



GİRESUN
ÜNİVERSİTESİ



FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**GA-s-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HADAMARD KESİRLİ
İNTEGRALLERİ YARDIMIYLA GENELLEŞTİRİLMİŞ BAZI YENİ
İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ**

**MATEMATİK
ANA BİLİM DALI**

Yüksek Lisans Tezi

Mustafa AYDIN

20152110007

Haziran 2019

GİRESUN

**T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GA-s-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HADAMARD KESİRLİ
İNTEGRALLERİ YARDIMIYLA GENELLEŞTİRİLMİŞ BAZI YENİ
İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mustafa AYDIN

Enstitü Anabilim Dalı : Matematik
Tez Danışmanı : Doç. Dr. İmdat İŞCAN

Haziran 2019

T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**GA-s-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HADAMARD KESİRLİ İNTEGRALLERİ
YARDIMIYLA GENELLEŞTİRİLMİŞ BAZI YENİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mustafa AYDIN

Enstitü Anabilim Dalı : Matematik

Bu tez 26/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Selahattin MADEN **Prof. Dr. Mahir KADAKAL** **Doç. Dr. İmdat İSCAN**
  
Jüri Başkanı **Üye** **Üye**

Doç. Dr. Bahadır KOZ
.....
Enstitü Müdürü

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversitede veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.


Mustafa AYDIN
26/06/2019

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın tüm aşamalarında her türlü bilimsel desteği sağlayan, bilgi birikimleri ve değerli görüşleriyle bana yol gösteren Giresun Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölüm Başkanı saygıdeğer danışman hocam Doç. Dr. İmdat İŞCAN'a teşekkür ederim.

Yüksek Lisans eğitimim süresince yakın ilgi ve desteklerini gördüğüm Giresun Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca tez çalışmam sırasında maddi ve manevi desteğini esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	I
İÇİNDEKİLER.....	II
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	III
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	IV
ÖZET	V
SUMMARY.....	VI
BÖLÜM 1. GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI.....	3
2.1. Konveks ve GA-Konveks Fonksiyonlar	3
2.2. GA-s-Konveks Fonksiyonlar	8
BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	11
3.1. GA-s-konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler	11
3.2. Bazı Önemli Eşitsizlikler ve Yardımcı Teoremler	13
BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI	18
BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ	28
KAYNAKLAR.....	29
ÖZGEÇMİŞ	32

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
I	: $\mathbb{R}$ ' de bir aralık
I^o	: I nın içi
$\forall$	: Her
$L[a, b]$	: $[a, b]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
f'	: f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
Γ	: Gamma Fonksiyonu
β	: β Fonksiyonu
${}_R J_{a+}^{\alpha}$	: Sol Taraflı Riemann-Liouville Kesirli İntegrali
$J_{a+}^{\alpha} f(x)$	: Sol Taraflı Hadamard Kesirli İntegrali
${}_R J_{b-}^{\alpha}$	: Sağ Taraflı Riemann-Liouville Kesirli İntegrali
$J_{b-}^{\alpha} f(x)$	: Sağ Taraflı Hermite-Hadamard Kesirli İntegrali

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1.1 Konveks fonksiyon.....	3
------------------------------------	---

GA-s-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HADAMARD KESİRLİ İNTEGRALLERİ YARDIMIYLA GENELLEŞTİRİLMİŞ BAZI YENİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

ÖZET

Bu tez çalışmasının amacı, GA-s-konveks fonksiyonlar için Hadamard kesirli integralleri yardımıyla Hermite-Hadamard, Ostrowski ve Simpson tipli eşitsizlikleri içine alan genel integral eşitsizlikleri elde etmektir. İlk olarak çalışmamız için gerekli olan tanımlar ve teoremler verildi. Daha sonra çalışmamızın bulgular kısmındaki sonuçları elde etmemize yarayan birçok parametreye bağlı önemli bir özdeşlik ispatı ile verildi. Bu özdeşlik ve bazı önemli integral eşitsizlikleri yardımıyla GA-s-konveks fonksiyonlar için Hadamard kesirli integralleri yardımıyla bazı yeni genel integral eşitsizlikleri elde edildi.

Anahtar Kelimeler: Integral Eşitsizlikleri, GA-s-Konveks Fonksiyonlar, Hadamard Kesirli İntegralleri

SOME NEW INTEGRAL INEQUALITIES FOR GA-*s*-CONVEX FUNCTIONS VIA HADAMARD FRACTIONAL INTEGRALS

SUMMARY

The purpose of this thesis is to obtain general integral inequalities involving Hermite-Hadamard, Ostrowski and Simpson type inequalities via Hadamard fractional integrals for GA-*s*-convex functions. Firstly, the definitions and theorems necessary for our work are given. Later, an important identity was given to each of the many parameters that helped us to obtain the results in the findings of our study. With this identity and some significant integral inequalities, some new general integral inequalities were obtained via Hadamard's fractional integrals for GA-*s*-convex functions.

Key Words: Integral Inequalities, GA-*s*-Convex Functions, Hadamard Fractional Integrals

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Konvekslik, M.Ö. 250 yılında Archimedes'in ünlü π değerini hesaplamasına kadar uzanan kolay ve bilinen bir kavramdır. Buna rağmen matematikte yer alması 19. yüzyıl sonu 20. yüzyıl başını bulmaktadır. “Konvekslik” kavramı ilk olarak, Hermite tarafından Ekim 1881’de elde edilen bir sonucun, 1883 yılında Mathesis adlı bir dergide yayınlanmasıyla ortaya atılmıştır. Hadamard’ın 1893 yılındaki bir çalışmasında konveksliğe rastlansa da konveks fonksiyonların sistematik olarak çalışılması 1905-1906 yıllarında Jensen ile başlar.

Konvekslik kavramı eşitsizlikle ifade edildiğinden Konveks Fonksiyonlar Teorisinde eşitsizliklerin önemli bir yeri vardır. Mitrinović, Hardy, Pachpatte, Littlewood, Beckenbach, Pólya, Pečarić, Bellman ve Fink gibi matematikçiler Konveks Fonksiyonlar ile Eşitsizlikler Teorisi’ni bir arada inceleyerek çeşitli kitaplar yazmışlardır. Bu tür eşitsizlikleri konu alan ilk temel çalışma 1934’te Hardy, Pólya ve Littlewood tarafından yazılan “Inequalities” adlı kitaptır [1]. İkinci çalışma ise R. Bellman ve E.F. Beckenbach tarafından 1961’de yazılan 1934-1960 yılları arasında elde edilen yeni eşitsizliklerin sonuçlarını içeren yine “Inequalities” adı verilen kitaptır [2]. Bunu da Mitrinović’ in 1970 yılında yayınladığı ve ilk iki kitapta bulunmayan farklı konulara yer verdiği “Analytic Inequalities” adlı kitabı izler [3]. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler içeren ilk kaynak ise “Convex Functions: Inequalities” başlığıyla Pečarić tarafından 1987 yılında yazılmıştır. Bu temel kaynakların yanı sıra “Mathematical Inequalities” [4], “Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives” [5], “Convex Functions and Their Applications” [6] ve “Classical and New Inequalities in Analysis” [7] literatürde var olan diğer kaynaklardır. Son zamanlarda GA konveks ve GA-s-konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler ile ilgili birçok yazarlar tarafından çalışmalar yapılmıştır [8, 9, 10, 11, 12, 13,14, 15, 16, 17, 18, 19, 20]

Eşitsizlik teorisinin gelişmesine son yıllarda hız kazandıran kavramlardan biri de kesirli türev ve kesirli integral kavramıdır. Kesirli türev ve integral kavramı ilk olarak Liouville tarafından tanıtıldı ve literatürde Riemann-Liouville kesirli türev ve kesirli integrali olarak bilinmektedir.

Kesirli türev ve kesirli integral kavramı türev ve integrallerin sadece tamsayılar için var mıdır sorusundan yola çıkılarak ortaya çıktı. Euler kesirli türev ile ilgili çalışmalar yaptı. 17. yüzyıldan itibaren Euler, Leibniz, Lagrange, Liouville ve Abel, diğer birçok matematikçinin, kesirli merteye için diferansiyel ve integrasyonun geliştirilmesine dayanan çalışmalarıyla gelişmeye başlamıştır.

Bu çalışmamız; literatürde konveks fonksiyonlar için elde edilen Hermite-Hadamard, Ostrowski, Simpson tipli eşitsizliklerin GA-konveks fonksiyonlar için bir benzeri olan eşitsizliklerin genelleşmesini, GA-s-konveks fonksiyonlar için Hadamard kesirli integralleri yardımıyla elde etmektir.

BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

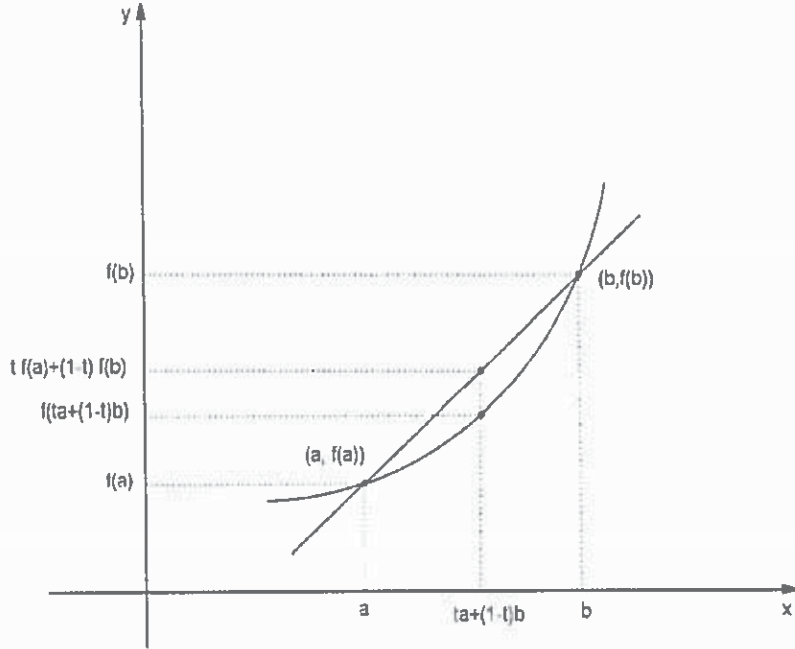
2.1. Konveks ve GA-Konveks Fonksiyonlar

Tanım 2.1.1 [21]: $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyon olsun. Eğer $\forall x, y \in I$ ve $\forall t \in [0,1]$ için,

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna I üzerinde bir konveks fonksiyon denir.

Konveks fonksiyonun geometrik anlamı aşağıdaki gibidir:



Şekil 2.1.1. Konveks fonksiyon

Geometrik olarak, $ta + (1 - t)b$ noktasında; f nin eğri üzerinde aldığı değer $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarını birleştiren doğru parçasının üzerinde aldığı

değerden her zaman daha küçüktür, yani bu iki noktayı birleştiren doğru parçası her zaman eğrinin $[a, b]$ aralığında kalan kısmının üstündedir.

Şekilden de görüldüğü gibi $t \in [0,1]$ olduğundan $tf(a) \leq f(a)$ dir. Benzer şekilde $(1-t)f(b) \leq f(b)$ dir. Dolayısıyla $tf(a) + (1-t)f(b)$ değeri $f(a)$ ile $f(b)$ arasındadır. Konkav fonksiyon için doğru parçası f nin grafiğinin $[a, b]$ aralığında kalan kısmının altındadır.

Konveks fonksiyonun bazı özellikleri:

- i. Kapalı bir aralıkta tanımlı konveks fonksiyon sınırlıdır.
- ii. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ise, I^o de kalan herhangi bir $[a, b]$ kapalı aralığında Lipschitz şartını sağlar. Bu nedenle, f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli ve I^o süreklidir.
- iii. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ise I^o de f'_- ve f'_+ türevleri mevcut olup, bu türevler artandır.
- iv. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I açık aralığında konveks ise bu aralıkta sayılabilir bir E kümesi hariç f' mevcut ve süreklidir.
- v. $f_j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, j = 1, 2, 3 \dots k$, k tane konveks fonksiyonlar olsun. Bu taktirde;

$$f(x) = \sum_{j=1}^k a_j f_j(x), \quad a_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3 \dots k)$$

fonksiyonu da konvekstir.

- vi. $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ azalmayan konveks fonksiyon ve $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon olsun. Bu taktirde; $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = (goh)(x)$ bileşke fonksiyonu da konvekstir.

Tanım 2.1.2 [22]: (Hermite-Hadamard Eşitsizliği) $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu konveks ise $a < b$ koşulunu sağlayan $\forall a, b \in I$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğe Hermite-Hadamard eşitsizliği denir.

Tanım 2.1.3 [8,9,16]: $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ = (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer $\forall x, y \in I$ ve $\forall t \in [0,1]$ için

$$f(x^t y^{1-t}) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna GA (geometrik-aritmetik) konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.1.4 [23]: $f \in L[a, b]$, $\alpha > 0$ ve $b > a \geq 0$ için $J_{a+}^\alpha f(x)$ ve $J_{b-}^\alpha f(x)$ sırasıyla sol taraf ve sağ taraf Hadamard kesirli integralleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$J_{a+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\ln \frac{x}{t} \right)^{\alpha-1} f(t) \frac{dt}{t}, \quad x > a$$

ve

$$J_{b-}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \left(\ln \frac{t}{x} \right)^{\alpha-1} f(t) \frac{dt}{t}, \quad x < b$$

dir. Burada $\Gamma(\alpha)$ Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$$

şeklindedir.

Tanım 2.1.5 [23]: $f \in L[a, b]$, $\alpha > 0$ ve $b > a \geq 0$ için ${}_R J_{a+}^\alpha f(x)$ ve ${}_R J_{b-}^\alpha f(x)$ sırasıyla sol taraf ve sağ taraf Riemann-Liouville kesirli integralleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$${}_R J_{a+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x > a$$

ve

$${}_R J_{b-}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x < b.$$

M. Z. Sarıkaya ve arkadaşları, Riemann-Liouville kesirli integrallerini içeren Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikleri aşağıdaki gibi ispatlamıştır [24].

Teorem 2.1.1: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir pozitif fonksiyon $f \in L[a, b]$ ve $a < b$ olsun. Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks fonksiyon ise $\alpha > 0$ olmak üzere kesirli integraller için eşitsizlik aşağıdaki gibidir:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [{}_R J_{a+}^\alpha f(b) + {}_R J_{b-}^\alpha f(a)] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

GA-konveks fonksiyonları için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin ağırlıklı genelleştirilmesi aşağıdaki gibidir [15]:

Teorem 2.1.2: $f: I \subseteq (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bir GA-konveks fonksiyon ve $a, b \in I$ elemanları $a < b$ olacak şekilde olsun. $g: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ sürekli ve $\sqrt{ab}$ ye göre geometrik olarak simetrik bir fonksiyon ise;

$$f(\sqrt{ab}) \int_a^b \frac{g(x)}{x} dx \leq \int_a^b \frac{f(x)g(x)}{x} dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b \frac{g(x)}{x} dx$$

dir.

Uyarı 2.1.1. Yukarıdaki teoremden $g(x) = 1$ alınırsa, GA-konveks fonksiyonlar aşağıdaki Hermite-Hadamard eşitsizliğini elde ederiz.

$$f(\sqrt{ab}) \leq \frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

GA-konveks fonksiyonlar için kesirli integraller yardımıyla elde edilen Hermite-Hadamard eşitsizlikleri aşağıdaki gibi verilebilir [17].

Teorem 2.1.3: Kabul edelim ki $f: I \subseteq (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyon $a, b \in I$ ve $a < b$ olduğunda $f \in [a, b]$ olsun. Eğer f , $[a, b]$ de GA-konveks fonksiyon ise $\alpha > 0$ iken kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik şu şekildedir.

$$f(\sqrt{ab}) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2 \left(\ln \frac{b}{a}\right)^\alpha} [J_{a+}^\alpha f(b) + J_{b-}^\alpha f(a)] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \quad (2.1.1)$$

İspat : f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında Geometrik Aritmetik konveks fonksiyon olsun.

O halde $\forall x, y \in [a, b]$ için

$$f(x^t y^{1-t}) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

eşitsizliğinde $t = \frac{1}{2}$ yazarsak

$$f(\sqrt{xy}) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

elde edilir. Daha sonra $x = a^t b^{1-t}$, $y = b^t a^{1-t}$ seçersek

$$f(\sqrt{ab}) \leq \frac{f(a^t b^{1-t}) + f(b^t a^{1-t})}{2}$$

eşitsizliğini elde ederiz. (2.1.1) eşitsizliğinin her iki tarafı $t^{\alpha-1}$ ile çarpılıp, eşitsizliğin t ye göre $[0,1]$ üzerinde integrali alınır;

$$\begin{aligned} f(\sqrt{ab}) &\leq \frac{\alpha}{2} \left\{ \int_0^1 f(a^t b^{1-t}) dt + \int_0^1 f(b^t a^{1-t}) dt \right\} \\ &= \frac{\alpha}{2} \left\{ \int_a^b \left(\frac{\ln b - \ln u}{\ln b - \ln a} \right)^{\alpha-1} f(u) \frac{du}{u \ln \frac{b}{a}} + \int_a^b \left(\frac{\ln u - \ln a}{\ln b - \ln a} \right)^{\alpha-1} f(u) \frac{du}{u \ln \frac{b}{a}} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan (2.1.1) eşitsizliğinin sol tarafı kolayca elde edilir.

(2.1.1) eşitsizliğinin ikinci kısmının ispatı için, ilk olarak f fonksiyonu GA-konveks fonksiyon olduğundan, $\forall t \in [0,1]$ için

$$f(a^t b^{1-t}) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

ve

$$f(b^t a^{1-t}) \leq tf(b) + (1-t)f(a)$$

dır. Eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa;

$$f(a^t b^{1-t}) + f(b^t a^{1-t}) \leq f(a) + f(b)$$

elde edilir. Son eşitsizlikte her iki taraf $t^{\alpha-1}$ ile çarpılarak t ye göre $[0,1]$ üzerinden integrali alınır,

$$\int_0^1 f(a^t b^{1-t}) t^{\alpha-1} dt + \int_0^1 f(b^t a^{1-t}) t^{\alpha-1} dt \leq [f(a) + f(b)] \int_0^1 t^{\alpha-1} dt$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Geometrik Aritmetik konveks fonksiyonlar için kesirli integral şeklindeki yeni Hermite-Hadamard eşitsizliğini ve GA konveks fonksiyonlar için kesirli integral şeklindeki yeni Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliği aşağıdaki gibi elde edilmiştir [10].

Teorem 2.1.4: $f: [a, b] \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ bir GA konveks fonksiyon $f \in L[a, b]$ ve $a < b$ olsun. O halde $\alpha > 0$ iken kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$f(\sqrt{ab}) \leq \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2^{1-\alpha} \left(\ln \frac{b}{a}\right)^\alpha} [J_{\sqrt{ab}-}^\alpha f(a) + J_{\sqrt{ab}+}^\alpha f(b)] \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

Teorem 2.1.5: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu bir GA-konveks fonksiyon $f \in L[a, b]$ ve $a < b$ olsun. Eğer $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, negatif olmayan, integrallenebilir ve $\sqrt{ab}$ ye göre geometrik simetrik ise kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned} f(\sqrt{ab}) &\leq [{}_H J_{\sqrt{ab}-}^\alpha g(a) + {}_H J_{\sqrt{ab}+}^\alpha g(b)] \leq {}_H J_{\sqrt{ab}-}^\alpha (fg)(a) + {}_H J_{\sqrt{ab}+}^\alpha (fg)(b) \\ &\leq \frac{f(a) + f(b)}{2} [{}_H J_{\sqrt{ab}-}^\alpha g(a) + {}_H J_{\sqrt{ab}+}^\alpha g(b)] \end{aligned}$$

Lemma 2.1.2 [11]: $I \subseteq (0, \infty)$ bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu I da iki kez türevlenebilir ise; f, I da GA konveks (konkav) fonksiyondur ancak ve ancak $\forall x \in I$ için

$$f'(x) + xf''(x) \geq (\leq) 0$$

dır.

İspat: Lemmanın ispatı, konveks (konkav) fonksiyonların temel özelliklerinden ve “ f fonksiyonu GA-konveks (konkav) fonksiyondur ancak ve ancak $g(x) = f(e^x)$ $J = \{\log x: x \in I\}$ üzerinde konveks (konkav) dır” önermesinden kolaylıkla çıkar.

2.2. GA-s-Konveks Fonksiyonlar

[25] de, Breckner konveks fonksiyonların bir genelleşmesi olan s -konveks fonksiyon kavramını aşağıdaki gibi tanımladı.

Tanım 2.2.1. $s \in (0, 1]$ sabit bir reel sayı olsun. Bir $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu

her $x, y \in [0, \infty)$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$f(tx + (1 - t)y) \leq t^s f(x) + (1 - t)^s f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f ye s -konveks (ikinci anlamda) fonksiyon veya K_s^2 sınıfına ait bir fonksiyon denir. Şüphesiz ki, $s = 1$ için s -konvekslik konveksliğe indirgenir.

Yukarıdaki tanımın ışığı altında GA- s -konveksliğin tanımı aşağıdaki gibi verilmiştir [13, 18].

Tanım 2.2.2. $s \in (0, 1]$ için bir $f: I \subseteq (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in I$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$f(x^t y^{1-t}) \leq t^s f(x) + (1 - t)^s f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, f fonksiyonuna GA- s -konveks (geometrik-aritmetik s -convex) fonksiyon denir. $s = 1$ için GA- s -konveksliğin GA-konveksliğe indirgendiği kolayca görülür

GA- s -konveks fonksiyonlar için bazı özellikleri aşağıdaki gibi verebiliriz [14]:

Teorem 2.2.1. $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ve $s \in (0, 1]$ olsun. Bu taktirde, aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- i. $f(x)$ fonksiyonu I da geometrik-aritmetik- s -konvektir ancak ve ancak $f(e^x)$ fonksiyonu $\ln 0 = -\infty$ kabul edildiğinde $\ln I = \{\ln x \mid x \in I\}$ aralığında s -konvektir.
- ii. Eğer f fonksiyonu I da geometrik aritmetik konveks ise f I da geometrik aritmetik s -konvektir.
- iii. Eğer f fonksiyonu I da azalan ve geometrik aritmetik s -konveks ise f fonksiyonu I da s -konvektir.
- iv. Eğer f fonksiyonu I da artan ve s -konveks ise f fonksiyonu I da geometrik aritmetik s -konvektir.

İspat: i. $f(x)$ fonksiyonu I aralığında geometrik aritmetik s -konveks ise

$$\begin{aligned} f(e^{t \ln x + (1-t) \ln y}) &= f(x^t y^{1-t}) \\ &\leq t^s f(x) + (1 - t)^s f(y) = t^s f(e^{\ln x}) + (1 - t)^s f(e^{\ln y}) \end{aligned}$$

dir. Bu yüzden $f(e^x)$ fonksiyonu I aralığında s -konvektir. Diğer taraftan, tersine olarak $f(e^x)$ fonksiyonu I aralığında s -konveks olduğunda

$$\begin{aligned} f(x^t y^{1-t}) &= f(e^{t \ln x + (1-t) \ln y}) \\ &\leq t^s f(e^{\ln x}) + (1-t)^s f(e^{\ln y}) \\ &= t^s f(x) + (1-t)^s f(y) \end{aligned}$$

olur ki bu $f(x)$ fonksiyonun I da geometrik aritmetik s -konveks olduğunu gösterir.

ii. Eğer f fonksiyonu I da azalan ve geometrik aritmetik konveks ise

$$f(x^t y^{1-t}) \leq t f(x) + (1-t) f(y) \leq t^s f(x) + (1-t)^s f(y)$$

dir. Bunun ise f fonksiyonun I da geometrik aritmetik s -konveks olduğunu gösterir.

iii. Eğer f fonksiyonu I da azalan ve geometrik aritmetik s -konveks ise

$$f(tx + (1-t)y) \leq f(x^t y^{1-t}) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$$

dir. Bunun anlamı f fonksiyonu I da s -konvektir.

iv. Eğer f fonksiyonu I da artan ve s -konveks ise

$$f(x^t y^{1-t}) \leq f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$$

dir. Buna göre f fonksiyonu I da geometrik aritmetik s -konvektir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. GA-s-konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Bu kısımda, [18] de İşcan tarafından GA-s-konveks fonksiyonlar (ikinci anlamda) için elde edilen Hermite-Hadamard tipli eşitsizliklere yer verilmiştir. Burada elde edilen sonuçlar için [26] da verilen aşağıdaki Lemmadan yararlanılmıştır.

Lemma 3.1.1. $f: I \subseteq (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^* de türevlenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Eğer $f' \in L[a, b]$ ise

$$\begin{aligned} f(\sqrt{ab}) - \frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \\ = \frac{\ln b - \ln a}{4} \left[a \int_0^1 t \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{t}{2}} f' \left(a^{1-t} (ab)^{\frac{t}{2}} \right) dt - b \int_0^1 t \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{t}{2}} f' \left(b^{1-t} (ab)^{\frac{t}{2}} \right) dt \right] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \\ = \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[a \int_0^1 t \left(\frac{b}{a} \right)^t f' (a^{1-t} b^t) dt - b \int_0^1 t \left(\frac{a}{b} \right)^t f' (b^{1-t} a^t) dt \right] \end{aligned}$$

dir.

Teorem 3.1.1. $f: I \subseteq (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu GA-s-konveks fonksiyon (ikinci anlamda), $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Eğer $f \in L[a, b]$ ise

$$2^{s-1} f(\sqrt{ab}) \leq \frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{s+1}$$

eşitsizliği sağlanır.

Uyarı 3.1.1. Yukarıdaki teoremden $s = 1$ alınırsa, GA-konveks fonksiyonlar aşağıdaki Hermite-Hadamard eşitsizliğini elde ederiz:

$$f(\sqrt{ab}) \leq \frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Teorem 3.1.2. $f: I \subseteq (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ I° de türevlenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I^\circ$, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $q \geq 1$ ve $s \in (0, 1]$ için $|f'|^q$ $[a, b]$ üzerinde GA-s-konveks fonksiyon ise

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \right| \\ & \leq \ln \left(\frac{b}{a} \right) \left(\frac{1}{2} \right)^{2-\frac{1}{q}} \left[a \left\{ C \left(\frac{b}{a}, 1, 1, s, q \right) |f'(a)|^q \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + C \left(\frac{b}{a}, s+1, 1, 0, q \right) |f'(b)|^q \right\}^{1/q} \right. \\ & \quad \left. + b \left\{ C \left(\frac{a}{b}, 1, 1, s, q \right) |f'(b)|^q + C \left(\frac{a}{b}, s+1, 1, 0, q \right) |f'(a)|^q \right\}^{1/q} \right] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \left| f(\sqrt{ab}) - \frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \right| \\ & \leq \ln \left(\frac{b}{a} \right) \left(\frac{1}{2} \right)^{3-\frac{1}{q}} \left[a \left\{ C \left(\frac{b}{a}, 1, 1, s, \frac{q}{2} \right) |f'(a)|^q \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + C \left(\frac{b}{a}, s+1, 1, 0, \frac{q}{2} \right) |f'(\sqrt{ab})|^q \right\}^{1/q} \right. \\ & \quad \left. + b \left\{ C \left(\frac{a}{b}, 1, 1, s, \frac{q}{2} \right) |f'(b)|^q + C \left(\frac{a}{b}, s+1, 1, 0, \frac{q}{2} \right) |f'(\sqrt{ab})|^q \right\}^{1/q} \right] \end{aligned}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Teorem 3.1.3. $f: I \subseteq (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ I° de türevlenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I^\circ$, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $q \geq 1$ ve $s \in (0, 1]$ için $|f'|^q$ $[a, b]$ üzerinde GA-s-konveks fonksiyon ise

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \right| \\
& \leq \frac{1}{2} \ln \left(\frac{b}{a} \right) \left(\frac{q-1}{2q-1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left[a \left\{ C \left(\frac{b}{a}, 0, 1, s, q \right) |f'(a)|^q \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + C \left(\frac{b}{a}, s, 1, 0, q \right) |f'(b)|^q \right\}^{1/q} \right. \\
& \quad \left. + b \left\{ C \left(\frac{a}{b}, 0, 1, s, q \right) |f'(b)|^q + C \left(\frac{a}{b}, s, 1, 0, q \right) |f'(a)|^q \right\}^{1/q} \right]
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \left| f(\sqrt{ab}) - \frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \right| \\
& \leq \frac{1}{4} \ln \left(\frac{b}{a} \right) \left(\frac{q-1}{2q-1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left[a \left\{ C \left(\frac{b}{a}, 0, 1, s, \frac{q}{2} \right) |f'(a)|^q \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + C \left(\frac{b}{a}, s, 1, 0, \frac{q}{2} \right) |f'(\sqrt{ab})|^q \right\}^{1/q} \right. \\
& \quad \left. + b \left\{ C \left(\frac{a}{b}, 0, 1, s, \frac{q}{2} \right) |f'(b)|^q + C \left(\frac{a}{b}, s, 1, 0, \frac{q}{2} \right) |f'(\sqrt{ab})|^q \right\}^{1/q} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Yukarıdaki teoremlerde, $u, n > 0$, $m, r \geq 0$ ve $q \geq 1$ olmak üzere

$$C(u, m, n, r, q) = \int_0^1 t^m (1-t^n)^r u^{qt} dt$$

ile tanımlanmıştır.

3.2. Bazı Önemli Eşitsizlikler ve Yardımcı Teoremler

Bu kısımda, Araştırma bulguları bölümünde elde edilen sonuçları bulmamızı kolaylaştıran bazı önemli eşitsizlikler ve özdeşliklerin yanı sıra elde edilen değişik tipten eşitsizlik türlerine ait bilgilere yer verilmiştir.

Teorem 3.2.1. (Ostrowski Eşitsizliği) $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° de türevlenebilir bir dönüşüm, $a, b \in I^\circ$ öyle ki $a < b$ olsun. Eğer her $x \in [a, b]$ için $|f'(x)| \leq M$ ise

aşağıdaki eşitsizlik her $x \in [a, b]$ için sağlanır:

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{M}{b-a} \left[\frac{(x-a)^2 + (b-x)^2}{2} \right].$$

Teorem 3.2.2. (Simpson Eşitsizliği) $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (a, b) üzerinde dördüncü mertebeden sürekli türevlenebilir bir fonksiyon ve $\|f^{(4)}\|_{\infty} = \sup_{x \in (a,b)} |f^{(4)}(x)| < \infty$ olsun. Bu takdirde

$$\left| \frac{1}{3} \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{1}{2880} \|f^{(4)}\|_{\infty} (b-a)^4$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 3.2.3. (İntegraller için Hölder Eşitsizliği) $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar ve $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{1/q}$$

eşitsizliği geçerlidir [7].

Sonuç 3.2.1. (Power mean Eşitsizliği) $q \geq 1$ olsun. f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar ve $|f|$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)| dx \right)^{1-1/q} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx \right)^{1/q}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise Hölder eşitsizliğine göre

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)g(x)| dx &= \int_a^b |f(x)|^{1/p} [|f(x)|^{1/q} |g(x)|] dx \\ &\leq \left(\int_a^b |f(x)| dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx \right)^{1/q} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Son eşitsizlikte $\frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q}$ yazılırsa, $q = 1$ için de bu eşitsizlik sağlanır ve böylece istenilen eşitsizlik elde edilmiş olur.

Teorem 3.2.4. (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu) $f, [a, b]$ aralığında tanımlı sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu taktirde

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

eşitsizliği geçerlidir [7].

Lemma 3.2.1 [27]. $\alpha > 0$ ve $\mu > 0$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\int_0^1 t^{\alpha-1} \mu^t dt = \mu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} (\ln \mu)^{k-1}}{(\alpha)_k} < \infty,$$

burada

$$(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+k-1)$$

dir.

$f: I \subseteq (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, I^* (I nin içi) de türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Tezin bundan sonraki kısımlarında

$$\begin{aligned} I_f(x, \lambda, \alpha, a, b) \\ = (1 - \lambda) \left[\left(\ln \frac{x}{a} \right)^\alpha + \left(\ln \frac{b}{x} \right)^\alpha \right] f(x) + \lambda \left[f(a) \left(\ln \frac{x}{a} \right)^\alpha + f(b) \left(\ln \frac{b}{x} \right)^\alpha \right] \\ - \Gamma(\alpha + 1) [J_{x-}^\alpha f(a) + J_{x+}^\alpha f(b)] \end{aligned}$$

alınacaktır. Burada $a, b \in I$, $a < b$, $x \in [a, b]$, $\lambda \in [0, 1]$, $\alpha > 0$ ve Γ Euler Gamma fonksiyonudur.

[17] de, İşcan aşağıdaki Lemmayı kullanarak quasi-geometrik konveks fonksiyonlar için kesirli integraller yardımıyla bazı yeni eşitsizlikler elde etmiştir. Tezin Araştırma Bulguları bölümünde elde ettiğimiz sonuçlar da bu Lemma kullanılarak elde edildiğinden ispatı ile birlikte aşağıda verilmiştir.

Lemma 3.2.2. $f: I \subseteq (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, I^* üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon, öyle ki $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f' \in L[a, b]$ olsun. Bu taktirde her $x \in [a, b]$, $\lambda \in [0, 1]$ ve $\alpha > 0$ için

$$I_f(x, \lambda, \alpha, a, b) = a \left(\ln \frac{x}{a} \right)^{\alpha+1} \int_0^1 (t^\alpha - \lambda) \left(\frac{x}{a} \right)^t f'(x^t a^{1-t}) dt \\ - b \left(\ln \frac{b}{x} \right)^{\alpha+1} \int_0^1 (t^\alpha - \lambda) \left(\frac{x}{b} \right)^t f'(x^t b^{1-t}) dt$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: Kısmi integrasyon yöntemi ve değişken değiştirme uygulanırsa, $x \neq a$ için

$$a \ln \frac{x}{a} \int_0^1 (t^\alpha - \lambda) \left(\frac{x}{a} \right)^t f'(x^t a^{1-t}) dt \\ = \int_0^1 (t^\alpha - \lambda) df(x^t a^{1-t}) dt \\ = (t^\alpha - \lambda) f(x^t a^{1-t}) \Big|_0^1 - \frac{\alpha}{\left(\ln \frac{x}{a} \right)^\alpha} \int_a^x \left(\ln \frac{u}{a} \right)^{\alpha-1} \frac{f(u)}{u} du \\ = (1 - \lambda) f(x) + \lambda f(a) - \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\left(\ln \frac{x}{a} \right)^\alpha} J_{x-}^\alpha f(a), \quad (3.2.1)$$

elde edilir. Benzer şekilde $x \neq b$ için

$$-b \ln \frac{b}{x} \int_0^1 (t^\alpha - \lambda) \left(\frac{x}{b} \right)^t f'(x^t b^{1-t}) dt \\ = \int_0^1 (t^\alpha - \lambda) df(x^t b^{1-t}) dt \\ = (t^\alpha - \lambda) f(x^t b^{1-t}) \Big|_0^1 - \frac{\alpha}{\left(\ln \frac{b}{x} \right)^\alpha} \int_x^b \left(\ln \frac{b}{u} \right)^{\alpha-1} \frac{f(u)}{u} du \\ = (1 - \lambda) f(x) + \lambda f(b) - \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\left(\ln \frac{b}{x} \right)^\alpha} J_{x+}^\alpha f(b), \quad (3.2.2)$$

elde edilir. (3.2.1) ve (3.2.2) nin her iki tarafı sırasıyla $\left(\ln \frac{x}{a} \right)^\alpha$ ve $\left(\ln \frac{b}{x} \right)^\alpha$ ile çarpılırsa ve elde edilen sonuçlar toplanırsa Lemma da istenilen özdeşlik elde edilir. $x = a$ ve $x = b$ için sırasıyla

$$I_f(a, \lambda, \alpha, a, b) = -b \left(\ln \frac{b}{a} \right)^{\alpha+1} \int_0^1 (t^\alpha - \lambda) \left(\frac{a}{b} \right)^t f'(a^t b^{1-t}) dt$$

ve

$$I_f(b, \lambda, \alpha, a, b) = a \left(\ln \frac{b}{a} \right)^{\alpha+1} \int_0^1 (t^\alpha - \lambda) \left(\frac{b}{a} \right)^t f'(b^t a^{1-t}) dt$$

özdeşliklerinin sağlandığı kolayca gösterilebilir.

BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde elde edilen sonuçlar orijinal olup, uluslararası alan indeksli bir dergide yayınlanmıştır [28]. Burada Lemma 3.2.2 yi kullanarak GA-s-konveks fonksiyonlar için Hadamard kesirli integralleri yardımıyla Hadamard, Ostrowski ve Simpson tipli eşitsizliklerin genelleşmesi üzerine bazı yeni eşitsizlikler elde edildi.

Aşağıdaki teoremden power-mean integral eşitsizliği kullanılarak yeni sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 4.1. $f: I \subset (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir bir fonksiyon öyle ki $a, b \in I^*$ ve $a < b$ olmak üzere $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer sabit bir $q \geq 1$ için $|f'|^q$, $[a, b]$ üzerinde ikinci anlamda GA-s-konveks fonksiyon ise $x \in [a, b]$, $\lambda \in [0, 1]$ ve $\alpha > 0$ olduğunda Hadamard kesirli integralleri için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned}
 & |I_f(x, \lambda, \alpha, a, b)| \\
 & \leq A_1^{1-\frac{1}{q}}(\alpha, \lambda) \left\{ a \left(\ln \frac{x}{a} \right)^{\alpha+1} \left(|f'(x)|^q A_2 \left(\left(\frac{x}{a} \right)^q, \alpha, \lambda, s \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + |f'(a)|^q A_3 \left(\left(\frac{x}{a} \right)^q, \alpha, \lambda, s \right) \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
 & \quad \left. + b \left(\ln \frac{b}{x} \right)^{\alpha+1} \left(|f'(x)|^q A_2 \left(\left(\frac{x}{b} \right)^q, \alpha, \lambda, s \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + |f'(b)|^q A_3 \left(\left(\frac{x}{b} \right)^q, \alpha, \lambda, s \right) \right)^{\frac{1}{q}} \right\}, \tag{4.1}
 \end{aligned}$$

burada

$$A_1(\alpha, \lambda) = \frac{2\alpha\lambda^{1+\frac{1}{\alpha}} + 1}{\alpha + 1} - \lambda,$$

$$A_2\left(\left(\frac{x}{u}\right)^q, \alpha, \lambda, s\right) = \int_0^1 |t^\alpha - \lambda| \left(\frac{x}{u}\right)^{qt} t^s dt,$$

$$A_3\left(\left(\frac{x}{u}\right)^q, \alpha, \lambda, s\right) = \int_0^1 |t^\alpha - \lambda| \left(\frac{x}{u}\right)^{qt} (1-t)^s dt, u = a, b.$$

İspat: Lemma 3.2.2, modülün özelliği ve power-mean integral eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} |I_f(x, \lambda, \alpha, a, b)| &\leq a \left(\ln \frac{x}{a}\right)^{\alpha+1} \int_0^1 |t^\alpha - \lambda| \left(\frac{x}{a}\right)^t |f'(x^t a^{1-t})| dt \\ &\quad + b \left(\ln \frac{b}{x}\right)^{\alpha+1} \int_0^1 |t^\alpha - \lambda| \left(\frac{x}{b}\right)^t |f'(x^t b^{1-t})| dt \\ &\leq a \left(\ln \frac{x}{a}\right)^{\alpha+1} \left(\int_0^1 |t^\alpha - \lambda| dt\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |t^\alpha - \lambda| \left(\frac{x}{a}\right)^{qt} |f'(x^t a^{1-t})|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\quad + b \left(\ln \frac{b}{x}\right)^{\alpha+1} \left(\int_0^1 |t^\alpha - \lambda| dt\right)^{1-\frac{1}{q}} \\ &\quad \times \left(\int_0^1 |t^\alpha - \lambda| \left(\frac{x}{b}\right)^{qt} |f'(x^t b^{1-t})|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \quad (4.2)$$

olur. $|f'|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde GA-s-konveks olduğundan,

$$\begin{aligned} &\int_0^1 |t^\alpha - \lambda| \left(\frac{x}{a}\right)^{qt} |f'(x^t a^{1-t})|^q dt \\ &\leq \int_0^1 |t^\alpha - \lambda| \left(\frac{x}{a}\right)^{qt} (t^s |f'(x)|^q + (1-t)^s |f'(a)|^q) dt \\ &= |f'(x)|^q A_2\left(\frac{x}{a}, \alpha, \lambda, s, q\right) + |f'(a)|^q A_3\left(\frac{x}{a}, \alpha, \lambda, s, q\right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} &\int_0^1 |t^\alpha - \lambda| \left(\frac{x}{b}\right)^{qt} |f'(x^t b^{1-t})|^q dt \\ &\leq \int_0^1 |t^\alpha - \lambda| \left(\frac{x}{b}\right)^{qt} (t^s |f'(x)|^q + (1-t)^s |f'(b)|^q) dt \\ &= |f'(x)|^q A_2\left(\frac{x}{b}, \alpha, \lambda, s, q\right) + |f'(b)|^q A_3(b, \alpha, \lambda, s, q) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Olup, ayrıca, basit bir hesaplama ile

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |t^\alpha - \lambda| dt &= \int_0^{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}} (\lambda - t^\alpha) dt + \int_{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}^1 (t^\alpha - \lambda) dt \\
&= \frac{2\alpha\lambda^{1+\frac{1}{\alpha}} + 1}{\alpha + 1} - \lambda
\end{aligned} \tag{4.5}$$

elde edilir. Sonuç olarak (4.3), (4.4) ve (4.5) (4.2) de yerine yazılırsa istenilen sonuç elde edilmiş olur.

Yukarıdaki teoremden $s = 1$ alınırsa, $|f'|^q$ nun $[a, b]$ üzerinde GA-konveks fonksiyon olması durumunda aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 4.1. Teorem 4.1 in koşulları altında, $s = 1$ için (4.1) eşitsizliği aşağıdaki eşitsizliğe indirgenir:

$$\begin{aligned}
&|I_f(x, \lambda, \alpha, a, b)| \\
&\leq A_1^{1-\frac{1}{q}}(\alpha, \lambda) \left\{ a \left(\ln \frac{x}{a} \right)^{\alpha+1} \left(|f'(x)|^q A_2 \left(\left(\frac{x}{a} \right)^q, \alpha, \lambda, 1 \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + |f'(a)|^q A_3 \left(\left(\frac{x}{a} \right)^q, \alpha, \lambda, 1 \right) \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + b \left(\ln \frac{b}{x} \right)^{\alpha+1} \left(|f'(x)|^q A_2 \left(\left(\frac{x}{b} \right)^q, \alpha, \lambda, 1 \right) + |f'(b)|^q A_3 \left(\left(\frac{x}{b} \right)^q, \alpha, \lambda, 1 \right) \right)^{\frac{1}{q}} \right\}.
\end{aligned}$$

Sonuç 4.2. Teorem 4.1 in koşulları altında, $s = 1$ ve $\alpha = 1$ için (4.1) eşitsizliği aşağıdaki eşitsizliğe indirgenir:

$$\begin{aligned}
&\left(\ln \frac{b}{a} \right)^{-1} |I_f(x, \lambda, 1, a, b)| \\
&= \left| (1 - \lambda)f(x) + \lambda \left[\frac{f(a) \ln \frac{x}{a} + f(b) \ln \frac{b}{x}}{\ln \frac{b}{a}} \right] - \frac{1}{\ln \frac{b}{a}} \int_a^b \frac{f(u)}{u} du \right| \\
&\leq \left(\ln \frac{b}{a} \right)^{-1} A_1^{1-\frac{1}{q}}(1, \lambda) \left\{ a \left(\ln \frac{x}{a} \right)^2 (|f'(x)|^q A_2(\mu_a, 1, \lambda, 1) \right. \\
&\quad \left. + |f'(a)|^q A_3(\mu_a, 1, \lambda, 1))^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + b \left(\ln \frac{b}{x} \right)^2 (|f'(x)|^q A_2(\mu_b, 1, \lambda, 1) + |f'(b)|^q A_3(\mu_b, 1, \lambda, 1))^{\frac{1}{q}} \right\},
\end{aligned}$$

burada

$$A_1(1, \lambda) = (2\lambda^2 - 2\lambda + 1)/2,$$

$$A_2(\mu_u, 1, \lambda, 1) = \left\{ (\mu_u - 2\lambda^2 \mu_u^\lambda) \ln^2 \mu_u + (\lambda \mu_u^\lambda \ln \mu_u - \mu_u^\lambda + 1)(\lambda \ln \mu_u + \lambda + 4) \right. \\ \left. - (\lambda + 2)(\mu_u \ln \mu_u - \mu_u + 1) \right\} / (\ln \mu_u)^3,$$

$$A_3(\mu_u, 1, \lambda, 1) = [2\mu_u^\lambda + \mu_u \ln \mu_u - \lambda(1 + \mu_u) \ln \mu_u - \mu_u - 1] / (\ln \mu_u)^2 \\ - A_2(\mu_u, 1, \lambda, 1), \\ \mu_u = (x/u)^q, u = a, b,$$

dir.

Yukarıdaki teoremden $q = 1$ alınırsa, $|f'|$ nun $[a, b]$ üzerinde GA-s-konveks fonksiyon olması durumunda aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 4.3. Teorem 4.1 in koşulları altında, $q = 1$ için (4.1) eşitsizliği aşağıdaki eşitsizliğe indirgenir:

$$|I_f(x, \lambda, \alpha, a, b)| \leq \left\{ a \left(\ln \frac{x}{a} \right)^{\alpha+1} \left(|f'(x)| A_2 \left(\frac{x}{a}, \alpha, \lambda, s \right) + |f'(a)| A_3 \left(\frac{x}{a}, \alpha, \lambda, s \right) \right) \right. \\ \left. + b \left(\ln \frac{b}{x} \right)^{\alpha+1} \left(|f'(x)| A_2 \left(\frac{x}{b}, \alpha, \lambda, s \right) + |f'(b)| A_3 \left(\frac{x}{b}, \alpha, \lambda, s \right) \right) \right\}.$$

Sonuç 4.4. Teorem 4.1 in koşulları altında, $x = \sqrt{ab}$ ve $\lambda = \frac{1}{3}$ için (4.1) eşitsizliği aşağıdaki kesirli integraller için Simpson tipli eşitsizliğe indirgenir:

$$\left| 2^{\alpha-1} \left(\ln \frac{b}{a} \right)^{-\alpha} I_f \left(\sqrt{ab}, \frac{1}{3}, \alpha, a, b \right) \right| \\ = \left| \frac{1}{6} [f(a) + 4f(\sqrt{ab}) + f(b)] - \frac{2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha+1)}{\left(\ln \frac{b}{a} \right)^\alpha} [J_{\sqrt{ab}-}^\alpha f(a) + J_{\sqrt{ab}+}^\alpha f(b)] \right| \\ \leq \frac{\ln \frac{b}{a}}{4} A_1^{1-\frac{1}{q}} \left(\alpha, \frac{1}{3} \right) \left\{ a \left(|f'(\sqrt{ab})|^q A_2 \left((b/a)^{q/2}, \alpha, \frac{1}{3}, s \right) \right. \right. \\ \left. \left. + |f'(a)|^q A_3 \left((b/a)^{q/2}, \alpha, \frac{1}{3}, s \right) \right) \right)^{\frac{1}{q}} \\ + b \left(|f'(\sqrt{ab})|^q A_2 \left((a/b)^{q/2}, \alpha, \frac{1}{3}, s \right) + |f'(b)|^q A_3 \left((a/b)^{q/2}, \alpha, \frac{1}{3}, s \right) \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\}.$$

Sonuç 4.5. Teorem 4.1 in koşulları altında, $x = \sqrt{ab}$ ve $\lambda = 0$ için (4.1) eşitsizliği aşağıdaki eşitsizliğe indirgenir:

$$\begin{aligned}
& \left| 2^{\alpha-1} \left(\ln \frac{b}{a} \right)^{-\alpha} I_f(\sqrt{ab}, 0, \alpha, a, b) \right| \\
&= \left| f(\sqrt{ab}) - \frac{2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha+1)}{\left(\ln \frac{b}{a} \right)^{\alpha}} [J_{\sqrt{ab}-}^{\alpha} f(a) + J_{\sqrt{ab}+}^{\alpha} f(b)] \right| \\
&\leq \frac{\ln \frac{b}{a}}{4} \left(\frac{1}{\alpha+1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left\{ a \left(|f'(\sqrt{ab})|^q A_2((b/a)^{q/2}, \alpha, 0, s) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + |f'(a)|^q A_3((b/a)^{q/2}, \alpha, 0, s) \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + b \left(|f'(\sqrt{ab})|^q A_2((a/b)^{q/2}, \alpha, 0, s) + |f'(b)|^q A_3((a/b)^{q/2}, \alpha, 0, s) \right)^{\frac{1}{q}} \right\}.
\end{aligned}$$

Sonuç 4.6. Teorem 4.1 in koşulları altında, $x = \sqrt{ab}$ ve $\lambda = 1$ için (4.1) eşitsizliği aşağıdaki eşitsizliğe indirgenir:

$$\begin{aligned}
& \left| 2^{\alpha-1} \left(\ln \frac{b}{a} \right)^{-\alpha} I_f(\sqrt{ab}, 1, \alpha, a, b) \right| \\
&= \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha+1)}{\left(\ln \frac{b}{a} \right)^{\alpha}} [J_{\sqrt{ab}-}^{\alpha} f(a) + J_{\sqrt{ab}+}^{\alpha} f(b)] \right| \\
&\leq \frac{\ln \frac{b}{a}}{4} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left\{ a \left[|f'(\sqrt{ab})|^q A_2((b/a)^{q/2}, \alpha, 1, s) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + |f'(a)|^q A_3((b/a)^{q/2}, \alpha, 1, s) \right]^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + b \left[|f'(\sqrt{ab})|^q A_2((a/b)^{q/2}, \alpha, 1, s) + |f'(b)|^q A_3((a/b)^{q/2}, \alpha, 1, s) \right]^{\frac{1}{q}} \right\}.
\end{aligned}$$

Sonuç 4.7. Teorem 4.1 in koşulları altında, $\lambda = 0$ ve her $x \in [a, b]$ için $|f'(x)| \leq M$ ise (4.1) eşitsizliği aşağıdaki kesirli integraller için Ostrowski tipli eşitsizliğe indirgenir: her $x \in [a, b]$ için

$$\begin{aligned}
& \left| \left[\left(\ln \frac{x}{a} \right)^\alpha + \left(\ln \frac{b}{x} \right)^\alpha \right] f(x) - \Gamma(\alpha + 1) [J_{x-}^\alpha f(a) + J_{x+}^\alpha f(b)] \right| \\
& \leq M \left(\frac{1}{\alpha + 1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left\{ a \left(\ln \frac{x}{a} \right)^\alpha [A_2((b/a)^{q/2}, \alpha, 0, s) + A_3((b/a)^{q/2}, \alpha, 0, s)]^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + b \left(\ln \frac{b}{x} \right)^\alpha [A_2((a/b)^{q/2}, \alpha, 0, s) + A_3((a/b)^{q/2}, \alpha, 0, s)]^{\frac{1}{q}} \right\}.
\end{aligned}$$

Teorem 4.2. $f: I \subset (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir bir fonksiyon öyle ki $a, b \in I^\circ$ ve $a < b$ olmak üzere $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer sabit bir $q > 1$ için $|f'|^q$, $[a, b]$ üzerinde ikinci anlamda GA-s-konveks fonksiyon ise $x \in [a, b]$, $\lambda \in [0, 1]$ ve $\alpha > 0$ olduğunda Hadamard kesirli integralleri için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned}
& |I_f(x, \lambda, \alpha, a, b)| \\
& \leq C_1^{1/p}(\alpha, \lambda) \left\{ a \left(\ln \frac{x}{a} \right)^{\alpha+1} (|f'(x)|^q C_2((x/a)^q, s) + |f'(a)|^q C_3((x/a)^q, s))^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + b \left(\ln \frac{b}{x} \right)^{\alpha+1} (|f'(x)|^q C_2((x/b)^q, s) + |f'(b)|^q C_3((x/b)^q, s))^{\frac{1}{q}} \right\}, \quad (4.6)
\end{aligned}$$

burada $1/p + 1/q = 1$ ve

$$\begin{aligned}
& C_1(\alpha, \lambda) \\
& = \begin{cases} 1/(\alpha p + 1), & \lambda = 0 \\ \frac{\lambda^{1+p+\frac{1}{\alpha}}}{\alpha} \beta\left(\frac{1}{\alpha}, p+1\right) + \frac{(1-\lambda)^{p+1}}{\alpha(p+1)} {}_2F_1\left(1-\frac{1}{\alpha}, 1; p+2; 1-\lambda\right), & 0 < \lambda \leq 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_2((x/u)^q, s) &= \left(\frac{x}{u}\right)^q \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} (\ln(x/u)^q)^{k-1}}{(s+1)_k}, \\
C_3((x/u)^q, s) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} (-\ln(x/u)^q)^{k-1}}{(s+1)_k}, u = a, b,
\end{aligned}$$

ve $C_1(\alpha, \lambda)$ da verilen β fonksiyonu $m, n > 0$ için,

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$$

biçiminde tanımlanan iki değişkenli fonksiyona Beta fonksiyonudur.

${}_2F_1(a, b; c; z)$ hipergeometrik fonksiyonu ise

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{1}{\beta(b, c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt)^{-a} dt, c > b > 0, |z| < 1$$

şeklinde integral gösterimi ile tanımlanır [23].

İspat: Lemma 3.2.2, modülün özelliği, Hölder integral eşitsizliği ve $|f'|^q$ fonksiyonunun GA-s-konveksliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} |I_f(x, \lambda, \alpha, a, b)| &\leq a \left(\ln \frac{x}{a} \right)_0^{\alpha+1} \int_0^1 |t^\alpha - \lambda| \left(\frac{x}{a} \right)^t |f'(x^t a^{1-t})| dt \\ &+ b \left(\ln \frac{b}{x} \right)_0^{\alpha+1} \int_0^1 |t^\alpha - \lambda| \left(\frac{x}{b} \right)^t |f'(x^t b^{1-t})| dt \\ &\leq a \left(\ln \frac{x}{a} \right)^{\alpha+1} \left(\int_0^1 |t^\alpha - \lambda|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(\frac{x}{a} \right)^{qt} |f'(x^t a^{1-t})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ &+ b \left(\ln \frac{b}{x} \right)^{\alpha+1} \left(\int_0^1 |t^\alpha - \lambda|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(\frac{x}{b} \right)^{qt} |f'(x^t b^{1-t})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\int_0^1 |t^\alpha - \lambda|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left\{ a \left(\ln \frac{x}{a} \right)^{\alpha+1} \left(|f'(x)|^q \int_0^1 \mu_a^t t^s dt \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + |f'(a)|^q \int_0^1 \mu_a^t (1-t)^s dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ &\quad \left. + b \left(\ln \frac{b}{x} \right)^{\alpha+1} \left(|f'(x)|^q \int_0^1 \mu_b^t t^s dt \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + |f'(a)|^q \int_0^1 \mu_b^t (1-t)^s dt \right)^{\frac{1}{q}} \right\}, \quad (4.7) \end{aligned}$$

elde edilir, burada $\mu_a = (x/a)^q, \mu_b = (x/b)^q$ ve

$$\begin{aligned} \int_0^1 |t^\alpha - \lambda|^p dt &= \int_0^{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}} (\lambda - t^\alpha)^p dt + \int_{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}^1 (t^\alpha - \lambda)^p dt \quad (4.8) \\ &= \begin{cases} 1/(\alpha p + 1), & \lambda = 0 \\ \frac{\lambda^{(\alpha p + 1)/\alpha}}{\alpha} \beta\left(\frac{1}{\alpha}, p + 1\right) + \frac{(1 - \lambda)^{p+1}}{\alpha(p + 1)} {}_2F_1\left(1 - \frac{1}{\alpha}, 1; p + 2; 1 - \lambda\right), & 0 < \lambda \leq 1 \end{cases} \quad (4.9) \end{aligned}$$

dir. Lemma 3.2.1 kullanılırsa

$$\int_0^1 \mu_u^t t^s dt = \mu_u \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} (\ln \mu_u)^{k-1}}{(s+1)_k},$$

$$\int_0^1 \mu_u^t (1-t)^s dt = \int_0^1 \mu_u^{1-t} t^s dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} (-\ln \mu_u)^{k-1}}{(s+1)_k}, u = a, b. \quad (4.10)$$

elde ederiz. Böylece (4.8)-(4.10) eşitliklerini (4.7) eşitsizliğinde yerine yazılırsa ve $\mu_a = (x/a)^q, \mu_b = (x/b)^q$ alınırsa istenilen sonuç elde edilir:

Sonuç 4.8. Teorem 4.2'nin varsayımları altında, $s = 1$ için (4.6) eşitsizliği aşağıdaki eşitsizliğe indirgenir.

$$\begin{aligned} & |I_f(x, \lambda, \alpha, a, b)| \\ & \leq C_1^{1/p}(\alpha, \lambda) \left\{ a \left(\ln \frac{x}{a} \right)^{\alpha+1} (|f'(x)|^q C_2((x/a)^q, 1) + |f'(a)|^q C_3((x/a)^q, 1))^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + b \left(\ln \frac{b}{x} \right)^{\alpha+1} (|f'(x)|^q C_2((x/b)^q, 1) + |f'(b)|^q C_3((x/b)^q, 1))^{\frac{1}{q}} \right\}. \end{aligned}$$

Sonuç 4.9. Teorem 4.2 nin varsayımları altında, $s = 1$ ve $\alpha = 1$ için (4.6) eşitsizliği aşağıdaki eşitsizliğe indirgenir.

$$\begin{aligned} & |I_f(x, \lambda, 1, a, b)| \\ & = \left| \ln \frac{b}{a} (1-\lambda) f(x) + \lambda \left[f(a) \ln \frac{x}{a} + f(b) \ln \frac{b}{x} \right] - \int_a^b \frac{f(u)}{u} du \right| \\ & \leq \left(\frac{\lambda^{p+1} + (1-\lambda)^{p+1}}{p+1} \right)^{1/p} \left\{ a \left(\ln \frac{x}{a} \right)^2 (|f'(x)|^q C_2((x/a)^q, 1) \right. \\ & \quad \left. + |f'(a)|^q C_3((x/a)^q, 1))^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + b \left(\ln \frac{b}{x} \right)^2 (|f'(x)|^q C_2((x/b)^q, 1) + |f'(b)|^q C_3((x/b)^q, 1))^{\frac{1}{q}} \right\}. \end{aligned}$$

Sonuç 4.10. Teorem 3.2 nin varsayımları altında, $x = \sqrt{ab}$ ve $\lambda = \frac{1}{3}$ alındığında (4.6) eşitsizliği kesirli integraller için aşağıdaki Simpson tipli eşitsizliğe indirgenir.

$$\left| 2^{\alpha-1} \left(\ln \frac{b}{a} \right)^{-\alpha} I_f \left(\sqrt{ab}, \frac{1}{3}, \alpha, a, b \right) \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \frac{1}{6} [f(a) + 4f(\sqrt{ab}) + f(b)] - \frac{2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha+1)}{\left(\ln \frac{b}{a}\right)^\alpha} [J_{\sqrt{ab}-}^\alpha f(a) + J_{\sqrt{ab}+}^\alpha f(b)] \right| \\
&\leq \frac{\ln \frac{b}{a}}{4} C_1^{1/p} \left(\alpha, \frac{1}{3} \right) \left\{ a \left(|f'(\sqrt{ab})|^q C_2((b/a)^{q/2}, s) + |f'(a)|^q C_3((b/a)^{q/2}, s) \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + b \left(|f'(\sqrt{ab})|^q C_2((a/b)^{q/2}, s) + |f'(b)|^q C_3((a/b)^{q/2}, s) \right)^{\frac{1}{q}} \right\}.
\end{aligned}$$

Sonuç 4.11. Teorem 4.2'nin varsayımları altında, $x = \sqrt{ab}$ ve $\lambda = 0$ alındığında (4.6) eşitsizliğinden kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\begin{aligned}
&\left| 2^{\alpha-1} \left(\ln \frac{b}{a} \right)^{-\alpha} I_f(\sqrt{ab}, 0, \alpha, a, b) \right| \\
&= \left| f(\sqrt{ab}) - \frac{2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha+1)}{\left(\ln \frac{b}{a}\right)^\alpha} [J_{\sqrt{ab}-}^\alpha f(a) + J_{\sqrt{ab}+}^\alpha f(b)] \right| \\
&\leq \frac{\ln \frac{b}{a}}{4} \left(\frac{1}{\alpha p + 1} \right)^{1/p} \left\{ a \left(|f'(\sqrt{ab})|^q C_2((b/a)^{q/2}, s) + |f'(a)|^q C_3((b/a)^{q/2}, s) \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + b \left(|f'(\sqrt{ab})|^q C_2((a/b)^{q/2}, s) + |f'(b)|^q C_3((a/b)^{q/2}, s) \right)^{\frac{1}{q}} \right\}.
\end{aligned}$$

Sonuç 4.12. Teorem 3.2'nin varsayımları altında, $x = \sqrt{ab}$ ve $\lambda = 1$ alındığında (4.6) eşitsizliğinden kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\begin{aligned}
&\left| 2^{\alpha-1} \left(\ln \frac{b}{a} \right)^{-\alpha} I_f(\sqrt{ab}, 1, \alpha, a, b) \right| \\
&= \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha+1)}{\left(\ln \frac{b}{a}\right)^\alpha} [J_{\sqrt{ab}-}^\alpha f(a) + J_{\sqrt{ab}+}^\alpha f(b)] \right| \\
&\leq \frac{\ln \frac{b}{a}}{4} \left(\frac{1}{\alpha} \beta\left(\frac{1}{\alpha}, p+1\right) \right)^{1/p} \left\{ a \left[|f'(\sqrt{ab})|^q C_2((b/a)^{q/2}, s) + |f'(a)|^q C_3((b/a)^{q/2}, s) \right]^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + b \left[|f'(\sqrt{ab})|^q C_2((a/b)^{q/2}, s) + |f'(b)|^q C_3((a/b)^{q/2}, s) \right]^{\frac{1}{q}} \right\}.
\end{aligned}$$

Sonuç 4.13. Teorem 4.2 nin varsayımları sağlansın. Eğer her $x \in [a, b]$ için

$|f'(x)| \leq M$ ise (4.6) eşitsizliğinden kesirli integraller için aşağıdaki Ostrowski tipli eşitsizliği her $x \in [a, b]$ için elde ederiz.

$$\begin{aligned} & \left| \left[\left(\ln \frac{x}{a} \right)^\alpha + \left(\ln \frac{b}{x} \right)^\alpha \right] f(x) - \Gamma(\alpha + 1) [J_{x-}^\alpha f(a) + J_{x+}^\alpha f(b)] \right| \\ & \leq M \left(\frac{1}{\alpha p + 1} \right)^{1/p} \left\{ a \left(\ln \frac{x}{a} \right)^\alpha [C_2((x/a)^q, s) + C_3((x/a)^q, s)]^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + b \left(\ln \frac{b}{x} \right)^\alpha [C_2((x/b)^q, s) + C_3((x/b)^q, s)]^{\frac{1}{q}} \right\}. \end{aligned}$$

BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bu tezde elde edilen sonuçların araştırma bulguları orijinal olup, alan indeksli dergide yayınlanmıştır. Burada elde edilen sonuçlar yeni olup, burada GA-s-konveks fonksiyonlar için Hadamard kesirli integralleri yardımıyla Hermite-Hadamard, Ostrowski ve Simpson tipli eşitsizlikleri de içeren genel integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Araştırma bulgularında elde edilen sonuçlara ulaşmak için bu tür benzer çalışmalarda izlenen metodlar kullanılmıştır. Örneğin Hölder, power mean ve integraller için üçgen eşitsizlikleri gibi eşitsizliklerden faydalanılmıştır. Bu çalışmanın önemli bir yanı özel durumlarda çeşitli birçok özel tip integral eşitsizliklerinin elde edilmesidir. Bu amaçla araştırma bulgularını elde etmede kullanılan ve birçok parametreye bağlı önemli bir özdeşliğin kullanılmasının bunda rolü büyüktür.

KAYNAKLAR

1. Hardy, G., Littlewood, J.E. and Polya, G., Inequalities. 2nd Ed., Cambridge University Press, 324, United Kingdom, 1952.
2. Beckenbach, E.F. and Bellman, R., Inequalities. Springer-Verlag, Berlin, 1961.
3. Mitrinović, D.S., Analytic Inequalities. Springer-Verlag, Berlin, 1970
4. Pachpatte, B.G., Mathematical Inequalities. Elsevier B.V., Amsterdam, the Netherlands, 2005.
5. Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. and Fink, A.M., Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1991.
6. Niculescu, C.P. and Persson, L.E., Convex Functions and Their Applications. A Contemporary Approach, Springer Science Business Media, Inc., 2006.
7. Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. and Fink, A.M., Classical and New Inequalities in Analysis. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1993
8. Niculescu, C.P., Convexity according to the geometric mean, Mathematical Inequalities and Applications, 3 (2), 155-167, 2000.
9. Niculescu, C.P., Convexity according to means, Mathematical Inequalities and Applications, 6 (4), 571-579, 2003.
10. Kunt, M., İşcan, İ., On new inequalities of Hermite-Hadamard-Fejer type for GA-convex functions via fractional integrals, Research Report Collection, 18, 1-12, 2015.
11. Zhang, X.M. , Chu, Y.M., Zhang, X.H., The Hermite-Hadamard type inequality of GA-Convex functions and its application, Journal of Inequalities and Applications, 2010, 1-11, 2010.

12. Zhang, T.Y. , Ji, A.P., Qi, F., Some inequalities of Hermite-Hadamard type for GA-convex functions with applications to means, *Le Matematiche* 68 (1), 229–239, 2013.
13. Shuang, Y. , Yin, H.P, Qi, F., Hermite-Hadamard type integral inequalities for geometric-arithmetically s-convex functions, *Analysis*, 33(2), 197-208, 2013.
14. Hua, J., Xi, B.-Y., Qi, F., Hermite-Hadamard Type Inequalities For Geometric-Arithmetically s-Convex Functions, *Communications of the Korean Mathematical Society*, 29 (1), 51–63, 2014.
15. Latif, M.A., Dragomir, S.S. and Momaniat, E., Some Fejer type integral inequalities for geometrically-arithmetically-convex functions with applications, *Research Report Collection*, 18(25), 1-18, 2015.
16. Anderson, G.D., Vamanamurthy, M.K. and Vuorinen, M., Generalized convexity and Inequalities , *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 335, 1294-1308, 2007.
17. İşcan, İ., New general integral inequalities for quasi-geometrically convex functions via fractional integrals, *Journal of Inequalities and Applications*, 2013 (491), 1-15, 2013.
18. İşcan, İ., Hermite-Hadamard type inequalities for GA-s-convex functions, *Le Matematiche*, LXIX (II), 129-146, 2014.
19. Kunt, M., İşcan, İ., On new inequalities of Hermite-Hadamard-Fejer type for GA-s-convex functions via fractional integrals, *Konuralp Jurnal of Mathematics*, 4 (1), 130-139, 2016.
20. Maden, S., Turhan, S., and İşcan, İ., New Hermite-Hadamard-Fejer type inequalities for GA-convex functions, *AIP Conference Proceedings*, 1726(1), 1-4, 2016.
21. Dragomir, S.S., and Pearce, C.E.M., *Selected Topics on Hermite–Hadamard Type 181 Inequalities and Applications*, Research Report Collection Monographs, Victoria University, 2000.
22. Pecaric, J.E., Proschan, F., and Tong, Y.L., *Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications*, 1992.
23. Kilbas, A.A., Srivastava, H.M., Trujillo, J.J., *Theory and applications of fractional differential equations*, Elsevier, Amsterdam, 2006.
24. Sarıkaya, M.Z., Set, E., Yıldız, H., and Başak, N., Hermite-Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities, *Mathematical and Computer Modelling*, 57, 2403 – 2407, 2013.

25. Breckner, W.W., Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer funktionen in topologischen linearen Räumen, Publications de l'Institut Mathématique, 23, 13–20, 1978.
26. İşcan, İ., Some New Hermite-Hadamard Type Inequalities for Geometrically Convex Functions, Mathematics and Statistics, 1(2), 86-91, 2013.
27. Wang, J., Deng, J., Fečkan, M., Exploring s-e-condition and applications to some Ostrowski type inequalities via Hadamard fractional integrals, Mathematica Slovaca, 64 (6), 1381-1396, 2014.
28. İşcan, İ. and Aydın, M., Some new generalized integral inequalities for GA-s-convex functions via Hadamard fractional integrals, Chinese Journal of Mathematics, 2016, 1-8, 2016.

ÖZGEÇMİŞ

Mustafa Aydın 1983 yılında Giresun’da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Giresun’da tamamladı. 2001 yılında Giresun Anadolu Öğretmen Lisesi’nden mezun oldu. 2001 yılında başladığı Atatürk Üniversitesi Matematik Öğretmenliği Bölümü’nü 2006 yılında bitirdi. 2015 yılında Giresun Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı. Halen Giresun Üniversitesi Turan Bulutçu Myo da öğretim görevlisi olarak görev yapmaktadır. Evli ve iki çocuk babasıdır.