

1. GİRİŞ

Bir M diferensiyellenebilir manifoldu verildiğinde, M üzerinde temel diferensiyellenebilir elemanların (fonksiyon, vektör alanı, 1-form, konneksiyon, metrik ve tensör alanı) diğer diferensiyellenebilir manifoldlara genişletilmesi ve M üzerindeki geometrik yapılarla diğer diferensiyellenebilir manifoldlar üzerindeki geometrik yapılar arasındaki ilişki diferensiyel geometri açısından önemli bir problemdir. Bunun çözümünde, genellikle M üzerinde geometri yapmak için gerekli bazı diferensiyellenebilir elemanların diğer diferensiyellenebilir manifoldlara taşınması gerekmektedir. Bu yolla, M ve diğer diferensiyellenebilir manifoldların geometrisi arasında ilişkiler elde edilebilir.

M diferensiyellenebilir manifolduna diffeomorfik diferensiyellenebilir manifoldlar haricinde, M ile en yakın ilişkili olan, M nin tanjant demetinin total uzayı olan $T(M)$ diferensiyellenebilir manifolddudur. M üzerindeki bir diferensiyellenebilir yapı $T(M)$ üzerine daima bir diferensiyellenebilir yapı indirgemektedir. 1968 yılında A. Morimoto “Prolongations of G-Structures to Tangent Bundles” isimli çalışmasında M üzerindeki G-yapılarını M nin tanjant demetine taşımıştır.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde, Lie grupları , demetler ve G- yapıları ile ilgili temel kavramlar verilecektir.

Bu çalışmanın diğer bölümlerinde, tez çalışmasının altyapısını oluşturan A. Morimoto’nun “G-yapılarının Tanjant Demetlere Taşınmaları” adlı makalesi incelenecektir. Teoremlerin ispatları kaynaklarda mevcut olmayıp bizzat tez yazarı tarafından yapılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Diferensiyellenebilir manifold ve diferensiyellenebilir manifoldlarla ilgili kavramlar bir çok kaynakta bulunabilir. Çalışmanın konusu da göz önünde bulundurularak bu bölümde Lie grupları, demetler, asli lif demetleri, G-yapıları hakkında önceden elde edilmiş bilgiler özetlenecektir.

Bu çalışmada C^∞ -diferensiyellenebilir bir manifolda kısaca diferensiyellenebilir manifold denilecek ve M ile gösterilecektir. Ayrıca iki diferensiyellenebilir manifold arasında C^∞ -diferensiyellenebilir bir $f : M \rightarrow N$ dönüşümüne de kısaca diferensiyellenebilir dönüşüm denilecektir. Bununla birlikte bu çalışmada komşuluk denildiğinde açık komşuluk anlaşılabacaktır.

Bu çalışmada, M ve N diferensiyellenebilir diferensiyellenebilir manifoldlarının kartezyen çarpımı $M \times N$ ile ifade edilecektir. Ayrıca $M \times N$ diferansiyellenebilir diferensiyellenebilir manifoldunun tanjant demeti olan $T(M \times N)$, $T(M) \times T(N)$ ile özdeşleştirilecektir.

2.1. Lie Grupları

2.1.1. Tanım

G , diferensiyellenebilir manifold yapısına sahip bir cebirsel grup ve G nin grup işlemi $\theta : G \times G \rightarrow G$ olsun. Eğer θ grup işlemi diferensiyellenebilir ise, G ye bir Lie grubu denir [1].

2.1.2. Örnek

$GL(n, \mathbb{R})$ bir Lie grubudur.

2.1.3. Tanım

G bir Lie grubu olsun. Her bir $a \in G$ için

$$L_a : G \rightarrow G, L_a(X) = \theta(a, X)$$

$$R_a : G \rightarrow G, R_a(X) = \theta(X, a)$$

ile tanımlı diferensiyellenebilir dönüşümlere sırasıyla G nin $a \in G$ ile sol ve sağ ötelemeleri denir [4].

2.1.4. Tanım

G bir Lie grubu olsun. Bu durumda $\forall a \in G$,

$$\sigma_a : G \rightarrow G, \forall g \in G, \sigma_a(g) = a.g.a^{-1}$$

dönüşümü tanımlansın. Bu durumda σ_a dönüşümünün tanjant dönüşümü olan $T\sigma_a = L_a \circ R_{a^{-1}}$ dönüşümüne G nin $a \in G$ ile adjoint reprezentasyonu (gösterimi) denir ve $Ad a$ ile gösterilir [4].

2.1.5. Önerme

G bir Lie grubu olsun. Bu durumda G bir Hausdorff uzaydır [1].

2.1.6. Tanım

G ve G' birer Lie grubu ve $f : G \rightarrow G'$ bir homomorfizm olsun. Eğer f dönüşümü diferensiyellenebilir ise $f : G \rightarrow G'$ dönüşümüne bir Lie grup homomorfizmi denir [4].

2.1.7. Tanım

G bir Lie grubu olsun. Aşağıdaki iki özelliği sağlayan (φ, K) ikilisine G nin bir Lie alt grubu denir.

* K bir Lie grubudur.

* $\varphi : K \rightarrow G$ dönüşümü bire bir Lie grup homomorfizmidir [4].

2.1.8. Teorem

G bir Lie grubu ve $H \subset G$ bir Lie alt grubu olsun. H alt grubu G manifoldunun bir imbedded alt manifoldu ise H, G de kapalıdır [2].

2.1.9. Teorem (*Kapalı alt grup teoremi*)

G bir Lie grubu, $H \subset G$ G nin bir cebirsel alt grubu olacak şekildeki kapalı bir alt kümesi olsun. Bu durumda H, G nin bir imbedded Lie alt grubudur [2].

2.1.10. Tanım (Etki)

G bir Lie grubu, G in grup işlemi μ , G nin birim elemanı e ve M bir manifold olsun.

$T : G \times M \rightarrow M$ diferensiyellenebilir dönüşümü her bir $g, h \in G$ ve her bir $x \in M$ için

$$* T(\mu(g, h), x) = T(g, T(h, x))$$

$$* T(e, x) = x$$

özelliklerini sağlıyorsa G Lie grubu M manifoldu üzerine bir Lie trasformasyon grubu olarak soldan etki ediyor denir. Benzer biçimde

$$T' : M \times G \rightarrow M$$

diferensiyellenebilir dönüşümü

her bir $g, h \in G$ ve her bir $x \in M$ için

$$* T'(x, \mu(g, h)) = T(T(g, x), h)$$

$$* T(x, e) = x$$

özellikleri sağlanıyorsa G Lie grubu M manifoldu üzerine bir Lie trasformasyon grubu olarak sağdan etki ediyor denir. Bu durumda T ve T' dönüşümlerine M manifoldu üzerinde sırasıyla sol ve sağ etki denir [2,4].

2.1.11. Tanım

G bir Lie grubu , M bir manifold , G nin M üzerine sol etkisi T olsun.

$\forall x \in M$ için

$$T(g, x) = x \Rightarrow g = e$$

ise T etkisine etkin etki,

$\exists x \in M$ için

$$T(g, x) = x \Rightarrow g = e$$

özellikli sağlanıyorsa T ye serbest etki denir [2,4].

2.2.Diferensiyellenebilir Lif Demeti Kavramı

2.2.1. Tanım: (Lifli manifold)

P ve M diferensiyellenebilir manifoldlar, $\pi : P \rightarrow M$ bir dönüşüm olsun. Eğer π bir örten submersion ise, (P, π, M) üçlüsüne bir lifli diferensiyellenebilir manifold denir. Bir (P, π, M) lifli diferensiyellenebilir manifoldunda P ye total uzay, M ye taban uzay, π ye projeksiyon ve her bir $x \in M$ noktası için $\pi^{-1}(x) \subset P$ altkümeye de x üzerindeki lif denir [8].

$\pi^{-1}(x)$ lifi P_x ve bir (P, π, M) lifli manifoldu da kısaca P ile gösterilebilir. Bir lifli (P, π, M) manifoldunun π projeksiyonu bir örten submersion olduğundan P_x , P nin bir kapalı imbedded altmanifoldudur. $\dim P_x = \dim P - \dim M$ sayısına P nin lif

boyutu denir. Burada imbedded altmanifold ile, altuzay topolojisine sahip immersed altmanifold kastedilmektedir.

Bir (P, π, M) lifli manifoldu için genelde P uzayının tümü, M manifoldu ile bir başka manifoldun kartezyen çarpımına diffeomorfik olmak zorunda değildir. Fakat π projeksiyonunun submersion olmasından dolayı bir lokal çarpım yapısı belirlemek mümkündür. Kapalı fonksiyon teoreminden, her bir $p \in P$ noktası için

$$pr_1(t_a(p)) = \pi(p)$$

koşulunu sağlayacak bir $\tilde{U}_a \subset P$ komşuluğu, bir diğer V_a manifoldu ve bir

$$t_a : \tilde{U}_a \rightarrow \pi(\tilde{U}_a) \times V_a$$

diffeomorfizmi vardır. Böylece, total uzayın her bir noktası, bir çarpım manifolduna benzeyen komşuluğa sahiptir. t_a üzerindeki yukarıda belirtilen koşul;

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U}_a & \xrightarrow{t_a} & \pi(\tilde{U}_a) \times V_a \\ \pi|_{\tilde{U}_a} \downarrow & & \downarrow pr_1 \\ \pi(\tilde{U}_a) & \xrightarrow{id_{\pi(\tilde{U}_a)}} & \pi(\tilde{U}_a) \end{array}$$

değişmeli diyagramı ile de ifade edilebilir; burada pr_1 ile birinci izdüşüm fonksiyonu ve id ile de birim fonksiyonu gösterilmektedir.

Bir lifli manifoldun total uzayı üzerinde bir lokal çarpım yapısı özel lokal koordinat sistemlerinin kullanılmasına imkan sağlar. Bunu aşağıdaki tanımla verelim.

2.2.2. Tanım (Uyarlanmış koordinat sistemi)

Bir lifli manifold (P, π, M) , $\text{Boy } M = m$, $\text{Boy } P = m + n$ ve bir $\tilde{U} \subset P$ açık alt kümesi üzerinde bir koordinat sistemi

$$z : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$$

olsun. $pr_1 : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^m$ olmak üzere ,

$$p, p' \in \tilde{U} \text{ için}$$

$$\pi(p) = \pi(p') \Rightarrow pr_1(z(p)) = pr_1(z(p'))$$

önermesi doğru ise, z ye bir uyarlanmış (adapted) koordinat sistemi denir [8].

Bu tanıma göre, aynı $P_x \cap \tilde{U}$ lifinde bulunan noktaların koordinatlarının ilk m tanesi eşit ve geri kalan n tanesi farklı olacak biçimde bir koordinat sistemi seçilebileceği anlaşılmaktadır.

Bir lifli manifold (P, π, M) ve bir $p \in P$ olsun. p nin komşuluğunda uyarlanmış koordinatlar lokal çarpım yapısından oluşturulabilir. Bunun için

$$W \subset \pi(\tilde{U})$$

olmak üzere

$$\pi(p) = pr_1(t_\alpha(p)) \in M$$

noktasının W komşuluğunda bir

$$\tilde{x} : W \rightarrow \mathbb{R}^m$$

koordinat sistemi ve

$$pr_2(t_\alpha(p)) \in M \text{ nin}$$

$$V \subset V_\alpha$$

komşuluğunda bir

$$\tilde{y} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$$

koordinat sistemi seçilerek, tıpkı çarpım manifoldlarında olduğu gibi, pr_2 ikinci izdüşüm fonksiyonu olmak üzere

$$z = (\tilde{x} \circ pr_1 \circ t_\alpha, \tilde{y} \circ pr_2 \circ t_\alpha)$$

eşitliği ile ,

$$z : t_\alpha^{-1}(W \times V) \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$$

dönüşümü tanımlansın. z nin bir uyarlanmış koordinat sistemi olduğu açıktır.

Karşıt olarak, herhangi bir

$$z : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$$

uyarlanmış koordinat sistemi,

$$\tilde{x}(x) = pr_1(z(p)), \quad p \in P_x \cap \tilde{U}$$

olacak biçimde bir

$$\tilde{x} : \pi(\tilde{U}) \rightarrow \mathbb{R}^m$$

koordinat sistemi verir.

Bu koordinat sistemi 2.1.2. Tanım'ından p nin seçilişinden bağımsızdır.

M üzerindeki koordinat fonksiyonları

$$x^i \quad (1 \leq i \leq m)$$

ise, P üzerindeki koordinat fonksiyonları

$$(x^i, y^j), (1 \leq j \leq n)$$

biçimindedir. Burada x^i ifadesi, hem $\pi(U) \rightarrow IR$ fonksiyonunu ve hem de $U \rightarrow \pi(U) \rightarrow IR$ bileşke fonksiyonu ifade edilmektedir.

2.2.3. Tanım (*Trivial lifli manifold*)

Bir lifli manifold (P, π, M) ve bir manifold E olmak üzere eğer,

$$t : P \rightarrow M \times E$$

dönüşümü

$$pr_1 \circ t = \pi$$

olacak biçimde bir diffeomorfizm ise, (E, t) ikilisine P nin bir [global] trivializasyonu, E ye P nin model lifi (veya uzayı) ve en azından bir trivializasyona sahip (P, π, M) lifli manifolduna da [global] trivial lifli manifold denir [8].

Bu tanıma göre, bir trivial lifli manifoldun total uzayının kartezyen çarpım yapısına sahip olması gerekmektedir. Bununla birlikte, iki farklı trivializasyona karşılık gelen model lifler diffeomorfik olmak zorundadır.

$$pr_1 \circ t = \pi \text{ koşulu,}$$

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{t} & M \times E \\ \pi \downarrow & & \downarrow pr_1 \\ M & \xrightarrow{id_M} & M \end{array}$$

diyagramının değişmeli olmasıyla aynı anlama sahiptir.

2.2.4. Tanım (Demet veya lokal trivial lifli manifold)

Bir lifli manifold (P, π, M) ve $x \in M$ olsun. Herhangi bir manifold E , x in bir komşuluğu U_x ve

$$pr_1 \circ t_x = \pi|_{\pi^{-1}(U_x)}$$

koşulunu sağlayacak bir diffeomorfizm

$$t_x : \pi^{-1}(U_x) \rightarrow U_x \times E$$

ise o zaman (U_x, E, t_x) üçlüsüne x in U_x komşuluğunda P nin bir lokal trivializasyonu, taban uzayının her bir noktasının komşuluğunda en az bir lokal trivializasyona sahip (P, π, M) lifli manifolduna demet (veya lokal trivial lifli manifold), E ye de demetin model lifi denir [8].

(P, π, M) lifli manifoldu bir demet ise bu demet (P, π, M, E) ile gösterilir.

$$pr_1 \circ t_x = \pi|_{\pi^{-1}(U_x)} \text{ koşulu,}$$

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_x) & \xrightarrow{t_x} & U_x \times E \\ \pi \downarrow & & \downarrow pr_1 \\ U_x & \xrightarrow{id_{U_x}} & U_x \end{array}$$

diyagramının değişmeli olmasıyla aynı anlama sahiptir.

M nin her bir noktası komşuluğunda lokal trivializasyonların varlığı doğrudan doğruya π nin bir submersion olmasını gerektirir.

Bir [global] trivial lifli manifold bir demet olup, bir trivial demet adını alır. Fakat her demet, bir trivial demet olmak zorunda değildir [8].

Yukarıda verilen demet kavramı bazı kaynaklarda lif demeti olarak da verilmektedir.

2.2.5. Örnek

m -boyutlu bir M manifoldunun tanjant manifoldu $T(M)$ ve $\pi_M : T(M) \rightarrow M$ dönüşümü, M nin herhangi bir x noktasındaki tanjant vektörünü x noktasına karşılık getiren kanonik projeksiyon olsun. O zaman $(T(M), \pi_M, M)$ üçlüsü, IR^m model lifi ile birlikte bir demettir. Çünkü, M nin $\{x^i : 1 \leq i \leq m\}$ lokal koordinat sistemine göre herhangi bir $X \in T(M)$ elemanı

$$X = \sum_{i=1}^m a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_x, \quad \pi_M(X) = x$$

şeklinde ifade edilir. Böylece, $T(M)$ üzerindeki uyarlanmış koordinat sistemi

$$(x^i, \dot{x}^i) \cong (x^i, dx^i), \quad (1 \leq i \leq m)$$

şeklindeir. Buradaki x^i ler $x^i \circ \pi$ ve $\dot{x}^i$ ler ise, $\dot{x}^i(X) = X[x^i] = a^i$ şeklinde tanımlanır.

x^i koordinat fonksiyonları $x \in M$ için $U_x \subset M$ koordinat komşuluğunda tanımlı olacak biçimde

$$t_x : \pi_M^{-1}(U_x) \rightarrow U_x \times IR^m$$

dönüşümü,

$$t_x(X) = (\pi_M(X), dx(X)) = (x, \dot{x}(X))$$

olarak tanımlansın. Böylece

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_x) & \xrightarrow{t_x} & U_x \times IR^m \\ \pi \downarrow & & \downarrow pr_1 \\ U_x & \xrightarrow{id_{U_x}} & U_x \end{array}$$

değişmeli diyagramı elde edilir. Çünkü,

$\forall X \in \pi_M^{-1}(U_M)$ tanjant vektörü için;

$$(pr_1 \circ t_x)(X) = pr_1(t_x(X)) = pr_1(x, dx(X)) = x \quad (2.1)$$

ve

$$(id_{U_x} \circ \pi_M)(X) = id_{U_x}(\pi_M(X)) = x \quad (2.2)$$

eşitlikleri elde edilir. Eş. 2.1 ve Eş. 2.2 $\forall X \in \pi_M^{-1}(U_x)$ tanjant vektörü için sağlandığından;

$$pr_1 \circ t_x = id_{U_x} \circ \pi_M$$

eşitliği yazılabilir. Böylece t_x diffeomorfizm olup, $T(M)$ lifli manifoldu için bir lokal trivializasyon olur. $(T(M), \pi_M, M)$ bir demettir [8].

2.2.6. Önerme

G bir Lie grubu, G nin grup işlemi $\mu : G \times G \rightarrow G$ olsun. Bu durumda μ nün tanjant dönüşümü olan $T\mu : T(G) \times T(G) \rightarrow T(G)$ dönüşümü

$X \in T_x G$ ve $Y \in T_y G$ için

$$T\mu(X, Y) = TL_x(Y) + TL_y(X)$$

dir [4].

İspat

$x, y, g \in G$ için

$$J_x : G \rightarrow \{x\} \times G \quad J_x(g) = (x, g)$$

$$J_y : G \rightarrow G \times \{y\} \quad J_y(g) = (g, y)$$

dönüşümleri tanımlansın. Her bir $g \in G$ için

$$(\mu \circ J_x)(g) = \mu(x, g) = L_x(g)$$

$$(\mu \circ J_y)(g) = \mu(g, y) = R_y(g)$$

dir. Bu durumda $(\mu \circ J_x) = L_x$ ve $(\mu \circ J_y) = R_y$ dir.

$Z \in T(G)$ için

$$TJ_x : T(G) \rightarrow \{0_x\} \times T(G) \quad TJ_x(Z) = (0_x, Z)$$

$$TJ_y : T(G) \rightarrow T(G) \times \{0_y\} \quad TJ_y(Z) = (Z, 0_y)$$

eşitlikleri doğrudur.

$X \in T_x G, Y \in T_y G$ için

$$(T\mu \circ TJ_x)(Y) = T\mu(0_x, Y)$$

$$(T\mu \circ TJ_y)(X) = T\mu(X, 0_y)$$

$$\Rightarrow (T\mu \circ TJ_x)(Y) + (T\mu \circ TJ_y)(X) = T\mu(0_x, Y) + T\mu(X, 0_y)$$

$$\Rightarrow (T\mu \circ TJ_x)(Y) + (T\mu \circ TJ_y)(X) = T\mu(0_x + X, Y + 0_y)$$

$$\Rightarrow (T\mu \circ TJ_x)(Y) + (T\mu \circ TJ_y)(X) = T\mu(X, Y)$$

$$\Rightarrow T(\mu \circ J_x)(Y) + T(\mu \circ J_y)(X) = T\mu(X, Y)$$

$$\Rightarrow TL_x(Y) + TR_y(X) = T\mu(X, Y)$$

bulunur. Bu durumda

$X \in T_x G, Y \in T_y G$ için

$$T\mu(X, Y) = TL_x(Y) + TR_y(X)$$

eşitliği doğrudur. Böylece 2.1.6. Önerme ispatlanmış olur.

2.2.7. Önerme

G bir Lie grubu ve grup işlemi $\mu : G \times G \rightarrow G$ olsun. Bu durumda G nin tanjant demeti olan $T(G)$ de $T\mu : T(G) \times T(G) \rightarrow T(G)$ işlemiyle birlikte bir Lie grubudur [4].

İspat

G bir Lie grubu olduğundan G üzerinde bir diferensiyellenebilir manifold yapısı vardır. Bu yapıyla birlikte G bir diferensiyellenebilir manifolddur. G bir diferensiyellenebilir manifold olduğundan G nin tanjant demeti olan $T(G)$ de bir diferensiyellenebilir manifolddur.

2.2.6. Önermeden $T(G)$ üzerinde ,

$X \in T_x G, Y \in T_y G$ için

$$T\mu(X, Y) = TL_x(Y) + TR_y(X)$$

özellikindeki $T\mu : TG \times TG \rightarrow TG$ bir işlem vardır ve bu işlemle birlikte $T(G)$ bir cebirsel gruptur. G Lie grubunun birim elemanı e ile gösterilsin. Bu durumda bu cebirsel grubun birim elemanı $\bar{\theta} = \sum_i \theta^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_e$ ile tanımlıdır. $\mu : G \times G \rightarrow G$ işlemi diferensiyellenebilir olduğundan bu dönüşümün tanjant dönüşümü olan $T\mu : TG \times TG \rightarrow TG$ dönüşümü de diferensiyellenebilirdir. Bu durumda $T(G)$, $T\mu$ işlemiyle birlikte bir Lie grubudur.

2.2.8. Tanım (Vektör alanı)

M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. $X : M \rightarrow T(M)$ dönüşümü, $\pi \circ X = I_M$ özelliğini sağlıyorsa X dönüşümüne M diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde bir vektör alanı denir [2]. M diferensiyellenebilir manifoldu üzerindeki tüm vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ ile gösterilir.

2.2.9. Tanım

G bir Lie grubu olsun. Bu durumda, her bir $a \in G$ için $TL_a(X) = X$ olacak şekildeki $X \in \chi(G)$ vektör alanına bir sol invaryant vektör alanı, her bir $a \in G$ için $TR_a(X) = X$ olacak şekildeki $X \in \chi(G)$ vektör alanına bir sağ invaryant vektör alanı denir. G üzerindeki tüm sol ve sağ invaryant vektör alanlarının kümesi sırasıyla $L(G)$ ve $R(G)$ ile gösterilir [2].

2.2.10. Tanım

G bir Lie grubu olsun. G üzerindeki sol invaryant vektör alanları kümesi olan $L(G)$ ye G nin Lie cebiri denir [2].

2.2.11. Önerme

G bir Lie grubu ve G nin birim elemanı e olsun. Bu durumda $\varepsilon : L(G) \rightarrow T_e G$, $\varepsilon(X) = X_e$ ile tanımlı dönüşüm bir izomorfizmdir [2].

2.2.12. Tanım

P ve M iki diferensiyellenebilir manifold, $\pi : P \rightarrow M$ örten ve diferensiyellenebilir bir dönüşüm, G bir Lie grubu ve G nin M diferensiyellenebilir manifoldu üzerine etkisi T olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa (P, π, M, G) dörtlüsüne taban uzayı P , baz uzayı M , projeksiyonu π ve yapı grubu G olan bir asli lif demeti denir [10].

* T dönüşümü bir serbest etkidir.

*Herhangi $p, p' \in P$ için $\pi(p) = \pi(p') \Leftrightarrow p = T(p', a)$ olacak şekilde bir $a \in G$ vardır.

* Her bir $x \in M$ için x noktasının bir U açık komşuluğu üzerinde

$$\Psi(p) = (\pi(p), \gamma(p))$$

ile tanımlı

$$\Psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G, \quad a \in G \text{ ve } \gamma(p) \in G$$

için

$$\Psi(p.a) = (\pi(p), \gamma(p)a)$$

özellikliğini sağlayan bir Ψ diffeomorfizmi ve bir

$$\gamma : \pi^{-1}(U) \rightarrow G \text{ diferensiyellenebilir dönüşümü vardır.}$$

2.2.13.Örnek (*n*-boyutlu bir *M* diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde lineer çatı demeti $F(M)$)

$x \in M$ noktası üzerinde bir lineer çatı, $T_x M$ nin $u = (X_1, \dots, X_n)$ sıralı baz n-lilerinden oluşur. $F(M)$, her bir $x \in M$ noktası üzerindeki u lineer çatılarının kümesi olsun. $\pi : F(M) \rightarrow M$ dönüşümü, $\pi(u) = x$ olacak biçimde tanımlansın. Genel lineer grup olan $GL(n, \mathbb{R})$, $F(M)$ diferensiyellenebilir manifoldu üzerine, $u = (X_1, \dots, X_n) \in F(M)$

ve

$$a = [a_j^i] \in GL(n, \mathbb{R})$$

için

$$u.a = \left(\sum_{j=1}^n a_1^j X_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_n^j X_j \right) \in F(M)$$

biçiminde sağdan etki eder. Bu etki bir serbest etkidir.

$u, v \in F(M)$ ve $\pi(u) = \pi(v)$ olsun. Bu durumda $u = v.a$ olacak şekilde bir $a \in GL(n, \mathbb{R})$ vardır. *M* diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde, $x \in M$ noktası

komşuluğunda bir lokal koordinat sistemi $\{(U, x^i)\}$ olsun. Her bir $u = (X_1, \dots, X_n) \in F(M)$ için

$$X_i = \sum_{k=1}^n X_i^k \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right)_x, \quad 1 \leq i \leq n$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada $[X_i^k]$ matrisi $n \times n$ -tipinden regüler matristir. Bu ifade kullanılırsa $\pi^{-1}(U)$, $U \times GL(n, IR)$ ile birebir karşılık gelir. Bu durumda $\pi^{-1}(U)$ üzerinde $((x^h), [X_k^i])$ lokal koordinat sistemi olarak alınırsa, $F(M)$ bir $(n+n^2)$ boyutlu diferensiyellenebilir manifold olur. Bu yapı ile birlikte $\pi^{-1}(U) \xrightarrow{\Phi} U \times GL(n, R)$ dönüşümü bir diffeomorfizmdir. Bu durumda $(F(M), \pi, M, GL(n, IR))$ bir asli lif demetidir. Bu asli lif demetine M üzerindeki lineer çatı demeti denir.

R^n nin standart bazı $\{e_1, \dots, e_n\}$ ile gösterilsin. Bir $(X_1, \dots, X_n) \in F(M)$ için $u(e_i) = X_i$ olacak biçimde tanımlandığında $u : R^n \rightarrow T_x M$ dönüşümü bir lineer izomorfizmdir. Ayrıca bunun tersi de doğrudur. Yani her bir $u : R^n \rightarrow T_x M$ lineer izomorfizmine bir $(X_1, \dots, X_n) \in F(M)$ çatısı karşılık gelir. Bu durumda $F(M)$ çatı demeti, M nin her bir x noktasındaki $u : R^n \rightarrow T_x M$ lineer izomorfizmlerinin ailesi olarak ifade edilebilir [7].

2.2.14. Tanım

$P = (P, \pi, M, G)$ bir asli lif demeti olsun. Bu durumda bir $f : M \rightarrow P$ dönüşümü $\pi \circ f = I_M$ özelliğini sağlayan diferensiyellenebilir bir dönüşüm ise f dönüşümüne P üzerinde bir çapraz kesit denir.

2.2.15. Tanım

$P = (P, \pi, M, G)$ bir asli lif demeti, $\{U_\alpha\}$, M diferensiyellenebilir manifoldunun bir açık örtüsü olsun. Her bir α, β ve $\forall x \in U_\alpha \cap U_\beta$ için

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G, \quad g_{\alpha\beta}(x) = \gamma_\alpha(p) \cdot [\gamma_\beta(p)]^{-1}, \quad (p \in \pi^{-1}(x))$$

biçiminde tanımlı diferensiyellenebilir $g_{\alpha\beta}$ dönüşümüne P asli lif demetinin U_α ya karşılık gelen transition (geçiş) dönüşümü denir. Buradaki $g_{\alpha\beta}$ dönüşümü her bir

$$x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \text{ için}$$

$$g_{\alpha\beta}(x) \cdot g_{\beta\gamma}(x) = g_{\alpha\gamma}(x) \quad (2.3)$$

özelliğini sağlar [7].

P asli lif demetinin U_α ve U_β komşuluğundaki lokal trivializasyonları sırasıyla Ψ_α ve Ψ_β olsun. Bu durumda

$$\Psi_\alpha \circ [\Psi_\beta]^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times G \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times G,$$

dönüşümü, her bir

$$(x, g) \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times G \text{ için}$$

$$(\Psi_\alpha \circ [\Psi_\beta]^{-1})(x, g) = (x, g_{\alpha\beta}(x) \cdot g)$$

özelliğini sağlar. Bunun tersi de doğrudur. Bu nedenle

$$(\Psi_\alpha \circ [\Psi_\beta]^{-1})(x, g) = (x, g_{\alpha\beta}(x) \cdot g)$$

özelliğini sağlayan $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$ dönüşümüne de transition (geçiş) dönüşümü denilir.

2.2.16. Teorem (*Varlık teoremi*)

M bir diferensiyellenebilir manifold ve G bir Lie grubu olsun. M de bir U_α açık komşuluğu ve Eş.2.3 koşulunu sağlayan $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$ dönüşümleri verilsin.

Bu durumda transition fonksiyonları $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$ olan bir P asli lif demeti oluşturulabilir [9,10].

2.2.17. Tanım

$P = (P, \pi, M, G)$ ve (P', π', M, G') iki asli lif demeti olsun. $h : G \rightarrow G'$ bir Lie grup homomorfizmi ve $f : P \rightarrow P'$ dönüşümü ,

her bir $p \in P$ ve $a \in G$ için

$$f(p.a) = f(p).h(a)$$

özellikliğini sağlayan bir diferensiyellenebilir dönüşüm ise f fonksiyonuna , P den P' içine bir asli lif demeti homomorfizmi denir [10].

2.2.18. Tanım

$P = (P, \pi, M, G)$ ve (P', π', M, G') iki asli lif demeti, G , G' nün bir lie altgrubu ve $f : P \rightarrow P'$ bir asli lif demeti homomorfizması olsun. Bu durumda $h : G \rightarrow G'$ dönüşümü inclusion (içerme) dönüşümü ise f dönüşümüne bir reduction (indirgeme) denir. Bu durumda P ye, P' asli lif demetine indirgenebilir (reducible) bir asli lif demeti denir [10].

2.2.19. Tanım

M bir n -boyutlu diferensiyellenebilir manifold ve G , $GL(n, \mathbb{R})$ in bir Lie altgrubu olsun. $F(M)$ çatı demetinin G ye indirgenmişine, M diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde bir G -yapı adı verilir. Bu durumda M diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde bir P , G -yapısı, herhangi $p \in P$, $a \in GL(n, \mathbb{R})$ için

$$p.a \in P \Leftrightarrow a \in G$$

özellikliğini sağlayan $F(M)$ nin bir alt diferensiyellenebilir manifoldudur [10].

2.2.20. Tanım

M bir n -boyutlu diferensiyellenebilir manifold olsun. Bu durumda her bir $x \in M$ için $\{X_1(x), \dots, X_n(x)\}$ kümesi $T_x M$ in bir bazı olacak şekilde $X_1, \dots, X_n$ vektör alanları var ise M diferensiyellenebilir manifolduna, paralelleştirilebilir diferensiyellenebilir manifold denir [10].

2.2.21. Teorem

Bir M diferensiyellenebilir manifoldunun paralelleştirilebilir olması için gerek ve yeter koşul , M diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde bir $\{e\}$ -yapı olmasıdır [10].

İspat

$GL(n, \mathbb{R})$ Lie grubunun birim elemanı e olmak üzere M diferensiyellenebilir manifoldu bir $\{e\}$ -yapılı olsun. Bu durumda M üzerinde bir $\{e\}$ -yapı P olmak üzere $f : P \rightarrow F(M)$ bir reduction dönüşümü vardır. M nin bir açık örtüsü U_α olmak üzere $\pi'^{-1}(U_\alpha)$ ile U_α diffeomorftur. f dönüşümü bir reduction olduğundan $f : P \rightarrow f(P)$ dönüşümü bir diffeomorfizmdir. Bu durumda her bir $x \in M$ için $\{X_1(x), \dots, X_n(x)\}$ kümesi $T_x M$ in bir bazı olacak şekilde $(X_1, \dots, X_n) = u$ lineer çatısı vardır. Bu durumda M diferensiyellenebilir manifoldu paralelleştirilebilirdir. Bunun tersi de doğrudur, yani M diferensiyellenebilir manifoldu paralelleştirilebilir ise M diferensiyellenebilir manifoldu $\{e\}$ -yapılıdır.

2.3. Kompleks Manifoldlar

2.3.1. Tanım

$\vec{V}$ bir reel vektör uzayı olsun. $\vec{V}$ üzerinde

$$J^2 = -id_{\vec{V}}$$

koşulunu sağlayan, $\vec{V}$ nin bir J endomorfizmasına, $\vec{V}$ vektör uzayı üzerinde bir kompleks yapı denir [5].

$\vec{V}$ vektör uzayı üzerinde aşağıdaki biçimde bir skalar çarpım tanımlansın:

Her bir $c, d \in \mathbb{R}$ ve $X \in \vec{V}$ için

$$(c + id).X = cX + dJ(X), \quad (i = \sqrt{-1})$$

Bu durumda $\vec{V}$ yukarıdaki biçimde tanımlı skalar çarpımla birlikte bir kompleks vektör uzayı olur.

Tersine, verilen n -kompleks boyutlu bir $\vec{V}$ kompleks vektör uzayı üzerinde

$$J(X) = i.X, \quad (i = \sqrt{-1})$$

koşulunu sağlayan bir J endomorfizmi tanımlanabilir. Bu durumda $\vec{V}$ vektör uzayı $2n$ -reel boyutlu bir reel vektör uzayı olur. $\vec{V}$ vektör uzayı $2n$ - boyutlu bir reel vektör uzayı olarak düşünüldüğünde, $\vec{V}$ vektör uzayı üzerinde J dönüşümü bir kompleks yapı olur. Böylece $\vec{V}$ nin reel boyutu çift tamsayıdır [5].

2.3.2. Örnek

$$J_0 : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}, \quad J_0(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n) = (y^1, \dots, y^n, -x^1, \dots, -x^n)$$

olarak tanımlansın. Bu dönüşüm, $\mathbb{R}^{2n}$ vektör uzayı üzerinde bir kompleks yapıdır. Bu kompleks yapı $\mathbb{R}^{2n}$ üzerinde kanonik kompleks yapı olarak adlandırılır [5].

2.3.3. Önerme

J ve J' sırasıyla $\vec{V}$ ve $\vec{V}'$ reel vektör uzayları üzerinde kompleks yapılar ve $f : \vec{V} \rightarrow \vec{V}'$ reel lineer bir dönüşüm olsun. $\vec{V}$ ve $\vec{V}'$ birer kompleks vektör uzayı

olarak düşünüldüğünde f dönüşümünün kompleks lineer olması için gerek ve yeter koşul $J'of = foJ$ olmasıdır [5].

$GL(n, \mathbb{C})$ kompleks genel lineer grubu, $GL(2n, \mathbb{R})$ nin

$J_0 = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$ matrisi ile çarpımları değişmeli olan elemanlarından oluşan bir alt grubu ile özdeşleştirilebilir.

Bu özdeşleştirme, A ve B reel $n \times n$ tipinden matrisler ve $A + iB \in GL(n, \mathbb{C})$ olmak üzere

$$A + iB \rightarrow \begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix}$$

biçiminde oluşturulur ve elde edilen bu özdeşleştirmeye $GL(n, \mathbb{C})$ nin reel representasyonu (gösterimi) adı verilir [5].

2.3.4. Tanım

M bir reel $2n$ -boyutlu diferensiyellenebilir manifold olsun. Bu durumda J dönüşümü her bir $x \in M$ noktası için $J_x : T_x M \rightarrow T_x M$ endomorfizmlerine karşılık gelen, $JoJ = -I$ olacak biçimde bir tensör alanı ise J ye M diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde bir almost kompleks yapı, ve bu yapıyla birlikte M diferensiyellenebilir manifolduna bir almost kompleks diferensiyellenebilir manifold denir [5].

2.3.5. Tanım

M bir $2n$ -boyutlu, J almost kompleks yapı bir almost kompleks diferensiyellenebilir manifold ve J_0 Örnek 2.3.2 de tanımlanan, $\mathbb{R}^{2n}$ vektör uzayı üzerinde kanonik kompleks yapı olsun. M diferensiyellenebilir manifoldunun her bir x elemanı üzerinde bir kompleks lineer çatı $u : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow T_x M$, $uoJ_0 = Jou$ olacak biçimdeki lineer izomorfizmlerdir. $T_x M$ vektör uzayı üzerindeki bu J kompleks yapısı $T_x M$

üzerinde bir kompleks vektör uzayı yapısı oluşturur. 2.3.3.Önerme den $u : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow T_x M$ nin bir kompleks lineer çatı olması için gerek ve yeter koşul $u : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow T_x M$ dönüşümünün bir kompleks lineer izomorfizm olmasıdır. Kompleks lineer çatıların oluşturduğu küme M diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde $GL(n, \mathbb{C}; J)$ yapı grubuna sahip bir asli lif demeti tanımlar. Bu asli lif demeti *kompleks lineer çatı demeti* olarak adlandırılır ve $C(M)$ ile gösterilir. U, M diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde bir lokal koordinat komşuluğu olmak üzere $C(M)$ üzerindeki lokal trivializasyonlar,

$$\Psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times GL(n, \mathbb{C}), \quad \Psi(u) = (x, a) ; (x, a) \in U \times GL(n, \mathbb{C}) \quad \text{ için } \quad a = (a_j^i)$$

$$\text{ve } u(e_k) = \sum_{j=1}^n a_k^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

ile tanımlanır [5].

2.3.6. Teorem

M diferensiyellenebilir manifoldunun bir almost kompleks diferensiyellenebilir manifold olması için gerek ve yeter koşul $GL(n, \mathbb{C}; J) = \{a \in GL(2n, \mathbb{R}) \mid a \circ J = J \circ a\}$ olmak üzere M diferensiyellenebilir manifoldunun $GL(n, \mathbb{C}; J)$ -yapılı olmasıdır [10].

İspat

M diferensiyellenebilir manifoldu $GL(n, \mathbb{C}; J)$ yapılı olsun. Bu durumda M diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde kısaca P ile gösterilebilen bir $(P, \pi_P, M, GL(n, \mathbb{C}; J))$ G -yapısı vardır. $\pi(p) = x$ olacak biçimdeki her bir $p \in P$ için $p : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow T_x M$

bir lineer izomorfizmdir. Bu durumda

$J_x = p \circ J \circ p^{-1}$ ile tanımlandığında J_x dönüşümü, $J_x^2 = -id_{T_x M}$ özelliğini sağlayan bir endomorfizm olur. Bu durumda M bir almost kompleks diferensiyellenebilir manifolddur.

M diferensiyellenebilir manifoldu bir almost kompleks diferensiyellenebilir manifold olsun. Bu durumda M diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde 2.3.5. Tanımdaki $C(M)$ bir $GL(n, C; J)$ yapısıdır. M diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde bir $GL(n, C; J)$ yapısı olduğundan 2.3.6. Teorem ispatlanmış olur.

2.3.7. Tanım (Kompleks yapı)

M bir $2n$ -boyutlu diferensiyellenebilir manifold ve M üzerindeki almost kompleks yapı J olsun. Bu durumda her bir $x \in M$ için

$$J_x\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad J_x\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = -\frac{\partial}{\partial x^i} \quad (2.4)$$

sağlanıyorsa J almost kompleks yapısına M diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde bir kompleks yapı denir [5].

M diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde Eş.2.3.1 özelliğini sağlayan bir J almost kompleks yapı var ise bu durumda M diferensiyellenebilir manifoldu bir kompleks diferensiyellenebilir manifolddur. Bu durumda her bir kompleks diferensiyellenebilir manifoldda bir almost kompleks yapı karşılık gelir [7].

M diferensiyellenebilir manifoldunun bir kompleks diferensiyellenebilir manifold olması için gerek ve yeter koşul M diferensiyellenebilir manifolduna karşılık gelen almost kompleks yapının bir kompleks yapı olmasıdır.

3. $T(GL(n, \mathbb{R}))$ NİN $GL(2n, \mathbb{R})$ İÇİNE İMBEDDİNGİ (GÖMÜLMESİ)

M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. Herhangi $c \in \mathbb{R}$, $X, Y \in T_x(M)$ olmak üzere X ve Y tanjant vektörlerinin toplamı ve X tanjant vektörünün $c \in \mathbb{R}$ skaları ile çarpımı sırasıyla $X + Y$ ve $c.X$ ile gösterilir.

$\mathbb{R}^n$ in $x \in \mathbb{R}^n$ ile sağ ötelemesi $\tau_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dönüşümü, $\forall y \in \mathbb{R}^n$ için

$$\tau_x(y) = x + y \quad (3.1)$$

ve $x \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ için

$$\tau_c(x) = c.x$$

ile tanımlansın. (3.2)

3.1. Tanım

$X \in T_x(\mathbb{R}^n)$ ve $Y \in T_y(\mathbb{R}^n)$ iki tanjant vektör olsun. X ve Y vektörlerinin yeni toplamı $X \oplus Y$ ve $X \in T_x(\mathbb{R}^n)$ vektörünün $c \in \mathbb{R}$ ile yeni skalar çarpımı $c \otimes X$ aşağıdaki biçimde tanımlanır [3]:

$$X \oplus Y = T\tau_y(X) + T\tau_x(Y) \quad (3.3)$$

$$c \otimes X = T\tau_c(X) \quad (3.4)$$

3.2. Önerme

$\mathbb{R}^n$ diferensiyellenebilir manifoldunun tanjant demeti $T(\mathbb{R}^n)$, Tanım 3.1 de verilen $\oplus$ ve $\otimes$ işlemleri ile birlikte $2n$ - boyutlu bir vektör uzayıdır [3].

İspat

$x \in IR^n$ in i . bileşeni x^i olsun. Böylece $X \in T_x(IR^n)$, $Y \in T_y(IR^n)$ ve $\forall i, 1 \leq i \leq n$, $a_i, b_i \in IR$ için

$$X = \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_x, \quad Y = \sum_{i=1}^n b_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_y$$

biçiminde ifade edilir. Böylece

$$\begin{aligned} X \oplus Y &= T\tau_y(X) + T\tau_x(Y) \\ &= T\tau_y \left(\sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_x \right) + T\tau_x \left(\sum_{i=1}^n b_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_y \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_i \left(\frac{\partial(\tau_y)^j}{\partial x^i} \right)_x \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_{\tau_y(x)} + \sum_{i,j=1}^n b_i \left(\frac{\partial(\tau_x)^j}{\partial x^i} \right)_y \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_{\tau_x(y)} \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_i \left(\frac{\partial(x^j + y^j)}{\partial x^i} \right)_x \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_{(x+y)} + \sum_{i,j=1}^n b_i \left(\frac{\partial(x^j + y^j)}{\partial x^i} \right)_y \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_{(x+y)} \\ &= \sum_{i,j=1}^n (a_i + b_i) \left(\frac{\partial(x^j + y^j)}{\partial x^i} \right)_x \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_{(x+y)} \\ &= \sum_{i,j=1}^n (a_i + b_i) \delta_i^j \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_{(x+y)} \\ &= \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{(x+y)} \end{aligned}$$

bulunur. Benzer biçimde her bir $c \in IR$,

$$\begin{aligned} c \otimes X &= T\tau_c(X) \\ &= T\tau_c \left(\sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_x \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i,j=1}^n a_i \left(\frac{\partial(\tau_c)^j}{\partial x^i} \right)_x \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_{cx} \\
&= \sum_{i,j=1}^n a_i \left(\frac{\partial(c x^j)}{\partial x^i} \right)_x \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_{cx} \\
&= \sum_{i,j=1}^n a_i \cdot c \cdot \delta_i^j \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_{cx} \\
&= \sum_{i=1}^n a_i c \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{cx} \\
&= \sum_{i=1}^n c \cdot a_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{cx}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$X = \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_x, \quad Y = \sum_{i=1}^n b_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_y \quad \text{için}$$

$$X \oplus Y = \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_x \oplus \sum_{i=1}^n b_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_y = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{(x+y)} \quad (3.5)$$

ve

$$c \otimes X = \sum_{i=1}^n c \cdot a_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{cx} \quad (3.6)$$

sonuçları elde edilir. Herhangi $a_i, b_i, d_i \in \mathbb{R}, (1 \leq i \leq n)$, $c \in \mathbb{R}$ ve

$$X = \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_x, \quad Y = \sum_{i=1}^n b_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_y, \quad Z = \sum_{i=1}^n d_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_z \in T(\mathbb{R}^n) \quad \text{için;}$$

(i)

(i₁) Kapalılık:

$$X \oplus Y = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{(x+y)} \in T(IR^n)$$

olduğundan $T(IR^n) \oplus$ a göre kapalıdır.

(i_2) Birleşme:

$$\begin{aligned} (X \oplus Y) \oplus Z &= \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{(x+y)} \right) \oplus \sum_{i=1}^n d_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_z \\ &= \sum_{i=1}^n ((a_i + b_i) + d_i) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{(x+y)+z} \\ &= \sum_{i=1}^n (a_i + (b_i + d_i)) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{x+(y+z)} \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_x \oplus \sum_{i=1}^n (b_i + d_i) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{(y+z)} \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_x \oplus \left(\sum_{i=1}^n b_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_y \oplus \sum_{i=1}^n d_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_z \right) \\ &= X \oplus (Y \oplus Z) \end{aligned}$$

olduğundan $\oplus$ işleminin $T(IR^n)$ de birleşme özelliği vardır.

(i_3) Değişme

$$\begin{aligned} X \oplus Y &= \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{x+y} \\ &= \sum_{i=1}^n (b_i + a_i) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{y+x} \\ &= Y \oplus X \end{aligned}$$

$\oplus$ işleminin $T(IR^n)$ de değişme özelliği vardır.

(i_4) Etkisiz eleman:

$0 \in IR^n$, IR^n deki toplama işleminin etkisiz elemanı olsun. $0 \in IR^n$ in i.

bileşeni 0^i olarak tanımlıdır.

$$\bar{0} = \sum_{i=1}^n 0_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_0 \quad (3.7)$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $\bar{0} \in T(IR^n)$ dır. Herhangi bir $X \in T(IR^n)$ için

$$\bar{0} \oplus X = X \oplus \bar{0} = \sum_{i=1}^n (a_i + 0_i) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{x+0} = \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_x = X$$

$T(IR^n)$ de $\oplus$ işleminin etkisiz elemanı $\bar{0} \in T(IR^n)$ dir.

(i_5) Ters eleman

Herhangi bir

$$X = \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_x \in T(IR^n) \quad \forall i, 1 \leq i \leq n$$

için

$a_i \in IR$ elemanlarının IR deki toplama işlemine göre tersleri $-a_i$ ve $x \in IR^n$

elemanının IR^n deki toplama işlemine göre tersi $-x$ olsun. Bir

$$X' = \sum_{i=1}^n -a_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{-x} \in T(IR^n)$$

tanımlansın. Bu durumda

$$\begin{aligned}
X' \oplus X &= \sum_{i=1}^n -a_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{-x+x} + \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{x-x} \\
&= \sum_{i=1}^n 0_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_0 \\
&= \bar{0}
\end{aligned}$$

$T(\mathbb{R}^n)$ de $\oplus$ işleminin ters eleman özelliği vardır.

$$(i_1), (i_2), (i_3), (i_4), (i_5)$$

den dolayı $(T(\mathbb{R}^n), \oplus)$ bir değişmeli gruptur.

(ii)

$$c \in \mathbb{R}, \quad X = \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_x \text{ olmak üzere,}$$

$$c \otimes X = \sum_{i=1}^n c \cdot a_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{cx} \in T(\mathbb{R}^n) \text{ dir.}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
c \otimes (X \oplus Y) &= \sum_{i=1}^n c(a_i + b_i) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{c(x+y)} \\
&= \sum_{i=1}^n (ca_i + cb_i) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{(cx+cy)} \\
&= \sum_{i=1}^n ca_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{(cx+cy)} + \sum_{i=1}^n cb_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{(cx+cy)} \\
&= (c \otimes X) \oplus (c \otimes Y)
\end{aligned}$$

(iv)

Herhangi $c, d \in \mathbb{R}$ ve $X = \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_x \in T(\mathbb{R}^n)$ için

$$\begin{aligned}
(c+d) \otimes X &= \sum_{i=1}^n (ca_i + da_i) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{(c+d)x} \\
&= \sum_{i=1}^n (ca_i + da_i) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{cx+dx} \\
&= \sum_{i=1}^n ca_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{cx} \oplus \sum_{i=1}^n da_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{dx} \\
&= (c \otimes X) \oplus (d \otimes X)
\end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned}
c \otimes (d \otimes X) &= c \otimes \left(d \otimes \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_x \right) \\
&= c \otimes \left(\sum_{i=1}^n da_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{dx} \right) \\
&= \sum_{i=1}^n c(da_i) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{c(dx)} \\
&= \sum_{i=1}^n (cd)a_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{(cd)x} \\
&= (c.d) \otimes X
\end{aligned}$$

(vi)

$1 \in IR$, IR deki çarpma işleminin etkisiz elemanı olmak üzere

$$\begin{aligned}
1 \otimes X &= \sum_{i=1}^n 1.a_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{1x} \\
&= \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_x \\
&= X
\end{aligned}$$

(i), (ii), (iii), (iv), (v), (vi) den dolayı $(T(IR^n), \oplus, \otimes)$, IR cismi üzerinde $2n$ -boyutlu bir vektör uzayıdır.

3.3. Önerme

$f : IR^n \rightarrow IR^m$ bir lineer dönüşüm olsun. Bu durumda f nin tanjant dönüşümü Tf de $T(IR^n)$ vektör uzayından $T(IR^m)$ vektör uzayına bir lineer dönüşümdür.

İspat

$x \in IR^n$, $y \in IR^m$ vektörlerinin i . ve j . bileşenleri sırasıyla x^i, y^j , $c_i, c'_i \in IR$ ($\forall i, 1 \leq i \leq n$) ve $f(x)$ in j . bileşeni ise $f^j(x)$ ($1 \leq j \leq m$) ile gösterilsin. Bu durumda, $a_j^i \in IR$ olmak üzere,

$$f^j(x) = \sum_{i=1}^n a_j^i x^i$$

dir.

$$Tf\left(\sum_{i=1}^n c_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x\right) = \sum_{i,k=1}^{n,m} c_i \left(\frac{\partial f^k}{\partial x^i}\right) \left(\frac{\partial}{\partial y^k}\right)_{f(x)} = \sum_{i,k=1}^{n,m} c_i a_i^k \left(\frac{\partial}{\partial y^k}\right)_{f(x)} \quad (3.8)$$

Eş.3.8 den yararlanarak bir $d \in IR$ için

$$\begin{aligned} Tf\left(d \otimes \sum_{i=1}^n c_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x\right) &= Tf\left(\sum_{i=1}^n (d \cdot c_i) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x\right) \\ &= \sum_{i,k=1}^{n,m} (d \cdot c_i) a_i^k \left(\frac{\partial}{\partial y^k}\right)_{f(d \cdot x)} \\ &= \sum_{i,k=1}^{n,m} d \cdot (c_i a_i^k) \left(\frac{\partial}{\partial y^k}\right)_{d \cdot f(x)} \\ &= d \otimes \left(\sum_{i,k=1}^{n,m} c_i a_i^k \left(\frac{\partial}{\partial y^k}\right)_{f(x)}\right) \\ &= d \otimes Tf\left(\sum_{i=1}^n c_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x\right) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece ;

$$\sum_{i=1}^n Tf(d \otimes \sum_{i=1}^n c_i (\frac{\partial}{\partial x^i})_x) = d \otimes Tf(\sum_{i=1}^n c_i (\frac{\partial}{\partial x^i})_x) \quad (3.9)$$

dır.

$$\begin{aligned} Tf(\sum_{i=1}^n c_i (\frac{\partial}{\partial x^i})_x \oplus \sum_{i=1}^n c'_i (\frac{\partial}{\partial x^i})_{x'}) &= Tf(\sum_{i=1}^n (c_i + c'_i) (\frac{\partial}{\partial x^i})_{(x+x')}) \\ &= \sum_{i,k=1}^{n,m} (c_i + c'_i) a_i^k (\frac{\partial}{\partial y^k})_{f(x+x')} \\ &= \sum_{i,k=1}^{n,m} (c_i a_i^k + c'_i a_i^k) (\frac{\partial}{\partial y^k})_{f(x)+f(x')} \\ &= (\sum_{i,k=1}^{n,m} c_i a_i^k (\frac{\partial}{\partial y^k})_{f(x)}) \oplus (\sum_{i,k=1}^{n,m} c'_i a_i^k (\frac{\partial}{\partial y^k})_{f(x')}) \\ &= Tf(\sum_{i=1}^n c_i (\frac{\partial}{\partial x^i})_x) \oplus Tf(\sum_{i=1}^n c'_i (\frac{\partial}{\partial x^i})_{x'}) \end{aligned}$$

Böylece;

$$Tf(\sum_{i=1}^n c_i (\frac{\partial}{\partial x^i})_x \oplus \sum_{i=1}^n c'_i (\frac{\partial}{\partial x^i})_{x'}) = Tf(\sum_{i=1}^n c_i (\frac{\partial}{\partial x^i})_x) \oplus Tf(\sum_{i=1}^n c'_i (\frac{\partial}{\partial x^i})_{x'}) \quad (3.10)$$

eşitliği elde edilir.

Eş. 3.9 ve Eş. 3.10 dan dolayı Tf dönüşümü $T(IR^n)$ vektör uzayından $T(IR^m)$ vektör uzayına bir lineer dönüşümdür.

3.4. Önerme

V bir sonlu boyutlu vektör uzayı olsun. Bu durumda V vektör uzayının tanjant demeti olan $T(V)$ de $\oplus$ ve $\otimes$ sırasıyla doğal toplama ve doğal skalar ile çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayıdır. Ayrıca V vektör uzayı W ve W' alt uzaylarının

direk toplamı ise $T(V)$ vektör uzayı da $T(W)$ ve $T(W')$ alt uzaylarının direk toplamına kanonik olarak izomorfiktir [3].

3.5. Tanım

Her bir $y \in GL(n, IR)$, $x \in IR^n$ için

$$\rho : GL(n, IR) \times IR^n \rightarrow IR^n, \rho(y, x) = y.x$$

ile tanımlı ρ dönüşümü $GL(n, IR)$ Lie grubunun IR^n üzerine doğal etkisidir.

$GL(n, IR)$ Lie grubunun grup çarpımı μ ve $x \in IR^n$, $y \in GL(n, IR)$ olsun. Bu durumda

$$x = (x^1, x^2, \dots, x^n), y = [y_j^i] \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

dır. Bu durumda,

$$\rho(y, x) = y.x$$

$$= \left[\sum_{j=1}^n y_j^i x^j \right]$$

$$= \left(\sum_{j=1}^n y_j^1 x^j, \sum_{j=1}^n y_j^2 x^j, \dots, \sum_{j=1}^n y_j^n x^j \right)$$

bulunur. Böylece, $\forall (y, x) \in GL(n, IR) \times IR^n$ için

$$\rho(y, x) = (\rho^1(y, x), \rho^2(y, x), \dots, \rho^n(y, x)) \quad , \quad \rho^i(y, x) = \sum_{j=1}^n y_j^i x^j \quad (1 \leq i \leq n)$$

ifadesi elde edilir.

$$\rho^i(y, x) = \sum_{j=1}^n y_j^i x^j, \quad (\forall i, 1 \leq i \leq n)$$

dönüşümleri diferensiyellenebilir olduğundan ρ dönüşümü de diferensiyellenebilirdir.

I_n $n \times n$ tipinden birim matris $GL(n, IR)$ Lie grubunun birim elemanıdır. $\forall x \in IR^n$ için

$$\rho(I_n, x) = I_n \cdot x = x \quad (3.11)$$

bulunur.

$\forall x \in R^n, \forall A, B \in GL(n, IR)$ için

$$\begin{aligned} \rho(A, \rho(B, x)) &= \rho(A, Bx) \\ &= A \cdot (Bx) \\ &= \mu(A, B) \cdot x \\ &= \rho(\mu(A, B), x) \end{aligned} \quad (3.12)$$

ρ bir diferensiyellenebilir dönüşüm, Eş. 3.11 ve Eş. 3.12 ifadeleri sağlandığından ρ dönüşümü $GL(n, IR)$ Lie grubunun IR^n üzerine bir Lie grup etkisidir [3].

Bilindiği gibi G bir Lie grubu $\lambda : G \times G \rightarrow G$, G Lie grubunun grup çarpımı olmak üzere G nn tanjant demeti olan TG de $T\lambda$ işlemiyle birlikte bir Lie grubudur.

3.6. Önerme

$$\rho : GL(n, IR) \times IR^n \rightarrow IR^n$$

etkisinin tanjant dönüşümü olan

$$T\rho : T(GL(n, IR)) \times T(IR^n) \rightarrow T(IR^n)$$

dönüşümü, $T(GL(n, IR))$ Lie grubunun $T(IR^n)$ üzerine etkin bir lineer grup etkisidir [3].

İspat

$$\rho : GL(n, IR) \times IR^n \rightarrow IR^n$$

diferensiyellenebilir olduğundan

$$T\rho : T(GL(n, IR)) \times T(IR^n) \rightarrow T(IR^n)$$

dönüşümü de diferensiyellenebilirdir.

(i) Herhangi $X_0 \in T_{x_0} IR^n$, $Y_0 \in T_{y_0} (GL(n, IR))$ ve $c \in IR$ olsun.

$$“T\rho(Y_0, c \otimes X_0) = c \otimes T\rho(Y_0, X_0)”$$

ifadesinin doğru olduğunu gösterelim. Bunun için herhangi

$$x \in IR^n, y \in GL(n, IR) \quad (1 \leq k, j \leq n)$$

için

$$\tilde{x}^j : IR^n \rightarrow IR, \tilde{x}^j(x) = x^j$$

$$\tilde{y}_k^j : GL(n, IR) \rightarrow IR, \tilde{y}_k^j(y) = y_k^j$$

$$\bar{x}^j : GL(n, IR) \times IR^n \rightarrow IR, \bar{x}^j(y, x) = x^j$$

$$\bar{y}_k^j : GL(n, IR) \times IR^n \rightarrow IR, \bar{y}_k^j(y, x) = y_k^j$$

dönüşümleri tanımlansın. Burada tanımlanan

$$\tilde{x}^j \in C^\infty(IR^n) \quad \text{ve} \quad \tilde{y}_k^j \in C^\infty(GL(n, IR)) \quad \text{dır.}$$

$$GL(n, IR) \times IR^n \xrightarrow{\rho} IR^n \xrightarrow{\tilde{x}^j} IR$$

$$\forall (y, x) \in GL(n, IR) \times IR^n \text{ için}$$

$$\begin{aligned} (\tilde{x}^j \circ \rho)(y, x) &= \tilde{x}^j(\rho(y, x)) \\ &= \tilde{x}^j(y.x) \\ &= \tilde{x}^j\left(\sum_{k=1}^n y_k^1 x^k, \sum_{k=1}^n y_k^2 x^k, \dots, \sum_{k=1}^n y_k^n x^k\right) \\ &= \sum_{k=1}^n y_k^j x^k \\ &= \sum_{k=1}^n \bar{y}_k^j \cdot \bar{x}^j(y, x) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$(\tilde{x}^j \circ \rho) = \sum_{k=1}^n \bar{y}_k^j \bar{x}^k \quad (3.13)$$

ifadesi doğrudur. Herhangi $Y_0 \in T_{y_0}(GL(n, IR))$ ve $X_0 \in T_{x_0} IR^n$ için

$$f_{y_0} : IR^n \rightarrow GL(n, IR) \times IR^n, \quad f_{y_0}(x) = (y_0, x)$$

$$f_{x_0} : GL(n, IR) \rightarrow GL(n, IR) \times IR^n, \quad f_{x_0}(y) = (y, x_0)(y)$$

dönüşümleri tanımlansın.

$$Tf_{y_0} : T(IR^n) \rightarrow T(GL(n, IR) \times IR^n)$$

$$Tf_{x_0} : T(GL(n, IR)) \rightarrow T(GL(n, IR) \times IR^n)$$

$$Ff = (Tf_{x_0}, Tf_{y_0}) : T(GL(n, IR)) \times T(IR^n) \rightarrow T(GL(n, IR) \times IR^n)$$

$(Y, X) \in T(GL(n, IR)) \times T(IR^n)$ için

$$Ff(Y, X) = Tf_{x_0}(Y) \oplus Tf_{y_0}(X)$$

ile tanımlı Ff dönüşümü bir kanonik lineer izomorfizmdir. Herhangi

$(Y, X) \in T(GL(n, IR)) \times T(IR^n)$ için

$$Ff(Y, X) \cong (Y, X) \quad (3.14)$$

özdeşleştirilmesi göz önüne alınsın. Böylece

$$(Y_0, X_0) \cong Tf_{x_0}(Y_0) \oplus Tf_{y_0}(X_0)$$

ifadesi doğru olur. Ayrıca $\forall y \in GL(n, IR)$ için

$$\begin{aligned} (\bar{y}_k^j \circ f_{x_0})(y) &= \bar{y}_k^j(f_{x_0}(y)) \\ &= \bar{y}_k^j(y, x_0) \\ &= \tilde{y}_k^j(y) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Böylece

$$\bar{y}_k^j \circ f_{x_0} = \tilde{y}_k^j \quad (3.16)$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca $\forall x \in IR^n$ için

dir. $(y_0)_k^j$ bir sabit sayıdır.

Bu durumda $(\bar{y}_k^j \circ f_{y_0})$ fonksiyonu bir sabit fonksiyondur.

Eş.3.15 ve Eş.3.16 ifadeleri göz önüne alınırsa;

$$(Y_0, X_0)(\bar{y}_k^j) = ((Tf_{x_0})(Y_0))(\bar{y}_k^j) + (Tf_{y_0})(X_0)(\bar{y}_k^j)$$

$$\begin{aligned}
&= Y_0(\bar{y}_k^j \circ f_{x_0}) + X_0(\bar{y}_k^j \circ f_{y_0}) \\
&= Y_0(\tilde{y}_k^j) + X_0((y_0)_k^j) \\
&= Y_0(\tilde{y}_k^j)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda

$$(Y_0, X_0)(\bar{y}_k^j) = Y_0(\tilde{y}_k^j) \quad (3.17)$$

elde edilir. $\forall y \in GL(n, \mathbb{R})$ için

$$(\bar{x}^k \circ f_{x_0})(y) = \bar{x}^k(f_{x_0}(y)) = \bar{x}^k(y, x_0) = x_0^k \quad (3.18)$$

bulunur. Burada x_0^k bir sabit sayıdır. Bu durumda $(\bar{x}^k \circ f_{x_0})$ fonksiyonu bir sabit fonksiyondur. $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için ,

$$(\bar{x}^k \circ f_{y_0})(x) = (\bar{x}^k \circ f_{y_0})(x) = \bar{x}^k(f_{y_0}(x)) = \bar{x}^k(y_0, x) = x^k = \tilde{x}^k(x)$$

dir. Böylece

$$(\bar{x}^k \circ f_{y_0}) = \tilde{x}^k \quad (3.19)$$

ifadesi elde edilir. Eş. 3.18 ve Eş. 3.19 ifadeleri göz önüne alınırsa;

$$\begin{aligned}
(Y_0, X_0)(\bar{x}^k) &= (Tf_{x_0}(Y_0) + Tf_{y_0}(X_0))(\bar{x}^k) \\
&= (Tf_{x_0}(Y_0))(\bar{x}^k) + (Tf_{y_0}(X_0))(\bar{x}^k) \\
&= Y_0(\bar{x}^k \circ f_{x_0}) + X_0(\bar{x}^k \circ f_{y_0}) \\
&= Y_0(\bar{x}_0^k) + X_0(\tilde{x}^k) \\
&= X_0(\tilde{x}^k)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda

$$(Y_0, X_0)(\bar{x}^k) = X_0(\tilde{x}^k) \quad (3.20)$$

elde edilir. Herhangi $c \in IR$, $x \in IR^n$ için

$$((\tilde{x}^j \circ \tau_c)(x) = \tilde{x}^j(\tau_c(x)) = \tilde{x}^j(cx) = c\tilde{x}^j(x)$$

bulunur. Böylece

$$(\tilde{x}^j \circ \tau_c) = c.\tilde{x}^j \quad (3.21)$$

ifadesi doğrudur.

$$(c \otimes X_0)(\tilde{x}^k) = (T\tau_c(X_0))(\tilde{x}^k) = X_0(\tilde{x}^k \circ \tau_c)$$

dir. Burada Eş.3.21 ifadesi kullanılırsa

$$(c \otimes X_0)(\tilde{x}^k) = X_0(c\tilde{x}^k)$$

$$(c \otimes X_0)(\tilde{x}^k) = c.X_0(\tilde{x}^k) \quad (3.22)$$

elde edilir.

$$Tp(Y_0, c \otimes X_0)(\tilde{x}^j) = (Y_0, c \otimes X_0)(\tilde{x}^j \circ \rho)$$

ifadesinde sırasıyla Eş. 3.14 , lineerlik , Leibniz , Eş. 3.17 , Eş.3.20 , Eş.3.21 kullanıldığında

$$Tp(Y_0, c \otimes X_0)(\tilde{x}^j) = (Y_0, c \otimes X_0)(\sum_{k=1}^n (\bar{y}_k^j . \bar{x}^k))$$

elde edilir. $(Y_0, c \otimes X_0)$ tanjant uzayın elemanı olduğundan lineerlik özelliğini sağlar. Böylece

$$(Y_0, c \otimes X_0)(\sum_{k=1}^n (\bar{y}_k^j . \bar{x}^k)) = \sum_{k=1}^n [(Y_0, c \otimes X_0)(\bar{y}_k^j \bar{x}^k)]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n [((Y_0, c \otimes X_0)(\bar{y}_k^j))(\bar{x}^k(y_0, cx_0))] \\
&\quad + \bar{y}_k^j(y_0, cx_0).((Y_0, c \otimes X_0)(\bar{x}^k))] \\
&= \sum_{k=1}^n [Y_0(\bar{y}_k^j).c.x_0^k + (y_0)_k^j(c \otimes X_0)(\tilde{x}^k)] \\
&= c \sum_{k=1}^n [Y_0(\bar{y}_k^j).x_0^k + (y_0)_k^j(X_0)(\tilde{x}^k)]
\end{aligned}$$

$$Tp(Y_0, c \otimes X_0)(\tilde{x}^j) = c \sum_{k=1}^n [Y_0(\bar{y}_k^j).x_0^k + (y_0)_k^j(X_0)(\tilde{x}^k)] \quad (3.23)$$

ifadesi elde edilir. Diğer yandan sırasıyla 3.1.Tanım , Eş.3.21 , lineerlik özellikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
[c \otimes (Tp(Y_0, X_0))](\tilde{x}^j) &= T\tau_c((Tp(Y_0, X_0)(\tilde{x}^j)) \\
&= Tp(Y_0, X_0)(\tilde{x}^j \circ \tau_c) \\
&= Tp(Y_0, X_0)(c\tilde{x}^j) \\
&= c.(Y_0, X_0)(\tilde{x}^j \circ \rho) \\
&= c.((Y_0, X_0)(\tilde{x}^j \circ \rho)) \\
&= c \sum_{k=1}^n [Y_0(\bar{y}_k^j).x_0^k + (y_0)_k^j(X_0)(\tilde{x}^k)]
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$[c \otimes (Tp(Y_0, X_0))](\tilde{x}^j) = c \sum_{k=1}^n [Y_0(\bar{y}_k^j).x_0^k + (y_0)_k^j(X_0)(\tilde{x}^k)] \quad (3.24)$$

elde edilir. Eş.3.23 ve Eş.3.24 ifadelerinin sağ tarafları eşit olduğundan sol tarafları da eşittir. Böylece $\forall j, 1 \leq j \leq n$ için

$$Tp(Y_0, c \otimes X_0)(\tilde{x}^j) = [c \otimes (Tp(Y_0, X_0))](\tilde{x}^j) \text{ elde edilir.}$$

(ii) Herhangi $Y_0 \in T(GL(n, IR))$ ve $X_1, X_2 \in T(IR^n)$ için

$$“T\rho(Y_0, X_1 \oplus X_2) = T\rho(Y_0, X_1) \oplus T\rho(Y_0, X_2)”$$

eşitliğinin gösterilmesi için genelliği bozmaksızın

$$Y_0 \in T_{y_0}(GL(n, IR)) \text{ , } X_1 \in T_{x_1}(IR^n) \text{ ve } X_2 \in T_{x_2}(IR^n)$$

olduğu kabul edilsin.

$$T\rho(Y_0, X_1 \oplus X_2)(\tilde{x}^j) = (Y_0, X_1 \oplus X_2)(\tilde{x}^j \circ \rho)$$

dir. Bu eşitlikte sırasıyla Eş. 3.14 , lineerlik kuralı , Leibniz kuralı , Eş. 3.17 ve Eş.3.20 kullanılırsa

$$\begin{aligned} T\rho(Y_0, X_1 \oplus X_2)(\tilde{x}^j) &= (Y_0, X_1 \oplus X_2)(\sum_{k=1}^n \bar{y}_k^j . \bar{x}^k) \\ &= \sum_{k=1}^n (Y_0, X_1 \oplus X_2)(\bar{y}_k^j . \bar{x}^k) \\ &= \sum_{k=1}^n [(Y_0, X_1 \oplus X_2)(\bar{y}_k^j) . (\bar{x}^k(y_0, x_1 + x_2))] \\ &\quad + \bar{y}_k^j(y_0, x_1 + x_2) . ((Y_0, X_1 \oplus X_2)(\bar{x}^k)) \\ &= \sum_{k=1}^n [(Y_0(\tilde{y}_k^j) . (x_1 + x_2)^k + (y_0)_k^j (X_1 \oplus X_2)(\bar{x}^k)] \\ &= \sum_{k=1}^n [(Y_0(\tilde{y}_k^j) . ((x_1)^k + (x_2)^k) + (y_0)_k^j (X_1(\bar{x}^k) + X_2(\bar{x}^k))] \\ &= \sum_{k=1}^n [(Y_0(\tilde{y}_k^j) . ((x_1)^k + (y_0)_k^j (X_1(\bar{x}^k)) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n [(Y_0(\tilde{y}_k^j) . ((x_2)^k + (y_0)_k^j (X_2(\bar{x}^k))] \\ &= [T\rho(Y_0, X_1) \oplus T\rho(Y_0, X_2)](\tilde{x}^j) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Böylece

$$T\rho(Y_0, X_1 \oplus X_2) = T\rho(Y_0, X_1) \oplus T\rho(Y_0, X_2)$$

ispatlanmış olur.

$$T\rho_{Y_0} : T(IR^n) \rightarrow T(IR^n), \forall X \in T(IR^n), T\rho_{Y_0}(X) = T\rho(Y_0, X) \quad (3.25)$$

olarak tanımlansın. Bu durumda (ii) den dolayı $T\rho_{Y_0}$ bir lineer dönüşümdür.

(iii) Her bir $y_0 \in GL(n, IR)$, $x_0 \in IR^n$, $r_j^i \in IR$, $c_j \in IR$ olmak üzere

$$T\rho[(\sum_{i,p=1}^n r_p^i (\frac{\partial}{\partial y_p^i})_{y_0}), (\sum_{p=1}^n c_p (\frac{\partial}{\partial x^p})_{x_0})] = \sum_{k=1}^n (\sum_{j=1}^n r_j^k (x_0)^j + \sum_{j=1}^n c^j (y_0)^k_j) (\frac{\partial}{\partial x^k})_{y_0 x_0}$$

ifadesinin doğru olduğunu gösterelim.

$$Y_0 = \sum_{i,p=1}^n r_p^i (\frac{\partial}{\partial y_p^i})_{y_0}$$

$$X_0 = \sum_{p=1}^n c^p (\frac{\partial}{\partial x^p})_{x_0}$$

olsun. (i) den $T\rho(Y_0, X_0)(\tilde{x}^j) = \sum_{l=1}^n Y_0(\tilde{y})_l^j (x_0)^l + (y_0)_l^j X_0(\tilde{x}^l)$ ifadesi doğrudur.

Bu durumda

$$\begin{aligned} & T\rho(\sum_{i,p=1}^n r_p^i (\frac{\partial}{\partial y_p^i})_{y_0}, \sum_{p=1}^n c^p (\frac{\partial}{\partial x^p})_{x_0}) \\ &= \sum_{l=1}^n [(\sum_{i,p=1}^n r_p^i (\frac{\partial}{\partial y_p^i})_{y_0}(\tilde{y}_l^j))(x_0)^l + (y_0)_l^j (\sum_{p=1}^n c^p (\frac{\partial}{\partial x^p})_{x_0}(\tilde{x}^l))] \\ &= \sum_{l=1}^n (\sum_{i,p=1}^n r_p^i \delta_i^j \delta_l^p (x_0)^l + (y_0)_l^j \sum_{p=1}^n c^p \delta_l^p) \end{aligned}$$

$$= \sum_{l=1}^n r_l^j(x_0)^l + (y_0)_l^j c^l \quad (3.26)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{k=1}^n \left(\sum_{l=1}^n r_l^k(x_0)^l + \sum_{l=1}^n c^l(y_0)_l^k \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right)_{y_0 x_0} (\tilde{x}^j) \right] = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{l=1}^n r_l^k(x_0)^l + \sum_{l=1}^n c^l(y_0)_l^k \right) \delta_k^j \\ & = \sum_{l=1}^n r_l^j(x_0)^l + c^l(y_0)_l^j \end{aligned} \quad (3.27)$$

Eş.3.26 ve Eş.3.27 ifadelerinin sağ tarafları eşit olduğundan sol tarafları da eşittir.

Bu durumda

$$Tp \left[\left(\sum_{i,p=1}^n r_p^i \left(\frac{\partial}{\partial y_p^i} \right)_{y_0} \right), \left(\sum_{p=1}^n c_p \left(\frac{\partial}{\partial x^p} \right)_{x_0} \right) \right] = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n r_j^k(x_0)^j + \sum_{j=1}^n c^j(y_0)_j^k \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right)_{y_0 x_0}$$

elde edilir.

(iv) $Y, Y' \in T(GL(n, IR))$, $X \in T(IR^n)$ olsun. Ayrıca

$$T\mu(Y, Y') = Y.Y'$$

ile gösterelim. Bu durumda

$$Tp(Y.Y', X) = Tp(Y, Tp(Y', X))$$

ifadesinin doğru olduğunu gösterelim.

ρ , $GL(n, IR)$ in IR^n üzerine bir diferensiyellenebilir etkisi olduğundan

$$\begin{array}{ccc}
GL(n, IR) \times GL(n, IR) \times IR^n & \xrightarrow{\mu \times id_{IR^n}} & GL(n, IR) \times IR^n \\
id_{GL(n, IR) \times \rho} \downarrow & & \downarrow \rho \\
GL(n, IR) \times IR^n & \xrightarrow{\rho} & IR^n
\end{array}$$

yukarıdaki diyagram değişmeli bir diyagramdır. Gerçekten,

$\forall (x, y, z) \in GL(n, IR) \times GL(n, IR) \times IR^n$ için

$$\begin{aligned}
(\rho \circ (\mu \times id_{IR^n}))(x, y, z) &= \rho(\mu(x, y), id_{IR^n}(z)) \\
&= \rho(x, \rho(y, z)) \\
&= \rho(x, \rho(y, z))
\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\rho \circ (id_{GL(n, IR)} \times \rho)(x, y, z) = \rho(x, \rho(y, z)) \tag{3.29}$$

Eş.3.28 ve Eş. 3.29 ifadelerinin sağ tarafları eşit olduğundan sol tarafları da eşittir.

Böylece

$$\rho \circ (\mu \times id_{IR^n}) = \rho \circ (id_{GL(n, IR)} \times \rho)$$

bulunur. Bu sonucu aşağıdaki ifadede kullanalım:

$$\begin{aligned}
Tp(Y.Y', X) &= Tp(T\mu(Y, Y'), X) \\
&= (Tp \circ (T\mu \times id_{T(IR^n)}))((Y, Y'), X) \\
&= (Tp \circ T(\mu \times id_{IR^n}))((Y, Y'), X) \\
&= (Tp \circ T(id_{GL(n, IR)} \times \rho))(Y, (Y', X)) \\
&= Tp(T(id_{GL(n, IR)} \times \rho))(Y, (Y', X)) \\
&= Tp(Y, Tp(Y', X))
\end{aligned}$$

(i)-(iv) den dolayı $T(GL(n, IR))$ Lie grubu $T(IR^n)$ üzerine bir lineer grup olarak etki eder. Bu etkinin etkin bir etki olduğunu gösterelim.

$Y \in T(GL(n, IR))$ ve $\forall X \in T(IR^n)$ için $T\rho(Y, X) = X$ olsun. Bu durumda $Y \in T(GL(n, IR))$ olduğundan

$$Y = \sum_{i,j=1}^n r_j^i \left(\frac{\partial}{\partial y_j^i} \right)_{y_0}$$

olacak şekilde $y_0 \in GL(n, IR)$, $r_j^i \in IR$ vardır ($1 \leq i, j \leq n$) . $X \in T(IR^n)$ olduğundan

$$X = \sum_{j=1}^n c^j \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_x$$

olacak şekilde $x \in IR^n$ vardır.

$$T\rho(Y, X) = X \Rightarrow T\rho(Y, X) \in T_{y_0 x}(IR^n)$$

$$\Rightarrow y_0 x = x$$

$$\Rightarrow y_0 = I_n$$

$$y_0 = I_n \tag{3.30}$$

$$T\rho(Y, X) = X \Rightarrow \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n r_j^k x^j + \sum_{j=1}^n c^j (y_0)^k_j \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right)_{y_0 x} = \sum_{k=1}^n c^k \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right)_x$$

elde edilir. Bu eşitlikte Eş. 3.27 kullanıldığında aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n r_j^k x^j + \sum_{j=1}^n c^j \delta_j^k \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right)_x = \sum_{k=1}^n c^k \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right)_x$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n r_j^k x^j + c^k = c^k$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n r_j^k x^j = 0$$

$$\sum_{j=1}^n r_j^k x^j = 0 \quad (3.31)$$

$[r_j^k]$ matrisine karşılık gelen lineer dönüşüm Q olsun. Eş. 3.31 den dolayı $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için

$$Q(x) = \sum_{j=1}^n r_j^k x^j = 0$$

$$\Rightarrow Q = 0$$

bulunur. Böylece $\forall k, j \quad 1 \leq k, j \leq n$ için $r_j^k = 0$ bulunur. Bu durumda

$$Y = \left(\sum_{i,j=1}^n r_j^i \left(\frac{\partial}{\partial y_j^i} \right)_{y_0} \right) = \left(\sum_{i,j=1}^n 0_j^i \left(\frac{\partial}{\partial y_j^i} \right)_{I_n} \right) = \bar{0}$$

elde edilir. Bu ise $T\rho$ lineer etkisinin etkin etki olduğunu gösterir. Böylece 3.6.Önerme ispatlanmış olur. Ayrıca Eş.3.25 ifadesinin birebir olduğu aşağıdaki biçimde gösterilir:

$$Y = \sum_{i,j=1}^n r_j^i \left(\frac{\partial}{\partial y_j^i} \right)_{y_0} \in T(GL(n, \mathbb{R})) , X = \sum_{j=1}^n c_j \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_x , X' = \sum_{j=1}^n d_j \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_{x'} \in T(\mathbb{R}^n) \text{ için,}$$

$$T\rho_Y(X) = T\rho_{Y'}(X')$$

olsun. Burada

$$T\rho(Y, \sum_{j=1}^n c_j \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_x) \in T_{\rho(y,x)} \text{ ve } T\rho(Y, \sum_{j=1}^n d_j \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_{x'}) \in T_{\rho(y,x')}$$

olduğundan, $\rho(y, x) = \rho(y, x')$ olmalıdır.

$y \in GL(n, IR)$ olduğundan $y^{-1} \in GL(n, IR)$ dır. (iv) eşitliğini kullanarak;

$$\rho(y^{-1}, \rho(y, x)) = \rho(y^{-1}, \rho(y, x'))$$

$$\Rightarrow \rho(y^{-1} \cdot y, x) = \rho(y^{-1} y, x')$$

$$\Rightarrow \rho(I_n, x) = \rho(I_n, x')$$

$$\Rightarrow x = x'$$

elde edilir. $T \rho_Y(X) = T \rho_Y(X')$

$$\Rightarrow T \rho_Y\left(\sum_{j=1}^n c_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_x\right) = T \rho_Y\left(\sum_{j=1}^n d_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_x\right)$$

$$\Rightarrow T\rho\left(Y, \sum_{j=1}^n c_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_x\right) = T\rho\left(Y, \sum_{j=1}^n d_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_x\right)$$

$$\Rightarrow T\rho\left(\sum_{i,j=1}^n r_j^i \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_y, \sum_{j=1}^n c_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_x\right) = T\rho\left(\sum_{i,j=1}^n r_j^i \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_y, \sum_{j=1}^n d_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_x\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n r_j^k x_j + c_j y_j^k\right) \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_{\rho(y,x)} = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n r_j^k x_j + d_j y_j^k\right) \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_{\rho(y,x)}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n r_j^k x_j + c_j y_j^k = \sum_{j=1}^n r_j^k x_j + d_j y_j^k$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n c_j y_j^k = \sum_{j=1}^n d_j y_j^k$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n (c_j - d_j) y_j^k = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n y_j^k (c - d)_j = 0$$

$$\Rightarrow Y \cdot (c - d) = 0$$

$y \in GL(n, IR)$ olduğundan bulunan lineer denklem sisteminin yalnızca aşıkâr çözüümü vardır. Bu durumda $c = d$ bulunur. $c = d$ ve $x = x'$ olduğundan $X = X'$ dır.

$$T\rho_y : T(IR^n) \rightarrow T(IR^n)$$

lineer dönüşümü 1:1 dır. Böylece $T\rho_y$ bir lineer izomorfizmdir ve

$$T\rho_y \in Oto(T(IR^n)) \quad (3.32)$$

bulunur.

3.7.Tanım

$Y \in T(GL(n, IR))$ ve $X \in T(IR^n)$ için $Y.X = T\rho(Y, X)$ olarak tanımlansın.

3.6.Önermenin (iv) ispatında da görüldüğü üzere , eğer bir G Lie grubu M diferensiyellenebilir manifoldu üzerine etki ediyor ise $T(G)$ Lie grubu da $T(M)$ diferensiyellenebilir manifoldu üzerine etki eder [3].

3.8.Tanım

$GL(n, IR)$ nin bir $a \in GL(n, IR)$ ile sağ ötelemesini

$$R_a : GL(n, IR) \rightarrow GL(n, IR), R_a(y) = y.a \quad (y \in GL(n, IR))$$

olarak gösterelim. Bir $Y \in T_a(GL(n, IR))$ tanjant vektörü alınsın.

$$B = TR_{a^{-1}}$$

olarak tanımlanırsa

$$B \in T_{I_n}(GL(n, IR))$$

olur. Böylece B , $GL(n, IR)$ in Lie cebiri olan $gl(n, IR)$ in elemanı olur.

Karşıt olarak herhangi $a \in GL(n, IR)$ ve $B \in gl(n, IR)$ çifti için

$$Y = TR_a(B)$$

biçiminde tanımlandığında

$$Y \in T_a(GL(n, IR))$$

dır. Böylece her bir $a \in GL(n, IR)$ ve $B \in gl(n, IR)$ için , bir $Y \in T_a(GL(n, IR))$ elde edilir. Bu biçimde oluşturduğumuz Y vektörünü

$$Y = [a, B]$$

ile gösterelim.

Diğer yandan herhangi bir $X \in T_x(IR^n)$ tanjant vektörü

$$X = \sum_{i=1}^n v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_x$$

ile ifade edilir. $X = \sum_{i=1}^n v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_x$ ifadesi $X = (x, v) \in T(IR^n)$ ile gösterilsin [3].

3.9.Önerme

Herhangi $a \in GL(n, IR)$, $B \in gl(n, IR)$ ve $x, v \in IR^n$ için aşağıdaki eşitlik vardır [3].

$$[a, B](x, v) = (ax, Bax + av)$$

İspat

$$a \in GL(n, IR) , b \in GL(n, IR) \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

$$"Y = TR_a \left(\left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_b \right) = \sum_{l=1}^n a_l^j \left(\frac{\partial}{\partial y_l} \right)_{b,a} "$$

eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim. Her bir $y \in GL(n, IR)$ için

$$R_a(y) = y.a \in GL(n, IR)$$

$R_a(y)$ matrisinin (k, l) . bileşeni

$$(R_a)_l^k = f_l^k(..., y_j^i, ...) = \sum_{t=1}^n y_t^k a_t^l$$

ile gösterilsin.

$$\begin{aligned} TR_a\left(\frac{\partial}{\partial y_j^i}\right)_b &= \sum_{k,l=1}^n \left(\frac{\partial (R_a)_l^k}{\partial y_j^i}\right)_b \left(\frac{\partial}{\partial y_l^k}\right)_{b.a} \\ &= \sum_{k,l=1}^n \left(\frac{\partial f_l^k}{\partial y_j^i}\right)_b \left(\frac{\partial}{\partial y_l^k}\right)_{b.a} \\ &= \sum_{k,l=1}^n \left(\left(\sum_{t=1}^n \delta_k^i \delta_t^j a_t^l\right)\right) \left(\frac{\partial}{\partial y_l^k}\right)_{b.a} \\ &= \sum_{j,l=1}^n a_l^j \left(\frac{\partial}{\partial y_l^k}\right)_{b.a}. \end{aligned}$$

$$TR_a\left(\left(\frac{\partial}{\partial y_j^i}\right)_b\right) = \sum_{j,l=1}^n a_l^j \left(\left(\frac{\partial}{\partial y_l^i}\right)_{b.a}\right) \quad (3.33)$$

elde edilir. $B = \sum_{r,s=1}^n b_s^r \left(\frac{\partial}{\partial y_s^r}\right)_{I_n}$ denilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned} [a, B](x, v) &= TR_a(B) \cdot \left(\sum_{i=1}^n v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x\right) \\ &= TR_a\left(\sum_{r,s=1}^n b_s^r \left(\frac{\partial}{\partial y_s^r}\right)_{I_n}\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x\right) \\ &= \sum_{r,s=1}^n b_s^r (TR_a) \left(\frac{\partial}{\partial y_s^r}\right)_{I_n} \cdot \left(\sum_{i=1}^n v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= T\rho\left(\sum_{r,s=1}^n b_s^r \left(TR_a\left(\frac{\partial}{\partial y_s^r}\right)_{I_n}\right), \left(\sum_{i=1}^n v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x\right)\right) \\
&= T\rho\left(\sum_{r,s,l=1}^n b_s^r a_l^s \left(\frac{\partial}{\partial y_l^r}\right)_a, \left(\sum_{i=1}^n v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x\right)\right) \\
[a, B](x, v) &= T\rho\left(\sum_{k,j=1}^n \left[\sum_{s=1}^n b_s^k a_j^s\right] \left(\frac{\partial}{\partial y_l^k}\right)_a, \left(\sum_{i=1}^n v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x\right)\right) \quad (3.34)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. $\forall k, j \in \{1, \dots, n\}$ için $\left[\sum_{s=1}^n b_s^k a_j^s\right] = r_j^k$ denilirse Eş. 3.34 ifadesi

$$[a, B](x, v) = T\rho\left(\sum_{k,j=1}^n r_j^k \left(\frac{\partial}{\partial y_l^k}\right)_a, \left(\sum_{i=1}^n v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x\right)\right)$$

eşitliğe dönüşür. Burada 3.6.Önerme (iii) de elde edilen ifade yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n r_j^k x^j + v^j (a_j^k)\right) \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_{ax} \\
&= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left[\sum_{s=1}^n b_s^k a_j^s\right] x^j + (a_j^k) v^j\right) \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_{ax} \in T_{ax}(R^n) \\
&= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j,s=1}^n b_s^k a_j^s x^j + (a_j^k) v^j\right) \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_{ax} \in T_{ax}(R^n) \\
&= \sum_{k=1}^n (B.a.x)^k + (a.v)^k \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_{ax} \\
&= (a.x, B.a.x + a.v)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece 3.9.Önerme ispatlanmış olur.

3.10.Uyarı

Herhangi $a, a' \in GL(n, IR)$ ve $B, B' \in gl(n, IR)$ için

$$[a, B].[a', B'] = [aa', B + ad(a^{-1})B']$$

olduğu kolayca gösterilebilir [3].

İspat

$X \in gl(n, IR)$ için $X = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} (\frac{\partial}{\partial y_j^i})_{I_n}$ dır.

$$\begin{aligned}
 ad_a((\frac{\partial}{\partial y_j^i})_{I_n}) &= T(L_{a^{-1}} \circ R_a)((\frac{\partial}{\partial y_j^i})_{I_n}) \\
 &= \sum_{k,l=1}^n (\frac{\partial (L_{a^{-1}} \circ R_a)_l^k}{\partial y_j^i})_{I_n} (\frac{\partial}{\partial y_l^k})_{I_n} \\
 &= \sum_{k,l=1}^n (\frac{\partial (\sum_{t,h=1}^n (a^{-1})_t^k y_h^t a_l^h)}{\partial y_j^i})_{I_n} (\frac{\partial}{\partial y_l^k})_{I_n} \\
 &= \sum_{k,l=1}^n (\sum_{t,h=1}^n (a^{-1})_t^k \delta_t^i \delta_h^j a_l^h) (\frac{\partial}{\partial y_l^k})_{I_n} \\
 &= \sum_{k,l=1}^n (a^{-1})_i^k a_l^j (\frac{\partial}{\partial y_l^k})_{I_n} \\
 ad_a(\sum_{i,j=1}^n b_{ij} (\frac{\partial}{\partial y_j^i})_{I_n}) &= T(L_{a^{-1}} \circ R_a)(\sum_{i,j=1}^n b_{ij} (\frac{\partial}{\partial y_j^i})_{I_n}) \\
 &= \sum_{i,j,k,l=1}^n [(a^{-1})_i^k b_{ij} a_l^j] (\frac{\partial}{\partial y_l^k})_{I_n} \\
 &= a X a^{-1}
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

bulunur. Şimdi $L_a \circ R_{a'} = R_{aa'} \circ (L_a \circ R_{a^{-1}})$ ifadesinin doğru olduğunu gösterelim.

$\forall x \in GL(n, IR)$ için

$$\begin{aligned}
(L_a \circ R_{a'})(x) &= a.x.a' \\
&= a.x.(a^{-1}.a)a' \\
&= (a.x.a^{-1}).a.a' \\
&= R_{aa'}(a.x.a^{-1}) \\
&= R_{aa'}((L_a \circ R_{a^{-1}})(x)) \\
&= (R_{aa'} \circ (L_a \circ R_{a^{-1}}))(x)
\end{aligned}$$

Böylece

$$(L_a \circ R_{a'}) = (R_{aa'} \circ (L_a \circ R_{a^{-1}})) \quad (3.36)$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca

$$R_{a'} \circ R_a = R_{aa'}$$

eşitliği doğrudur. Herhangi $B, B' \in gl(n, IR)$ ve $a, a' \in GL(n, IR)$ için

$$\begin{aligned}
[a, B].[a', B'] &= T\mu([a, B], [a', B']) \\
&= TR_{a'}([a, B]) + TL_a([a', B']) \\
&= TR_{a'}(TR_a(B)) + TL_a(TR_{a'}B') \\
&= (TR_{a'} \circ TR_a(B)) + (TL_a \circ TR_{a'}B') \\
&= TR_{aa'}(B) + T(R_{aa'} \circ (L_a \circ R_{a'}))(B') \\
&= TR_{aa'}(B) + T(R_{aa'}T(L_a \circ R_{a'})(B')) \\
&= TR_{aa'}(B) + T(R_{aa'}(ad_{a^{-1}}(B'))) \\
&= TR_{aa'}(B + ad_{a^{-1}}(B')) \\
&= [aa', B + ad_{a^{-1}}(B')]
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece 3.10.Uyarı ispatlanmış olur.

3.11.Tanım

3.6. Önermedeki, $T(GL(n,IR))$ in $T(IR^n) \cong IR^{2n}$ üzerindeki $T\rho$ etkisini ve $Oto(IR^{2n}) \cong GL(2n,IR)$ izomorfizmini kullanarak $T(GL(n,IR))$ üzerindeki dönüşümü ,

$$J_n : T(GL(n,IR)) \rightarrow GL(2n,IR) , Y \in T(GL(n,IR)), X \in IR^{2n}$$

için

$$(J_n(Y)).(X) = T\rho(Y, X) = T\rho_Y(X)$$

ile tanımlıdır [3]. Herhangi bir $Y \in T(GL(n,IR))$ için Eş.3.31 kullanıldığı takdirde

$$T\rho_Y : IR^{2n} \rightarrow IR^{2n}$$

lineer izomorfizm olduğundan

$$J_n(Y) \in Oto(IR^{2n})$$

dir. Böylece J_n anlamlı olur.

3.12.Önerme

Herhangi $a \in GL(n,IR)$ ve $B \in gl(n,IR)$ için

$$J_n([a, B]) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ Ba & a \end{bmatrix} \text{ ve } J_n([a, 0]) = Ta \text{ dır [3].}$$

İspat

E , IR^n nin standart bazı olsun. Bu durumda IR^{2n} nin standart bazı $\{(E,0),(0,E)\}$ dir. 3.9.Önerme den dolayı $[a,B](x,v)=(ax,Bax+av)$ dır. Özel olarak $(x,v)=(E,0)$ ve $(x,v)=(0,E)$ alınırse sırasıyla

$$Tp_{[a,B]}(E,0)=(a,Ba)$$

$$Tp_{[a,B]}(0,E)=(0,a)$$

elde edilir. Böylece $Tp_{[a,B]}$ lineer dönüşümünün $\{(E,0),(0,E)\}$ standart bazına karşılık gelen matrisi $\begin{bmatrix} a & 0 \\ Ba & a \end{bmatrix}$ bulunur. Böylece 3.12.Önerme ispatlanmış olur.

Ayrıca burada tanımlanan

$$J_n : T(GL(n,IR)) \rightarrow GL(2n,IR)$$

dönüşümü bir imbeddingdir. Bunu göstermek için;

(a) $\forall [a,B],[a',B'] \in T(GL(n,IR))$ için

$$\begin{aligned} J_n([a,B]).J_n([a',B']) &= \begin{bmatrix} a & 0 \\ Ba & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a' & 0 \\ B'a' & a' \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} aa' & 0 \\ Baa' + aB'a' & aa' \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$J_n([a,B]).J_n([a',B']) = \begin{bmatrix} aa' & 0 \\ Baa' + aB'a' & aa' \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} [B + ad a^{-1}(B')].aa' &= (Baa' + aB'a^{-1})aa' \\ &= Baa' + aB'a' \end{aligned}$$

$$[B + ad a^{-1}(B')].aa' = Baa' + aB'a' \quad (3.38)$$

bulunur. Eş.3.36 ve Eş.3.37 kullanılırsa

$$J_n([a, B]).J_n([a', B']) = \begin{bmatrix} aa' & 0 \\ [B + ad_{a^{-1}}(B')] \cdot aa' & aa' \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

elde edilir. Önerme 3.10 kullanılırsa

$$\begin{aligned} J_n([a, B].[a', B']) &= J_n([aa', B + ad_{a^{-1}} B']) \\ &= \begin{bmatrix} aa' & 0 \\ B + ad_{a^{-1}} B' & aa' \end{bmatrix} \\ J_n([a, B].[a', B']) &= \begin{bmatrix} aa' & 0 \\ B + ad_{a^{-1}} B' & aa' \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Eş.3.39 ve Eş.3.40 ifadelerinin sağ tarafları eşit olduğundan sol tarafları da eşittir. Böylece

$$\forall [a, B], [a', B'] \in T(GL(n, IR))$$

için

$$J_n([a, B].[a', B']) = J_n([a, B]).J_n([a', B'])$$

olduğundan $J_n : T(GL(n, IR)) \rightarrow GL(2n, IR)$ dönüşümü bir homomorfizmdir.

(b) $J_n([a, B]) = J_n([a', B'])$ olsun. Bu durumda

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ Ba & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' & 0 \\ B'a' & a' \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow a = a', B = B'$$

bulunur. Buradan $[a, B] = [a', B']$ bulunur. J_n dönüşümü bir 1:1 Lie grup homomorfizmidir. Bu nedenle J_n dönüşümü bir imbeddingdir. $T(GL(n, IR))$ Lie grubu $GL(2n, IR)$ içine gömülebilir.

$$J_n([a, 0]) = Ta$$

eşitliği doğrudur. Gerçekten $a \in GL(n, IR)$ olduğundan a matrisine karşılık gelen bir lineer izomorfizm vardır. Bu izomorfizm yine a sembolü ile gösterilirse,

$$Ta = (a^1, \dots, a^n, \dot{a}^1, \dots, \dot{a}^n) \text{ ve } \dot{a}^i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial a^i}{\partial x^k} \cdot \dot{x}^k \text{ dır.}$$

$\forall x \in IR^n$ için

$$a(x) = \left(\sum_{j=1}^n a_j^1 x^j, \dots, \sum_{j=1}^n a_j^n x^j \right)$$

biçiminde ifade edilir. Bu durumda

$$a^i(x) = \sum_{j=1}^n a_j^i x^j$$

$$\Rightarrow \dot{a}^i(x) = \sum_{j=1}^n a_j^i \dot{x}^j$$

eşitliği doğrudur.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} (a_j^i) & 0 \\ 0 & (a_j^i) \end{bmatrix} [x] &= \left(\sum_{j=1}^n a_j^1 x^j, \dots, \sum_{j=1}^n a_j^n x^j, \sum_{j=1}^n a_j^1 \dot{x}^j, \dots, \sum_{j=1}^n a_j^n \dot{x}^j \right) \\ &= (a^1, \dots, a^n, \dot{a}^1, \dots, \dot{a}^n) \\ &= Ta \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$J_n([a, 0]) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = Ta$$

eşitliği doğrudur.

4.T(F(M)) NİN F(T(M)) İÇİNE İMBEDDİNGİ (GÖMÜLMESİ)

4.1. Tanım

Demet uzayı P , baz uzayı M , projeksiyonu π ve yapı grubu G olan bir asli lif demeti $P(M, \pi, G)$ olsun. $\{U_\alpha\}$, M nin bir açık örtüsü , P diferensiyellenebilir manifoldu $\{U_\alpha\}$ üzerinde bir trivial demet ve

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$$

$P(M, \pi, G)$ asli lif demetinin transition dönüşümü ise bu asli lif demeti $P = \{(U_\alpha, g_{\alpha\beta})\}$ ile gösterilir. Bunun sebebi

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in J, x \in (U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma) \text{ için}$$

$$g_{\alpha\beta}(x).g_{\beta\gamma}(x) = g_{\alpha\gamma}(x) \quad (4.1)$$

özelliğine sahip bir

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$$

diferensiyellenebilir dönüşümü ve bir $\{U_\alpha\}$ örtüsü verildiğinde $P(M, \pi, G) = P$ asli lif demetinin elde edilebilmesidir. Elde edilen P demetinin transition dönüşümü $g_{\alpha\beta}$ dır. Böylece bir $P = P(M, \pi, G)$ asli lif demeti $P = \{(U_\alpha, g_{\alpha\beta})\}$ biçiminde gösterilebilir.

G Lie grubu G' Lie grubunun bir Lie alt grubu , $i_{GG'} : G \rightarrow G'$ inclusion (içerme) dönüşümü olsun. Bu durumda $P' = \{(U_\alpha, j \circ g_{\alpha\beta})\}$ olacak şekilde bir P' asli lif demeti ve $\hat{j} : P \rightarrow P'$ bire bir bir demet homomorfizmi vardır, yani herhangi $z \in P$ ve $a \in G$ için

$$\hat{j}(z, a) = j(z).a$$

dır. Bu biçimde tanımlı olan $\hat{j}$ dönüşümü bir asli lif demeti homomorfizmidir. Bunu göstermek için $i_{GG'} : G \rightarrow G'$ inclusion (içerme) dönüşümünü ele alalım.

$$g'_{\alpha\beta} = (i_{GG'} \circ g_{\alpha\beta}) : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G' , \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta , g'_{\alpha\beta}(x) = i_{GG'} \circ g_{\alpha\beta}(x) \text{ dır.}$$

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in J , x \in (U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma) \text{ için}$$

$$\begin{aligned} g'_{\alpha\beta}(x) \cdot g'_{\beta\gamma}(x) &= [(i_{GG'} \circ g_{\alpha\beta})(x)] \cdot [(i_{GG'} \circ g_{\beta\gamma})(x)] \\ &= i_{GG'} [(g_{\alpha\beta}(x) \cdot g_{\beta\gamma}(x))] \\ &= i_{GG'} [(g_{\alpha\gamma}(x))] \\ &= g'_{\alpha\gamma}(x) \end{aligned}$$

Eş.4.1 den varlık teoremi gereğince $P' = \{(U_\alpha, i_{GG'} \circ g_{\alpha\beta})\}$ bir asli lif demetidir.

P ve P' birer asli lif demeti olduğundan herhangi bir $p \in P$ için $p = [(x, y)_j]$ olacak şekilde $(x, y) \in U_\alpha \times G$ ve herhangi $p' \in P'$ için $p' = [(x', y')_j]$ olacak şekilde $(x', y') \in U_\alpha \times G'$ vardır. P ve P' demetinin koordinat dönüşümlerinin invers dönüşümleri sırasıyla g_p ve $g'_{p'}$ ile gösterilsin. Ayrıca

$$\hat{j} : P \rightarrow P' \text{ dönüşümü, her bir } p = [(x, y)_j] \in P \text{ için}$$

$$\hat{j}(p) = \hat{j}([(x, y)_\alpha]) = [[(x, i_{GG'}(y))_\alpha]] \text{ ile tanımlansın. Bu durumda;}$$

$$U_\alpha \times G \xrightarrow{g_p} P$$

$$id_{U_\alpha} \downarrow \qquad \downarrow \hat{j}$$

$$U_\alpha \times G' \xrightarrow{g'_{p'}} P'$$

diyagramı vardır. Şimdi bu diyagramın değişmeli olduğunu gösterelim:

$\forall (x, y)_a \in U_a \times G$ için

$$\begin{aligned} (\hat{j} \circ g_p)((x, y)_a) &= \hat{j}(g_p((x, y)_a)) \\ &= \hat{j}([(x, y)_a]) \\ &= [[(x, y)_a]] \end{aligned}$$

$$(\hat{j} \circ g_p)((x, y)_a) = [[(x, y)_a]] \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} (g'_{p'} o (id_{U_a} \times i_{GG'}))((x, y)_a) &= g'_{p'}((x, i_{GG'}(y))_a) \\ &= g'_{p'}((x, y)_a) \\ &= [[(x, y)_a]] \\ (g'_{p'} o (id_{U_a} \times i_{GG'}))((x, y)_a) &= [[(x, y)_a]] \end{aligned} \quad (4.3)$$

eşitlikleri doğrudur. Eş. 4.2 ve Eş. 4.3 ifadelerinin sağ tarafları eşit olduğundan sol tarafları da eşittir. Bu durumda

$$(\hat{j} \circ g_p) = g'_{p'} o (id_{U_a} \times i_{GG'}) \quad (4.4)$$

elde edilir. Bu ise diyagram 2 in değişmeli olduğunu gösterir. g_p dönüşümü bir diffeomorfizm olduğundan Eş. 4.4 ifadesi,

$$\hat{j} = g'_{p'} o (I_{U_a} \times i_{GG'}) o (g_p)^{-1}$$

biçiminde ifade edilebilir. $g'_{p'}$, $(I_{U_a} \times i_{GG'})$, $(g_p)^{-1}$ dönüşümleri diferensiyellenebilir olduğundan $\hat{j}$ dönüşümü de diferensiyellenebilirdir.

Herhangi $p = [(x, y)_a] \in P$ ve $a \in G$ için

$$\begin{aligned}
\hat{j}(p.a) &= \hat{j}([l(x, y)_a].a) \\
&= \hat{j}([l(x, y.a)_a]) \\
&= \hat{j}[(x, i_{GG'}(y.a))_a] \\
&= [[l(x, i_{GG'}(y), i_{GG'}(a))_a]] \\
&= [[l(x, i_{GG'}(y))_a]].i_{GG'}(a) \\
&= \hat{j}(p).i_{GG'}(a) \\
&= \hat{j}(p).a \\
\hat{j}(p.a) &= \hat{j}(p).a
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Eş. 4.5 sağlandığından $\hat{j}$ dönüşümü bir asli demet homomorfizmidir.

4.2.Tanım

$P(M, \pi, G)$ bir asli lif demeti ise $TP(T(M), T\pi, TG)$ de bir asli lif demetidir [6].

4.3.Önerme

$P = \{(U_\alpha, g_{\alpha\beta})\}$ olsun. Bu durumda $TP = \{(TU_\alpha, Tg_{\alpha\beta})\}$ dir [3].

İspat

P nin U_α üzerindeki trivializasyonu $\Phi_\alpha: U_\alpha \times G \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$ olsun. Transition dönüşümünün tanımından dolayı her bir $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ ve $y \in G$ için

$$((\Phi_\alpha)^{-1} \circ \Phi_\beta)(x, y) = (x, g_{\alpha\beta}(x).y) \text{ eşitliği doğrudur.}$$

Şimdi,

$$(T\pi)^{-1}(TU_\alpha) = T(\pi^{-1}(U_\alpha)) \tag{4.6}$$

eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim.

Herhangi bir $V \in T(\pi^{-1}(U_\alpha))$ için

$V \in T_p(\pi^{-1}(U_\alpha))$ olacak şekilde bir $p \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ vardır. Bu durumda

$$V \in T_p(\pi^{-1}(U_\alpha)) \text{ ve } \pi(p) \in U_\alpha$$

$$\Rightarrow (T\pi)_p(V) \in T_{\pi(p)}(U_\alpha)$$

$$\Rightarrow V \in (T\pi)_p^{-1}(T(U_\alpha))$$

$$V \in (T\pi)^{-1}(T(U_\alpha))$$

Bu durumda

$$T(\pi^{-1}(U_\alpha)) \subset (T\pi)^{-1}(T(U_\alpha)) \quad (4.7)$$

elde edilir. Herhangi bir $V \in (T\pi)^{-1}(T(U_\alpha))$ olsun.

$$\Rightarrow (T\pi)(V) \in T(U_\alpha)$$

$$\Rightarrow (T\pi)(V) \in T_q(U_\alpha)$$

olacak şekilde $q \in U_\alpha$ vardır. π dönüşümü örten bir dönüşüm olduğundan

$\forall q \in U_\alpha \subset M$ için $\pi(p) = q$ olacak şekilde bir $p \in P$ vardır. Bu durumda

$$(T\pi)_p(V) \in T_{\pi(p)}(U_\alpha), \pi(p) \in U_\alpha$$

$$\Rightarrow (T\pi)_p(V) \in T(U_\alpha), p \in \pi^{-1}(U_\alpha)$$

$$\Rightarrow V \in T_p(\pi^{-1}(U_\alpha)), p \in \pi^{-1}(U_\alpha)$$

$$\Rightarrow V \in T\pi^{-1}(T(U_\alpha))$$

bulunur. Bu durumda

$$(T\pi)^{-1}(TU_\alpha) \subset T(\pi^{-1}(U_\alpha)) \quad (4.8)$$

Eş. 4.7 ve Eş. 4.8 ifadelerinden dolayı

$$(T\pi)^{-1}(TU_\alpha) = T(\pi^{-1}(U_\alpha))$$

elde edilir. Böylece Eş. 4.7 ifadesi gösterilmiş olur. Eş. 4.7 ifadesini kullanarak TP in koordinat dönüşümü

$$T\Phi_\alpha : TU_\alpha \times TG \rightarrow (T\pi)^{-1}(TU_\alpha) \text{ dönüşümüdür.}$$

$TP = \{(TU_\alpha, Tg_{\alpha\beta})\}$ olduğunun gösterilebilmesi için

$$(X, L) \in (TU_\alpha \cap TU_\beta) \times TG$$

iken

$$(T\Phi_\alpha^{-1} \circ T\Phi_\beta)(X, L) = (X, Tg_{\alpha\beta}.L)$$

olduğunun gösterilmesi yeterlidir (transition dönüşümü tanımı).

Bunun için herhangi bir $f : U \rightarrow G$, $\Psi : U \times G \rightarrow U \times G$ dönüşümü

her bir $(x, g) \in U \times G$ için $\Psi(x, g) = (x, f(x).g)$ olacak biçimde tanımlansın. Bu durumda $\forall (X, L) \in TU \times TG$ için

$$T\Psi(X, L) = (X, Tf(X).L) \quad (4.9)$$

eşitliğinin olup olmadığına bakılmalıdır. Eş. 4.9 ifadesinin varlığını göstermek için ,

1. ve 2. doğal projeksiyonlar sırasıyla $pr_1 : U \times G \rightarrow G$, $pr_2 : U \times G \rightarrow G$ ve G Lie grubunun grup çarpımı $\lambda : G \times G \rightarrow G$ ile gösterilsin.

$$\begin{aligned}
(pr_2 \circ \Psi)(x, g) &= pr_2(\Psi(x, g)) \\
&= pr_2(x, \lambda(f(x), g)) \\
&= \lambda(f(x), g) \\
&= \lambda(f \times id_G)(x, g) \\
&= (\lambda \circ (f \times id_G))(x, g)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(pr_1 \circ \Psi)(x, g) &= pr_1(\Psi(x, g)) \\
&= pr_1(x, \lambda(f(x), g)) \\
&= x \\
&= pr_1(x, g)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$(pr_2 \circ \Psi) = (\lambda \circ (f \times id_G)) \quad (4.10)$$

$$(pr_1 \circ \Psi) = pr_1 \quad (4.11)$$

bulunur. Bu durumda

$$(Tpr_2 \circ T\Psi) = (T\lambda \circ (Tf \times Tid_G))$$

$$(Tpr_1 \circ T\Psi) = Tpr_1$$

ve $T(id_G) = id_{TG}$ olduğundan

$$Tpr_2 \circ T\Psi = T\lambda \circ (Tf \times id_{TG}) \quad (4.12)$$

$$Tpr_1 \circ T\Psi = Tpr_1 \quad (4.13)$$

ifadesi elde edilir. Bu durumda $\forall (X, L) \in TU \times TG$ için genelliği bozmaksızın özel olarak $X \in T_x U$, $L \in T_l G$ alınır ve Eş.3.14 özdeşleştirilmesi göz önüne alınırsa ;

$$\begin{aligned} Tpr_l(X, L) &= Tpr_l(Tf_l(X) + Tf_x(L)) \\ &= T(pr_l \circ f_l)(X) + T(pr_l \circ f_x)(L) \end{aligned}$$

$$Tpr_l(X, L) = T(pr_l \circ f_l)(X) + T(pr_l \circ f_x)(L) \quad (4.14)$$

elde edilir. x^i, y^j sırasıyla U ve G in koordinat fonksiyonları olmak üzere

$$T(pr_l \circ f_l)(X)(x^i) = X(x^i \circ (pr_l \circ f_l)) \quad (4.15)$$

$$T(pr_l \circ f_x)(L)(y^j) = L(y^j \circ (pr_l \circ f_x)) \quad (4.16)$$

$\forall x \in U, \forall y \in G$ için

$$\begin{aligned} (x^i \circ (pr_l \circ f_l))(x) &= x^i(pr_l(x, l)) \\ &= x^i(x) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (y^j \circ (pr_l \circ f_x))(y) &= y^j(pr_l(x, y)) \\ &= y^j(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda Eş.4.14 ve Eş.4.15 ifadeleri kullanılarak

$$T(pr_l \circ f_l)(X)(x^i) = X(x^i)$$

$$T(pr_l \circ f_l)(X)(x^i) = X(x^i) \quad (4.17)$$

$$T(pr_l \circ f_x)(L)(y^j) = 0 \quad (4.18)$$

elde edilir. Eş.17 ve Eş.4.18 ifadeleri Eş.4.14 de yerine konularak

$$Tpr_1(X, L) = X \quad (4.19)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} (Tpr_2 \circ T\Psi)(X, L) &= (T\lambda \circ (Tf \times id_{TG}))(X, L) \\ &= T\lambda(Tf(X), id_{TG}(L)) \\ &= T\lambda(Tf(X), L) \\ &= Tf(X).L \\ (Tpr_2 \circ T\Psi)(X, L) &= Tf(X).L \end{aligned} \quad (4.20)$$

ifadesi de doğrudur. Bu durumda

$$\begin{aligned} T\Psi(X, L) &= (T(pr_1 \circ \Psi)(X, L), T(pr_2 \circ \Psi)(X, L)) \\ &= (X, Tf(X).L) \end{aligned}$$

dır. Böylece 4.3. Önerme ispatlanmış olur.

4.4. Teorem

Herhangi bir M diferensiyellenebilir manifoldu için $T(F(M)) \subset F(T(M))$ olacak biçimde bir kanonik injection dönüşümü vardır [3].

İspat

$\bigcup_{\alpha} U_{\alpha} = M$ diferensiyellenebilir manifoldunun, $\{U_{\alpha}\}$ koordinat komşuluğu ve $\{x^1, \dots, x^n\}$ lokal koordinat sistemine sahip bir açık örtüsü olsun.

$\{x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n\}$ ve $\{x_\beta^1, \dots, x_\beta^n\}$ lokal koordinat sistemlerine karşılık gelen jacobien matrisi

$\mathcal{F}_\beta^\alpha: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(n, IR)$ ile gösterilsin. Bu durumda her bir $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ için

$$\mathcal{F}_\beta^\alpha(x) = \frac{\partial(x_\beta^1, \dots, x_\beta^n)}{\partial(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)} \text{ dır.}$$

M nin çatı demeti $F(M)$ ile gösterilirse, bu durumda

$F(M) = \{(U_\alpha, \mathcal{F}_\beta^\alpha)\}$ dır. Bunun gösterilmesi için $F(M) = (F(M), M, \pi, GL(n, IR))$ ve $F(M)$ in koordinat dönüşümü Ω_α olsun. Bu durumda

$$\pi^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\Omega_\alpha} U_\alpha \times GL(n, IR), \quad \forall \zeta \in \pi^{-1}(U_\alpha) \text{ için,}$$

$$\Omega_\alpha(\zeta) = (x, a), \quad (\pi(\zeta) = x, \quad a = [a_j^i]), \quad (\forall j, 1 \leq j \leq n) \text{ için } \zeta(e_j) = \sum_{i=1}^n a_i^j \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i} \right) \text{ ve}$$

$F(M)$ nin transition dönüşümleri $g'_{\alpha\beta}$ ile tanımlandığında transition dönüşümünün tanımından herhangi $(x, y) \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times GL(n, IR)$ için

$$(\Omega_\beta \circ (\Omega_\alpha)^{-1})(x, y) = (x, g'_{\alpha\beta}(x).y) \text{ dır.}$$

$$F(M) = \{(U_\alpha, \mathcal{F}_\beta^\alpha)\}$$

olduğunun gösterilmesi için $g'_{\alpha\beta} = \mathcal{F}_\beta^\alpha$ olduğunu göstermemiz gerekli ve yeterlidir.

Kabul edelim ki

$$(\Omega_\beta \circ (\Omega_\alpha)^{-1})(x, y) = (u, a) \in U_\alpha \times GL(n, IR) \text{ olsun. Bu durumda}$$

$$(\Omega_\alpha)^{-1}(x, y) = \zeta \text{ ile gösterilirse } \pi(\zeta) = x, \quad \zeta(e_j) = \sum_{i=1}^n y_t^i \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i} \right) \text{ dır.}$$

$$\begin{aligned}
(\Omega_\beta o(\Omega_\alpha)^{-1})(x, y) &= \Omega_\beta(\zeta) \\
&= (\pi(\zeta), a) \\
&= (x, a)
\end{aligned}$$

burada $\zeta(e_j) = \sum_{i=1}^n a_i^j \left(\frac{\partial}{\partial x_{\beta_x}^i} \right)$, $a = [a_j^i]$ dır. Bu durumda

$$\zeta(e_j) = \sum_{i=1}^n a_i^j \left(\frac{\partial}{\partial x_{\beta_x}^i} \right) = \sum_{i=1}^n y_t^i \left(\frac{\partial}{\partial x_{\alpha_x}^t} \right) \text{ elde edilir. Böylece}$$

$$\zeta(e_j) = \sum_{i=1}^n a_i^j \left(\frac{\partial}{\partial x_{\beta_x}^i} \right) = \sum_{i=1}^n y_t^j \left(\frac{\partial}{\partial x_{\alpha_x}^t} \right)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i^j \left(\frac{\partial}{\partial x_{\beta_x}^i} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{t=1}^n \left(\frac{\partial(x_{\beta}^i)}{\partial(x_{\alpha}^t)} \right)_x y_j^t \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_{\beta_x}^i} \right)$$

$$\Rightarrow a_i^j = \sum_{t=1}^n \left(\frac{\partial(x_{\beta}^i)}{\partial(x_{\alpha}^t)} \right)_x y_j^t$$

$$\Rightarrow [a_i^j] = \left[\left(\frac{\partial(x_{\beta}^i)}{\partial(x_{\alpha}^t)} \right)_x \right] \cdot [y_j^t]$$

$$\Rightarrow a = \left[\left(\frac{\partial(x_{\beta}^i)}{\partial(x_{\alpha}^t)} \right)_x \right] \cdot y = g'_{\alpha\beta}(x) \cdot y$$

$$\Rightarrow \left[\left(\frac{\partial(x_{\beta}^i)}{\partial(x_{\alpha}^t)} \right)_x \right] = g'_{\alpha\beta}(x)$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}_{\beta}^{\alpha}(x) = g'_{\alpha\beta}(x)$$

elde edilir. $F(M)$ nin $(U_{\alpha} \cap U_{\beta})$ daki transition dönüşümü $\mathcal{F}_{\beta}^{\alpha}$ dır. Bu durumda

$$F(M) = \{(U_{\alpha}, \mathcal{F}_{\beta}^{\alpha})\}$$

bulunur. 4.3. Önermeden

$$F(M) = \{(TU_\alpha, T\mathcal{F}_\beta^\alpha)\}$$

dır. 3.11.Tanımdan $J_n(T(GL(n, IR)) \subset GL(2n, IR)$ dır. Tanım 3.1 den dolayı

$$\{(TU_\alpha, T\mathcal{F}_\beta^\alpha)\} \subset \{(TU_\alpha, J_n \circ T\mathcal{F}_\beta^\alpha)\} \quad (4.21)$$

dır. $T(U_\alpha)$ üzerine indirgenmiş lokal koordinat sistemi $\{x_\alpha^l, \dots, x_\alpha^n, \dot{x}_\alpha^l, \dots, \dot{x}_\alpha^n\}$ ile gösterilsin. Bu durumda $\{x_\alpha^l, \dots, x_\alpha^n, \dot{x}_\alpha^l, \dots, \dot{x}_\alpha^n\}$, $\{x_\beta^l, \dots, x_\beta^n, \dot{x}_\beta^l, \dots, \dot{x}_\beta^n\}$ lokal koordinat sistemleri arasındaki jacobien matrisi

$$\bar{J}_\beta^\alpha : TU_\alpha \cap TU_\beta \rightarrow GL(2n, IR), \quad \forall (x, \dot{x}) \in TU_\alpha \cap TU_\beta \text{ için}$$

$$\bar{J}_\beta^\alpha(x, \dot{x}) = \left(\frac{\partial(x_\beta^l, \dots, x_\beta^n, \dot{x}_\beta^l, \dots, \dot{x}_\beta^n)}{\partial(x_\alpha^l, \dots, x_\alpha^n, \dot{x}_\alpha^l, \dots, \dot{x}_\alpha^n)} \right)_{(x, \dot{x})}$$

olarak tanımlansın. Kısalık için $J_\beta^\alpha = J$, $\bar{J}_\beta^\alpha = \bar{J}$, $U_\alpha = U$, $U_\beta = U'$, $x_\alpha^i = x^i$,

$x_\beta^i = y^i$ ile gösterelim. Bu durumda $J(x) = \frac{\partial(y^l, \dots, y^n)}{\partial(x^l, \dots, x^n)}$ dır. $y^i : U' \rightarrow R$

olduğundan her bir i , $1 \leq i \leq n$ için $y^i = f^i(x)$ denilirse

$$J(x) = \frac{\partial(f^l, \dots, f^n)}{\partial(x^l, \dots, x^n)}$$

dır. Bu durumda

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_x = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f^k}{\partial x^i} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y^k} \right)_x$$

ifadesi doğrudur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \dot{y}^k \left(\frac{\partial}{\partial y^k} \right)_x &= \sum_{i=1}^n \dot{x}^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_x \\
\Rightarrow \sum_{k=1}^n \dot{y}^k \left(\frac{\partial}{\partial y^k} \right)_x &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \dot{x}^i \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y^k} \right)_x \\
\Rightarrow \dot{y}^k &= \left(\sum_{i=1}^n \dot{x}^i \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \right) = \left(\sum_{i=1}^n \dot{x}^i \frac{\partial f^k}{\partial x^i} \right)
\end{aligned}$$

bulunur. Diğer yandan

$$\bar{J}(x, \dot{x}) = \frac{\partial(y^1, \dots, y^n, \dot{y}^1, \dots, \dot{y}^n)}{\partial(x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n)} = \frac{\partial(f^1, \dots, f^n, \dot{y}^1, \dots, \dot{y}^n)}{\partial(x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n)}$$

dır. Bu ifade açılırsa

$$\bar{J}(x, \dot{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} & \frac{\partial f^1}{\partial \dot{x}^1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial f^1}{\partial \dot{x}^n} \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial f^n}{\partial x^n} & \frac{\partial f^n}{\partial \dot{x}^1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial f^n}{\partial \dot{x}^n} \\ \frac{\partial \dot{y}^1}{\partial x^1} & & & & \frac{\partial \dot{y}^1}{\partial x^n} & \frac{\partial \dot{y}^1}{\partial \dot{x}^1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial \dot{y}^1}{\partial \dot{x}^n} \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \frac{\partial \dot{y}^n}{\partial x^1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial \dot{y}^n}{\partial x^n} & \frac{\partial \dot{y}^n}{\partial \dot{x}^1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial \dot{y}^n}{\partial \dot{x}^n} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$\forall i \in \{1, \dots, n\}, f^i : U \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü için $\forall j \in \{1, \dots, n\}, \dot{x}^j$ TU daki lokal koordinat sistemi olduğundan f^i dönüşümleri bu koordinat sistemine göre sabit dönüşümlerdir.

Bu nedenle

$$\frac{\partial f^i}{\partial \dot{x}^j} = 0 \quad (4.23)$$

dır. Ayrıca her bir $i, j \in \{1, \dots, n\}$ için

$$\begin{aligned} \dot{y}^k &= \sum_{i=1}^n \dot{x}^i \frac{\partial f^k}{\partial x^i} \\ \Rightarrow \dot{y}^i &= \sum_{k=1}^n \dot{x}^k \frac{\partial f^i}{\partial x^k} \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^j} (\dot{y}^i) &= \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sum_{k=1}^n \dot{x}^k \frac{\partial f^i}{\partial x^k} \right) \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^j} (\dot{y}^i) &= \left(\sum_{k=1}^n \dot{x}^k \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^k} \right) \right) \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^j} (\dot{y}^i) &= \left(\sum_{k=1}^n \dot{x}^k \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial x^k} \right) \end{aligned}$$

dır. Bu durumda

$$\frac{\partial \dot{y}^i}{\partial x^j} = \left(\sum_{k=1}^n \dot{x}^k \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial x^k} \right) \quad (4.24)$$

dır.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^j} (\dot{y}^i) &= \frac{\partial}{\partial \dot{x}^j} \left(\sum_{k=1}^n \dot{x}^k \frac{\partial f^i}{\partial x^k} \right) \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \dot{x}^j} (\dot{y}^i) &= \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \dot{x}^k}{\partial \dot{x}^j} \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^k} \right) \right) \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \dot{x}^j} (\dot{y}^i) &= \sum_{k=1}^n \delta_j^k \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^k} \right) \\ \Rightarrow \frac{\partial \dot{y}^i}{\partial \dot{x}^j} &= \frac{\partial f^i}{\partial x^j} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\frac{\partial \dot{y}^i}{\partial \dot{x}^j} = \frac{\partial f^i}{\partial x^j} \quad (4.25)$$

Bu $2n \times 2n$ tipinden karesel matriste kolaylık için

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial f^n}{\partial x^n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^i}{\partial x^j} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial \dot{x}^1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial f^1}{\partial \dot{x}^n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \frac{\partial f^n}{\partial \dot{x}^1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial f^n}{\partial \dot{x}^n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^i}{\partial \dot{x}^j} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{y}^1}{\partial x^1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial \dot{y}^1}{\partial x^n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \frac{\partial \dot{y}^n}{\partial x^1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial \dot{y}^n}{\partial x^n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{y}^i}{\partial x^j} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{y}^1}{\partial \dot{x}^1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial \dot{y}^1}{\partial \dot{x}^n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \frac{\partial \dot{y}^n}{\partial \dot{x}^1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial \dot{y}^n}{\partial \dot{x}^n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{y}^i}{\partial \dot{x}^j} \end{bmatrix}$$

denildiğinde,

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^i}{\partial x^j} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^i}{\partial \dot{x}^j} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{y}^i}{\partial x^j} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{y}^i}{\partial \dot{x}^j} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu ifadelerde , elde edilen Eş. 4.23 , Eş.4.24 ve Eş. 4.25 de yerine konursa

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^i}{\partial x^j} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^i}{\partial \dot{x}^j} \end{bmatrix} = 0, C = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \dot{x}^k \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial x^k} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^i}{\partial x^j} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bulunan matris ifadeleri Eş. 3.22 de yerine konursa

$$\bar{J}(x, \dot{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^i}{\partial x^j} & 0 \\ \sum_{k=1}^n \dot{x}^k \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial x^k} & \frac{\partial f^i}{\partial x^j} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

elde edilir. Herhangi bir

$$h : U \rightarrow GL(n, IR) , \forall x \in U , h(x) = [h_l^k] \in GL(n, IR)$$

diferensiyellebilir dönüşümü için

$$(Th)((\frac{\partial}{\partial x^i})_x) = \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial h_l^k}{\partial x^i} (\frac{\partial}{\partial y_l^k})_{h(x)} \text{ ifadesi doğrudur.}$$

$$J(x) = \frac{\partial(f^1, \dots, f^n)}{\partial(x^1, \dots, x^n)} \text{ olduğundan } J_l^k = \frac{\partial f^k}{\partial x^l} \text{ bulunur. Bu durumda}$$

$$J_l^k = \frac{\partial f^k}{\partial x^l} \Rightarrow \frac{\partial J_l^k}{\partial x^i} = \frac{\partial^2 f^k}{\partial x^l \partial x^i} \quad (4.27)$$

bulunur.

$$\sum_{k,l=1}^n (\sum_{i=1}^n \dot{x}^i \frac{\partial^2 f^k}{\partial x^l \partial x^i}) (\frac{\partial}{\partial y_l^k})_{J(x)} \in T_{J(x)} GL(n, IR) \text{ ifadesinde 3.8.Tanım kullanılırsa}$$

$$\begin{aligned} B &= T R_{(J(x))^{-1}} (\sum_{k,l=1}^n (\sum_{i=1}^n \dot{x}^i \frac{\partial^2 f^k}{\partial x^l \partial x^i}) (\frac{\partial}{\partial y_l^k})_{J(x)}) \\ &= \sum_{k,l,m,i=1}^n \dot{x}^i \frac{\partial^2 f^k}{\partial x^l \partial x^i} \cdot (J(x)^{-1})_m^l (\frac{\partial}{\partial y_l^m})_{I_n} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\sum_{k,l=1}^n (\sum_{i=1}^n \dot{x}^i \frac{\partial^2 f^k}{\partial x^l \partial x^i}) (\frac{\partial}{\partial y_l^k})_{J(x)} = [J(x), \sum_{k,l,m,i=1}^n \dot{x}^i \frac{\partial^2 f^k}{\partial x^l \partial x^i} \cdot (J(x)^{-1})_m^l (\frac{\partial}{\partial y_l^m})_{I_n}] \quad (4.28)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
B.J(x) &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k,l,m,i=1}^n \dot{x}^i \frac{\partial^2 f^k}{\partial x^l \partial x^i} \cdot (J(x)^{-1})_m^l (J(x))_j^m \right) \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k,l,m,i=1}^n \dot{x}^i \frac{\partial^2 f^k}{\partial x^l \partial x^i} \cdot \delta_j^l \right) \\
&= \left(\sum_{k,j,m,i=1}^n \dot{x}^i \frac{\partial^2 f^k}{\partial x^j \partial x^i} \right)
\end{aligned}$$

dır. Bu durumda

$$[B].[J(x)] = \left[\sum_{k=1}^n \dot{x}^i \frac{\partial^2 f^k}{\partial x^j \partial x^i} \right] \quad (4.29)$$

eşitliği doğrudur. Bulunan bu ifadeler kullanılırsa

$$\begin{aligned}
(J_n \circ TJ)(x, \dot{x}) &= J_n(TJ(\sum_{i=1}^n x^i (\frac{\partial}{\partial x^i})_x)) \\
&= J_n(\sum_{i=1}^n x^i TJ(\frac{\partial}{\partial x^i})_x) \\
&= J_n(\sum_{i=1}^n x^i (\sum_{k,l=1}^n (\frac{\partial^2 J_l^k}{\partial x^i})_x) (\frac{\partial}{\partial y_l^k})_{J(x)}) \\
&= J_n(\sum_{i=1}^n x^i (\sum_{k,l=1}^n (\frac{\partial f^k}{\partial x^l \partial x^i})_x) (\frac{\partial}{\partial y_l^k})_{J(x)}) \\
&= J_n([J(x), \sum_{k,l,m,i=1}^n \dot{x}^i \frac{\partial^2 f^k}{\partial x^l \partial x^i} \cdot (J(x)^{-1})_m^l (\frac{\partial}{\partial y_l^m})_{I_n}]) \\
&= \begin{bmatrix} J(x) & 0 \\ \sum_{k,j,m,i=1}^n \dot{x}^i \frac{\partial^2 f^k}{\partial x^j \partial x^i} & J(x) \end{bmatrix} \\
&= \bar{J}(x, \dot{x})
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $J_n \circ TJ = \bar{J}$ elde edilir. Bu durumda Eş.4.21

$$\begin{aligned} T(F(M)) &= \{(TU_\alpha, T\mathcal{F}_\beta^\alpha)\} \subset \{(TU_\alpha, J_n \circ T\mathcal{F}_\beta^\alpha)\} \\ &= \{(TU_\alpha, J_n \circ T\mathcal{F}_\beta^\alpha)\} = \{(TU_\alpha, \bar{\mathcal{F}}_\beta^\alpha)\} \\ &= F(T(M)) \end{aligned}$$

olduğundan

$$T(F(M)) \subset F(T(M))$$

elde edilir. Bu durumda 4.4. Teorem ispatlanmış olur.

4.5. Tanım

4.4. Teorem de oluşturulan birebir dönüşümü $J_M : T(F(M)) \rightarrow F(T(M))$ ile gösterelim. J_M dönüşümü M diferensiyellenebilir manifoldunun $\{U_\alpha\}$ açık örtüsü ve $\{U_\alpha\}$ üzerindeki koordinat fonksiyonlarının seçiminden bağımsızdır [3].

P, P' iki asli lif demeti, bu asli lif demetlerinin transition dönüşümleri $g_{\alpha\beta}$ ve $g'_{\alpha\beta}$, P, P' nin bu transition dönüşümleri ile oluşturulan koordinat dönüşümleri sırasıyla g_P^{-1} ve $g'_{P'}^{-1}$, $\hat{j} : P \rightarrow P'$ bir asli lif demeti homomorfizmi olsun. $g_{\alpha\beta}$ ve $g'_{\alpha\beta}$ transition dönüşümleri koordinat fonksiyonlarının seçiminden bağımsız olduğundan $\hat{j}$ dönüşümü de bu seçimden bağımsızdır. Özel olarak $\hat{j} = J_M$ alınırsa J_M dönüşümünün M diferensiyellenebilir manifoldunun $\{U_\alpha\}$ açık örtüsü ve $\{U_\alpha\}$ üzerindeki koordinat fonksiyonlarının seçiminden bağımsız olduğu görülür.

U, M de bir koordinat komşuluğu olsun. Bu durumda U ve $T(U)$ üzerinde sırasıyla $F(M)$ ve $F(T(M))$ nin

$$\Phi_U : U \times GL(n, IR) \rightarrow F(U), \quad \Psi_U : TU \times GL(2n, IR) \rightarrow F(T(U))$$

kanonik trivializasyonları vardır.

4.6.Önerme

$J_M|_{T(F(U))} = \Psi_U o(id_{T(U)} \times J_n) o(T\Phi_U)^{-1}$ ifadesi doğrudur [3].

İspat

4.1.Tanım deki $\hat{j} = g'_{p'} o(id_{U_a} \times i_{GG'}) o(g_p)^{-1}$ ifadesindeki P , P' sırasıyla $T(U)$ üzerinde $T(F(M))$ ve $F(T(M))$, koordinat dönüşümlerinin invers dönüşümleri sırasıyla $g'_{p'} = \Psi_U$, $g_p = T\Phi_U$ ve $\hat{j} = J_M$ alınırsa

$J_M|_{T(F(U))} = \Psi_U o(id_{T(U)} \times J_n) o(T\Phi_U)^{-1}$ ifadesinin doğru olduğu görülür.

4.7.Önerme

$\pi : F(M) \rightarrow M$ ve $\tilde{\pi} : F(T(M)) \rightarrow T(M)$ demet projeksiyonları olsun. Bu durumda J_M dönüşümü J_n Lie grup homomorfizmine göre $T(F(M))$ den $F(T(M))$ ye bir asli lif demeti homomorfizmidir, yani

$\forall (X, Y) \in T(F(M)) \times T(GL(n, IR))$ için $J_M(X, Y) = J_M(X) \cdot J_n(Y)$ dır ve aşağıdaki diyagram değişmelidir [3].

$$\begin{array}{ccc} T(F(M)) & \xrightarrow{J_M} & F(T(M)) \\ T\pi \downarrow & & \downarrow \tilde{\pi} \\ TM & \xrightarrow{id_{TM}} & TM \end{array}$$

İspat

4.1. Tanımdan dolayı $J_M : T(F(M)) \rightarrow F(T(M))$ dönüşümü bir asli demet homomorfizmidir. Her bir asli demet homomorfizmi aynı zamanda bir lif demet homomorfizmidir. Bu durumda J_M bir lif demeti homomorfizmidir ve yukarıdaki diyagram değişmelidir.

5. G-YAPILARININ TAŞINMALARI (PROLONGASYONLARI)

5.1.Tanım

G , $GL(n, IR)$ nin bir Lie alt grubu, $J_n(T(G)) = \tilde{G}$ olsun. Bu durumda $\tilde{G}$, $GL(2n, IR)$ nin bir Lie alt grubu olur. Gerçekten G , $GL(n, IR)$ nin bir Lie alt grubu ise diferensiyellenebilir, birebir bir $\zeta : G \rightarrow GL(n, R)$ Lie grup homomorfizmi dönüşümü vardır. Bu durumda $T\zeta : TG \rightarrow T(GL(n, R))$ dönüşümü de diferensiyellenebilirdir.

Herhangi $U, V \in T(G)$, G nin grup işlemi μ , $GL(n, IR)$ nin grup işlemi μ' olsun. Bu durumda TG nin grup işlemi $T\mu$ ve $T(GL(n, IR))$ nin grup işlemi de $T\mu'$ olur. Ayrıca ζ bir homomorfizm olduğundan $\forall (x, y) \in G \times G$ için

$$\zeta(\mu(x, y)) = \mu'(\zeta(x), \zeta(y)) = (\mu' \circ (\zeta \times \zeta))(x, y)$$

eşitliği elde edilir. Bu durumda

$$\zeta \circ \mu = \mu' \circ (\zeta \times \zeta) \quad (5.1)$$

Eş.5.1 den

$$\begin{aligned} T\zeta(T\mu(U, V)) &= T(\zeta \circ \mu)(U, V) \\ &= T(\mu' \circ (\zeta \times \zeta))(U, V) \\ &= T\mu'(T\zeta(U), T\zeta(V)) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece $T\mu$ de bir grup homomorfizmidir. Ayrıca ζ bir birebir grup homomorfizmi olduğundan, bir imbeddingdir. Bu nedenle $T\zeta$ de birebirdir. Bu durumda $T\zeta : TG \rightarrow T(GL(n, IR))$ dönüşümü bir birebir Lie grup homomorfizmidir. Bu durumda TG , $T(GL(n, IR))$ nin bir Lie alt grubudur. Böylece

$$TG \xrightarrow{T\zeta} T(GL(n, IR)) \xrightarrow{J_n} GL(2n, R)$$

$$J_n \circ T\zeta : TG \rightarrow GL(2n, IR)$$

bir birebir Lie grup homomorfizmidir. Bu durumda $T\zeta(TG) \cong TG$ özdeşleştirmesini kullanırsak $J_n(TG) = \tilde{G}$, $GL(2n, IR)$ in bir Lie alt grubu olur. Ayrıca $\tilde{G} \cong TG$ dır [3].

5.2.Tanım

M , n -boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold ve G Lie grubu $GL(n, IR)$ in bir Lie alt grubu olsun. M üzerinde bir G -yapı, M nin çatı demeti olan $F(M)$ nin bir (P, π, M, G) alt demetidir. Bu durumda M diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde bir G -yapısı demek, $F(M)$ nin , yapı grubu $GL(n, IR)$ in bir Lie alt grubu olan G ye redaksiyonundan başka bir şey değildir [3].

5.3.Teorem

Bir M diferensiyellenebilir manifoldu bir P , G -yapısına sahip ise $T(M)$ de bir kanonik $\tilde{P}$, $\tilde{G}$ -yapısına sahiptir [3].

İspat

(P, π, M, G) asli lif demetinin, üzerinde trivial olduğu M nin bir açık örtüsü $\{U_\alpha\}$ ve (P, π, M, G) nin transition dönüşümü $g_{\alpha\beta}$ olsun. Bu durumda 4.3.Önerme den

$$TP = \{(TU_\alpha, Tg_{\alpha\beta})\}$$

dır. M diferensiyellenebilir manifoldu P G -yapısına sahip olduğundan P den $F(M)$ ye bir reduction vardır. Bu dönüşüm f ile gösterilsin. Bu durumda f dönüşümü bir birebir demet homomorfizmidir. Bu durumda f nin tanjant dönüşümü olan Tf dönüşümü de TP den $T(F(M))$ ye birebir bir demet homomorfizmidir. Gerçekten f bir demet homomorfizmi olduğundan bir $h : G \rightarrow GL(n, IR)$ birebir Lie grup homomorfizmi vardır. Bu durumda $Th : TG \rightarrow T(GL(n, IR))$ dönüşümü de bir Lie grup homomorfizmidir.

P ve $F(M)$ asli lif demetlerinin sağ etkileri sırasıyla ρ, ρ' ile gösterilsin. f bir demet homomorfizmi olduğundan $\forall (p, a) \in P \times G$ için

$$f(\rho(p, a)) = \rho'(f(p), h(a))$$

dır. Bu durumda

$$f \circ \rho = \rho' \circ (f \times h) \quad (5.2)$$

eşitliği elde edilir. Herhangi $(\hat{X}, \hat{Y}) = TP \times TG$ için Eş.5.2 kullanılırsa

$$\begin{aligned} Tf(T\rho(\hat{X}, \hat{Y})) &= T(f \circ \rho)(\hat{X}, \hat{Y}) \\ &= T\rho'(T(f \times h)(\hat{X}, \hat{Y})) \\ &= T\rho'((Tf \times Th)(\hat{X}, \hat{Y})) \\ &= T\rho'(Tf(\hat{X}), Th(\hat{Y})) \\ Tf(T\rho(\hat{X}, \hat{Y})) &= T\rho'(Tf(\hat{X}), Th(\hat{Y})) \end{aligned} \quad (5.3)$$

eşitliği elde edilir. Bu durumda Tf bir demet homomorfizmidir. Tf bir demet homomorfizmi ve Th bir bire bir Lie grup homomorfizmi olduğundan $Tf : TP \rightarrow T(F(M))$ bir reductiondır. Bu durumda

$TP \xrightarrow{Tf} T(F(M)) \xrightarrow{J_M} F(T(M))$ diyagramı elde edilir. $Tf(T(P)) \cong T(P)$ özdeşleştirilmesi göz önüne alınırsa

$$J_M|_{T(P)} : TP \rightarrow F(T(M))$$

dönüşümü bir reduction olur. $J_M(TP) = \tilde{P}$ ve $J_n(TG) = \tilde{G}$ ile gösterilsin. Bu durumda $T(M)$ diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde bir $\tilde{G}$ -yapısı vardır. Bu $\tilde{G}$ -yapısı $\tilde{P}$ dır. Bulunan $\tilde{P}, \tilde{G}$ -yapısının transition dönüşümleri ise $(J_n \circ T g_{\alpha\beta})$ olduğundan

$$\tilde{P} = \{TU_{\alpha}, J_n \circ Tg_{\alpha\beta}\}$$

eşitliği elde edilir.

5.4. Tanım

5.3. Teorem de elde edilen $\tilde{P} = J_M(TP)$ ifadesi, M üzerindeki P , G -yapısının $T(M)$ tanjant demetine taşınması (prolongasyonu) olarak adlandırılır [3].

5.5.Sonuç

M diferensiyellenebilir manifoldu tamamıyla paralelleştirilebilir ise $T(M)$ de tamamıyla paralelleştirilebilirdir [3].

İspat

M diferensiyellenebilir manifoldu tamamıyla paralelleştirilebilir olsun. Bu durumda M diferensiyellenebilir manifoldu $\{I_n\}$ -yapılıdır. 5.3.Teorem den dolayı $T(M)$, $\{J_n(T(I_n))\}$ -yapılıdır. Ayrıca $\{T(I_n)\} = T_{I_n}(\{I_n\})$ dır.

$$\text{boy}(\{I_n\}) = \text{boy}(T_{I_n}(\{I_n\}))$$

$$= 0$$

dır. Böylece $\{T(I_n)\} = \{0_{I_n}\}$ elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} J_n(\{T(I_n)\}) &= J_n(\{0_{I_n}\}) \\ &= \{J_n([I_n, 0])\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \right\} \\ &= \{I_{2n}\} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da bize $T(M)$ nin $\{I_{2n}\}$ -yapılı olduğunu gösterir. $T(M)$ tamamıyla paralelleştirilebilirdir.

5.6.Önerme

M diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde bir G -yapı var ise bu durumda $G_0 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \mid a \in G \right\}$ olmak üzere $T(M)$ üzerinde (kanonik olmayan) bir G_0 -yapısı vardır [3].

İspat

G Lie grubu s -boyutlu olsun. G_0 , $\tilde{G}$ nin bir kapalı alt grubudur. Bu nedenle $\tilde{G}/G_0$ bölüm uzayı bir diferensiyellenebilir manifold yapısına sahiptir.

$\tilde{G}/G_0$ diferensiyellenebilir manifoldu $T_e G$ uzayına diffeomorftur. $Boy(T_e G) = Boy G = s$ olduğundan $T_e G$ ile R^s uzayları izomorfiktir. Böylece $\tilde{G}/G_0$ ile R^s uzayları diffeomorfik olur. $\tilde{P}$ diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde

“($\tilde{z}, \tilde{z}'$) $\in \rho \Leftrightarrow \tilde{z} = \tilde{z}' . a_0$ olacak şekilde bir $a_0 \in G_0$ vardır.”

biçiminde tanımlı ρ denklik bağıntısı ile oluşturulan $\tilde{P}$ nin G_0 a bölüm uzayı $\tilde{P}/G_0$ ile gösterildiğinde , $\tilde{P}/G_0$, total uzayı $\tilde{P}/G_0$, taban uzayı $T(M)$ lifi $\tilde{G}/G_0$ ve yapı grubu $\tilde{G}$ olan bir lif demeti olur. Ayrıca, $\tilde{G}/G_0$, R^s ye diffeomorfik olduğundan $\tilde{P}/G_0$ ın bir global bir σ çapraz kesiti vardır. Bu durumda $(\tilde{P}/G_0, T(M), \tilde{G})$ asli lif demeti , $f : \tilde{P}/G_0 \rightarrow \tilde{P}$ bir reduction dönüşümü vardır. Bu durumda $T(M)$ üzerinde bir G_0 -yapısı vardır. Bu durumda 5.6.Önerme ispatlanmış olur.

6. G-YAPILARININ İZOMORFİZMLERİNİN TAŞINMALARI (PROLONGASYONLARI)

6.1.Tanım

M ve M' n -boyutlu diferensiyellenebilir manifoldlar, G ise $GL(n, \mathbb{R})$ nin bir Lie altgrubu, M ile M' diferensiyellenebilir manifoldları üzerindeki G -yapıları sırasıyla P , P' ve

$f : M \rightarrow M'$ bir örten diffeomorfizm olsun. Eğer $\forall z \in F(M)$ için,

$$F(f) : F(M) \rightarrow F(M') , (F(f))(z) = Tf \circ z$$

ile tanımlı $F(f)$ dönüşümü için

$$Ff(P) = P'$$

ise f fonksiyonuna P den P' ne bir izomorfizm denir [3].

6.2. Teorem

$f : M \rightarrow M'$ örten bir diffeomorfizm olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlik doğrudur[3].

$$F(Tf) \circ J_M = J_{M'} \circ (TF(f))$$

(6.1)

İspat

$M = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ ve $V_{\alpha} = f(U_{\alpha})$ olsun. f bir örten diffeomorfizm olduğundan V_{α} , M' diferensiyellenebilir manifoldu için bir koordinat komşuluğudur. Bu durumda

$$M' = \bigcup_{\alpha} V_{\alpha} \text{ dır.}$$

$$\Phi_\alpha : U_\alpha \times GL(n, IR) \rightarrow F(U_\alpha)$$

$$\Phi'_\alpha : V_\alpha \times GL(n, IR) \rightarrow F(V_\alpha)$$

fonksiyonları sırasıyla $F(M)$ ve $F(M')$ çatı demetlerinin U_α ve V_α üzerideki trivializasyonları olsun. Bu durumda aşağıdaki değişmeli diyagram vardır.

$$F(U_\alpha) \xleftarrow{\Phi_\alpha} U_\alpha \times GL(n, IR)$$

$$Ff \downarrow \qquad \downarrow f_\alpha$$

$$F(V_\alpha) \xleftarrow{\Phi'_\alpha} V_\alpha \times GL(n, IR)$$

Bu durumda

$$\Phi'_\alpha \circ f_\alpha = F(f) \circ (\Phi_\alpha) \tag{6.2}$$

eşitliği doğrudur. Eş. 6.2 ifadesindeki $f_\alpha = (\Phi'_\alpha)^{-1} \circ Ff \circ \Phi_\alpha$ dönüşümü bir diffeomorfizmdir. Gerçekten herhangi bir $z \in F(U_\alpha)$ için $\pi_{F(M)}(z) = x$,

z lineer dönüşümünün IR^n nin standart bazlarına göre matris ifadesi $[z_j^i]$ olsun. Bu durumda

$$(\Phi'_\alpha)^{-1}(z) = (\pi_{F(M)}(z), [z_j^i])$$

$$\Rightarrow f_\alpha((\Phi'_\alpha)^{-1}(z)) = ((\Phi'_\alpha)^{-1} \circ F(f))(z)$$

$$\Rightarrow f_\alpha((\Phi'_\alpha)^{-1}(z)) = (\Phi'_\alpha)^{-1}(Tf \circ z)$$

$$\Rightarrow (f_\alpha \circ (\Phi'_\alpha)^{-1})(z) = (\pi_{F(M')}(Tf \circ z), [(Tf \circ z)_j^i])$$

$$\Rightarrow (f_\alpha \circ (\Phi'_\alpha)^{-1})(z) = (f(x), [Tf][z])$$

$$\Rightarrow (f_\alpha \circ (\Phi'_\alpha)^{-1})(z)$$

$$\begin{aligned}
\Phi_a^{-1}(z) &= (\pi(z), [z]) \\
\Rightarrow (f_a \circ \Phi_a^{-1})(z) &= f_a((\pi(z), [z])) \\
\Rightarrow (f_a \circ \Phi_a^{-1})(z) &= f_a(x, [z]) \\
\Rightarrow (f(x), [Tf][z]) &= f_a(x, [z]) \\
\Rightarrow f_a(x, [z]) &= (f \times (\mu|_{[Tf]B}))(x, [z]) \\
\Rightarrow f_a &= (f \times (\mu|_{[Tf]B}))
\end{aligned}$$

elde edilir. f ve $\mu|_{[Tf]B}$ birer diffeomorfizm olduğundan f_a dönüşümü de bir diffeomorfizmdir. Bu durumda Eş. 6.2 ifadesi, aşağıdaki değişmeli diyagrama indirgenir.

$$\begin{array}{ccc}
T(F(U_a)) & \xleftarrow{T\Phi_a} & T(U_a) \times T(GL(n, IR)) \\
T(Ff) \downarrow & & \downarrow Tf_a \\
T(F(V_a)) & \xleftarrow{T\Phi'_a} & T(V_a) \times T(GL(n, IR))
\end{array}$$

Bu diyagram değişmeli olduğundan

$$T\Phi'_a \circ Tf_a = TF(f) \circ (T\Phi_a) \quad (6.3)$$

eşitliği doğrudur. Diğer yandan

$$\begin{aligned}
\Psi_a : TU_a \times GL(2n, IR) &\rightarrow F(T(U_a)) \\
\Psi'_a : TV_a \times GL(2n, IR) &\rightarrow F(T(V_a))
\end{aligned} \quad (6.4)$$

sırasıyla $F(T(M))$ ve $F(T(M'))$ çatı demetlerinin, U_a ve V_a dan indirgenmiş $T(U_a)$ ve $T(V_a)$ üzerindeki lokal trivializasyonları olsun. Bu durumda aşağıdaki değişmeli diyagram elde edilir.

$$T(U_\alpha) \times GL(2n, IR) \xrightarrow{\Psi_\alpha} F(T(U_\alpha))$$

$$\bar{f}_\alpha \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow F(Tf)$$

$$T(V_\alpha) \times GL(2n, IR) \xrightarrow{\Psi'_\alpha} F(T(V_\alpha))$$

Bu durumda

$$\psi'_\alpha \circ \bar{f}_\alpha = F(Tf) \circ \Psi_\alpha \quad (6.5)$$

eşitliği doğrudur. Eş. 6.5 düzenlendiği takdirde

$$\bar{f}_\alpha = \psi'^{-1}_\alpha \circ F(Tf) \circ \Psi_\alpha$$

eşitliği elde edilir. Herhangi $(u, a) \in T(V_\alpha) \times GL(2n, IR)$ için $a = [a_j^i]$, $\Psi'_\alpha(u, a) = z$ ve $(w, b) \in T(U_\alpha) \times GL(2n, IR)$ için $\Psi_\alpha(w, b) = z$. Burada z' lineer dönüşümünün standart bazlara göre matrisi $a = [a_j^i]$, herhangi bir $x \in IR^{2n}$ için $z'(x) \in T_u(TV_\alpha)$ ve z lineer dönüşümünün standart bazlara göre matrisi $b = [b_j^i]$, herhangi bir $x \in IR^{2n}$ için $z(x) \in T_u(TU_\alpha)$ dır. Bu durumda

$$\bar{f}_\alpha(w, b) = (\psi'^{-1}_\alpha \circ F(Tf))(\Psi_\alpha(w, b))$$

$$= (\psi'^{-1}_\alpha \circ F(Tf))(z)$$

$$= \psi'^{-1}_\alpha (T(Tf) \circ z)$$

$$= (Tf(w), [T(Tf)](z))$$

$$= ((Tf) \times \mu|_{\ell_{[T(Tf)]}})(w, b)$$

bulunur. Böylece

$\bar{f}_\alpha = ((Tf) \times \mu|_{\ell_{[T(Tf)]}})$ eşitliği elde edilir. Tf ve $\mu|_{\ell_{[T(Tf)]}}$ dönüşümleri birer diffeomorfizm olduğundan $\bar{f}_\alpha$ dönüşümü de bir diffeomorfizmdir.

$$J_n : T(GL(n, IR)) \rightarrow GL(2n, IR),$$

her bir $[a, B] \in T(GL(n, IR))$ için

$$J_n([a, B]) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ Ba & a \end{bmatrix}$$

ile tanımlı dönüşüm olmak üzere ,

$J_\alpha = id_{T(U_\alpha)} \times J_n$, $J'_\alpha = id_{T(V_\alpha)} \times J_n$ olacak şekilde tanımlansın. Bu durumda 4.6.Önerme den $T(F(U_\alpha))$ üzerinde $J_M = \Psi_\alpha \circ J_\alpha \circ [T\Phi_\alpha]^{-1}$ ve $T(F(V_\alpha))$ üzerinde $J_{M'} = \Psi'_\alpha \circ J'_\alpha \circ [T\Phi'_\alpha]^{-1}$ ifadesi doğrudur. Eş. 6.1 in doğru olduğunu göstermek için

$$T(U_\alpha) \times T(GL(n, IR)) \xrightarrow{J_\alpha} (T(U_\alpha) \times GL(2n, IR))$$

$$Tf_\alpha \downarrow$$

$$\downarrow \bar{f}_\alpha$$

$$T(V_\alpha) \times T(GL(n, IR)) \xrightarrow{J'_\alpha} (T(V_\alpha) \times GL(2n, IR))$$

diyagramının değişmeli olduğunu , yani

$$\bar{f}_\alpha \circ J_\alpha = J'_\alpha \circ Tf_\alpha \tag{6.6}$$

eşitliğinin doğru olduğu gösterilmelidir. Eş. 6.6 doğru olduğunda Eş. 6.3 ve Eş.6.4 ifadeleri doğru olduğundan Eş. 6.3, Eş. 6.4 ve Eş. 6.6 ifadelerinin birleşimi olan aşağıdaki diyagram da değişmeli olur;

$$T(F(U_\alpha)) \xrightarrow{T\Phi_\alpha} T(U_\alpha) \times TGL(n, IR) \xrightarrow{J_\alpha} T(U_\alpha) \times GL(2n, IR) \xrightarrow{\Psi_\alpha} F(T(U_\alpha))$$

$$T(Ff) \downarrow$$

$$\downarrow Tf_\alpha$$

$$\bar{f}_\alpha \downarrow$$

$$\downarrow F(Tf)$$

$$T(F(V_\alpha)) \xrightarrow{T\Phi'_\alpha} T(V_\alpha) \times TGL(n, IR) \xrightarrow{J'_\alpha} T(V_\alpha) \times GL(2n, IR) \xrightarrow{\Psi'_\alpha} T(F(V_\alpha))$$

Bu diyagram düzenlenirse

$$\begin{array}{ccc}
T(F(U_\alpha)) & \xrightarrow{J_M} & F(T(U_\alpha)) \\
T(F(f)) \downarrow & & \downarrow F(Tf) \\
T(F(V_\alpha)) & \xrightarrow{J_{M'}} & F(T(V_\alpha))
\end{array}$$

elde edilir. Bu ise Eş. 6.1 ifadesinin doğru olduğunu gösterir. U_α ve V_α üzerinde sırasıyla $\{x^1, \dots, x^n\}$ ve $\{y^1, \dots, y^n\}$ koordinat sistemleri seçilsin. Bu durumda $T(U_\alpha)$ ve $T(V_\alpha)$ üzerindeki indirgenmiş lokal koordinat sistemleri sırasıyla $\{x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n\}$ ve $\{y^1, \dots, y^n, \dot{y}^1, \dots, \dot{y}^n\}$ dır. Benzer biçimde $F(U_\alpha)$ ve $F(V_\alpha)$ üzerindeki indirgenmiş lokal koordinat fonksiyonları sırasıyla $\{x^1, \dots, x^n, \dots, w_j^i, \dots\}$ ve $\{y^1, \dots, y^n, \dots, z_j^i, \dots\}$ dır. Bu durumda $F(U_\alpha)$ ve $F(V_\alpha)$ üzerindeki $\{x^1, \dots, x^n, \dots, w_j^i, \dots\}$ ve $\{y^1, \dots, y^n, \dots, z_j^i, \dots\}$ lokal koordinat sistemleri $T(F(U_\alpha))$ ve $T(F(V_\alpha))$ üzerine sırasıyla $\{x^1, \dots, x^n, \dots, w_j^i, \dots, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n, \dots, \dot{w}_j^i, \dots\}$ ve $\{y^1, \dots, y^n, \dots, z_j^i, \dots, \dot{y}^1, \dots, \dot{y}^n, \dots, \dot{z}_j^i, \dots\}$ lokal koordinat sistemlerini indirger.

Kabul edelim ki $f : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ fonksiyonu lokal koordinat sistemlerine bağlı olarak $y^i = f^i(x^1, \dots, x^n)$ ile ifade edilebilsin. Böylece Tf , f_α ve $T(f_\alpha)$ aşağıdaki biçimde ifade edilebilir:

$$Tf: Tf = (y^1, \dots, y^n, \dot{y}^1, \dots, \dot{y}^n), y^i = f^i(x) \quad , \quad \dot{y}^i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^k} \dot{x}^k$$

$$f_\alpha: f_\alpha = (y^1, \dots, y^n, z_j^i), y^i = f^i(x), \quad z_j^i = \sum_{k=1}^n w_k^i \frac{\partial f^i}{\partial x^k}$$

$$T(f_\alpha) = \begin{cases} y^i = f^i(x), z_j^i = \sum_{k=1}^n w_k^i \frac{\partial f^i}{\partial x^k} \\ \dot{y}^i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^k} \dot{x}^k \\ \dot{z}_j^i = \sum_{k,l=1}^n w_k^i \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^k \partial x^l} \dot{x}^l + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^k} \dot{w}_k^i \end{cases} \quad (6.7)$$

bulunur. Diğer taraftan $T(U_\alpha)$ ve $T(V_\alpha)$ üzerindeki sırasıyla $\{x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n\}$ ve $\{y^1, \dots, y^n, \dot{y}^1, \dots, \dot{y}^n\}$ lokal koordinat sistemleri $F(T(U_\alpha))$ ve $F(T(V_\alpha))$ üzerine $\{x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n, \dots, \bar{w}_v^\eta, \dots\}$ ve $\{y^1, \dots, y^n, \dot{y}^1, \dots, \dot{y}^n, \dots, \bar{z}_v^\eta, \dots\}$, $(v, \eta \in \{1, \dots, 2n\})$ lokal koordinat sistemlerini indirger.

$$F(T(U_\alpha)) \xrightarrow{F(Tf)} F(T(V_\alpha)), \quad F(Tf)(\bar{w}_v^\eta) = [T(Tf)][\bar{w}_v^\eta] = [\bar{z}_v^\eta]$$

olarak tanımlıdır. Ayrıca $Tf = (f^1, \dots, f^n, \dot{f}^1, \dots, \dot{f}^n)$ ve $\dot{f}^i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^k} \dot{x}^k$ olmak üzere $\dot{f}^i = f^{n+i}$ ile gösterilirse

$$\bar{z}_v^\eta = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial (Tf)^\eta}{\partial x^k} \bar{w}_v^k = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f^\eta}{\partial x^k} \bar{w}_v^k$$

elde edilir.

$$T(U_\alpha) \times GL(2n, IR) \xrightarrow{\bar{f}_\alpha} T(V_\alpha) \times GL(2n, IR), \quad \bar{f}_\alpha = \psi_\alpha'^{-1} \circ F(Tf) \circ \Psi_\alpha$$

ve $\forall (w, b) \in T(U_\alpha) \times GL(2n, IR)$ için

$$\bar{f}_\alpha(w, b) = (Tf(w), [T(Tf)]b)$$

olduğundan

$$\bar{f}_a = (Tf, [\bar{z}_v^\eta]) = (f^l, \dots, f^n, \dot{f}^l, \dots, \dot{f}^n, \bar{z}_v^\eta) = (f^l, \dots, f^n, \dot{f}^l, \dots, \dot{f}^n, \sum_{k=1}^n \frac{\partial f^\eta}{\partial x^k} \bar{w}_v^k)$$

$$[\bar{z}_v^\eta] = [T(Tf)][\bar{w}] \text{ kolaylık için}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f^l}{\partial x^l} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial f^l}{\partial x^n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^l} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial f^n}{\partial x^n} \end{bmatrix} = A, \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial f^l}{\partial \dot{x}^l} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial f^l}{\partial \dot{x}^n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \frac{\partial f^n}{\partial \dot{x}^l} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial f^n}{\partial \dot{x}^n} \end{bmatrix} = B$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{f}^l}{\partial x^l} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial \dot{f}^l}{\partial x^n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \frac{\partial \dot{f}^n}{\partial x^l} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial \dot{f}^n}{\partial x^n} \end{bmatrix} = C, \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{f}^l}{\partial \dot{x}^l} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial \dot{f}^l}{\partial \dot{x}^n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \frac{\partial \dot{f}^n}{\partial \dot{x}^l} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial \dot{f}^n}{\partial \dot{x}^n} \end{bmatrix} = D$$

$$\begin{bmatrix} \bar{w}_l^l & \bar{w}_n^l \\ \bar{w}_l^n & \bar{w}_n^n \end{bmatrix} = X, \quad \begin{bmatrix} \bar{w}_{n+l}^l & \bar{w}_{2n}^l \\ \bar{w}_{n+l}^n & \bar{w}_{2n}^n \end{bmatrix} = Y$$

$$\begin{bmatrix} \bar{w}_l^{n+l} & \bar{w}_l^{n+l} \\ \bar{w}_l^{2n} & \bar{w}_n^{2n} \end{bmatrix} = Z, \quad \begin{bmatrix} \bar{w}_{n+l}^{n+l} & \bar{w}_{2n}^{n+l} \\ \bar{w}_{n+l}^{2n} & \bar{w}_{2n}^{2n} \end{bmatrix} = T$$

denirse $[T(Tf)] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ ve $[\bar{w}] = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T \end{bmatrix}$ olduğu görülür.

$y^i = f^i(x^1, \dots, x^n)$ olduğundan her bir $i, j \in \{1, \dots, n\}$ için f^i fonksiyonları $\dot{x}^j$ değişkenlerine bağımlı değildir. Bu durumda $\frac{\partial f^i}{\partial \dot{x}^j} = 0$

$$B = \left[\frac{\partial f^i}{\partial \dot{x}^j} \right] = 0 \text{ ve } C = \left[\frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right] = \left[\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^I \partial x^j} \right] \text{ dır. Ayrıca}$$

$$D = \left[\frac{\partial \dot{f}^i}{\partial \dot{x}^j} \right] \text{ ve her bir } i \in \{1, \dots, n\} \text{ için } \dot{f}^i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^k} \dot{x}^k \text{ olduğundan}$$

$$\frac{\partial \dot{f}^i}{\partial \dot{x}^j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^k} \frac{\partial \dot{x}^k}{\partial \dot{x}^j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^k} \delta_j^k = \frac{\partial f^i}{\partial x^j}$$

elde edilir. Böylece $D = \left[\frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right]$ elde edilir. $[T(Tf)] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ olduğundan

$$\begin{aligned} [\bar{z}_v^\eta] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f^i}{\partial x^j} & 0 \\ \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^I \partial x^j} & \frac{\partial f^i}{\partial x^j} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f^i}{\partial x^j} & 0 \\ \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^I \partial x^j} & \frac{\partial f^i}{\partial x^j} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda

$$[\bar{z}_v^\eta] = [T(Tf)][\bar{w}] \text{ olduğundan}$$

$$\begin{aligned}
[\bar{z}_v^\eta] &= \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right) & 0 \\ \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^l \partial x^j} & \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \left(\sum_{t=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^t} \cdot \bar{w}_j^t \right) & \left(\sum_{t=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^t} \cdot \bar{w}_{n+j}^t \right) \\ \left(\sum_{t,l=1}^n \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^l \partial x^t} \cdot \bar{w}_j^t + \sum_{t=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^t} \bar{w}_{n+j}^{n+t} \right) & \left(\sum_{t,l=1}^n \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^l \partial x^t} \cdot \bar{w}_{n+j}^t + \sum_{t=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^t} \cdot \bar{w}_{n+j}^{n+t} \right) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $i \in \{1, \dots, n\}$ ve $i = \eta$ için $[\bar{z}_v^i] = \left[\sum_{k=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^k} \cdot \bar{w}_v^k \right]$ ve

$$i \in \{1, \dots, n\} \text{ ve } \eta = n + i \text{ için } [\bar{z}_v^{n+i}] = \left[\sum_{t,l=1}^n \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^l \partial x^t} \cdot \bar{w}_v^t + \sum_{t=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^t} \cdot \bar{w}_v^{n+t} \right]$$

elde edilir. Bulunan sonuçlar bir araya getirildiğinde

$$\bar{f}_a = \begin{cases} y^i = f^i(x) \quad , \quad \dot{y}^i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^k} \dot{x}^k \\ \bar{z}_v^i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^k} \cdot \bar{w}_v^k \\ \bar{z}_v^{n+i} = \sum_{t,l=1}^n \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^l \partial x^t} \cdot \bar{w}_v^t + \sum_{t=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^t} \cdot \bar{w}_v^{n+t} \end{cases} \quad (6.8)$$

elde edilir.

w_j^i ve $\dot{w}_j^i$ koordinatlarına sahip $X \in T(GL(n, IR))$ için

$$J_n(X) = \begin{bmatrix} w_j^i & 0 \\ \dot{w}_j^i & w_j^i \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

olduğunu gösterelim. $X \in T(GL(n, IR))$ olduğundan $X = \sum_{i,j=1}^n \dot{w}_j^i \left(\frac{\partial}{\partial w_j^i} \right)_w$ olacak

şekilde $w \in GL(n, IR)$ vardır. Bu durumda ;

$$\begin{aligned}
 J_n(X) &= J_n\left(l\left(w_j^i\right), TR_{w^{-1}}(X)\right) \\
 &= J_n\left(l\left(w_j^i\right), TR_{w^{-1}}\left(\sum_{i,j=1}^n \dot{w}_j^i \left(\frac{\partial}{\partial w_j^i}\right)_w\right)\right) \\
 &= J_n\left(l\left(w_j^i\right), \left(\sum_{i,j=1}^n \dot{w}_j^i (w^{-1})_t^j TR_{w^{-1}}\left(\frac{\partial}{\partial w_t^i}\right)_w\right)\right) \\
 &= J_n\left(l\left(w_j^i\right), \left(\sum_{i,j=1}^n \dot{w}_j^i (w^{-1})_t^j \left(\frac{\partial}{\partial w_t^i}\right)_{I_n}\right)\right) \\
 &= \begin{bmatrix} \left(w_j^i\right) & 0 \\ \left(\dot{w}_j^i (w^{-1})_t^j\right) \left(w_j^i\right) & \left(w_j^i\right) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \left(w_j^i\right) & 0 \\ \left(\dot{w}_j^i\right) & \left(w_j^i\right) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

bulunur. bu durumda Eş. 6.9 ifadesi doğrudur.

Eş.6.6 ifadesinin doğru olduğunu göstermek için, herhangi

$\tilde{X} = (x, \dot{x}, (w_j^i), (\dot{w}_j^i)) \in T(U_\alpha) \times T(GL(n, IR))$ için

$$\begin{aligned}
 (J'_\alpha \circ Tf_\alpha)(\tilde{X}) &= (J'_\alpha \circ Tf_\alpha)(x, \dot{x}, (w_j^i), (\dot{w}_j^i)) \\
 &= J'_\alpha(y^i, \dot{y}^i, (z_j^i), (\dot{z}_j^i)) \\
 &= I_{T(V_\alpha)} \times J_n((y^i, \dot{y}^i, (z_j^i), (\dot{z}_j^i))) \\
 &= (y^i, \dot{y}^i, J_n((z_j^i), (\dot{z}_j^i))) \\
 &= (y^i, \dot{y}^i, \begin{bmatrix} (z_j^i) & 0 \\ (\dot{z}_j^i) & (z_j^i) \end{bmatrix})
 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada Eş. 6.7 kullanılırsa

$$(J'_a \circ Tf_a)(\tilde{X}) = (f^i(x), \sum_{k=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^k} \dot{x}^k, \left[\begin{array}{c} \left(\sum_{k=1}^n w_k^i \frac{\partial f^i}{\partial x^k} \right) \\ \left(\sum_{k,l=1}^n w_k^i \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^k \partial x^l} \dot{x}^l + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^k} \dot{w}_k^i \right) \end{array} \right] \left(\sum_{k=1}^n w_k^i \frac{\partial f^i}{\partial x^k} \right) \right) \quad (6.10)$$

elde edilir.

Herhangi $X \in T(GL(n, IR))$ için

$$\begin{aligned} (\bar{f}_a \circ J_a)(\tilde{X}) &= (\bar{f}_a \circ J_a)(x, \dot{x}, (w_j^i), (\dot{w}_j^i)) \\ &= \bar{f}_a((I_{T(U_a)} \times J_n)(x, \dot{x}, (w_j^i), (\dot{w}_j^i))) \\ &= \bar{f}_a(x, \dot{x}, J_n((w_j^i), (\dot{w}_j^i))) \\ &= \bar{f}_a(x, \dot{x}, \left[\begin{array}{cc} (w_j^i) & 0 \\ (\dot{w}_j^i) & (w_j^i) \end{array} \right]) \end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan eşitlikte kolaylık için $\left[\begin{array}{cc} (w_j^i) & 0 \\ (\dot{w}_j^i) & (w_j^i) \end{array} \right] = [\bar{w}_v^\eta]$ denilirse

$$\begin{aligned} (\bar{f}_a \circ J_a)(\tilde{X}) &= \bar{f}_a(x, \dot{x}, [\bar{w}_v^\eta]) = (f^1, \dots, f^n, \dot{f}^1, \dots, \dot{f}^n, \sum_{k=1}^n \frac{\partial f^\eta}{\partial x^k} \bar{w}_v^k) \\ &= (f^1, \dots, f^n, \dot{f}^1, \dots, \dot{f}^n, \bar{z}_v^\eta) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada Eş. 6.8 kullanıldığında

$$(\bar{f}_a \circ J_a)(\tilde{X}) = (f^1, \dots, f^n, \dot{f}^1, \dots, \dot{f}^n, \bar{z}_v^\eta) =$$

$$(f^i(x), \sum_{k=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^k} \dot{x}^k, \left[\begin{array}{cc} \left(\sum_{t=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^t} \cdot \bar{w}_j^t \right) & \left(\sum_{t=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^t} \cdot \bar{w}_{n+j}^t \right) \\ \left(\sum_{t,l=1}^n \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^l \partial x^t} \cdot \bar{w}_j^t + \sum_{t=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^t} \bar{w}_{n+j}^{n+t} \right) & \left(\sum_{t,l=1}^n \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^l \partial x^t} \cdot \bar{w}_{n+j}^t + \sum_{t=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^t} \cdot \bar{w}_{n+j}^{n+t} \right) \end{array} \right] \right) \quad (6.11)$$

eşitliği elde edilir. Eş.6.10 ve Eş. 6.11 in sağ tarafları eşit olduğundan sol tarafları da eşittir. Bu durumda $J'_\alpha \circ Tf_\alpha = \bar{f}_\alpha \circ J_\alpha$ eşitliği vardır. Böylece Eş.6.6 ın doğru olduğu bulunmuş olur. Eş.6.6 ifadesi doğru olduğundan Eş.6.1 ifadesi de doğrudur. Böylece 6.2.Teorem ispatlanmış olur.

6.3.Teorem

P ve P' sırasıyla M ve M' diferensiyellenebilir manifoldları üzerindeki G -yapıları , $f : M \rightarrow M'$ örten bir diffeomorfizm olsun. Bu durumda f fonksiyonunun P den P' ne bir izomorfizm olması için gerek ve yeter koşul Tf in $\tilde{P}$ dan $\tilde{P}'$ ya bir izomorfizm olmasıdır [3].

İspat

5.4. Tanım kullanılırsa $\tilde{P} = J_M(TP)$ ve $\tilde{P}' = J_{M'}(TP')$ elde edilir.

f bir izomorfizm olsun. Eş.6.1 kullanılırsa

$$\begin{aligned} (F(Tf))(\tilde{P}) &= (F(Tf))(J_M(TP)) \\ &= (F(Tf) \circ J_M)(T(P)) \\ &= (J_{M'} \circ T(Ff))(T(P)) \\ &= J_{M'}(T(Ff)(T(P))) \\ &= J_{M'}(T(Ff(P))) \\ &= J_{M'}(T(P')) \\ &= \tilde{P}' \end{aligned}$$

elde edilir. $(F(Tf))(\tilde{P}) = \tilde{P}'$ olduğundan Tf bir izomorfizmdir.

Tf bir izomorfizm olsun. Bu durumda Eş. 6.1 ifadesi ve $J_{M'}$ dönüşümünün bire bir olması kullanılarak

$$\begin{aligned}
 (F(Tf))(\tilde{P}) &= \tilde{P}' \\
 \Rightarrow (F(Tf))(J_M(T(P))) &= J_{M'}(T(P')) \\
 \Rightarrow (F(Tf) \circ (J_M))(T(P)) &= J_{M'}(T(P')) \\
 \Rightarrow (J_{M'} \circ T(Ff))(T(P)) &= J_{M'}(T(P')) \\
 \Rightarrow J_{M'}(T(Ff)(T(P))) &= J_{M'}(T(P')) \\
 \Rightarrow T(Ff)(T(P)) &= T(P') \\
 \Rightarrow T(Ff(P)) &= T(P') \\
 \Rightarrow (Ff)(P) &= P'
 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda f fonksiyonu P den P' ne bir izomorfizmdir. Böylece 6.3.Teorem ispatlanmış olur.

6.4. Sonuç

P, M diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde bir G -yapı ve $f : M \rightarrow M$ bir örten diffeomorfizm olsun. Bu durumda f nin P de bir otomorfizma olması için gerek ve yeter koşul Tf in $\tilde{P}$ da bir otomorfizm olmasıdır [3].

7. G-YAPILARININ TAŞINMALARININ (PROLONGASYONLARININ) İNTEGRALLENEBİLİRLİĞİ

7.1. Tanım

(P, π, M, G) , M üzerinde bir G -yapısı olsun. Eğer her bir $x \in M$ noktası için

$$“x \in U, \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^I} \right)_x, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)_x \right) \in P”$$

olacak şekilde bir U koordinat komşuluğu ve bu koordinat komşuluğu üzerinde bir $\{x^1, \dots, x^n\}$ koordinat sistemi varsa , P G -yapısı integrallenebilir G -yapısı olarak adlandırılır [3].

7.2. Lemma

M deki bir U koordinat komşuluğu üzerindeki bir lokal koordinat sistemi $\{x^1, \dots, x^n\}$ olsun. Bu durumda

$$f : U \rightarrow GL(m, IR)$$

bir fonksiyon ve herhangi bir $x \in U$ için $f(x)$ nin (i, j) . bileşeni $f_j^i(x)$ olsun. Bu durumda $T(U)$ üzerindeki indirgenmiş lokal koordinat sistemi

$\{x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n\}$ olmak üzere

$$(J_m \circ Tf)(x, \dot{x}) = \begin{bmatrix} (f_j^i(x)) & 0 \\ \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial f_j^i}{\partial x^k} \dot{x}^k \right) & (f_j^i(x)) \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

dır [3].

İspat

$$(Tf)(x, \dot{x}) = (Tf)\left(\sum_{k=1}^n \dot{x}^k \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_x\right) = \sum_{k=1}^n \dot{x}^k \left(\frac{\partial f_j^i}{\partial x^k}\right)_x \left(\frac{\partial}{\partial w_j^i}\right)_{f(x)} \text{ eşitliği vardır.}$$

Eş.6.9 $n = m$ için uygulanırsa herhangi bir

$$\hat{X} = \sum_{i,j=1}^m \dot{w}_j^i \left(\frac{\partial}{\partial w_j^i}\right)_{(w_j^i)} \in T(GL(m, IR))$$

için

$$(J_m \circ Tf)(x, \dot{x}) = J_m\left(\sum_{k=1}^n \dot{x}^k \left(\frac{\partial f_j^i}{\partial x^k}\right)_x \left(\frac{\partial}{\partial w_j^i}\right)_{f(x)}\right) = \begin{bmatrix} (f_j^i(x)) & 0 \\ \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial f_j^i}{\partial x^k} \dot{x}^k\right) & (f_j^i(x)) \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece Eş. 7.1 nin doğruluğu görülür.

7.3. Önerme

$\{x^1, \dots, x^n\}$ M deki U komşuluğu üzerinde bir lokal koordinat sistemi ve

$$\varphi: U \rightarrow F(M), \quad \forall x \in U \quad \text{için} \quad \varphi(x) = \left(\dots, \sum_{i,j=1}^n \varphi_j^i(x) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x, \dots \right) \text{ biçiminde ifade}$$

edilebilen, U üzerinde $F(M)$ için bir çapraz kesiti olsun ve $\tilde{\varphi} = J_M \circ T\varphi$ biçiminde

tanımlansın. Bu durumda $\tilde{\varphi}$, $F(T(M))$ nin $T(U)$ üzerindeki çapraz kesitidir. Ayrıca

$T(U)$ üzerindeki indirgenmiş lokal koordinat sistemi $\{x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n\}$ olmak

üzere herhangi bir $X = \sum_{i=1}^n \dot{x}^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x \in T(U)$ için

$$\tilde{\varphi}\left(\sum_{i=1}^n \dot{x}^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x\right) = \left(\dots, \sum_{i,j=1}^n \varphi_j^i(x) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{(x,\dot{x})} + \sum_{k,i=1}^n \frac{\partial \varphi_j^i}{\partial x^k} \dot{x}^k \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{(x,\dot{x})}, \dots, \sum_{i=1}^n \varphi_j^i(x) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{(x,\dot{x})}, \dots \right) \quad (7.2)$$

biçiminde ifade edilir [3].

İspat:

$$\pi : F(M) \rightarrow M$$

$$\tilde{\pi} : F(T(M)) \rightarrow T(M)$$

projeksiyonlar,

Φ_U ve Ψ_U 4.5.Tanım da tanımlanan , sırasıyla $F(M)$ ve $F(T(M))$ nin U ve $T(U)$ üzerindeki lokal trivializasyonları olsun.

4.6.Önermeden

$$J_M|_{T(F(U))} = \Psi_U \circ (id_{T(U)} \times J_n) \circ (T\Phi_U)^{-1}$$

eşitliği doğrudur. Bu durumda 4.7.Önermedeki

$$T(F(M)) \xrightarrow{J_M} F(T(M))$$

$$T\pi \downarrow \qquad \qquad \downarrow \tilde{\pi}$$

$$T(M) \xrightarrow{id_{T(M)}} T(M)$$

diyagramı değişmelidir. Bu durumda

$$\tilde{\pi} \circ J_M = T\pi$$

dır. Ayrıca φ , $F(M)$ nin çapraz kesiti olduğundan $\pi \circ \varphi = id_M$ dır. Bu eşitlikleri ve zincir kuralını kullanırsak

$$\tilde{\pi} \circ \tilde{\varphi} = \tilde{\pi} \circ (J_M \circ T\varphi)$$

$$= (\tilde{\pi} \circ J_M) \circ T\varphi$$

$$= (T\pi) \circ T\varphi$$

$$= T(\pi \circ \varphi)$$

$$= T(id_M)$$

$$= id_{TM}$$

elde edilir. Bu durumda $\tilde{\pi} : F(T(M)) \rightarrow T(M)$ dönüşümü $F(M)$ in demet projeksiyonu ve $\tilde{\pi} \circ \tilde{\varphi} = id_{TM}$ olduğundan $\tilde{\varphi} = J_M \circ T\varphi$ dönüşümü $F(T(M))$ çatı demetinin $T(U)$ üzerindeki çatı demetidir. $\forall x \in M$ için

$$\varphi : M \rightarrow F(M), \varphi(x) : IR^n \xrightarrow{\text{lineer izomorfizm}} T_x M$$

dır. Şimdi

$f : U \rightarrow GL(n, IR)$, $\forall x \in U$ için $f(x) = (\varphi_j^i(x))$ olarak tanımlansın. Burada IR^n

in standart bazı $\{e_j \mid 1 \leq j \leq n\}$ olmak üzere $\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^n \varphi_i^j \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_x$ olarak tanımlıdır.

$\forall (x, a) \in U \times GL(n, IR)$ için,

$$\Phi_U : U \times GL(n, IR) \rightarrow F(U), \Phi_U(x) = \zeta \text{ ve } \zeta(e_j) = \sum_{i=1}^n a_i^j \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_x$$

ile tanımlansın. $\forall x \in U$ için

$$\begin{aligned} (\Phi_U^{-1} \circ \varphi)(x) &= ((\pi \circ \varphi)(x), (\varphi_j^i(x))) \\ &= (x, (\varphi_j^i(x))) \end{aligned}$$

olduğundan

$$(\Phi_U^{-1} \circ \varphi)(x) = (id_U(x), (\varphi_j^i(x))) = (id_U \times f)(x)$$

dır. Böylece

$$(\Phi_U^{-1} \circ \varphi) = (id_U \times f) \tag{7.3}$$

elde edilir. $T(U)$ üzerinde

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}|_U &= J_M|_{TF(U)} \circ (T\varphi)|_{T(U)} \\
&= (\Psi_U \circ (id_{T(U)} \times J_n) \circ [T\Phi_U]^{-1}) \circ (T\varphi)|_{T(U)} \\
&= (\Psi_U \circ (id_{T(U)} \times J_n) \circ [T\Phi_U]^{-1}) \circ (T(\Phi_U \circ (\Phi_U)^{-1} \circ \varphi)) \\
&= (\Psi_U \circ (id_{T(U)} \times J_n)) \circ ([T\Phi_U]^{-1} \circ T(\Phi_U)) \circ T((\Phi_U)^{-1} \circ \varphi) \\
&= (\Psi_U \circ (id_{T(U)} \times J_n)) \circ T((\Phi_U)^{-1} \circ \varphi) \\
&= (\Psi_U \circ (id_{T(U)} \times J_n)) \circ T(id_U \times f) \\
&= (\Psi_U \circ (id_{T(U)} \times J_n)) \circ (Tid_U \times Tf) \\
&= (\Psi_U \circ (id_{T(U)} \times J_n)) \circ (id_{TU} \times Tf) \\
&= \Psi_U \circ (id_{T(U)} \times (J_n \circ Tf))
\end{aligned}$$

bulunur. $\forall ((x, \dot{x}), (w_v^\eta)) \in T(U) \times GL(2n, IR)$ için,

$$\Psi_U : TU \times GL(2n, IR) \rightarrow F(T(U)), \Psi_U((x, \dot{x}), (w_v^\eta)) = \zeta' ,$$

$$\text{ve } \zeta'(\hat{e}^\eta) = \sum_{v=1}^{2n} w_v^\eta \left(\frac{\partial}{\partial x^v} \right)_{(x, \dot{x})}$$

$$\text{dır. } X = (x, \dot{x}) = \sum_{i=1}^n \dot{x}^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_x \text{ olmak üzere}$$

$$\tilde{\varphi}(X) = (\Psi_U \circ (id_{T(U)} \times (J_n \circ Tf)))(x, \dot{x})$$

$$= \Psi_U((x, \dot{x}), (J_n \circ Tf))(x, \dot{x})$$

$$= \Psi_U((x, \dot{x}), \left[\begin{array}{cc} (\varphi_j^i(x)) & 0 \\ \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi_j^i}{\partial x^k} \dot{x}^k & (\varphi_j^i(x)) \end{array} \right])$$

$$= \zeta' \in F(T(U))$$

$\zeta'(e^v) = \sum_{\eta=1}^{2n} w_v^\eta \left(\frac{\partial}{\partial x^\eta} \right)_{(x, \dot{x})} \quad (1 \leq v \leq 2n, \dot{x}^i = x^{n+i})$ alındığında

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(X) &= \Psi_U((x, \dot{x}), \left[\begin{array}{cc} (\varphi_j^i(x)) & 0 \\ \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi_j^i}{\partial x^k} \dot{x}^k & (\varphi_j^i(x)) \end{array} \right]) \\ &= \left[\begin{array}{cc} (\varphi_j^i(x)) & \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi_j^i}{\partial x^k} \dot{x}^k \\ 0 & (\varphi_j^i(x)) \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{(x, \dot{x})} \\ \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} \right)_{(x, \dot{x})} \end{array} \right] \\ &= (..., \sum_{i,j=1}^n \varphi_j^i(x) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{(x, \dot{x})} + \sum_{k,i=1}^n \frac{\partial \varphi_j^i}{\partial x^k} \dot{x}^k \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{(x, \dot{x})}, ..., \sum_{i=1}^n \varphi_j^i(x) \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} \right)_{(x, \dot{x})}, ...) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece 7.3. Önerme ispatlanır.

7.4. Sonuç

P , diferensiyellenebilir bir M manifoldu üzerinde integrallenebilir bir G -yapısı olsun. Bu durumda P nin taşınması (prolongasyonu) olan $\tilde{P}$ da integrallenebilir bir $\tilde{G}$ -yapısıdır.

İspat

$X_0 \in T_p M$ olsun. P , integrallenebilir bir G -yapısı olduğundan herhangi bir $x \in U$ için

$\left(..., \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_x, ... \right) \in P$ dir. Bu durumda U üzerindeki her bir $x \in U$ için

$\varphi(x) = (..., \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_x, ...)$ olacak şekilde $p \in P$ nin bir U koordinat komşuluğu ve

$\{x^1, ..., x^n\}$ lokal koordinat sistemi seçilsin. Bu durumda $\forall x \in U$ için

$$\varphi(x) \in P \Rightarrow \varphi(U) \subset P \quad (7.4)$$

dır. Bu durumda $T(U)$ üzerindeki indirgenmiş lokal koordinat sistemi $\{x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n\}$ olur. $X = \sum_{i=1}^n \dot{x}^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_x \in T(U)$ olmak üzere 7.3. Önerme den $\tilde{\varphi} = J_M \circ T\varphi$ de $T(U)$ üzerinde bir çapraz kesittir. Ayrıca

$$\forall V \in T\varphi(T(U))$$

$$\Rightarrow \exists W \in T(U), T\varphi(W) = V$$

$$\Rightarrow \exists x \in U, W \in T_x(U), T\varphi(W) = V$$

$$\Rightarrow T\varphi(W) = V \in T_{\varphi(x)}(\varphi(U))$$

$$\Rightarrow V \in T(\varphi(U))$$

Bu durumda

$$T\varphi(TU) \subset T(\varphi(U))$$

$$\tilde{\varphi}(T(U)) = (J_M \circ T\varphi)(T(U)) = J_M(T\varphi(T(U))) \subset J_M(T(\varphi(U)))$$

$$\Rightarrow \tilde{\varphi}(T(U)) \subset J_M(T(\varphi(U))) \subset J_M(TP) = \tilde{P}$$

$$\Rightarrow \tilde{\varphi}(T(U)) \subset \tilde{P}$$

$$\tilde{\varphi}(T(U)) = (J_M \circ T\varphi)(T(U)) = J_M(T\varphi(T(U)))$$

bulunur. Herhangi bir $X \in T(U)$ için

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(X) &= \left(\dots, \sum_{i,j=1}^n \varphi_j^i(x) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{(x,\dot{x})} + \sum_{k,i=1}^n \frac{\partial \varphi_j^i}{\partial x^k} \dot{x}^k \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{(x,\dot{x})}, \dots, \sum_{i=1}^n \varphi_j^i(x) \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} \right)_{(x,\dot{x})}, \dots \right) \\ &= \left(\dots, \sum_{i,j=1}^n \delta_j^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{(x,\dot{x})} + \sum_{k,i=1}^n \frac{\partial \delta_j^i}{\partial x^k} \dot{x}^k \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{(x,\dot{x})}, \dots, \sum_{i=1}^n \delta_j^i(x) \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} \right)_{(x,\dot{x})}, \dots \right) \\ &= \left(\dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{(x,\dot{x})}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} \right)_{(x,\dot{x})}, \dots \right) \end{aligned}$$

$$\tilde{\varphi}(X) = (\dots, (\frac{\partial}{\partial x^i})_{(x, \dot{x})}, \dots, (\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i})_{(x, \dot{x})}, \dots) \in \tilde{P}$$

bulunur. Bu ifadede kullanılan $X_0 \in T(M)$ keyfi bir elemandır. Bu nedenle $\tilde{P}$ integrallenebilirdir.

7.5. Önerme

P , M üzerinde bir G -yapısı olsun. Eğer P nin taşınması (prolongasyonu) olan $\tilde{P}$ integrallenebilir ise P de integrallenebilirdir.

İspat

Herhangi bir $x \in M$ nin bir U komşuluğu ve $\{x^1, \dots, x^n\}$,

$$\varphi: U \rightarrow P$$

lokal çapraz kesit olacak şekilde U üzerinde bir lokal koordinat sistemi olsun

Bu durumda 7.3. Önerme den $\tilde{\varphi} = J_M \circ T\varphi$, $T(U)$ üzerinde $\tilde{P}$ nin lokal çapraz kesitidir.

$X_0 \in T(U)$, x noktasında M diferensiyellenebilir manifoldunun 0 tanjant vektörü olsun.

$\tilde{P}$ integrallenebilir olduğundan X_0 ın bir $\tilde{U} \subset T(U)$ olacak şekilde bir koordinat komşuluğu ve $\tilde{U}$ üzerinde bir $\{y^1, \dots, y^{2n}\}$ lokal koordinat sistemi bulunabilir.

Ayrıca $X \in \tilde{U}$ için

$$\tilde{\varphi}_0(X) = ((\frac{\partial}{\partial y^I})_X, \dots, (\frac{\partial}{\partial y^{2n}})_X)$$

olarak tanımlandığında $\tilde{\varphi}_0$, $\tilde{P}$ nin $\tilde{U}$ üzerinde bir lokal çapraz kesiti olur.

$\tilde{\varphi}|_{\tilde{U}}$ ve $\tilde{\varphi}_0$, $\tilde{U}$ üzerinde iki lokal çapraz kesit olduğundan $X \in \tilde{U}$ için

$$\tilde{\varphi}(X) = \tilde{\varphi}_0(X) \cdot \tilde{g}(X) \quad (7.5)$$

olacak şekilde $\tilde{g}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{G}$ olacak şekilde $\tilde{G}$ in bir transition dönüşümü vardır.

$\tilde{g}(X) \in \tilde{G} = J_n(T(G))$ olduğundan $\tilde{g}(X) = J_n(Y)$ olacak şekilde $Y \in T(G)$ vardır.

$$g: \tilde{U} \rightarrow G$$

$$B: \tilde{U} \rightarrow T_e G$$

dönüşümlerini $Y = [g(X), B(X)]$ olacak şekilde tanımlayalım

$$\tilde{g}(X) = J_n[g(X), B(X)] = \begin{bmatrix} g(X) & 0 \\ B(X).g(X) & g(X) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{g}(X) = \begin{bmatrix} g(X) & 0 \\ B(X).g(X) & g(X) \end{bmatrix}$$

bulunur. $\{x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n\}$ ve $\{y^1, \dots, y^{2n}\}$

$\tilde{U}$ üzerinde iki lokal koordinat sistemi olduğundan

$$\tilde{U} \xrightarrow{\Delta} \mathbb{R}^{2n}$$

$$\psi \downarrow \quad \downarrow id_{\mathbb{R}^{2n}}$$

$$\mathbb{R}^{2n} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^{2n}$$

$$f \circ \psi = \Delta \quad (1 \leq v \leq 2n), \quad f(x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n) = (y^1, \dots, y^{2n})$$

olacak biçimde $f: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ dönüşümü vardır. Herhangi bir $x \in U$ için

$$\varphi(x) = (\sum_{i=1}^n \varphi_i^i(x) (\frac{\partial}{\partial x^i})_x, \dots, \sum_{i=1}^n \varphi_n^i(x) (\frac{\partial}{\partial x^i})_x)$$

olduğu zaman 7.3.Önerme den

$$\tilde{\varphi}(X) = \tilde{\varphi}(\sum_{i=1}^n \dot{x}^i (\frac{\partial}{\partial x^i})_x) = (\dots, \sum_{i,j=1}^n \varphi_j^i(x) (\frac{\partial}{\partial x^i})_{(x,\dot{x})} + \sum_{k,i=1}^n \frac{\partial \varphi_j^i}{\partial x^k} \dot{x}^k (\frac{\partial}{\partial x^i})_{(x,\dot{x})}, \dots, \sum_{i=1}^n \varphi_j^i(x) (\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i})_{(x,\dot{x})}, \dots)$$

dır.Eş.7.5 ifadesini tekrar yazarsak

$$\tilde{\varphi}(X) = \tilde{\varphi}_0(X) . \tilde{g}(X)$$

$$(\dots, \sum_{i,j=1}^n \varphi_j^i(x) (\frac{\partial}{\partial x^i})_{(x,\dot{x})} + \sum_{k,i=1}^n \frac{\partial \varphi_j^i}{\partial x^k} \dot{x}^k (\frac{\partial}{\partial x^i})_{(x,\dot{x})}, \dots, \sum_{i=1}^n \varphi_j^i(x) (\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i})_{(x,\dot{x})}, \dots)$$

$$= ((\frac{\partial}{\partial y^1})_X, \dots, (\frac{\partial}{\partial y^{2n}})_X) . \begin{bmatrix} g(X) & 0 \\ B(X), g(X) & g(X) \end{bmatrix}$$

$$= (\dots, \sum_{i=1}^n g_j^i(x) . (\frac{\partial}{\partial y^i})_X + \sum_{k=1}^n B_k^i(x) g_j^k(x) (\frac{\partial}{\partial y^{n+i}})_X, \dots, \sum_{i=1}^n g_j^i(x) . (\frac{\partial}{\partial y^{n+i}})_X, \dots)$$

dır. Bu durumda

$$\sum_{i,j=1}^n \varphi_j^i(x) (\frac{\partial}{\partial x^i})_{(x,\dot{x})} + \sum_{k,i=1}^n \frac{\partial \varphi_j^i}{\partial x^k} \dot{x}^k (\frac{\partial}{\partial x^i})_{(x,\dot{x})} = \sum_{i=1}^n g_j^i(x) . (\frac{\partial}{\partial y^i})_X + \sum_{k=1}^n B_k^i(x) g_j^k(x) (\frac{\partial}{\partial y^{n+i}})_X \quad (7.6)$$

dır. Ayrıca

$$f(x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n) = (y^1, \dots, y^{2n})$$

olduğundan

$$(\frac{\partial}{\partial x^i})_X = \sum_{v=1}^{2n} (\frac{\partial f^v}{\partial x^i}) (\frac{\partial}{\partial y^v})_X \quad \text{ve} \quad (\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i})_X = \sum_{v=1}^{2n} (\frac{\partial f^v}{\partial \dot{x}^i}) (\frac{\partial}{\partial y^v})_X$$

eşitlikleri vardır. Bu eşitlikler Eş. 7.6 da yerine konulursa

$$\begin{aligned}
& \sum_{i,j=1}^n \phi_j^i(x) \left(\sum_{v=1}^{2n} \left(\frac{\partial f^v}{\partial x^i} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y^v} \right)_X \right) + \sum_{k,i=1}^n \frac{\partial \phi_j^i}{\partial x^k} \dot{x}^k \left(\sum_{v=1}^{2n} \left(\frac{\partial f^v}{\partial x^i} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y^v} \right)_X \right) \\
& = \sum_{i=1}^n g_j^i(x) \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right)_X + \sum_{k=1}^n B_k^i(x) g_j^k(x) \left(\frac{\partial}{\partial y^{n+i}} \right)_X
\end{aligned} \tag{7.7}$$

bulunur. $k \leq n$ için Eş.7.7 deki $\left(\frac{\partial}{\partial y^k} \right)_X$ katsayıları eşitlenirse, $j, s \in \{1, \dots, n\}$ için

$$\sum_{i,s=1}^n \phi_j^i(x) \left(\frac{\partial f^v}{\partial x^i} \right) + \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial \phi_j^i}{\partial x^k} \dot{x}^k \left(\frac{\partial f^s}{\partial x^i} \right) = g_j^s(x) \tag{7.8}$$

bulunur.

$$x \in U' = \pi(\tilde{U}) \text{ ve}$$

$$\bar{f}_s : U' \rightarrow R, \bar{f}_s(x) = f^s(x, 0)$$

$$\bar{g} : U' \rightarrow G, \bar{g}(x), \left(([\bar{g}(x)]^{-1})_j^s \right) = g_j^s(x, 0)$$

olarak tanımlansın. $k \in \{1, \dots, n\}$ için Eş. 7.8 ifadesinde $\dot{x}^i = 0$ denirse

$$j, s \in \{1, \dots, n\}$$

$$\sum_{i=1}^n \phi_j^i(x) \frac{\partial \bar{f}^s}{\partial x^i} = ([\bar{g}(x)]^{-1})_j^s \tag{7.9}$$

elde edilir. Eş. 7.9 da $(\phi_j^i(x)) \in GL(n, IR)$ ve $(([\bar{g}(x)]^{-1})_j^s) \in G \subset GL(n, IR)$ olduğundan $(\phi_j^i(x))$ ve $(([\bar{g}(x)]^{-1})_j^s)$ matrisleri regüler matrislerdir.

$$(\phi_j^i(x)) \left(\frac{\partial \bar{f}^s}{\partial x^i} \right) = ([\bar{g}(x)]^{-1})_j^s$$

olduğundan $\left(\frac{\partial \bar{f}^s}{\partial x^i} \right)$ matrisi de regüler matristir. Bu durumda $\det\left(\frac{\partial \bar{f}^s}{\partial x^i}\right) \neq 0$ dır.

Her bir $x \in U'$ için, $\bar{x}^i(x) = \bar{f}^i(x)$ olarak tanımlansın. $\det\left(\frac{\partial \bar{f}^s}{\partial x^i}\right) \neq 0$ olduğundan invers fonksiyon teoreminden dolayı $\bar{f}|_{U_0}: U_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ bir diffeomorfizm olacak biçimde x in bir U_0 komşuluğu vardır. $\varsigma = (x^1, \dots, x^n)$ olmak üzere $\varsigma|_{U_0} \circ (\bar{f}|_{U_0})^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ bir diffeomorfizmdir. Bu durumda $\bar{f} = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$, U_0 üzerinde bir lokal koordinat sistemidir. Herhangi $x \in U_0$ için

$$\varphi_I(x) = \left(\left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^1} \right)_x, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^n} \right)_x \right) \quad (7.10)$$

dır. Burada

$$\varphi_I(x) = \varphi(x) \cdot \bar{g}(x) \quad (7.11)$$

olduğu gösterildiği takdirde φ_I de P in bir çapraz kesiti olacağından P in integrallenebilir olduğu gösterilmiş olur.

$\{x^1, \dots, x^n\}$ ve $\{\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n\}$, U_0 üzerinde iki koordinat sistemi olduğundan

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_x = \sum_{s=1}^n \frac{\partial \bar{f}^s}{\partial x^i} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^s} \right)_x$$

dır. Bu durumda

$$\begin{aligned} \varphi(x) \cdot \bar{g}(x) &= (\dots, \sum \varphi_j^i(x) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_x \bar{g}_t^j, \dots) \\ &= (\dots, \sum \varphi_j^i(x) \frac{\partial \bar{f}^s}{\partial x^i} \bar{g}_t^j(x) \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^s} \right)_x, \dots) \\ &= (\dots, \sum ([\bar{g}(x)]^{-1})_j^s \bar{g}_t^j(x) \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^s} \right)_x, \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\dots, \sum \delta_t^s (\frac{\partial}{\partial \bar{x}^s})_x, \dots) \\
&= (\dots, (\frac{\partial}{\partial \bar{x}^t})_x, \dots) \\
&= ((\frac{\partial}{\partial \bar{x}^l})_x, \dots, (\frac{\partial}{\partial \bar{x}^n})_x) = \varphi_l(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Eş.7.11 doğrudur. P integrallenebilirdir.

7.6. Teorem

P, M diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde bir G -yapısı olsun. Bu durumda P nin integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul $\tilde{P}$ nin integrallenebilir olmasıdır.

8. BAZI KLASİK G-YAPILARININ TAŞINMALARI (PROLONGASYONLARI)

$$G=GL(n,C)$$

$J : IR^{2n} \rightarrow IR^{2n}$ dönüşümü $J^2 = J \circ J = -I$ olacak şekilde bir lineer otomorfizm ve

$GL(n,C) = \{a \in GL(2n, IR) \mid a \circ J = J \circ a\}$ olsun. $GL(n,C)=GL(n,C;J)$ ile gösterilsin.

8.1. Lemma

J fonksiyonunun tanjant dönüşümü TJ , $(TJ)^2 = -I$ olacak şekilde bir lineer otomorfizmdir.

İspat

3.3.Önerme kullanıldığı takdirde TJ nin bir lineer dönüşüm olduğu görülür. Bu durumda TJ bir endomorfizmadır.

$$(TJ)^2 = TJ \circ TJ = T(J \circ J) = T(-I) = -T(I) = -id_{IR^{2n}}$$

bulunur. Bu durumda

$$(TJ)^2 = -I$$

dır. Herhangi $X, Y \in T(IR^{2n})$ için

$$TJ(X) = TJ(Y)$$

$$\Rightarrow TJ(TJ(X)) = TJ(TJ(Y))$$

$$\Rightarrow -X = -Y$$

$$\Rightarrow X = Y$$

bulunur. Bu durumda TJ bir lineer otomorfizmdir. Böylece 8.1. Lemma ispatlanmış olur.

8.2. Önerme

$G=GL(n,C;J)$ olsun. Bu durumda $\tilde{G} \subset GL(2n,C;TJ)$ dır.

İspat

$\tilde{G} = J_{2n}(TG)$ olmak üzere $\tilde{a} \in \tilde{G}$ olsun. Bu durumda $\tilde{a} = J_{2n}(A)$, $A \in TG$

yazılır.

$$A \in TG \Rightarrow A = [a, B]$$

$$\Rightarrow \tilde{a} = J_{2n}([a, B])$$

$$\Rightarrow \tilde{a} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ B.a & a \end{bmatrix}$$

bulunur. 3.12.Önerme den

$$TJ = J_{2n}([J, 0]) = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}$$

bulunur. $B \in T_e G$ olduğundan $B = [b_j^i] \in GL(n, C; J)$ dır. Bu durumda $[B].[J]=[J].[B]$ bulunur. Bulunan sonuç kullanıldığında

$$\tilde{a} \circ TJ = \begin{bmatrix} a & 0 \\ B.a & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aJ & 0 \\ BaJ & aJ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ja & 0 \\ J(B.a) & Ja \end{bmatrix} = TJ \circ \tilde{a}$$

elde edilir. $A=[B,a]$ gösteriminde $a \in GL(n, C; J)$ iken $\tilde{a} \in GL(2n, IR)$ ve $\tilde{a} \circ TJ = TJ \circ \tilde{a}$ olduğundan $\tilde{a} = J_{2n}(A) \in GL(2n, C; TJ)$ bulunur. Böylece 8.2. Önerme ispatlanmış olur.

8.3. Teorem

M diferensiyellenebilir manifoldu üzerindeki $GL(n, C; J)$ yapısının integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul bu yapıya karşılık gelen almost kompleks yapının bir kompleks yapı olmasıdır.

8.4. Teorem

(&) Bir M diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde bir almost kompleks yapı varsa , bu durumda $T(M)$ üzerinde kanonik almost kompleks yapı vardır.

(&&) M diferensiyellenebilir manifoldu bir kompleks diferensiyellenebilir manifold ise bu durumda $T(M)$ üzerinde bir kanonik kompleks yapı vardır.

İspat

M diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde bir almost kompleks yapı olması için gerek ve yeter koşul M diferensiyellenebilir manifoldunun $GL(n, C; J)$ yapılı olmasıdır. 5.3. Teorem den bir M diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde bir G -yapı varsa bu durumda $T(M)$ diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde kanonik $\tilde{G}$ -yapısı vardır. $G=GL(n, C; J)$ için 5.3. Teoremin ifadesini kullanırsak $T(M)$ diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde bir kanonik $\tilde{P}$, $\tilde{G}$ -yapısı vardır. 8.2.Önerme den $\tilde{G} \subset GL(2n, C; J)$ bir Lie alt grubudur. Bu durumda $i : \tilde{G} \rightarrow GL(2n, C; J)$ inclusion (içerme) dönüşümü bir Lie grup homomorfizmidir.

$$T(U_\alpha) \cap T(U_\beta) \xrightarrow{\tilde{g}_{\alpha\beta}} \tilde{G} \xrightarrow{i} GL(2n, C; J)$$

için , $io\tilde{g}_{\alpha\beta} = \tilde{g}'_{\alpha\beta}$ ile gösterilsin. Bu durumda tanımlanan bu dönüşüm diferensiyellenebilirdir. Herhangi bir $V \in T(U_\alpha) \cap T(U_\beta) \cap T(U_\gamma)$ için

$$\begin{aligned}
\tilde{g}'_{\alpha\beta}(V).\tilde{g}'_{\beta\gamma}(V) &= (io\tilde{g}_{\alpha\beta})(V).(i\circ\tilde{g}_{\beta\gamma})(V). \\
&= i(\tilde{g}_{\alpha\beta}(V).\tilde{g}_{\beta\gamma}(V)) \\
&= i(\tilde{g}_{\alpha\gamma}(V)) \\
&= \tilde{g}'_{\alpha\beta}(V)
\end{aligned}$$

bulunur. $\{(T(U_\alpha), \tilde{g}'_{\alpha\beta})\} = \tilde{P}'$ ile gösterilirse $\tilde{P}'$, baz uzayı $T(M)$ olan bir asli lif demetidir. Ayrıca $\tilde{P}'$, $GL(2n, C; J)$ -yapılıdır. Bu durumda $T(M)$ üzerinde bir kanonik almost kompleks yapı vardır.

(&&) 8.3. Teoremden dolayı bir $GL(n, C; J)$ -yapısının integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul, $GL(n, C; J)$ yapısına karşılık gelen almost kompleks yapının bir kompleks yapı olmasıdır. 2.3.7.Tanımdan dolayı bir M diferensiyellenebilir manifoldu üzerindeki almost kompleks yapı, bir kompleks yapı ise M diferensiyellenebilir manifoldu bir kompleks diferensiyellenebilir manifolddur. Bu durumda bir M diferensiyellenebilir manifoldunun kompleks diferensiyellenebilir manifold olması için gerek ve yeter koşul, M diferensiyellenebilir manifoldunun kanonik integrallenebilir $GL(n, C; J)$ yapılı olmasıdır.

Bu durumda M bir kompleks diferensiyellenebilir manifold ise M üzerinde kanonik integrallenebilir P $GL(n, C; J)$ yapısı vardır. (&) den M diferensiyellenebilir manifoldu $GL(n, C; J)$ -yapılı ise bu durumda $T(M)$ üzerinde kanonik $\tilde{P}'$ $GL(2n, C; TJ)$ -yapısı vardır. M kompleks diferensiyellenebilir manifold olduğundan M üzerinde bir P integrallenebilir $GL(n, C; J)$ -yapısı vardır. 7.4.Önerme den P nin taşınması (prolongasyonu) olan $\tilde{P}$ da integrallenebilirdir. $\tilde{P}$, $\tilde{P}'$ in bir alt asli lif demeti olduğundan $\tilde{P}'$ da integrallenebilirdir. Bu durumda $T(M)$ üzerinde integrallenebilir $GL(2n, C; TJ)$ -yapısı vardır. Bu durumda $T(M)$ üzerinde kanonik bir kompleks yapı vardır.

$$G=SL(n,IR)$$

$SL(n,IR) = \{a \in GL(n,IR) \mid \det(a) = 1\}$ ile tanımlıdır.

8.5.Lemma

$G=SL(n,IR)$ olsun. Bu durumda $\tilde{G} \subset SL(2n,IR)$ dır.

İspat: Herhangi bir $\tilde{a} \in \tilde{G}$ için $\tilde{a} = J_n(X)$ olacak biçimde bir $X \in T(G)$ vardır.

3.8.Tanımdaki biçimde $X = [a, B]$ olacak şekilde $a \in G$, $B \in T_e G$ vardır. Bu durumda

$$\tilde{a} = J_n([a, B]) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ B.a & a \end{bmatrix}$$

bulunur. $\det(\tilde{a}) = (\det(a))^2 = 1$ bulunur. Bu durumda $\tilde{a} \in SL(2n,IR)$ dır. Böylece

$\tilde{G} \subset SL(2n,IR)$ bulunur.

8.6. Önerme

Bir M diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde $SL(n,IR)$ -yapı varsa bu durumda $T(M)$ üzerinde de kanonik $SL(2n,IR)$ -yapı vardır.

İspat

$G=SL(n,IR)$ için M diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde bir G -yapı P olsun. Bu durumda 5.3.Önerme den $T(M)$ üzerinde kanonik bir $\tilde{P}$, $\tilde{G}$ -yapısı vardır.

8.4.Lemmadan

$\tilde{G}$, $SL(2n,IR)$ nin Lie alt grubudur. Bu durumda i dönüşümü $\tilde{G}$ Lie grubundan $SL(2n,IR)$ ye inclusion (içerme) dönüşümü olmak üzere $\tilde{P}' = \{(T(U_\alpha), i \circ \tilde{g}_{\alpha\beta})\}$ ile

tanımlanırsa $\tilde{P}$, $\tilde{P}'$ nin bir alt asli lif demetidir. $\tilde{P}'$, $T(M)$ üzerinde bir $SL(2n, \mathbb{R})$ -yapılıdır. Böylece 8.6. Önerme ispatlanmış olur.

KAYNAKLAR

1. Brickell F., Clark R.S., “Differentiable Diferensiyellenebilir manifolds An Introduction, 1”, *Van Nostrand Reinhold Company*, London, 210-275 (1970).
2. Conlon L., “Differentiable Diferensiyellenebilir manifolds A First Course,1”, *Birkhauser*, Boston, 127-150 (1993).
3. Morimoto A., “Prolongations of G-Structures To Tangent Bundles”, *Nagoya Math. J.*, 12: 67-108 (1968).
4. Greub W., Halperin S., Vanstone R., “Connections, Curvature and Cohomology,2”, *Academic Press*, New York and London, 24-121 (1973).
5. Kobayashi S., Nomizu K., “Foundations of Differential Geometry,2 ”, *Interscience Publishers*, New York-London, 114-143 (1969).
6. Kobayashi S., “Theory of Connections”, *Ann. Mat. Pura Appl.*, 43: 119-194 (1957).
7. Okubo T., “Differential Geometry,1”,*Marcel Dekker*, New York and Basel, 69-80, 370-371 (1987).
8. Saunders D.J., “The Geometry Of Jet Bundles,1”, *Cambridge University Press*, Cambridge-New York, 1-20 (1989)
9. Steenrod N., “The Topology Of Fibre Bundles,1”, New Jersey, 3-67 (1951).
10. Sternberg S., “Lectures On Differential Geometry,1”, *Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs*, New Jersey, 228-231, 294-339 (1964)

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : KAYA, Hülya
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 27.08.1980 Elazığ
Medeni hali : Bekar
Telefon : 0 (312) 212 60 30 (3135)
e-mail : hulyakaya@gazi.edu.tr

Eğitim Derece

Eğitim Birimi

Mezuniyet tarihi

Lisans	Gazi Üniversitesi	2003
Lise	İncirli Lisesi	1998

İş Deneyimi Yıl

Yer

Görev

2006	Gazi Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
------	-------------------	---------------------

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Müzik Aletleri, Bilgisayar Oyunları