$g: X \rightarrow Y$, $h: Y \rightarrow Z$ fuzzy sürekli ve her $\omega \in \tau''$ olsun. h , fonksiyonu fuzzy sürekli olduğundan, $h^{-1}(\omega) \in \tau'$ dir. Ayrıca g , fonksiyonu fuzzy sürekli olduğundan,

$h^{-1}(\omega) \in \tau'$ için $g^{-1}(h^{-1}(\omega)) \in \tau$ dur. Ayrıca $(hog)^{-1}(\omega) = g^{-1}(h^{-1}(\omega))$ olduğunu biliyoruz. Bu ise, $hog: X \rightarrow Z$ fonksiyonunun fuzzy sürekli olması demektir.

2.3.3. Tanım

(X, τ) , (Y, τ') fuzzy topoloji uzay ve $g: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer g fonksiyonu fuzzy sürekli ve tersi g^{-1} var ve g^{-1} de fuzzy sürekli ise, g ye bir fuzzy homeomorfizm denir [2,9]. Eğer iki fuzzy topolojik uzay arasında bir fuzzy homeomorfizm varsa bunlara fuzzy homeomorf uzaylar denir [7].

2.3.4. Tanım

Fuzzy topolojik uzaylarda fuzzy homeomorfizm altında değişmeyen özelliklere, fuzzy topolojik özellik (fuzzy topolojik invaryant) denir [2,10].

2.4. Fuzzy Çarpım ve Bölüm Uzayları

A , X in, B ise Y nin fuzzy kümeleri ise $A \times B$ 'de $X \times Y$ 'nin bir fuzzy kümesi olup, bu kartezyen çarpım şu şekilde tanımlanır. $(A \times B)(x, y) = \min\{A(x), B(y)\} \quad \forall (x, y) \in X \times Y$
 $f_1: X_1 \rightarrow Y_1$, $f_2: X_2 \rightarrow Y_2$ iki fonksiyon olsun.

$f_1 \times f_2: X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2$ bir fonksiyon olup, şu şekilde tanımlanır.

$\forall (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ için $(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$ dir [11].

$f: X \rightarrow Y$ ve $g: X \rightarrow X \times Y$ ve $\forall x \in X$ için $g(x) = (x, f(x))$ $\{(x, f(x)): x \in X\} \subset X \times Y$ 'dir.

2.4.1. Teorem

$i = 1, 2$ olmak üzere $f_i: X_i \rightarrow Y_i$, B_i , Y_i nin fuzzy alt kümesi olsun. Bu durumda

$$(f_1 \times f_2)^{-1}(B_1 \times B_2) = f_1^{-1}(B_1) \times f_2^{-1}(B_2) \text{ dir [11].}$$

İspat

$\forall (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ için

$$\begin{aligned} (f_1 \times f_2)^{-1}(B_1 \times B_2)(x_1, x_2) &= (B_1 \times B_2)(f_1(x_1), f_2(x_2)) \\ &= \min\{B_1 f_1(x_1), B_2 f_2(x_2)\} \\ &= \min\{f_1^{-1} B_1(x_1), f_2^{-1} B_2(x_2)\} \\ &= (f_1^{-1} B_1 \times f_2^{-1} B_2)(x_1, x_2) \end{aligned}$$

2.4.1. Tanım

(X, τ) , (Y, τ') fuzzy topoloji uzayı olsun. X ve Y uzaylarının çarpım topolojisi,

$$\{P_1^{-1}(A_\alpha), P_2^{-1}(B_\beta) : A_\alpha \in \tau, B_\beta \in \tau', P_1, P_2 \text{ projeksiyonlar}\}$$

ailesiyle oluşturulan ($i = 1, 2$) P_i fonksiyonu sürekli yapan $X \times Y$ üzerinde tanımlı en kaba fuzzy topolojisine denir [11]. Burada;

$$P_1^{-1}(A_\alpha) = A_\alpha \times 1 \quad P_2^{-1}(B_\beta) = 1 \times B_\beta$$

$$\{P_1^{-1}(A_\alpha) \wedge P_2^{-1}(B_\beta) = (A_\alpha \times 1) \wedge (1 \times B_\beta) : A_\alpha \in \tau, B_\beta \in \tau'\} \text{ dır.}$$

Fuzzy çarpım uzayı tanımını daha genel olarak aşağıdaki şekilde verebiliriz.

2.4.2. Tanım

Her $\alpha \in J$ için (X_α, τ_α) bir fuzzy topolojik uzay $X := \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ bu uzayların kartezyen çarpımı ve her $\alpha \in J$ için $P_\alpha: X \rightarrow X_\alpha$ bir α -inci projeksiyon olsun.

$$\mathcal{A} = \{P_\alpha^{-1}(U_\alpha) : U_\alpha \in \tau_\alpha, \alpha \in J\}$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{\alpha \in \Phi} P_\alpha^{-1}(U_\alpha) : U_\alpha \in \tau_\alpha, \Phi \in J \text{ sonlu} \right\}$$

olarak tanımlansın. $\mathcal{B}$ nin elemanlarının bütün keyfi birleşimlerinin ailesini τ ile gösterelim. Bu durumda τ ; X üzerinde bir taban $\mathcal{B}$ ve bir alt tabanı $\mathcal{A}$ olan bir fuzzy topolojisi. Bu şekilde tanımlanan τ topolojisine fuzzy çarpım topolojisi ve (X, τ) ya da fuzzy çarpım uzayı denir [11].

2.4.2. Teorem

$\{(X_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in J\}$ fuzzy topolojik uzayların bir ailesi ve (X, τ) bu uzayların fuzzy çarpım uzayı olsun. Bu durumda, aşağıdakiler vardır [11]

- (i) $\forall \alpha \in J$ için P_α F-süreklidir.
- (ii) X üzerindeki fuzzy çarpım topolojisi τ , $P_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$ ($\alpha \in J$) projeksiyonlarını F-sürekliliği yapan X üzerindeki en kaba yapılı fuzzy topolojisi [11].
- (iii) (Y, τ') fuzzy topoloji uzayı, $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin.

f , F-sürekliliği $\Leftrightarrow \forall \alpha \in J$ için $P_\alpha \circ f$ F-süreklidir.

İspat

- (i) $\forall \alpha \in J$ için $A \in \tau_\alpha \Rightarrow P_\alpha^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ tanımından)

$$\Rightarrow P_\alpha^{-1}(A) \in \tau \text{ (} \mathcal{A} \subseteq \tau \text{)}$$

$\Rightarrow P_\alpha$, F-sürekli dir.

(ii) $(X, \tau') \xrightarrow{P_\alpha} (X_\alpha, \tau_\alpha)$, $(X, \tau) \xrightarrow{P_\alpha} (X_\alpha, \tau_\alpha)$ olsun.

Kabul edelim ki X üzerinde P_α projeksiyonları F-sürekli yapan başka bir fuzzy topolojisi τ' ve

$$\tau' \subset \tau \quad (2.1)$$

alalım. Yani P_α ları sürekli kılan τ dan daha kaba yapıli topolojisi τ' olsun.

$\forall B \in \tau_\alpha$ için $P_\alpha^{-1}(B) \in \mathcal{A} \subset \beta \subset \tau \Rightarrow P_\alpha^{-1}(B) \in \tau$ dır.

Ayrıca (X, τ') P_α yı sürekli kıldığından

$$\forall B \in \tau_\alpha \text{ için } P_\alpha^{-1}(B) \in \tau' \Rightarrow \tau \subset \tau' \quad (2.2)$$

Eş. 2.1 ve Eş. 2.2 den $\tau = \tau'$ olur. Buradan en kaba yapıli topolojinin τ olduğı çıkar.

(iii) $(\Rightarrow)$ f F-sürekli ve her $\alpha \in J$ için P_α F-sürekli olduğından $P_\alpha \circ f$ F-sürekli dir.

$(\Leftarrow)$ Her $\alpha \in J$ için $P_\alpha \circ f$ F sürekli ve $B \in \tau_\alpha$ olsun. Buradan

her $\alpha \in J$ için $(P_\alpha \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(P_\alpha^{-1}(B)) \in \tau'$ dır. O halde $\{f^{-1}(P_\alpha^{-1}(B)) : B \in \tau_\alpha, \alpha \in J\}$ X deki τ' -açık fuzzy kümelerin bir ailesidir. τ nın her elemanı, $\{P_\alpha^{-1}(B) : B \in \tau, \alpha \in J\}$ ailesinin sonlu arakesitlerinin keyfi birleşimi olarak yazıldığından ve f^{-1} birleşim ve arakesiti koruduğından f^{-1} τ -açık fuzzy kümelerini τ' -açık fuzzy kümelerini karşılık getirir. Bu ise, f nin F-sürekli olduğunu gösterir.

2.4.3. Tanım

(X, τ) bir fuzzy topoloji uzayı ve R X üzerinde tanımlanan bir denklik bağıntısı, X/R bölüm kümesi ve $q: X \rightarrow X/R, x \rightarrow [x]$ bölüm dönüşümü olsun.

X/R deki fuzzy kümelerinin $\mathcal{U} = \{B: q^{-1}(B) \in \tau\}$

alesi q yu F -sürekli yapan bir fuzzy topolojisi. Bu topolojiye fuzzy bölüm topolojisi ve $(X/R, \mathcal{U})$ ikilisine de fuzzy bölüm uzayı denir [11].

2.4.3. Teorem

(X, τ) ve (Y, τ') iki fuzzy topoloji uzayı olsun. Aşağıdakiler vardır [11].

a) X/R üzerindeki $\mathcal{U}$ fuzzy bölüm topolojisi q yu F -sürekli yapan en ince yapılı fuzzy topolojisi.

b) $g: X/R \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde,

g F -sürekli $\Leftrightarrow g \circ q$ F -sürekli.

2.4.4. Tanım

$X \neq \emptyset$ bir küme ve K cismi için $K=R$ (veya $K=C$) olsun.

$+: X \times X \rightarrow X, (x, y) \rightarrow x+y$

$\cdot: K \times X \rightarrow X, (a, x) \rightarrow a.x$

dönüşümleri ile toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayalım. $\forall x, y, z \in X$ ve $a, b \in R$ için aşağıdaki koşullar sağlansın.

$$1) x+y = y+x$$

$$2) x+(y+z) = (x+y)+z$$

$$3) \forall x \in X \text{ için } x+\theta = \theta+x = x \text{ olacak şekilde bir tek } \theta \in X \text{ var.}$$

$$4) \forall x \in X \text{ için } x+(-x) = (-x)+x = \theta \text{ olacak şekilde bir tek } -x \in X \text{ var.}$$

$$5) \forall x \in X \text{ için } 1.x = x.1 = x$$

$$6) a.(x+y) = ax+ay$$

$$7) (a+b).x = ax+bx$$

$$8) (a.b).x = a(bx)$$

X'e K üzerinde vektör uzayı denir [12].

3. FUZZY VEKTÖR UZAYLARI VE FUZZY TOPOLOJİK VEKTÖR UZAYLARI

Bu kısımda Fuzzy kümelerinin toplamı ve skalerle çarpımlarını tanımlayacağız. Bu kısım boyunca E, reel veya kompleks sayılar cismi olan K üzerinde bir vektör uzayını gösterecektir.

3.1. Fuzzy Kümelerinin Toplamı ve Skalerle Çarpımı

3.1.1. Tanım

$A_1, \dots, A_n$ E de fuzzy kümeleri olsun. Bu durumda $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, E^n de bir A fuzzy kümesini tanımlar öyleki A fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu

$$\mu_A(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), \dots, \mu_{A_n}(x_n)\}$$

şeklindedir [4].

$f: E^n \rightarrow E$, $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ olmak üzere $f(A) = A_1 + A_2 + \dots + A_n$ olarak tanımlanır.

Bir λ skaleri ve B, E de bir fuzzy kümesi için

$g: E \rightarrow E$, $g(x) = \lambda x$ olmak üzere $g(B) = \lambda B$ olarak tanımlanır [4].

3.1.1. Lemma

(a) $\forall x \in E$, $\lambda \neq 0$ için $\mu_{\lambda B}(x) = \mu_B((1/\lambda)x)$,

$$\lambda = 0 \text{ için } \mu_{\lambda B}(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \neq 0 \\ \sup_y \mu_B(y) & , \quad x = 0 \end{cases}$$

(b) $\forall x \in E$, $\forall \lambda$ skaler için $\mu_{\lambda B}(x) \geq \mu_B(x)$ dir [4].

3.1.1. Önerme

E ve F, K cismi üzerinde vektör uzayları, f lineer fonksiyonu E den F nin içine olsun. Bu durumda E deki her A, B fuzzy kümeleri ve her λ skaleri için

$$a) f(A+B) = f(A) + f(B)$$

$$b) f(\lambda A) = \lambda f(A) \quad [4]$$

İspat

(a) $M = \{f(x) : x \in E\}$ ve $\omega \in F$ olsun. Gösterelim ki $a = \mu_{f(A+B)}(\omega)$, $b = \mu_{f(A)+f(B)}(\omega)$ olmak üzere $a = b$ dir. İlk önce $\omega \notin M$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $a = 0$ dır. Ayrıca $x, y \in F \ni x+y = \omega$ ise, bu durumda x, y den enaz biri M de değildir ve böylece $\min\{\mu_{f(A)}(x), \mu_{f(B)}(y)\} = 0$. Bu durumda $\omega \notin M$ için $b = 0 = a$ olduğunu elde ederiz.

İkinci olarak $\omega \in M$ olduğunu kabul edelim. O halde

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists z \in E \text{ var } \ni f(z) = \omega \text{ iken } \mu_{A+B}(z) > a - \varepsilon .$$

$$\text{Böylece } x+y = z \text{ olmak üzere } x, y \in E \text{ var } \ni \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\} > a - \varepsilon$$

$$f(x) + f(y) = \omega \text{ olduğundan}$$

$$b \geq \min\{\mu_{f(A)}(f(x)), \mu_{f(B)}(f(y))\} \geq \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\} > a - \varepsilon$$

$\varepsilon > 0$ keyfi sabit olduğundan $b \geq a$ elde edilir. Diğer taraftan verilen her $\varepsilon > 0$ için F de $z_1 + z_2 = \omega$ olan z_1 ve z_2 var $\ni$

$$b - \varepsilon < \min\{\mu_{f(A)}(z_1), \mu_{f(B)}(z_2)\} .$$

Eğer $\varepsilon < b$ alınırsa $z_1, z_2 \in M$ dir. O halde E de $f(x_1) = z_1$ ve $f(x_2) = z_2$ olan x_1, x_2 var $\ni$

$$b - \varepsilon < \min\{\mu_A(x_1), \mu_B(x_2)\} .$$

$f(x_1+x_2) = \omega$ olduğundan $a > b - \varepsilon$ elde edilir ve böylece $\varepsilon > 0$ keyfi sabit olduğundan $a \geq b$ dir. Bu da (a) yı ispatlar.

(b) $\omega \in F$, $c = \mu_{\lambda f(A)}(\omega)$, $d = \mu_{f(\lambda A)}(\omega)$ olsun.

Eğer $\omega \notin M$ ise, $c = d = 0$ dır.

Kabul edelim ki $\omega \in M$ ve $\lambda \neq 0$ dır.

$$c = \mu_{f(A)}(1/\lambda \omega) = \sup_{f(x) = (1/\lambda)\omega} \mu_A(x) = \sup_{f(\lambda x) = \omega} \mu_{\lambda A}(\lambda x) = \sup_{f(y) = \omega} \mu_{\lambda A}(y) = d$$

Şimdi kabul edelim ki $\lambda = 0$ ve $\omega \neq 0$ olsun. Bu durumda $c = 0$ dır. Ayrıca $f(x) = \omega \neq 0$, $x \neq 0$ olduğundan

$$d = \sup_{f(x) = \omega} \mu_{0A}(x) = 0 \text{ dır.}$$

$$\omega = 0 \text{ için } c = \sup_{x \in F} \mu_{f(A)}(x) = \sup_{y \in E} \mu_A(y);$$

$$d = \sup_{f(x) = 0} \mu_{0A}(x) = \mu_{0A}(0) = \sup_{y \in E} \mu_A(y) \text{ olup bu da ispatı tamamlar.}$$

3.1.1. Sonuç

E deki her A, B fuzzy kümeleri ve her λ skaleri için

$$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B \text{ dir [4].}$$

3.1.1. Yardımcı Teorem

$A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m$ E de fuzzy kümeleri ve $A = A_1 + \dots + A_n$, $B = B_1 + \dots + B_m$, $F = A_1 + \dots + A_n + B_1 + \dots + B_m$ olsun. Bu durumda $F = A+B$ dir.

E nin herhangi bir A alt kümesi bir fuzzy kümesi olarak gözönüne alınabilir öyleki üyelik fonksiyonu A'nın karakteristik fonksiyonudur. Bu yolla A, B kümelerinden

biri (veya her ikisi) E nin herhangi bir alt kümesi olmak üzere bunların toplamını $A+B$ şeklinde alabiliriz. $x \in E$ ve B bir fuzzy kümesi için

$X+B = \{x\}+B$ tanımlanır [4].

$f_x : E \rightarrow E$, $f_x(y) = x+y$ alınırsa, aşağıdaki lemma kolayca ispatlanır.

3.1.2. Lemma

$A \subset E$ alt küme ve B bir fuzzy küme olsun. Bu durumda

$$(i) \ x+B = f_x(B)$$

$$(ii) \ \mu_{x+B}(z) = \mu_B(z-x)$$

$$(iii) \ A+B = \bigcup_{x \in A} (x+B) \quad [4]$$

3.1.2. Önerme

$A_1, \dots, A_n$ E de fuzzy kümeleri ve $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ skalerler olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

$$(i) \ \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_n A_n \subset A$$

$$(ii) \ E \text{ deki her } x_1, \dots, x_n \text{ için } \mu_A(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \geq \min\{\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_n}(x_n)\}$$

İspat

$$i) \Rightarrow ii)$$

$$\begin{aligned} \mu_A(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) &\geq \mu_{\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_n A_n}(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \\ &\geq \min\{\mu_{\lambda_1 A_1}(\lambda_1 x_1), \dots, \mu_{\lambda_n A_n}(\lambda_n x_n)\} \\ &\geq \min\{\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_n}(x_n)\} \end{aligned}$$

$$ii) \Rightarrow i) \ \lambda_i \neq 0 \ i = 1, \dots, k \text{ ve } k < i \leq n \text{ için } \lambda_i = 0$$

$x_1, \dots, x_k \in E$ ve $\forall y_1, \dots, y_{n-k} \in E$ için

$$\mu_A(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k) \geq \min\{\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_k}(x_k), \mu_{A_{k+1}}(y_1), \dots, \mu_{A_n}(y_{n-k})\} \text{ dir.}$$

$$\mu_{0A_j}(0) = \sup_{y \in E} \mu_j(y) \text{ olduğu için}$$

$$\mu_A(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k) \geq \min\{\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_k}(x_k), \mu_{0A_{k+1}}(0), \dots, \mu_{0A_n}(0)\} \text{ dir.}$$

Şimdi,

$$\begin{aligned} \mu_{\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_n A_n}(z) &= \sup_{x_1 + \dots + x_k = z} [\min\{\mu_{\lambda_1 A_1}(x_1), \dots, \mu_{\lambda_n A_n}(x_n)\}] \\ &= \sup_{x_1 + \dots + x_k = z} [\min\{\mu_{\lambda_1 A_1}(x_1), \dots, \mu_{\lambda_k A_k}(x_k), \mu_{0A_{k+1}}(0), \dots, \mu_{0A_n}(0)\}] \\ &= \sup_{x_1 + \dots + x_k = z} [\min\{\mu_{A_1}((1/\lambda_1)x_1), \dots, \mu_{A_k}((1/\lambda_k)x_k), \mu_{0A_{k+1}}(0), \dots, \mu_{0A_n}(0)\}] \\ &\leq \sup_{x_1 + \dots + x_k = z} \mu_A(\lambda_1(1/\lambda_1)x_1 + \dots + \lambda_k(1/\lambda_k)x_k) = \mu_A(z) \end{aligned}$$

3.1.3. Lemma

A ve B kümeleri E nin fuzzy alt kümeleri olsun. Bu durumda aşağıdakiler vardır [4].

$$(i) A + 0B \subset A$$

$$(ii) A + 0B = A \Leftrightarrow \sup_{x \in E} \mu_A(x) \leq \sup_{x \in E} \mu_B(x) \text{ dir.}$$

İspat

$$(i) \mu_A(x + 0y) = \mu_A(x) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\} \text{ İspat Önerme 3.1.7 (i) den yapılır.}$$

$$(ii) (\Leftarrow) \sup \mu_A(x) \leq \sup \mu_B(x) = \mu_{0B}(0) \text{ olsun. Bu durumda}$$

$$\mu_{A+0B}(z) = \sup_{x+y=z} [\min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}] = \min\{\mu_A(z), \mu_{0B}(0)\} = \mu_A(z) \text{ dir.}$$

$(\Rightarrow) (p \Rightarrow q) \equiv (q' \Rightarrow p')$ denkleğini ispatımız için kullanalım.

$$\mu_A(x) > \sup \mu_B(x) = \mu_{0B}(0) \quad (\exists z \text{ için})$$

$$\mu_{A+0B}(z) = \min\{\mu_A(z), \mu_{0B}(0)\} < \mu_A(z) \text{ ve } A+0B \neq A \text{ dır.}$$

3.2. Fuzzy Alt Uzay

3.2.1. Tanım

E de bir F fuzzy kümesine fuzzy alt uzay denir, eğer aşağıdakiler var ise [4];

$$i) F+F \subset F$$

$$ii) \text{ Her } \lambda \text{ sabiti için } \lambda F \subset F$$

3.2.1. Lemma

F, E nin fuzzy at kümesi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir [4].

$$(1) F, E \text{ nin alt uzayı,}$$

$$(2) \forall k, m \text{ (sabitleri) için } kF+mF \subset F$$

$$(3) \forall k, m \text{ ve } \forall x, y \in E \text{ için } \mu_F(kx+my) \geq \min\{\mu_F(x), \mu_F(y)\}$$

İspat

$1 \Rightarrow 2$ açıktır. Ayrıca (2) ile (3) Önerme 3.1.2 den eşdeğerdir.

$$(2 \Rightarrow 1) F + F = 1.F + 1F \subset F$$

$$kF = kF + 0F \subset F$$

3.2.1. Önerme

E ve F, K da vektör uzayları, $f: E \rightarrow F$ lineer fonksiyon olsun. Eğer A, E nin fuzzy alt uzayı ise, bu durumda $f(A)$ da F nin fuzzy alt uzayıdır. Benzer şekilde B, F nin fuzzy alt uzayı ise $f^{-1}(B)$, E nin fuzzy alt uzayıdır.

İspat

A, E nin fuzzy alt uzayı olduğundan

$kA + mA \subset A$ dır. (k,m sabitleri için) Buradan,

$kf(A) + mf(A) = f(kA + mA) \subset f(A)$ dır.

Bu da $f(A)$ yı, F nin fuzzy alt uzayı olduğunu gösterir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \mu_{f^{-1}(B)}(kx + my) &= \mu_B(f(kx + my)) = \mu_B(kf(x) + mf(y)) \\ &\geq \min\{\mu_B(f(x)), \mu_B(f(y))\} \\ &= \min\{\mu_{f^{-1}(B)}(x), \mu_{f^{-1}(B)}(y)\} \end{aligned}$$

O halde $f^{-1}(B)$, Lemma 3.2.1 den fuzzy alt uzayıdır.

3.2.2. Önerme

Eğer A ve B, E nin fuzzy alt uzayları ve k sabit ise, bu durumda $A+B$ ve kA da E nin fuzzy alt uzayıdır [4].

3.2.3. Önerme

Eğer $\{A_i\}_{i \in I}$ E nin fuzzy alt uzayların bir ailesi ise, bu durumda $A = \bigcap_{i \in I} A_i$ de E nin fuzzy alt uzayıdır [4].

İspat

$$\begin{aligned}
 \mu_A(mx+ky) &= \inf_{i \in I} \mu_{A_i}(mx+ky) \geq \inf_{i \in I} [\min\{\mu_{A_i}(x), \mu_{A_i}(y)\}] \\
 &\geq \min\{\inf_{i \in I} \mu_{A_i}(x), \inf_{i \in I} \mu_{A_i}(y)\} \\
 &= \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}
 \end{aligned}$$

Lemma 3.2.1 den ispat elde edilir.

3.3. Konveks, Dengeli, Emen Fuzzy Kümeleri

3.3.1. Tanım

E nin bir A fuzzy kümesi olsun. Eğer

(a) $\forall k \in [0,1]$ için $kA + (1-k)A \subset A$ ise, A ya Konveks,

(b) $\forall k$ sabiti $\exists |k| \leq 1$ için $kA \subset A$ ise, A ya Dengeli,

(c) Eğer, $E = \bigcup_{k>0} kA$ ise, A ya Emen (Absorbing) fuzzy kümesi denir [4].

3.3.1. Önerme

A, E de bir fuzzy kümesi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir [4];

(1) A konveks (dengeli),

(2) $\forall x, y \in E$ ve $\forall k \in [0,1]$ için, $\mu_A(kx + (1-k)y) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$

($\forall k \exists |k| \leq 1$ için $\mu_A(kx) \geq \mu_A(x)$),

(3) $\forall d \in [0,1]$ için $A_d = \{x \in E : \mu_A(x) \geq d\}$ alışılmış kümesi konvektir (dengelidir).

3.3.2. Önerme

E nin bir A fuzzy alt kümesi için aşağıdaki ifadeler denktir [4].

(1) A emendir.

(2) $\forall x \in E$ için $\sup_{k>0} \mu_A(kx) = 1$

(3) $\forall d \ni 0 \leq d \leq 1$ için $A_d = \{x \in E : \mu_A(x) \geq d\}$ alışılmış kümesi emendir.

3.3.3. Önerme

E, F K üzerinde iki vektör uzayı ve $f: E \rightarrow F$ lineer fonksiyon olsun. Eğer A, E’de konveks (dengeli) fuzzy kümesi ise, $f(A)$ da F de konveks (dengeli) fuzzy kümesidir. Benzer şekilde B, F de konveks (dengeli) fuzzy kümesi olduğundan $f^{-1}(B)$, E de konveks (dengeli) fuzzy kümesidir [4].

İspat

İspatı konveks olması halinde yapacağız. Dengeli olması benzer şekilde yapılır.

$k \in [0,1]$ ve A, E de konveks fuzzy kümesi olsun.

$kf(A) + (1-k)f(A) = f(kA + (1-k)A) \subset f(A)$ dır. Bu da

$f(A)$ nın konveks olduğunu gösterir.

Kabul edelim ki B, F de konveks fuzzy kümesi ve $k \in [0,1]$ olsun.

$M = k.f^{-1}(B) + (1-k)f^{-1}(B)$ bir küme için

$\Rightarrow f(M) = kf(f^{-1}(B)) + (1-k)f(f^{-1}(B)) \subset kB + (1-k)B \subset B$

Böylece $M \subset f^{-1}(B)$.

Bu da $f^{-1}(B)$ nın konveks olduğunu gösterir.

3.3.4. Önerme

$f: E \rightarrow F$ lineer fonksiyon, A, F’de emen fuzzy kümesi olsun. Bu durumda $f^{-1}(A)$ E de emen fuzzy kümesidir [4].

3.3.5. Önerme

Eğer A ile B, E de konveks (dengeli) fuzzy kümeleri ise, bu durumda $A+B$, E de konveks (dengeli) fuzzy kümesidir [4].

3.3.6. Önerme

Eğer $\{A_i\}_{i \in I}$, E de konveks (dengeli) fuzzy kümeler ailesi ise, bu durumda $A = \bigcap_{i \in I} A_i$, E de konveks (dengeli) fuzzy kümesidir [4].

İspat

$0 \leq d \leq 1$ olsun. Bu durumda

$$A_d = \{x \in E : \mu_A(x) \geq d\} = \bigcap_{i \in I} \{x \in E : \mu_{A_i}(x) \geq d\} \text{ dir.}$$

E nin konveks (dengeli) kümelerinin ailesinin arakesiti de konveks (dengeli) olduğundan Önerme 3.3.1 den açıktır.

3.3.2. Tanım

A, E de fuzzy kümesi olsun. A yı içeren E deki tüm konveks (dengeli) kümelerin arakesitine A nın konveks (dengeli) zarfı denir. A nın konveks zarfı $Co(A)$ ile gösterilir [4].

Önerme 3.3.6 dan A nın konveks (dengeli) zarfı, E deki A yı içeren en küçük konveks (dengeli) kümedir.

3.3.7. Önerme

A, E de fuzzy kümesi olsun. Bu durumda A nın dengeli zarfı $\bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda A$ fuzzy kümesidir [4].

İspat

$B = \bigcup \lambda A$ fuzzy kümesi A yı içeren herhangi dengeli fuzzy kümesinde kapsandığı açıktır. $A \subset B$ olduğundan B nin dengeli olduğunu göstermek yeterlidir.

$a \in K$, $|\lambda| \leq 1$ ve $x \in E$ olsun. Bu durumda

$$\mu_B(x) = \sup_{|\lambda| \leq 1} \mu_{\lambda A}(x) \leq \sup_{|\lambda| \leq 1} \mu_{a\lambda A}(ax) \leq \sup_{|\lambda| \leq 1} \mu_{\lambda A}(ax) = \mu_B(ax)$$

Böylece $aB \subset B$ (Önerme 3.1.2 den)

Bu da B nin dengeli olduğunu gösterir.

3.3.8. Önerme

A , E nin fuzzy alt kümesi olsun. Bu durumda A nın $\text{Co}(A)$ konveks zarfı

$$B = \bigcup \{\lambda_1 A + \dots + \lambda_n A : \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1\} \text{ kümesidir [4].}$$

İspat

$A \subset B \subset \text{Co}(A)$ açıktır. B nin konveks olduğunu göstermek yeterlidir. Bunu göstermek için ilk olarak

$$\lambda(\bigcup A_i) = \sum \lambda A_i \text{ ve}$$

$$(\bigcup_{i \in I} A_i) + (\bigcup_{j \in J} B_j) \subset \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (A_i + B_j) \text{ alalım. Şimdi}$$

$a \in [0,1]$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, $\sum_{j=1}^n k_j = 1$, $\lambda_i \geq 0$, $k_j \geq 0$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{i=1}^n a\lambda_i + \sum_{j=1}^n (1-a)k_j = 1 \text{ olduğundan dolayı}$$

$$a(\sum_{i=1}^n \lambda_i A) + (1-a)(\sum_{j=1}^n k_j A) = a\lambda_1 A + \dots + a\lambda_n A + (1-a)k_1 A + \dots + (1-a)k_m A \subset B$$

dir.

Buradan $aB + (1-a)B \subset B$

Bu da ispatı tamamlar.

3.3.3. Tanım

A fuzzy kümesi konveks ve dengeli ise, A ya tamamen konvektir denir. E de bir B fuzzy kümesinin konveks, dengeli zarfı, E deki B yi içeren tüm tamamen konveks kümelerin arakesitidir [4].

3.3.9. Önerme

A, E de fuzzy kümesi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir [4];

(1) A tamamen konvektir.

(2) $|a| + |b| \leq 1$ koşulunu sağlayan her a,b sabitleri için $aA + bA \subset A$ dir.

(3) $\forall x,y \in E, \forall a,b$ sabitleri $\ni |a| + |b| \leq 1$ için $\mu_A(ax+by) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$ dir.

(4) $\forall d \in [0,1]$ için $A_d = \{x \in E: \mu_A(x) \geq d\}$ alışılmış kümesi tamamen konvektir. Önerme 3.3.8 in ispatındaki metot kullanılarak aşağıdaki önermenin ispatı yapılabilir.

3.3.10. Önerme

A nın konveks, dengeli zarfı,

$\bigcup (\lambda_1 A + \dots + \lambda_n A : \sum |\lambda_i| \leq 1)$ fuzzy kümesidir [4].

3.4. Bölüm Uzayı

3.4.1. Lemma

F , E nin fuzzy alt uzayı olsun. Bu durumda

$$(1) \forall x \in E \text{ için } \mu_F(x) \leq \mu_F(0)$$

$$(2) F_0 = \{x \in E : \mu_F(x) = \mu_F(0)\} \text{ alışılmış kümesi, } E \text{ nin alışılmış alt uzayıdır [4].}$$

İspat

$$(1) 0F \subset F$$

Önerme 3.1.2 den $\forall x \in E$ için $\mu_F(0) = \mu_F(0x) \geq \mu_F(x)$

(2) a, b sabit, $x, y \in F_0$ alalım. Bu durumda

$$\mu_F(ax+by) \geq \min\{\mu_F(x), \mu_F(y)\} = \mu_F(0).$$

Böylece $ax+by \in F_0$.

3.4.1. Tanım

F , E nin fuzzy alt uzayı için E/F bölüm uzayını E/F_0 alışılmış bölüm uzayı olarak tanımlarız. $\forall x \in X$ için $\hat{x} \in E/F$ dir. $q = q_F$ bölüm dönüşümüdür [4].

3.4.1. Önerme

A , E nin fuzzy kümesi ise, bu durumda

$$q^{-1}(q(A)) = F_0 + A \text{ dir [4].}$$

İspat

$B = q^{-1}(q(A))$ diyelim. O halde $z \in E$ için

$$\begin{aligned}
\mu_B(z) &= \mu_{q(A)}(\hat{z}) = \sup_{x \in \hat{z}} \mu_A(x) = \sup_{y \in F_0} \mu_A(z - y) \\
&= \sup_{y \in F_0} \mu_{y+A}(z) = \mu_{F_0+A}(z) \text{ dir.}
\end{aligned}$$

3.5. Fuzzy Topolojik Vektör Uzayları

3.5.1. Tanım

K alışılmış topolojiye sahip olmak üzere $E \times E$ ve $K \times E$ de çarpım topolojilerine sahip olsun. Bu durumda bir fuzzy topolojik vektör uzayı, fuzzy topoloji ile donatılmış bir E vektör uzayına denir, öyleki aşağıdaki fonksiyonlar sürekli ise [4],

$$a) \Phi : E \times E \rightarrow E, (x, y) \rightarrow x + y$$

$$b) \psi : K \times E \rightarrow E, (\lambda, x) \rightarrow \lambda x$$

3.5.2. Tanım

E vektör uzayı üzerinde bir τ fuzzy topolojisine, dönüşümler altında değişmez denir [4], eğer

$$\forall x \in E \text{ ve } \forall A \in \tau \text{ için } x + A \in \tau \text{ ise}$$

3.5.1. Lemma

Eğer E , dönüşümler altında değişmez topoloji ile donatılmış ise, bu durumda her bir $f_x : E \rightarrow E, y \rightarrow x + y$ dönüşümü homeomorfizmdir [4].

E bir fuzzy topolojik vektör uzayı ve F fuzzy alt uzay olsun.

$q : E \rightarrow E/F$ bir bölüm fonksiyonu ve E/F üzerinde bölüm fuzzy topolojisini gözönüne alalım.

3.5.1. Önerme

Eğer E nin topolojisi dönüşümler altında değişmez ise, bu durumda q açık bir fonksiyondur [4].

İspat

V , E de açık ve $A = q(V)$ olsun. A nın E/F de açık olduğunu ispatlamak için $q^{-1}(A)$ nın E de açık olduğunu göstermemiz yeterlidir. Önerme 3.4.1 den

$$q^{-1}(A) = F_0 + V = \bigcup_{x \in F_0} (x + V).$$

Böylece $q^{-1}(A)$, fuzzy açık kümelerin bir birleşimi olduğundan açıktır.

3.5.2. Lemma

X_1, Y_1, X_2, Y_2 fuzzy topolojik uzaylar ve $f_1 : X_1 \rightarrow Y_1, f_2 : X_2 \rightarrow Y_2$ açık fonksiyonlar olsun. Bu durumda

$f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2, (x, y) \rightarrow (f_1(x), f_2(y))$ fonksiyonu açıktır [4].

İspat

A, X_1 de ve B, X_2 de açık olmak üzere $A \times B$ biçimindeki kümeler $X_1 \times X_2$ deki topoloji için bir taban oluşturur.

$(f_1 \times f_2)(A \times B) = f_1(A) + f_2(B)$ olduğundan ispat buradan açıktır.

3.5.2. Önerme

E nin topolojisi dönüşümler altında değişmeyen bir fuzzy topoloji olsun. Eğer F, E nin bir fuzzy alt uzayı ise, bu durumda E/F bölüm fuzzy topolojisi ile bir fuzzy topolojik vektör uzayıdır [4].

İspat

$$\Phi : E \times E \rightarrow E, (x, y) \rightarrow x + y$$

$$\Phi_F : E/F \times E/F \rightarrow E/F, (\hat{x}, \hat{y}) \rightarrow \hat{x} + \hat{y} \text{ alalım.}$$

Aşağıdaki diyagram değişmelidir.

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \xrightarrow{\Phi} & E \\ \downarrow q \times q & & \downarrow q \\ E/F \times E/F & \xrightarrow{\Phi_F} & E/F \end{array}$$

ω , E/F de açık bir fuzzy kümesi olsun. Bu durumda $V = (q \circ \Phi)^{-1}(\omega)$, $E \times E$ de açık bir kümedir. $q \times q$, Önerme 3.5.1 ve Lemma 3.5.2 den açık olduğu için $V_1 = (q \times q)(V)$ fuzzy kümesi $E/F \times E/F$ de açıktır. Ama $V_1 = \Phi_F^{-1}(\omega)$ dır. Bu Φ_F in sürekli olduğunu gösterir.

$$\Psi_F : K \times E/F \rightarrow E/F, (\lambda, \hat{x}) \rightarrow \lambda \hat{x},$$

fonksiyonunun sürekliliği benzer şekilde gösterilir.

3.5.3. Önerme

$\{E_i\}_{i \in I}$, K cismi üzerinde fuzzy topolojik vektör uzaylarının bir ailesi ve $E = \prod E_i$ de çarpım fuzzy topolojik uzayı olsun. Bu durumda E fuzzy topolojik vektör uzayıdır [4].

İspat

$$P_i : E \rightarrow E_i \quad i\text{-inci izdüşüm fonksiyonu ve}$$

$$\Phi : E \times E \rightarrow E, (x, y) \rightarrow x + y$$

$$\Phi_i : E_i \times E_i \rightarrow E_i, (x, y) \rightarrow x + y \text{ olsun.}$$

Aşağıdaki diyagram değişmelidir.

$$\begin{array}{ccc}
 E \times E & \xrightarrow{\Phi} & E \\
 \downarrow P_i \times P_i & & \downarrow P_i \\
 E_i \times E_i & \xrightarrow{\Phi_i} & E_i
 \end{array}$$

$P_i \times P_i$ sürekli olduğundan $\Phi \circ (P_i \times P_i)$ de sürekli dir. Her $P_i \circ \Phi$ sürekli olduğundan Φ sürekli dir.

$$\Psi : K \times E \rightarrow E, (\lambda, x) \rightarrow \lambda x$$

fonksiyonunun sürekli olduğu benzer şekilde gösterilir. Bu da E nin fuzzy topolojik vektör uzayı olduğunu gösterir.

3.6. Fuzzy Lineer Topolojiler

(X, τ) bir topolojik uzay, $\omega(\tau)$ X deki bütün fuzzy kümelerinin bir ailesi öyleki bunlar X den $I = [0, 1]$ birim aralığı tanımlı fonksiyonlar I daki alışılmış topolojiye göre alt yarı sürekli olup $\omega(\tau)$ X üzerinde bir fuzzy topolojisi dir. Bu durumda $\omega(\tau)$ ailesi üzerinde bir fuzzy topolojisi dir [13].

$\omega(\tau)$ yu bir fuzzy topoloji olarak göstereceğiz. Öyleki bu alışılmış topoloji tarafından üretilen fuzzy topolojisi dir. Eğer $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ için fuzzy topolojik uzaylar ailesi ve τ , $X = \prod X_i$ kümesi üzerinde çarpım topolojisi ise, bu durumda $\omega(\tau)$, $\omega(\tau_i)_{i \in \tau}$ fuzzy topolojik uzayın çarpımıdır [14].

3.6.1. Tanım

$X \neq \emptyset$ bir küme olsun. X de bir fuzzy kümesi, X den birim aralık I olan tüm fonksiyonların I^X kümesinin elemanıdır. Eğer $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve $\mu \in I^Y$ ise, bu durumda $f^{-1}(\mu)$, X deki $f^{-1}(\mu)(x) = \mu(f(x))$ tarafından tanımlanmış fuzzy kümesi dir. Denk olarak, $f^{-1}(\mu) = \mu \circ f$ dir [5].

3.6.2. Tanım

Eğer α , K da ve μ , E de fuzzy kümeler ise, bu durumda $\alpha \times \mu \in I^{K \times E}$ fuzzy kümesinin E deki görüntüsü

$$(\alpha \times \mu)(t, x) = \min\{\alpha(t), \mu(x)\}, h : K \times E \rightarrow E, h(t, x) = tx$$

olmak üzere, $h(\alpha \times \mu) = \alpha \mu$ olarak gösterilir [5].

3.6.1. Önerme

E bir fuzzy topolojik vektör uzayı ve $t_0 \in K$ olsun. Bu durumda f dönüşümü,

$$f : E \rightarrow E, f(x) = t_0 x$$

süreklidir. Eğer $t_0 \neq 0$ ise bu durumda f dönüşümü homeomorfizmdir [5].

İspat

Wong tarafından verilen [8, Teorem 3.1] den, bir fuzzy topolojik uzayı Y den, fuzzy topolojik uzayların çarpımı $X = \prod_{i \in J} X_i$ ye tanımlanan bir g dönüşümü süreklidir,

$\Leftrightarrow \Pi_i : X \rightarrow X_i$ doğal izdüşümü olmak üzere $\Pi_i \circ g : Y \rightarrow X_i$ süreklidir.

Şimdi, $h_1 : E \rightarrow K$, $h_1(x) = t_0$ ve $h_2 : E \rightarrow E$, $h_2(x) = x$ dönüşümleri sürekli olduğundan,

$$h : E \rightarrow K \times E, h(x) = (t_0, x)$$

dönüşümü de süreklidir. Ayrıca $g : K \times E \rightarrow E$, $g(t, x) = tx$ de süreklidir.

Böylece $f = g \circ h$ süreklidir. $t_0 \neq 0$ iken $f^{-1}(x) = x/t_0$ olduğundan f^{-1} süreklidir.

3.6.1. Sonuç

Eğer μ , E fuzzy topolojik vektör uzayında bir açık fuzzy kümesi ve $t \neq 0$ skaler ise, bu durumda $t\mu$ açıktır [5].

İspat

$f : E \rightarrow E$, $f(x) = x/t$ dönüşümü süreklidir. Böylece $t\mu = f^{-1}(\mu)$ açıktır.

3.6.2. Sonuç

$t \neq 0$ bir skaler ve μ , E fuzzy topolojik vektör uzayında, x in bir komşuluğu ise, bu durumda $t\mu$, tx in bir komşuluğudur [5].

3.6.2. Önerme

$x_0 \in E$ ve μ , E fuzzy topolojik vektör uzayında bir açık fuzzy kümesi olsun. Bu durumda $x_0 + \mu$ fuzzy kümesi açıktır [5].

İspat

E de sabit fuzzy kümeleri açık olduğundan,

$$f: E \rightarrow E, f(x) = -x_0$$

dönüşümü süreklidir. Aynı zamanda E deki özdeşlik dönüşümü süreklidir. Buradan

$$h: E \rightarrow E \times E, h(x) = (-x_0, x)$$

dönüşümü sürekli olduğu elde edilir. Ayrıca,

$$h_1 : E \times E \rightarrow E, h_1(x, y) = x + y$$

dönüşümü de süreklidir. Bu durumda, bileşke dönüşümü

$$g: E \rightarrow E, g(x) = x - x_0,$$

süreklidir. $g^{-1}(\mu) = x_0 + \mu$ olduğundan sonuç elde edilir.

3.6.3. Önerme

$x_0 \in E$ ve μ , E fuzzy topolojik vektör uzayında bir fuzzy kümesi olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir [5];

(i) μ , x_0 ın bir komşuluğudur.

(ii) $-x_0 + \mu$ sıfırın bir komşuluğudur.

(iii) sıfırın en az bir μ_1 komşuluğu var öyleki $\mu = x_0 + \mu_1$

3.6.4. Önerme

μ , E fuzzy topolojik vektör uzayında bir fuzzy kümesi ve $\rho \in I^E$ olsun. Bu durumda $\rho + \mu$ açıktır [5].

İspat

Her bir $y \in E$ için ρ_y , E de aşağıdaki gibi tanımlanan fuzzy kümesi olsun.

$$\rho_y(x) = \min\{\rho(y), (\mu + \rho)(x)\} = \min\{\rho(y), \mu(x - y)\}$$

Her ρ_y açıktır. $\rho + \mu = \sup_{y \in E} \rho_y$ olduğundan ispat biter.

3.6.5. Önerme

μ , E fuzzy topolojik vektör uzayında $z_0 = x_0 + y_0$ ın bir komşuluğu olsun. Bu durumda $0 < \theta < \mu(z_0)$ şartını sağlayan her bir θ reel sayısı için x_0, y_0 noktalarının sırasıyla açık μ_1, μ_2 komşulukları var öyleki $\mu_1 + \mu_2 \leq \mu$ ve $\min\{\mu_1(x_0), \mu_2(y_0)\} > \theta$ $x_0 = y_0 = 0$ iken sıfırın μ_3 açık komşuluğu var olup,

$$\mu_3(0) > \theta, \mu_3 \leq \mu \text{ ve } \mu_3 + \mu_3 \leq \mu \text{ [5].}$$

İspat

Genelliği kaybetmeden μ nün açık olduğunu varsayabiliriz.

$$f: E \times E \rightarrow E, f(x+y) = x+y$$

dönüşümü sürekli olduğundan $f^{-1}(\mu)$ fuzzy kümesi $E \times E$ de açıktır.

$f^{-1}(\mu)(x_0, y_0) = \mu(z_0) > \theta$ olduğundan E de μ_1, μ_2 açık fuzzy kümeleri var öyleki

$$\mu_1 \times \mu_2 \leq f^{-1}(\mu) \text{ ve } (\mu_1 \times \mu_2)(x_0, y_0) > \theta \text{ dır.}$$

$\mu_1(x_0), \mu_2(y_0) > \theta$ olduğundan μ_1, μ_2 sırasıyla x_0, y_0 ın açık komşulukları olduğunu verir. Ayrıca $\forall x, y \in E$ için

$$\mu(x+y) = f^{-1}(\mu)(x, y) \geq \mu_1 \times \mu_2(x, y) = \min\{\mu_1(x), \mu_2(y)\}.$$

Böylece Önerme 3.1.2 ile $\mu_1 + \mu_2 \leq \mu$ dır.

Şimdi $x_0 = y_0 = 0$ olduğunu varsayalım ve μ_1, μ_2 yukarıdaki gibi olsun. $\mu_3 = \mu_1 \wedge \mu_2 \wedge \mu$ fuzzy kümesi sıfırın bir komşuluğu öyleki $\mu_3 \leq \mu$, $\mu_3(0) > \theta$ ve $\mu_3 + \mu_3 \leq \mu_3$ dır. Bu da ispatı tamamlar.

3.6.1. Lemma

E, K üstünde bir fuzzy topolojik vektör uzayı ve μ sıfırın bir komşuluğu olsun. Bu durumda $0 < \theta < \mu(0)$ olmak üzere her bir θ reel sayısı için, sıfırın bir ρ açık komşuluğu var öyleki $\rho \leq \mu$ ve $\rho(0) > \theta$ ve pozitif δ reel sayısı ve $|t| \leq \delta$ şartını sağlayan her bir t skaleri için $t\rho \leq \mu$ dır [5].

İspat

Genelliği bozmadan μ nün açık olduğunu varsayabiliriz.

$$g: K \times E \rightarrow E, g(t, x) = tx$$

fonksiyonu süreklidir.

$g^{-1}(\mu)(0, 0) = \mu(0) > \theta$ olduğundan K da sıfırın bir α açık komşuluğu ve E de sıfırın bir μ_1 açık komşuluğu var öyleki,

$$\alpha(0), \mu_1(0) > \theta \text{ ve } \alpha \times \mu_1 \leq g^{-1}(\mu) \text{ dır.}$$

$\theta < \theta_1 < \alpha(0)$ ve $\rho = \theta_1 \wedge \mu_1 \wedge \mu$ kümesi olsun. Bu durumda ρ açıktır, $\rho \leq \mu$ ve $\rho(0) > \theta$ dır. K alışılmış topolojisine sahipken α , K da alttan yarı sürekli bir fonksiyon olduğundan, δ pozitif sayısı var öyleki

$$\{t \in K : |t| \leq \delta\} \subset \{t : \alpha(t) > \theta_1\}.$$

Şimdi, $|t| \leq \delta$ ve $\forall x \in E$ için,

$$\mu(tx) = g^{-1}(\mu)(tx) \geq (\alpha \times \mu_1)(t, x) \geq (\alpha \times \rho)(t, x) = \min\{\alpha(t), \rho(x)\} = \rho(x)$$

olur. Çünkü $\rho(x) \leq \theta_1 < \alpha(t)$ $\mu(tx) \geq \rho(x)$ olduğundan $\forall x \in E$ için Önerme 3.1.2 den $t\rho \leq \mu$ olur.

3.6.6. Önerme

μ , E fuzzy topolojik vektör uzayında sıfırın bir komşuluğu olsun. Bu durumda sıfırın bir μ_1 komşuluğu ve sıfırın dengeli μ_2 komşuluğu var öyleki her bir t ve $0 < |t| \leq 1$ için $\mu_1(0) = \mu_2(0) = \mu(0)$, $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu$ ve $t\mu_1 \leq \mu_1$ dir [5].

İspat

Önceki lemmadan, her bir $0 < \theta < \mu(0)$ için δ_θ pozitif reel sayısı ve E de sıfırın açık bir ρ'_θ komşuluğu var öyleki $|t| \leq \delta_\theta$ ise, $\rho'_\theta(0) > \theta$ ve $t\rho'_\theta \leq \mu$.

$$\rho_\theta = \sup\{t\rho'_\theta : 0 < |t| \leq \delta_\theta\}, \sigma_\theta = \sup\{t\rho'_\theta : |t| \leq \delta_\theta\}$$

Aşık olarak ρ_θ açıktır, $\rho_\theta \leq \sigma_\theta \leq \mu$ ve $\rho_\theta(0) > 0$ dır. Kolayca görülür ki, eğer $0 < |t| \leq 1$ ve σ_θ dengeli ise, $t\rho_\theta \leq \rho$ dır.

Eğer, $\mu_1 = \sup\{\rho_\theta : 0 < \theta < \mu(0)\}$, $\mu_2 = \sup\{\sigma_\theta : 0 > \theta > \mu(0)\}$ alınır, ispat tamamlanır.

3.6.3. Tanım

x , X fuzzy topolojik uzayında bir nokta olsun. Eğer x in her bir μ komşuluğu ve her bir $0 < \theta < \mu(x)$ için $\mu_1 \in \mathcal{F}$ var $\ni \mu_1 \leq \mu$ ve $\mu_1(x) > \theta$ ise, x in komşuluklarının bir $\mathcal{F}$ ailesine, x in tüm komşuluklarının sistemi için bir taban denir [5].

3.6.3. Sonuç

Bir E fuzzy topolojik vektör uzayında, sıfırın tüm dengeli komşuluklarının ailesi, sıfırın tüm komşuluklarının sisteminin bir tabanıdır [5].

3.6.7. Önerme

E , K cismi üzerinde bir fuzzy topolojik vektör uzayı, μ sıfırın bir komşuluğu ve $x_0 \in E$ olsun. Bu durumda her bir $0 < \theta < \mu(0)$ için K da sıfırın bir α açık komşuluğu var $\ni \forall t \in K$ için $\alpha(0) > \theta$ ve $\alpha(t) \leq \mu(tx_0)$ dır [5].

İspat

$f: K \times E \rightarrow E$, $f(t, x) = tx$ olsun.

$f(0, x_0) = 0$ olduğunda $f^{-1}(\mu)$, $(0, x_0)$ nın $K \times E$ de komşuluğudur. Böylece sıfırın K da açık bir α_1 komşuluğu ve x_0 nın E de açık bir μ_1 komşuluğu var öyleki

$\alpha_1 \times \mu_1 \leq f^{-1}(\mu)$ ve $\min\{\alpha_1(0), \mu_1(x_0)\} > \theta$ dır.

$\theta < \theta_1 < \min\{\alpha_1(0), \mu_1(x_0)\}$ olan bir θ_1 reel sayısı alalım.

$V = \{t \in K : \alpha_1(t) > \theta_1\}$

kümesi K nın alışılmış topolojisinde açık bir alt kümedir. $0 \in V$ olduğundan $\delta > 0$ var öyleki $\{t : |t| < \delta\} \subset V$

$|t| \geq \delta$ olmak üzere $\alpha : K \rightarrow I$ fonksiyonunu sürekli, $0 \leq \alpha < \theta_1$, $\alpha(t) = 0$ alalım. $\forall t \in K$ için $\alpha(t) \leq \mu(tx_0)$ olduğunu gösterelim.

Gerçekten, eğer $|t| \geq \delta$ ise, bu durumda $\alpha(t) = 0$ dır. $|t| < \delta$ için $\alpha_1(t) > \theta_1$ var ve böylece

$$\mu(tx_0) = f^{-1}(\mu)(t, x_0) \geq \min\{\alpha_1(t), \mu(x_0)\} > \theta_1 \geq \alpha(t) .$$

3.6.4. Sonuç

μ , E fuzzy topolojik vektör uzayında sıfırın bir komşuluğu, $x_0 \in E$ ve $0 < \theta < \mu(0)$ olsun. Bu durumda $\delta > 0$ var öyleki eğer $|t| \leq \delta$ ise, $\mu(tx_0) > \theta$ dır [5].

İspat

Önceki önermeden, K daki tüm t skalerleri için $\alpha(0) > \theta$ ve $\alpha(t) \leq \mu(tx_0)$ olan sıfırın açık bir α komşuluğu vardır.

$$V = \{t \in K : \alpha(t) > \theta\}$$

kümesi açıktır ve sıfırı kapsayan bir $\delta > 0$ var öyleki $|t| \leq \delta$ dır. Eğer $|t| \leq \delta$ ise, açıkça $\mu(tx_0) > \theta$ dır. $|t| \leq \delta$ iken $t \in V$ dir.

KAYNAKLAR

1. Zadeh, L.A., "Fuzzy Sets", *Inform and Control*, 8: 338-358 (1965).
2. Chang, C.L., "Fuzzy Topological Spaces", *J. Math. Anal. Appl.*, 24: 182-190 (1968).
3. Nanda, S., "On Fuzzy Topological Spaces", *Fuzzy Sets and Systems*, 19: 193-197 (1986).
4. Katsaras, A.K. and Liu, D.B., "Fuzzy Vector Spaces and Fuzzy Topological Vector Spaces", *J. Math. Anal. Appl.*, 58: 135-146 (1977).
5. Katsaras, A.K., "Fuzzy Topological Vector Spaces I", *Fuzzy Sets and Systems*, 6: 85-90 (1981).
6. Ming, P.P. and Liu, Ying-Ming, "Fuzzy Topology I. Neighborhood Structure of a Fuzzy Point and More-Smith Convergence", *J. Math. Anal. Appl.*, 76: 571-599 (1980).
7. Alaca, C., "Fuzzy Uzaylarında Süreklilik", Yüksek Lisans Tezi, *Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara, 6-29 (2001).
8. Wong, C.K., "Fuzzy Topology: Product and Quotient Theorems", *J. Math. Anal. Appl.*, 45: 512-521 (1974).
9. Parlak, B., "Sezgisel Belirtisiz Topolojik Uzaylarda Belirtisiz Bağlantılıklar", Yüksek Lisans Tezi, *Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara, 3-4 (2003).
10. Yıldız, C., "Topolojik Uzayın Temel Kavramları", Genel Topoloji, *Gazi Üniversitesi*, Ankara, 69-70 (2002).
11. Aygün, H., "Fuzzy Topolojik Uzayları", Yüksek Lisans Tezi, *Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Trabzon, 45-50 (1992).
12. Hacısalıhoğlu, H.H., "Bir Cisim Üzerinde Vektör Uzayı", *Lineer Cebir*, Gazi Üniversitesi, Ankara, 113-114 (1996).
13. Lowen, R., "Fuzzy Topological Spaces and Fuzzy Compactness", *J. Math. Anal. Appl.*, 56: 621-633 (1976).
14. Lowen, R., "Initial and Final Topologies and the Fuzzy Tychonoff Theorem", *J. Math. Anal. Appl.*, 58: 11-21 (1977).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : ERCAN, Mehmet Akif
 Uyuğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 08.11.1979 Ankara
 Medeni hali : Bekar
 Telefon : 0(505) 350 73 79
 e-mail : akifercan79@mynet.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Ankara Üniversitesi Matematik Bölümü	2001
Lise	Çankaya 50. Yıl Lisesi	1996

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2001–...	Milli Eğitim Bakanlığı KATEM Lisesi	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Sinema, Basketbol, Gezi