

T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI



$\oplus - g -$ RADİKAL TÜMLENMİŞ MODÜLLER

Doktora Tezi

Hilal Başak ÖZDEMİR

Danışman
Prof. Dr. Celil NEBİYEV

SAMSUN
2023

TEZ KABUL VE ONAYI

Hilal Başak ÖZDEMİR tarafından, **Prof. Dr. Celil NEBİYEY** danışmanlığında hazırlanan “ $\oplus - g - \text{RADİKAL TÜMLENMİŞ MODÜLLER}$ ” başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından 3.3.2023 tarihinde yapılan sınav sonucunda oy birliği ile başarılı bulunarak Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

	Unvanı Adı Soyadı Üniversitesi Ana Bilim/Ana Sanat Dalı	Sonuç
Başkan	Prof. Dr. Ayten PEKİN İstanbul Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalı	☐ Kabul ☐ Ret
Üye	Prof. Dr. Celil NEBİYEY Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı	☐ Kabul ☐ Ret
Üye	Dr. Öğr. Üyesi Mustafa YAPICI Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalı	☐ Kabul ☐ Ret
Üye	Doç. Dr. Figen ERYILMAZ Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı	☐ Kabul ☐ Ret
Üye	Doç. Dr. Berna KOŞAR Üsküdar Üniversitesi Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi Yazılım Mühendisliği Bölümü	☐ Kabul ☐ Ret

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen ve yukarıda adları yazılı jüri üyeleri tarafından uygun görülmüştür.

Prof. Dr. Ahmet TABAK
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Hazırladığım Doktora tezinin bütün aşamalarında bilimsel etiğe ve akademik kurallara riayet ettiğimi, çalışmada doğrudan veya dolaylı olarak kullandığım her alıntıya kaynak gösterdiğimi ve yararlandığım eserlerin Kaynaklar'da gösterilenlerden oluştuğunu, her unsurun enstitü yazım kılavuzuna uygun yazıldığını ve TÜBİTAK Araştırma ve Yayın Etiği Kurulu Yönetmeliği'nin 3. bölüm 9. maddesinde belirtilen durumlara aykırı davranılmadığını taahhüt ve beyan ederim.

Etik Kurul Gerekli mi ?

Evet ☐

Hayır ☒

05/01/2023

Hilal Başak ÖZDEMİR

TEZ ÇALIŞMASI ÖZGÜNLÜK RAPORU BEYANI

Tez Başlığı : $\oplus - g$ - RADİKAL TÜMLENMİŞ MODÜLLER

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışması için şahsım tarafından 05/01/2023 tarihinde intihal tespit programından alınmış olan özgünlük raporu sonucunda;

Benzerlik oranı : % 15

Tek kaynak oranı : % 2 çıkmıştır.

05/01/2023

Prof. Dr. Celil NEBİYEYEV

ÖZET

$\oplus - g$ - RADİKAL TÜMLENMİŞ MODÜLLER

Hilal Başak ÖZDEMİR

Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Doktora, Mart/2023

Danışman: Prof. Dr. Celil NEBİYEYEV

M bir R-modül olmak üzere eğer M'nin her alt modülü M'de bir direkt toplam terimi olan bir g-radikal tümleyene sahipse M'ye bir $\oplus$ -g-radikal tümlenmiş modül denir. M bir g-radikal tümlenmiş modül olsun. Eğer M'de her g-radikal tümleyen alt modül M'nin bir direkt toplam terimi ise M'ye bir güçlü $\oplus$ -g-radikal tümlenmiş modül denir. Bu tez çalışmasında bu modüller incelendi ve bu modüllerle ilgili birtakım sonuçlar elde edildi. Bu tez çalışmasında ele alınan tüm modüller birimli halka üzerinde olup üniter modüllerdir. Bu çalışmada sonlu sayıda $\oplus$ -g-radikal tümlenmiş modüllerin direkt toplamının da $\oplus$ -g-radikal tümlenmiş olduğu gösterildi. M bir $\oplus$ -g-radikal tümlenmiş ve duo modül olmak üzere M'nin her bölüm modülü ve her homomorfik görüntüsünün de $\oplus$ -g-radikal tümlenmiş olduğu gösterildi. Ayrıca M bir güçlü $\oplus$ -g-radikal tümlenmiş modül olmak üzere M'nin her direkt toplam teriminin de güçlü $\oplus$ -g-radikal tümlenmiş olduğu gösterildi. M bir dağılımlı ve $\oplus$ -g-radikal tümlenmiş modül olsun. Bu durumda M'nin her bölüm modülü ve her homomorfik görüntüsü de $\oplus$ -g-radikal tümlenmiştir. M, (D3) özelliğini sağlayan bir $\oplus$ -g-radikal tümlenmiş modül olsun. Bu durumda M'nin her direkt toplam terimi de $\oplus$ -g-radikal tümlenmiş olur. M, (D3) özelliğini sağlayan bir $\oplus$ -g-radikal tümlenmiş R-modül ve N bir R-modül olmak üzere $f : M \rightarrow N$ bir R-modül epimorfizması olsun. Eğer Çekf , M'nin bir direkt toplam terimi ise bu durumda N de $\oplus$ -g-radikal tümlenmiş olur. M, SSP özelliğini sağlayan bir $\oplus$ -g-radikal tümlenmiş R-modül olsun. Bu durumda M'nin her K direkt toplam terimi için M/K da $\oplus$ -g-radikal tümlenmiş olur. M bir g-tümlenmiş modül olsun. Eğer M'de her g-tümleyen alt modül M'nin bir direkt toplam terimi ise M'ye bir güçlü $\oplus$ -g-tümlenmiş modül denir. M bir güçlü $\oplus$ -g-radikal tümlenmiş R-modül olsun. Eğer $\text{Rad}_g M \ll_g M$ ise M güçlü $\oplus$ -g-tümlenmiş olur.

Anahtar Sözcükler: Büyük alt modül, Küçük alt modül, g-Tümlenmiş modül, g-Radikal tümlenmiş modül

ABSTRACT

$\oplus$ -g-RADICAL SUPPLEMENTED MODULES

Hilal Başak ÖZDEMİR
Ondokuz Mayıs University
Institute of Graduate Studies
Department of Mathematics

Ph.D., March/2023

Supervisor: Prof. Dr. Celil NEBİYEYEV

Let M be an R -module. If every submodule of M has a g -radikal supplement that is a direct summand of M , then M is called a $\oplus$ - g -radical supplemented module. Let M be a g -radical supplemented module. If every g -radical supplement submodule in M is a direct summand of M , then M is called a strongly $\oplus$ - g -radical supplemented module. In this thesis work, these modules are investigated and some results of these modules are obtained. In this thesis work, all modules are unital modules on ring with identity. In this work, it is proved that the finite direct sum of $\oplus$ - g -radical supplemented modules is also $\oplus$ - g -radical supplemented. Let M be a $\oplus$ - g -radical supplemented and duo module. It is proved that every factor module of M and every homomorphic image of M are also $\oplus$ - g -radical supplemented. It is also proved that every direct summand of M is strongly $\oplus$ - g -radical supplemented, where M is a strongly $\oplus$ - g -radical supplemented module. Let M be a distributive and $\oplus$ - g -radical supplemented module. In this case, every factor module and every homomorphic image of M are also $\oplus$ - g -radical supplemented. Let M be a $\oplus$ - g -radical supplemented module with (D3) property. In this case, every direct summand of M is also $\oplus$ - g -radical supplemented. Let M be a $\oplus$ - g -radical supplemented R -module with (D3) property and $f : M \rightarrow N$ be an R -module epimorphism with N is an R -module. If $\text{Ker}(f)$ is a direct summand of M , then N is also $\oplus$ - g -radical supplemented. Let M be a $\oplus$ - g -radical supplemented R -module with SSP property. In this case, M/K is also $\oplus$ - g -radical supplemented for every direct summand K of M . Let M be a g -supplemented module. If every g -supplement submodule in M is a direct summand of M , then M is called a strongly $\oplus$ - g -supplemented module. Let M be a strongly $\oplus$ - g -radical supplemented R -module. If $\text{Rad}_g M \ll_g M$, then M is strongly $\oplus$ - g -supplemented.

Keywords: Essential submodule, Small submodule, g -Supplemented module, g -Radical supplemented module

ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim ve tez çalışmam sırasında bilgi,birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösteren ve destek olan danışman hocam Prof. Dr. Celil NEBİYEV'e çok teşekkür ederim.

Bu süreçte yanımda olan ve bana destek veren aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hilal Başak ÖZDEMİR



İÇİNDEKİLER

TEZ KABUL VE ONAYI	i
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI	ii
TEZ ÇALIŞMASI ÖZGÜNLÜK RAPORU BEYANI	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR	vii
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER VE KAYNAK ÖZETLERİ.....	2
2.1. Literatür Özeti.....	2
2.2. Modüller.....	2
2.3. Homomorfizma ve İzomorfizma Teoremleri	6
2.4. Direkt Çarpım ve Direkt Toplam	8
2.5. Projektif ve π – Projektif Modüller	11
2.6. İnjektif Modüller.....	17
2.7. Küçük Alt Modüller	18
2.8. Bir Modülün Radikali	20
2.9. Oyuk ve Lokal Modüller.....	23
3. MATERYAL VE YÖNTEM	25
3.1. Tümlenmiş Modüller	25
3.2. $\oplus$ – Tümlenmiş Modüller.....	38
3.3. Genelleştirilmiş Tümlenmiş ve Genelleştirilmiş $\oplus$ – Tümlenmiş Modüller	39
3.4. Güçlü $\oplus$ – Tümlenmiş ve Güçlü Rad – $\oplus$ – Tümlenmiş Modüller	41
3.5. g – Tümlenmiş Modüller	43
3.6. Bol g – Tümlenmiş Modüller	50
3.7. g – Radikal Tümlenmiş Modüller	52
3.8. Bol g – Radikal Tümlenmiş Modüller	54
4. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	58
4.1. $\oplus$ – g – Radikal Tümlenmiş Modüller.....	58
4.2. Güçlü $\oplus$ – g – Radikal Tümlenmiş Modüller	68
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	73
KAYNAKLAR	74
ÖZGEÇMİŞ.....	76

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{Z}$	: Tam Sayılar halkası
$\mathbb{Q}$	: Tamlık Bölgesinin kesir cismi
$\subset$	: Alt küme
$\leq$	: Alt modül
$\ll$	: Küçük alt modül
$\ll_g$	: Genelleştirilmiş küçük alt modül
$\trianglelefteq$	: Büyük alt modül
1_R	: R halkasının birim elamanı (çarpımsal birim)
0_R	: R halkasının sıfır elamanı (toplamsal birim)
$R\text{--Modül}$	: R halkası üzerinde tanımlanan modül
${}_R M$	: Sol R –modül
$\langle X \rangle$	: X kümesi tarafından üretilen alt modül
Rm	: m elemanı tarafından üretilen devirli alt modül
M / N	: M modülünün N alt modülüne göre bölüm modülü
Görf	: f modül homomorfizmasının görüntüsü
Çekf	: f modül homomorfizmasının çekirdeği
I_M veya 1_M	: M modülünün birim homomorfizması
$\text{End}(M)$	: M modülünün bütün endomorfizmalar kümesi
$\sum_{i \in I} M_i$	: $\{M_i\}_{i \in I}$ alt modül ailesinin toplamı
$\bigoplus_{i \in I} M_i$	: $\{M_i\}_{i \in I}$ alt modül ailesinin iç direkt toplamı
$\bigoplus'_{i \in I} M_i$	: $\{M_i\}_{i \in I}$ modül ailesinin dış direkt toplamı
$\prod_{i \in I} M_i$	: $\{M_i\}_{i \in I}$ modül ailesinin direkt çarpımı
$M \oplus N$	: M ve N modüllerinin direkt toplamı
$\cong$	: İzomorfizma
$\text{Rad}M$	: M modülünün radikali
$\text{Rad}_g M$	: M modülünün genelleştirilmiş radikali

1. GİRİŞ

Bu tez 5 bölümden oluşmaktadır. Kaynak özetinde daha önceden yapılmış çalışmalardan bahsedilmiştir. Genel bilgiler bölümünde modül, projektif ve π -projektif modül, injektif modül, oyuk ve lokal (veya yerel) modül, küçük alt modül, direkt çarpım, direkt toplam ve radikal tanımları verilmiştir. Ayrıca bu kavramlar ile ilgili kullanacağımız bazı temel teoremlere değinilmiştir.

Materyal ve Yöntem bölümünde tümlenmiş modül, $\oplus$ -tümlenmiş modül, genelleştirilmiş (radikal) tümlenmiş modül, genelleştirilmiş (radikal) $\oplus$ -tümlenmiş modül, güçlü $\oplus$ -tümlenmiş modül, güçlü $\text{rad}-\oplus$ -tümlenmiş modül, g -tümlenmiş modül, bol g -tümlenmiş modül, g -radikal tümlenmiş modül, bol g -radikal tümlenmiş modül ve duo modül kavramlarına yer verilmiştir. Bu kavramlar ile ilgili tezde kullanılacak önemli teoremlere, ispatlarına ve bu teoremlerden çıkan sonuçlara değinilmiştir.

Bulgular ve Tartışma bölümünde $\oplus-g$ -radikal tümlenmiş modül tanımı verilmiştir. Bu modül ile ilgili bazı teoremlere ve ispatlarına değinilmiştir. Bunlarla ilgili örnekler verilmiştir. Ayrıca bu bölümde güçlü $\oplus-g$ -tümlenmiş modül ve güçlü $\oplus-g$ -radikal tümlenmiş modül tanımları verilmiş olup bu kavramlarla ilgili bazı teoremlere ve ispatlarına yer verilmiştir. Yine bunlarla ilgili örnekler de mevcuttur.

2. KURAMSAL TEMELLER VE KAYNAK ÖZETLERİ

2.1. Literatür Özeti

1979 yılında Varadarajan, ilk defa modüllerde tümleyen kavramını tanımlamış ve Hausen, J. ve Johnson, J. A. 1982’de yayınlanan makalelerinde modüllerde tümleyenlerle ilgili birtakım özellikler vermişlerdir. Wisbauer, R. 1991’de yayınlanan Foundations of Module and Ring Theory adlı kitabında tümlenmiş ve bol tümlenmiş modüllere geniş yer vermiştir. Mohamed, S. H. ve Müller, B. J. tarafından 1990’da yayınlanan Continuous and Discrete Modules adlı kitapta $\oplus$ -tümlenmiş modüllere yer verilmiş ve 1999 yılında Harmancı, A., Keskin, D. ve Smith, P. F. Bu modüllerle ilgili birtakım özellikler vermişlerdir. Koşar, B., Nebiyev, C. ve Sökmez, N. 2015 yılında yayınladıkları “ g – Supplemented Modules” başlıklı makalelerinde g – tümlenmiş modül kavramını tanımlamış ve bu modüllerle ilgili birtakım özellikler incelemişlerdir. Koşar, B., Nebiyev, C. ve Pekin, A. 2019 yılında yayınladıkları “A Generalization of g – Supplemented Modules” başlıklı makalelerinde g – radikal tümlenmiş modülleri tanımlamış ve bu modüller ile ilgili birtakım özellikler incelemişlerdir.

2.2. Modüller

Tanım 2.2.1. R halkası ve $(M, +)$ abel grubu için $f : R \times M \rightarrow M$ fonksiyonu verilmiş olsun. $f(r, m) \in M$ elemanı rm ile gösterilsin. Her $r, s \in R$ ve her $m, n \in M$ için,

$$(i) \quad r(m + n) = rm + rn$$

$$(ii) \quad (r + s)m = rm + sm$$

$$(iii) \quad (rs)m = r(sm)$$

ise M ’ye bir sol R -modül denir ve genellikle ${}_R M$ veya sadece M ile gösterilir.

Eğer R halkası birimli ve her $m \in M$ için,

$$(iv) \quad 1_R \cdot m = m$$

ise, M ’ye bir üniter sol R -modül veya kısaca üniter R -modül denir (Hungerford, 1973).

Bu çalışmada bütün modüller üniter sol R -modül olarak alınacaktır.

Tanım 2.2.2. M bir R -modül ve M modülünün boştan farklı bir A alt

kümesi M modülündeki işlemlere göre bir R -modül ise A kümesine M modülünün bir alt modülü denir ve genellikle $A \leq M$ ile gösterilir (Hungerford, 1973).

Tanım 2.2.3. M bir R -modül olmak üzere M 'nin kendisinden farklı bir alt modülüne M 'nin bir öz alt modülü denir (Hungerford, 1973).

Teorem 2.2.4. M bir R -modül olsun. Bu takdirde

(i) Her $r \in R$ için $r \cdot 0_M = 0_M$ olur.

(ii) Her $m \in M$ için $0_R \cdot m = 0_M$ olur.

(iii) Her $r \in R$ ve her $m \in M$ için $(-r)m = r(-m) = -(rm)$ olur.

(iv) Her $r \in R$, her $m \in M$ ve her $n \in \mathbb{Z}$ için $(nr)m = r(nm) = n(rm)$ olur

(Hungerford, 1973).

Teorem 2.2.5. M bir R -modül ve $\emptyset \neq N \subset M$ olsun. N 'nin bir alt modül olması için gerek ve yeter koşul her $a, b \in N$ ve her $r \in R$ için $a - b \in N$ ve $ra \in N$ olmasıdır (Hungerford, 1973).

Teorem 2.2.6. M bir R -modül olsun. M 'nin birtakım alt modüllerinin arakesiti de M 'nin bir alt modülüdür (Hungerford, 1973).

Teorem 2.2.7. M bir R -modül ve X , M 'nin bir alt kümesi olsun. M 'nin X 'i kapsayan bütün alt modüllerinin arakesitine X 'in ürettiği alt modül denir ve $\langle X \rangle$ ile gösterilir. Eğer X sonlu elemanlı ise, X 'in ürettiği alt modüle sonlu üretilmiş alt modül ve $X = \{a\}$ şeklinde tek elemanlı ise, $\langle X \rangle = \langle a \rangle$ 'ya bir devirli alt modül denir (Hungerford, 1973).

Teorem 2.2.8. M bir R -modül ve X , M 'nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Bu takdirde $\langle X \rangle = \left\{ r_1 x_1 + r_2 x_2 + \dots + r_n x_n \mid r_i \in R, x_i \in X, i = 1, 2, \dots, n, n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$ şeklindedir (Hungerford, 1973).

Sonuç 2.2.9. M bir R -modül ve X , M 'nin bir alt kümesi olsun. $X = \{a\} \subset M$ ise $\langle X \rangle = \langle a \rangle = Ra$ 'dır (Hungerford, 1973).

Tanım 2.2.10. M bir R -modül ve $\{N_i\}_{i \in I}$, M 'nin alt modüllerinin bir ailesi olsun.

$X = \bigcup_{i \in I} N_i$ olmak üzere X tarafından üretilen alt modüle $\{N_i\}_{i \in I}$ ailesinin toplamı

denir ve $\langle X \rangle = \sum_{i \in I} N_i$ ile gösterilir (Hungerford, 1973).

Teorem 2.2.11. M bir R -modül ve $\{N_i\}_{i \in I}$, M 'nin alt modüllerinin bir ailesi olsun. Bu takdirde $\sum_{i \in I} N_i = \left\{ n_{i_1} + n_{i_2} + \dots + n_{i_k} \mid i_j \in I, n_{i_j} \in N_{i_j}, j=1,2,\dots,k, k \in \mathbb{Z}^+ \right\}$ olur. Eğer I sonlu elemanlı ise, örneğin $I = \{1,2,\dots,k\}$ ise, bu toplam $N_1 + N_2 + \dots + N_k = \left\{ n_1 + n_2 + \dots + n_k \mid n_i \in N_i, i=1,2,\dots,k \right\}$ şeklindedir (Hungerford, 1973).

Tanım 2.2.12. M bir R -modül ve N de M 'nin bir alt grubu olsun. M/N bölüm grubu $r \in R$, $m+N \in M/N$ olmak üzere $r(m+N) = rm+N$ ile tanımlı dış işleme göre bir R -modül yapısına sahiptir. Bu M/N R -modülüne M 'nin N 'ye göre bölüm modülü denir (Wisbauer, 1991).

Teorem 2.2.13. M bir sonlu üretilmiş R -modül olsun. Bu takdirde M 'nin her bölüm modülü de sonlu üretilmiştir (Wisbauer, 1991).

Tanım 2.2.14. M bir R -modül ve $N \leq M$ olsun. M/N bölüm modülü sonlu üretilmiş ise, N alt modülüne M 'nin bir dual sonlu alt modülü denir (Alizade ve ark., 2001).

Tanım 2.2.15. M bir R -modül ve N , M 'nin bir öz alt modülü olsun. M 'nin N 'yi kapsayan N 'den farklı hiçbir öz alt modülü yoksa N 'ye M 'nin bir maksimal alt modülü denir (Wisbauer, 1991).

Teorem 2.2.16. M bir R -modül ve N , M modülünün bir öz alt modülü olsun. Bu takdirde N öz alt modülünün maksimal olması için gerek ve yeter koşul her $m \in M - N$ için $N + \langle m \rangle = M$ olmasıdır (Kasch, 1982).

İspat: $(\Rightarrow)$ $\forall m \in M - N$ için $N \subset N + \langle m \rangle$, $N \neq N + \langle m \rangle$ ve N , M 'nin bir maksimal alt modülü olduğundan $N + \langle m \rangle = M$ olur.

$(\Leftarrow)$ $N \leq K$ ve $N \neq K$ olan herhangi bir K alt modülünü ele alalım. Eğer $K = M$ olduğunu gösterirsek istenen elde edilir. $N \neq K$ olduğundan $\exists m \in K - N$ vardır. Bu durumda $m \in M - N$ olup hipotez gereği $N + \langle m \rangle = M$ olur. Aynı zamanda

$m \in K$ olduğundan $\langle m \rangle \leq K$ olup $M = N + \langle m \rangle \leq K$ olur. Dolayısıyla $K = M$ bulunur.

Teorem 2.2.17. (Modüler Kural) M bir R -modül, K , N ve H de M 'nin alt modülleri ve $H \subset N$ olsun. Bu takdirde, $(H + K) \cap N = H + K \cap N$ 'dir (Alizade ve Pancar, 1999).

İspat: Herhangi $a \in (H + K) \cap N$ alalım. Bu durumda $a \in H + K$ ve $a \in N$ olur. $a \in H + K$ olduğundan $a = h + k$ olacak şekilde $\exists h \in H$ ve $\exists k \in K$ vardır. $H \subset N$ olduğundan $h \in N$ olur. Bu durumda $k = a - h$, $a \in N$ ve $h \in N$ olduğundan $k \in N$ olup $k \in K \cap N$ bulunur. Yani $h \in H$ ve $k \in K \cap N$ olup $a = h + k \in H + K \cap N$ bulunur. Bu durumda $(H + K) \cap N \subset H + K \cap N$ olur. Ayrıca, $H + K \cap N \subset H + K$ ve $H + K \cap N \subset N$ olduğundan $H + K \cap N \subset (H + K) \cap N$ olur. Dolayısıyla $(H + K) \cap N = H + K \cap N$ 'dir.

Teorem 2.2.18. M bir R -modül ve $N \leq M$ olsun. Bu takdirde $K \rightarrow K/N$ ile tanımlı M 'nin N 'yi kapsayan alt modülleri ile M/N 'nin alt modülleri arasında birebir bir eşleme yapılabilir. Böylece M/N 'nin her alt modülü, K , M 'nin N 'yi kapsayan bir alt modülü olmak üzere K/N şeklindedir. Ayrıca N 'yi kapsayan $K \leq M$ alt modülünün M 'de maksimal olması için gerek ve yeter koşul K/N 'nin M/N 'de maksimal olmasıdır (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 2.2.19. M modülünün her K, L, N alt modülleri için, $N + K \cap L = (N + K) \cap (N + L)$ veya $N \cap (K + L) = N \cap K + N \cap L$ denk koşullarından biri sağlanıyorsa M modülüne dağılımlıdır denir (Mikhalev ve Tuganbaev, 1999).

Teorem 2.2.20. M bir R -modül ve $X, Y \leq M$ olmak üzere $M = X + Y$ olsun. Eğer $T \leq M$ olmak üzere $M = X \cap Y + T$ ise $M = X + Y \cap T = Y + X \cap T$ olur (Clark ve ark., 2006).

İspat: $M = X \cap Y + T$ olduğundan Modüler Kuraldan

$$Y = Y \cap M = Y \cap (X \cap Y + T) = X \cap Y + Y \cap T$$

olup

$$M = X + Y = X + X \cap Y + Y \cap T = X + Y \cap T$$

olur. Benzer şekilde $M = Y + X \cap T$ olduğu da gösterilebilir.

Tanım 2.2.21. M bir R -modül olsun. Eğer M 'nin alt modülleri sadece 0 ve M ise M 'ye bir basit modül denir (Hungerford, 1973).

2.3. Homomorfizma ve İzomorfizma Teoremleri

Tanım 2.3.1. M ve N iki R -modül olsun. Eğer $f : M \rightarrow N$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa f 'ye bir R -modül homomorfizması veya kısaca homomorfizma denir.

$$(i) \text{ Her } a, b \in M \text{ için, } f(a+b) = f(a) + f(b)$$

$$(ii) \text{ Her } a \in M \text{ ve her } r \in R \text{ için, } f(ra) = rf(a)$$

$M = N$ ise f 'ye M 'nin bir endomorfizması denir ve M 'nin bütün endomorfizmalarının kümesi $End_R(M)$ veya $End(M)$ ile gösterilir. $End(M)$ fonksiyonlar üzerinde tanımlı toplama ve bileşke işlemine göre bir halka yapısına sahiptir.

Eğer f homomorfizması birebir ise f 'ye bir monomorfizma (R -modül monomorfizması), örten ise bir epimorfizma (R -modül epimorfizması), birebir ve örten ise bir izomorfizma (R -modül izomorfizması) denir. M ve N modülleri arasında en az bir izomorfizma varsa M ile N 'ye izomorf modüller denir ve $M \cong N$ ile gösterilir (Hungerford, 1973).

Tanım 2.3.2. Her $m \in M$ için $f(m) = 0_N$ ile tanımlı $f : M \rightarrow N$ fonksiyonu bir homomorfizmadır. Bu homomorfizmaya sıfır homomorfizma denir ve genellikle 0 ile gösterilir (Hungerford, 1973).

Tanım 2.3.3. Her $m \in M$ için $g(m) = m$ ile tanımlı $g : M \rightarrow M$ fonksiyonu bir homomorfizmadır. Bu homomorfizmaya birim homomorfizma adı verilir. Genellikle I_M veya 1_M ile gösterilir (Hungerford, 1973).

Tanım 2.3.4. M bir R -modül ve $N \leq M$ olsun. Her $n \in N$ için $i(n) = n$ ile tanımlı $i : N \rightarrow M$ homomorfizması bir monomorfizma olup bu monomorfizmaya içerme monomorfizması denir (Hungerford, 1973).

Tanım 2.3.5. $f : M \rightarrow N$ bir homomorfizma olsun. $\{a \in M \mid f(a) = 0\}$ kümesine f 'nin çekirdeği denir ve $\text{Çek}f$ ile gösterilir. $\{f(a) \mid a \in M\}$ kümesine de f 'nin görüntü kümesi denir ve $\text{Gör}f$ ile gösterilir (Hungerford, 1973).

Buna göre, $\text{Çek}f = \{a \in M \mid f(a) = 0\}$ ve $\text{Gör}f = \{f(a) \mid a \in M\}$ 'dir.

Tanım 2.3.6. M bir R -modül ve $K \leq M$ olsun. Bu takdirde $\phi : M \rightarrow M/K$, $a \rightarrow \phi(a) = a + K$ dönüşümü bir epimorfizmadır ve $\text{Çek}\phi = K$ 'dır.

Bu epimorfizmaya doğal homomorfizma veya kanonik epimorfizma adı verilir (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 2.3.7. $f : M \rightarrow N$ bir R -modül homomorfizması, $K \leq M$ ve $S \leq N$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler vardır.

- (i) $f(K)$, $\text{Gör}f$ tarafından kapsanan N 'nin bir alt modülüdür. Buna göre $\text{Gör}f$ de N 'nin bir alt modülüdür.
 - (ii) $f^{-1}(S)$, $\text{Çek}f$ 'yi kapsayan M 'nin bir alt modülüdür. Buna göre $\text{Çek}f$, M 'nin bir alt modülüdür.
 - (iii) $f^{-1}(f(K)) = K + \text{Çek}f$ 'dir. Eğer $\text{Çek}f \subset K$ ise, $f^{-1}(f(K)) = K$ 'dır.
 - (iv) $f(f^{-1}(S)) = S \cap \text{Gör}f$ dir. Eğer $S \subset \text{Gör}f$ ise, $f(f^{-1}(S)) = S$ 'dir.
- (Kasch, 1982).

Önerme 2.3.8. M bir R -modül ve $\{N_i\}_{i \in I}$, M 'nin K alt modülünü içeren M nin alt modüllerinin bir ailesi olsun. Bu takdirde $\bigcap_{i \in I} (N_i / K) = \left(\bigcap_{i \in I} N_i \right) / K$ 'dır (Hungerford, 1973).

İspat: $a + K \in \bigcap_{i \in I} (N_i / K)$ olsun. Bu takdirde her $i \in I$ için $a + K \in N_i / K$ ve $a \in N_i$ 'dir. O halde $a + K \in \left(\bigcap_{i \in I} N_i \right) / K$ 'dır. Buradan $\bigcap_{i \in I} (N_i / K) \subset \left(\bigcap_{i \in I} N_i \right) / K$ olur.

Tersine, $\left(\bigcap_{i \in I} N_i \right) / K \subset \bigcap_{i \in I} (N_i / K)$ olduğu açıktır. Dolayısıyla istenen eşitlik elde edilir.

Teorem 2.3.9. (Homomorfizma Teoremi veya 1. İzomorfizma Teoremi)

M ve N iki R -modül olsun. Her $f : M \rightarrow N$ homomorfizması için $p : M \rightarrow M / \text{Çekf}$ doğal homomorfizma olmak üzere $f = \bar{f} \circ p$ olacak şekilde bir tek $\bar{f} : M / \text{Çekf} \rightarrow N$ monomorfizması vardır. Özellikle, $M / \text{Çekf} \cong \text{Görf}$ 'dir (Alizade ve Pancar, 1999).

Sonuç 2.3.10. M ve N birer R -modül ve $f : M \rightarrow N$ bir epimorfizma ise, $M / \text{Çekf} \cong N$ 'dir (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 2.3.11. (2. İzomorfizma Teoremi) M bir R -modül ve $N, K \leq M$ olsun. Bu takdirde $(N + K) / K \cong N / (N \cap K)$ 'dır (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 2.3.12. (3. İzomorfizma Teoremi) N, K ve $M, N \leq K \leq M$ koşulunu sağlayan R -modüller ise, $M / K \cong (M / N) / (K / N)$ 'dir (Alizade ve Pancar, 1999).

2.4. Direkt Çarpım ve Direkt Toplam

Tanım 2.4.1. I boştan farklı bir indis kümesi olmak üzere, $\{A_i\}_{i \in I}$ kümelerin bir ailesi olsun. $\{\alpha | \alpha : I \rightarrow \cup_{i \in I} A_i, \text{ her } i \in I \text{ için } \alpha(i) \in A_i\}$ dönüşümler kümesine $\{A_i\}_{i \in I}$ kümeler ailesinin çarpımı denir ve bu küme $\prod_{i \in I} A_i$ ile gösterilir. Her $i \in I$ için $\alpha(i) := \alpha_i$ ve $\alpha := (\alpha_i)_{i \in I}$ olarak alalım. Burada α_i ye α nın i . bileşeni denir. Eğer I indis kümesi sayılabilir ise, $\alpha = (\alpha_i)_{i \in I} = (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_n}, \dots)$ şeklinde gösterilir.

$\{M_i\}_{i \in I}$, R -modüllerin bir ailesi, $I \neq \emptyset$ ve $\alpha = (\alpha_i)_{i \in I}, \beta = (\beta_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i$ olmak üzere,

$$(i) \alpha = \beta \Leftrightarrow \text{her } i \in I \text{ için } \alpha_i = \beta_i,$$

$$(ii) \alpha + \beta = (\alpha_i + \beta_i)_{i \in I},$$

(iii) $r \in R$ olmak üzere $r\alpha = (r\alpha_i)_{i \in I}$ şeklinde tanımlıdır. Bu cebirsel işlemlere göre $\prod_{i \in I} M_i$ bir sol R -modül yapısına sahiptir. Bu modüle $\{M_i\}_{i \in I}$ modüller ailesinin direkt çarpımı denir.

Bir $\alpha \in \prod_{i \in I} M_i$ elemanın sonlu tane bileşeni sıfırdan farklı ve diğer bütün bileşenleri sıfır ise, α 'ya sonlu desteklidir denir. $\prod_{i \in I} M_i$ modülünde sıfır eleman sonlu destekli kabul edilerek bütün sonlu destekli elemanların kümesi $\prod_{i \in I} M_i$ 'de bir alt modül yapısına sahiptir ve bu alt modül $\bigoplus'_{i \in I} M_i$ ile gösterilir. Burada $\bigoplus'_{i \in I} M_i$ alt modülüne $\{M_i\}_{i \in I}$ modüller ailesinin dış direkt toplamı denir. Eğer I indis kümesi sonlu ise, $\prod_{i \in I} M_i = \bigoplus'_{i \in I} M_i$ 'dir.

Eğer $\forall i \in I$ için $M_i = M$ ise $\bigoplus'_{i \in I} M_i = M^{(I)}$ yazılır ve M modülünün kopyalarının toplamı denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 2.4.2. M ve N iki R -modül ve I boş kümeden farklı bir indis kümesi olsun. Eğer en az bir $f : M^{(I)} \rightarrow N$ epimorfizması mevcut ise, N 'ye bir M – üretilmiş modül denir. I indis kümesi sonlu elemanlı ise, N 'ye bir sonlu M – üretilmiş modül denir (Wisbauer, 1991).

R bir halka ve M keyfi bir sol R -modül olsun. M 'yi elemanlarıyla birlikte indis kümesi olarak alalım. Her $(r_m)_{m \in M} \in R^{(M)}$ için $f((r_m)_{m \in M}) = \sum_{m \in M} r_m m$ ile tanımlı $f : R^{(M)} \rightarrow M$ dönüşümü bir epimorfizmadır. Dolayısıyla M modülü R - üretilmiştir (Kasch, 1982).

Tanım 2.4.3. $\{M_i\}_{i \in I}$ R -modüllerin bir ailesi olsun. $j \in I$ olmak üzere her $(m_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i$ elemanı için $\pi_j((m_i)_{i \in I}) = m_j$ ile tanımlı $\pi_j : \prod_{i \in I} M_i \rightarrow M_j$ dönüşümüne j . projeksiyon (izdüşüm epimorfizması) ve her $m_j \in M_j$ için $\varepsilon_j(m_j) = (\delta_{ij} m_j)_{i \in I}$ $\left(\delta_{ij} = \begin{cases} 0_R, & i \neq j \\ 1_R, & i = j \end{cases} \right)$ ile tanımlı $\varepsilon_j : M_j \rightarrow \prod_{i \in I} M_i$ dönüşümüne j . injeksiyon (gömme monomorfizması) denir (Wisbauer, 1991).

Tanım 2.4.4. M bir R -modül ve $\{M_i\}_{i \in I}$, M 'nin alt modüllerinin bir ailesi olsun. Her $m \in M$ elemanı tek türlü olarak M_i alt modüllerinin elemanlarının toplamı şeklinde yazılabilirse, M 'ye M_i alt modüllerinin bir iç direkt toplamı denir ve $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ ile gösterilir. Yani $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ ise, M 'nin her m elemanı,

$i_1, i_2, \dots, i_k \in I$ ve $m_{i_1} \in M_{i_1}, m_{i_2} \in M_{i_2}, \dots, m_{i_k} \in M_{i_k}$ olmak üzere $m = m_{i_1} + m_{i_2} + \dots + m_{i_k}$ formunda tek türlü olarak yazılabilir. Buradaki her $i \in I$ için M_i alt modüllerine M modülünün direkt toplam terimleri denir. $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ yazılışına da M modülünün bir direkt parçalanışı veya sadece parçalanışı adı verilir (Alizade ve Pancar, 1999).

Eğer M sıfırdan farklı alt modüllerin bir direkt toplamı olarak yazılamıyorsa M modülüne parçalanamazdır denir (Hungerford, 1973).

Önerme 2.4.5. M bir R -modül ve $\{M_i\}_{i \in I}$, M 'nin alt modüllerinin bir ailesi olsun. $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ olması için gerek ve yeter koşul $M = \sum_{i \in I} M_i$ ve her $i \in I$ için

$$M_i \cap \left(\sum_{j \neq i} M_j \right) = 0 \text{ olmasıdır (Alizade ve Pancar, 1999).}$$

İspat: $(\Rightarrow)$ $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ olsun. Bu durumda M 'nin her m elemanı $m = m_{i_1} + m_{i_2} + \dots + m_{i_n}$ şeklinde yazılabileceğinden $m \in M_{i_1} + M_{i_2} + \dots + M_{i_n} \subset \sum_{i \in I} M_i$ olur. O halde $M = \sum_{i \in I} M_i$ gerçekleşir. Ayrıca, $x \in M_i \cap \left(\sum_{j \neq i} M_j \right)$ ise $x = m_i = m_{i_1} + m_{i_2} + \dots + m_{i_n}$, $i_k \neq i$ yazılabilir. Yazılışın tek türlü olmasından $m_i = m_{i_1} = m_{i_2} = \dots = m_{i_n} = 0$ elde edilir. Böylece her $i \in I$ için $M_i \cap \left(\sum_{j \neq i} M_j \right) = 0$ dır.

$(\Leftarrow)$ $M = \sum_{i \in I} M_i$ olduğundan her $m \in M = \sum_{i \in I} M_i$ elemanı $m = m_{i_1} + m_{i_2} + \dots + m_{i_n}$ şeklinde yazılabilir. Yazılışın tek türlü olduğunu göstermek için bir m elemanının $m = m_{i_1} + m_{i_2} + \dots + m_{i_n} = m'_{i'_1} + m'_{i'_2} + \dots + m'_{i'_t}$ şeklinde iki gösteriminin bulunduğunu varsayalım. Gerekirse toplam terimlerinin yerlerini değiştirerek ve sıfır toplam terimlerini ekleyerek $n = t$ ve her $k = 1, 2, \dots, n$ için $i_k = i'_k$ olduğunu kabul edebiliriz. O halde yukarıdaki eşitlikten her $k = 1, 2, \dots, t$ için

$$m_{i_k} - m'_{i'_k} = \sum_{j \neq k} (m'_{i'_j} - m_{i_j}) \in M_{i_k} \cap \left(\sum_{j \neq i} M_{i_j} \right) = 0 \text{ ve buradan da } m_{i_k} = m'_{i'_k} \text{ elde edilir.}$$

Böylece yazılışın tek türlü olduğu görülür.

Önerme 2.4.6. M bir R -modül ve $\{M_i\}_{i \in I}$, M 'nin alt modüllerinin bir ailesi olsun. $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ ise $M \cong \bigoplus'_{i \in I} M_i$ 'dir. Tersine $M = \bigoplus'_{i \in I} M_i$ ise $M_i' = \left\{ (m_j)_{j \in I} \mid \forall j \neq i \text{ için } m_j = 0, m_i \in M_i \right\} \cong M_i$ ve $M = \bigoplus_{i \in I} M_i'$ gerçekleşir (Alizade ve Pancar, 1999).

İspat: $f((m_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I} m_i$ ile tanımlı $f : \bigoplus'_{i \in I} M_i \rightarrow M$ fonksiyonunun bir homomorfizma olduğu kolaylıkla gösterilebilir. $\forall m \in \bigoplus_{i \in I} M_i$ için $m = \sum_{i \in I} m_i$ tek türlü olacak şekilde $m_i \in M_i$ var olduğundan f bir izomorfizmadır. $k = i$ için $x_k = m$ ve $k \neq i$ için $x_k = 0$ alınarak $\pi_i(m) = (x_k)_{k \in I}$ ile tanımlı $\pi_i : M_i \rightarrow M_i'$ fonksiyonu bir izomorfizmadır. Sıfırdan farklı $m_{i_j} \in M_{i_j}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) elemanları için $m = (m_i)_{i \in I} \in M$ elemanı $m = (\dots, 0, m_{i_1}, 0, \dots) + \dots + (\dots, 0, m_{i_n}, 0, \dots) \in \sum_{i \in I} M_i'$ şeklinde yazılabilir. Burada her $i \in I$ için $M_i' \cap \left(\sum_{j \neq i} M_j' \right) = 0$ olduğu gösterilebilir. O halde Önerme 2.4.5.'ten $M = \bigoplus_{i \in I} M_i'$ elde edilir.

Bu önerme ile iç ve dış direkt toplamın birbirine izomorf olduğu görülür. Bundan sonra dış direkt toplam yerine de sadece direkt toplam yazılışı kullanılacaktır.

Tanım 2.4.7. M bir R modül olsun. M 'nin iki direkt toplam teriminin toplamı da M 'nin bir direkt toplam terimi ise M SSP özelliğine sahiptir denir (Wisbauer, 1991).

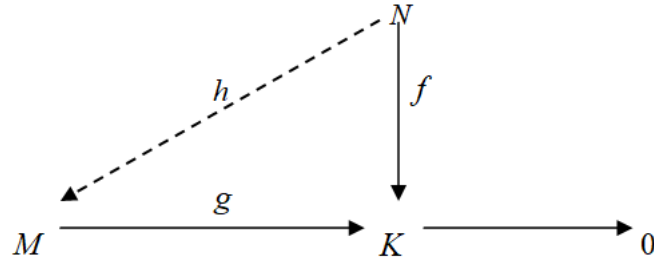
2.5. Projektif ve π -Projektif Modüller

Tanım 2.5.1. f ve g R -modül homomorfizmaları olmak üzere $\text{Görf} = \text{Çek}g$ ise $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ dizisi tamdır denir (Wisbauer, 1991).

Tanım 2.5.2. $\{M_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ R -modüller topluluğundan ve bunların $f_i : M_i \rightarrow M_{i+1}$ homomorfizmalarından oluşan $\dots \rightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \rightarrow \dots$ dizisinde her $i \in \mathbb{Z}$ için $\text{Görf}_i = \text{Çek}f_{i+1}$ ise bu diziye bir tam dizi denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 2.5.3. M , N ve K , R -modüller olmak üzere $0 \rightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} K \rightarrow 0$ şeklindeki tam diziye bir kısa tam dizi denir. Bu durumda f homomorfizması birebir, g homomorfizması örten ve $\text{Görf} = \text{Çek}g$ 'dir (Alizade ve Pancar, 1999).

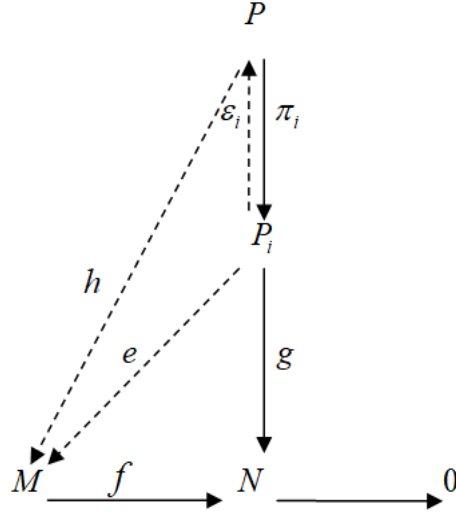
Tanım 2.5.4. M ve N iki R -modül olsun. $M \xrightarrow{g} K \rightarrow 0$ satırı tam dizi olmak üzere, eğer aşağıdaki diyagram değişmeli olacak şekilde bir $h: N \rightarrow M$ homomorfizması bulunabilir ise, N 'ye M – projektiftir denir.



Bir başka ifadeyle yukarıdaki diyagramda g epimorfizma olmak üzere her $f: N \rightarrow K$ homomorfizması için $f = g \circ h$ olacak şekilde bir $h: N \rightarrow M$ homomorfizması bulunabilirse N 'ye M – projektiftir denir. Eğer N modülü her M modülü için M -projektif ise N modülüne bir projektif modül denir (Wisbauer, 1991).

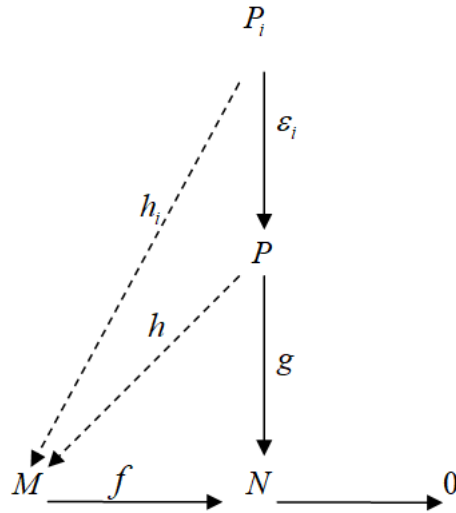
Teorem 2.5.5. $\{P_i\}_{i \in I}$ kümesi R -modüllerin bir ailesi olsun. $P = \bigoplus_{i \in I} P_i$ direkt toplamının projektif olması için gerek ve yeter koşul her $i \in I$ için P_i 'nin projektif olmasıdır (Wisbauer, 1991).

İspat: $(\Rightarrow)$ $P = \bigoplus_{i \in I} P_i$ projektif olsun. Keyfi $f: M \rightarrow N$ epimorfizmasını ve $g: P_i \rightarrow N$ homomorfizmasını alalım. $\pi_i: P \rightarrow P_i$ i . projeksiyon ve $\varepsilon_i: P_i \rightarrow P$ i . injeksiyon olmak üzere P projektif olduğundan $g \circ \pi_i: P \rightarrow N$ için $f \circ h = g \circ \pi_i$ olacak şekilde $h: P \rightarrow M$ homomorfizması vardır. $e = h \circ \varepsilon_i$ olmak üzere $e: P_i \rightarrow M$ homomorfizması için



$f \circ e = f \circ h \circ \varepsilon_i = g \circ \pi_i \circ \varepsilon_i = g \circ 1_{P_i} = g$ olup her $i \in I$ için P_i projektif bulunur.

($\Leftarrow$) $f: M \rightarrow N$ bir örten homomorfizma ve $g: P \rightarrow N$ bir homomorfizma olsun. Her $i \in I$ için P_i projektif olduğundan $g \circ \varepsilon_i: P_i \rightarrow N$ homomorfizması için $g \circ \varepsilon_i = f \circ h_i$ olacak şekilde bir $h_i: P_i \rightarrow M$ homomorfizması vardır.



Her $(m_i)_{i \in I} \in P$ için $h((m_i)_{i \in I}) = \sum h_i(m_i)$ ile tanımlı $h: P \rightarrow M$ fonksiyonunu ele alalım. h 'nin bir homomorfizma olduğu gösterilebilir. Herhangi $(m_i)_{i \in I} \in P$ alalım. Bu durumda her $i \in I$ için $g \circ \varepsilon_i = f \circ h_i$ eşitliği yardımıyla

$$(f \circ h)(m_i)_{i \in I} = f(h(m_i)_{i \in I}) = f(\sum h_i(m_i)) = \sum f(h_i(m_i)) = \sum g(\varepsilon_i(m_i)) = g(\sum \varepsilon_i(m_i)) = g(m_i)_{i \in I}$$

elde edilir. Böylece $f \circ h = g$ bulunur. O halde P projektiftir.

Tanım 2.5.6. M bir R -modül ve $e \in \text{End}(M)$ olsun. Eğer $e^2 = e$ ise, e endomorfizmasına bir idempotent denir (Wisbauer, 1991).

Tanım 2.5.7. $f : M \rightarrow N$ bir R -modül epimorfizması olsun. Eğer $f \circ g = I_N$ olacak şekilde bir $g : N \rightarrow M$ homomorfizması mevcut ise, bu takdirde f epimorfizması parçalanabilirdir denir (Wisbauer, 1991).

Teorem 2.5.8. $f : M \rightarrow N$, $g : N \rightarrow M$ R -modül homomorfizmaları ve $g \circ f = I_M$ olsun. Bu takdirde $N = \text{Görf} \oplus \text{Çekg}$ eşitliği vardır (Kasch, 1982).

İspat: $\forall n \in N$ için $n = f(g(n)) + n - f(g(n))$, $f(g(n)) \in \text{Görf}$, $n - f(g(n)) \in \text{Çekg}$ olduğundan $N = \text{Görf} + \text{Çekg}$ bulunur. Şimdi herhangi $n \in \text{Görf} \cap \text{Çekg}$ alalım. Bu takdirde $g(n) = 0_M$ ve $n = f(m)$ olacak şekilde bir $m \in M$ vardır. Buradan $0_M = g(n) = g(f(m)) = m$ olduğundan $n = f(m) = f(0_M) = 0_N$ bulunur. Sonuç olarak $\text{Görf} \cap \text{Çekg} = 0_N$ olup $N = \text{Görf} \oplus \text{Çekg}$ elde edilir.

Teorem 2.5.9. M bir R -modül olsun. Eğer $f \in \text{End}(M)$ bir idempotent ise $\text{Çekf} = \text{Gör}(I_M - f)$, $\text{Görf} = \text{Çek}(I_M - f)$ ve $M = f(M) \oplus (I_M - f)(M)$ eşitlikleri vardır (Kasch, 1982).

İspat: Teorem 2.5.8.'in ispatına benzer yolla yapılabilir.

Tanım 2.5.10. M bir R -modül olsun. Eğer M 'nin $M = U + V$ şartını sağlayan her U ve V alt modülleri için $\text{Görf} \subset U$ ve $\text{Gör}(I_M - f) \subset V$ olacak şekilde bir $f \in \text{End}(M)$ varsa M 'ye bir π -projektif veya eşsürekli R -modül denir (Wisbauer, 1991).

Teorem 2.5.11. M bir R -modül olsun. Bu takdirde M modülünün π -projektif olması için gerek ve yeter koşul M modülünün $M = U + V$ şartını sağlayan her U

ve V alt modülleri için $(u, v) \rightarrow \varphi(u, v) = u + v$ ile tanımlı $\varphi: U \times V \rightarrow M$ epimorfizmasının parçalanabilir olmasıdır (Wisbauer, 1991).

İspat: $(\Rightarrow)$ $M = U + V$ olan M modülünün herhangi U ve V alt modüllerini ele alalım. $\varphi \circ h = I_M$ olacak şekilde bir $h: M \rightarrow U \times V$ homomorfizmasının varlığını gösterelim. M π -projektif olduğundan $\text{Gör}f \subset U$ ve $\text{Gör}(I_M - f) \subset V$ olacak şekilde bir $f \in \text{End}(M)$ vardır. $m \rightarrow h(m) = (f(m), (I_M - f)(m))$ şeklinde tanımlı $h: M \rightarrow U \times V$ dönüşümünü tanımlayalım. h dönüşümünün bir homomorfizma olduğunu göstermek kolaydır. $\forall m \in M$ için,
 $(\varphi \circ h)(m) = \varphi(h(m)) = \varphi(f(m), (I_M - f)(m)) = f(m) + (I_M - f)(m) = f(m) + m - f(m) = m$
 olduğundan $\varphi \circ h = I_M$ bulunur ki bu da istenendir.

$(\Leftarrow)$ $M = U + V$ olan M modülünün herhangi U ve V alt modüllerini ele alalım. $(u, v) \rightarrow \varphi(u, v) = u + v$ şeklinde tanımlı $\varphi: U \times V \rightarrow M$ homomorfizması parçalanabilir olduğundan $\varphi \circ h = I_M$ olacak şekilde bir $h: M \rightarrow U \times V$ homomorfizması vardır. Her $m \in M$ için $h(m) = (u_m, v_m)$ diyelim. $f: M \rightarrow M$ dönüşümünü $m \rightarrow f(m) = u_m$ olarak tanımlayalım. f dönüşümünün bir homomorfizma olduğunu göstermek kolaydır. Şimdi $\text{Gör}f \subset U$ ve $\text{Gör}(I_M - f) \subset V$ olduğu gösterilirse istenen elde edilir. $\text{Gör}f \subset U$ olduğu açıktır. $x \in \text{Gör}(I_M - f)$ alalım. Bu durumda $x = m - f(m)$ olacak şekilde bir $m \in M$ vardır.

$$x = m - u_m = (\varphi \circ h)(m) - u_m = \varphi(h(m)) - u_m = \varphi(u_m, v_m) - u_m = u_m + v_m - u_m = v_m \in V$$

bulunur. Yani $\text{Gör}(I_M - f) \subset V$ olur.

Önerme 2.5.12. F bir R -modül ve $X = \{x_k \mid k \in K\}$ F nin bir alt kümesi olsun. Bu durumda aşağıdaki iki koşul denktir.

(i) Her $a \in F$ elemanı, sadece sonlu sayıda r_k katsayıları sıfırdan farklı (veya

hepsi sıfır) olmak üzere, tek türlü olarak $a = \sum_{k \in K} r_k x_k$ şeklinde yazılabilir.

(ii) Her $k \in K$ için $f_k(r) = rx_k$ şeklinde tanımlanan $f_k : R \rightarrow Rx_k$ fonksiyonu bir izomorfizma ve $F = \bigoplus_{k \in K} Rx_k$ olur (Alizade ve Pancar, 1999).

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) f_k fonksiyonunun bir epimorfizma olduğu açıktır. $r, s \in R$ keyfi olmak üzere, $f_k(r) = f_k(s)$ olsun. Buradan $rx_k = sx_k$ eşitliği elde edilir. Yazılışın tek türlü olduğundan $r = s$ olup f_k fonksiyonu bir monomorfizmadır. Dolayısıyla f_k bir izomorfizma olup $R \cong Rx_k$ olur. Her $a \in F$ elemanı tek türlü olarak Rx_k modüllerinin $r_k x_k$ elemanlarının sonlu toplamı şeklinde gösterilebildiğinden $F = \bigoplus_{k \in K} Rx_k$ yazılır.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $F = \bigoplus_{k \in K} Rx_k$ olduğundan her $a \in F$, $a = \sum_{k \in K} r_k x_k$ sonlu toplamı şeklinde gösterilebilir ve $a = \sum_{k \in K} r_k x_k = \sum_{k \in K} r'_k x_k$ ise, her $k \in K$ için $r_k x_k = r'_k x_k$ dır. Buradan $f_k(r_k) = f_k(r'_k)$ bulunur. $f_k : R \rightarrow Rx_k$ bir monomorfizma olduğundan $r_k = r'_k$ olur. O halde $a \in F$ elemanı $a = \sum_{k \in K} r_k x_k$ şeklinde tek türlü olarak yazılabilir.

Tanım 2.5.13. F bir R -modül olsun. Önerme 2.5.12. deki denk koşullardan birini gerçekleyen F modülüne serbest modül, $X = \{x_k | k \in K\}$ kümesine de F 'nin serbest üretenler kümesi veya tabanı denir (Alizade ve Pancar, 1999).

R halkasının birimi 1_R olmak üzere, R halkası tabanı $X = \{1_R\}$ olan bir serbest R -modüldür.

Teorem 2.5.14. R bir halka olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler vardır.

(i) R bir projektif sol R -modüldür.

(ii) Her serbest R -modül projektiftir (Kasch, 1982).

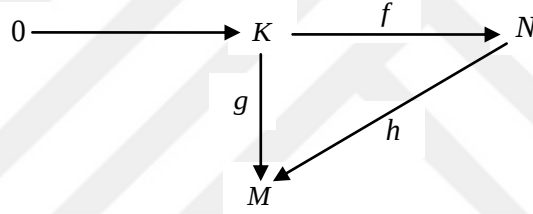
İspat: (i) $f : N \rightarrow K$ epimorfizması ve $g : R \rightarrow K$ homomorfizması verilsin. f epimorfizma olduğundan $g(1_R) = f(n)$ olacak şekilde bir $n \in N$ vardır. Bu takdirde her $r \in R$ için $h(r) = rn$ ile tanımlı $h : R \rightarrow N$ dönüşümü bir

homomorfizmadır. $f \circ h = g$ olduğunu göstermek için $r \in R$ keyfi bir eleman olsun. Bu takdirde $g(r) = g(r1_R) = rg(1_R) = rf(n) = f(rn) = (f \circ h)(r)$ olduğundan istenilen elde edilir.

(ii) F serbest R -modülü verilsin. Bu takdirde $F \cong R^{(I)}$ olacak şekilde bir I indis kümesi vardır. (i)'den R bir projektif sol R -modüldür. Teorem 2.5.5.'ten F projektiftir.

2.6. İnjektif Modüller

Tanım 2.6.1. M ve N iki R -modül olsun. Her $f : K \rightarrow N$ monomorfizması ve $g : K \rightarrow M$ homomorfizması için $h \circ f = g$ olacak şekilde bir $h : N \rightarrow M$ homomorfizması bulunabilirse, M modülüne N -injektiftir denir. Diğer bir ifadeyle, tam satırlı her

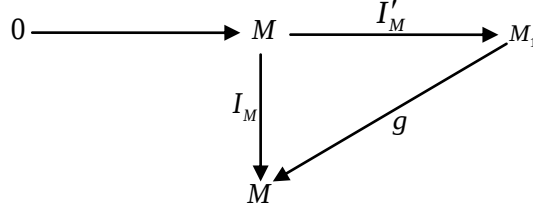


diyagramı $h : N \rightarrow M$ homomorfizması ile değişmeli üçgene tamamlanabilirse, M modülüne N -injektiftir denir. Eğer M modülü her N modülü için N -injektif ise M modülüne bir injektif modül denir (Wisbauer, 1991).

Teorem 2.6.2. Her M modülü için N bir injektif modül olmak üzere $f : M \rightarrow N$ monomorfizması vardır (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 2.6.3. Her injektif modül, kendisini içeren modül içinde bir direkt toplam terimidir (Sharpe ve Vamos, 1972).

İspat: M bir injektif R -modül ve $M \leq M_1$ olsun. Bu takdirde I'_M içerme monomorfizması ve I_M birim dönüşüm olmak üzere aşağıdaki diyagramı değişmeli kılan bir $g : M_1 \rightarrow M$ homomorfizması vardır.



$m_1 \in M_1$ keyfi olmak üzere $g(m_1) \in M$ olup $g \circ I'_M = I_M$ olduğundan $g(m_1) = g(g(m_1))$ yazılır. Buradan $m_1 - g(m_1) \in \text{Çek}g$ olup $m_1 = g(m_1) + (m_1 - g(m_1)) \in M + \text{Çek}g$ olduğundan $M_1 \leq M + \text{Çek}g \leq M_1$ yani $M_1 = M + \text{Çek}g$ elde edilir. Diğer taraftan $m_1 \in M \cap \text{Çek}g$ keyfi elemanı için $g \circ I'_M = I_M$ olduğundan $m_1 = g(m_1) = 0$ bulunur. Dolayısıyla $M_1 = M \oplus \text{Çek}g$ olur.

Önerme 2.6.4. Her R -injektif R -modül injektiftir (Wisbauer, 1991).

2.7. Küçük Alt Modüller

Tanım 2.7.1. M bir R -modül ve K , M modülünün bir öz alt modülü olsun. Eğer $K + L = M$ koşulunu sağlayan M modülünün hiçbir L öz alt modülü yoksa K alt modülüne M de küçüktür denir ve $K \ll M$ ile gösterilir.

Buna göre $K \ll M$ ve $K + L = M$ ise $L = M$ 'dir. Bu durumda $0 \ll M$ 'dir (Wisbauer, 1991).

Küçük alt modüller ile ilgili kullanılacak bazı özellikler aşağıdaki teorem altında toplanabilir.

Teorem 2.7.2. K , N ve M birer R -modül olsun.

- (i) $K \subset N \subset M$ ve $N \ll M$ ise, $K \ll M$ 'dir.
- (ii) $K \subset N \subset M$ ve $K \ll N$ ise K , M 'nin N 'yi kapsayan her alt modülünde de küçüktür.
- (iii) $f : M \rightarrow N$ bir R -modül homomorfizması olsun. Eğer $K \ll M$ ise, $f(K) \ll N$ 'dir.
- (iv) Eğer K alt modülü M modülünde hem direkt toplam terimi hem de küçük ise bu takdirde $K = 0$ 'dir.

(v) $K \subset N \subset M$ ve N, M 'nin bir direkt toplam terimi olsun. Bu takdirde $K \ll N$ olması için gerek ve yeter koşul $K \ll M$ olmasıdır (Wisbauer, 1991).

İspat: (i) $K + L = M$ olacak şekilde herhangi bir L alt modülünü ele alalım. Bu takdirde $K \leq N$ olduğundan $N + L = M$ olup $N \ll M$ olduğundan $L = M$ bulunur. Dolayısıyla $K \ll M$ 'dir.

(ii) L, M nin N 'yi kapsayan bir alt modülü olsun. $K + T = L$ olacak şekilde herhangi bir $T \leq L$ alt modülünü ele alalım. $K + T = L$ eşitliğinin her iki tarafının N ile arakesitini alırsak $(K + T) \cap N = L \cap N$ olup $N \leq L$ ve Modüler Kuraldan $K + (T \cap N) = N$ bulunur. $K \ll N$ olduğundan $T \cap N = N$ olur. Dolayısıyla $N \subset T$ 'dir. $K + T = L$ ve $K \leq N \leq T$ den $T = L$ elde edilir. Buradan $K \ll L$ bulunur.

(iii) $f(K) + L = f(M)$ olacak şekilde herhangi bir $L \leq f(M)$ alt modülünü alalım. Bu takdirde $f^{-1}(f(K) + L) = M$ yazılabilir. Buradan $K + f^{-1}(L) = M$ 'dir. $K \ll M$ olduğundan $f^{-1}(L) = M$ olup $L = f(M)$ olduğu görülür. O halde $f(K) \ll f(M)$ 'dir ve (ii) 'den $f(K) \ll N$ bulunur.

(iv) K bir direkt toplam terimi olduğundan $M = K \oplus N$ olacak şekilde bir N alt modülü vardır. $K \ll M$ olduğundan $N = M$ olur. Ayrıca $K \cap N = 0$ olduğundan $K = K \cap M = K \cap N = 0$ bulunur.

(v) $(\Rightarrow)$ $K \ll N$ ise, (ii) 'den $K \ll M$ 'dir.

$(\Leftarrow)$ $K \ll M$ olsun. $K + L = N$ olacak şekilde herhangi bir $L \leq N$ alt modülünü ele alalım. N, M nin bir direkt toplam terimi olduğundan $M = N \oplus U$ olacak şekilde bir $U \leq M$ vardır. O halde $K + L + U = M$ olur. $K \ll M$ olduğundan $L + U = M$ olup eşitliğin her iki tarafının N ile arakesiti alınır ve Modüler Kural uygulanırsa $N = L + (U \cap N) = L + 0 = L$ olur. Sonuç olarak $K \ll N$ elde edilir.

Teorem 2.7.2.'nin bir sonucu olarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 2.7.3. M bir R -modül, $K_1, K_2, \dots, K_n, M_1, M_2, \dots, M_n$ M 'nin alt modülleri ve her $i = 1, 2, \dots, n$ için $K_i \ll M_i$ olsun. Bu takdirde, $K_1 + K_2 + \dots + K_n \ll M_1 + M_2 + \dots + M_n$ 'dir (Kasch, 1982).

İspat: $n = 2$ için gösterelim. $K_1 + K_2 + L = M_1 + M_2$ olacak şekilde herhangi bir L alt modülünü alalım. $K_1 \ll M_1$ olduğundan ve Teorem 2.7.2.(ii)'den $K_1 \ll M_1 + M_2$ olup $K_2 + L = M_1 + M_2$ olur. Benzer şekilde $K_2 \ll M_2$ olduğundan ve Teorem 2.7.2.(ii)'den $K_2 \ll M_1 + M_2$ olup $L = M_1 + M_2$ elde edilir. Buradan $K_1 + K_2 \ll M_1 + M_2$ bulunur. Benzer şekilde sonlu sayıdakiler için de gösterilebilir.

Tanım 2.7.4. M bir R modül olsun. Aşağıdaki ifadeleri göz önüne alalım.

(D1) M 'nin her A alt modülü için $M_1 \leq A$ ve $A \cap M_2 \ll M$ olacak şekilde $M = M_1 \oplus M_2$ ayrışımı vardır.

(D2) $A \leq M$ olmak üzere M / A , M 'nin bir direkt toplam terimine izomorf ise A , M 'nin bir direkt toplam terimidir.

(D3) $M = M_1 + M_2$ olan M 'nin her M_1 ve M_2 direkt toplam terimleri için $M_1 \cap M_2$ de M 'nin bir direkt toplam terimidir (Mohamed ve Müller, 1990).

2.8. Bir Modülün Radikali

Tanım 2.8.1. M bir R -modül olsun. M 'nin bütün maksimal alt modüllerinin arakesitine M 'nin radikali denir ve $RadM$ ile gösterilir (Wisbauer, 1991).

Buna göre $RadM = \bigcap \{ K \leq M \mid K, M \text{ de maksimal} \}$ 'dir.

Tanım 2.8.2. M bir R -modül olsun. Eğer M 'nin hiçbir maksimal alt modülü yoksa $RadM = M$ olarak tanımlanır ve M modülüne bir radikal modül denir (Wisbauer, 1991).

Basit modüllerin tek maksimal alt modülü 0 olduğundan basit modüllerin radikali sıfırdır.

Teorem 2.8.3. M bir R -modül olsun. Bu takdirde $RadM = \sum_{L \ll M} L$ 'dir (Wisbauer, 1991).

İspat: Herhangi bir $L \ll M$ alt modülünü ele alalım. Eğer M 'nin bir K maksimal alt modülü L 'yi içermezse $K + L = M$ olup $K = M$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla L , M 'nin bütün maksimal alt modülleri tarafından içerilir. Böylece $L \leq RadM$ olur. Buradan da $\sum_{L \ll M} L \leq RadM$ bulunur. Şimdi de ters kapsamayı

gösterelim. $\forall m \in \text{Rad}M$ için $Rm \ll M$ olduğunu gösterirsek istenen elde edilir. $m \in \text{Rad}M$ keyfi bir eleman olsun. Kabul edelim ki Rm, M 'de küçük olmasın. Bu durumda $Rm + L = M$ olacak şekilde $\exists L \neq M$ alt modülü vardır. Böylece $S = \{L \leq M \mid m \notin L, Rm + L = M\}$ kümesi boştan farklıdır. Bu kümede kapsama bağıntısına göre her zincirin bir üst sınıra sahip olduğunu gösterelim. K, S 'nin bir zinciri ve $C = \cup_{B \in K} B$ olsun. Bu takdirde C, M 'nin bir alt modülüdür. Eğer $m \in C = \cup_{B \in K} B$ olursa $m \in B$ olacak şekilde $\exists B \in K \subset S$ mevcuttur. Bu ise S 'nin seçimi ile çelişir. Dolayısıyla $m \notin C$ 'dir. Ayrıca $Rm + C = M$ olduğu açıktır. O halde C modülü K 'nın S 'de bir üst sınırı olur. Dolayısıyla Zorn Lemması gereği S bir P gibi maksimal eleman içerir. Burada P 'nin M 'de maksimal alt modül olduğu gösterilebilir. Burada da $m \notin P$ olduğundan $m \notin \text{Rad}M$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $Rm \ll M$ bulunur.

Önerme 2.8.4. M bir R -modül olsun. $M / \text{Rad}M$ bölüm modülünün tek küçük alt modülü $\{0_{M/\text{Rad}M}\}$ şeklindedir. Yani $\text{Rad}(M / \text{Rad}M) = 0$ 'dır (Wisbauer, 1991).

İspat: M 'nin tüm maksimal alt modüllerinin ailesi $\{M_i\}_{i \in I}$ olsun. Bu durumda Teorem 2.2.18. ile $M / \text{Rad}M$ bölüm modülünün tüm maksimal alt modülleri $i \in I$ için $M_i / \text{Rad}M$ formundadır. Böylece Önerme 2.3.8. 'den

$$\text{Rad}(M / \text{Rad}M) = \bigcap_{i \in I} (M_i / \text{Rad}M) = \left(\bigcap_{i \in I} M_i \right) / \text{Rad}M = \text{Rad}M / \text{Rad}M = 0$$

olur.

Önerme 2.8.5. M bir R -modül ve $K \leq L \leq M$ alt modüller olsun. Bu takdirde $\text{Rad}K \leq \text{Rad}L$ 'dir (Kasch, 1982).

İspat: $m \in \text{Rad}K$ keyfi bir eleman olsun. Bu takdirde $Rm \ll K$ ve $K \leq L$ olduğundan $Rm \ll L$ olup $m \in \text{Rad}L$ 'dir.

Teorem 2.8.6. M bir R -modül olsun. Eğer M 'nin her öz alt modülü bir maksimal alt modül tarafından kapsanıyorsa $\text{Rad}M \ll M$ 'dir (Wisbauer, 1991).

İspat: $\text{Rad}M + L = M$ olacak şekilde herhangi bir L alt modülü için eğer $L \neq M$ olsa, hipotez gereği L bir K maksimal alt modülü tarafından kapsanır.

Burada $M = RadM + L \subset K$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $L = M$ olup $RadM \ll M$ 'dir.

Sonuç 2.8.7. M bir sonlu üretilmiş R -modül ise $RadM \ll M$ 'dir (Wisbauer, 1991).

Teorem 2.8.8. M ve N iki R -modül ve $f : M \rightarrow N$ bir R -modül homomorfizması olsun. Bu takdirde $f(RadM) \subset RadN$ 'dir. Ayrıca $\check{C}ekf \subset RadM$ ise $f(RadM) = Radf(M)$ 'dir (Anderson ve Fuller, 1974).

İspat: $f(RadM) \subset Radf(M)$ olduğu Teorem 2.7.2.(iii) ve Teorem 2.8.3.'ten görülür. Dolayısıyla $Radf(M) \subset RadN$ olduğundan $f(RadM) \subset RadN$ elde edilir. Kabul edelim ki $\check{C}ekf \subset RadM$ olsun. $m \in Radf(M)$ alalım. Bu takdirde $\exists n \in M$ için $m = f(n)$ şeklinde yazılabilir. Kabul edelim ki $n \in M$ elemanı M 'nin bütün maksimal alt modülleri tarafından kapsanmasın. Bu durumda M 'nin en az bir K maksimal alt modülü için $K + Rn = M$ 'dir. Buradan $f(K) + f(Rn) = f(M)$ elde edilir. $f(Rn) = Rf(n) = Rm \ll f(M)$ olduğundan $f(K) = f(M)$ bulunur. Son eşitliğin her iki tarafının f ile ters görüntüsü alınırsa $M = K + \check{C}ekf$ bulunur. $\check{C}ekf \subset RadM$ olduğundan $K = M$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $n \in RadM$ olup $m \in f(RadM)$ olduğu görülür. Sonuç olarak $f(RadM) = Radf(M)$ 'dir.

Teorem 2.8.9. M bir R -modül ve $N \leq M$ olmak üzere $N \leq RadM$ olsun. Bu takdirde $Rad(M/N) = (RadM)/N$ olur (Anderson ve Fuller, 1974).

İspat: $N \leq RadM$ olduğundan $N \leq \bigcap \{K \mid K, M \text{ de maksimal}\} = RadM$ olup Önerme 2.3.8. gereğince $Rad(M/N) = (RadM)/N$ 'dir.

Teorem 2.8.10. M bir R -modül ve $\forall i \in I$ için $M_i \leq M$ olmak üzere $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ olsun. Bu takdirde $RadM = \bigoplus_{i \in I} RadM_i$ ve $M/RadM \cong \bigoplus_{i \in I} (M_i/RadM_i)$ olur (Wisbauer, 1991).

İspat: Önce $RadM = \bigoplus_{i \in I} RadM_i$ olduğunu gösterelim. Herhangi $x \in RadM$ alalım. $x \in RadM$ olduğundan $Rx \ll M$ olur. $x \in M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ olduğundan

$x = x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_n}$ olacak şekilde $\exists i_1, i_2, \dots, i_n \in I$, $\exists x_{i_1} \in M_{i_1}, \exists x_{i_2} \in M_{i_2}, \dots, \exists x_{i_n} \in M_{i_n}$ vardır. Burada $1 \leq t \leq n$ için $\pi_{i_t} : M = \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow M_{i_t}$ kanonik projeksiyonunu göz önüne alırsak $Rx \ll M$ olduğundan Teorem 2.7.2. (iii) gereği $Rx_{i_t} = \pi(Rx) \ll M_{i_t}$ olup $x_{i_t} \in \text{Rad}M_{i_t}$ olur. O halde $x = x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_n} \in \bigoplus_{i \in I} \text{Rad}M_i$ olup $\text{Rad}M \subset \bigoplus_{i \in I} \text{Rad}M_i$ olur. Öte yandan $\forall i \in I$ için $M_i \leq M$ olduğundan $\text{Rad}M_i \leq \text{Rad}M$ olup $\bigoplus_{i \in I} \text{Rad}M_i \subset \text{Rad}M$ olur. O halde $\text{Rad}M = \bigoplus_{i \in I} \text{Rad}M_i$ olur.

Şimdi $M / \text{Rad}M \cong \bigoplus_{i \in I} (M_i / \text{Rad}M_i)$ olduğunu gösterelim.

$$f : M = \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} (M_i / \text{Rad}M_i), x = (x_i)_{i \in I} \rightarrow f(x) = (x_i + \text{Rad}M_i)_{i \in I}$$

dönüşümünü tanımlayalım. f 'nin bir R -modül epimorfizması olduğu gösterilebilir.

Öte yandan $x = (x_i)_{i \in I} \in M$ olmak üzere

$$x \in \text{Çek}f \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow (x_i + \text{Rad}M_i)_{i \in I} = (\text{Rad}M_i)_{i \in I} \Leftrightarrow \forall i \in I \text{ için } x_i \in \text{Rad}M_i \Leftrightarrow x = (x_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} \text{Rad}M_i$$

denkliklerinden $\text{Çek}f = \bigoplus_{i \in I} \text{Rad}M_i = \text{Rad}M$ olduğu anlaşılır. O halde Homomorfizma

Teoreminden $M / \text{Rad}M \cong f(M) = \bigoplus_{i \in I} (M_i / \text{Rad}M_i)$ olur.

2.9. Oyuk ve Lokal Modüller

Tanım 2.9.1. M bir R -modül olsun. Eğer M 'nin her öz alt modülü M 'de küçük ise M 'ye bir oyuk modül denir (Clark ve ark., 2006).

Tanım 2.9.2. M bir R -modül olsun. Eğer M kendisinden farklı bütün alt modüllerini kapsayan bir öz alt modüle sahipse ya da M 'nin tüm öz alt modüllerinin toplamı M 'nin bir öz alt modülü ise M 'ye bir lokal (veya yerel) modül denir. R halkası sol R -modül olarak lokal ise R halkasına bir lokal halka denir (Wisbauer, 1991).

Her cisim kendi üzerinde lokal modül yapısına sahiptir. Ayrıca p bir asal sayı ve $k \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere $\mathbb{Z}_{p^k}$ bir lokal halkadır.

Teorem 2.9.3. M bir lokal modül olsun. Bu takdirde M 'nin tek maksimal alt modülü $\text{Rad}M$ 'dir ve $\text{Rad}M \ll M$ 'dir (Wisbauer, 1991).

Teorem 2.9.4. M sıfırdan farklı bir R -modül olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) M oyuktur ve $\text{Rad}M \neq M$ 'dir.
- (ii) M oyuktur ve devirlidir (veya sonlu üretilmiştir).
- (iii) M lokaldir (Wisbauer, 1991).

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) $\text{Rad}M \neq M$ olduğundan M 'nin en az bir K maksimal alt modülü vardır. O halde her $m \in M - K$ için $Rm + K = M$ 'dir. Ayrıca M oyuk olduğundan $K \ll M$ olup $Rm = M$ bulunur. Dolayısıyla M devirlidir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Her devirli modül sonlu üretilmiş olduğundan ispatı M 'nin sonlu üretilmiş olması durumu için yapmamız yeterlidir. Ayrıca M kendi içinde küçük olmadığından $\text{Rad}M \neq M$ dir. Buradan M 'nin en az bir N maksimal alt modülü vardır. Kabul edelim ki K , M 'nin herhangi bir öz alt modülü olsun ve N tarafından kapsansın. O halde N maksimal olduğundan $K + N = M$ olup $K \ll M$ olduğundan $N = M$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $K \leq N$ olmak zorundadır. Yani N , M 'nin bütün öz alt modüllerini kapsar. Ayrıca N bir öz alt modül olduğundan M lokaldir.

(iii) $\Rightarrow$ (i) M lokal olsun. O halde M 'nin bütün öz alt modüllerini kapsayan bir N öz alt modülü vardır. Kabul edelim ki $N + L = M$ şartını sağlayan L alt modülü için $L \neq M$ olsun. Buradan $L \leq N$ olup $N = M$ çelişkisi elde edilir. O halde $N + L = M$ şartını sağlayan her L alt modülü için $L = M$ olup $N \ll M$ bulunur. M 'nin herhangi bir K öz alt modülünü alalım. $K \leq N$ ve $N \ll M$ olduğundan $K \ll M$ bulunur. Dolayısıyla M oyuktur. Ayrıca Teorem 2.9.3. gereğince $\text{Rad}M = N \neq M$ 'dir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Tümlenmiş Modüller

$M = U \oplus V$ olması için gerek ve yeter koşulun $M = U + V$ ve $U \cap V = 0$ olduğu biliniyor. Bu koşulların bir genelleştirmesi olarak literatürde aşağıdaki kavramlar yer almaktadır.

Tanım 3.1.1. U bir M R -modülünün bir alt modülü olsun. M 'nin bir V alt modülü için $U \cap V = 0$ ve V bu koşula göre maksimal ise yani $U \cap V' = 0$ olacak şekilde her $V \leq V'$ için $V' = V$ ise V 'ye U 'nun kesişime göre bir tümleyeni denir (Wisbauer, 1991).

Tanım 3.1.2. U bir M R -modülünün bir alt modülü olsun. M 'nin bir V alt modülü için $U + V = M$ ve V bu koşula göre minimal ise yani $U + V' = M$ olacak şekilde $V' \leq V$ için $V' = V$ ise V 'ye U 'nun M 'de toplamaya göre bir tümleyeni veya kısaca tümleyeni denir (Wisbauer, 1991).

Önerme 3.1.3. M bir R -modül, U ve V , M 'nin iki alt modülü olsun. $M = U \oplus V$ olması için gerek ve yeter koşul V modülünün U 'nun hem kesişime, hem de toplamaya göre bir tümleyeni olmasıdır (Koşar, 2014).

İspat: $(\Rightarrow)$ $M = U \oplus V$ ise $U \cap V = 0$ dır. $V \leq V'$ koşulunu sağlayan M modülünün bir V' alt modülü için $U \cap V' = 0$ olsun. $M = U \oplus V$ eşitliğinin her iki tarafının V' ile arakesiti alınıp Modüler Kural uygulanırsa $V' = V' \cap M = V' \cap (U \oplus V) = V + (V' \cap U) = V$ olur. O halde V alt modülü $U \cap V = 0$ koşulunu sağlayan maksimal alt modül olup V , U 'nun kesişime göre bir tümleyenidir. $M = U \oplus V$ olduğundan $M = U + V$ 'dir. $M = U + L$ olan herhangi bir $L \leq V$ alalım. $M = U + L$ eşitliğinin her iki tarafının V ile arakesiti alınıp Modüler Kural uygulanırsa $V = V \cap M = V \cap (U + L) = L + (U \cap V) = L + 0 = L$ olur. O halde V , $M = U + V$ koşulunu sağlayan minimal alt modül olup U 'nun toplamaya göre bir tümleyenidir.

$(\Leftarrow)$ V , U 'nun kesişime göre bir tümleyenidir olduğundan $U \cap V = 0$ 'dır. Yine V , U 'nun toplamaya göre bir tümleyenidir olduğundan $M = U + V$ 'dir. Dolayısıyla $M = U \oplus V$ bulunur.

Teorem 3.1.4. M bir R -modül ve $U, V \leq M$ olsun. V alt modülünün U 'nun M modülünde bir tümleyeni olması için gerek ve yeter koşul $M = U + V$ ve $U \cap V \ll V$ olmasıdır (Wisbauer, 1991).

İspat: $(\Rightarrow)$ V, U 'nun M 'de bir tümleyeni olsun. Buna göre $U + V = M$ 'dir. Bir $X \subset V$ alt modülü için $U \cap V + X = V$ olsun. Bu durumda $U + (U \cap V) + X = M$ ve $U + X = M$ bulunur. V, U 'nun M 'de bir tümleyeni olduğundan V 'nin minimalliği gereği $X = V$ olmalıdır. Yani $(U \cap V) + X = V$ şartını sağlayan her $X \subset V$ alt modülü için $X = V$ olur. Dolayısıyla $U \cap V \ll V$ 'dir.

$(\Leftarrow)$ $U + V = M$ ve $U \cap V \ll V$ olsun. $U + X = M$ şartını sağlayan her $X \subset V$ alt modülü için $X = V$ olduğu gösterilirse istenen elde edilir. $X \subset V$ ve $U + X = M$ olan herhangi X alt modülünü ele alalım. Son eşitliğin her iki tarafının V ile arakesitini alırsak Modüler Kural gereği $V = M \cap V = (U + X) \cap V = (U \cap V) + X$ olup $(U \cap V) + X = V$ elde edilir. $U \cap V \ll V$ olduğundan $X = V$ bulunur.

Önerme 3.1.5. M bir R -modül, $U, V \leq M$ ve V, U 'nun M 'de bir tümleyeni olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler vardır.

- (i) Eğer $W \leq U$ için $M = W + V$ ise V, W modülünün de M 'de bir tümleyenidir.
- (ii) Eğer $K \ll M$ ise $V, U + K$ alt modülünün de M 'de bir tümleyenidir.
- (iii) Eğer $K \ll M$ ise $K \cap V \ll V$ 'dir.
- (iv) Eğer $L \leq U$ ise $(V + L) / L$ de U / L 'nin M / L 'de bir tümleyenidir.
- (v) $X \subset V$ ve $X \ll M$ ise $X \ll V$ 'dir.
- (vi) $RadV = V \cap RadM$ 'dir.
- (vii) Eğer M sonlu üretilmiş ise V de sonlu üretilmiştir.
- (viii) $Rad(M / U) = (RadM + U) / U$ 'dur (Wisbauer, 1991).

İspat: (i) $X \leq V$ alt modülü için $M = W + X$ ise $W \leq U$ olduğundan $M = U + X$ olur. Buradan V, U 'nun M 'de bir tümleyeni olduğundan $X = V$ bulunur.

(ii) $U + V = M$ olduğundan $(U + K) + V = M$ eşitliği vardır. Şimdi bir $X \leq V$ için $(U + K) + X = M$ olsun. Buradan $K + (U + X) = M$ olup $K \ll M$ olduğundan $U + X = M$ bulunur. $X \leq V$ ve V, U alt modülünün M 'de bir tümleyeni olduğundan V alt modülünün minimalliği gereği $X = V$ elde edilir. Dolayısıyla $V, U + K$ alt modülünün de M 'de bir tümleyenidir.

(iii) V, U 'nun M 'de bir tümleyeni olduğundan $M = U + V$ ve $U \cap V \ll V$ dir. Bir $S \leq V$ için $V = (K \cap V) + S$ olsun. O halde $M = U + V = U + (K \cap V) + S$ gerçekleşir. $K \ll M$ olduğundan Teorem 2.7.2.(i)'den $K \cap V \ll M$ olup $M = U + S$ yazılabilir. V 'nin minimalliğinden $S = V$ olup $K \cap V \ll V$ elde edilir.

(iv) $M/L = (U + V)/L = (V + U + L)/L = ((V + L)/L) + (U/L)$ olduğu açıktır. $(U/L) \cap ((V + L)/L) = ((U \cap V) + L)/L$ olduğundan $((U \cap V) + L)/L \ll (V + L)/L$ olduğunu gösterirsek istenen elde edilir.

$$[((U \cap V) + L)/L] + K/L = ((U \cap V) + K)/L = (V + L)/L$$

olan herhangi $K/L \leq (V + L)/L$ alalım. Burada $(U \cap V) + K = V + L$ elde edilir. Son eşitlikte her iki tarafın V ile arakesiti alınır $((U \cap V) + K) \cap V = (U \cap V) + (K \cap V) = (V + L) \cap V = V$ olur. $U \cap V \ll V$ olduğundan $K \cap V = V$ olup $V \leq K$ bulunur. Dolayısıyla $(V + L)/L \leq K/L$ olup $K/L = (V + L)/L$ elde edilir. Böylece $((U \cap V) + L)/L \ll (V + L)/L$ olur.

(v) $X + K = V$ olacak şekilde $K \leq V$ olsun. V, U 'nun M 'de bir tümleyeni olduğundan $M = U + V = U + X + K$ ve $X \ll M$ olduğundan $M = U + K$ olur. Buradan $K = V$ bulunur. Dolayısıyla $X \ll V$ 'dir.

(vi) $V \leq M$ olduğundan $RadV \leq RadM$ 'dir. Buradan $RadV \leq V \cap RadM$ olduğu açıktır. Tersine, $x \in V \cap RadM$ keyfi olsun. O halde $x \in RadM$ olduğundan

$Rx \ll M$ 'dir. Böylece (v) şikkından $Rx \ll V$ olup $x \in \text{Rad}V$ bulunur. Dolayısıyla $V \cap \text{Rad}M \leq \text{Rad}V$ olur. Sonuç olarak $\text{Rad}V = V \cap \text{Rad}M$ elde edilir.

(vii) M sonlu üretilmiş bir modül olduğundan $M = \langle m_1, m_2, \dots, m_n \rangle$ olacak şekilde $m_1, m_2, \dots, m_n \in M$ vardır. Ayrıca V, M 'de U 'nun bir tümleyeni olduğundan $M = U + V$ dir. Buradan her $i = 1, 2, \dots, n$ için $m_i = u_i + v_i$ olacak şekilde $\exists u_i \in U$ ve $\exists v_i \in V$ vardır. Dolayısıyla $M = U + \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ olup V alt modülünün minimalliğinden $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ bulunur. O halde V sonlu üretilmiştir.

(viii) Herhangi $x + U \in \text{Rad}(M/U)$ alalım. $x \in M$ ve $M = U + V$ olduğundan $x = u + v$ olacak şekilde $\exists u \in U$ ve $\exists v \in V$ vardır. Burada $x + U = u + v + U = v + U$ olur. $v + U \in \text{Rad}(M/U)$ olduğundan $(Rv + U)/U = R(v + U) \ll M/U$ olur. $Rv + T = V$ olan herhangi $T \leq V$ alalım. Burada $M/U = (U + V)/U = (U + Rv + T)/U = (Rv + U)/U + (T + U)/U$ olup $(Rv + U)/U \ll M/U$ olduğundan $(T + U)/U = M/U$ olur. O halde $U + T = M$ olup V, U 'nun M 'de bir tümleyeni ve $T \leq V$ olduğundan V 'nin minimalliği gereği $T = V$ olur. Böylece $Rv \ll V$ olup $Rv \ll M$ ve buradan da $v \in \text{Rad}M$ elde edilir. O halde $x + U = v + U \in (\text{Rad}M + U)/U$ olup $\text{Rad}(M/U) \leq (\text{Rad}M + U)/U$ olur. $p: M \rightarrow M/U$ doğal homomorfizması yardımıyla Teorem 2.7.2.(iii) de kullanılarak $(\text{Rad}M + U)/U \leq \text{Rad}(M/U)$ olduğu gösterilebilir. O halde $\text{Rad}(M/U) = (\text{Rad}M + U)/U$ olup istenen elde edilir.

Tanım 3.1.6. M bir R -modül ve $U \leq M$ olsun. $M = U + V$ koşulunu gerçekleyen M 'nin her V alt modülü için U 'nun M 'de V tarafından kapsanan bir tümleyeni varsa U alt modülü M 'de bol tümleyenlere sahiptir denir (Wisbauer, 1991).

Tanım 3.1.7. Bir M R -modülünün her alt modülü M 'de bir tümleyene sahipse, M 'ye bir tümlenmiş modül, M 'nin her alt modülü M 'de bol tümleyenlere sahipse M 'ye bir bol tümlenmiş modül denir (Wisbauer, 1991).

Teorem 3.1.8. V, M' 'de U 'nun bir tümleyeni ve K ve T, V 'nin alt modülleri olsun. T 'nin V 'de K 'nın bir tümleyeni olması için gerek ve yeter koşul T 'nin M' 'de $U + K$ 'nın bir tümleyeni olmasıdır (Nebiyev ve Pancar , 2011).

İspat: $(\Rightarrow)$ T, V 'de K 'nın bir tümleyeni ve $L \leq T$ için $U + K + L = M$ olsun. Bu durumda $K + L \leq V$ ve V, U 'nun bir tümleyeni olduğundan $K + L = V$ yazılır. $L \leq T$ ve T, V 'de K 'nın bir tümleyeni olduğundan $L = T$ 'dir. O halde T, M' 'de $U + K$ 'nın bir tümleyenidir.

$(\Leftarrow)$ T, M' 'de $U + K$ 'nın bir tümleyeni olsun. $U + K + T = M$ ve $K + T \leq V$ olduğundan $K + T = V$ yazılır. $K \cap T \leq (U + K) \cap T \ll T$ olduğundan $K \cap T \ll T$ olup T, V 'de K 'nın bir tümleyenidir.

Teorem 3.1.9. M bir bol tümlenmiş R -modül ve V de M' 'de herhangi bir tümleyen alt modül olsun. Bu takdirde V de bol tümlenmiştir (Wisbauer, 1991).

İspat: Kabul edelim ki V, U 'nun M' 'de bir tümleyeni ve $X, Y \leq V$ olmak üzere $X + Y = V$ olsun. X 'in V 'de $Y' \leq Y$ olan bir Y' tümleyeninin olduğunu gösterelim. $V = X + Y$ ve $M = U + V$ olduğundan $M = U + X + Y$ olur. M bol tümlenmiş olduğundan $U + X$ 'in M içinde $Y' \leq Y$ olan bir Y' tümleyeni vardır. Teorem 3.1.8. gereği Y', X 'in V 'de bir tümleyeni olur. Ayrıca $Y' \leq Y$ 'dir. O halde V bol tümlenmiştir.

Teorem 3.1.10. Bir $M R$ -modülü için aşağıdakiler denktir.

(a) M bol tümlenmiştir.

(b) M 'nin her U alt modülü X tümlenmiş ve $Y \ll M$ olmak üzere $U = X + Y$ şeklinde yazılabilir.

(c) M 'nin her U alt modülü için $U / X \ll M / X$ olacak şekilde bir $X \leq U$ tümlenmiş alt modülü vardır (Wisbauer, 1991).

İspat: $(a) \Rightarrow (b)$ M bol tümlenmiş ve $U \leq M$, M 'nin herhangi bir alt modülü olsun. M bol tümlenmiş olduğundan tümlenmiş olup U 'nun M' 'de bir V gibi tümleyeni vardır. $V + U = M$ ve M bol tümlenmiş olduğundan V 'nin M' 'de $X \leq U$ olan bir X tümleyeni vardır. Buradan $V + X = M$ olup $V \cap U + X = U$ bulunur. $Y = V \cap U$ dersek $Y = U \cap V \ll V$ olduğundan Teorem 2.7.2.(ii)'den $Y \ll M$ olur.

Ayrıca X , V 'nin bir tümleyeni olduğundan Teorem 3.1.9.'dan X tümlenmiş olup buradaki X ve Y istenen özelliktedir.

(b) $\Rightarrow$ (c) U , M 'nin herhangi bir alt modülü olsun. Bu takdirde hipotezden $U = X + Y$, X tümlenmiş ve $Y \ll M$ olacak şekilde X ve Y alt modülleri vardır. Şimdi $U / X \ll M / X$ olduğunu gösterirsek ispat tamamlanmış olur. K / X , M / X 'in bir alt modülü olmak üzere $U / X + K / X = M / X$ olsun. Bu takdirde $(U + K) / X = M / X$ olup $U + K = M$ olur. Burada $U = X + Y$ ve $Y \ll M$ olduğu göz önünde bulundurulursa $X + K = M$ olup $X \leq K$ olduğundan $K = M$ bulunur. Yani $K / X = M / X$ olur. Dolayısıyla $U / X \ll M / X$ 'dir.

(c) $\Rightarrow$ (a) Herhangi bir $V \leq M$ alt modülünü ele alalım. V 'nin bol tümleyenlere sahip olduğunu göstereceğiz. U , M 'nin bir alt modülü olmak üzere $V + U = M$ olsun. Hipotezden $U / X \ll M / X$ olacak şekilde $X \leq U$ tümlenmiş alt modülü vardır. Bu takdirde $(V + X) / X + U / X = (V + U) / X = M / X$ olup $V + X = M$ bulunur. X tümlenmiş olduğundan $X \cap V$ 'nin X içinde bir X' tümleyeni vardır. Bu X' 'nin V 'nin M 'de bir tümleyeni olduğunu gösterirsek $X' \leq X \leq U$ olduğundan ispat tamamlanmış olur. $V + X = M$ ve $V \cap X + X' = X$ olduğundan $V + X' = M$ olur. Ayrıca $V \cap X' = (V \cap X) \cap X' \ll X'$ olup X' , V 'nin M 'de bir tümleyenidir.

Tanım 3.1.11. M bir R -modül, $U \leq M$ ve $L \leq U$ olsun. Eğer $U / L \ll M / L$ ise U altmodülü L altmodülü üzerindedir (veya $L \leq U$ eşküçüktür) denir (Clark ve ark., 2006).

Teorem 3.1.12. M bir R -modül $U \leq M$ ve $L \leq U$ olsun. Bu takdirde U 'nun L üzerinde olması için gerek ve yeter koşul $U + N = M$ şartını sağlayan her $N \leq M$ için $L + N = M$ olmasıdır (Clark ve ark., 2006).

İspat: ($\Rightarrow$) U , L üzerinde olsun. Bu takdirde $U / L \ll M / L$ dir. $U + N = M$ olan herhangi bir $N \leq M$ alalım. Bu takdirde $M / L = (U + N) / L = U / L + (N + L) / L$ olup $U / L \ll M / L$ olduğundan $(N + L) / L = M / L$ ve $N + L = M$ olur ki bu da istenendir.

$(\Leftarrow) U/L + T/L = M/L$ olan herhangi bir $T/L \leq M/L$ alalım. Bu durumda $(U+T)/L = M/L$ olup $U+T=M$ olur. Hipotezden $L+T=M$ olup $L \leq T$ olduğundan $T=M$ ve $T/L = M/L$ 'dir. Yani $U/L \ll M/L$ olup U, L üzerindedir.

Teorem 3.1.13. Bir $M R$ -modülü için aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) M bol tümlenmiştir ve her tümleyen alt modül bir direkt toplam terimidir.

(b) M bir $(D1)$ modülüdür.

(c)(i) M 'nin her küçük olmayan alt modülü M 'de sıfırdan farklı bir direkt toplam terimi içerir ve

(ii) M 'nin her alt modülü bir maksimal direkt toplam terimi içerir (Wisbauer, 1991).

İspat: $(a) \Rightarrow (b)$ U, M 'nin herhangi bir alt modülü olsun. M bol tümlenmiş olduğundan tümlenmiş olup U 'nun M 'de bir V gibi tümleyeni vardır. Yine M bol tümlenmiş olduğundan V 'nin $X \leq U$ olan bir tümleyeni vardır. Bu durumda $X+V=M$ olup her iki tarafın U ile arakesitini alırsak $X \leq U$ olduğundan $U = U \cap M = U \cap (X+V) = X + U \cap V$ olur. X, M 'de bir tümleyen olduğundan hipotezden X, M 'nin bir direkt toplam terimidir. Bu durumda $M = X \oplus Y$ olacak şekilde $\exists Y \leq M$ vardır. $U \cap Y + N = M$ olan herhangi $N \leq M$ alalım. $M = X \oplus Y$ ve $X \leq U$ olduğundan $M = U + Y$ olur. Bu durumda Teorem 2.2.20.'den $M = U + Y \cap N = X + U \cap V + Y \cap N$ olup $U \cap V \ll M$ olduğundan $M = X + Y \cap N$ olur. $M = X + Y \cap N$ olduğundan Modüler Kuraldan

$$Y = Y \cap M = Y \cap (X + Y \cap N) = X \cap Y + Y \cap N$$

olup $X \cap Y = 0$ olduğundan $Y = Y \cap N$ olur. O halde $Y \leq N$ olup $M = U \cap Y + N = Y + N = N$ ve $U \cap Y \ll M$ olur. Böylece M bir $(D1)$ modülü olup istenen elde edilir.

$(b) \Rightarrow (a)$ $U, V \leq M$ olmak üzere $M = U + V$ olsun. M bir $(D1)$ modülü olduğundan $M = X \oplus Y$, $X \leq U \cap V$ ve $U \cap V \cap Y \ll M$ olacak şekilde $\exists X, Y \leq M$ vardır. Modüler Kuraldan $V = V \cap M = V \cap (X + Y) = X + V \cap Y$ olup

$$M = U + V = U + X + V \cap Y = U + V \cap Y$$

olur. Yine M bir (D1) modülü olduğundan $M = K \oplus T$, $K \leq V \cap Y$ ve $V \cap Y \cap T \ll M$ olacak şekilde $\exists K, T \leq M$ vardır. Modüler Kuraldan

$$V \cap Y = V \cap Y \cap M = V \cap Y \cap (K + T) = K + V \cap Y \cap T$$

olup $M = U + V \cap Y = U + K + V \cap Y \cap T$ olur. Bu durumda $V \cap Y \cap T \ll M$ olduğundan $M = U + K$ olur. Burada $U \cap K \leq U \cap V \cap Y \ll M$ ve K, T 'nin M 'de bir tümleyeni olduğundan Önerme 3.1.5.(v) gereği $U \cap K \ll K$ olup K, U 'nun M 'de bir tümleyeni olur. Ayrıca $K \leq V \cap Y \leq V$ 'dir. O halde M bol tümlenmiştir.

Şimdi M 'de herhangi B tümleyen alt modülünü alalım. Kabul edelim ki B, A 'nın M 'de bir tümleyeni olsun. M bir (D1) modülü olduğundan $M = Z \oplus S$, $Z \leq B$ ve $B \cap S \ll M$ olacak şekilde $\exists Z, S \leq M$ vardır. Modüler Kuraldan $B = B \cap M = B \cap (Z + S) = Z + B \cap S$ olup $M = A + B = A + Z + B \cap S$ olur. Burada $B \cap S \ll M$ olduğundan $M = A + Z$ olup $Z \leq B$ ve B, A 'nın M 'de bir tümleyeni olduğundan $B = Z$ olur. O halde B, M 'nin bir direkt toplam terimi olur. Böylece M 'deki her tümleyen alt modül M 'nin bir direkt toplam terimi olup istenen elde edilir.

(b) $\Rightarrow$ (c) U, M 'nin herhangi bir küçük olmayan alt modülü olsun. Bu takdirde hipotezden $X \leq U$, $X' \cap U \ll X'$ ve $X \oplus X' = M$ olacak şekilde X ve X' alt modülleri bulunabilir. Burada U, M 'de küçük olmadığından X direkt toplam terimi sıfırdan farklı olup (i) sağlanmış olur. Yine U herhangi bir alt modül ise hipotez gereği $X \leq U$, $X' \cap U \ll X'$ ve $X \oplus X' = M$ olacak şekilde M 'nin X ve X' alt modülleri vardır. $X \leq X'' \leq U$ olan X'' , M 'nin bir direkt toplam terimi olsun. Bu takdirde, $X'' \cap X' \leq U \cap X' \ll M$ olur. X'' , M 'nin bir direkt toplam terimi olduğundan $X'' \oplus X''' = M$ olacak şekilde X''' alt modülü vardır. $X \oplus X' = M$ olduğundan her iki tarafın X'' ile arakesitini alırsak $X + X' \cap X'' = X''$ olup $X' \cap X'' \ll M$ ve $X'' \oplus X''' = M$ olduğundan $X \oplus X''' = M$ bulunur. Yine her iki tarafın X'' ile arakesitini alırsak $X + X'' \cap X''' = X''$ olup $X'' \cap X''' = 0$ olduğundan $X = X''$ bulunur. Yani X maksimal direkt toplam terimi olur.

(c) $\Rightarrow$ (b) $U \leq M$ herhangi bir alt modül olsun. Bu takdirde hipotezden U bir X gibi maksimal direkt toplam terimi içerir. Bu durumda $X \oplus X' = M$ olacak şekilde bir X' alt modülü vardır. Şimdi $U \cap X' \ll X'$ olduğunu gösterirsek istenen elde edilir. $U \cap X'$, X' 'de küçük değilse X', M 'de bir direkt toplam terimi olduğundan

$U \cap X'$, M 'de de küçük olmaz. Bu durumda $U \cap X'$, M 'de sıfırdan farklı bir X'' direkt toplam terimi içerir. X'' , M 'nin bir direkt toplam terimi olduğundan $X'' \oplus X''' = M$ olacak şekilde bir X''' alt modülü bulunur. Her iki tarafın X' ile arakesitini alırsak $X'' \oplus (X' \cap X''') = X'$ olur. Bu ifade $X \oplus X' = M$ 'de göz önünde bulundurulursa $X \oplus X''$, U da kapsanan bir direkt toplam terimi olur ki bu da X 'in maksimal direkt toplam terimi olmasıyla çelişir. Yani $U \cap X' \ll X'$ olmalıdır.

Teorem 3.1.14. M bir π -projektif R -modül ve U ve V , M içinde birbirlerinin tümleyenleri olan alt modüller iseler $U \cap V = 0$ 'dır ve bu durumda da $M = U \oplus V$ 'dir (Wisbauer, 1991).

İspat: $U \times V$ 'nin $P = \{(u, -u) | u \in U \cap V\}$ alt modülünü ele alalım. Eğer $P = \{(0, 0)\}$ olduğunu gösterirsek istenen elde edilir. $P = \{(u, -u) | u \in U \cap V\} \leq (U \cap V) \times 0 + 0 \times (U \cap V)$ olduğu gösterilebilir. U ve V birbirlerinin tümleyenleri olduklarından $U \cap V \ll U$ ve $U \cap V \ll V$ 'dir. Bu durumda $(U \cap V) \times 0 \ll U \times 0$ ve $0 \times (U \cap V) \ll 0 \times V$ olup

$$P \leq (U \cap V) \times 0 + 0 \times (U \cap V) \ll U \times 0 + 0 \times V = U \times V$$

olur. Burada P , $f : U \times V \rightarrow M, (u, v) \rightarrow u + v$ homomorfizmasının çekirdeği olduğu gösterilebilir. M π -projektif olduğundan Teorem 2.5.11.'den f parçalanabilir. Dolayısıyla $f \circ g = 1_M$ olacak şekilde bir $g : M \rightarrow U \times V$ homomorfizması bulunabilir. Bu durumda $U \times V = \text{Görg} \oplus \text{Çekf}$ olduğundan $U \times V = \text{Görg} \oplus P$ olup $P \ll U \times V$ olduğundan bu durum ancak $P = \{(0, 0)\}$ olmasıyla mümkündür.

Teorem 3.1.15. M bir π -projektif R -modül ve $U, V \leq M$ olmak üzere $M = U + V$ ve U bir direkt toplam terimi ise $M = U \oplus V'$ olan bir $V' \leq V$ vardır (Wisbauer, 1991).

İspat: U bir direkt toplam terimi olduğundan $M = U \oplus X$ olacak şekilde bir $X \leq M$ vardır. M π -projektif ve $M = U + V$ olduğundan $\text{Görf} \leq V$ ve $\text{Gör}(1_M - f) \leq U$ olacak şekilde bir $f \in \text{End}(M)$ vardır. $\forall u \in U$ için $u - f(u) \in U$ olduğundan $f(u) \in U$ ve dolayısıyla $f(U) \leq U$ olur. Buradan

$$M = f(M) + (1_M - f)(M) = f(U + X) + (1_M - f)(M) = f(U) + f(X) + (1_M - f)(M),$$

$(1_M - f)(M) \leq U$ ve $f(U) \leq U$ olduğundan $M = U + f(X)$ bulunur. Eğer $U \cap f(X) = 0$ olduğunu gösterirsek $f(X) \leq V$ olduğundan $V' = f(X)$ denilerek istenen elde edilir. $u \in U \cap f(X)$ alalım. Bu takdirde $u \in U$ ve $u = f(x)$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. Burada $x - f(x) \in U$ olup $f(x) \in U$ olduğundan $x \in U$ bulunur. Dolayısıyla $x \in U \cap X$ olur. $M = U \oplus X$ olduğundan $U \cap X = 0$ olup $x = 0$ bulunur. Dolayısıyla $u = f(x) = f(0) = 0$ olup $U \cap f(X) = 0$ bulunur.

Teorem 3.1.16. Bir M , R -modülü için aşağıdakiler denktir.

(a) M tümlenmiştir ve π -projektiftir.

(b) (i) M bol tümlenmiştir ve

(ii) Birbirlerinin tümleyenleri olan alt modüllerin arakesitleri sıfırdır.

(c) (i) M 'nin her alt modülü bir direkt toplam terimi üzerindedir.

(ii) U ve V , M 'nin $M = U + V$ olan direkt toplam terimleri iseler $U \cap V$ de M 'nin bir direkt toplam terimidir.

(d) $M = U + V$ olan her $U, V \leq M$ için $e(M) \subset U$, $(1_M - e)(M) \subset V$ ve $(1_M - e)(U) \ll (1_M - e)(M)$ olacak şekilde bir $e \in \text{End}(M)$ idempotenti vardır (Wisbauer, 1991).

İspat: (a) $\Rightarrow$ (b) (i) M 'nin herhangi bir U alt modülünü alalım. $V \leq M$ alt modülü için $U + V = M$ olsun. U 'nun M 'de $V' \leq V$ olan bir V' tümleyeninin varlığını göstereceğiz. M tümlenmiş olduğundan U 'nun M içinde bir X tümleyeni vardır. $U + V = M$ ve M π -projektif olduğundan $\text{Gör}f \leq V$ ve $\text{Gör}(1_M - f) \leq U$ olacak şekilde bir $f \in \text{End}(M)$ vardır. Burada Teorem 3.1.15.'teki gibi $f(U) \leq U$ olduğu gösterilebilir. Bu durumda

$$M = (1_M - f)(M) + f(M) = U + f(U) + f(X) = U + f(X)$$

bulunur. Şimdi $f(X)$ 'in U 'nun M 'de bir tümleyeni olduğunu gösterirsek $f(X) \leq V$ olduğundan istenen elde edilir. $S \leq f(X)$ için $U + S = M$ olsun. Bu durumda $\forall m \in M$ için $m = u + f(x)$ olacak şekilde $u \in U$ ve $f(x) \in S$ olan bir $x \in X$ vardır.

Burada $m = u + f(x) - x + x = u - (1_M - f)(x) + x$ olup $x \in f^{-1}(S) \cap X$ ve $(1_M - f)(x) \in U$ olduğundan $m \in U + f^{-1}(S) \cap X$ bulunur. Dolayısıyla $M = U + f^{-1}(S) \cap X$ olur. Burada X , U 'nun M 'de bir tümleyeni olduğundan

$f^{-1}(S) \cap X = X$ olup $X \leq f^{-1}(S)$ bulunur. Dolayısıyla $f(X) \leq S$ olup $f(X)$, U 'nun M 'de bir tümleyeni olur.

(ii) Teorem 3.1.14.'ten ispat açıktır.

(b) $\Rightarrow$ (c) (i) V , U 'nun M içinde bir tümleyeni olsun. Bu takdirde $M = U + V$ ve $U \cap V \ll V$ olur. M bol tümlenmiş olduğundan V 'nin M 'de $X \leq U$ olan bir X tümleyeni vardır. Bu durumda X ve V , M 'de birbirlerinin tümleyenleri olup (b)(ii) gereği $X \cap V = 0$ ve $M = X \oplus V$ olur. Böylece X , M 'nin bir direkt toplam terimi olur. $M = X + V$ ve $X \leq U$ olduğundan Modüler Kuraldan $U = U \cap M = U \cap (X + V) = X + U \cap V$ olur. $U + T = M$ olan herhangi $T \leq M$ alalım. Burada $M = U + T = X + U \cap V + T$ olup $U \cap V \ll M$ olduğundan $M = X + T$ olur. O halde Teorem 3.1.12.'den U , X üzerinde olup U , M 'de bir direkt toplam terimi üzerinde olur. Böylece M 'nin her alt modülü bir direkt toplam terimi üzerindedir.

(ii) $M = U + V$ ve U ve V , M 'nin birer direkt toplam terimi olsun. Bu durumda $M = U \oplus X$ ve $M = V \oplus Y$ olacak şekilde $\exists X, Y \leq M$ vardır. M bol tümlenmiş olduğundan U 'nun M 'de $V' \leq V$ olan bir V' tümleyeni ve V 'nin de M 'de $U' \leq U$ olan bir U' tümleyeni vardır. Bu durumda U' ve V' birbirlerinin tümleyenleri olup (b)(ii) gereği $U' \cap V' = 0$ ve $M = U' \oplus V'$ olur. Burada her iki tarafın U ile arakesitini alırsak $U = U \cap M = U \cap (U' \oplus V') = U' \oplus (U \cap V')$ olup bu $M = U \oplus X$ 'te yerine konulursa $U \cap V'$, M 'nin bir direkt toplam terimi olur. Ayrıca V' , U 'nun M 'de bir tümleyeni olduğundan $U \cap V' \ll V'$ olup $U \cap V'$ aynı zamanda bir direkt toplam terimi olduğundan $U \cap V' = 0$ olur. O halde $M = U \oplus V'$ olur. Şimdi her iki tarafın V ile arakesitini alırsak $V = M \cap V = (U \oplus V') \cap V = (U \cap V) \oplus V'$ olur. Bu $M = V \oplus Y$ 'de yerine yazılırsa $M = (U \cap V) \oplus V' \oplus Y$ olur ki bu da $U \cap V$ modülünün M 'nin bir direkt toplam terimi olduğunu gösterir.

(c) $\Rightarrow$ (d) $U, V \leq M$ olmak üzere $M = U + V$ olsun. Bu takdirde U bir direkt toplam terimi üzerinde olduğundan $M = X \oplus X'$, $X \leq U$ ve $U/X \ll M/X$ olacak şekilde $\exists X, X' \leq M$ vardır. V bir direkt toplam terimi üzerinde olduğundan $M = Y \oplus Y'$, $Y \leq V$ ve $V/Y \ll M/Y$ olacak şekilde $\exists Y, Y' \leq M$ vardır. $U \cap X' + T = M$ olan herhangi $T \leq M$ alalım. Burada $M = X + X' = U + X'$ olduğundan Teorem 2.2.20.'den $U + T \cap X' = M$ olup U , X üzerinde olduğundan Teorem 3.1.12.'den

$X + T \cap X' = M$ olur. Bu durumda X' , X' 'in M 'de bir tümleyeni ve $T \cap X' \leq X'$ olduğundan $T \cap X' = X'$ olup $X' \leq T$ olur. O halde $M = U \cap X' + T \leq X' + T = T$ olup $T = M$ olur. Böylece $U \cap X' \ll M$ olur. Benzer şekilde $V \cap Y' \ll M$ olduğu da gösterilebilir. $M = X \oplus X'$ 'de her iki tarafın U ile arakesitini alırsak $U = X \oplus (U \cap X')$, $M = Y \oplus Y'$ 'de her iki tarafın V ile arakesitini alırsak $V = Y \oplus (V \cap Y')$ olur. Bunları $M = U + V$ 'de düşünersek $U \cap X' \ll M$ ve $V \cap Y' \ll M$ olduğundan $M = X + Y$ bulunur. Burada X ve Y , M 'nin birer direkt toplam terimi olduğundan hipotezden $X \cap Y$ de M 'nin bir direkt toplam terimi olur. Dolayısıyla $M = (X \cap Y) \oplus N$ olacak şekilde bir $N \leq M$ vardır. Burada her iki tarafın Y ile arakesitini alırsak $Y = (X \cap Y) \oplus (Y \cap N)$ bulunur. Bu durumda $M = X + Y$ olduğundan $M = X + (Y \cap N) + (X \cap Y) = X + Y \cap N$ olur. Ayrıca $X \cap Y \cap N = 0$ olduğundan $M = X \oplus (Y \cap N)$ olur. Bu durumda $e: M \rightarrow M$, $\forall m \in M$ için $m = x + y$, $x \in X$, $y \in Y \cap N$ ise $e(m) = x$ ile tanımlı e bir idempotenttir. Ayrıca $e(M) \leq X \leq U$, $(1_M - e)(M) = Y \cap N \leq V$ ve $(1_M - e)(U) = U \cap (Y \cap N)$ oldukları gösterilebilir. Şimdi $U \cap (Y \cap N) \ll Y \cap N$ olduğunu gösterirsek istenen elde edilir. $M = X \oplus (Y \cap N)$ olduğundan $Y \cap N$, X' 'in M 'de bir tümleyenidir. $U = X + U \cap X'$ ve $U \cap X' \ll M$ olduğundan Önerme 3.1.5.(ii)'den $Y \cap N$, U 'nun da M 'de bir tümleyenidir. Dolayısıyla $U \cap (Y \cap N) \ll Y \cap N$ olur.

(d) $\Rightarrow$ (a) Açıktır.

Önerme 3.1.17. M bir R -modül olsun. Eğer M bir oyuk modül ise tümlenmiştir (Wisbauer, 1991).

İspat: M bir oyuk modül ve K , M nin herhangi bir öz alt modülü olsun. M bir oyuk modül olduğundan $L \leq M$ için $K + L = M$ koşulu sadece $L = M$ için sağlanır. O halde M , K 'nin M 'de bir tümleyeni olup ayrıca 0 , M 'nin M 'de bir tümleyeni olduğundan M tümlenmiş olur.

Sonuç 3.1.18. M bir R -modül olsun. Eğer M lokal ise tümlenmiştir (Wisbauer, 1991).

Teorem 3.1.19. M bir tümlenmiş modül ise M 'nin her bölüm modülü de tümlenmiştir (Wisbauer, 1991).

İspat: M/N , M 'nin herhangi bir bölüm modülü ve $U/N \leq M/N$ olsun. M tümlenmiş olduğundan U 'nun M 'de bir V tümleyeni vardır. Bu durumda $N \leq U$ olduğundan Önerme 3.1.5.(iv) 'ten $(V+N)/N$ de U/N 'nin M/N 'de bir tümleyeni olur. Böylece M/N 'nin her alt modülü M/N 'de bir tümleyene sahip olup M/N tümlenmiştir.

Sonuç 3.1.20. M bir tümlenmiş modül ise, M 'nin homomorf görüntüsü de tümlenmiştir (Wisbauer, 1991).

İspat: M 'nin homomorf görüntüsü M 'nin bir bölüm modülüne izomorf olduğundan Teorem 3.1.19. gereğince istenen elde edilir.

Yardımcı Teorem 3.1.21. M bir R -modül olmak üzere $M_1, U \leq M$ ve M_1 tümlenmiş olsun. Eğer M_1+U 'nun M 'de bir tümleyeni varsa U 'nun da M 'de bir tümleyeni vardır (Wisbauer, 1991).

İspat: X , M_1+U 'nun M 'de bir tümleyeni ve Y , $M_1 \cap (U+X)$ alt modülünün M_1 'de bir tümleyeni olsun. Bu takdirde $M = M_1+U+X$,
 $(M_1+U) \cap X \ll X$ ve $M_1 = (M_1 \cap (U+X)) + Y$,

$(U+X) \cap Y = (M_1 \cap (U+X)) \cap Y \ll Y$ olur. Buradan

$$M = M_1+U+X = (M_1 \cap (U+X)) + Y + U + X = U + X + Y$$

ve

$$U \cap (X+Y) \leq X \cap (U+Y) + Y \cap (U+X) \leq X \cap (U+M_1) + Y \cap (U+X) \ll X+Y$$

olur. Böylece $X+Y$, U 'nun M 'de bir tümleyenidir.

Teorem 3.1.22. M_1 ve M_2 bir M R -modülünün birer alt modülü olmak üzere $M = M_1+M_2$ olsun. M_1 ve M_2 tümlenmiş ise M de tümlenmiştir (Wisbauer, 1991).

İspat: $U \leq M$ olsun. $M = (M_1+U) + M_2$, M 'de 0 aşikar tümleyenine sahiptir. X , $(M_1+U) \cap M_2$ 'nin M_2 'de bir tümleyeni ise Yardımcı Teorem 3.1.21.'den $0+X$, M 'de M_1+U 'nun bir tümleyenidir. Yine Y , $M_1 \cap (U+X)$ 'nin M_1 'de bir

tümleyeni ise Yardımcı Teorem 3.1.21.'den $X+Y$, U 'nun M 'de bir tümleyenidir. Dolayısıyla M tümlenmiştir.

Bu teoremden hareketle sonlu sayıdaki tümlenmiş R -modüllerin toplamının da tümlenmiş olduğu gösterilebilir.

3.2. $\oplus$ -Tümlenmiş Modüller

Tanım 3.2.1. M bir R -modül olsun. M 'nin her alt modülünün M 'de direkt toplam terimi olacak şekilde bir tümleyeni varsa M 'ye bir $\oplus$ -tümlenmiş modül denir. O halde M bir $\oplus$ -tümlenmiş modül ise $\forall N \leq M$ için $M = N + K$, $N \cap K \ll K$ ve $K \oplus L = M$ olacak şekilde $K, L \leq M$ vardır (Mohamed ve Müller, 1990).

$\oplus$ -tümlenmiş modüller tümlenmiştir.

Teorem 3.2.2. Sonlu sayıda $\oplus$ -tümlenmiş R -modülün direkt toplamı da $\oplus$ -tümlenmiştir (Harmancı ve ark., 1999).

İspat: n pozitif bir tam sayı ve $1 \leq i \leq n$ için M_i 'ler $\oplus$ -tümlenmiş R -modüller olsun. $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$ yazalım. $n=2$ için M 'nin $\oplus$ -tümlenmiş olduğunu gösterelim. $n>2$ için de tümevarım yöntemiyle ispat yapılabilir. $M = M_1 \oplus M_2$ ve $N \leq M$ olsun. $M = M_1 + M_2 + N$ olduğundan 0 modülü, $M_1 + M_2 + N$ 'nin M 'de bir tümleyenidir. M_2 $\oplus$ -tümlenmiş olduğundan $M_2 \cap (M_1 + N)$ nin M_2 'de direkt toplam terimi olacak şekilde bir K tümleyeni vardır. O halde $M_2 \cap (M_1 + N) + K = M_2$, $K \cap (M_1 + N) = M_2 \cap (M_1 + N) \cap K \ll K$ ve $M_2 = K \oplus K'$ olacak şekilde bir $K' \leq M_2$ vardır. Burada $M = M_1 + M_2 + N = (M_1 + N) + M_2 \cap (M_1 + N) + K = M_1 + N + K$ olur. M_1 , $\oplus$ -tümlenmiş olduğundan $M_1 \cap (K + N)$ 'nin M_1 'de direkt toplam terimi olan bir L tümleyeni vardır. Bu durumda $M_1 = M_1 \cap (K + N) + L$, $(K + N) \cap L = M_1 \cap (K + N) \cap L \ll L$ ve $M_1 = L \oplus L'$ olacak şekilde bir $L' \leq M_1$ vardır. Buradan $M = M_1 + N + K = M_1 \cap (K + N) + L + (K + N) = K + N + L$ elde edilir. Ayrıca $K \cap (L + N) \leq K \cap (M_1 + N)$ ve $K \cap (M_1 + N) \ll K$ olduğundan $K \cap (L + N) \ll K$ 'dir. O halde $N \cap (K + L) \leq K \cap (L + N) + L \cap (K + N) \ll K + L$

olur. Böylece $K+L$, N 'nin M 'de bir tümleyenidir. K , M_2 'nin ve L de M_1 'in direkt toplam terimleri olduğundan $K+L=K\oplus L$ de M 'nin bir direkt toplam terimidir. Böylece $M=M_1\oplus M_2\oplus$ -tümlenmiştir.

Tanım 3.2.3. M ve N R -modüller olmak üzere $f:M\rightarrow N$ bir epimorfizma ve $\text{Çek}f\ll M$ ise f epimorfizmasına bir küçük epimorfizma veya örtü denir. Bu durumda M modülüne $f:M\rightarrow N$ küçük epimorfizması ile birlikte N modülünün bir küçük örtüsü denir. Eğer M projektif ise M modülüne $f:M\rightarrow N$ küçük epimorfizması ile birlikte N modülünün bir projektif örtüsü denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 3.2.4. M bir R -modül olsun. Eğer M 'nin her direkt toplam terimi $\oplus$ -tümlenmiş ise M 'ye bir tamamen $\oplus$ -tümlenmiş modül denir (Harmancı ve ark., 1999).

3.3. Genelleştirilmiş (Radikal) Tümlenmiş ve Genelleştirilmiş (Radikal) $\oplus$ -Tümlenmiş Modüller

Tanım 3.3.1. M bir R -modül, U ve V , M 'nin iki alt modülü olsun. $M=U+V$ ve $U\cap V\leq \text{Rad}V$ ise V 'ye U 'nun M 'de bir genelleştirilmiş (radikal) tümleyeni veya kısaca Rad-tümleyeni denir. M R -modülünün her alt modülü bir genelleştirilmiş tümleyene sahip ise M 'ye bir genelleştirilmiş (radikal) tümlenmiş modül veya kısaca GT-modül (Rad-tümlenmiş modül) denir (Xue, 1996).

Bu tanımdan da görüleceği üzere bir modülün radikali küçük alt modüllerinin toplamı olduğundan her tümleyen bir genelleştirilmiş tümleyendir. Dolayısıyla her tümlenmiş modül bir genelleştirilmiş tümlenmiş modüldür. Ancak her genelleştirilmiş tümlenmiş modül tümlenmiş modül olmayabilir.

Önerme 3.3.2. M bir R -modül ve $N, K\leq M$ olsun. $N+K$, M 'de bir X genelleştirilmiş tümleyenine ve $N\cap(K+X)$ de N 'de bir Y genelleştirilmiş tümleyenine sahip olsun. Bu takdirde $X+Y$, M 'de K 'nın bir genelleştirilmiş tümleyenidir (Çalışıcı ve Türkmen, 2010).

İspat: X , M 'de $N+K$ 'nın bir genelleştirilmiş tümleyeni olduğundan $M=(N+K)+X$ ve $(N+K)\cap X\leq \text{Rad}X$ 'dir. Y , $N\cap(K+X)$ 'in N 'de bir

genelleştirilmiş tümleyeni olduğundan $N = [N \cap (K + X)] + Y$ ve

$(K + X) \cap Y = N \cap (K + X) \cap Y \leq \text{Rad} Y$ olur. Buradan

$$M = N + K + X = [(N \cap (K + X)) + Y] + K + X = K + (X + Y)$$

ve

$$K \cap (X + Y) \leq X \cap (K + Y) + Y \cap (K + X) \leq$$

$$X \cap (K + N) + Y \cap (K + X) \leq \text{Rad} X + \text{Rad} Y \leq \text{Rad} (X + Y)$$

bulunur. Dolayısıyla $X + Y$, M 'de K 'nın bir genelleştirilmiş tümleyenidir.

Tanım 3.3.3. M bir R -modül olsun. M 'nin her alt modülü M 'de bir direkt toplam terimi olacak şekilde bir genelleştirilmiş tümleyene sahipse M 'ye bir genelleştirilmiş $\oplus$ -tümlenmiş veya $\text{Rad-}\oplus$ -tümlenmiş modül denir (Çalışıcı ve Türkmen, 2010).

$\oplus$ -tümlenmiş modüller genelleştirilmiş $\oplus$ -tümlenmiştir. Ancak tersi her zaman doğru değildir.

Teorem 3.3.4. Sonlu sayıda genelleştirilmiş $\oplus$ -tümlenmiş R -modüllerin direkt toplamı da genelleştirilmiş $\oplus$ -tümlenmiştir (Çalışıcı ve Türkmen, 2010).

İspat: n herhangi bir pozitif tam sayı olmak üzere M_i ($1 \leq i \leq n$) genelleştirilmiş $\oplus$ -tümlenmiş R -modüllerin herhangi bir sonlu ailesi ve $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$ olsun. İspatı $n=2$ için yapalım. $M = M_1 \oplus M_2$ ve K , M 'nin keyfi bir alt modülü olsun. Buradan $M = M_1 + M_2 + K$ olup $M_1 + M_2 + K$, M 'de bir 0 genelleştirilmiş tümleyenine sahiptir. M_1 genelleştirilmiş $\oplus$ -tümlenmiş olduğundan $M_1 \cap (M_2 + K)$, M_1 'de bir direkt toplam terimi olacak şekilde bir X genelleştirilmiş tümleyenine sahiptir. Bu takdirde Önerme 3.3.2.'den X , M 'de $M_2 + K$ 'nın bir genelleştirilmiş tümleyenidir. M_2 de bir genelleştirilmiş $\oplus$ -tümlenmiş modül olduğundan $M_2 \cap (K + X)$, M_2 'de bir direkt toplam terimi olacak şekilde bir Y genelleştirilmiş tümleyenine sahiptir. Önerme 3.3.2. tekrar uygulanırsa $X + Y$, M 'de K 'nın bir genelleştirilmiş tümleyeni olur. X , M_1 'in bir direkt toplam terimi ve Y de M_2 'nin bir direkt toplam terimi olduğundan $X \oplus Y$, M 'nin bir direkt toplam terimidir. Bu ispat benzer şekilde $n > 2$ için yapılabilir.

Teorem 3.3.5. M sonlu üretilmiş bir R -modül olsun. Bu takdirde M 'nin genelleştirilmiş $\oplus$ -tümlemiş olması için gerek ve yeter koşul M 'nin $\oplus$ -tümlemiş olmasıdır (Çalışıcı ve Türkmen, 2010).

İspat: $(\Rightarrow)$ M 'nin herhangi bir N alt modülünü alalım. M genelleştirilmiş $\oplus$ -tümlemiş olduğundan N 'nin M 'de direkt toplam terimi olacak şekilde bir K genelleştirilmiş tümleyeni vardır. Buradan $M = N + K$, $N \cap K \leq \text{Rad}K$ ve $M = K \oplus L$ olacak şekilde $K, L \leq M$ vardır. Teorem 2.2.13. gereğince K sonlu üretilmiştir. Sonuç 2.8.7.'den $\text{Rad}K \ll K$ elde edilir. Teorem 2.7.2.(i) gereğince $N \cap K \ll K$ olup K, N 'nin M 'de bir tümleyeni olur. Dolayısıyla M $\oplus$ -tümlemişdir.
 $(\Leftarrow)$ Açıktır.

3.4. Güçlü $\oplus$ -Tümlemiş ve Güçlü Rad- $\oplus$ -Tümlemiş Modüller

Tanım 3.4.1. M bir tümlemiş modül olsun. M 'nin her tümleyen alt modülü M 'nin bir direkt toplam terimi ise M 'ye bir güçlü $\oplus$ -tümlemiş modül denir (Nebiyev ve Pancar, 2011).

Sonuç 3.4.2. Güçlü $\oplus$ -tümlemiş modüller $\oplus$ -tümlemişdir (Nebiyev ve Pancar, 2011).

Teorem 3.4.3. M bir tümlemiş ve π -projektif modül ise M güçlü $\oplus$ -tümlemişdir (Nebiyev ve Pancar, 2011).

İspat: M 'nin herhangi V tümleyen alt modülünü alalım. M tümlemiş olduğundan V 'nin M 'de bir X tümleyeni vardır. Bu durumda $M = V + X$ ve $V \cap X \ll X$ olur. $V \cap X \ll X$ olduğundan Teorem 2.7.2.(ii)'den $V \cap X \ll M$ olup V, M 'de bir tümleyen alt modül olduğundan Önerme 3.1.5.(v)'ten $V \cap X \ll V$ olur. Bu durumda V ve X birbirlerinin tümleyenleri olup M π -projektif olduğundan Teorem 3.1.14.'ten $M = V \oplus X$ olur. Böylece V, M 'nin bir direkt toplam terimi olup M güçlü $\oplus$ -tümlemişdir.

Teorem 3.4.4. M bir güçlü $\oplus$ -tümlemiş modül ise M 'nin her direkt toplam terimi de güçlü $\oplus$ -tümlemişdir (Nebiyev ve Pancar, 2011).

İspat: L, M 'nin bir direkt toplam terimi ve $M = L \oplus T$ olsun. Bu durumda L tümlemiş olur. K, U 'nun L içinde bir tümleyeni olsun. Bu durumda Teorem 3.1.8.'den $K, U \oplus T$ 'nin M 'de bir tümleyeni olur. M güçlü $\oplus$ -tümlemiş olduğundan K, M 'nin bir direkt toplam terimidir. $M = K \oplus P$ olsun. Bu durumda

Modüler Kuraldan $L = L \cap M = L \cap (K \oplus P) = K \oplus (L \cap P)$ olup K, L 'nin bir direkt toplam terimi olur. Dolayısıyla L güçlü $\oplus$ -tümlenmiş olur.

Sonuç 3.4.5. Güçlü $\oplus$ -tümlenmiş modüller tamamen $\oplus$ -tümlenmiştirler (Nebiyev ve Pancar, 2011).

Teorem 3.4.6. Her $1 \leq i \leq n$ için M_i bir projektif modül olsun. Bu durumda $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ 'nin güçlü $\oplus$ -tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul her $1 \leq i \leq n$ için M_i 'nin güçlü $\oplus$ -tümlenmiş olmasıdır (Nebiyev ve Pancar, 2011).

İspat: $(\Rightarrow)$ $1 \leq i \leq n$ için $M_i, \bigoplus_{i=1}^n M_i$ 'nin bir direkt toplam terimi olduğundan Teorem 3.4.4.'ten M_i güçlü $\oplus$ -tümlenmiş olur.

$(\Leftarrow)$ $1 \leq i \leq n$ için M_i tümlenmiş olduğundan $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ tümlenmiştir. $1 \leq i \leq n$ için M_i projektif olduğundan $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ de projektiftir. Bu durumda her projektif modül π -projektif olduğundan Teorem 3.4.3.'ten $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ güçlü $\oplus$ -tümlenmiş olur.

Teorem 3.4.7. M bir tümlenmiş R -modül olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) M güçlü $\oplus$ -tümlenmiştir.
- (ii) M 'nin her tümleyen alt modülü bir direkt toplam terimi üzerindedir.
- (iii) (a) M 'nin her sıfırdan farklı tümleyen altmodülü M 'nin sıfırdan farklı bir direkt toplam terimini içerir.
- (b) M 'nin her tümleyen alt modülü M 'de bir maksimal direkt toplam terimi içerir (Nebiyev ve Pancar, 2011).

İspat: $(i) \Rightarrow (ii)$ Tanımlardan açıktır.

$(ii) \Rightarrow (i)$ V, M 'de bir tümleyen alt modül olsun. Kabul edelim ki V, U 'nun M 'de bir tümleyeni olsun. Hipotezden V, M 'nin bir K direkt toplam terimi üzerindedir. Burada $M = U + V$ olduğundan Teorem 3.1.12. gereği $M = U + K$ olup $K \leq V$ ve V, U 'nun M 'de bir tümleyeni olduğundan $V = K$ olur. O halde V, M 'nin bir direkt toplam terimi olup M güçlü $\oplus$ -tümlenmiş olur.

(i) $\Rightarrow$ (iii) Tanımlardan açıktır.

(iii) $\Rightarrow$ (i) V , U 'nun M 'de bir tümleyeni ve X , V 'nin M 'de maksimal direkt toplam terimi olan bir alt modül olsun. Kabul edelim ki $M = X \oplus Y$ olsun. Bu durumda $V = X \oplus (V \cap Y)$ olup Teorem 3.1.8.'den $V \cap Y$, $U + X$ 'in M 'de bir tümleyeni olur. Eğer $V \cap Y$ sıfır değilse (iii,a)'dan $N \leq V \cap Y$ olan M 'nin sıfırdan farklı bir N direkt toplam terimi vardır. Bu durumda N , Y 'nin de bir direkt toplam terimi olup $M = X \oplus Y$ olduğundan $X \oplus N$, M 'nin bir direkt toplam terimi olur. Burada $X \oplus N \leq V$ olduğundan bu durum X 'in seçilişi ile çelişir. Yani $V \cap Y = 0$ olup $V = X$ bulunur. Bu durumda V bir direkt toplam terimi olup M güçlü $\oplus$ -tümlenmiştir.

Tanım 3.4.8. M bir *Rad*-tümlenmiş modül olsun. M 'de her *Rad*-tümleyen alt modül M 'nin bir direkt toplam terimi ise M 'ye bir güçlü *Rad*- $\oplus$ -tümlenmiş modül denir (Talebi vd., 2014).

3.5. g - Tümlenmiş Modüller

Tanım 3.5.1. M bir R -modül ve $N \leq M$ olsun. Eğer $N \cap K = 0$ olan her $K \leq M$ için $K = 0$ ise N 'ye M 'nin bir büyük (veya önemli) alt modülü denir ve $N \leq M$ ile gösterilir (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 3.5.2. M bir R -modül olsun. K , M 'nin bir alt modülü olmak üzere $M = K + T$ olan her $T \leq M$ için $T = M$ ise K alt modülüne M 'nin bir genelleştirilmiş küçük (veya g - küçük) alt modülü denir ve $K \ll_g M$ ile gösterilir (Koşar vd., 2015).

Her küçük alt modülün bir genelleştirilmiş küçük alt modül olduğu açıktır. Ancak, tersi her zaman doğru değildir.

Tanım 3.5.3. M bir R -modül olsun. M 'nin her öz alt modülü M 'de bir genelleştirilmiş küçük alt modül ise M modülüne bir genelleştirilmiş oyuk (veya g - oyuk) modül denir (Koşar vd., 2015).

Her oyuk modülün bir genelleştirilmiş oyuk modül olduğu açıktır. Ancak, tersi her zaman doğru değildir.

Yardımcı Teorem 3.5.4. M bir R -modül olsun. $K, L, N, T \leq M$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- (1) $K \leq N$ ve N, M 'nin bir genelleştirilmiş küçük alt modülü ise K da M 'nin bir genelleştirilmiş küçük alt modülüdür.
- (2) $K \subset N$ ve K, N 'nin bir genelleştirilmiş küçük alt modülü ise K, N alt modülünü içeren M 'nin alt modüllerinde de bir genelleştirilmiş küçük alt modüldür.
- (3) S bir R -modül olmak üzere $f : M \rightarrow S$ bir R -modül homomorfizması olsun. $K \ll_g M$ ise $f(K) \ll_g f(M)$ 'dir.
- (4) $K \ll_g L$ ve $N \ll_g T$ ise $K + N \ll_g L + T$ 'dir (Koşar vd., 2015).

İspat: (1) $M = K + T$ olacak şekilde herhangi bir $T \leq M$ alalım. Bu takdirde $K \leq N$ olduğundan $N + T = M$ olup $N \ll_g M$ olduğundan $T = M$ 'dir. O halde $K \ll_g M$ olur.

(2) L, M 'nin N 'yi içeren bir alt modülü olsun. $K + T = L$ olacak şekilde herhangi bir $T \leq L$ alt modülünü alalım. $K + T = L$ eşitliğinin her iki tarafının N ile arakesitini alırsak $(K + T) \cap N = L \cap N$ olup $N \leq L$ ve Modüler Kuraldan $K + (T \cap N) = N$ olur. Burada $T \leq L$ olduğundan $T \cap N \leq N$ olur. $K \ll_g N$ olduğundan $T \cap N = N$ 'dir. Dolayısıyla $N \subset T$ dir. $K + T = L$ ve $K \leq N \leq T$ 'den $T = L$ elde edilir. O halde $K \ll_g L$ olur.

(3) $f(K) + L = f(M)$ olacak şekilde herhangi bir $L \leq f(M)$ alalım. Bu takdirde $f^{-1}(f(K) + L) = M$ yazılabilir. Buradan $K + f^{-1}(L) = M$ 'dir. Burada $L \leq f(M)$ olduğundan $f^{-1}(L) \leq M$ olduğu gösterilebilir. $K \ll_g M$ olduğundan $f^{-1}(L) = M$ olup $L = f(M)$ olduğu görülür. O halde $f(K) \ll_g f(M)$ bulunur.

(4) $K + N + S = L + T$ olan herhangi $S \leq L + T$ alalım. $S \leq L + T$ olduğundan $N + S \leq L + T$ olur. $K \ll_g L$ ve $L \leq L + T$ olduğundan (2) şikkından $K \ll_g L + T$ olup $N + S = L + T$ olur. $N \ll_g T$ ve $T \leq L + T$ olduğundan (2) şikkından $N \ll_g L + T$ olup $S \leq L + T$ olduğundan $S = L + T$ olur. Böylece $K + N \ll_g L + T$ olup istenen elde edilir.

Sonuç 3.5.5. M bir R -modül ve $K \leq N \leq M$ olsun. $N \ll_g M$ ise $N/K \ll_g M/K$ dır (Koşar vd., 2015).

Sonuç 3.5.6. M bir R -modül ve $K \ll_g M$ ve $L \leq M$ olsun. Bu takdirde $(K+L)/L \ll_g M/L$ 'dir (Koşar vd., 2015).

Tanım 3.5.7. M bir R -modül olsun. $U, V \leq M$ olmak üzere $M = U + V$ ve $M = U + T$ olan her $T \leq V$ için $T = V$ oluyorsa V 'ye U 'nun M 'de bir g -tümleyeni denir. M 'nin her alt modülü M 'de bir g -tümleyene sahip ise M 'ye bir g -tümlemiş modül denir (Koşar vd., 2015).

Tümlemiş modüller g -tümlemiştir.

Yardımcı Teorem 3.5.8. M bir R -modül olsun. $U \leq M$ ve $V \leq M$ olmak üzere V modülünün U 'nun M 'de bir g -tümleyeni olması için gerek ve yeter koşul $M = U + V$ ve $U \cap V \ll_g V$ olmasıdır (Koşar vd., 2015).

İspat: $(\Rightarrow)$ $U \cap V + T = V$ ve $T \leq V$ olsun. Bu durumda $M = U + V = U + U \cap V + T = U + T$ olur. V , U 'nun M 'de bir g -tümleyeni ve $T \leq V$ olduğundan $T = V$ 'dir. Buradan $U \cap V \ll_g V$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$ $M = U + V$ ve $U \cap V \ll_g V$ olsun. $T \leq V$ olmak üzere $M = U + T$ olsun. $M = U + T$, $T \leq V$ ve Modüler Kuraldan $V = V \cap M = V \cap (U + T) = U \cap V + T$ yazılır. $U \cap V \ll_g V$ olduğundan $T = V$ 'dir. Buradan, V modülü U 'nun M 'de bir g -tümleyeni olur.

Yardımcı Teorem 3.5.9. M bir R -modül, $M_1 \leq M$, $U \leq M$ ve M_1 bir g -tümlemiş modül olsun. $M_1 + U$, M 'de bir g -tümleyene sahip ise U da M 'de bir g -tümleyene sahiptir (Koşar vd., 2015).

İspat: X , M 'de $M_1 + U$ 'nun bir g -tümleyeni olsun. Yardımcı Teorem 3.5.8.'den $M_1 + U + X = M$ ve $(M_1 + U) \cap X \ll_g X$ olur. M_1 bir g -tümlemiş modül olduğundan $(U + X) \cap M_1$, M_1 'de bir Y g -tümleyene sahiptir. Yardımcı

Teorem 3.5.8.'den $M_1 \cap (U + X) + Y = M_1$ ve $M_1 \cap (U + X) \cap Y \ll_g Y$ olur.

Buradan

$$M = M_1 \cap (U + X) + Y + U + X = U + X + Y$$

ve Yardımcı Teorem 3.5.4.(4)'ten

$U \cap (X + Y) \leq X \cap (U + Y) + Y \cap (U + X) \leq X \cap (M_1 + U) + Y \cap M_1 \cap (U + X) \ll_g X + Y$ olur. Böylece $X + Y$, M 'de U 'nun bir g -tümleyenidir.

Teorem 3.5.10. $M = M_1 + M_2$ olsun. M_1 ve M_2 g -tümlenmiş modüller ise M de bir g -tümlenmiş modüldür (Koşar vd., 2015).

İspat: Herhangi $U \leq M$ alalım. Burada 0 , $M_1 + M_2 + U$ 'nun M 'de bir g -tümleyeni olur. M_2 g -tümlenmiş olduğundan Yardımcı Teorem 3.5.9.'dan $M_1 + U$, M 'de bir g -tümleyene sahip olur. Bu durumda M_1 g -tümlenmiş olduğundan yine Yardımcı Teorem 3.5.9.'dan U , M 'de bir g -tümleyene sahip olur. O halde M g -tümlenmiş olup istenen elde edilir.

Yardımcı Teorem 3.5.11. M bir R -modül olsun. $X \leq U \leq M$ ve V , U 'nun M 'de bir g -tümleyeni ise $(V + X)/X$, M/X 'te U/X 'in bir g -tümleyenidir (Koşar vd., 2015).

İspat: V , U 'nun M 'de bir g -tümleyeni olduğundan $M = U + V$ ve $U \cap V \ll_g V$ 'dir. Buradan Sonuç 3.5.6.'dan $(U \cap V + X)/X \ll_g (V + X)/X$ bulunur. $M = U + V$ olduğundan $M/X = (U + V)/X = U/X + (V + X)/X$ ve

$$U/X \cap (V + X)/X = (U \cap V + X)/X \ll_g (V + X)/X$$

olduğu kolayca görülür. Bu nedenle $(V + X)/X$, M/X 'te U/X 'in bir g -tümleyenidir.

Teorem 3.5.12. M bir g -tümlenmiş modül ise M nin her bölüm modülü de g -tümlenmiştir (Koşar vd., 2015).

İspat: Yardımcı Teorem 3.5.11.'den açıktır.

Sonuç 3.5.13. M bir g -tümlenmiş modül ise M 'nin homomorfik görüntüsü de g -tümlenmiştir (Koşar vd., 2015).

Teorem 3.5.14. M bir R -modül, K, M 'nin bir direkt toplam terimi ve $T \leq K$ olsun. Bu durumda $T \ll_g K$ olması için gerek ve yeter koşul $T \ll_g M$ olmasıdır (Koşar vd., 2015).

İspat: $(\Rightarrow)$ Yardımcı Teorem 3.5.4.'ten açıktır.

$(\Leftarrow)$ $T \ll_g M$ olsun. Kabul edelim ki $M = K \oplus Y$ olsun. $\pi: M \rightarrow K$ bir kanonik projeksiyon olmak üzere Yardımcı Teorem 3.5.4.'ten $T = \pi(T) \ll_g \pi(M) = K$ elde edilir.

Tanım 3.5.15. M bir R -modül ve $T \leq M$ olsun. T, M 'de hem maksimal, hem de büyük ise T 'ye M 'nin bir genelleştirilmiş maksimal (veya g -maksimal) alt modülü denir. M 'nin tüm genelleştirilmiş maksimal alt modüllerinin kesişimine M 'nin genelleştirilmiş radikali (veya g -radikali) denir ve $Rad_g M$ ile gösterilir. M genelleştirilmiş maksimal alt modüllere sahip değil ise $Rad_g M = M$ olarak tanımlanır (Koşar vd, 2015).

Yardımcı Teorem 3.5.16. M bir R -modül olsun. M en az bir genelleştirilmiş maksimal alt modüle sahip ise $Rad_g M = \sum_{L \ll_g M} L$ 'dir (Koşar vd., 2015).

İspat: $L \ll_g M$ olsun. T, M 'nin bir genelleştirilmiş maksimal alt modülü olmak üzere kabul edelim ki $L \not\subset T$ olsun. Bu durumda T maksimal olduğundan $L + T = M$ yazılır. $L \ll_g M$ ve $T \trianglelefteq M$ olduğundan $T = M$ 'dir. Bu ise T 'nin maksimal olması ile çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. Yani L, M 'nin genelleştirilmiş her maksimal alt modülünde içerilir. Buradan $\sum_{L \ll_g M} L \subset Rad_g M$ elde edilir.

$x \in Rad_g M$ olsun. Kabul edelim ki Rx, M 'de genelleştirilmiş küçük olmasın ve $\Omega = \{T \leq M \mid x \notin T, T \trianglelefteq M, Rx + T = M\}$ kümesini tanımlayalım. Rx, M 'de genelleştirilmiş küçük olmadığından $\Omega \neq \emptyset$ yazılır. Ω 'da kapsama bağıntısına göre her zincirin bir üst sınıra sahip olduğu açıktır. Bu nedenle Zorn Lemması'ndan Ω

bir K maksimal elemanı içerir. Kolayca gösterilebilir ki K , M 'nin bir genelleştirilmiş maksimal alt modülüdür. $K \in \Omega$ olduğundan $x \notin K$ 'dir. Ayrıca $Rad_g M \subset K$ olduğundan $x \notin Rad_g M$ olur ki bu da $x \in Rad_g M$ olması ile çelişir. O halde kabulümüz yanlış olup $Rx \ll_g M$ 'dir. Sonuç olarak, $Rad_g M \subset \sum_{L \ll_g M} L$ olur.

Buradan da $Rad_g M = \sum_{L \ll_g M} L$ elde edilir.

Sonuç 3.5.17. M genelleştirilmiş maksimal alt modüllere sahip değil ise $Rad_g M = \sum_{L \ll_g M} L$ 'dir (Koşar vd., 2015).

İspat: Yardımcı Teorem 3.5.16.'nın ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Sonuç 3.5.18. M bir R -modül olsun. Bu takdirde $Rad M \leq Rad_g M$ 'dir (Koşar vd., 2015).

Örnek 3.5.19. Sıfıra eşit olmayan basit M R -modülü için $Rad M = 0 \neq M = Rad_g M$ olur.

Teorem 3.5.20. M bir R -modül olsun. $Rad_g M \neq M$ olmak üzere aşağıdaki şartlar denktir:

(i) M bir genelleştirilmiş oyuk modüldür.

(ii) M bir lokal modüldür.

(iii) M bir oyuk modüldür (Koşar vd., 2015).

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) M bir genelleştirilmiş oyuk modül ve T , M 'nin herhangi öz alt modülü olsun. O zaman $T \ll_g M$ ve Yardımcı Teorem 3.5.16.'dan $T \leq Rad_g M$ olur. $Rad_g M \neq M$ olduğundan M bir lokal modül olur.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Açıktır.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Açıktır.

Teorem 3.5.21. M bir sonlu üretilmiş R -modül ve M en az bir öz büyük alt modüle sahip ise M 'nin her öz büyük alt modülü bir genelleştirilmiş maksimal alt modülde içerilir (Koşar vd., 2015).

İspat: K , M 'nin herhangi öz büyük alt modülü olsun. M sonlu üretilmiş olduğundan K bir T maksimal alt modülde içerilir ve $K \trianglelefteq M$ olduğundan $T \trianglelefteq M$ olur.

Teorem 3.5.22. M bir R -modül ve $Rad_g M \neq M$ olsun. M 'nin her öz büyük alt modülü bir genelleştirilmiş maksimal alt modülde içeriliyorsa $Rad_g M \ll_g M$ 'dir (Koşar vd., 2015).

İspat: $M = Rad_g M + T$ olan herhangi bir $T \trianglelefteq M$ alalım. Eğer $T \neq M$ olsa hipotezden $T \leq N$ olacak şekilde M 'nin en az bir N genelleştirilmiş maksimal alt modülü vardır. Burada $Rad_g M \leq N$ olduğundan $M = Rad_g M + T \leq N$ olur ki bu da N 'nin maksimalliği ile çelişir. O halde $T = M$ olup $Rad_g M \ll_g M$ olur.

Yardımcı Teorem 3.5.23. (1) M bir R -modül ise her $m \in Rad_g M$ için $Rm \ll_g M$ olur.

(2) $N \leq M$ ise $Rad_g N \leq Rad_g M$ olur.

(3) $K, L \leq M$ ise $Rad_g K + Rad_g L \leq Rad_g (K + L)$ olur.

(4) $f : M \rightarrow N$ bir R -modül homomorfizması ise $f(Rad_g M) \leq Rad_g N$ olur.

(5) $K, L \leq M$ ise $\frac{Rad_g K + L}{L} \leq Rad_g \frac{K + L}{L}$ olur (Koşar vd, 2018).

İspat: Yardımcı Teorem 3.5.4. ve Yardımcı Teorem 3.5.16.'dan açıktır.

Yardımcı Teorem 3.5.24. $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ ise $Rad_g M = \bigoplus_{i \in I} Rad_g M_i$ olur (Koşar vd., 2018).

İspat: $M_i \leq M$ olduğundan Yardımcı Teorem 3.5.23.(2)'den $Rad_g M_i \leq Rad_g M$ ve $\bigoplus_{i \in I} Rad_g M_i \leq Rad_g M$ olur. $x \in Rad_g M$ olsun. Yardımcı Teorem 3.5.23.(1)'den $Rx \ll_g M$ olur. $x \in M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ olduğundan $x = x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_k}$ olacak şekilde $i_1, i_2, \dots, i_k \in I$ ve $x_{i_1} \in M_{i_1}, x_{i_2} \in M_{i_2}, \dots, x_{i_k} \in M_{i_k}$ vardır. $Rx \ll_g M$ ve Yardımcı Teorem 3.5.4.(3)'ten $\pi_{i_t} (t=1, 2, \dots, k)$ kanonik

projeksiyonu altında $Rx_i = \pi_i(Rx) \ll_g M_i$ olur. Bu durumda $x_i \in \text{Rad}_g M_i$ ($i=1,2,\dots,k$) olup $x = x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_k} \in \bigoplus_{i \in I} \text{Rad}_g M_i$ olur. Böylece $\text{Rad}_g M \leq \bigoplus_{i \in I} \text{Rad}_g M_i$ olup ayrıca $\bigoplus_{i \in I} \text{Rad}_g M_i \leq \text{Rad}_g M$ olduğundan $\text{Rad}_g M = \bigoplus_{i \in I} \text{Rad}_g M_i$ olur.

Tanım 3.5.25. M bir R -modül olsun. M 'nin her alt modülü M 'de bir direkt toplam olan bir g -tümleyene sahip ise M 'ye bir $\oplus - g$ - tümlenmiş modül denir (Nebiyev ve Ökten, 2018).

3.6. Bol g - Tümlenmiş Modüller

Tanım 3.6.1. M bir R -modül ve $U \leq M$ olsun. $M = U + V$ olan her $V \leq M$ için U, M 'de $T \leq V$ olacak şekilde bir T g - tümleyene sahip ise U, M 'de bol g - tümleyenlere sahiptir denir. M 'nin her alt modülü M 'de bol g - tümleyenlere sahip ise M 'ye bir bol g - tümlenmiş modül denir (Koşar vd., 2015).

Teorem 3.6.2. M bir R -modül, $U_1, U_2 \leq M$ ve $M = U_1 + U_2$ olsun. U_1 ve U_2, M 'de bol g - tümleyenlere sahip ise $U_1 \cap U_2$ de M 'de bol g - tümleyenlere sahiptir (Koşar vd., 2015).

İspat: $U_1 \cap U_2 + T = M$ olsun. Bu durumda $M = U_1 + U_2 \cap T = U_2 + U_1 \cap T$ olduğu gösterilebilir. U_1 ve U_2, M 'de bol g - tümleyenlere sahip olduğundan $U_1, V_1 \leq U_2 \cap T$ olan bir V_1 g - tümleyenine ve $U_2, V_2 \leq U_1 \cap T$ olan bir V_2 g - tümleyenine sahiptir. $M = U_1 + V_1$ ve $V_1 \leq U_2$ olduğundan Modüler Kuraldan $U_2 = U_2 \cap (U_1 + V_1) = U_1 \cap U_2 + V_1$ 'dir. Benzer şekilde, $U_1 = U_1 \cap U_2 + V_2$ olur. O halde,

$$M = U_1 + U_2 = U_1 \cap U_2 + V_2 + U_1 \cap U_2 + V_1 = U_1 \cap U_2 + V_1 + V_2$$

ve

$$U_1 \cap U_2 \cap (V_1 + V_2) = U_1 \cap (V_1 + U_2 \cap V_2) = U_1 \cap V_1 + U_2 \cap V_2 \ll_g V_1 + V_2$$

olur. Bu nedenle, $V_1 + V_2, U_1 \cap U_2$ 'nin M 'de bir g - tümleyenidir. Burada $V_1 + V_2 \leq T$ olduğundan $U_1 \cap U_2, M$ 'de bol g - tümleyenlere sahiptir.

Teorem 3.6.3. M bir bol g – tümlenmiş modül ise M ’nin her bölüm modülü de bol g – tümlenmiştir (Koşar vd., 2015).

İspat: Açıktır.

Sonuç 3.6.4. M bir bol g – tümlenmiş modül ise M ’nin homomorfik görüntüsü de bol g – tümlenmiştir (Koşar vd., 2015).

İspat: Teorem 3.6.3.’ten açıktır.

Teorem 3.6.5. M bir R -modül olsun. M ’nin her alt modülü g – tümlenmiş ise M bol g – tümlenmiştir (Koşar vd., 2015).

İspat: $M = U + V$ olsun. Hipotezden V g – tümlenmiş olup $U \cap V$ ’nin V ’de bir X g – tümleyeni vardır. Burada $V = U \cap V + X$ ve $U \cap X = U \cap V \cap X \ll_g X$ olur. O halde $M = U + V = U + U \cap V + X = U + X$ ve $U \cap X \ll_g X$ olup X , U ’nun M ’de bir g – tümleyeni olur. Ayrıca $X \leq V$ ’dir. O halde M bol g – tümlenmiş olup istenen elde edilir.

Yardımcı Teorem 3.6.6. M bir π – projektif ve g – tümlenmiş modül ise M bir bol g – tümlenmiş modüldür (Koşar vd., 2015).

İspat: $M = U + V$ ve X , U ’nun M de bir g – tümleyeni olsun. M π – projektif ve $M = U + V$ olduğundan $\text{Im } f \subset V$ ve $\text{Im}(1 - f) \subset U$ olan bir $f : M \rightarrow M$ R – modül homomorfizması vardır. Buradan

$$M = f(M) + (1 - f)(M) = f(U) + f(X) + U = U + f(X)$$

yazılır. Kabul edelim ki $a \in U \cap f(X)$ olsun. $a \in f(X)$ olduğundan $a = f(x)$ olacak şekilde $\exists x \in X$ vardır. $a = f(x) = f(x) - x + x = x - (1 - f)(x)$ ve $(1 - f)(x) \in U$ olduğundan $x = a + (1 - f)(x) \in U$ olup $x \in U$ bulunur. Bu nedenle $x \in U \cap X$ olup buradan $a = f(x) \in f(U \cap X)$ olur ve $U \cap f(X) \leq f(U \cap X) \ll_g f(X)$ elde edilir. Buradan $f(X)$, U ’nun M ’de bir g – tümleyenidir. Ayrıca $f(X) \subset V$ dir. Bu nedenle M bol g – tümlenmiştir.

Aşağıdaki sonuç Yardımcı Teorem 3.6.6.’dan kolaylıkla elde edilebilir.

Sonuç 3.6.7. M bir projektif ve g –tümlenmiş modül ise M bir bol g –tümlenmiş modüldür (Koşar vd., 2015).

3.7. g – Radikal Tümlenmiş Modüller

Tanım 3.7.1. M bir R -modül ve $U, V \leq M$ olsun. $M = U + V$ ve $U \cap V \leq \text{Rad}_g V$ ise V 'ye M 'de U 'nun bir genelleştirilmiş radikal tümleyeni (kısaca g –radikal tümleyeni) denir. M 'nin her alt modülü M 'de bir genelleştirilmiş radikal tümleyene sahip ise M 'ye bir genelleştirilmiş radikal tümlenmiş (kısaca g –radikal tümlenmiş) modül denir (Koşar vd., 2018).

Her g –tümlenmiş modül g –radikal tümlenmiştir. Ancak tersi her zaman doğru değildir.

Yardımcı Teorem 3.7.2. M bir R -modül ve $U, V \leq M$ olsun. V, M 'de U 'nun bir g –radikal tümleyeni olması için gerek ve yeter koşul $M = U + V$ ve her $m \in U \cap V$ için $Rm \ll_g V$ olmasıdır (Koşar vd., 2018).

İspat: $(\Rightarrow)$ V, M 'de U 'nun bir g –radikal tümleyeni olduğundan $M = U + V$ ve $U \cap V \leq \text{Rad}_g V$ olur. $m \in U \cap V$ olsun. $U \cap V \leq \text{Rad}_g V$ olduğundan $m \in \text{Rad}_g V$ olur. Yardımcı Teorem 3.5.23.(1)'den $Rm \ll_g V$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$ Her $m \in U \cap V$ için $Rm \ll_g V$ olduğundan Yardımcı Teorem 3.5.16.'dan $U \cap V \leq \text{Rad}_g V$ olup V, M 'de U 'nun bir g –radikal tümleyenidir.

Yardımcı Teorem 3.7.3. M bir R -modül, $M_1, U, X \leq M$ ve $Y \leq M_1$ olsun. X, M 'de $M_1 + U$ 'nun bir g –radikal tümleyeni ve Y, M_1 'de $(U + X) \cap M_1$ 'in bir g –radikal tümleyeni ise $X + Y$ de M 'de U 'nun bir g –radikal tümleyenidir (Koşar vd., 2018).

İspat: X, M 'de $M_1 + U$ 'nun bir g –radikal tümleyeni olduğundan $M = M_1 + U + X$ ve $(M_1 + U) \cap X \leq \text{Rad}_g X$ 'dir. Y, M_1 'de $(U + X) \cap M_1$ 'in bir g –radikal tümleyeni olduğundan

$$M_1 = (U + X) \cap M_1 + Y \text{ ve } (U + X) \cap Y = (U + X) \cap M_1 \cap Y \leq \text{Rad}_g Y$$

olur. Buradan $M = M_1 + U + X = (U + X) \cap M_1 + Y + U + X = U + X + Y$ ve

Yardımcı Teorem 3.5.23.(3)'ten

$U \cap (X + Y) \leq (U + X) \cap Y + (U + Y) \cap X \leq \text{Rad}_g Y + (M_1 + U) \cap X \leq \text{Rad}_g Y + \text{Rad}_g X \leq \text{Rad}_g (X + Y)$ yazılır. Bu nedenle $X + Y$, M 'de J 'nin bir g -radikal tümleyenidir.

Yardımcı Teorem 3.7.4. $M = M_1 + M_2$ olsun. M_1 ve M_2 g -radikal tümlenmiş ise M de g -radikal tümlenmiştir (Koşar vd., 2018).

İspat: $U \leq M$ olsun. 0 , M 'de $M_1 + M_2 + U$ 'nun bir g -radikal tümleyenidir.

M_1 g -radikal tümlenmiş olduğundan M_1 'de $(M_2 + U) \cap M_1 = (M_2 + U + 0) \cap M_1$ 'in bir X g -radikal tümleyeni vardır. Yardımcı Teorem 3.7.3.'ten $X + 0 = X$, M 'de $M_2 + U$ 'nun bir g -radikal tümleyenidir. M_2 g -radikal tümlenmiş olduğundan M_2 'de $(U + X) \cap M_2$ 'nin bir Y g -radikal tümleyeni vardır. Yardımcı Teorem 3.7.3.'ten $X + Y$, M 'de U 'nun bir g -radikal tümleyenidir.

Sonuç 3.7.5. $M = M_1 + M_2 + \dots + M_k$ olsun. Her $i = 1, 2, \dots, k$ için M_i g -radikal tümlenmiş ise M de g -radikal tümlenmiştir (Koşar vd., 2018).

İspat: Yardımcı Teorem 3.7.4.'ten açıktır.

Yardımcı Teorem 3.7.6. M bir R -modül, $U, V \leq M$ ve $K \leq U$ olsun. V , M 'de U 'nun bir g -radikal tümleyeni ise $(V + K)/K$, M/K 'da U/K 'nın bir g -radikal tümleyenidir (Koşar vd., 2018).

İspat: V , M 'de U 'nun bir g -radikal tümleyeni olduğundan $M = U + V$ ve $U \cap V \leq \text{Rad}_g V$ 'dir. $M/K = U/K + (V + K)/K$ ve Yardımcı Teorem 3.5.23.(5)'ten

$(U/K) \cap ((V + K)/K) = (U \cap V + K)/K \leq (\text{Rad}_g V + K)/K \leq \text{Rad}_g [(V + K)/K]$ olur. Bu nedenle $(V + K)/K$, M/K 'da U/K 'nın bir g -radikal tümleyeni olur.

Yardımcı Teorem 3.7.7. g -radikal tümlenmiş bir modülün her bölüm modülü de g -radikal tümlenmiştir (Koşar vd., 2018).

İspat: Yardımcı Teorem 3.7.6.'dan açıktır.

Sonuç 3.7.8. g –radikal tümlenmiş bir modülün homomorfik görüntüsü de g –radikal tümlenmiştir (Koşar vd., 2018).

İspat: Yardımcı Teorem 3.7.7.'den açıktır.

Yardımcı Teorem 3.7.9. M bir g –radikal tümlenmiş modül olsun. Bu durumda her sonlu M -üretilmiş modül g –radikal tümlenmiştir (Koşar vd., 2018).

İspat: Sonuç 3.7.5. ve Sonuç 3.7.8.'den açıktır.

Sonuç 3.7.10. R bir halka olsun. ${}_R R$ 'nin g –radikal tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul her sonlu üretilmiş R -modülün g –radikal tümlenmiş olmasıdır (Koşar vd, 2018).

İspat: Yardımcı Teorem 3.7.9.'dan açıktır.

3.8. Bol g –Radikal Tümlenmiş Modüller

Tanım 3.8.1. M bir R -modül ve $U \leq M$ olsun. $M = U + V$ olan her $V \leq M$ için U, M 'de $V' \leq V$ olan bir V' g -radikal tümleyenine sahip ise U, M 'de bol g -radikal tümleyenlere sahiptir denir. M 'nin her alt modülü M 'de bol g -radikal tümleyenlere sahip ise M 'ye bir bol g -radikal tümlenmiş modül denir (Koşar vd., 2021).

Her bol g -radikal tümlenmiş modül g -radikal tümlenmiştir.

Teorem 3.8.2. $M = M_1 + M_2 + \dots + M_n$ olsun. Her $i = 1, 2, \dots, n$ için M_i bol g -radikal tümlenmiş ise M g -radikal tümlenmiştir (Koşar vd., 2021).

İspat: Her $i = 1, 2, \dots, n$ için M_i bol g -radikal tümlenmiş olduğundan M_i g -radikal tümlenmiştir. Sonuç 3.7.5.'ten M g -radikal tümlenmiştir.

Teorem 3.8.3. M bir bol g -tümlenmiş R -modül ise M bol g -radikal tümlenmiştir (Koşar vd., 2021).

İspat: $M = U + V$ olsun. M bol g -tümlenmiş olduğundan U, M 'de $V' \leq V$ olan bir V' g -tümleyenine sahiptir. Buradan $M = U + V'$ ve $U \cap V' \ll_g V'$ yazılır. $U \cap V' \ll_g V'$ olduğundan Yardımcı Teorem 3.5.16.'dan $U \cap V' \leq \text{Rad}_g V'$ olup V' ,

M 'de U 'nın bir g -radikal tümleyeni olur. Ayrıca $V' \leq V$ olduğundan M bol g -radikal tümlenmiştir.

Teorem 3.8.4. M bir R -modül, $U_1, U_2 \leq M$ ve $M = U_1 + U_2$ olsun. U_1 ve U_2 M 'de bol g -radikal tümleyenlere sahip ise $U_1 \cap U_2$ de M 'de bol g -radikal tümleyenlere sahiptir (Koşar vd., 2021).

İspat: $U_1 \cap U_2 + T = M$ olsun. Teorem 2.2.20.'den $M = U_1 + U_2 \cap T = U_2 + U_1 \cap T$ yazılır. U_1 ve U_2 , M 'de bol g -radikal tümleyenlere sahip olduğundan U_1 , M 'de $V_1 \leq U_2 \cap T$ olan bir V_1 g -radikal tümleyenine, U_2 de M 'de $V_2 \leq U_1 \cap T$ olan bir V_2 g -radikal tümleyenine sahiptir. $M = U_1 + V_1$ ve $V_1 \leq U_2$ olduğundan Modüler Kuraldan $U_2 = U_2 \cap (U_1 + V_1) = U_1 \cap U_2 + V_1$ yazılır. Benzer şekilde $U_1 = U_1 \cap U_2 + V_2$ olur. Bu durumda

$$M = U_1 + U_2 = U_1 \cap U_2 + V_2 + U_1 \cap U_2 + V_1 = U_1 \cap U_2 + V_1 + V_2$$

ve Yardımcı Teorem 3.5.23.'ten

$$U_1 \cap U_2 \cap (V_1 + V_2) = U_1 \cap (V_1 + U_2 \cap V_2) = U_1 \cap V_1 + U_2 \cap V_2 \leq \text{Rad}_g V_1 + \text{Rad}_g V_2 \leq \text{Rad}_g (V_1 + V_2)$$

olur. Buradan $V_1 + V_2$, $U_1 \cap U_2$ 'nin M 'de bir g -radikal tümleyeni olur. Ayrıca $V_1 + V_2 \leq T$ 'dir. O halde $U_1 \cap U_2$, M 'de bol g -radikal tümleyenlere sahiptir.

Teorem 3.8.5. Bir bol g -radikal tümlenmiş modülün her bölüm modülü de bol g -radikal tümlenmiştir (Koşar vd, 2021).

İspat: M herhangi bir bol g -radikal tümlenmiş modül ve $K \leq M$ olsun. $U/K, V/K \leq M/K$ olmak üzere ve $M/K = U/K + V/K$ ise $M = U + V$ ve M bol g -radikal tümlenmiş olduğundan U 'nın M 'de $T \leq V$ olan bir T g -radikal tümleyeni vardır. Yardımcı Teorem 3.7.6.'dan $(T + K)/K$, M/K 'da U/K 'nın bir g -radikal tümleyenidir. Ayrıca $(T + K)/K \leq V/K$ olup U/K , M/K 'da bol g -radikal tümleyenlere sahiptir ve M/K bol g -radikal tümlenmiştir.

Sonuç 3.8.6. Bir bol g -radikal tümlenmiş modülün homomorfik görüntüsü de bol g -radikal tümlenmiştir (Koşar vd, 2021).

İspat: Teorem 3.8.5.'ten açıktır.

Teorem 3.8.7. M bir R -modül olsun. M 'nin her alt modülü g -radikal tümlenmiş ise M bol g -radikal tümlenmiştir (Koşar vd, 2021).

İspat: $U, V \leq M$ olmak üzere $M = U + V$ olsun. Hipotezden V g -radikal tümlenmiş ve $U \cap V$, V 'de bir T g -radikal tümleyenine sahiptir. Buradan $V = U \cap V + T$ ve $U \cap V \cap T \leq \text{Rad}_g T$ yazılır. Bu durumda

$$M = U + V = U + U \cap V + T = U + T$$

ve $U \cap T = U \cap V \cap T \leq \text{Rad}_g T$ olup T , U 'nun M 'de bir g -radikal tümleyeni olur. Ayrıca $T \leq V$ 'dir. O halde U , M 'de bol g -radikal tümleyenlere sahip olup M bol g -radikal tümlenmiştir.

Teorem 3.8.8. R herhangi bir halka olsun. Her R -modülün g -radikal tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul her R -modülün bol g -radikal tümlenmiş olmasıdır (Koşar vd, 2021).

İspat: $(\Rightarrow)$ M bir R -modül olsun. Her R -modül g -radikal tümlenmiş olduğundan M 'nin her alt modülü g -radikal tümlenmiştir. O halde Teorem 3.8.7.'den M bol g -radikal tümlenmiştir.

$(\Leftarrow)$ Açıktır.

Teorem 3.8.9. M bir π -projektif ve g -radikal tümlenmiş modül ise M bol g -radikal tümlenmiştir (Koşar vd, 2021).

İspat: $M = U + V$ ve X , M 'de U 'nun bir g -radikal tümleyeni olsun. M π -projektif ve $M = U + V$ olduğundan $\text{Görf} \subset V$ ve $\text{Gör}(1-f) \subset U$ olan bir $f : M \rightarrow M$ R -modül homomorfizması vardır. Buradan

$$M = f(M) + (1-f)(M) = f(U) + f(X) + U = U + f(X)$$

yazılır. Kabul edelim ki $a \in U \cap f(X)$ olsun. $a \in f(X)$ olduğundan $a = f(x)$ olacak şekilde $\exists x \in X$ vardır. $a = f(x) = f(x) - x + x = x - (1-f)(x)$ ve $(1-f)(x) \in U$ olduğundan $x = a + (1-f)(x) \in U$ olur. Buradan $x \in U \cap X$ ve $a = f(x) \in f(U \cap X)$ olup $U \cap f(X) \leq f(U \cap X) \leq f(\text{Rad}_g X) \leq \text{Rad}_g f(X)$

yazılır. O halde $f(X)$, M 'de U 'nun bir g -radikal tümleyenidir. Ayrıca $f(X) \subset V$ olduğundan M bol g -radikal tümlenmiştir.

Sonuç 3.8.10. M bir projektif ve g -radikal tümlenmiş modül ise M bol g -radikal tümlenmiştir (Koşar vd., 2021).

İspat: Teorem 3.8.9.'dan açıktır.

Tanım 3.8.11. M bir R -modül olsun. M modülünün bir X alt modülü her $h \in \text{End}(M)$ için $h(X) \subset X$ koşulunu sağlıyorsa, X 'e M 'nin bir tam değişmez (fully invariant) alt modülü denir. Eğer bir M R -modülünün her alt modülü tam değişmez ise bu modüle bir duo modül denir (Koşan ve Tütüncü, 2007).



4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. $\oplus - g$ – Radikal Tümlenmiş Modüller

Tanım 4.1.1. M bir R -modül olsun. Eğer M 'nin her alt modülü M 'de bir direkt toplam terimi olacak şekilde bir g – radikal tümleyene sahip ise M 'ye bir $\oplus - g$ – radikal tümlenmiş modül denir.

Teorem 4.1.2. M bir R -modül olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ ve $X, Y \leq M_2$ olsun. Bu durumda Y modülünün M_2 'de X 'in bir g – radikal tümleyeni olması için gerek ve yeter koşul Y modülünün $M_1 + X$ 'in M 'de bir g – radikal tümleyeni olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ Y, X 'in M_2 'de bir g – radikal tümleyeni olsun. Bu durumda $M_2 = X + Y$ ve $X \cap Y \leq \text{Rad}_g Y$ olur. $M = M_1 \oplus M_2$ ve $M_2 = X + Y$ olduğundan $M = M_1 + X + Y$ olur. Ayrıca $X, Y \leq M_2$ ve $M_1 \cap M_2 = 0$ olduğundan

$(M_1 + X) \cap Y = (M_1 + X) \cap M_2 \cap Y = (M_1 \cap M_2 + X) \cap Y = (0 + X) \cap Y = X \cap Y \leq \text{Rad}_g Y$ olur. O halde $Y, M_1 + X$ 'in M 'de bir g – radikal tümleyeni olup istenen elde edilir.

$(\Leftarrow)$ $Y, M_1 + X$ 'in M 'de bir g – radikal tümleyeni olsun. Bu durumda $M = M_1 + X + Y$ ve $(M_1 + X) \cap Y \leq \text{Rad}_g Y$ olur. $M = M_1 + X + Y, X, Y \leq M_2$ ve $M_1 \cap M_2 = 0$ olduğundan

$$M_2 = M \cap M_2 = (M_1 + X + Y) \cap M_2 = M_1 \cap M_2 + X + Y = X + Y$$

olur. Ayrıca $X \cap Y \leq (M_1 + X) \cap Y \leq \text{Rad}_g Y$ olur. O halde Y, X 'in M_2 'de bir g – radikal tümleyeni olup istenen elde edilir.

Teorem 4.1.3. M bir R -modül ve K, M 'nin bir direkt toplam terimi olsun. Bu durumda $\text{Rad}_g K = K \cap \text{Rad}_g M$ olur.

İspat: K, M 'nin bir direkt toplam terimi olduğundan $M = K \oplus T$ olacak şekilde $\exists T \leq M$ vardır. Yardımcı Teorem 3.5.24.'ten $\text{Rad}_g M = \text{Rad}_g K \oplus \text{Rad}_g T$ olur. Bu durumda

$$K \cap \text{Rad}_g M = K \cap (\text{Rad}_g K \oplus \text{Rad}_g T) = \text{Rad}_g K \oplus (K \cap \text{Rad}_g T) = \text{Rad}_g K \oplus 0 = \text{Rad}_g K$$

olup istenen elde edilir.

Teorem 4.1.4. M bir $\oplus - g$ -radikal tümlenmiş R -modül olsun. Eğer $\text{Rad}_g M \ll_g M$ ise M $\oplus - g$ -tümlenmiştir.

İspat: $\text{Rad}_g M \ll_g M$ olsun. Herhangi $X \leq M$ alalım. M $\oplus - g$ -radikal tümlenmiş olduğundan X 'in M 'de bir direkt toplam terimi olan en az bir Y g -radikal tümleyeni vardır. Burada $M = X + Y$ ve $X \cap Y \leq \text{Rad}_g Y$ olur. $\text{Rad}_g Y \leq \text{Rad}_g M \ll_g M$ ve Y , M 'nin bir direkt toplam terimi olduğundan Teorem 3.5.14.'ten $\text{Rad}_g Y \ll_g Y$ olur. O halde $X \cap Y \ll_g Y$ olup ayrıca $M = X + Y$ olduğundan Y , X 'in M 'de bir g -tümleyeni olur. Böylece M $\oplus - g$ -tümlenmiş olup istenen elde edilir.

Teorem 4.1.5. M bir $\oplus - g$ -radikal tümlenmiş R -modül ve $\text{Rad}_g M \neq M$ olsun. Eğer M 'nin her öz büyük alt modülü bir maksimal alt modülde içeriliyorsa M $\oplus - g$ -tümlenmiştir.

İspat: M 'nin her öz büyük alt modülü bir maksimal alt modülde içersin. Bu durumda Teorem 3.5.22. gereği $\text{Rad}_g M \ll_g M$ olup M $\oplus - g$ -radikal tümlenmiş olduğundan Teorem 4.1.4. gereği M $\oplus - g$ -tümlenmiş olur.

Teorem 4.1.6. M bir sonlu üretilmiş R -modül olsun. Bu durumda $\text{Rad}_g M \ll_g M$ olur.

İspat: Eğer M en az bir öz büyük alt modüle sahipse Teorem 3.5.21. gereği M 'nin her öz büyük alt modülü bir genelleştirilmiş maksimal alt modülde içerilmiş olup Teorem 3.5.22. gereği $\text{Rad}_g M \ll_g M$ olur. Kabul edelim ki M 'nin hiçbir öz büyük alt modülü olmasın. Bu durumda $\text{Rad}_g M + T = M$ olan her $T \trianglelefteq M$ için $T = M$ olup yine $\text{Rad}_g M \ll_g M$ olur. Sonuç olarak $\text{Rad}_g M \ll_g M$ olur.

Sonuç 4.1.7. M bir sonlu üretilmiş ve $\oplus - g$ -radikal tümlenmiş R -modül olsun. Bu durumda M $\oplus - g$ -tümlenmiştir.

İspat: M sonlu üretilmiş olduğundan Teorem 4.1.6. gereği $Rad_g M \ll_g M$ olur. Bu durumda $M \oplus -g$ -radikal tümlenmiş olduğundan Teorem 4.1.4. gereği $M \oplus -g$ -tümlenmiştir.

Teorem 4.1.8. M bir $\oplus -g$ -radikal tümlenmiş R -modül olsun. Eğer $Rad_g M \ll M$ ise $M \oplus -$ tümlenmiştir.

İspat: $Rad_g M \ll M$ olsun. M 'nin herhangi X alt modülünü alalım. $M \oplus -g$ -radikal tümlenmiş olduğundan X 'in M 'de bir direkt toplam terimi olan en az bir Y g -radikal tümleyeni vardır. Burada $M = X + Y$ ve $X \cap Y \leq Rad_g Y$ olur. $Rad_g Y \leq Rad_g M \ll M$ ve Y , M 'nin bir direkt toplam terimi olduğundan Teorem 2.7.2.(v) 'ten $Rad_g Y \ll Y$ olur. O halde $X \cap Y \ll Y$ olup ayrıca $M = X + Y$ olduğundan Y , X 'in M 'de bir tümleyeni olur. Yani M 'nin her alt modülü M 'de bir direkt toplam terimi olacak şekilde en az bir tümleyene sahiptir. Böylece $M \oplus -$ tümlenmiş olup istenen elde edilir.

Sonuç 4.1.9. M bir $\oplus -g$ -radikal tümlenmiş R -modül ve $Rad_g M = Rad M$ olsun. Eğer M 'nin her öz alt modülü bir maksimal alt modülde içeriliyorsa $M \oplus -$ tümlenmiştir.

İspat: M 'nin her öz alt modülü bir maksimal alt modülde içirilsin. Bu durumda Teorem 2.8.6. gereği $Rad M \ll M$ olup $Rad_g M = Rad M$ olduğundan $Rad_g M \ll M$ olur. O halde $M \oplus -g$ -radikal tümlenmiş olduğundan Teorem 4.1.8. gereği $M \oplus -$ tümlenmiş olur.

Sonuç 4.1.10. M bir $\oplus -g$ -radikal tümlenmiş R -modül ve $Rad_g M = Rad M$ olsun. Eğer M sonlu üretilmiş ise $M \oplus -$ tümlenmiştir.

İspat: M sonlu üretilmiş olduğundan Sonuç 2.8.7. gereği $Rad M \ll M$ olup $Rad_g M = Rad M$ olduğundan $Rad_g M \ll M$ olur. Bu durumda $M \oplus -g$ -radikal tümlenmiş olduğundan Teorem 4.1.8. gereği M bir $\oplus -$ tümlenmiş modül olur.

Teorem 4.1.11. M bir R -modül ve $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. Eğer M_1 ve M_2 $\oplus -g$ -radikal tümlenmiş ise M de $\oplus -g$ -radikal tümlenmiştir.

İspat: U, M 'nin bir alt modülü olsun. $M_2 \oplus -g$ -radikal tümlenmiş olduğundan $(M_1 + U) \cap M_2$, M_2 'de bir direkt toplam terimi olan bir X g -radikal tümleyenine sahiptir. X, M_2 'de $(M_1 + U) \cap M_2$ 'nin bir g -radikal tümleyeni olduğundan $M_2 = (M_1 + U) \cap M_2 + X$ ve $(M_1 + U) \cap X = (M_1 + U) \cap M_2 \cap X \leq \text{Rad}_g X$ olur. $M_2 = (M_1 + U) \cap M_2 + X$ 'ten

$$M = M_1 \oplus M_2 = M_1 + (M_1 + U) \cap M_2 + X = M_1 + U + X$$

elde edilir. $M_1 \oplus -g$ -radikal tümlenmiş olduğundan $(U + X) \cap M_1$, M_1 'de bir direkt toplam terimi olan bir Y g -radikal tümleyenine sahiptir. Y, M_1 'de $(U + X) \cap M_1$ 'in bir g -radikal tümleyeni olduğundan $M_1 = (U + X) \cap M_1 + Y$ ve $(U + X) \cap Y = (U + X) \cap M_1 \cap Y \leq \text{Rad}_g Y$ olur. $M_1 = (U + X) \cap M_1 + Y$ olduğundan $M = M_1 + U + X = (U + X) \cap M_1 + Y + U + X = U + X + Y$

olur. $(M_1 + U) \cap X \leq \text{Rad}_g X$ ve $(U + X) \cap Y \leq \text{Rad}_g Y$ olduğundan Yardımcı Teorem 3.5.23.(3)'ten

$$U \cap (X + Y) \leq (U + Y) \cap X + (U + X) \cap Y \leq (M_1 + U) \cap X + (U + X) \cap Y \leq \text{Rad}_g X + \text{Rad}_g Y \leq \text{Rad}_g (X + Y)$$

elde edilir. O halde $X + Y, M$ 'de U 'nun bir g -radikal tümleyeni olur. X, M_2 'nin bir direkt toplam terimi ve Y de M_1 'in bir direkt toplam terimi olduğundan $X + Y, M = M_1 \oplus M_2$ 'nin bir direkt toplam terimi olur. O halde $M \oplus -g$ -radikal tümlenmiştir.

Sonuç 4.1.12. M bir R -modül ve $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$ olsun. $\forall i = 1, 2, \dots, n$ için $M_i \oplus -g$ -radikal tümlenmiş ise M de $\oplus -g$ -radikal tümlenmiştir.

İspat: Teorem 4.1.11.'den ispatı açıktır.

Teorem 4.1.13. M bir $\oplus -g$ -radikal tümlenmiş R -modül ve $K \leq M$ olsun.

M 'nin her X direkt toplam terimi için $\frac{X + K}{K}$, M / K 'nın bir direkt toplam terimi ise $M / K \oplus -g$ -radikal tümlenmiştir.

İspat: U/K , M/K 'nın herhangi bir alt modülü olsun. $M \oplus -g$ -radikal tümlenmiş olduğundan U, M 'de bir direkt toplam terimi olan bir X g -radikal tümleyenine sahiptir. X, U 'nun M 'de bir g -radikal tümleyeni ve $K \leq U$ olduğundan Yardımcı Teorem 3.7.6.'dan $\frac{X+K}{K}$, M/K 'da U/K 'nın bir g -radikal tümleyenidir. X, M 'nin bir direkt toplam terimi olduğundan hipotezden $\frac{X+K}{K}$, M/K 'nın bir direkt toplam terimidir. O halde $M/K \oplus -g$ -radikal tümlenmiştir.

Teorem 4.1.14. M bir dağılımlı ve $\oplus -g$ -radikal tümlenmiş R -modül olsun. Bu takdirde M 'nin her bölüm modülü $\oplus -g$ -radikal tümlenmiştir.

İspat: $K \leq M$ ve X, M 'nin bir direkt toplam terimi olsun. X, M 'nin bir direkt toplam terimi olduğundan $M = X \oplus Y$ olacak şekilde $\exists Y \leq M$ vardır. $M = X \oplus Y$ olduğundan $\frac{M}{K} = \frac{X+K}{K} + \frac{Y+K}{K}$ olur. M dağılımlı olduğundan $(X+K) \cap (Y+K) = K$ ve $\left(\frac{X+K}{K}\right) \cap \left(\frac{Y+K}{K}\right) = \frac{(X+K) \cap (Y+K)}{K} = \frac{K}{K} = 0$ olur. Buradan $\frac{M}{K} = \frac{X+K}{K} \oplus \frac{Y+K}{K}$ olup Teorem 4.1.13.'ten $M/K \oplus -g$ -radikal tümlenmiştir.

Sonuç 4.1.15. M bir dağılımlı ve $\oplus -g$ -radikal tümlenmiş R -modül olsun. Bu durumda M 'nin her homomorfik görüntüsü de $\oplus -g$ -radikal tümlenmiştir.

İspat: Teorem 4.1.14.'ten açıktır.

Teorem 4.1.16. $M, (D3)$ özelliğini sağlayan $\oplus -g$ -radikal tümlenmiş bir R -modül olsun. Bu durumda M 'nin her direkt toplam terimi de $\oplus -g$ -radikal tümlenmiştir.

İspat: K, M 'nin herhangi bir direkt toplam terimi olsun. Buradan $M = K \oplus T$ olacak şekilde $\exists T \leq M$ vardır. $U \leq K$ olsun. $M \oplus -g$ -radikal tümlenmiş bir modül olduğundan U, M 'de bir direkt toplam terimi olan bir X g -radikal tümleyenine sahiptir. Buradan $M = U + X$ ve $U \cap X \leq \text{Rad}_g X$ yazılır. $U \leq K$ olduğundan $M = U + X = K + X$ olup $M, (D3)$ özelliğine sahip olduğundan $K \cap X, M$ 'nin bir direkt toplam terimidir. O halde $M = (K \cap X) \oplus Y$ olacak şekilde $\exists Y \leq M$ vardır.

Buradan $K = (K \cap X) \oplus (K \cap Y)$ olur. $M = U + X$ ve $U \leq K$ olduğundan Modüler Kuraldan $K = U + K \cap X$ yazılır. $U \cap X \leq \text{Rad}_g X \leq \text{Rad}_g M$ olduğundan $U \cap K \cap X \leq K \cap X \cap \text{Rad}_g M$ olur. $K \cap X$, M 'nin bir direkt toplam terimi olduğundan Teorem 4.1.3.'ten $U \cap K \cap X \leq K \cap X \cap \text{Rad}_g M = \text{Rad}_g (K \cap X)$ olup $K \cap X$, U 'nun K 'da bir direkt toplam terimi olan bir g -radikal tümleyenidir. O halde $K \oplus -g$ -radikal tümlenmiştir.

Sonuç 4.1.17. M , (D3) özelliğini sağlayan $\oplus -g$ -radikal tümlenmiş bir R -modül olsun. Bu durumda M 'nin her X direkt toplam terimi için M/X de $\oplus -g$ -radikal tümlenmiştir.

İspat: X , M 'nin herhangi bir direkt toplam terimi olsun. Buradan $M = X \oplus Y$ olacak şekilde $\exists Y \leq M$ vardır. Teorem 4.1.16.'dan $Y \oplus -g$ -radikal tümlenmiştir.

$$\frac{M}{X} = \frac{X+Y}{X} \cong \frac{Y}{X \cap Y} = \frac{Y}{0} \cong Y$$

olduğundan M/X de $\oplus -g$ -radikal tümlenmiştir.

Sonuç 4.1.18. M , (D3) özelliğini sağlayan $\oplus -g$ -radikal tümlenmiş bir R -modül, N bir R -modül olmak üzere $f: M \rightarrow N$ bir R -modül epimorfizması ve Çekf M 'nin bir direkt toplam terimi olsun. Bu durumda N de $\oplus -g$ -radikal tümlenmiştir.

İspat: $M/\text{Çekf} \cong \text{Görf} = N$ olduğundan Sonuç 4.1.17.'den açıktır.

Teorem 4.1.19. M bir $\oplus -g$ -radikal tümlenmiş R -modül olsun. $K \leq M$ ve $M = M_1 \oplus M_2$ olan her $M_1, M_2 \leq M$ için $K = (K \cap M_1) \oplus (K \cap M_2)$ ise $M/K \oplus -g$ -radikal tümlenmiştir.

İspat: $U/K \leq M/K$ olsun. $M \oplus -g$ -radikal tümlenmiş olduğundan U , M 'de bir direkt toplam terimi olan bir V g -radikal tümleyenine sahiptir. Buradan $M = V \oplus X$ olacak şekilde $\exists X \leq M$ vardır. Hipotezden, $K = (K \cap V) \oplus (K \cap X)$ yazılır. $K \leq U$ ve V , U 'nun M 'de bir g -radikal tümleyeni olduğundan, Yardımcı Teorem 3.7.6.'dan $\frac{V+K}{K}$, U/K 'nın M/K 'da bir g -radikal tümleyenidir.

$M = V \oplus X$ olduğundan $\frac{M}{K} = \frac{V+K}{K} + \frac{X+K}{K}$ olur. Modüler Kuraldan ve hipotezden

$$\begin{aligned} \frac{V+K}{K} \cap \frac{X+K}{K} &= \frac{(V+K) \cap (X+K)}{K} = \\ \frac{(V+K) \cap X + K}{K} &= \frac{(V+K \cap V + K \cap X) \cap X + K}{K} = \\ \frac{(V+K \cap V) \cap X + K \cap X + K}{K} &= \frac{V \cap X + K}{K} = \frac{0+K}{K} = 0 \end{aligned}$$

olur. Buradan $\frac{M}{K} = \frac{V+K}{K} \oplus \frac{X+K}{K}$ yazılır. O halde $M/K \oplus -g$ -radikal tümlenmiştir.

Sonuç 4.1.20. M bir $\oplus -g$ -radikal tümlenmiş R -modül ve N bir R -modül olmak üzere $f: M \rightarrow N$ bir R -modül epimorfizması olsun. $M = M_1 \oplus M_2$ olan her $M_1, M_2 \leq M$ için $\zeta_k f = (\zeta_k f \cap M_1) \oplus (\zeta_k f \cap M_2)$ ise $N \oplus -g$ -radikal tümlenmiştir.

İspat: $M / \zeta_k f \cong \text{Görf} = N$ olduğundan Teorem 4.1.19.'dan açıktır.

Teorem 4.1.21. M bir R -modül, $X, Y, Z \leq M$, $M = Y \oplus Z$ ve $\pi: M \rightarrow Y$ kanonik projeksiyon olsun. Eğer $\pi(X) \subset X$ ise $X = (X \cap Y) \oplus (X \cap Z)$ olur.

İspat: Herhangi $x \in X$ alalım. $x \in X$ ve $X \leq M$ olduğundan $x \in M$ olup $M = Y \oplus Z$ olduğundan $x = y + z$ olacak şekilde $\exists y \in Y$ ve $\exists z \in Z$ vardır. Hipotezden $y = \pi(x) \in X$ olup $y \in Y \cap X$ olur. $x, y \in X$ olduğundan $z = x - y \in X$ olup ayrıca $z \in Z$ olduğundan $z \in X \cap Z$ olur. $y \in X \cap Y$ ve $z \in X \cap Z$ olduğundan $x = y + z \in (X \cap Y) \oplus (X \cap Z)$ olup $X \subset (X \cap Y) \oplus (X \cap Z)$ olur. Ayrıca $(X \cap Y) \oplus (X \cap Z) \subset X$ olduğundan $X = (X \cap Y) \oplus (X \cap Z)$ olup istenen elde edilir.

Teorem 4.1.22. M bir $\oplus -g$ -radikal tümlenmiş R -modül ve $X \leq M$ olsun. Eğer $M = Y \oplus Z$ olan her $Y, Z \leq M$ için $\pi: M \rightarrow Y$ kanonik projeksiyon olmak üzere $\pi(X) \subset X$ ise $M/X \oplus -g$ -radikal tümlenmiş olur.

İspat: Teorem 4.1.21. gereği $M = Y \oplus Z$ olan her $Y, Z \leq M$ için $X = (X \cap Y) \oplus (X \cap Z)$ olur. O halde Teorem 4.1.19.'dan $M / X \oplus - g -$ radikal tümlenmiştir.

Teorem 4.1.23. M bir $\oplus - g -$ radikal tümlenmiş R -modül ve X, M 'nin bir tam değişmez alt modülü olsun. Bu durumda $M / X \oplus - g -$ radikal tümlenmiştir.

İspat: X, M 'nin bir tam değişmez alt modülü olduğundan her $h \in \text{End}(M)$ için $h(X) \subset X$ olup $M = Y \oplus Z$ olan her $Y, Z \leq M$ için $\pi: M \rightarrow Y$ kanonik projeksiyon olmak üzere $\pi(X) \subset X$ olur. O halde Teorem 4.1.22.'den $M / X \oplus - g -$ radikal tümlenmiş olup istenen elde edilir.

Sonuç 4.1.24. M bir duo modül olsun. Eğer $M \oplus - g -$ radikal tümlenmiş ise M 'nin her bölüm modülü $\oplus - g -$ radikal tümlenmiş olur.

İspat: M bir duo modül olduğundan M 'nin her alt modülü tam değişmez olup $M \oplus - g -$ radikal tümlenmiş olduğundan Teorem 4.1.23. gereği M 'nin her bölüm modülü $\oplus - g -$ radikal tümlenmiş olur.

Sonuç 4.1.25. M bir duo modül olsun. Eğer $M \oplus - g -$ radikal tümlenmiş ise M 'nin her homomorfik görüntüsü de $\oplus - g -$ radikal tümlenmiş olur.

İspat: Sonuç 4.1.24.'ten açıktır.

Teorem 4.1.26. M , SSP özelliğini sağlayan bir $\oplus - g -$ radikal tümlenmiş R -modül olsun. Bu durumda M 'nin her K direkt toplam terimi için M / K bir $\oplus - g -$ radikal tümlenmiş modüldür.

İspat: K, M 'nin herhangi bir direkt toplam terimi ve $U / K \leq M / K$ olsun. $M \oplus - g -$ radikal tümlenmiş olduğundan U, M 'de M 'nin bir direkt toplam terimi olan bir V g -radikal tümleyenine sahiptir. Yardımcı Teorem 3.7.6.'dan $\frac{V+K}{K}, U / K$ 'nın M / K 'da bir g -radikal tümleyenidir. K ve V, M 'nin birer direkt toplam terimi ve M , SSP özelliğine sahip olduğundan $K+V$ de M 'nin bir direkt toplam terimidir. Buradan $M = (K+V) \oplus T$ olacak şekilde $\exists T \leq M$ vardır. $M = (K+V) \oplus T$

olduğundan $\frac{M}{K} = \frac{K+V+T}{K} = \frac{V+K}{K} + \frac{T+K}{K}$ yazılır. Bu durumda $(V+K) \cap T = 0$

olduğundan Modüler Kuraldan

$$\frac{V+K}{K} \cap \frac{T+K}{K} = \frac{(V+K) \cap (T+K)}{K} = \frac{(V+K) \cap T + K}{K} = \frac{0+K}{K} = 0$$

olur. Buradan $\frac{M}{K} = \frac{V+K}{K} \oplus \frac{T+K}{K}$ olur. O halde $M/K \oplus -g$ -radikal tümlenmiştir.

Sonuç 4.1.27. M , SSP özelliğini sağlayan bir $\oplus -g$ -radikal tümlenmiş R -modül olsun. Bu durumda M 'nin her direkt toplam terimi $\oplus -g$ -radikal tümlenmiştir.

İspat: T , M 'nin herhangi bir direkt toplam terimi olsun. Bu durumda $M = T \oplus K$ olacak şekilde M 'nin en az bir K alt modülü vardır. Teorem 4.1.26.'dan $M/K \oplus -g$ -radikal tümlenmiştir. $\frac{M}{K} = \frac{T+K}{K} \cong \frac{T}{T \cap K} = \frac{T}{0} \cong T$ olduğundan T de $\oplus -g$ -radikal tümlenmiştir.

Uyarı: M sadece $C \leq A$, $C \leq B$, $A \not\leq B$ ve $B \not\leq A$ olan $0, A, B, C$ öz alt modüllerine sahip bir R -modül ise M g -radikal tümlenmiştir fakat, $\oplus -g$ -radikal tümlenmiş değildir.

Her $\oplus -g$ -tümlenmiş modülün $\oplus -g$ -radikal tümlenmiş modül olduğu kolayca görülür. Ancak aşağıdaki örneklerde de görüldüğü gibi tersi her zaman doğru değildir.

Örnek 4.1.28. $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ -modülünü göz önüne alalım. $Rad_g \mathbb{Q} = Rad \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$ olduğundan ${}_Z \mathbb{Q} \oplus -g$ -radikal tümlenmiştir. Fakat, ${}_Z \mathbb{Q}$ tümlenmiş olmadığından ve ${}_Z \mathbb{Q}$ 'nin sıfır olmayan her alt modülü ${}_Z \mathbb{Q}$ 'da büyük olduğundan ${}_Z \mathbb{Q}$ g -tümlenmiş değildir. Bu nedenle ${}_Z \mathbb{Q} \oplus -g$ -tümlenmiş değildir.

Örnek 4.1.29. p bir asal tamsayı olmak üzere $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_{p^2}$ $\mathbb{Z}$ -modülünü göz önüne alalım. $Rad_g \mathbb{Z}_{p^2} \neq \mathbb{Z}_{p^2}$ olduğunu görmek kolaydır. Yardımcı Teorem 3.5.24.'ten $Rad_g (\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_{p^2}) = Rad_g \mathbb{Q} \oplus Rad_g \mathbb{Z}_{p^2} \neq \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_{p^2}$ olur. $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{Z}_{p^2}$

$\oplus - g$ – radikal tümlenmiş olduğundan Teorem 4.1.11.’den $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_{p^2}$ $\oplus - g$ – radikal tümlenmiştir. Fakat, $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_{p^2}$ $\oplus - g$ – tümlenmiş değildir.

Tanım 4.1.30. M bir R -modül ve $U, V \leq M$ olsun. Eğer $M = U + V$ ve $U \cap V \leq \text{Rad}_g M$ ise V ’ye U ’nun M ’de bir zayıf g – radikal tümleyeni denir. Eğer M ’nin her alt modülü M ’de bir zayıf g – radikal tümleyene sahip ise M ’ye bir zayıf g – radikal tümlenmiş modül denir.

Teorem 4.1.31. Her g – radikal tümlenmiş modül zayıf g – radikal tümlenmiştir.

İspat: Tanımlardan açıktır.

Teorem 4.1.32. M bir R -modül olsun. Eğer M ’nin her alt modülü M ’de bir direkt toplam terimi olacak şekilde bir zayıf g – radikal tümleyene sahipse M modülü $\oplus - g$ – radikal tümlenmiştir.

İspat: M ’nin herhangi bir U alt modülünü alalım. Hipotezden U ’nun M ’de bir direkt toplam terimi olacak şekilde bir V zayıf g – radikal tümleyeni vardır. V , U ’nun M ’de bir zayıf g – radikal tümleyeni olduğundan $M = U + V$ ve $U \cap V \leq \text{Rad}_g M$ olur. V , M ’nin bir direkt toplam terimi olduğundan Teorem 4.1.3. gereği $\text{Rad}_g V = V \cap \text{Rad}_g M$ olur. $U \cap V \leq \text{Rad}_g M$ ve $U \cap V \leq V$ olduğundan $U \cap V \leq V \cap \text{Rad}_g M = \text{Rad}_g V$ olur. O halde V , U ’nun M ’de bir direkt toplam terimi olan bir g – radikal tümleyeni olur. Böylece M bir $\oplus - g$ – radikal tümlenmiş modül olup istenen elde edilir.

Teorem 4.1.33. M bir parçalanamaz R -modül olsun. Eğer M ’nin her alt modülü M ’de bir direkt toplam terimi olacak şekilde bir zayıf g – radikal tümleyene sahipse M ’nin her öz alt modülü $\text{Rad}_g M$ tarafından kapsanır.

İspat: M ’nin herhangi U öz alt modülünü alalım. Hipotezden U , M ’de bir direkt toplam terimi olan bir V zayıf g – radikal tümleyene sahiptir. V , U ’nun M ’de bir zayıf g – radikal tümleyeni olduğundan $M = U + V$ ve $U \cap V \leq \text{Rad}_g M$ olur. $M = U + V$ ve U , M ’nin bir öz alt modülü olduğundan $V \neq 0$ olur. V , M ’nin bir direkt toplam terimi ve M parçalanamaz olduğundan $V = 0$ veya $V = M$ olup

burada $V \neq 0$ olduğundan $V = M$ olur. O halde $U \cap V = U \cap M = U$ olup $U \cap V \leq \text{Rad}_g M$ olduğundan $U \leq \text{Rad}_g M$ olur. Böylece M 'nin her öz alt modülü $\text{Rad}_g M$ tarafından kapsanır.

Teorem 4.1.34. M bir parçalanamaz R -modül ve $\text{Rad}_g M \neq M$ olsun. Eğer M 'nin her alt modülü M 'de bir direkt toplam terimi olacak şekilde bir zayıf g -radikal tümleyene sahipse M lokaldir.

İspat: Teorem 4.1.33.'den M 'nin her öz alt modülü $\text{Rad}_g M$ tarafından kapsanır. Bu durumda $\text{Rad}_g M \neq M$ olduğundan M bir lokal modül olup istenen elde edilir.

4.2. Güçlü $\oplus - g$ - Radikal Tümlenmiş Modüller

Tanım 4.2.1. M bir g -tümlenmiş R -modül olsun. M 'nin her g -tümleyen alt modülü M 'de bir direkt toplam terimi ise M 'ye bir güçlü $\oplus - g$ - tümlenmiş modül denir.

Tanım 4.2.2. M bir g -radikal tümlenmiş R -modül olsun. M 'nin her g -radikal tümleyen alt modülü M 'de bir direkt toplam terimi ise M 'ye bir güçlü $\oplus - g$ - radikal tümlenmiş modül denir.

Açıktır ki her güçlü $\oplus - g$ - radikal tümlenmiş modül $\oplus - g$ - radikal tümlenmiştir. Ancak bunun tersi her zaman doğru olmayabilir. (bk. Örnek 4.2.13., Örnek 4.2.14. ve Örnek 4.2.15.)

Teorem 4.2.3. M bir güçlü $\oplus - g$ - radikal tümlenmiş R -modül olsun. $\text{Rad}_g M \ll_g M$ ise M güçlü $\oplus - g$ - tümlenmiştir.

İspat: $U \leq M$ ve V , M 'de U 'nun bir g -radikal tümleyeni olsun. Buradan $M = U + V$ ve $U \cap V \leq \text{Rad}_g V$ yazılır. M güçlü $\oplus - g$ - radikal tümlenmiş olduğundan V , M 'nin bir direkt toplam terimidir. Yardımcı Teorem 3.5.23.(2)'den $\text{Rad}_g V \leq \text{Rad}_g M \ll_g M$ olur. V , M 'nin bir direkt toplam terimi olduğundan $\text{Rad}_g V \ll_g V$ 'dir. Buradan $U \cap V \ll_g V$ ve V , M 'de U 'nun bir g -tümleyeni olup M g -tümlenmiş olur. Ayrıca M 'nin her g -tümleyen alt modülü bir g -radikal tümleyen alt

modülü ve M güçlü $\oplus - g$ - radikal tümlenmiş olduğundan M 'nin her g -tümleyen alt modülü M 'nin bir direkt toplam terimi olup M güçlü $\oplus - g$ - tümlenmiş olur.

Teorem 4.2.4. M bir güçlü $\oplus - g$ - radikal tümlenmiş R -modül ve $Rad_g M \neq M$ olsun. Eğer M 'nin her öz büyük alt modülü bir maksimal alt modülde kapsanıyorsa M güçlü $\oplus - g$ - tümlenmiş olur.

İspat: M 'nin her öz büyük alt modülü bir maksimal alt modülde içirilsin. Bu durumda Teorem 3.5.22. gereği $Rad_g M \ll_g M$ olup M güçlü $\oplus - g$ - radikal tümlenmiş olduğundan Teorem 4.2.3. gereği M güçlü $\oplus - g$ - tümlenmiş olur.

Sonuç 4.2.5. M bir sonlu üretilmiş ve güçlü $\oplus - g$ - radikal tümlenmiş R -modül olsun. Bu durumda M güçlü $\oplus - g$ - tümlenmiştir.

İspat: M sonlu üretilmiş olduğundan Teorem 4.1.6. gereği $Rad_g M \ll_g M$ olur. Bu durumda M güçlü $\oplus - g$ - radikal tümlenmiş olduğundan Teorem 4.2.3. gereği M güçlü $\oplus - g$ - tümlenmiş olur.

Teorem 4.2.6. M bir güçlü $\oplus - g$ - radikal tümlenmiş R -modül olsun. $Rad_g M \ll M$ ise M güçlü $\oplus -$ tümlenmiştir.

İspat: $U \leq M$ ve V , M 'de U 'nun bir g -radikal tümleyeni olsun. Buradan $M = U + V$ ve $U \cap V \leq Rad_g V$ yazılır. M güçlü $\oplus - g$ - radikal tümlenmiş olduğundan V , M 'nin bir direkt toplam terimidir. Yardımcı Teorem 3.5.23.(2)'den $Rad_g V \leq Rad_g M \ll M$ yazılır. V , M 'nin bir direkt toplam terimi olduğundan $Rad_g V \ll V$ olur. Bu durumda $U \cap V \ll V$ ve V , M 'de U 'nun bir tümleyeni olup M tümlenmiş olur. Ayrıca M 'nin her tümleyen alt modülü bir g -radikal tümleyen alt modülü ve M güçlü $\oplus - g$ - radikal tümlenmiş olduğundan M 'nin her tümleyen alt modülü M 'nin bir direkt toplam terimi olup M güçlü $\oplus -$ tümlenmiş olur.

Sonuç 4.2.7. M bir güçlü $\oplus - g$ - radikal tümlenmiş R -modül ve $Rad_g M = Rad M$ olsun. Eğer M 'nin her öz alt modülü bir maksimal alt modülde kapsanıyorsa M güçlü $\oplus -$ tümlenmiş olur.

İspat: M 'nin her öz alt modülü bir maksimal alt modülde içirilsin. Bu durumda Teorem 2.8.6. gereği $Rad M \ll M$ olup $Rad_g M = Rad M$ olduğundan

$Rad_g M \ll M$ olur. O halde M güçlü $\oplus - g$ - radikal tümlenmiş olduğundan Teorem 4.2.6. gereği M güçlü $\oplus -$ tümlenmiş olur.

Sonuç 4.2.8. M bir güçlü $\oplus - g$ - radikal tümlenmiş R -modül ve $Rad_g M = RadM$ olsun. Eğer M sonlu üretilmiş ise M güçlü $\oplus -$ tümlenmiş olur.

İspat: M sonlu üretilmiş olduğundan Sonuç 2.8.7. gereği $RadM \ll M$ olup $Rad_g M = RadM$ olduğundan $Rad_g M \ll M$ olur. Bu durumda M güçlü $\oplus - g$ - radikal tümlenmiş olduğundan Teorem 4.2.6. gereği M güçlü $\oplus -$ tümlenmiş olur.

Teorem 4.2.9. M bir güçlü $\oplus - g$ - radikal tümlenmiş modül olsun. Bu durumda M 'nin her direkt toplam terimi de güçlü $\oplus - g$ - radikal tümlenmiştir.

İspat: N , M 'nin bir direkt toplam terimi olsun. Buradan $M = N \oplus K$ olacak şekilde $\exists K \leq M$ vardır. Yardımcı Teorem 3.7.7.'den M/K g -radikal tümlenmiştir. $\frac{M}{K} = \frac{N \oplus K}{K} \cong \frac{N}{N \cap K} = \frac{N}{0} \cong N$ olduğundan N de g -radikal tümlenmiştir. $X \leq N$ ve Y , N 'de X 'in bir g -radikal tümleyeni olsun. $M = N \oplus K$ olduğundan Teorem 4.1.2.'den Y , M 'de $K + X$ 'in bir g -radikal tümleyenidir. M güçlü $\oplus - g$ - radikal tümlenmiş olduğundan M 'de her g -radikal tümleyen alt modül M 'nin bir direkt toplam terimi olup Y , M 'nin bir direkt toplam terimi olur. $Y \leq N$ olduğundan Y , N 'nin de bir direkt toplam terimidir. Buradan N güçlü $\oplus - g$ - radikal tümlenmiştir.

Sonuç 4.2.10. M bir güçlü $\oplus - g$ - radikal tümlenmiş modül olsun. Bu durumda M 'nin her K direkt toplam terimi için M/K güçlü $\oplus - g$ - radikal tümlenmiştir.

İspat: K , M 'nin herhangi bir direkt toplam terimi ve $X \leq M$ olmak üzere $M = K \oplus X$ olsun. Teorem 4.2.9.'dan X güçlü $\oplus - g$ - radikal tümlenmiştir. Bu durumda

$$M/K = (K + X)/K \cong X/(K \cap X) = X/0 \cong X$$

oldüğundan M/K güçlü $\oplus - g$ - radikal tümlenmiştir.

Sonuç 4.2.11. $f: M \rightarrow N$ bir R -modül epimorfizması ve $\text{Çek}f$, M 'nin bir direkt toplam terimi olsun. Bu durumda M güçlü $\oplus - g$ - radikal tümlenmiş ise N de güçlü $\oplus - g$ - radikal tümlenmiştir.

İspat: Sonuç 4.2.10.'dan $M / Çekf$ güçlü $\oplus - g$ - radikal tümlenmiştir. $M / Çekf \cong f(M) = N$ olduğundan N de güçlü $\oplus - g$ - radikal tümlenmiştir.

Teorem 4.2.12. M bir güçlü $\oplus - g$ - radikal tümlenmiş R -modül ve $K \leq M$ olsun. M / K 'da her V / K g - radikal tümleyen alt modül için V , M 'de bir g - radikal tümleyen alt modül ise M / K güçlü $\oplus - g$ - radikal tümlenmiştir.

İspat: Yardımcı Teorem 3.7.7.'den M / K g - radikal tümlenmiştir. V / K , M / K 'da herhangi bir g - radikal tümleyen alt modül olsun. Hipotezden V g - radikal tümleyen alt modüldür. M güçlü $\oplus - g$ - radikal tümlenmiş olduğundan V , M 'nin bir direkt toplam terimidir. Bu durumda $M = V \oplus X$ olacak şekilde $\exists X \leq M$ vardır. $M = V \oplus X$ olduğundan $M / K = V / K + (X + K) / K$ ve $V / K \cap (X + K) / K = (X \cap V + K) / K = (0 + K) / K = 0$ olur. Buradan $M / K = V / K \oplus (X + K) / K$ olup M / K güçlü $\oplus - g$ - radikal tümlenmiştir.

Uyarı: M bir Rad-tümlenmiş modül olsun. M güçlü $\oplus - g$ - radikal tümlenmiş ise M güçlü Rad- $\oplus$ -tümlenmiştir. Fakat, bunun tersi her zaman doğru değildir (bk. Örnek 4.2.14. ve Örnek 4.2.15.).

Uyarı: M bir tümlenmiş modül olsun. M güçlü $\oplus - g$ - radikal tümlenmiş ise M güçlü $\oplus$ -tümlenmiştir. Fakat, bunun tersi her zaman doğru değildir (bk. Örnek 4.2.13., Örnek 4.2.14. ve Örnek 4.2.15.).

Örnek 4.2.13. M bir lokal modül ve $Rad_g(Rad_g M) = Rad_g M = Rad M \neq 0$ olsun. Bu durumda M tümlenmiş ve M 'de tümleyen alt modüller sadece M ve 0 olduğundan M güçlü $\oplus$ - tümlenmiş olur. Ayrıca M $\oplus - g$ - radikal tümlenmiş olur. Burada M 'nin en geniş alt modülü $Rad_g M$ 'ye eşittir. Ayrıca $Rad_g M$, M 'nin bir g - radikal tümleyeni olduğundan ve $Rad_g M$, M 'nin bir direkt toplam terimi olmadığından M güçlü $\oplus - g$ - radikal tümlenmiş değildir.

Örnek 4.2.14. $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}$ -modülünü ele alalım. Bu durumda $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}$ -modülü lokal ve $Rad_g(Rad_g \mathbb{Z}_4) = Rad_g \mathbb{Z}_4 = Rad \mathbb{Z}_4 \neq 0$ olur. Örnek 4.2.13.'ten $\mathbb{Z}_4$ güçlü $\oplus$ - tümlenmiş ve $\oplus - g$ - radikal tümlenmiştir. Fakat, $\mathbb{Z}_4$ güçlü $\oplus - g$ - radikal

tümleyen değildir. $\mathbb{Z}_4$ 'te Rad-tümleyen alt modüller sadece 0 ve $\mathbb{Z}_4$ olduğundan $\mathbb{Z}_4$ güçlü Rad- $\oplus$ -tümlenmiştir.

Örnek 4.2.15. $\mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}$ -modülünü ele alalım. Bu durumda $\mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}$ -modülü lokal, $Rad_g \mathbb{Z}_8 = Rad \mathbb{Z}_8 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$ ve $Rad_g(Rad_g \mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{4}\}$ olur. $\mathbb{Z}_8$ 'de tümleyen alt modüller sadece 0 ve $\mathbb{Z}_8$ olduğundan $\mathbb{Z}_8$ güçlü $\oplus$ -tümlenmiştir. Ayrıca $\mathbb{Z}_8$ $\oplus$ - g -radikal tümlenmiştir. $\mathbb{Z}_8$ 'in $K = \{\bar{0}, \bar{4}\}$ alt modülü $\mathbb{Z}_8$ 'in $\mathbb{Z}_8$ 'de bir g -radikal tümleyeni olup $\mathbb{Z}_8$ 'in bir direkt toplam terimi olmadığından $\mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}$ -modülü güçlü $\oplus$ - g -radikal tümlenmiş değildir. $\mathbb{Z}_8$ 'de Rad-tümleyen alt modüller sadece 0 ve $\mathbb{Z}_8$ olduğundan $\mathbb{Z}_8$ güçlü Rad- $\oplus$ -tümlenmiştir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada $\oplus$ -tümlenmiş, genelleştirilmiş $\oplus$ -tümlenmiş ve g -radikal tümlenmiş modül kavramlarından hareketle $\oplus$ - g -radikal tümlenmiş modül kavramı tanımlandı ve bu kavramla ilgili birtakım özellikler incelendi. Ayrıca güçlü $\oplus$ - g -radikal tümlenmiş modül kavramı da tanımlandı ve bu kavramla ilgili birtakım özellikler incelendi.

Her genişlemesinde direkt toplam terimi olacak şekilde bir g -radikal tümleyene sahip modüller çalışılabilir. Dedekind halkaları üzerinde $\oplus$ - g -radikal tümlenmiş ve güçlü $\oplus$ - g -radikal tümlenmiş modül kavramlarının yapıları incelenebilir.

Bu çalışmada geçen direkt toplam terimi yerine bundan daha genel yapıda olan t -toplam terimi alınarak yeni bir çalışma yapılabilir. Ayrıca bu çalışmalar kafeslere genelleştirilebilir.

KAYNAKLAR

- Alizade, R. ve Pancar, A. (1999). *Homoloji cebire giriş*. Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Samsun.
- Alizade, R., Bilhan, G. ve Smith, P. F. (2001). “Modules whose maximal submodules have supplements”. *Communications in Algebra*. 29 (6). 2389-2405.
- Anderson, F.W. and Fuller, K. R. (1992). *Rings and categories of modules*. 2nd. ed., New York, Springer-Verlag.
- Clark, J., Lomp, C., Vanaja, N. and Wisbauer, R. (2006). *Lifting modules*. 1st. ed. Birkhauser Verlag Basel, Boston-Berlin.
- Çalışıcı, H. ve Türkmen, E. (2010). “Generalized $\oplus$ – supplemented modules”. *Algebra and Discrete Mathematics*. 10 (2). 10-18.
- Ecevit, Ş., Koşan, M. T. ve Tribak, R. (2012). “Rad- $\oplus$ -supplemented modules and cofinitely rad- $\oplus$ -supplemented modules”. *Algebra Colloquium*. 19 (04). 637-648.
- Harmancı, A., Keskin, D. ve Smith, P. F. (1999). “On $\oplus$ – supplemented modules”. *Acta Mathematica Hungarica*. 83 (1-2). 161-169.
- Hungerford, T. W. (1973). *Algebra*. 1st. ed., Springer-Verlag, New York.
- Kasch, F. (1982). *Modules and rings*. 1st. ed., London Mathematical Society by Academic Press.
- Koşan, M. T. ve Tütüncü, D. K., (2007). “H-Supplement duo modules”. *Journal of Algebra and Its Applications*. 6 (6). 965-971.
- Koşar, B. (2014). *T-genelleştirilmiş tümlenmiş modüller*. Doktora Tezi. Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 87, Samsun.
- Koşar, B. , Nebiyev C. ve Sökmez N. (2015). “ g – supplemented modules”. *Ukrainian Mathematical Journal*. 67 (6). 861-864.
- Koşar, B., Nebiyev C. ve Pekin A. (2019). “A Generalization of g – supplemented modules”. *Miskolc Mathematical Notes*. 20 (1). 345-352.
- Koşar, B. ve Pekin, A. (2021). “Some properties of (amply) g -radical supplemented modules”. *Miskolc Mathematical Notes*, 22 (2). 755-762.
- Mikhalev, A. V. and Tuganbaev, A. A. (1999). “Distributive modules and rings and their close analogs”. *Math. Sci.*, 93 (2). 149-253.
- Mohamed, S. H. and Müller, B. J. (1990). *Continuous and discrete modules*. London Math. Soc. LNS 147, Cambridge Univ. Press. 126p.
- Nebiyev, C. ve Pancar, A. (2013). “On supplement submodules”. *Ukrainian Mathematical Journal*. 65 (7). 1071-1078.
- Nebiyev, C. ve Ökten, H. H. (2018). “ $\oplus - g$ – supplemented modules”. Presented in ‘*The International Symposium: New Trends in Rings and Modules I*’, Gebze Technical University, Gebze- Kocaeli-Turkey.
- Nebiyev, C. ve Pancar, A. (2011). “On strongly $\oplus$ – supplemented modules”. *Ukrainian Mathematical Journal*. 63 (5). 768-775.
- Sharpe, D. W. and Vamos, P. (1972). *Injective modules*. 1st. ed., Lectures in Pure Mathematics University of Sheffield, The Great Britain.
- Talebi, Y., Hamzekolaee, A. R. M. ve Tercan A. (2014). “Goldie-rad-supplemented modules”. *An. Ştiinţ. Univ. “Ovidius” Constanta Seria Matematica*. 22 (3). 205-218.

- Wisbauer, R. (1991). *Foundations of module and ring theory*. 606, Gordon and Breach, Philadelphia.
- Xue, W. (1996). "Characterizations of semiperfect and perfect rings". *Publicacions Matematiques*. 40 (1). 115-125.
- Zöschinger, H. (1974). "Komplementierte moduln über Dedekindringen". *J. Algebra*. 29, 42-56.



ÖZ GEÇMİŞ

2008 yılında Samsun'da Milli Piyango Anadolu Lisesi'ni bitirdikten sonra Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi'nden 2012 yılında mezun oldu. 2010-2012 yılları arasında Ondokuz Mayıs Üniversitesi'nde Formasyon eğitimi aldı. 2015 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans Eğitimini bitirdi. 2016 yılında Milli Eğitim Bakanlığına bağlı Halil İyison Anadolu İmam Hatip Lisesi'ne öğretmen olarak atandı. Halen bu okulda Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır. 2017 yılında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında Doktora Eğitimine başladı (06.01.2023).

İletişim Bilgileri

ORCID ID : 0000-0001-8924-0956

Yayınlar:

1. Nebiyev, C. ve Özdemir, H. B. (2020, August). “ $\oplus - g$ – rad-supplemented modules”. *9th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA-2020)*, Scopje-North Macedonia.
2. Nebiyev, C. ve Özdemir, H. B. (2021, May). “On $\oplus - g$ – rad-supplemented modules”. *4th International E-Conference on Mathematical Advances and Applications (ICOMAA-2021)*, Yıldız Technical University, İstanbul.
3. Nebiyev, C. ve Özdemir, H. B. (2021, May). “Strongly $\oplus - g$ – rad-supplemented modules”. *4th International E-Conference on Mathematical Advances and Applications (ICOMAA-2021)*, Yıldız Technical University, İstanbul.
4. Nebiyev, C. ve Özdemir, H. B. (2022). “ $\oplus - g$ – rad-supplemented modules”. *Miskolc Mathematical Notes*. (kabul edildi).
5. Özdemir, H. B. ve Nebiyev, C. (2021, December). “Cofinitely $\oplus - g$ – rad-supplemented modules”. *5th International Online Conference on Mathematics, (ICOM-2021)*, Fatih Sultan Mehmet Vakıf University, İstanbul.
6. Özdemir, H. B. ve Nebiyev, C. (2021, December). “On strongly $\oplus - g$ – rad-supplemented modules”. *5th International Online Conference on Mathematics, (ICOM-2021)*, Fatih Sultan Mehmet Vakıf University, İstanbul.
7. Özdemir, H. B. ve Nebiyev, C. (2022, June). “Some properties of $\oplus - g$ – rad-supplemented modules”. *6th International Hybrid Conference on Mathematics, (ICOM-2022)*, Fatih Sultan Mehmet Vakıf University, İstanbul.
8. Özdemir, H. B. ve Nebiyev, C. (2022). “Strongly $\oplus - g$ – rad-supplemented modules”. *Miskolc Mathematical Notes*. (kabul edildi).