



**G -Metrik Uzaylarda Devirli Daraltan Dönüşümler
İçin Sabit Nokta Teoremleri**

Çiğdem YALÇIN

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Dr. Öğr. Üyesi İbrahim KARAHAN**

**2019
Her hakkı saklıdır.**



**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**G-METRİK UZAYLARDA DEVİRLİ DARALTAN DÖNÜŞÜMLER İÇİN
SABİT NOKTA TEOREMLERİ**

Çiğdem YALÇIN

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi İbrahim KARAHA

Anabilim Dalı: Matematik

Erzurum

2019

Her hakkı saklıdır

T.C.
ERZURUM TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ ONAY FORMU

**G-METRİK UZAYLARDA DEVİRLİ DARALTAN DÖNÜŞÜMLER İÇİN
SABİT NOKTA TEOREMLERİ**

Dr. Öğr. Üyesi İbrahim KARAHAN danışmanlığında, Çiğdem YALÇIN tarafından hazırlanan bu çalışma 17 / 07 / 2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Ana Bilim Dalı'nda Doktora tezi olarak **Oy birliği ile** kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR	İmza	:
Üye	: Doç. Dr. Ceren S. ELMALI	İmza	:
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi İbrahim KARAHAN	İmza	:

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum

Doç. Dr. Arzu GÖRMEZ
Enstitü Müdürü

Bu tez çalışması tarafından nolu proje ile desteklenmiştir.

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki tüm bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

17 / 07 / 2019

Çiğdem YALÇIN

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

***G*-METRİK UZAYLARDA DEVİRLİ DARALTAN DÖNÜŞÜMLER İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ**

Çiğdem YALÇIN

Erzurum Teknik Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi İbrahim KARAHAN

Sabit nokta teorisi nonlineer analizin en önemli konularından biridir. Bu konunun mihenk taşlarından biri birçok alanda uygulaması olan Banach sabit nokta teoremidir. Bu nedenle yüzyıla yakın bir süredir bu teoremin farklı şekillerde genelleştirmeleri üzerine çalışılmaktadır. Yapılan çalışmalar genelde dönüşüm sınıfı ve üzerinde çalışılan uzay üzerine yoğunlaşmıştır. Buradan yola çıkarak sürekli olması gerekmeyen ve sabit nokta teorisinde önemli bir yere sahip olan devirli daraltan dönüşümler tanımlanmıştır. Bu dönüşüm sınıfının farklı şekillerde genelleştirmeleri tanımlanmış ve bazı genelleştirilmiş metrik uzaylarda sabit noktalarının varlık ve tekliği ile ilgili teoremler ispatlanmıştır. Bu tezde genelleştirilmiş metrik uzaylar içerisinde en popüler olan *G*-metrik uzaylar ve bu uzaylarda devirli ve genelleştirilmiş devirli daraltan dönüşümlerin sabit noktalarının varlık ve tekliği ile ilgili yapılan çalışmalar derlenmiştir.

2019, 56 sayfa

Anahtar Kelimeler: Sabit nokta, *G*-metrik uzay, Devirli daraltan dönüşüm

ABSTRACT

MS. Thesis

FIXED POINT THEOREMS FOR CYCLIC CONTRACTION MAPPINGS IN G -METRIC SPACES

Çiğdem YALÇIN

Erzurum Technical University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Maths

Supervisor: Assist. Prof. Dr. İbrahim KARAHAN

Fixed point theory is one of the most important subjects of nonlinear analysis. One of the cornerstones of this subject is Banach fixed point theorem which has applicaiton areas in many fields. For this reason, generalizations of this theorem in different ways have been studied for nearly a century. The studies are generally focused on the class of mappings and the space studied. Starting from this point, cyclic contraction mappings which do not have to be continuous and have an important place in fixed point theory are defined. The generalizations of this class of mappings are defined in different ways and theorems about the existence and uniqueness of fixed points have been proved in some generalized metric spaces. In this thesis, G -metric spaces, which are the most popular among generalized metric spaces, and the studies on the existence and uniqueness of fixed points of cyclic and generalized cyclic contraction mappings in these spaces are compiled.

2019, 56 page

Keywords: Fixed point, G -metric space, cyclic contraction mapping

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma, Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Bu çalışmada bana her türlü kolaylığı sağlayan, bilgi ve tecrübeleriyle beni destekleyen çok değerli hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi İbrahim KARAHAN'a en içten dileklerimle teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Tüm hayatım boyunca maddi manevi desteklerini hep yanımda hissettiğim değerli annem, babam ve kardeşlerime en içten duygularıyla teşekkür ederim.

Çiğdem YALÇIN
Temmuz 2019

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	3
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	5
3.1. Temel Kavramlar	5
3.2. Sabit Nokta Kavramı.....	6
3.3. G -metrik Uzay.....	9
3.4. G -metrik Uzayın Özellikleri.....	11
3.5. G -Metrik Uzayın Topolojisi.....	14
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA.....	19
5. SONUÇ ve ÖNERİLER.....	20
KAYNAKLAR	53
ÖZGEÇMİŞ.....	56

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$D(x, r)$	Bir metrik uzayda x merkezli r yarıçaplı açık yuvar
$B_G(x, r)$	x merkezli r yarıçaplı G -yuvar
$F(T)$	T nin sabit noktalarının kümesi
$\mathbb{F}$	Birden fazla dönüşümün ortak sabit noktalarının kümesi
ψ	Uzaklık değiştirme fonksiyonu
$\tau(G)$	G -metrik topoloji
$\mathcal{F}$	Tüm fonksiyonların kümesi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Sabit Noktanın Geometrik Anlamı	7
--	---



1. GİRİŞ

Sabit nokta teorisi nonlinear analizin en temel ve en önemli konularından biridir. Bu konunun önemli teoremlerinden biri Banach (1922) tarafından ispatlanan “Daraltan Dönüşüm Teoremi” olarak da adlandırılan Banach sabit nokta teoremidir. Fonksiyonel analizde de büyük bir etkiye sahip olan bu teoremin önemi birçok uygulama alanına sahip olmasından kaynaklanmaktadır. Bu öneme binaen son yüz yılda bu teoremin farklı yönlerden genelleştirmeleri yapılmaktadır. Bu genelleştirme çalışmaları temel olarak teoremden yer alan dönüşüm üzerinde ki daralma şartlarını zayıflatma üzerine yapılmaktadır.

Banach sabit nokta teoreminde yer alan daraltan dönüşümlerin, tanımı gereği sürekli olmaları gerekmektedir. Dolayısıyla “Sürekli olması gerekmeyen özel tip bir daraltan dönüşüm tanımlamak mümkün mü?” ve “Tanımlanacak dönüşümün sabit noktasının varlığı ve tekliği ispatlanabilir mi?” gibi sorular ortaya çıkmıştır. Kirk et al. (2003) bu soruya devirli daraltan dönüşümleri tanımlayarak cevap vermiş ve tam metrik uzaylarda tanımlı devirli daraltan dönüşümlerin sabit noktasının var ve tek olduğunu ispatlayarak Banach sabit nokta teoreminin önemli bir genelleştirmesini ispatlamıştır. Aynı çalışmada yazarlar Boyd-Wong (1969) sabit nokta teoreminin ve Caristi (1976) sabit nokta teoreminin devirli daraltan dönüşümler için olan versiyonlarını ispatlamışlardır. Kirk ve arkadaşları tarafından yapılan bu çalışmanın ardından Petrusel (2005) devirli daraltan dönüşümlerin periyodik noktaları hakkında bazı sonuçlar elde etmiştir. 2010 yılında Pacurar and Rus (2010) ise metrik uzaylarda tanımlı devirli ϕ -daraltan dönüşümler için bazı sabit nokta teoremleri ispatlamışlardır. İki yıl sonra ise Karapınar (2011) metrik uzayda devirli zayıf ϕ -daraltan dönüşümlerin sabit noktasının var ve tek olduğunu göstermiştir. Yakın zamanda Bilgili ve Karapınar (2013) ve Bilgili vd (2014) devirli dönüşümlerle ilgili bazı sonuçları G -metrik uzaylara taşımışlardır. Aydi et al. (2017) ise G -metrik uzaylarda genelleştirilmiş devirli daraltan dönüşümlerin sabit noktalarının varlık ve tekliği ile ilgili birtakım teoremler ifade ve ispat etmişlerdir. Devirli dönüşümlerle ilgili yapılan diğer önemli çalışmalardan bazıları Rus (2005); Karapınar and Sadarangani (2011); Nashine (2012); Aydi et al. (2012) ve Jleli et al. (2012) dir.

Banach sabit nokta teoreminin genelleştirilmesi verilen uzayı daha genel olan bir uzayla değiştirmekle de mümkündür. Buradan yola çıkarak birçok genelleştirilmiş metrik uzay tanımlanmıştır. Takahashi 1970 yılındaki makalesinde, metrik uzaylardaki konvekslik yapısını tanıtip genişlemeyen dönüşümler için bazı sabit nokta teoremleri üzerine çalışmıştır. Göhler (1963) 2-metrik uzayları ve Dhage (1992) ise D -metrik uzayları tanımlamışlardır. Ha et al. (1988) yapmış oldukları bir çalışmada Göhler'in çalışmalarının metrik uzayda ki çalışmalardan bağımsız olduğunu göstermiştir. Bununla birlikte D -metrik uzay kavramının topolojik açıdan bazı sıkıntıları var olduğundan Mustafa and Sims (2005) G -metrik uzayları tanımlamışlar ve ardından bazı özel dönüşüm sınıflarının sabit noktalarının varlık ve tekliklerini ispatlamışlardır. Mustafa ve Sims den sonra birçok matematikçi G -metrik uzaylarda çalışmalar yapmış ve metrik uzaylarda bilinen birçok teoremi G -metrik uzaylara taşımışlardır. Mustafa et al. (2008), Mustafa et al. (2009), Ding and Karapınar (2012), Tahat et al. (2012) ve Agarwal and Karapınar (2013) G -metrik uzayda yapılan çalışmalardan bazılarıdır.

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Literatür bilgisinin verildiği giriş bölümünden sonra ikinci bölümde tezde önemli yere sahip olan çalışmalar hakkında bilgi verilen kaynak özetleri bölümü verilmiştir. Üçüncü bölüm olan materyal ve yöntem bölümünde sabit nokta teorisi ve genelleştirilmiş metrik uzaylarla ilgili temel tanımlar ve özellikleri verilmiştir. Dördüncü bölümde G -metrik uzaylarda devirli ve genelleştirilmiş devirli daraltan dönüşümlerle ilgili yapılan çalışmalar derlenmiştir. Son bölümde ise derlenen çalışmalardan elde edilen bazı sonuçlara yer verilmiştir.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Mustafa ve Sims bu çalışmada G -metrik uzayı tanımlamış ve G -metrik uzayın topolojisi hakkında bilgiler vermişlerdir. G -metrik uzayın ilk tanımlandığı çalışmadır ve bu çalışmada yazarlar G -metrik uzayda yakınsaklık, süreklilik, tamlık, kompaktlık kavramlarını tanımlamış ve bunların özelliklerini vermişlerdir (Mustafa and Sims 2006).

Yazarlar G -metrik uzayda tanımlanan kesin daraltan dönüşümlerin sabit noktalarının varlığını ispatlamışlar ve daha zayıf şartlar ile tamlığı yeniden genelleştirmişlerdir. Üstelik verilen koşulların G -metrik uzayların tamlığını garanti etmeyeceğini söylemişlerdir (Mustafa et al. 2009).

Zead Mustafa ve arkadaşları G -metrik uzayda genişlemeyen dönüşümü tanımlamış ve ayrıca bir tam G -metrik uzayda tanımlanan genişlemeyen dönüşümlerin bir sınıfı için birkaç sabit nokta teoremi ispatlamışlardır (Mustafa et al. 2010).

Yazarlar sıralı metrik uzaylarda devirli ϕ -daraltan dönüşümlerinin en iyi yaklaşım noktaları ile alakalı bazı sonuçlar vermişlerdir ve bu sonuçları bazı bilinen sonuçlara genelleştirmişlerdir (Derafshpour et al. 2011).

Yazar bu çalışmada devirli zayıf ϕ -daraltan kavramını tanımlamış ve bir T dönüşümünün devirli ϕ -daraltan şartını sağlarsa X tam metrik uzayında bir sabit noktaya sahip olduğunu söylemiştir (Karapınar 2011).

Bu çalışmada G -metrik uzaylarda geliştirilmiş devirli daraltan dönüşümler tanımlanmış ve bazı sabit nokta teoremleri ortaya konulmuştur. Sunulan teoremleri çeşitli bilinen sabit nokta sonuçlarına genişletilmiştir. Sonuçları destekleyen örnekler verilmiştir. Son olarak lineer olmayan integral denklemlerin bir sınıfı için çözümlerin varlığı ve tekliği ile alakalı bir uygulama verilmiştir (Nashine and Kadelburg 2013).

Yazarlar bu çalışmasında Zead ve Sims tarafından üretilen G -metrik uzaylarda kesin devirli dönüşümlerin sabit noktalarının varlığını ve tekliğini ispatlamışlardır.

Ayrıca bu konu hakkında literatürde var olan bazı sonuçları genelleştirmişlerdir (Bilgili ve Karapınar 2013).

Aydi ve arkadaşları G -metrik uzayda genelleştirilmiş devirli daraltan dönüşüm ile alakalı sabit nokta teoremleri ispatlamış ve bazı alt sonuçlar elde etmişlerdir. Sunulan sonuçlar literatürde var olan birçok sonuçları genelleştirmektedir. Üstelik yazarlar lineer olmayan integral denklemlerin bir sınıfının çözümünün varlığı ve tekliği ile alakalı bazı temel örnekler ve uygulamalar vermişlerdir (Aydi et al. 2017).



3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Temel Kavramlar

Tanım 3.1.1: X boş kümeden farklı bir küme ve $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ bir dönüşüm olsun. Eğer d dönüşümü her $x, y, z \in X$ için

$$\mathbf{M1.} \quad d(x, y) \Leftrightarrow x = y$$

$$\mathbf{M2.} \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$\mathbf{M3.} \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$$

şartlarını sağlarsa d ye X üzerinde bir metrik ve bu metrikle beraber (X, d) ikilisine de metrik uzay denir.

Tanım 3.1.2: (X, d) bir metrik uzay, (x_n) bu uzayda bir dizi ve $x \in X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve her $n > n_0$ için

$$d(x_n, x) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa (x_n) dizisi x noktasına yakınsıyor denir ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ veya } x_n \rightarrow x \text{ (} n \rightarrow \infty \text{)}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.3: (X, d) bir metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve her $n, m > n_0$ için

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa, (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir.

Tanım 3.1.4: (X, d) bir metrik uzayındaki her (x_n) Cauchy dizisi yakınsak ise uzaya tamdır denir.

Tanım 3.1.5: (X, d) bir tam metrik uzay, $p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_p$ X in kapalı alt kümeleri, ve $Y = \bigcup_{i=1}^p \mathcal{A}_i$ olmak üzere

i) $T(\mathcal{A}_1) \subseteq \mathcal{A}_2, \dots, T(\mathcal{A}_{p-1}) \subseteq \mathcal{A}_p \subseteq \mathcal{A}_1$

ii) Her $x \in \mathcal{A}_i$ ve $y \in \mathcal{A}_{i+1}$ ($\mathcal{A}_{p+1} = \mathcal{A}_1$) için $d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$ olacak şekilde $k \in (0, 1)$ vardır.

şartlarını sağlayan $T: Y \rightarrow Y$ dönüşümüne devirli daraltan dönüşüm denir (Kirk et al. 2003).

Dikkat edilirse daraltan bir dönüşüm sürekli olmasına rağmen devirli daraltan bir dönüşümün sürekli olması gerekmez.

Daraltan her dönüşüm devirli daraltandır ancak tersi her zaman geçerli olmak zorunda değildir.

Tanım 3.1.6: $\psi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Eğer

i) ψ - sürekli ve azalmayan

ii) $\psi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$

şartları sağlanırsa ψ fonksiyonuna uzaklık değiştirme fonksiyonu denir (Khan et al. 1984)

Tanım 3.1.7: (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. φ uzaklık değiştirme fonksiyonu olmak üzere her $x, y \in X$ için

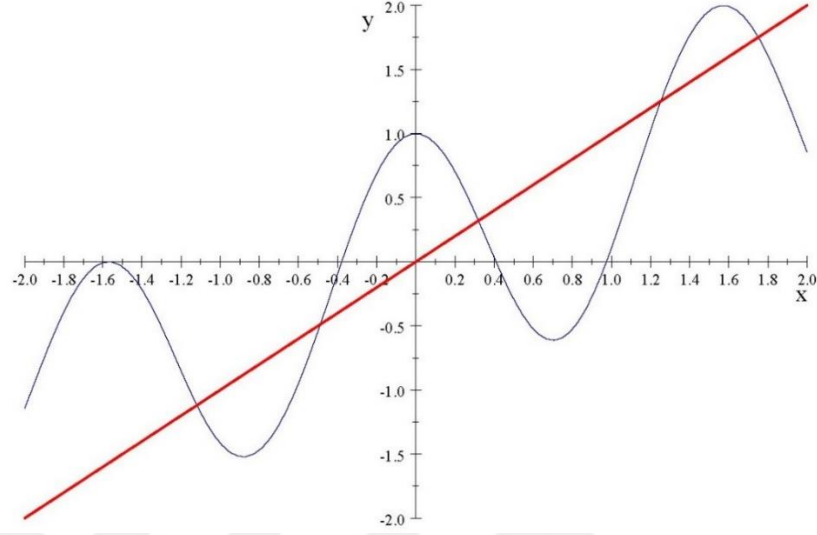
$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y) - \varphi(d(x, y))$$

ise T ye zayıf kesin daraltan dönüşüm denir (Rhoades 2001).

3.2 Sabit Nokta Kavramı

Tanım 3.2.1: X boş kümeden farklı bir küme ve T , X den kendi üzerine tanımlı bir dönüşüm olsun. $Tx = x$ eşitliğini sağlayan x elemanına T nin sabit noktası denir ve T nin bütün sabit noktalarının kümesi $F(T)$ ile gösterilir (Agarwal et al. 2007).

Sabit nokta geometrik olarak şu şekilde yorumlanabilir: $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ye bir dönüşüm ise bu durumda T nin sabit noktaları, T nin grafiği ile $y = x$ doğrusunun kesiştiği noktalarının apsisleridir.



Şekil 2.1. Sabit Noktanın Geometrik Anlamı

O halde $Tx = x$ denkleminin çözümleri T nin sabit noktalarıdır. T nin sabit noktalarının kümesi $F(T)$ veya $FixT$ ile gösterilir. Yani,

$$F(T) = \{x \in X: Tx = x\}$$

dir. Aşağıda dönüşümlerin sabit noktalarıyla ilgili birkaç örnek verilmiştir.

1) $X = \mathbb{R}^+$ olmak üzere $T: X \rightarrow X$, $Tx = \frac{3}{2}(x - \frac{1}{x})$ için $F(T) = \{\sqrt{3}\}$ tür.

2) $X = \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $T: X \rightarrow X$, $T(x) = a + x$ şeklinde tanımlanan öteleme dönüşümlerin sabit noktası yoktur.

3) $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $T: X \rightarrow X$, $Tx = x^5 - 3x^4 - x^3 + 3x^2 - 5x + 18$ dönüşümü için $F(T) = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}, 3\}$ tür.

4) $X = \mathbb{R}^2$ olmak üzere $T: X \rightarrow X$, $T(x, y) = (x, -y)$ dönüşümü için $F(T) = \{(x, 0): x \in \mathbb{R}\}$ dir.

5) $X = \mathbb{R}$, $T_1, T_2: X \rightarrow X$, $T_1x = x^2 - 6x + 12$ ve $T_2x = x^2 - 5x + 9$ dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesi $F = F(T_1) \cap F(T_2) = \{3\}$ tür.

6) $X = \mathbb{R}^2$, $T_1, T_2: X \rightarrow X$, $T_1(x, y) = (-x, y)$ ve $T_2(x, y) = (3x, y)$ dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesi $F = F(T_1) \cap F(T_2) = \{(0, y)\}$ dir.

Tanım 3.2.2: (X, d) bir metrik uzay ve T, X den kendi üzerine tanımlı bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) \quad (3,1)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $k \geq 0$ varsa, T ye Lipschitzian bir dönüşüm denir (Agarwal et al. 2009).

Tanım 3.2.3: (X, d) bir metrik uzay ve T, X üzerinde bir Lipschitzian dönüşüm olsun. Eğer (3.1) eşitsizliği $[0, 1)$ aralığında sağlanıyorsa T ye daraltan dönüşüm denir (Agarwal et al. 2009).

Daraltan dönüşümlerle ilgili aşağıdaki teorem sabit nokta teorisinin en önemli teoremlerinden biridir.

Teorem 3.2.4: (Banach Sabit Nokta Teoremi) Tam metrik uzayda tanımlı daraltan bir dönüşümün tek sabit noktası vardır (Banach 1922).

Tanım 3.2.5: (X, d) bir metrik uzay ve T, X üzerinde tanımlı bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

ise T ye kesin daraltan dönüşüm denir (Agarwal et al. 2009).

Tanım 3.2.6: (X, d) bir metrik uzay ve T, X üzerinde tanımlı bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$$

ise T ye genişlemeyen dönüşüm denir (Agarwal et al. 2009).

Örnek 3.2.7: $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $Tx = 1 + \ln(1 + e^x)$ olsun. T dönüşümü kesin daraltan olup daraltan değildir. Çünkü

$$T'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} < 1$$

dir. Ayrıca Ortalama Değer Teoreminden

$$T'(c) = \frac{T(x) - T(y)}{x - y}$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $T'(c) < 1$ olur. Yani

$$T'(c) = \frac{T(x) - T(y)}{x - y} < 1 \Rightarrow |T(x) - T(y)| < |x - y|$$

dir.

3.3. G -metrik Uzay

Metrik uzayın genelleştirmeleri son zamanlarda sıkça çalışılan konulardandır. Bu bölümde en popüler olan G -metrik uzay kavramı ve bazı özellikleri verilecektir.

Tanım 3.3.1: X boş kümeden farklı bir küme ve $G: X \times X \times X \rightarrow [0, \infty)$ bir dönüşüm olsun. Eğer

G1. $G(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x = y = z$

G2. $\forall x, y \in X$ ve $x \neq y$ için $G(x, x, y) > 0$

G3. $\forall x, y, z \in X$ ve $z \neq y$ için $G(x, x, y) \leq G(x, y, z)$

G4. $G(x, y, z) = G(x, z, y) = G(y, z, x) = \dots$ (üç değişkene göre simetri)

G5. $\forall x, y, z, a \in X$ için $G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(a, y, z)$ (dikdörtgen eşitsizliği)

şartlar sağlanırsa G fonksiyonuna X üzerinde bir G -metrik ve (X, G) ikilisine de bir G -metrik uzay adı verilir. Kısaca (X, G) yerine X yazılabilir (Mustafa and Sims 2006).

(X, G) bir G -metrik uzay olsun. $d_G: X \times X \rightarrow [0, \infty)$

$$d_G(x, y) = G(x, y, y) + G(x, x, y)$$

şeklinde tanımlanan dönüşümün bir metrik dönüşümü olduğu kolayca görülür. Benzer şekilde (X, d) alışılmış bir metrik uzay ve $G: X \times X \times X \rightarrow [0, \infty)$ dönüşümü her $x, y, z \in X$ için

$$G(x, y, z) = d(x, y) + d(y, z) + d(z, x)$$

şeklinde tanımlanırsa (X, G) bir G -metrik uzay olur.

Örnek 3.3.2: X boş kümeden farklı bir küme olmak üzere $G: X \times X \times X \rightarrow [0, \infty)$, $G(x, y, z) = \frac{1}{3}[d(x, y) + d(y, z) + d(z, x)]$ dönüşümü ile birlikte X bir G -metrik uzaydır. Bu durumda $d_G(x, y) = G(x, y, y) + G(x, x, y)$ şeklinde tanımlanan $d_G: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ dönüşümü bir metrik dönüşümüdür.

Örnek 3.3.3: $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$, $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$ dönüşümü X üzerinde bir metriktir. Eğer $G: X \times X \times X \rightarrow [0, \infty)$ dönüşümü $G(x, y, z) = d(x, y) + d(y, z) + d(z, x)$ şeklinde tanımlanırsa X bir G -metrik uzaydır.

Tanım 3.3.4: (X, G) bir G -metrik uzay olsun. Eğer her $x, y \in X$ için $G(x, y, y) = G(y, x, x)$ ise X uzayına simetriktir denir.

Örnek 3.3.5: $X, \mathbb{R}$ nin boş kümeden farklı bir alt kümesi ve $G: X \times X \times X \rightarrow [0, \infty)$ dönüşümü her $x, y, z \in X$ için

$$G(x, y, z) = |x - y| + |x - z| + |y - z|$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda X uzayı simetriktir.

Her G -metrik uzayın simetrik olması gerekmez.

Örnek 3.3.6: $X = \{a, b\}$ olmak üzere $G: X \times X \times X \rightarrow [0, \infty)$ dönüşümü

$$G(a, a, a) = G(b, b, b) = 0, G(a, a, b) = 1 \text{ ve } G(a, b, b) = 2$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda G bir G -metriktir fakat $G(a, a, b) \neq G(a, b, b)$ olduğu için simetrik değildir (Mustafa and Sims 2006).

3.4 G -metrik Uzayın Özellikleri

Önerme 3.4.1: X bir G -metrik uzay olsun. Her $x, y, z, a \in X$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $G(x, y, z) \leq G(x, x, y) + G(x, x, z)$
2. $G(x, y, y) \leq 2G(y, x, x)$
3. $G(x, y, z) \leq G(x, a, z) + G(a, y, z)$
4. $G(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x = y = z$
5. $G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(y, a, a) + G(z, a, a)$
6. $G(x, y, z) \leq \frac{2}{3} [G(x, y, a) + G(x, a, z) + G(a, y, z)]$
7. $G(x, y, y) \leq 2G(x, y, z)$
8. $|G(x, y, z) - G(x, y, a)| \leq \max\{G(a, z, z), G(z, a, a)\}$
9. $|G(x, y, z) - G(x, y, a)| \leq G(x, a, z)$
10. $|G(x, y, z) - G(y, z, z)| \leq \max\{G(x, z, z), G(z, x, x)\}$
11. $|G(x, y, y) - G(y, x, x)| \leq \max\{G(y, x, x), G(x, y, y)\}$ dır (Agarwal et al. 2015).

İspat: 1. X bir G -metrik uzay olsun. $G5$ şartında $a = x$ alınır ve $G4$ şartı kullanılırsa

$$\begin{aligned} G(x, y, z) &= G(y, x, z) \leq G(y, x, x) + G(x, x, z) \\ &= G(x, x, y) + G(x, x, z) \end{aligned}$$

elde edilir.

2. $G4$ ve $G5$ şartları göz önüne alınırsa

$$G(x, y, y) = G(y, y, x) \leq G(y, x, x) + G(x, y, x) = 2G(y, x, x)$$

olur.

3. $a = y$ ya da $a = x$ için eşitsizliğin sağlandığı kolayca görülür. Kabul edelim ki $a \neq x$ ve $a \neq y$ olsun. Eğer $a = z$ alınırsa $G5$ şartından

$$G(x, y, z) = G(x, y, a) \leq G(x, a, a) + G(a, y, a) \leq G(x, a, z) + G(a, y, z)$$

yazılır. Şimdi $a \neq z$ olsun. Bu durumda $G5$ ve $G3$ şartlarından

$$G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(a, y, z) = G(x, a, z) + G(a, y, z)$$

elde edilir.

4. Kabul edelim ki $G(x, y, z) = 0$ olsun. İddia ediyoruz ki $y \neq z$ ise bu durumda $x = y$ dir. Gerçekten $0 \leq G(x, x, y) \leq G(x, y, z) = 0$ olup buradan $G(x, x, y) = 0$ bulunur. Eğer $x \neq y$ ise bu durumda $G2$ şartından $G(x, x, y) > 0$ olup $G(x, x, y) = 0$ olur. O halde $x = y$ dir. G -metrik uzayı tüm değişkenlerine göre simetrik olduğu için eğer $z \neq y$ ise bu durumda $x = z$ dir. Dolayısıyla $x = y = z$ olur. Fakat bu durum $y \neq z$ olması ile çelişir. O halde $x = y = z$ olmalıdır.

5. $G4$ ve $G5$ şartları kullanılarak

$$\begin{aligned} G(x, y, z) &\leq G(x, a, a) + G(a, y, z) = G(x, a, a) + G(y, a, z) \\ &\leq G(x, a, a) + G(y, a, a) + G(a, a, z) \end{aligned}$$

elde edilir.

6. 3. özellik ve $G4$ şartı kullanılırsa

$$\begin{aligned} G(x, y, z) &\leq G(x, a, z) + G(a, y, z) \\ G(x, y, z) &= G(y, z, x) \leq G(y, a, x) + G(a, z, x) \\ G(x, y, z) &= G(z, x, y) \leq G(z, a, y) + G(a, x, y) \end{aligned}$$

olup taraf tarafa toplanırsa

$$3G(x, y, z) \leq 2[G(x, y, a) + G(x, a, z) + G(a, y, z)]$$

bulunur.

7. *i.* $y = z$ olsun. Bu durumda

$$G(x, y, y) = G(x, y, z) \leq 2G(x, y, z)$$

olur.

ii. $y \neq z$ olsun. 2. özellik ve G_3 şartından

$$G(x, y, y) \leq 2G(x, x, y) \leq 2G(x, y, z)$$

bulunur.

Önerme 3.4.2: X bir G -metrik uzay, $k > 0$, G_1 ve G_2 X üzerinde bir G -metrik uzay olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $G_1(x, y, z) = \min\{k, G(x, y, z)\}$

2. $G_2(x, y, z) = \frac{G(x, y, z)}{k + G(x, y, z)}$

3. $G_3(x, y, z) = \begin{cases} G(x, y, z), & \text{bazı } i \text{ ler için } x, y, z \in A_i \\ k + G(x, y, z), & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$ (Mustafa and Sims 2006).

Önerme 3.4.3: X bir G -metrik uzay olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

i. (X, G) simetriktir.

ii. $\forall x, y, a \in X$ için $G(x, y, y) \leq G(x, y, a)$

iii. $\forall x, y, z, a, b \in X$ için $G(x, y, z) \leq G(x, y, a) + G(z, y, b)$ (Mustafa and Sims 2006).

İspat ($i \Rightarrow ii$) (X, G) simetrik olsun. Bu durumda her $x, y, a \in X$ için $a = x$ alınırsa

$$G(x, y, y) = G(y, x, x) \leq G(y, a, x) + G(a, x, x) = G(y, a, x) + G(x, x, x) \leq G(x, y, a)$$

bulunur.

(**ii** $\Rightarrow$ **iii**) $\forall x, y, a \in X$ için $G(x, y, y) \leq G(x, y, a)$ olsun. Buradan $\forall x, y, z, a, b \in X$ için

$$G(x, y, z) \leq G(x, y, y) + G(z, y, y) \leq G(x, y, a) + G(z, y, b)$$

elde edilir.

(**iii** $\Rightarrow$ **i**) $\forall x, y, z, a, b \in X$ için $G(x, y, z) \leq G(x, y, a) + G(z, y, b)$ olduğunu kabul edelim. $a = x$ ve $b = y$ alınırsa $G(x, y, z) \leq G(x, y, x) + G(z, y, y)$ olur. Buradan

$$G(x, y, y) \leq G(x, y, x) + G(y, y, y)$$

ve

$$G(y, x, x) \leq G(y, x, y) + G(x, x, x)$$

olup

$$G(x, y, y) = G(y, x, x)$$

bulunur.

3.5. G -Metrik Uzayın Topolojisi

Bu başlıkta bir G -metrik uzayda ki yakınsaklık, süreklilik, kompaktlık gibi kavramlar verilecektir.

Tanım 3.5.1: X bir G -metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $r > 0$ bir reel sayı olsun.

$$B_G(x_0, r) = \{y \in X : G(x_0, y, y) < r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı G -yuvar denir (Mustafa and Sims 2006).

Önerme 3.5.2: X bir G -metrik uzay olsun. Bu durumda her $x_0 \in X$ ve $r > 0$ için

1. Eğer $G(x_0, x, y) < r$ ise $x, y \in B_G(x_0, r)$,

2. $y \in B_G(x_0, r)$ ise $B_G(y, \delta) \subseteq B_G(x_0, r)$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır (Mustafa and Sims 2006).

X metrik uzayındaki bütün G -yuvarların ailesi $\mathcal{B} = \{B_G(x, r) : x \in X, r > 0\}$, X üzerindeki bir $\tau(G)$ topolojisinin yani G -metrik topolojinin tabanıdır.

Önerme 3.5.3: X bir G -metrik uzay, her $x_0 \in X$ ve $r > 0$ için

$$B_G(x_0, \frac{1}{3}r) \subseteq B_{d_G}(x_0, r) \subseteq B_G(x_0, r)$$

dir (Mustafa and Sims 2006).

Bu önermeden d_G den türeyen metrik topoloji ile G -metrik topoloji olan $\tau(G)$ nin çakıştığı sonucuna varılır. Yani her G -metrik uzay izometrik olarak bir metrik uzaya denk değilken topolojik olarak denktir.

Tanım 3.5.4: 1. X bir G -metrik uzay olsun. Eğer $(x_n) \subseteq X$ dizisi $\tau(G)$ de x e yakınsıyorsa (x_n) dizisine x e G -yakınsaktır denir. Başka bir ifadeyle eğer $\lim_{n,m \rightarrow \infty} G(x_n, x_m, x) = 0$ ise (x_n) dizisi $x \in X$ noktasına G -yakınsaktır. Yani her $\varepsilon > 0$ için $n, m \geq N$ iken $G(x_n, x_m, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisine X de G -yakınsak ve x e de dizinin limiti denir ve $(x_n) \rightarrow x$ ya da $\lim_{n,m \rightarrow \infty} G(x_n, x_m, x) = 0$ şeklinde gösterilir.

2. Eğer $\lim_{n,m,l \rightarrow \infty} G(x_n, x_m, x_l) = 0$ ise (x_n) ye bir G -Cauchy dizisi denir. Yani her $\varepsilon > 0$ için $n, m, l \geq N$ iken $G(x_n, x_m, x_l) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisine G -Cauchy dizisi adı verilir (Mustafa and Sims 2006).

Önerme 3.5.5: Bir (X, G) metrik uzayında G -yakınsak bir dizinin limiti tektir (Agarwal et al. 2015).

İspat: (x_n) dizisi X de x ve y noktalarına yakınsayan bir dizi olsun. $x = y$ olduğunu göstermeliyiz. $(x_n) \rightarrow x$ ve $(y_n) \rightarrow y$ olduğundan

$$G(x_n, x_m, x) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n, m \geq n_1$$

ve

$$G(x_n, x_m, y) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n, m \geq n_2$$

olacak şekilde bir $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ vardır. $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ olsun. Bu durumda her $n \geq n_0$ için

$$\begin{aligned} G(x, y, y) &\leq G(x, x_n, x_n) + G(x_n, y, y) \\ &\leq G(x_n, x_n, x) + 2G(x_n, x_n, y) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + 2\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

olup buradan $G(x, y, y) = 0$ ve G2 şartından $x = y$ yazılır.

Önerme 3.5.6: Bir X G -metrik uzayında her G -yakınsak dizi G -Cauchy dizisidir (Agarwal et al. 2015).

İspat: (x_n) X de G -yakındaki bir dizi olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $n, m \geq n_0$ iken

$$G(x_n, x_m, x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Her $n, m, l \geq N$ için

$$\begin{aligned} G(x_n, x_m, x_l) &\leq G(x_n, x, x) + G(x, x_m, x_l) \\ &\leq 2G(x_n, x_n, x) + G(x_m, x_l, x) \\ &\leq 2\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

yazılır. Böylece (x_n) bir G -Cauchy dizisidir.

Önerme 3.5.7: X bir G -metrik uzay olsun. Bu durumda $(x_n) \subseteq X$ dizisi ve $x \in X$ için aşağıdakiler denktir.

- (1) (x_n) dizisi x e G -yakınsaktır.
- (2) $n \rightarrow \infty$ için $d_G(x_n, x) \rightarrow 0$ dır.
- (3) $n \rightarrow \infty$ için $G(x_n, x_n, x) \rightarrow 0$ dır.
- (4) $n \rightarrow \infty$ için $G(x_n, x, x) \rightarrow 0$ dır.
- (5) $n, m \rightarrow \infty$ için $G(x_m, x_n, x) \rightarrow 0$ dır (Mustafa and Sims 2006).

İspat (1) $\Rightarrow$ (2) (x_n) dizisi x e G -yakınsak olsun. Bu durumda $d_G(x_n, x) \rightarrow 0$ olduğunu gösterelim. Her $B_G(x, \frac{r}{3}) \in \tau(G)$ ve her $n \geq N$ için $x_n \in B_G(x, \frac{r}{3})$ olacak şekilde en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Önerme 3.5.3 ten

$$B_G(x, \frac{r}{3}) \subseteq B_{d_G}(x, r)$$

olduğundan her $n \geq n_0$ için $x_n \in B_{d_G}(x, r)$ dir. Bu ise x_n nin d_G metrik uzayında x e yakınsaması demektir. Yani $d_G(x_n, x) \rightarrow 0$ dır.

(2) $\Rightarrow$ (3) $d_G(x_n, x) \rightarrow 0$ olsun. Bu durumda d_G nin tanımından $d_G(x_n, x) = G(x_n, x_n, x) + G(x, x, x_n) \rightarrow 0$ olup $G(x_n, x_n, x) \rightarrow 0$ ve $G(x, x, x_n) \rightarrow 0$ olur.

(3) $\Rightarrow$ (4) $G(x_n, x_n, x) \rightarrow 0$ olsun. $G(x_n, x, x) \rightarrow 0$ olduğunu gösterelim. Tanımdan

$$G(x, y, y) \leq 2G(y, x, x)$$

olup

$$G(x_n, x, x) \leq 2G(x, x_n, x_n) \rightarrow 0$$

bulunur.

(4) $\Rightarrow$ (5) $G(x_n, x, x) \rightarrow 0$ olsun. Önerme 3.4.1 in 1. özelliğinden

$$G(x_m, x_n, x) = G(x, x_n, x_m) \leq G(x, x, x_n) + G(x, x, x_m)$$

yazılır. Buradan $G(x, x, x_n) \rightarrow 0$ ve $G(x, x, x_m) \rightarrow 0$ olup $G(x_m, x_n, x) \rightarrow 0$ olduğu görülür.

(5) $\Rightarrow$ (2) $G(x_m, x_n, x) \rightarrow 0$ olduğunu kabul edip $d_G(x_n, x)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} d_G(x_n, x) &= G(x_n, x_n, x) + G(x, x, x_n) \\ &\leq G(x_n, x_n, x) + 2G(x, x_n, x_n) \\ &= 3G(x_n, x_n, x) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

bulunur.

(2) $\Rightarrow$ (1) $d_G(x_n, x) \rightarrow 0$ olsun. Bu durumda her $r > 0$ ve her $n \geq n_0$ için $x_n \in B_{d_G}(x, r)$ dir. Önerme 3.5.3 ten $B_{d_G}(x, r) \subseteq B_G(x, r)$ olduğundan her $n \geq n_0$ için $x_n \in B_G(x, r)$ dir. O halde (x_n) dizisi x e G yakınsaktır.

Tanım 3.5.8: (X, G) ve (X, G') bir G -metrik uzay olsun. Her $r > 0$ için $f^{-1}(B_{G'}(f(x_0), r)) \in \tau(G)$ ise $f: X \rightarrow X'$ dönüşümü $x_0 \in X$ noktasında G -süreklidir denir. X in her noktasında G -süreklidir ise f G -süreklidir yani $\tau(G)$ topolojisi ile X den $\tau(G')$ -topolojisi ile X' e sürekli bir fonksiyondur (Mustafa and Sims 2006).

Önerme 3.5.9: (X, G) ve (X', G') iki G -metrik uzay olsun. Bu durumda $f: X \rightarrow X'$ dönüşümünün x de G -dizisel sürekli olması için gerek ve yeter şart $x \in X$ noktasında G -süreklidir olmasıdır. Yani (x_n) dizisi x e G -yakınsak ise $(f(x_n))$ de $f(x)$ e G -yakınsaktır (Mustafa and Sims 2006).

Önerme 3.5.10: X bir G -metrik uzay olsun. Bu durumda $G(x, y, z)$ fonksiyonu üç değişkenine göre de süreklidir (Mustafa and Sims 2006).

İspat: Kabul edelim ki $(x_k), (y_m)$ ve (z_n) sırasıyla x, y ve z ye G -yakınsak diziler olsun. Bu durumda $G5$ ten

$$G(x, y, z) \leq G(y, y_m, y_m) + G(y_m, x, z)$$

$$G(z, x, y_m) \leq G(x, x_k, x_k) + G(x_k, y_m, z)$$

ve

$$G(z, x_k, y_m) \leq G(z, z_n, z_n) + G(z_n, y_m, x_k)$$

ve buradan

$$G(x, y, z) - G(x_k, y_m, z_n) \leq G(y, y_m, y_m) + G(x, x_k, x_k) + G(z, z_n, z_n)$$

olur. Benzer şekilde

$$G(x_k, y_m, z_n) - G(x, y, z) \leq G(x_k, x, x) + G(y_m, y, y) + G(z_n, z, z)$$

bulunur. Önerme 3.4.1 in 2. şikkını kullanarak

$$|G(x_k, y_m, z_n) - G(x, y, z)| \leq 2(G(x, x_k, x_k) + G(y, y_m, y_m) + G(z, z_n, z_n))$$

elde edilir. $k, m, n \rightarrow \infty$ için $G(x_k, y_m, z_n) \rightarrow G(x, y, z)$ olur.

Önerme 3.5.11: Bir G -metrik uzayda aşağıdakiler denktir.

1. (x_n) dizisi G -Cauchy dir.
2. Her $n, m \geq N$ ve her $\varepsilon > 0$ için $G(x_n, x_m, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır.
3. (X, d_G) metrik uzayında (x_n) bir Cauchy dizisidir (Mustafa and Sims 2006).

Sonuç 3.5.12: Bir G -metrik uzayda G -Cauchy dizisinin bir G -yakınsak alt dizisi varsa bu durumda dizinin kendisi de aynı noktaya G -yakınsak olur (Mustafa and Sims 2006).

Tanım 3.5.13: X deki her G -Cauchy dizisi G -yakınsak ise (X, G) ye tam uzay denir (Mustafa and Sims 2006).

Önerme 3.5.14: (X, d_G) uzayının tam metrik uzay olması için gerek ve yeter şart G -metrik uzayın G -tam olmasıdır (Mustafa and Sims 2006).

Sonuç 3.5.15: Bir G -tam metrik uzayın boş kümeden farklı bir alt kümesi Y olsun. Eğer Y kümesi X metrik uzayında G -kapalı ise bu durumda $(Y, G|_Y)$ tamdır (Mustafa and Sims 2006).

Tanım 3.5.16: 1. X bir G -metrik uzay, $\varepsilon > 0$ ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer her $x \in X$ için $x \in B_G(a, \varepsilon)$ olacak şekilde en az bir $a \in A$ noktası varsa A kümesine X G -metrik uzayının ε -ağı denir.

2. Her $\varepsilon > 0$ için sonlu bir ε -ağı varsa (X, G) ye G -tam sınırlıdır denir.

3. Bir X metrik uzayı G -tam ve G -tam sınırlı ise bu metrik uzaya kompakt bir G -metrik uzay denir (Mustafa and Sims 2006).

4.ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde G -metrik uzaylarda devirli ve genelleştirilmiş devirli daraltan dönüşümlerin sabit noktalarının varlık ve tekliği ile ilgili yapılan bazı çalışmalar derlenmiştir.

Öncelikle Karapınar et al. (2012) tarafından G -metrik uzayda tanımlı devirli daraltan dönüşümlerin sabit noktaları ile ilgili ispatlanan aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 4.1: (X, G) bir G -tam G -metrik uzay, $\{A_j\}_{j=1}^m$ X in G -kapalı alt kümelerinin bir ailesi, $Y = \bigcup_{j=1}^m A_j$ ve $T: Y \rightarrow Y$ dönüşümü

$$T(A_j) \subseteq A_{j+1}, \quad j = 1, \dots, m, \quad A_{m+1} = A_1 \quad (4.1)$$

şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. Eğer her $x \in A_j$ ve $y, z \in A_{j+1}, j = 1, \dots, m$ için

$$G(Tu, Tv, Tw) \leq kG(u, v, w) \quad (4.2)$$

olacak şekilde bir $k \in (0,1)$ varsa bu durumda $T, \bigcap_{j=1}^m A_j$ kümesinde tek bir sabit noktaya sahiptir (Karapınar et al. 2012).

İspat: İlk olarak varlığını ispatlayalım. $u_0 \in Y$ ve genelliği bozmadan $u_0 \in A_1$ olduğunu kabul edelim. (u_n) dizisi

$$u_n = Tu_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.3)$$

şeklinde tanımlansın. T devirli dönüşüm olduğu için $u_0 \in A_1, u_1 = Tu_0 \in A_2, u_2 = Tu_1 \in A_3, \dots$ olur. Eğer bir $n_0 \in \mathbb{N}$ için $u_{n_0+1} = u_{n_0}$ ise bu durumda T nin sabit noktasının u_{n_0} olduğu açıktır. Kabul edelim ki her $n \in \mathbb{N}$ için $u_{n+1} \neq u_n$ olsun. (4.2) de $u = u_{n-1}$ ve $v = w = u_n$ alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} 0 &\leq G(Tu_{n-1}, Tu_n, Tu_n) = G(u_n, u_{n+1}, u_{n-1}) \\ &\leq kG(u_{n-1}, u_n, u_n) \\ &\vdots \\ &\leq k^n G(u_0, u_1, u_1). \end{aligned} \quad (4.4)$$

olur. Buradan

$$0 \leq G(u_n, u_{n+1}, u_{n+1}) \leq k^n G(u_0, u_1, u_1) \quad (4.5)$$

olup $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(u_n, u_{n+1}, u_{n+1}) = 0 \quad (4.6)$$

olur. G4 ve G5 ten

$$G(u, v, v) \leq 2G(v, u, u) \quad (4.7)$$

bulunur. (4.7) de $u = u_n$ ve $v = u_{n-1}$ yazılırsa

$$G(u_n, u_{n-1}, u_{n-1}) \leq 2G(u_{n-1}, u_n, u_n) \quad (4.8)$$

elde edilir. (4.8) de $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(u_n, u_{n-1}, u_{n-1}) = 0 \quad (4.9)$$

elde edilir.

Şimdi (X, d_G) metrik uzayında (u_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. $n \geq l$ için

$$d_G(u_n, u_l) = \sum_{i=l+1}^n [G(u_i, u_{i-1}, u_{i-1}) + G(u_{i-1}, u_i, u_i)] \quad (4.10)$$

yazılır. (4.4) ve (4.8) kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 \leq d_G(u_n, u_l) &\leq \sum_{i=l+1}^n 3k^{i-1} G(u_0, u_1, u_1) \\ &\leq 3G(u_0, u_1, u_1) \left[\sum_{i=0}^n k^{i-1} - \sum_{i=0}^l k^{i-1} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. $n, l \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $d_G(u_n, u_l) \rightarrow 0$ olur. Yani (u_n) dizisi bir Cauchy dizisidir. (X, G) uzayı G -tam oluşu için (X, d_G) tamdır ve dolayısıyla (u_n) dizisi $x \in X$ e yakınsar. Ayrıca (u_n) bir G -Cauchy dizisidir ve $x \in \bigcap_{j=1}^m A_j$ olduğu kolayca görülmektedir. Gerçekten $u_0 \in A_1$ ise bu durumda alt dizileri $(u_{m(n-1)})_{n=1}^{\infty} \in A_1$,

$(u_{m(n-1)+1})_{n=1}^{\infty} \in A_2, \dots, (u_{mn-1})_{n=1}^{\infty} \in A_m$ olur. Bütün m alt dizileri G -yakınsaktır ve hepsi aynı x noktasına yakınsar. Üstelik A_j kümeleri G -kapalıdır ve $x \in \bigcap_{j=1}^m A_j$ dir.

Şimdi $x \in X$ in T nin bir sabit noktası yani $x = Tx$ olduğunu gösterelim. Her $u, v \in X$ için $u = u_n, v = w = Tx$ olmak üzere $d_G(u, v) = G(u, v, v) + G(v, u, u)$ olduğu ve (4.2) eşitsizliği göz önünde bulundurulur ve $x \neq Tx$ ya da $d_G(x, Tx) > 0$ olduğu kabul edilirse

$$\begin{aligned} 0 &\leq d_G(u_n, Tx) = G(u_n, Tx, Tx) + G(Tx, u_n, u_n) \\ &= G(Tu_{n-1}, Tx, Tx) + G(Tx, Tu_{n-1}, Tu_{n-1}) \\ &\leq k[G(u_{n-1}, x, x) + G(x, u_{n-1}, u_{n-1})] \end{aligned}$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $0 \leq d_G(x, Tx) \leq 0$ olur. Bu durum $d_G(x, Tx) > 0$ olması ile çelişir. O halde $x = Tx$ olur yani x, T nin sabit noktasıdır.

Son olarak bu sabit noktanın tek olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $y \neq x$ olmak üzere $y \in X, T$ nin diğer bir sabit noktası olsun. Bu durumda hem x hem de y noktaları $\bigcap_{j=1}^m A_j$ kümesine aittir. (4.2) de $u = x$ ve $v = w = y$ alınırsa $G(Ty, Tx, Tx) \leq kG(x, y, y)$ olur. Bu durum sadece $k = 1$ için doğrudur fakat $k \in (0,1)$ olduğundan T nin sabit noktası tektir.

Dönüşümler üzerindeki daralma şartlarını zayıflatmak için bazı yeni dönüşüm sınıfları tanımlanmıştır. Bunlardan biri aşağıda tanımı verilen ve Alber and Guerre-Delabriere (1997) tarafından tanımlanan zayıf ϕ -daraltan dönüşümlerdir.

Tanım 4.2: T, X metrik uzayı üzerinde tanımlı bir dönüşüm olsun. Eğer her $r, s \in X$ için

$$d(Tr, Ts) \leq d(r, s) - \phi(d(r, s))$$

olacak şekilde $\phi(0) = 0$ şartını sağlayan kesin artan bir $\phi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu varsa T ye zayıf ϕ -daraltan dönüşümü denir (Alber and Guerre-Delabriere 1997).

Bu dönüşümden yola çıkarak Karapınar et al. (2012) devirli zayıf ϕ -daraltan dönüşümler için aşağıdaki teoremi ispatlamışlardır.

$\phi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $(\phi(0) = 0)$ ve $t > 0$ için $\phi(t) > 0$ şartını sağlayan dönüşümlerin kümesi Ψ olsun.

Teorem 4.3: (X, G) bir G -tam G -metrik uzay, $\{A_j\}_{j=1}^m$ X in G -kapalı alt kümelerinin bir ailesi, $Y = \bigcup_{j=1}^m A_j$ ve $T: Y \rightarrow Y$ dönüşümü

$$T(A_j) \subseteq A_{j+1}, \quad j = 1, \dots, m, \quad A_{m+1} = A_1 \quad (4.11)$$

sağlayan bir dönüşüm olsun.

$$M(r, s, t) = \max\{G(r, s, t), G(r, Tr, Tr), G(s, Ts, Ts), G(t, Tt, Tt)\}$$

olmak üzere her $u \in A_j$ ve $v, w \in A_{j+1}, j = 1, \dots, m$ için

$$G(Tr, Ts, Tt) \leq M(r, s, t) - \phi(M(r, s, t)) \quad (4.12)$$

olacak şekilde bir $\phi \in \Psi$ fonksiyonunun var olduğunu kabul edelim. Bu durumda $T \cap_{j=1}^m A_j$ kümesinde tek bir sabit noktaya sahiptir (Karapınar et al. 2012).

İspat: Varlığını ispatlamak için Picard iterasyonunun bir dizisini oluşturalım. Keyfi bir $r_0 \in A_1$ alalım. (r_n) dizisini

$$r_n = Tr_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.13)$$

şeklinde tanımlayalım. T devirli dönüşüm olduğu için $r_0 \in A_1, r_1 = Tr_0 \in A_2, r_2 = Tr_1 \in A_3, \dots$ olur. Eğer bir $n_0 \in \mathbb{N}$ için $r_{n_0+1} = r_{n_0}$ ise bu durumda T nin sabit noktasının r_{n_0} olduğu açıktır. Kabul edelim ki her $n \in \mathbb{N}$ için $r_{n+1} \neq r_n$ olsun. (4.12) de $r = r_n$ ve $s = t = r_{n+1}$ alalım. Bu durumda

$$G(Tr_n, Tr_{n+1}, Tr_{n+1}) \leq M(r_n, r_{n+1}, r_{n+1}) - \phi(M(r_n, r_{n+1}, r_{n+1})) \quad (4.14)$$

yazılır. Burada

$$M(r_n, r_{n+1}, r_{n+1}) = \max\{G(r_n, r_{n+1}, r_{n+1}), G(r_{n+1}, r_{n+2}, r_{n+2})\}$$

şeklindedir. Eğer (4.14) te $M(r_n, r_{n+1}, r_{n+1}) = G(r_{n+1}, r_{n+2}, r_{n+2})$ yazılırsa

$$G(r_{n+1}, r_{n+2}, r_{n+2}) \leq G(r_{n+1}, r_{n+2}, r_{n+2}) - \phi(G(r_{n+1}, r_{n+2}, r_{n+2})) \quad (4.15)$$

elde edilir. $\phi(G(r_{n+1}, r_{n+2}, r_{n+2})) = 0$ ve dolayısıyla $G(r_{n+1}, r_{n+2}, r_{n+2}) = 0$ dır. Bu durum $n \in \mathbb{N}$ için $r_n \neq r_{n+1}$ olması ile çelişir. O halde (4.14) te $M(r_n, r_{n+1}, r_{n+1}) = G(r_n, r_{n+1}, r_{n+1})$ almalıyız. Böylece

$$G(r_{n+1}, r_{n+2}, r_{n+2}) \leq G(r_n, r_{n+1}, r_{n+1}) \quad (4.16)$$

elde edilir. Burada $(G(r_n, r_{n+1}, r_{n+1}))$ dizisi $L \geq 0$ a yakınsayan negatif olmayan artmayan bir dizidir. (4.16) da $n \rightarrow \infty$ için limit alınır

$$L \leq L - \phi(L)$$

olur. Buradan $\phi(L) = 0$ bundan dolayı $L = 0$ yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(r_n, r_{n+1}, r_{n+1}) = 0 \quad (4.17)$$

dır. (4.7) de $r = r_n$ ve $s = r_{n-1}$ alınır

$$G(r_n, r_{n-1}, r_{n-1}) \leq 2G(r_{n-1}, r_n, r_n)$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(r_n, r_{n-1}, r_{n-1}) = 0$$

bulunur.

İddia ediyoruz ki (r_n) dizisi (X, G) de bir Cauchy dizisidir. Bir an için (r_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olmadığını kabul edelim. Bu durumda

$$G(r_{l(k)}, r_{n(k)}, r_{n(k)}) \geq \varepsilon \quad (4.18)$$

olacak şekilde Önerme 3.5.12 ye göre $\varepsilon > 0$ ve $n(k) > l(k) > k$ şartını sağlayan (r_n) dizisine denk $\mathbb{N}$ nin $\{n(k)\}$ ve $\{l(k)\}$ alt dizileri vardır. $n(k)$, (4.18) u sağlayan en küçük tam sayıdır. Yani

$$G(r_{l(k)}, r_{n(k)-1}, r_{n(k)-1}) < \varepsilon \quad (4.19)$$

dır. (4.18), (4.19) ve G5 şartından

$$\varepsilon < \varepsilon + G(r_{n(k)-1}, r_{n(k)}, r_{n(k)}) \quad (4.20)$$

yazılır. (4.20) de $k \rightarrow \infty$ için limit alınır ve (4.17) kullanılırsa

$$\lim_{k \rightarrow \infty} G(r_{l(k)}, r_{n(k)}, r_{n(k)}) = \varepsilon$$

elde edilir. Her $k \in \mathbb{N}$ için

$$n(k) - l(k) + s(k) \equiv 1(m)$$

olacak şekilde $0 \leq s(k) \leq m$ şartını sağlayan $s(k)$ vardır. $0 \leq j \leq m$ için $r_{r(k)}$ ve $r_{n(k)}$ sırasıyla A_j and A_{j+1} ardışık kümelerine aittir. (4.12) te $r = r_{r(k)}$ ve $s = t = r_{n(k)}$ yazılırsa

$$G(Tr_{r(k)}, Tr_{n(k)}, Tr_{n(k)}) \leq M(r_{r(k)}, r_{n(k)}, r_{n(k)}) - \phi(M(r_{r(k)}, r_{n(k)}, r_{n(k)})) \quad (4.21)$$

elde edilir. Burada

$$M(r_{r(k)}, r_{n(k)}, r_{n(k)}) = \max\{G(r_{r(k)}, r_{n(k)}, r_{n(k)}), G(r_{r(k)}, r_{r(k)+1}, r_{r(k)+1}) \\ G(r_{n(k)}, r_{n(k)+1}, r_{n(k)+1})\}$$

şeklinededir. G5 dikdörtgen eşitsizliğini art arda uygularsak

$$G(r_{r(k)}, r_{n(k)}, r_{n(k)}) \leq \sum_{i=r}^{l-1} [G(r_{i(k)}, r_{i(k)+1}, r_{i(k)+1})] + G(r_{l(k)}, r_{n(k)}, r_{n(k)})]$$

olduğu görülür veya eşit olarak

$$0 \leq \sum_{i=r}^{l-1} G(r_{i(k)}, r_{i(k)+1}, r_{i(k)+1}) \quad (4.22)$$

yazılır. Dikkat edilirse (4.22) nin sağ tarafındaki toplam sonlu $s - 1 \leq m$ terimlerinden oluşur ve (4.17) den dolayı her bir terim $k \rightarrow \infty$ için 0 a yakınsar. Dolayısıyla

$$\lim_{k \rightarrow \infty} G(r_{r(k)}, r_{n(k)}, r_{n(k)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} G(r_{l(k)}, r_{n(k)}, r_{n(k)}) = \varepsilon \quad (4.23)$$

lur. G5 şartını tekrar uygularsak

$$\begin{aligned} 0 &\leq G(r_{r(k)+1}, r_{r(k)}, r_{r(k)}) + G(r_{r(k)}, r_{n(k)}, r_{n(k)}) \\ &\quad + G(r_{n(k)}, r_{n(k)+1}, r_{n(k)+1}) \end{aligned} \quad (4.24)$$

elde edilir ve buradan $k \rightarrow \infty$ için limit alınır ve (4.23) kullanılırsa

$$\lim_{k \rightarrow \infty} G(r_{r(k)+1}, r_{n(k)+1}, r_{n(k)+1}) = \varepsilon \quad (4.25)$$

sonucuna varılır. Şimdi (4.21) de $k \rightarrow \infty$ için limit alınır ve (4.17), (4.23) ve (4.25) kullanılırsa

$$\varepsilon \leq \max\{\varepsilon, 0, 0\} - \phi(\max\{\varepsilon, 0, 0\}) = \varepsilon - \phi(\varepsilon)$$

elde edilir. Buradan $\phi(\varepsilon) = 0$ ve $\varepsilon = 0$ bulunur. Fakat $\varepsilon = 0$ olması (r_n) dizisinin bir G -Cauchy olmaması ile çelişir dolayısıyla (r_n) dizisi bir G -Cauchydir. (X, G) G -tam olduğu için G -yakınsaktır ve bir $z \in X$ e yakınsar. $z \in \bigcap_{j=1}^m A_j$ olduğu kolayca görülmektedir. $r_0 \in A_1$ olduğu için bu durumda alt dizileri $(r_{m(n-1)})_{n=1}^{\infty} \in A_1, (r_{m(n-1)+1})_{n=1}^{\infty} \in A_2, \dots, (r_{mn-1})_{n=1}^{\infty} \in A_m$ olur. Tüm m alt dizileri A_j G -kapalı kümesinde G -yakınsaktır ve dolayısıyla hepsi aynı $z \in \bigcap_{j=1}^m A_j$ limitine yakınsar.

Şimdi Picard dizisinin limitinin T nin sabit noktası yani $z = Tz$ olduğunu gösterelim. (4.12) de $r = r_n, s = t = z$ alınırsa

$$G(Tr_n, Tz, Tz) = M(r_n, z, z) - \phi(M(r_n, z, z))$$

bulunur. Burada

$$M(r_n, z, z) = \max\{G(r_n, z, z), G(r_n, r_{n+1}, r_{n+1}), G(z, Tz, Tz)\}$$

şeklindedir. $n \rightarrow \infty$ için limit alınır

$$G(z, Tz, Tz) = G(z, Tz, Tz) - \phi(G(z, Tz, Tz))$$

yazılır. $\phi(G(z, Tz, Tz)) = 0$ ve $G(z, Tz, Tz) = 0$ olur yani $z = Tz$ dir.

Son olarak bu sabit noktanın tek olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $y \neq z$ olmak üzere $y \in X$, T nin diğer bir sabit noktası olsun. Bu durumda hem y hem de $z \in \bigcap_{j=1}^m A_j$ ye aittir. (4.12) de $r = y$ ve $s = t = z$ alınırsa

$$G(Ty, Tz, Tz) \leq M(y, z, z) - \phi(M(y, z, z))$$

olur. Burada

$$M(y, z, z) = \max\{G(y, z, z), G(y, Ty, Ty), G(z, Tz, Tz)\} = G(y, z, z)$$

şeklindedir. Buradan

$$G(y, z, z) \leq G(y, z, z) - \phi(G(y, z, z))$$

elde edilir ve $G(y, z, z) = 0$ olduğu açıktır. Böylece $y = z$ olur yani T nin sabit noktası tektir.

2011 yılında Jachymski (2011) tarafından yayımlanan makaleden yola çıkarak yazarlar aşağıdaki teoremi vermişlerdir.

Teorem 4.4: (X, G) bir G -tam G -metrik uzay, $\{A_j\}_{j=1}^m$ X in G -kapalı alt kümelerinin bir ailesi ve $Y = \bigcup_{j=1}^m A_j$ olsun. $T: Y \rightarrow Y$ dönüşümü $A_{m+1} = A_1$ olmak üzere

$$T(A_j) \subseteq A_{j+1}, \quad j = 1, \dots, m,$$

şartlarını sağlayan bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki

$$M(u, v, w) = \max\{G(u, v, w), G(u, Tu, Tu), G(v, Tv, Tv), G(w, Tw, Tw)\}$$

olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) Her $u \in A_i$, $v, w \in A_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, m$ için

$$\psi(G(Tu, Tv, Tw)) \leq \psi(M(u, v, w)) - \eta(M(u, v, w))$$

olacak şekilde $\psi, \eta \in \Psi$ fonksiyonları vardır.

(ii) Her $u \in A_i, v, w \in A_{i+1}, i = 1, 2, \dots, m$ için

$$G(Tu, Tv, Tw) \leq \beta(M(u, v, w)) - \psi(M(u, v, w))$$

şartını sağlayan pozitif reel sayıların her sınırlı (t_n) dizisi, $t_n \rightarrow \infty$ için $\beta(t_n) \rightarrow 1$ olacak şekilde bir $\beta: [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu vardır.

(iii) Her $u \in A_i, v, w \in A_{i+1}, i = 1, 2, \dots, m$ ve $\eta^{-1}(\{0\}) = 0$ için

$$G(Tu, Tv, Tw) \leq M(u, v, w) - \eta(M(u, v, w))$$

olacak şekilde sürekli bir $\eta: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu vardır.

(iv) Her $u \in A_i, v, w \in A_{i+1}, i = 1, 2, \dots, m, \varphi(t) < t$ ve her $t > 0$ için

$$\psi(G(Tu, Tv, Tw)) \leq \varphi(\psi(M(u, v, w)))$$

olacak şekilde bir $\psi \in \Psi$ fonksiyonu ve azalmayan sağdan sürekli $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu vardır.

(v) Her $u \in A_i, v, w \in A_{i+1}, i = 1, 2, \dots, m, \varphi(t) < t$ ve her $t > 0$ için

$$\psi(G(Tu, Tv, Tw)) \leq \varphi(M(u, v, w))$$

olacak şekilde sürekli ve azalmayan bir $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu vardır.

Şimdi Nashine et al. (2012) tarafından tanımlanan ve devirli daraltan dönüşümlerin bir genelleştirmesi olan genelleştirilmiş zayıf devirli daraltan dönüşüm kavramını verelim.

Tanım 4.5: X bir G -metrik uzay, p pozitif bir tam sayı, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_p$ X in alt kümeleri ve $Y = \bigcup_{i=1}^p \mathcal{A}_i$ olsun. Eğer

(I) $Y = \bigcup_{i=1}^p \mathcal{A}_i, T$ ye göre Y nin bir devirli gösterimi,

(II) $\psi: (0, \infty] \rightarrow (0, \infty]$ uzaklık değiştirme fonksiyonu, $\varphi: (0, \infty] \rightarrow (0, \infty], \varphi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ şartını sağlayan sürekli bir fonksiyon,

$$\begin{aligned}\Theta(u, v, w) = & \max\{G(u, v, w), G(u, Tu, Tu), G(v, Tv, Tv), G(w, Tw, Tw), \\ & \frac{1}{2}[G(u, Tv, Tv) + G(v, Tu, Tu)], \\ & \frac{1}{2}[G(v, Tw, Tw) + G(w, Tv, Tv)], \\ & \frac{1}{2}[G(u, Tw, Tw) + G(w, Tu, Tu)], \\ & \frac{1}{3}[G(u, Tv, Tv) + G(v, Tw, Tw) + G(w, Tu, Tu)]\}\end{aligned}$$

ve

$$\theta(u, v, w) = \max\{G(u, v, w), G(u, Tu, Tu), G(v, Tv, Tv), G(w, Tw, Tw)\}$$

olmak üzere her $(u, v, w) \in \mathcal{A}_i \times \mathcal{A}_{i+1} \times \mathcal{A}_{i+1}, i = 1, 2, \dots, p$ ($\mathcal{A}_{p+1} = \mathcal{A}_1$) için

$$\psi((G(Tu, Tv, Tw))) \leq \psi(\Theta(u, v, w)) - \varphi(\theta(u, v, w)) \quad (4.26)$$

eşitsizliğini sağlayan $T: Y \rightarrow Y$ dönüşümüne genelleştirilmiş zayıf devirli daraltan dönüşüm denir (Nashine et al. 2012).

Yazarlar aşağıdaki teoremden G -metrik uzayda genelleştirilmiş zayıf devirli daraltan dönüşümlerin sabit noktalarının varlık ve tekliğini ispatlamışlardır.

Teorem 4.6: X bir tam G -metrik uzay, $p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_p$ X in kapalı alt kümeleri ve $Y = \bigcup_{i=1}^p \mathcal{A}_i$ olsun. Kabul edelim ki $T: Y \rightarrow Y$ genelleştirilmiş zayıf devirli daraltan dönüşüm olsun. Bu durumda T nin tek bir sabit noktası vardır. Üstelik T nin sabit noktası $\bigcap_{i=1}^p \mathcal{A}_i$ kümesine aittir (Nashine et al. 2012)

İspat : $u_0 \in \mathcal{A}_1$ olsun. (u_n) dizisi X de

$$u_{n+1} = Tu_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

şeklinde tanımlansın. Genelliği bozmadan

$$u_n \neq u_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad (4.27)$$

olduğu kabul edilebilir. Öncelikle

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(u_n, u_{n+1}, u_{n+1}) = 0 \quad (4.28)$$

olduğu gösterilecektir. Kabulden her n için $G(u_n, u_{n+1}, u_{n+1}) > 0$ dır. (I) şartından her n için $(u_n, u_{n+1}, u_{n+1}) \in \mathcal{A}_i \times \mathcal{A}_{i+1} \times \mathcal{A}_{i+1}$ olacak şekilde $i = i(n) \in \{1, 2, \dots, p\}$ vardır. (II) şartında $u = u_n$ ve $v = u_{n+1} = z$ alınırsa

$$\begin{aligned} \Theta(u_n, u_{n+1}, u_{n+1}) = & \max\{G(u_n, u_{n+1}, u_{n+1}), G(u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+2}), \\ & \frac{1}{2}G(u_n, u_{n+2}, u_{n+2}), \\ & \frac{1}{3}[G(u_n, u_{n+2}, u_{n+2}) + G(u_{n+1}, u_{n+1}, u_{n+1})]\} \end{aligned}$$

olduğu görülür. G5 şartından

$$G(u_n, u_{n+2}, u_{n+2}) \leq G(u_n, u_{n+1}, u_{n+1}) + G(u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+2})$$

olur. Böylece

$$\Theta(u_n, u_{n+1}, u_{n+1}) = \max\{G(u_n, u_{n+1}, u_{n+1}), G(u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+2})\}$$

yazılır. (4.26) dan

$$\begin{aligned} \psi(G(u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+2})) &= \psi(G(Tu_n, Tu_{n+1}, Tu_{n+1})) \quad (4.29) \\ &= \psi(\max\{G(u_n, u_{n+1}, u_{n+1}), G(u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+2})\}) \\ &\quad - \varphi(\max\{G(u_n, u_{n+1}, u_{n+1}), G(u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+2})\}) \end{aligned}$$

elde edilir. İddia ediyoruz ki her $n \geq 0$ için

$$G(u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+2}) \leq G(u_n, u_{n+1}, u_{n+1}) \quad (4.30)$$

dır. Tersini kabul edelim yani $G(u_{n_0+1}, u_{n_0+2}, u_{n_0+2}) > G(u_{n_0}, u_{n_0+1}, u_{n_0+1})$ olacak şekilde bir $n_0 \geq 0$ var olsun. (4.29) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} &\psi(G(u_{n_0+1}, u_{n_0+2}, u_{n_0+2})) \\ &= \psi(G(u_{n_0+1}, u_{n_0+2}, u_{n_0+2})) - \varphi(G(u_{n_0+1}, u_{n_0+2}, u_{n_0+2})) \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise $\varphi\left(G(u_{n_0+1}, u_{n_0+2}, u_{n_0+2})\right) = 0$ ve φ fonksiyonunun özelliğinden $G(u_{n_0+1}, u_{n_0+2}, u_{n_0+2}) = 0$ olması demektir. Fakat bu durum (4.27) ile çelişir. Dolayısıyla (4.30) doğrudur ve böylece $(G(u_n, u_{n+1}, u_{n+1}))$ dizisi artmayan ve alttan sınırlıdır. Ayrıca

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(u_n, u_{n+1}, u_{n+1}) = \rho \quad (4.31)$$

olacak şekilde $\rho \geq 0$ vardır. Şimdi $\rho > 0$ olduğunu kabul edelim. (4.29) da $n \rightarrow \infty$ için limit alınır, ψ ve φ fonksiyonlarının da sürekliliği göz önüne alınırsa

$$\psi(\rho) \leq \psi(\rho) - \varphi(\rho)$$

olduğu görülür. Buradan $\varphi(\rho) = 0$ ve $\rho = 0$ olur. Böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(u_n, u_{n+1}, u_{n+1}) = 0$$

elde edilir.

Şimdi X de (u_n) nin bir G -Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. (u_n) dizisinin G -Cauchy olmadığını kabul edelim. Bu durumda $n(k) > m(k) > k$ için

$$G(u_{m(k)}, u_{n(k)}, u_{n(k)}) \geq \varepsilon \quad (4.32)$$

olacak şekilde (u_n) nin $(u_{m(k)})$ ve $(u_{n(k)})$ alt dizileri ve $\varepsilon > 0$ vardır. Bu ise

$$G(u_{m(k)}, u_{n(k)-1}, u_{n(k)-1}) < \varepsilon \quad (4.33)$$

olması demektir. (4.32), (4.33) ve G5 şartı göz önüne alınırsa

$$\varepsilon < \varepsilon + G(u_{n(k)-1}, u_{n(k)}, u_{n(k)})$$

elde edilir. (4.28) de $k \rightarrow \infty$ için limit alınır

$$\lim_{k \rightarrow \infty} G(u_{m(k)}, u_{n(k)}, u_{n(k)}) = \varepsilon \quad (4.34)$$

bulunur. Diğer taraftan her k için $n(k) - m(k) + j(k) \equiv 1[p]$ olacak şekilde $j(k) \in \{1, 2, \dots, p\}$ vardır. Bu durumda $u_{m(k)-j(k)}$ (yeterince büyük k için $m(k) > j(k)$) ve

$u_{n(k)}$ bazı $i \in \{1, \dots, p\}$ için farklı birbirine komşu tanımlanan $\mathcal{A}_i$ ve $\mathcal{A}_{i+1}$ kümelerine aittir. $|G(u, v, v) - G(u, w, w)| \leq 2G(v, w, w)$ özelliği ve G5 şartı kullanılırsa

$$\begin{aligned} & |G(u_{m(k)-j(k)}, u_{m(k)-j(k)}, u_{n(k)}) - G(u_{n(k)}, u_{m(k)}, u_{m(k)})| \\ & \leq 2 \sum_{l=0}^{p-1} G(u_{m(k)-j(k)+l}, u_{m(k)-j(k)+l}, u_{m(k)-j(k)+l+1}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür. (4.34) te $k \rightarrow \infty$ için ((4.28) den)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} G(u_{m(k)-j(k)}, u_{m(k)-j(k)}, u_{n(k)}) = \varepsilon \quad (4.35)$$

yazılır. (4.28) kullanılırsa

$$\lim_{k \rightarrow \infty} G(u_{m(k)-j(k)+l}, u_{m(k)-j(k)+l}, u_{m(k)-j(k)}) = 0$$

ve

$$\lim_{k \rightarrow \infty} G(u_{n(k)+1}, u_{n(k)+1}, u_{n(k)}) = 0 \quad (4.36)$$

olduğu görülür. $|G(u, v, v) - G(u, w, w)| \leq 2G(v, w, w)$ özelliği tekrar uygulanırsa

$$\begin{aligned} & |G(u_{m(k)-j(k)}, u_{m(k)-j(k)}, u_{n(k)+1}) - G(u_{m(k)-j(k)}, u_{n(k)}, u_{n(k)})| \\ & \leq 2G(u_{n(k)}, u_{n(k)+1}, u_{n(k)+1}) \end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki eşitsizlikte $k \rightarrow \infty$ için limit alınır, (4.36) ve (4.35) kullanılırsa

$$\lim_{k \rightarrow \infty} G(u_{m(k)-j(k)}, u_{m(k)-j(k)}, u_{n(k)+1}) = \varepsilon$$

yazılır. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} & |G(u_{n(k)}, u_{m(k)-j(k)+1}, u_{m(k)-j(k)+1}) - G(u_{m(k)-j(k)}, u_{m(k)-j(k)}, u_{n(k)})| \\ & \leq 2G(u_{m(k)-j(k)}, u_{m(k)-j(k)+1}, u_{m(k)-j(k)+1}) \end{aligned}$$

elde edilir. $k \rightarrow \infty$ için limit alınır, (4.28) ve (4.35) kullanılırsa

$$\lim_{k \rightarrow \infty} G(u_{n(k)}, u_{m(k)-j(k)+1}, u_{m(k)-j(k)+1}) = \varepsilon$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\lim_{k \rightarrow \infty} G(u_{m(k)-j(k)+1}, u_{n(k)+1}, u_{n(k)+1}) = \varepsilon$$

elde edilir.

Şimdi elde edilen limitlerden, $\Theta(u, v, w)$ ve $\theta(u, v, w)$ fonksiyonlarının tanımlarından

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \Theta(u_{n(k)+1}, u_{m(k)-j(k)+1}, u_{m(k)-j(k)+1}) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \theta(u_{n(k)+1}, u_{m(k)-j(k)+1}, u_{m(k)-j(k)+1}) \end{aligned} \quad (4.37)$$

bulunur. (II) de $u = u_{n(k)+1}$, $v = u_{m(k)-j(k)+1}$ ve $w = u_{m(k)-j(k)+1}$ alınırsa

$$\begin{aligned} & \psi(G(u_{n(k)+1}, u_{m(k)-j(k)+1}, u_{m(k)-j(k)+1})) \\ & \leq \psi(\Theta(u_{n(k)+1}, u_{m(k)-j(k)+1}, u_{m(k)-j(k)+1})) \\ & \quad - \varphi(\theta(u_{n(k)+1}, u_{m(k)-j(k)+1}, u_{m(k)-j(k)+1})) \end{aligned}$$

yazılır. $k \rightarrow \infty$ için limit alınır, (4.37) ve elde edilen limitler kullanılırsa $\psi(\varepsilon) \leq \psi(\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)$ olur. Fakat bu durum $\varepsilon > 0$ olduğundan çelişkidir. O halde (u_n) dizisi X de bir G -Cauchy dizisidir. (X, G) , G -tam olduğu için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u^* \quad (4.38)$$

olacak şekilde $u^* \in X$ vardır. Biz

$$u^* \in \bigcap_{i=1}^p \mathcal{A}_i \quad (4.39)$$

olduğunu göstereceğiz. (I) den ve $u_0 \in \mathcal{A}_1$ olduğu için $(u_{np})_{n \geq 0} \subseteq \mathcal{A}_1$ yazabiliriz. $\mathcal{A}_1$ kapalı olduğu için (4.38) den $u^* \in \mathcal{A}_1$ yazılır. Tekrar (I) şartından $(u_{np})_{n \geq 0} \subseteq \mathcal{A}_2$ olur. $\mathcal{A}_2$ kapalı olduğu için (4.38) den $u^* \in \mathcal{A}_2$ yazılır. Bu şekilde devamla (4.39) u elde ederiz.

Şimdi u^* in T nin bir sabit noktası olduğunu gösterelim. Gerçekten (4.39) dan her n için $u_n \in \mathcal{A}_{i(n)}$ olacak şekilde $i(n) \in \{1, 2, \dots, p\}$ vardır. (II) de $u = u_n$ ve $v = w = u^*$ alınırsa

$$\begin{aligned} \psi(G(u_{n+1}, Tu^*, Tu^*)) &= \psi(G(Tu_n, Tu^*, Tu^*)) \\ &\leq \psi(\Theta(u_n, u^*, u^*)) - \varphi(\theta(u_n, u^*, u^*)) \end{aligned} \quad (4.40)$$

yazılır. Burada

$$\begin{aligned} \Theta(u_n, u^*, u^*) = & \max\{G(u_n, u^*, u^*) + G(u_n, u_{n+1}, u_{n+1}), G(u^*, Tu^*, Tu^*), \\ & \frac{1}{2}[G(u_n, Tu^*, Tu^*) + G(u^*, u_{n+1}, u_{n+1})], \\ & \frac{1}{3}[G(u_n, Tu^*, Tu^*) + G(u^*, Tu^*, Tu^*) + G(u, u_{n+1}, u_{n+1})]\} \end{aligned} \quad (4.41)$$

ve

$$\theta(u_n, u^*, u^*) = \max\{G(u_n, u^*, u^*), G(u_n, u_{n+1}, u_{n+1}), G(u^*, Tu^*, Tu^*)\} \quad (4.42)$$

şeklinde. (4.40) da $n \rightarrow \infty$ için limit alınır, G nin tüm değişkenlerinde sürekli olduğu, (4.41) ve (4.42) göz önüne alınırsa

$$\psi(G(u^*, Tu^*, Tu^*)) \leq \psi(G(u^*, Tu^*, Tu^*)) - \varphi(G(u^*, Tu^*, Tu^*))$$

olur. Bu ise $\varphi(G(u^*, Tu^*, Tu^*)) = 0$ ve $u^* = Tu^*$ olması demektir. Yani u^* , T nin bir sabit noktasıdır.

Son olarak bu sabit noktanın tek olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki v^* , T nin başka bir sabit noktası yani $v^* = Tv^*$ olsun. (I) şartından $v^* \in \bigcap_{i=1}^p \mathcal{A}_i$ dir. Bu durumda $u = u^*$ ve $v = w = v^*$ için (II) şartı uygulanabilir. Buradan

$$\psi(G(Tu^*, Tv^*, Tv^*)) \leq \psi(\Theta(u^*, v^*, v^*)) - \varphi(\theta(u^*, v^*, v^*)) \quad (4.43)$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} \Theta(u^*, v, w) &= \max\{G(u^*, v^*, v^*), G(u^*, Tu^*, Tu), G(v^*, Tv^*, Tv^*), G(v^*, Tv^*, Tv^*), \\ &= \frac{1}{2}[G(u^*, Tv^*, Tv^*) + G(v^*, Tu^*, Tu^*)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}[G(v^*, Tv^*, Tv^*) + G(v^*, Tv^*, Tv^*)], \\ & \frac{1}{2}[G(u^*, Tv^*, Tv^*) + G(v^*, Tu^*, Tu^*)], \\ & \frac{1}{3}[G(u^*, Tv^*, Tv^*) + G(v^*, Tv^*, Tv^*) + G(v^*, Tu^*, Tu^*)] \} \end{aligned} \quad (4.44)$$

ve

$$\begin{aligned} \theta(u^*, v, w) = & \max\{G(u^*, v^*, v^*), G(u^*, Tu^*, Tu^*), \\ & G(v^*, Tv^*, Tv^*), G(v^*, Tv^*, Tv^*)\} \end{aligned} \quad (4.45)$$

şeklindedir. u^* ve v^* T nin sabit noktaları olduğu için (4.43) - (4.45) den

$$\psi(G(u^*, v^*, v^*)) \leq \psi(G(u^*, v^*, v^*)) - \varphi(G(u^*, v^*, v^*))$$

yazılır. Dolayısıyla $G(u^*, v^*, v^*) = 0$ ve $u^* = v^*$ dir. Böylece sabit nokta tektir.

Şimdi G -metrik uzaylarda yardımcı fonksiyonlar üzerinden devirli dönüşümlerin sabit noktaları ile alakalı bazı teoremler verilecektir.

$f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ şeklindeki tüm fonksiyonların kümesi $\mathcal{F}$ olsun. Ψ ve Φ alt kümeleri

$$\Psi = \{\psi \in \mathcal{F}: \psi \text{ sürekli ve azalmayan}\},$$

$$\Phi = \{\phi \in \mathcal{F}: \phi \text{ alttan yarı sürekli}\}$$

şeklinde tanımlansın. Bilgili ve Karapınar (2013) yapmış oldukları bir çalışmada aşağıdaki lemmayı ispatlamışlardır.

Lemma 4.7: (X, G) bir G -tam G -metrik uzay ve (u_n) X de, $G(u_n, u_{n+1}, u_{n+1})$ artmayan ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(u_n, u_{n+1}, u_{n+1}) = 0 \quad (4.46)$$

olacak şekilde bir dizi olsun. Eğer (u_n) bir G -Cauchy dizisi değilse bu durumda $k \rightarrow \infty$ için

$$G(u_{l(k)}, u_{n(k)}, u_{n(k)}), G(u_{l(k)}, u_{n(k)+1}, u_{n(k)+1}), G(u_{l(k)-1}, u_{n(k)}, u_{n(k)}) \\ G(u_{l(k)-1}, u_{n(k)+1}, u_{n(k)+1}), G(u_{n(k)}, u_{l(k)}, u_{l(k)+1})$$

dizilerini ε a yakınsak yapan bir $\varepsilon > 0$ sabiti ve pozitif tamsayıların (n_k) ve (l_k) dizileri vardır (Bilgili ve Karapınar 2013).

Teorem 4.8: (X, G) bir G -tam G -metrik uzay, $\{A_j\}_{j=1}^m$ X in G -kapalı alt kümelerinin bir ailesi, $Y = \bigcup_{j=1}^m A_j$ ve $T: Y \rightarrow Y$ dönüşümü

$$T(A_j) \subseteq A_{j+1}, \quad j = 1, \dots, m, \quad A_{m+1} = A_1$$

şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. Ayrıca kabul edelim ki her $u \in A_j$, $v \in A_{j+1}$, $j = 1, 2, \dots, m$ için

$$\psi(G(Tu, Tv, Tv)) \leq \psi(Mu, v, v) - \phi(M(u, v, v)) \quad (4.52)$$

eşitsizliğini sağlayan $\phi \in \Phi$ ve $\psi \in \Psi$ fonksiyonları var olsun. Burada

$$M(u, v, v) = \max \left\{ G(u, v, v), G(u, Tu, Tu), G(v, Tv, Tv), G(u, v, Tu), \frac{1}{3} [2G(u, Tv, Tv) + G(v, Tu, Tu)], \frac{1}{3} [G(u, Tv, Tv) + 2G(v, Tu, Tu)] \right\}$$

dir. Bu durumda $T, \bigcap_{j=1}^m A_j$ de tek bir sabit noktaya sahiptir (Bilgili ve Karapınar 2013).

İspat: İlk olarak T dönüşümünün bir sabit noktasının var olduğunu gösterelim. Bunun için keyfi bir $u_0 \in A_1$ alalım ve $u_n = Tu_{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ şeklinde bir (u_n) dizisi tanımlayalım. T devirli dönüşüm olduğu için $u_0 \in A_1$, $u_1 = Tu_0 \in A_2$, $u_2 = Tu_1 \in A_3, \dots$ yazılır. Eğer bir $n_0 \in \mathbb{N}$ için $u_{n_0+1} = u_{n_0}$ ise bu durumda u_{n_0} T dönüşümünün sabit noktasıdır. Şimdi kabul edelim ki $n \in \mathbb{N}$ için $u_{n+1} \neq u_n$ olsun. (4.52) eşitsizliğinde $u = u_n$ ve $v = u_{n+1}$ alınırsa

$$\psi(G(Tu_n, Tu_{n+1}, Tu_{n+1})) \leq \psi(M(u_n, u_{n+1}, u_{n+1})) - \phi(M(u_n, u_{n+1}, u_{n+1})) \quad (4.53)$$

olur. Burada

$$M(u_n, u_{n+1}, u_{n+1}) = \max \{ G(u_n, u_{n+1}, u_{n+1}), G(u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+2}) \}$$

dir. Eğer (4.53) ifadesinde $M(u, u_{n+1}, u_{n+1}) = G(u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+2})$ yazılırsa

$$\begin{aligned} \psi(G(u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+2})) \\ \leq \psi(G(u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+2})) - \phi(G(u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+2})) \end{aligned} \quad (4.54)$$

olur. (4.54) eşitsizliğini $\phi(G(u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+2})) = 0$ sağlar. Buradan

$$G(u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+2}) = 0$$

sonucuna varılır. Bu durum her $n \in \mathbb{N}$ için $u_n \neq u_{n+1}$ olması ile çelişir. Böylece

$$M(u_n, u_{n+1}, u_{n+1}) = G(u_n, u_{n+1}, u_{n+1})$$

elde edilir ve bu eşitlik (4.53) te kullanılırsa

$$\psi(G(u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+2})) \leq \psi(G(u_n, u_{n+1}, u_{n+1})) \quad (4.55)$$

olur. Dolayısıyla $(G(u_n, u_{n+1}, u_{n+1}))$ pozitif, artmayan ve $L \geq 0$ a yakınsayan bir dizidir.

Biz $L = 0$ olduğunu göstereceğiz. Kabul edelim ki $L > 0$ olsun. (4.55) te limsup alınır

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \psi(G(u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+2})) \\ \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \psi(G(u_n, u_{n+1}, u_{n+1})) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf \phi(G(u_n, u_{n+1}, u_{n+1})) \\ \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \psi(G(u_n, u_{n+1}, u_{n+1})) \end{aligned}$$

bulunur. ψ nin sürekli ve ϕ nin alttan yarı sürekli olmasından dolayı

$$\psi(L) \leq \psi(L) - \phi(L)$$

elde edilir. Buradan $\phi(L) = 0$ olur. Dolayısıyla $L = 0$ dır yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(u_n, u_{n+1}, u_{n+1}) = 0 \quad (4.56)$$

dır. $u = u_n$ ve $v = u_{n-1}$ alınır

$$G(u_n, u_{n-1}, u_{n-1}) \leq 2G(u_{n-1}, u_n, u_n)$$

yazılır. Buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(u_n, u_{n-1}, u_{n-1}) = 0$$

olur. Şimdi (u_n) nin (X, G) de bir G -Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki (u_n) bir G -Cauchy dizisi olmasın. Bu durumda

$$G(u_{l(k)}, u_{n(k)}, u_{n(k)}) \geq \varepsilon \quad (4.57)$$

olacak şekilde $n(l) > l(k) > k$ yı sağlayan $\varepsilon > 0$ ve $\mathbb{N}$ nin $(n(k))$ ve $(l(k))$ alt dizileri vardır. Burada $n(k)$ (4.37) yi sağlayan en küçük tam sayıdır yani

$$G(u_{l(k)}, u_{n(k)-1}, u_{n(k)-1}) < \varepsilon \quad (4.58)$$

dur. (4.57), (4.58) ve G5 şartından

$$\varepsilon < \varepsilon + G(u_{n(k)-1}, u_{n(k)}, u_{n(k)}) \quad (4.59)$$

olur. (4.59) da $k \rightarrow \infty$ için limit alınır ve (4.56) kullanılırsa

$$\lim_{k \rightarrow \infty} G(u_{l(k)}, u_{n(k)}, u_{n(k)}) = \varepsilon$$

elde edilir. Dikkat edilirse her $k \in \mathbb{N}$ için $n(k) - l(k) + s(k) \equiv 1(m)$ olacak şekilde $0 \leq s(k) \leq m$ sağlayan $s(k)$ vardır.

Böylece k nın yeterince büyük değerleri için $r(k) = l(k) - s(k) > 0$ bulunur ve $u_{r(k)}$ ve $u_{n(k)}$ bazı $0 \leq j \leq m$ için sırasıyla A_j ve A_{j+1} ardışık kümelerine aittir. (4.52) de $u = u_{r(k)}$ ve $v = u_{n(k)}$ yazılırsa

$$\begin{aligned} M(u_{r(k)}, u_{n(k)}, u_n) = & \max\{G(u_{r(k)}, u_{n(k)}, u_{n(k)}), G(u_{r(k)}, u_{r(k)+1}, u_{r(k)+1}), \\ & G(u_{n(k)}, u_{n(k)+1}, u_{n(k)+1}), G(u_{r(k)}, u_{n(k)}, u_{r(k)+1}), \\ & \frac{1}{3}[2G(u_{r(k)}, u_{n(k)+1}, u_{n(k)+1}) + G(u_{n(k)}, u_{r(k)+1}, u_{r(k)+1})] \\ & \frac{1}{3}[G(u_{r(k)}, u_{n(k)+1}, u_{n(k)+1}) + 2G(u_{n(k)}, u_{r(k)+1}, u_{r(k)+1})] \} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} & \psi(G(Tu_{r(k)}, Tu_{n(k)}, Tu_{n(k)})) \\ & \leq \psi(M(u_{r(k)}, u_{n(k)}, u_{n(k)})) - \phi(M(u_{r(k)}, u_{n(k)}, u_{n(k)})) \end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 4.2.6 kullanılırsa

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{3} [2G(u_{r(k)}, u_{n(k)+1}, u_{n(k)+1}) + G(u_{n(k)}, u_{r(k)+1}, u_{r(k)+1})] = \varepsilon$$

ve

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{3} [2G(u_{r(k)}, u_{n(k)+1}, u_{n(k)+1}) + 2G(u_{n(k)}, u_{r(k)+1}, u_{r(k)+1})] = \varepsilon$$

olur. Buradan

$$\psi(\varepsilon) \leq \psi(\max\{\varepsilon, 0, 0, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon\}) - \phi(\max\{\varepsilon, 0, 0, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon\}) = \psi(\varepsilon) - \phi(\varepsilon)$$

yazılır. Ayrıca $\phi(\varepsilon) = 0$ ise $\varepsilon = 0$ dir. Bu durum (u_n) dizisinin G -Cauchy olmaması ile çelişir. Sonuç olarak (u_n) dizisi G -Cauchy dir. (X, G) G -tam olduğu için $z \in X$ e G -yakınsaktır. Aynı zamanda $z \in \bigcap_{j=1}^m A_j$ olduğu kolayca görülmektedir. $u_0 \in A_1$ olduğu için bu durumda alt dizileri $(u_{m(n-1)})_{n=1}^{\infty} \in A_1$, $(u_{m(n-1)+1})_{n=1}^{\infty} \in A_2$, ..., $(u_{m(n-1)})_{n=1}^{\infty} \in A_m$ olur. Bütün m alt dizileri G -kapalı kümeleri A_j de G -yakınsaktır ve hepsi aynı $z \in \bigcap_{j=1}^m A_j$ noktasına yakınsar. z nin T nin sabit noktası olduğunu yani $z = Tz$ olduğunu göstermek için (4.52) de $u = u_n$ ve $v = v_n$ alınırsa

$$\psi(G(Tu_n, Tz, Tz)) \leq \psi(M(u_n, z, z)) - \phi(M(u_n, z, z))$$

bulunur. Burada

$$M(u_n, z, z) = \max \left\{ G(u_n, z, z), G(u_n, u_{n+1}, u_{n+1}), G(u_n, z, u_{n+1}), \frac{1}{3} [2G(u_n, Tz, Tz) + G(z, u_{n+1}, u_{n+1})] \frac{1}{3} [G(u_n, Tz, Tz) + G(z, u_{n+1}, u_{n+1})] \right\}$$

dir. $n \rightarrow \infty$ için limsup alınırsa

$$\psi(G(z, Tz, Tz)) \leq \psi(G(z, Tz, Tz)) - \phi(G(z, Tz, Tz))$$

elde edilir. Burada $\phi(G(z, Tz, Tz)) = 0$ ve $G(z, Tz, Tz) = 0$ yani $z = Tz$ dir.

Son olarak sabit noktanın tek olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $y \neq z$ olmak üzere $y \in X$ başka bir sabit noktası olsun. Bu durumda hem y hem de $z, \cap_{j=1}^m A_j$ ye aittir. (4.52) de $u = y$ ve $v = z$ alınırsa

$$\psi(G(Ty, Tz, Tz)) \leq \psi(M(y, z, z)) - \phi(M(y, z, z)) \quad (4.60)$$

olur. Burada

$$\begin{aligned} M(y, z, z) &= \max \left\{ G(u_n, z, z), G(u_n, u_{n+1}, u_{n+1}), G(u_n, z, u_{n+1}), \frac{1}{3} [2G(u_n, Tz, Tz) \right. \\ &\quad \left. + G(z, u_{n+1}, u_{n+1})] \frac{1}{3} [G(u_n, Tz, Tz) + G(z, u_{n+1}, u_{n+1})] \right\} \end{aligned} \quad (4.61)$$

şeklindedir. Diğer taraftan (4.52) de $u = z$ ve $v = y$ alınırsa

$$\psi(G(Tz, Ty, Ty)) \leq \psi(M(z, y, y)) - \phi(M(z, y, y)) \quad (4.62)$$

yazılır. Burada

$$\begin{aligned} M(z, y, y) &= \max \left\{ G(z, y, y), G(z, Tz, Tz), G(y, Ty, Ty), G(z, y, Tz), \frac{1}{3} [2G(z, Ty, Ty) \right. \\ &\quad \left. + G(y, Tz, Tz)] \frac{1}{3} [G(z, Ty, Ty) + 2G(y, Tz, Tz)] \right\} \end{aligned}$$

dir. Eğer $G(y, z, z) = G(z, y, y)$ ise bu durumda $y = z$ olur. Gerçekten tanımdan $d_G(y, z) = 0$ dır. Dolayısıyla $y = z$ dir. Eğer $G(y, z, z) > G(z, y, y)$ ise bu durumda (4.61) de $M(y, z, z) = G(y, z, z)$ alınır ve (4.60) eşitsizliği göz önüne alınırsa

$$\psi(G(y, z, z)) \leq \psi(G(y, z, z)) - \phi(G(y, z, z))$$

$G(y, z, z) = 0$ olduğu açıktır. Böylece $y = z$ sonucuna varılır. Aksi taktirde $G(z, y, y) > G(y, z, z)$ olur. $M(z, y, y) = G(z, y, y)$ ve (4.62) göz önüne alınırsa

$$\psi(G(z, y, y)) \leq \psi(G(z, y, y)) - \phi(G(z, y, y))$$

olur ve $G(z, y, y) = 0$ olduğu açıktır. Buradan $y = z$ sonucuna varılır. Dolayısıyla T nin sabit noktası tektir.

Şimdi ise Nashine and Kadelburg (2013) tarafından tanımlanan uzaklık değiştirme fonksiyonu altında genelleştirilmiş devirli daraltan kavramını vereceğiz.

Tanım 4.9: (X, G) bir G -metrik uzay, $p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_p$ X in alt kümeleri ve $Y = \bigcup_{i=1}^p \mathcal{A}_i$ olsun. $\beta \in [0, 1)$ ve $\psi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ uzaklık değiştirme fonksiyonu olmak üzere eğer $T: Y \rightarrow Y$ dönüşümü

1) $Y = \bigcup_{i=1}^p \mathcal{A}_i$, Y nin T ye göre devirli gösterimidir;

2) Her $(u, v, w) \in \mathcal{A}_i \times \mathcal{A}_{i+1} \times \mathcal{A}_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, p$ ($\mathcal{A}_{p+1} = \mathcal{A}_1$) için

$$\begin{aligned} \psi(G(Tu, Tv, Tw)) \leq & \beta \psi(\max\{G(u, v, w), G(u, Tu, Tu), G(v, Tv, Tv), \\ & G(w, Tw, Tw), \frac{1}{3}(G(u, Tv, Tv) + \\ & G(v, Tw, Tw) + G(w, Tu, Tu))\}) \end{aligned}$$

şartlarını sağlarsa T ye genelleştirilmiş devirli daraltan dönüşüm denir (Nashine and Kadelburg 2013).

Yazarlar tanımladıkları dönüşüm sınıfı ile ilgili olarak aşağıdaki teoremi ispatlamışlardır.

Teorem 4.10: (X, G) bir G -tam G -metrik uzay, $p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_p$ X in kapalı alt kümeleri ve $Y = \bigcup_{i=1}^p \mathcal{A}_i$ olsun. $T: Y \rightarrow Y$ nin genelleştirilmiş devirli daraltan dönüşüm olduğunu kabul edelim. Bu durumda T tek bir sabit noktaya sahiptir. Üstelik bu sabit nokta $\bigcap_{i=1}^p \mathcal{A}_i$ kümesine aittir (Nashine and Kadelburg 2013).

İspat: $u \in \mathcal{A}_1$ olsun. X de (u_n) dizisi

$$u_{n+1} = Tu_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

şeklinde tanımlansın. Genelliği bozmadan her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $x_n \neq x_{n+1}$ olduğunu kabul edelim. Öncelikle

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(u_n, u_{n+1}, u_{n+1}) = 0 \quad (4.63)$$

olduğunu gösterelim. Kabûlden her n için $G(u_n, u_{n+1}, u_{n+1}) > 0$ dır. Tanım 4.9 un 1) şartından her n için $(u_n, u_{n+1}, u_{n+1}) \in \mathcal{A}_i \times \mathcal{A}_{i+1} \times \mathcal{A}_{i+1}$ olacak şekilde $i = i(n) \in \{1, 2, \dots, p\}$ vardır. Tanım 4.9 un 2) şartında $u = u_n$ ve $v = u_{n+1} = w$ alınırsa

$$\begin{aligned} \psi(G(u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+2})) &= \psi(G(Tu_n, Tu_{n+1}, Tu_{n+1})) \\ &\leq \beta\psi(\max\{G(u_n, u_{n+1}, u_{n+1}), G(u_n, Tu_n, Tu_n), \\ &\quad G(u, Tu_{n+1}, Tu_{n+1}), \frac{1}{3}(G(u_n, Tu_{n+1}, Tu_{n+1}) + \\ &\quad G(u_{n+1}, Tu_{n+1}, Tu_{n+1}) + G(u_{n+1}, Tu_n, Tu_n))\}) \\ &= \beta\psi(\max\{G(u_n, u_{n+1}, u_{n+1}), G(u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+2}), \\ &\quad \frac{1}{3}(G(u_n, u_{n+2}, u_{n+2}) + G(u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+2}))\}) \end{aligned}$$

elde edilir. G5 şartından

$$G(u_n, u_{n+2}, u_{n+2}) \leq G(u_n, u_{n+1}, u_{n+1}) + G(u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+2})$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3}(G(u_n, u_{n+2}, u_{n+2}) + G(u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+2})) \\ &\leq \max\{G(u_n, u_{n+1}, u_{n+1}), G(u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+2})\} \end{aligned}$$

yazılır. Eğer

$$\max\{G(u_n, u_{n+1}, u_{n+1}), G(u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+2})\} = G(u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+2})$$

ise bu durumda

$$\psi(G(u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+2})) \leq \beta\psi(G(u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+2}))$$

dır. $\beta < 1$ olduğu için $G(u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+2}) = 0$ ve $u_{n+1} = u_{n+2}$ olur. Fakat bu durum bir çelişkidir. Bundan dolayı

$$\max\{G(u_n, u_{n+1}, u_{n+1}), G(u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+2})\} = G(u_n, u_{n+1}, u_{n+1})$$

yazılır. Ayrıca

$$G(u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+2}) \leq G(u_n, u_{n+1}, u_{n+1}) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (4.64)$$

ve

$$\psi(G(u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+2})) \leq \beta \psi(G(u_n, u_{n+2}, u_{n+2})) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (4.65)$$

olur. (4.64) ten $(G(u_n, u_{n+2}, u_{n+2}))_{n \in \mathbb{N}}$ artmayan bir dizidir. Dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(u_n, u_{n+2}, u_{n+2}) = r$$

olacak şekilde $r \geq 0$ vardır. (4.65) te $n \rightarrow \infty$ için limit alınır

$$\psi(r) \leq \beta \psi(r)$$

olduğu görülür.

Şimdi (x_n) nin bir G -Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Bunun için (u_n) dizisinin G -Cauchy olmadığını kabul edelim. Bu durumda $n(k) > m(k) > k$ için

$$G(u_{m(k)}, u_{n(k)}, u_{n(k)}) \geq \varepsilon \quad (4.66)$$

olacak şekilde (u_n) nin $(u_{m(k)})$ ve $(u_{n(k)})$ alt dizileri ve $\varepsilon > 0$ vardır ($n(k)$ en küçük indistir). Bu ise

$$G(u_{m(k)}, u_{n(k)-1}, u_{n(k)-1}) < \varepsilon \quad (4.67)$$

olması demektir. (4.66), (4.67) ve G5 şartından

$$\varepsilon < \varepsilon + G(u_{n(k)-1}, u_{n(k)}, u_{n(k)})$$

elde edilir. $k \rightarrow \infty$ için limit alınır ve (4.63) kullanılırsa

$$\lim_{k \rightarrow \infty} G(u_{m(k)}, u_{n(k)}, u_{n(k)}) = \varepsilon \quad (4.68)$$

bulunur. Diğer taraftan her k için $n(k) - m(k) + j(k) \equiv 1[p]$ olacak şekilde $j(k) \in \{1, 2, \dots, p\}$ vardır. Bu durumda $u_{m(k)-j(k)}$ (yeterince büyük k için $m(k) > j(k)$) ve $u_{n(k)}$ bazı $i \in \{1, \dots, p\}$ için ardışık $\mathcal{A}_i$ ve $\mathcal{A}_{i+1}$ kümelerine aittir. $|G(u, v, v) - G(u, w, w)| \leq 2G(v, w, w)$ özelliği ve G5 şartı kullanılırsa

$$|G(u_{m(k)-j(k)}, u_{m(k)-j(k)}, u_{n(k)}) - G(u_{n(k)}, u_{m(k)}, u_{m(k)})|$$

$$\leq 2 \sum_{l=0}^{p-1} G(u_{m(k)-j(k)+l}, u_{m(k)-j(k)+l}, u_{m(k)-j(k)+l+1}) \rightarrow 0$$

olduğu görülür. (4.68) de $k \rightarrow \infty$ için ((4.63) ten) limit alınırsa

$$\lim_{k \rightarrow \infty} G(u_{m(k)-j(k)}, u_{m(k)-j(k)}, u_{n(k)}) = \varepsilon \quad (4.69)$$

yazılır. (4.63) kullanılırsa

$$\lim_{k \rightarrow \infty} G(u_{m(k)-j(k)+l}, u_{m(k)-j(k)+l}, u_{m(k)-j(k)}) = 0$$

ve

$$\lim_{k \rightarrow \infty} G(u_{n(k)+1}, u_{n(k)+1}, u_{n(k)}) = 0 \quad (4.70)$$

olduğu görülür. $|G(u, v, v) - G(u, w, w)| \leq 2G(v, w, w)$ özelliği tekrar uygulanırsa

$$\begin{aligned} & |G(u_{m(k)-j(k)}, u_{m(k)-j(k)}, u_{n(k)+1}) - G(u_{m(k)-j(k)}, u_{n(k)}, u_{n(k)})| \\ & \leq 2G(u_{n(k)}, u_{n(k)+1}, u_{n(k)+1}) \end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki eşitsizlikte $k \rightarrow \infty$ için limit alınır, (4.70) ve (4.69) kullanılırsa

$$\lim_{k \rightarrow \infty} G(u_{m(k)-j(k)}, u_{m(k)-j(k)}, u_{n(k)+1}) = \varepsilon$$

yazılır. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} & |G(u_{n(k)}, u_{m(k)-j(k)+1}, u_{m(k)-j(k)+1}) - G(u_{m(k)-j(k)}, u_{m(k)-j(k)}, u_{n(k)})| \\ & \leq 2G(u_{m(k)-j(k)}, u_{m(k)-j(k)+1}, u_{m(k)-j(k)+1}) \end{aligned}$$

elde edilir. $k \rightarrow \infty$ için limit alınır, (4.63) ve (4.69) kullanılırsa

$$\lim_{k \rightarrow \infty} G(u_{n(k)}, u_{m(k)-j(k)+1}, u_{m(k)-j(k)+1}) = \varepsilon$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\lim_{k \rightarrow \infty} G(u_{m(k)-j(k)+1}, u_{n(k)+1}, u_{n(k)+1}) = \varepsilon \quad (4.71)$$

elde edilir. Tanım 4.9 un 2. şartından

$$\begin{aligned}
 & \psi \left(G(u_{n(k)+1}, u_{m(k)-j(k)+1}, u_{m(k)-j(k)+1}) \right) \\
 & \leq \beta \psi \left(\max \{ G(u_{n(k)}, u_{m(k)-j(k)}, u_{m(k)-j(k)}), G(u_{n(k)}, u_{n(k)+1}, u_{n(k)+1}), \right. \\
 & \quad G(u_{m(k)-j(k)}, u_{m(k)-j(k)+1}, u_{m(k)-j(k)+1}), \frac{1}{3} (G(u_{n(k)}, u_{m(k)-j(k)+1}, u_{m(k)-j(k)+1}) \\
 & \quad + G(u_{m(k)-j(k)}, u_{m(k)-j(k)+1}, u_{m(k)-j(k)+1}) \\
 & \quad \left. + 2G(u_{m(k)-j(k)}, u_{m(k)-j(k)}, u_{m(k)+1})) \} \right)
 \end{aligned}$$

olur. $k \rightarrow \infty$ için limit alınır, (4.68) – (4.71) kullanılır ve ψ fonksiyonunun sürekliliği göz önüne alınırsa

$$\psi(\epsilon) \leq \beta \psi(\epsilon)$$

olduğu görülür. $0 \leq \beta < 1$ olduğu için $\psi(\epsilon) = 0$ ve $\epsilon = 0$ bulunur. Böylece (x_n) dizisi X de bir G -Cauchy dizisidir.

(X, G) bir G -tam olduğu için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u^* \quad (4.72)$$

olacak şekilde $u^* \in X$ vardır. Biz

$$u^* \in \bigcap_{i=1}^p \mathcal{A}_i \quad (4.73)$$

olduğunu göstereceğiz. Tanım 4.9 un 1. şartından ve $u_0 \in \mathcal{A}_1$ olduğu için $(u_{np})_{n \geq 0} \subseteq \mathcal{A}_1$ yazabiliriz. $\mathcal{A}_1$ kapalı olduğu için (4.72) den $u^* \in \mathcal{A}_1$ yazılır. Tekrar Tanım 4.9 in 1) şartından $(u_{np+1})_{n \geq 0} \subseteq \mathcal{A}_2$ olur. $\mathcal{A}_2$ kapalı olduğu için (4.72) den $u^* \in \mathcal{A}_2$ yazılır. Bu şekilde devamla (4.73) ü elde ederiz.

Şimdi u^* in f nin bir sabit noktası olduğunu gösterelim. Gerçekten (4.73) ten her n için $u_n \in \mathcal{A}_{i(n)}$ olacak şekilde $i(n) \in \{1, 2, \dots, p\}$ vardır. Tanım 4.9 un 2) şartında $u = v = u^*$ ve $w = u_n$ alınırsa

$$\begin{aligned}
 \psi(G(Tu^*, Tu^*, u_{n+1})) &= \psi(G(Tu^*, Tu^*, Tu_n)) \\
 &\leq \beta \psi(\max\{G(u^*, u^*, u_n), G(u^*, Tu, Tu^*), G(u_n, Tu_n, Tu_n)\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{3} (G(u^*, Tu^*, Tu^*) + G(u^*, Tu_n, Tu_n) \\
 & G(u_n, Tu^*, Tu^*)) \}) \\
 = & \beta \psi(\max\{G(u^*, u^*, u_n), G(u_n, u_{n+1}, u_{n+1}), \\
 & \frac{1}{3} (G(u^*, u_{n+1}, u_{n+1}) + G(u_n, u^*, u^*)) \})
 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Yukarıdaki eşitsizlikte $n \rightarrow \infty$ için limit alınır ve (4.72) kullanılırsa

$$\psi(G(Tu^*, Tu^*, u^*)) \leq \beta \psi(0) = 0$$

elde edilir. Buradan $Tu^* = u^*$ olur yani u^* T nin bir sabit noktasıdır.

Son olarak u^* ın T nin tek sabit noktası olduğunu gösterelim. v^* , T nin başka bir sabit noktası yani $Tv^* = v^*$ olsun. Tanım 4.9 un 1) şartından dolayı $v^* \in \bigcap_{i=1}^p \mathcal{A}_i$ olur. Tanım 4.9 un 2) şartında $u = u^*$ ve $v = w = v^*$ olarak alabiliriz. Buradan

$$\begin{aligned}
 \psi(G(Tu^*, Tv^*, v^*)) \leq & \beta \psi(\max\{G(u^*, v^*, v^*), G(u^*, Tu^*, Tu^*), G(v^*, Tv^*, Tv^*), \\
 & \frac{1}{3} (G(u^*, Tv^*, Tv^*) + G(v^*, Tv^*, Tv^*) + G(v^*, Tu^*, Tu^*)) \})
 \end{aligned}$$

olur. u^* ve v^* T nin sabit noktası olduğu için

$$\psi(G(u^*, v^*, v^*)) \leq \beta \psi(G(u^*, v^*, v^*))$$

elde edilir. $0 \leq \beta < 1$ olduğu için $\psi(G(u^*, v^*, v^*)) = 0$ ve $G(u^*, v^*, v^*) = 0$ yazılır.

Yani $u^* = v^*$ olur. Dolayısıyla T nin sabit noktası tektir.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu bölümde bir önceki bölümde verilen teoremlerden elde edilen sonuçlar verilecektir.

Teorem 4.1 in özel bir durumu olarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 5.1: (X, G) bir G -tam G -metrik uzay, $\{A_j\}_{j=1}^m$ X in G -kapalı alt kümelerinin bir ailesi, $Y = \bigcup_{j=1}^m A_j$ ve $T: Y \rightarrow Y$

$$T(A_j) \subseteq A_{j+1}, \quad j = 1, \dots, m, \quad A_{m+1} = A_1$$

şartlarını sağlayan bir dönüşüm olsun. Eğer her $u \in A_j$ ve $v, w \in A_{j+1}, j = 1, \dots, m$ için

$$G(Tu, Tv, Tw) \leq kG(u, v, w)$$

olacak şekilde bir $k \in (0,1)$ varsa bu durumda $T, \bigcap_{j=1}^m A_j$ de tek bir sabit noktaya sahiptir (Karapınar et al. 2012).

Teorem 4.3 teki ϕ fonksiyonunun özel seçimleri için aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 5.2: (X, G) bir G -tam G -metrik uzay, $\{A_j\}_{j=1}^m$ X in G -kapalı alt kümelerinin bir ailesi, $Y = \bigcup_{j=1}^m A_j$ ve $T: Y \rightarrow Y$

$$T(A_j) \subseteq A_{j+1}, \quad j = 1, \dots, m, \quad A_{m+1} = A_1$$

şartlarını sağlayan bir dönüşüm olsun.

$$M(u, v, w) = \max\{G(u, v, w), G(u, Tu, Tw), G(v, Tv, Tw), G(w, Tw, Tu)\}$$

olmak üzere her $u \in A_j$ ve $v, w \in A_{j+1}, j = 1, \dots, m$ için

$$G(Tu, Tv, Tw) \leq kM(u, v, w)$$

olacak şekilde bir $k \in (0,1)$ varsa bu durumda $T, \bigcap_{j=1}^m A_j$ de tek bir sabit noktaya sahiptir (Karapınar et al. 2012).

Sonuç 5.3: (X, G) bir G -tam G -metrik uzay, $\{A_j\}_{j=1}^m$ X in G -kapalı alt kümelerinin bir ailesi, $Y = \bigcup_{j=1}^m A_j$ ve $T: Y \rightarrow Y$

$$T(A_j) \subseteq A_{j+1}, \quad j = 1, \dots, m, \quad A_{m+1} = A_1$$

şartlarını sağlayan bir dönüşüm olsun. Eğer her $u \in A_j$ ve $v, w \in A_{j+1}, j = 1, \dots, m$ için $0 < a + b + c + d < 1$ olmak üzere

$$G(Tu, Tv, Tw) \leq aG(u, v, w) + bG(u, Tu, Tu) + cG(v, Tv, Tv) + dG(w, Tw, Tw)$$

olacak şekilde a, b, c ve d sabit sayıları varsa $T, \bigcap_{j=1}^m A_j$ de tek bir sabit noktaya sahiptir (Karapınar et al.2012).

Teorem 4.5 in özel bir durumu olarak aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 5.4: X bir tam G -metrik uzay, $p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_p$ X in kapalı alt kümeleri, $Y = \bigcup_{i=1}^p \mathcal{A}_i$ olsun. $\psi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ uzaklık değiştirme fonksiyonu ve $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ dönüşümü $\varphi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ şartını sağlayan sürekli fonksiyon olmak üzere $T: Y \rightarrow Y$,

(I) $Y = \bigcup_{i=1}^p \mathcal{A}_i$, Y nin T ye göre bir devirli gösterimidir,

(II) Her $(u, v, w) \in \mathcal{A}_i \times \mathcal{A}_{i+1} \times \mathcal{A}_{i+1}, i = 1, 2, \dots, p$ ($\mathcal{A}_{p+1} = \mathcal{A}_1$) için

$$\psi(G(Tu, Tv, Tw)) \leq \psi(G(u, v, w)) - \varphi(G(u, v, w))$$

şartlarını sağlayan bir dönüşüm olsun. Bu durumda T bir sabit noktaya sahiptir. Üstelik T nin sabit noktası $\bigcap_{i=1}^p \mathcal{A}_i$ kümesine aittir (Nashine et al. 2012).

Yukarıda verilen teoremler integral denklemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliğini ifade etmede kullanılabilirler. Bununla alakalı aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 5.5: (X, G) bir G -tam G -metrik uzay, $\{A_j\}_{j=1}^m$ X in G -kapalı alt kümelerinin bir ailesi, $Y = \bigcup_{j=1}^m A_j$ ve $T: Y \rightarrow Y$ dönüşümü

$$T(A_j) \subseteq A_{j+1}, \quad j = 1, \dots, m, \quad A_{m+1} = A_1$$

şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. Ayrıca her $u \in A_j, v, w \in A_{j+1}, j = 1, 2, \dots, m$ için

$$\int_0^{G(Tu, Tv, Tw)} ds \leq \int_0^{M(u, v, w)} ds - \phi \left(\int_0^{M(u, v, w)} ds \right)$$

olduğunu kabul edelim. Burada $\phi \in \Psi$ ve

$$M(u, v, w) = \max\{G(u, v, w), G(u, Tu, Tu), G(v, Tv, Tv), G(w, Tw, Tw)\}$$

dir. Bu durumda $T, \cap_{i=1}^m A_i$ de tek bir sabit noktaya sahiptir (Karapınar et al. 2012).

Sonuç 5.6: (X, G) bir G -tam G -metrik uzay, $\{A_j\}_{j=1}^m$ X in G -kapalı alt kümelerinin bir ailesi, $Y = \cup_{j=1}^m A_j$ ve $T: Y \rightarrow Y$ dönüşümü

$$T(A_j) \subseteq A_{j+1}, \quad j = 1, \dots, m, \quad A_{m+1} = A_1$$

şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. Ayrıca her $u \in A_j, v, w \in A_{j+1}, j = 1, 2, \dots, m$ için

$$\int_0^{G(Tu, Tv, Tw)} ds \leq k \int_0^{M(u, v, w)} ds$$

olduğunu kabul edelim. Burada $k \in (0, 1)$ ve

$$M(u, v, w) = \max\{G(u, v, w), G(u, Tu, Tu), G(v, Tv, Tv), G(w, Tw, Tw)\}$$

dir. Bu durumda $T \cap_{i=1}^m A_i$ de tek bir sabit noktaya sahiptir (Karapınar et al. 2012).

Teorem 4.8 deki ψ ve ϕ fonksiyonlarının özel seçimleri için aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 5.7: (X, G) bir G -tam G -metrik uzay, $\{A_j\}_{j=1}^m$ X in G -kapalı alt kümelerinin bir ailesi, $Y = \cup_{j=1}^m A_j$ ve $T: Y \rightarrow Y$ dönüşümü

$$T(A_j) \subseteq A_{j+1}, \quad j = 1, \dots, m, \quad A_{m+1} = A_1$$

şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. Her $u \in A_j, v \in A_{j+1}, j = 1, 2, \dots, m$ için

$$M(u, v, v) = \max \left\{ G(u, v, v), G(u, Tu, Tu), G(v, Tv, Tv), \frac{1}{3} [2G(u, Tv, Tv) + G(v, Tu, Tu)], \frac{1}{3} [G(u, Tv, Tv) + 2G(v, Tu, Tu)] \right\}$$

olmak üzere

$$G(Tu, Tv, Tv) \leq kM(u, v, w)$$

olacak şekilde bir $k \in (0,1)$ varsa T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır (Bilgili ve Karapınar 2013).

Sonuç 5.8: (X, G) bir G -tam G -metrik uzay, $\{A_j\}_{j=1}^m$ X in G -kapalı alt kümelerinin bir ailesi, $Y = \bigcup_{j=1}^m A_j$ ve $T: Y \rightarrow Y$ dönüşümü

$$T(A_j) \subseteq A_{j+1}, \quad j = 1, \dots, m, \quad A_{m+1} = A_1$$

şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. Her $u \in A_j, v \in A_{j+1}, j = 1, 2, \dots, m$ için $0 < a + b + c + d + e < 1$ olmak üzere T dönüşümü için

$$\begin{aligned} \psi(G(Tu, Tv, Tw)) \leq & aG(u, v, v) + bG(u, Tu, Tu) + cG(v, Tv, Tv) \\ & + d \left(\frac{1}{3} [2G(u, Tv, Tv) + G(v, Tu, Tu)] \right) \\ & + e \left(\frac{1}{3} [G(u, Tv, Tv) + 2G(v, Tu, Tu)] \right) \end{aligned}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde a, b, c, d, e sabit sayılarının ve $\psi \in \Psi$ fonksiyonunun var olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\bigcap_{j=1}^m A_j$ kümesinde T dönüşümü tek bir sabit noktaya sahiptir (Bilgili ve Karapınar 2013).

Sonuç 5.9: (X, G) bir G -tam G -metrik uzay, $\{A_j\}_{j=1}^m$ X in G -kapalı alt kümelerinin bir ailesi, $Y = \bigcup_{j=1}^m A_j$ ve $T: Y \rightarrow Y$ dönüşümü

$$T(A_j) \subseteq A_{j+1}, \quad j = 1, \dots, m, \quad A_{m+1} = A_1$$

şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. Her $u \in A_j, v, w \in A_{j+1}, j = 1, 2, \dots, m$ için

$$M(u, v, w) = \max \{ G(u, v, w), G(u, Tu, Tu), G(v, Tv, Tv), G(w, Tw, Tw),$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{3}[G(u, Tv, Tv) + G(v, Tu, Tu) + G(w, Tu, Tu)], \\
 & \frac{1}{3}[G(u, Tw, Tw) + G(w, Tu, Tu) + G(v, Tu, Tu)], \\
 & \frac{1}{3}[G(v, Tu, Tu) + G(u, Tv, Tv) + G(w, Tv, Tv)], \\
 & \frac{1}{3}[G(v, Tw, Tw) + G(w, Tv, Tv) + G(u, Tv, Tv)], \\
 & \frac{1}{3}[G(w, Tu, Tu) + G(u, Tw, Tw) + G(v, Tw, Tw)], \\
 & \frac{1}{3}[G(w, Tv, Tv) + G(v, Tw, Tw) + G(u, Tw, Tw)],
 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\psi(G(Tu, Tv, Tw)) \leq \psi(M(u, v, w)) - \phi(M(u, v, w))$$

olacak şekilde $\phi \in \Phi$ ve $\psi \in \Psi$ fonksiyonları varsa $\bigcap_{j=1}^m A_j$ kümesinde T dönüşümü tek bir sabit noktaya sahiptir (Bilgili ve Karapınar 2013).

Teorem 4.9 un özel bir durumu olarak aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 5.10: X bir G -tam G -metrik uzay, $p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_p$ X in kapalı alt kümeleri, $Y = \bigcup_{i=1}^p \mathcal{A}_i$ ve $f: Y \rightarrow Y$ dönüşümü $\beta \in [0, 1)$ olmak üzere

(I) $Y = \bigcup_{i=1}^p \mathcal{A}_i$, Y nin T ye göre bir devirli gösterimidir,

(II) Her $(u, v, w) \in \mathcal{A}_i \times \mathcal{A}_{i+1} \times \mathcal{A}_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, p$ ($\mathcal{A}_{p+1} = \mathcal{A}_1$) için

$$\begin{aligned}
 G(fu, fv, fw) \leq & \beta \max\{G(u, v, w), G(u, fu, fu), G(v, fv, fv), G(w, fw, fw) \\
 & \frac{1}{3}(G(u, fv, fv), G(v, fw, fw), G(w, fu, fu))\}
 \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
 G(fu, fv, fw) \leq & \beta \max\{G(u, v, w), G(u, u, fu), G(v, v, fv), G(w, w, fw) \\
 & \frac{1}{3}(G(u, fv, fv), G(v, fw, fw), G(w, fu, fu))\}
 \end{aligned}$$

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

şartlarını sağlayan bir dönüşüm olsun. Bu durumda f bir sabit noktaya sahiptir. Üstelik f nin sabit noktası $\bigcap_{i=1}^p \mathcal{A}_i$ kümesine aittir (Nashine and Kadelburg 2013).



KAYNAKLAR

- Abbas, M., Nazir, T., Shatanawi, W. and Mustafa, Z. 2012. Fixed and Related Fixed Point Theorems for Three Maps in G -metrik Spaces. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 41(2), 291-306.
- Agarwal, R.P., Karapınar, E., O'Regan, D. and Roldán-López-de-Hierro, A.F. 2015. Fixed Point Theory in Metric Type Spaces. Springer International Publishing, 33-49, New York.
- Alber, Y.I. and Guerre-Delabriere, S. 1997. Principle of weakly contractive maps in Hilbert spaces. New Results in Operator Theory and Its Applications, vol. 98 of Operator Theory: Advances and Applications. 7–22, Birkhauser, Basel, Switzerland.
- Alghamdi, M.A., Petrusel, A. and Shahzad, N. 2012. A fixed point theorem for cyclic generalized contractions in metric spaces. Fixed Point Theory and Applications, 2012(122), 1-7.
- Asadi, M., Karapınar, E. and Salimi, P. 2013. A new approach to G -metric and related fixed point theorems. Journal of Inequalities and Applications, 2013(454), 1-15.
- Aydi, H., Chauhan, S. and Radenović, S. 2013. Fixed Points of Weakly Compatible Mappings in G -Metric Spaces Satisfying Common Limit Range Property. Series Mathematics and Informatics, 28(2), 197-210.
- Aydi, H., Felhi, A. and Sahmim, S. 2017. Related Fixed Point Results for Cyclic Contractions on G -metric Spaces and Application. Filomat, 31(3), 853-869.
- Bilgili, N. and Karapınar, E. 2013. Cyclic contractions via auxiliary functions on G -metric spaces. Fixed Point Theory and Applications, 2013(49), 1-16.
- Bilgili, N., Erhan, İ.M., Karapınar, E. and Türkoğlu, D. 2014. Cyclic Contractions and Related Fixed Point Theorems on G -metric Spaces. Applied Mathematics and Information Sciences, 8(4), 1541-1551.
- Chugh, R., Rhodes, B.E., Agarwal, M. and Kadian, T. 2014. Properties Q and R for nonlinear contractions in G -metric spaces. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 43(4), 581-594.
- Gaba, Y.U. 2017. Fixed Point Theorem in G -metric space. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 455, 528-537.
- Jachymski, J. 2011. Equivalent conditions for generalized contractions on (ordered) metric spaces. Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications A., 74(3), 768–774.
- Jleli, M. and Samet, B. 2012. Remarks on G -metric spaces and fixed point theorems. Fixed Point Theory and Applications, 2012(210), 1-7.

- Karapınar, E. 2011. Fixed point theory for cyclic weaker ϕ -contraction. Applied mathematics Letters, 24, 822-825.
- Karapınar, E. and Sadarangani, K. 2011. Fixed point theory for cyclic $(\phi - \varphi)$ -contractions. Fixed point Theory and Applications, 2011(69), 1-8.
- Karapınar, E., Yıldız-Ulus, A. and Erhan, İ.M. 2012. Cyclic Contractions on G -metric Spaces. Abstract and Applied Analysis, 2012, Article ID 182947, 1-15.
- Karapınar, E. and Agarwal, R.P. 2013. Further fixed point results on G -metric spaces. Fixed Point Theory and Applications, 2013(154), 1-14.
- Khan, M.S., Swaleh, M. and Sessa, S. 1984. Fixed point theorem by altering distances between the points. Bull. Austral. Math. Soc. 30, 1-9.
- Kirk, W.A., Srinivasan, P.S. and Veeramani, P. 2003. Fixed points for mappings satisfying cyclical contractive conditions. Fixed Point Theory and Applications, 4(1), 79-89.
- Kumar, P., Hooda, N. And Kumar. P. 2017. Common Fixed Point Theorems in G -metric Spaces. Advances in Fixed Point Theory, 7(2), 289-295.
- Malhotra, N. and Bansal, B. 2015. A new type of contraction in a complete G -metric space. Journal Nonlinear Analysis and Application, 2015(2), 105-110.
- Mustafa, Z. and Sims, B. 2006. A new approach to generalized metric spaces. Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 7(2), 83-93.
- Mustafa, Z., Shatanawi, W. and Bataineh, M. 2009. Existence of Fixed Point Results in G -metric Spaces. International Journal of Mathematics and Mathematical sciences, 2009, Article ID 283028, 1-10.
- Mustafa, Z. and Obiedat, H. 2010. A Fixed Point Theorem of Reich in G -Metric Spaces. CUBO A Mathematical Journal, 12(01), 83-93.
- Mustafa, Z., Awawdeh, F. and Shatanawi, W. 2010. Fixed Point Theorem for Expansive Mappings in G -metric Spaces. International Journal of Contemporary Mathematical Sciencis, 5(50), 2463-2472.
- Nashine, H.K. and Kadelburg, Z. 2012. Nonlinear cyclic weak contractions in G -metric spaces and applications to boundary value problems. Fixed Point Theory and Applications, 2012(227), 1-17.
- Nashine, H.K. and Kadelburg, Z. 2013. Nonlinear generalized cyclic contractions in complete G -metric spaces and applications to integral equations. Nonlinear Aanlysis: Modelling and Control, 18(2), 160-176.
- Rezapour, S., Derafshpour, M. and Shahzad, N. 2011. Best proximity points of cyclic φ -contractions in ordered metric spaces. Topological Methods in Nonlinear Analysis, 37(1), 193-202.

- Sahu, R., Sanodia, P.L. and Gupta, A. 2015. Some Fixed Point Theorems of Expansion Mapping in G -metric Spaces. International Journal of Mathematics and Statistics Invention, 3(5), 12-21.
- Shatanawi, W. 2010. Fixed Point Theory for Contractive Mappings Satisfying ϕ -Maps in G -Metric Spaces. Fixed Point Theory and Applications, 2010, Article ID 181650, 1-9.
- Tahat, N., Aydi, H., Karapınar, E. and Shatanawi, W. 2012. Common fixed points for single-valued and multi-valued maps satisfying a generalized contraction in G -metric spaces. Fixed Point Theory and Applications, 2012(48), 1-9.
- Zhang, Q. and Song, Y. 2009. Fixed point theory for generalized φ -weak contraction. Applied Mathematics Letters, 22(1), 75-78.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı-Soyadı : Çiğdem Yalçın
Uyruğu : Türkiye Cumhuriyeti
Doğum Tarihi ve Yeri : 28.07.1986
Medeni Hali : Bekar
Telefon : +905397754458
e-mail : cgdmyalcin@gmail.com

Eğitim

Derece	Üniversite	Mezuniyet Yılı
Yüksek Lisans	Erzurum Teknik Üniversitesi	2019
Lisans	Atatürk Üniversitesi	2014
Lise	Nenehatun Kız Lisesi	2005