



GİRESUN
ÜNİVERSİTESİ



FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GABOR DÖNÜŞÜMÜ VE WIGNER DÖNÜŞÜMÜ
ARASINDAKİ BAĞINTILAR

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI
Yüksek Lisans Tezi

Mahmut YILDIZ
20152110032
Haziran 2018

GİRESUN

**T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GABOR DÖNÜŞÜMÜ VE WIGNER DÖNÜŞÜMÜ ARASINDAKİ
BAĞINTILAR**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mahmut YILDIZ

Enstitü Anabilim Dalı	:	Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik
Tez Danışmanı	:	Doç. Dr. Öznur KULAK

Haziran 2018

**T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GABOR DÖNÜŞÜMÜ VE WIGNER DÖNÜŞÜMÜ ARASINDAKİ
BAĞINTILAR**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mahmut YILDIZ

Enstitü Anabilim Dalı

:

**Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik**

Bu tez 28/06/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.



**Prof. Dr.
Feyzullah AHMETOĞLU
Jüri Başkanı**



**Doç. Dr.
Öznur KULAK
Üye**



**Doç. Dr.
İsmail AYDIN
Üye**

**Doç. Dr.
Bahadır KOZ
Enstitü Müdürü**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.



Mahmut YILDIZ

08/06/2018

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın tüm aşamalarında her türlü bilimsel desteği sağlayan değerli hocam Doç. Dr. Öznur KULAK' a teşekkür ederim. Ayrıca tez çalışmam sırasında manevi desteklerini esirgemeyen eşim Ayşenur'a çocuklarım Ömer Faruk ve Melek Serra'ya çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	I
İÇİNDEKİLER	II
SİMGELER VE KISALTMALAR	III
ŞEKİLLER LİSTESİ	IV
ÖZET	V
SUMMARY	VI
BÖLÜM 1. GİRİŞ	1
BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR	2
BÖLÜM 3. ÖTELEME VE KARAKTER OPERATÖRLERİ	8
BÖLÜM 4. GABOR (KISA SÜRELİ FOURIER) DÖNÜŞÜMÜ	14
BÖLÜM 5. WIGNER DÖNÜŞÜMÜ	31
SONUÇ	44
KAYNAKLAR	45
ÖZGEÇMİŞ	46

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

Af	: Belirsizlik Fonksiyonu
T_x	: Öteleme Operatörü
$V_g f$	: Gabor Dönüşümü
$\hat{f}$	: Fourier Dönüşümü
M_ω	: Karakter (Modülasyon) Operatörü
$T_s F$	: Simetrik Koordinat Dönüşümü
$\otimes$	: Tensör Çarpımı
C_c	: Tıkız (Kompakt) Destekli Sürekli Fonksiyonların Vektör Uzayı
$T_x M_\omega$	: Zaman-Frekans Değişimi
Wf	: Wigner Dönüşümü

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 3.1.	9
Şekil 3.2.	9
Şekil 4.1.	15

GABOR DÖNÜŞÜMÜ VE WIGNER DÖNÜŞÜMÜ ARASINDAKİ BAĞINTILAR

ÖZET

Tez çalışmamız beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tez konusunun literatür özeti, ikinci bölümde de temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde ise Öteleme ve Karakter operatörleri ele alınıp bu operatörlerin özellikleri anlatılmıştır. Ayrıca zaman – frekans değişimi operatörü ve bu operatörün bir takım özelliklerinden bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde de Gabor dönüşümü (kısa zamanlı Fourier dönüşümü) ve özelliklerine ayrıntılı bir biçimde yer verilmiştir. Son bölümde ise Wigner dönüşümünün tanımı, özellikleri ve Gabor dönüşümüyle arasındaki ilişkilerden bahsedilmiştir.

Anahtar kelimeler: Fourier dönüşümü, Gabor dönüşümü (kısa zamanlı fourier dönüşümü), Wigner dönüşümü.

RELATIONS BETWEEN GABORS TRANSFORMATION AND WIGNERS TRANSFORMATION

SUMMARY

The thesis work consists of five parts. In the first part, the thesis topic is given in the literature summary and in the second part basic definitions and theorems are given. In the third part, the operators of Transpose and Character are discussed and the characteristics of these operators are explained. In addition, the time – frequency change operator and some features of this operator are mentioned. In the fourth chapter, Gabor transformation (short time Fourier transformation) and its properties are given in detail. In the last part, the definition of Wigner transformation, its properties, and the relations between the Gabor transformation are mentioned.

Keywords: Fourier transformation, Gabor transformation (short time Fourier transformation), Wigner transformation.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Fourier dönüşümü ilk olarak 1805 yılında Fransız bir matematikçi ve fizikçi olan Jean - Baptiste Joseph Fourier tarafından ortaya atılmıştır. Fourier dönüşüm matematikte harmonik analizin bir alt alanıdır. Bu dönüşüm bir $f(x)$ fonksiyonu ile belirlenen etkiyi e^{-ikx} dalgalarının toplamı olarak yazma işlemidir. Fourier dönüşümü astronomi, tıp ve kimya gibi birçok bilim dallarında kullanılmaktadır. Ayrıca plazma fizikinde, yarı iletken fizikinde, mikrodalga akustikinde, tıbbi görüntüleme sistemlerinde, sismografide önemli bir yer tutar. Bununla birlikte Fourier dönüşümü elektrik, ısı ve ışıkla ilgili çeşitli problemleri çözmekte de kullanılmaktadır. Yine Fourier dönüşümünün en önemli uygulamalarından bir tanesi de kısmi diferansiyel denklemleri adi diferansiyel denklemlere dönüştürerek çözülebilir hale getirmesidir. Fourier dönüşümünde türlü başarılar elde edilse de zamanla bazı problem türlerinde yetersiz kaldığı fark edilmiştir. Bunun nedeni olarak Fourier dönüşümünün durağan olmayan sinyallerin analizinde zaman – frekans gösterimine sahip olmaması gösterilmiştir. Bütün bunların neticesinde 1946 yılında Gabor, daha iyi netice alabilmek amacıyla pencereleme yöntemini kullanarak işaretin küçük bir parçasını zaman- frekans aralığında ele alarak işareti zaman ve frekansın fonksiyonu olarak iki boyutta ifade etmiştir. Böylece Fourier dönüşümünün tıkanıdığı noktalarda kısa zamanlı Fourier dönüşümüyle sorun aşılmaya çalışılmıştır. Ayrıca Fourier dönüşümünde yaşanan sıkıntıların giderilmesi amacıyla 1932 yılında fizikçi ve matematikçi olan Eugene Wigner tarafından kuantum mekaniği bağlamında Wigner dönüşümü olarak bilinen bu dönüşüm, zaman – frekans gösterimlerinin matematiksel yorumuna dahil edilmiştir. Wigner dönüşümü, ideal zaman – frekans gösteriminden beklenen özelliklerin çoğunu karşılar ve çeşitli kriterlere göre optimal olduğunu gösterebilir. Bu çalışmada Gabor ve Wigner dönüşümünün özelliklerinden bahsedilmiş ve bu iki dönüşüm arasındaki bağlantı anlatılmıştır. Bu dönüşümlerin zaman – frekans analizindeki rolleri vurgulanmıştır.

BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1.Tanım: $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesini ve $\mathbb{R}^d$ kümesi de $\mathbb{R}$ üzerindeki d-boyutlu vektör uzayını göstermek üzere $dx, \mathbb{R}^d$ üzerinde Lebesgue ölçümü olsun. p reel sayısı $1 \leq p < \infty$ koşulunu sağlamak üzere $\mathbb{R}^d$ üzerinde tanımlı, karmaşık değerli ve

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx < \infty$$

koşulunu sağlayan ölçülebilir f fonksiyonlarının, denklik sınıflarının oluşturduğu uzay $L^p(\mathbb{R}^d)$ ile gösterilir. Ayrıca $L^p(\mathbb{R}^d)$ uzayı $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ olmak üzere,

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

normuna göre bir Banach uzayıdır.

$L^\infty(\mathbb{R}^d)$ uzayı $\mathbb{R}^d$ üzerinde tanımlı, karmaşık değerli ve hemen hemen her yerde sınırlı olan ölçülebilir fonksiyonlarının, denklik sınıflarının uzayıdır. Bu uzay $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ için

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|$$

normuna göre bir Banach uzayıdır[1,2].

2.2. Teorem (Hölder Eşitsizliği): $1 < p$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$f \in L_p(\mathbb{R}^d), g \in L_q(\mathbb{R}^d)$ olsun. Bu durumda $f.g \in L_1(\mathbb{R}^d)$ olur. Bundan başka $\|f.g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$ eşitsizliği vardır[1].

2.3.Teorem (Minkowski Eşitsizliği): $p \geq 1$ olsun. Eğer $f, h \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ise

$f + h \in L^p(\mathbb{R}^d)$ olur. Bundan başka

$$\|f + h\|_p \leq \|f\|_p + \|h\|_p \text{ eşitsizliği vardır[1].}$$

2.4.Tanım: $f, \mathbb{R}^d$ üzerinde tanımlı, karmaşık değerli bir fonksiyon olsun. Bu zaman

$$M = \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \neq 0\}$$

kümesinin kapanışına f fonksiyonunun desteği denir, ve bu $\text{supp} f$ simgesi ile gösterilir. $\mathbb{R}^d$ üzerinde tanımlı karmaşık değerli, sürekli, kompakt destekli fonksiyonlarının vektör uzayı $C_c(\mathbb{R}^d)$ ile gösterilir[5].

2.5.Teorem: $1 \leq p < \infty$ koşulunu sağlamak üzere $C_c(\mathbb{R}^d), L^p(\mathbb{R}^d)$ uzayında her yerde yoğundur[5].

2.6.Teorem (Yoğunluk Prensibi): B_1 ve B_2 herhangi iki Banach uzayı, X de B_1 normlu uzayının yoğun bir alt kümesi olsun. Yine kabul edelim ki $f: B_1 \rightarrow B_2$ bir doğrusal fonksiyon ve her $x \in X$ için

$$\|f(x)\|_{B_2} \leq C\|x\|_{B_1}, \quad (2.1.)$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sayısı olsun. Bu taktirde f nin (2.1.) eşitsizliğini her $x \in B_1$ için sağlayan bir $F: B_1 \rightarrow B_2$ sınırlı genişlemesi vardır[4].

2.7.Tanım: f ve g fonksiyonları $\mathbb{R}^d$ üzerinde birer Borel fonksiyonu olsunlar. Bu fonksiyonların girişimi

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \cdot g(x - y) dy$$

biçiminde tanımlanır. Bu girişimin tanımlı olması,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(y) \cdot g(x - y)| dy < \infty$$

olmalıdır[6].

2.8.Tanım: Herhangi bir $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü $x, \omega \in \mathbb{R}^d$ için

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \omega} dx$$

biçiminde tanımlanır.

Fourier dönüşümü bir $f(x)$ fonksiyonu ile belirlenen etkiyi e^{ikx} dalgalarının toplamı olarak yazma işlemidir. Mühendislikte ω frekansı, $\hat{f}(\omega)$ de ω frekansının genliğini verir. Şimdi Fourier dönüşümünün bazı temel özelliklerini verilsin[4,6].

2.9.Teorem: f ve $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ olsun. Her $\omega \in \mathbb{R}^d$

a) $\widehat{(f+g)}(\omega) = \hat{f}(\omega) + \hat{g}(\omega)$

b) $\widehat{(\alpha f)}(\omega) = \alpha \hat{f}(\omega), \alpha \in \mathbb{C}$

c) $\bar{\hat{f}}$, f fonksiyonunun karmaşık eşleniği olmak üzere

$$\hat{\bar{f}}(\omega) = \overline{\hat{f}(-\omega)}$$

d) $\hat{f}_y(\omega) = \hat{f}(\omega) e^{-2\pi i \omega y}, y \in \mathbb{R}^d$

e) $|\hat{f}(\omega)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = \|f\|_1$

f) $\varphi(x) = \lambda f(\lambda x), \lambda \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$\hat{\varphi}(\omega) = \hat{f}\left(\frac{\omega}{\lambda}\right)$$

ifadeleri sağlanır.

İspat: f ve $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ olsun.

a) Her $\omega \in \mathbb{R}$ için;

$$\begin{aligned} \widehat{(f+g)}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}^d} [(f+g)(x)] e^{-2\pi i x \omega} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} [f(x) + g(x)] e^{-2\pi i x \omega} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \omega} dx + \int_{\mathbb{R}^d} g(x) e^{-2\pi i x \omega} dx \\
&= \hat{f}(\omega) + \hat{g}(\omega)
\end{aligned}$$

b) Herhangi bir $\alpha \in \mathbb{C}$ ve her $\omega \in \mathbb{R}^d$ verilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned}
(\widehat{\alpha f})(\omega) &= \int_{\mathbb{R}^d} [(\alpha f)(x)] e^{-2\pi i x \omega} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \alpha [f(x)] e^{-2\pi i x \omega} dx \\
&= \alpha \int_{\mathbb{R}^d} [f(x)] e^{-2\pi i x \omega} dx \\
&= \alpha \hat{f}(\omega)
\end{aligned}$$

c) Herhangi bir $\omega \in \mathbb{R}^d$ verilsin. O halde

$$\begin{aligned}
\hat{\bar{f}}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}^d} \bar{f}(x) e^{-2\pi i x \omega} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(x) e^{2\pi i x \omega}} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x (-\omega)} dx \\
&= \overline{\hat{f}(-\omega)}
\end{aligned}$$

eşitliği yazılır.

d) Her $\omega \in \mathbb{R}^d$ için;

$$\hat{f}_y(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f_y(x) e^{-2\pi i x \omega} dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)e^{-2\pi i x \omega} dx \quad (2.2.)$$

yazılır. Burada $x - y = u$ denirse $x = u + y$ ve $dx = du$ olup bu ifade (2.2.) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \hat{f}_y(\omega) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)e^{-2\pi i x \omega} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(u)e^{-2\pi i(u+y)\omega} du \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(u)e^{-2\pi i u \omega} e^{-2\pi i y \omega} du \\ &= e^{-2\pi i y \omega} \int_{\mathbb{R}^d} f(u)e^{-2\pi i u \omega} du \\ &= e^{-2\pi i y \omega} \hat{f}(\omega) \end{aligned}$$

elde edilir.

e) Herhangi bir $\omega \in \mathbb{R}^d$ verilsin. Böylece

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\omega)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i x \omega} dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)e^{-2\pi i x \omega}| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| |e^{-2\pi i x \omega}| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx = \|f\|_1 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

f) Herhangi bir $\omega \in \mathbb{R}^d$ verilsin. Eğer $y = \lambda x$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$dy = \lambda dx$ ise $dx = \frac{dy}{\lambda}$ bulunur. İfadeler $\hat{\varphi}(\omega)$ fonksiyonunda yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
 \hat{\varphi}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) e^{-2\pi i x \omega} dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \lambda f(\lambda x) e^{-2\pi i x \omega} dx \\
 &= \lambda \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-2\pi i (\frac{y}{\lambda}) \omega} \frac{dy}{\lambda} \\
 &= \lambda \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-2\pi i (\frac{y}{\lambda}) \omega} dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-2\pi i (\frac{y}{\lambda}) \omega} dy \\
 &= \hat{f}\left(\frac{\omega}{\lambda}\right)
 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

2.10. Teorem (Parseval): Eğer $f, g \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ ise bu takdirde

$$\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$$

eşitliği vardır[2,3].

2.11. Teorem (Plancherel): Eğer $f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ ise bu takdirde

$$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$$

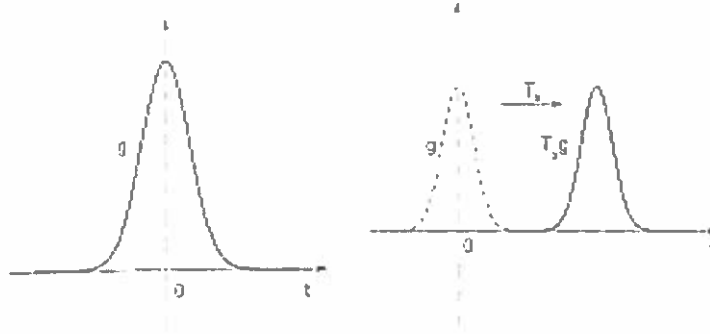
olur[2,3].

BÖLÜM 3. ÖTELEME VE KARAKTER OPERATÖRLERİ

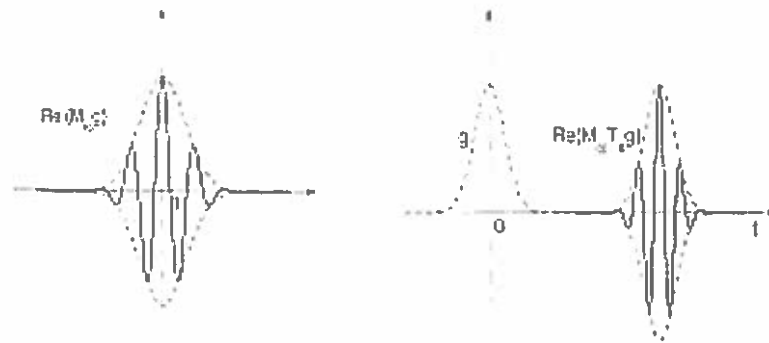
3.1.Tanım $f, \mathbb{R}^d$ üzerinde tanımlı herhangi bir fonksiyon olsun. Herhangi bir $x, \omega \in \mathbb{R}^d$ için öteleme ve karakter(modülasyon) operatörleri sırasıyla,

$$T_x f(t) = f(t - x) \text{ ve } M_\omega f(t) = e^{2\pi i \omega \cdot t} f(t)$$

biçiminde tanımlanır[4].



Şekil 3.1.



Şekil 3.2.

T_x operatörü zaman değişimini. M_ω operatörü de frekans değişimini verir. $T_x M_\omega$ ve $M_\omega T_x$ operatörlerine de zaman –frekans değişimleri denir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
T_x M_\omega f(t) &= T_x(M_\omega f(t)) = (M_\omega f)(t - x) \\
&= e^{2\pi i \omega \cdot (t-x)} f(t - x) \\
&= e^{-2\pi i x \cdot \omega} \cdot e^{2\pi i \omega \cdot t} f(t - x) \\
&= e^{-2\pi i x \cdot \omega} \cdot M_\omega T_x f(t)
\end{aligned}$$

olup $T_x M_\omega = e^{-2\pi i x \cdot \omega} M_\omega T_x$ eşitliği bulunur. Böylece T_x ve M_ω operatörlerinin değişmeli olması için gerek ve yeter koşul $x, \omega \in \mathbb{Z}$ olmasıdır.

3.2.Teorem: $1 \leq p < \infty$ olmak üzere zaman- frekans değişim operatörleri $L^p(\mathbb{R}^d)$ üzerinde birer izometridirler[4].

İspat: Herhangi bir $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ alalım. O halde,

$$\begin{aligned}
\|T_x M_\omega f\|_p &= \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |T_x M_\omega f(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \\
&= \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |(M_\omega f)(t - x)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \\
&= \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |e^{2\pi i \omega \cdot (t-x)} f(t - x)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \\
&= \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |e^{2\pi i \omega \cdot (t-x)}|^p \cdot |f(t - x)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \\
&= \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |f(t - x)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

olup $t - x = u$ denirse $dt = du$ olur. Buradan

$$\|T_x M_\omega f\|_p = \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |f(u)|^p du \right\}^{\frac{1}{p}} = \|f\|_p$$

bulunur. Benzer biçimde $\|M_\omega T_x f\|_p = \|f\|_p$ eşitliği bulunur.

3.3.Teorem: $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ve $x, \omega \in \mathbb{R}^d$ olmak üzere T_x, M_ω ve $T_x M_\omega$ operatörlerinin Fourier dönüşümleri;

$$(T_x f)^\wedge = M_{-x} \hat{f},$$

$$(M_\omega f)^\wedge = T_\omega \hat{f},$$

$$(T_x M_\omega f)^\wedge = e^{-2\pi i x \omega} T_\omega M_{-x} \hat{f}$$

biçimindedir[4].

İspat: Herhangi bir $t \in \mathbb{R}^d$ için

$$\begin{aligned} (T_x f)^\wedge(t) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i u \cdot t} (T_x f)(u) \cdot du \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i u \cdot t} f(u - x) du, \end{aligned}$$

olup $u - x = v$ denirse $du = dv$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} (T_x f)^\wedge(t) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i (x+v) \cdot t} f(v) \cdot dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x \cdot t} e^{-2\pi i v \cdot t} f(v) \cdot dv \\ &= e^{-2\pi i x \cdot t} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i v \cdot t} f(v) \cdot dv \\ &= e^{-2\pi i x \cdot t} \hat{f}(t) \\ &= M_{-x} \hat{f}(t) \end{aligned} \tag{3.1.}$$

bulunur. Yine her $t \in \mathbb{R}^d$ için,

$$\begin{aligned}
(M_\omega f)^\wedge(t) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i t \cdot u} \cdot M_\omega f(u) \cdot du \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i t \cdot u} e^{2\pi i \omega \cdot u} \cdot f(u) \cdot du \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i t \cdot u(t-\omega)} \cdot f(u) \cdot du \\
&= \hat{f}(t-\omega) \\
&= T_\omega \hat{f}(t)
\end{aligned} \tag{3.2.}$$

$$\text{bulunur. Buradan } M_\omega \hat{f} = T_\omega \hat{f} \text{ olur.} \tag{3.3.}$$

Böylece (3.1.), (3.2.) ve (3.3.) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned}
(T_x M_\omega f)^\wedge &= M_{-x}(M_\omega f)^\wedge = M_{-x} T_\omega \hat{f} \\
&= e^{-2\pi i x \cdot \omega} \cdot T_\omega M_{-x} \hat{f}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

3.4. Teorem: $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ve $x, \omega \in \mathbb{R}^d$ olsun. O halde öteleme ve karakter operatörleri $\mathbb{R}^d$ den $L^2(\mathbb{R}^d)$ ye düzgün süreklidir.

İspat: $C_c(\mathbb{R}^d), L^2(\mathbb{R}^d)$ uzayında her yerde yoğun olduğundan verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ için

$$\|g - f\|_2 < \frac{\varepsilon}{3}$$

olacak şekilde $\text{supp } f = K$ olan bir $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$ fonksiyonu vardır. Burada g fonksiyonu K kompakt kümesi üzerinde sürekli olduğundan düzgün süreklidir. Yani verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $x \in \mathbb{R}^d$ için

$$\|x\| < \delta \text{ olduğunda } \|T_x g - g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3} \mu(K)^{-\frac{1}{2}}$$

olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır. Buradan.

$$\begin{aligned}
\|T_x g - g\|_2 &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} |(T_x g - g)(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_K |(T_x g - g)(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_K \|T_x g - g\|_\infty^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|T_x g - g\|_\infty \cdot \mu(K)^{\frac{1}{2}} \\
&< \frac{\varepsilon}{3} \mu(K)^{-\frac{1}{2}} \mu(K)^{\frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon}{3}
\end{aligned}$$

olup $\|T_x g - g\|_2 < \frac{\varepsilon}{3}$ bulunur.

Aynı $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde aynı $\delta > 0$ sayısını alalım. O halde her $x \in \mathbb{R}^d$ için $\|x\| < \delta$ olduğunda eğer Minkowski eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\|T_x f - f\|_2 &= \|T_x f - f - T_x g + T_x g + g - g\|_2 \\
&= \|(g - f) + (T_x g - g) + (T_x f - T_x g)\|_2 \\
&< \|f - g\|_2 + \|T_x g - g\|_2 + \|T_x f - T_x g\|_2
\end{aligned}$$

bulunur. Eğer 3.4. Teorem kullanılırsa

$$\|T_x f - T_x g\|_2 = \|T_x(f - g)\|_2 = \|f - g\|_2$$

yazılır. Bu ifade son eşitsizlikte yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\|T_x f - f\|_2 &\leq \|f - g\|_2 + \|T_x g - g\|_2 + \|f - g\|_2 \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned} \tag{3.4.}$$

bulunur. Böylece öteleme operatörü $x = 0$ da düzgün sürekli olur.

Aynı $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık aynı $\delta > 0$ sayısını alalım. Her $x, y \in \mathbb{R}^d$ için

$\|y - x\| < \delta$ olduğunda (3.4.) den;

$$\|T_x f - T_y f\|_2 = \|T_x(f - T_{y-x}f)\|_2 = \|f - T_{y-x}f\|_2 < \varepsilon$$

olacak şekilde $\delta(\varepsilon) > 0$ bulunabileceğinden $\mathbb{R}^d \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d), x \rightarrow T_x f$ operatörü $\mathbb{R}^d$ üzerinde düzgün süreklidir. Şimdi de karakter operatörünün düzgün sürekli olduğunu gösterelim. Öteleme operatörü sürekli olduğundan, her $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ için $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ olması kullanılırsa her $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $x, y \in \mathbb{R}^d$ için $\|x - y\| < \delta$ olduğunda

$$\|T_x \hat{f} - T_y \hat{f}\|_2 < \varepsilon$$

olacak biçimde $\delta(\varepsilon) > 0$ vardır. Yine $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ olup Plancherel teoreminden

$$\|M_x f - M_y f\|_2 = \|(M_x f - M_y f)^\wedge\|_2 = \|(M_x f)^\wedge - (M_y f)^\wedge\|_2 = \|T_x \hat{f} - T_y \hat{f}\|_2$$

olup aynı $\varepsilon > 0$ ve her $x, y \in \mathbb{R}^d$ için $\|x - y\| < \delta$ olduğunda

$$\|M_x f - M_y f\|_2 < \varepsilon$$

olacak biçimde $\delta > 0$ bulunur. O zaman $\mathbb{R}^d \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d), x \rightarrow M_x f$ operatörü $\mathbb{R}^d$ üzerinde düzgün sürekli olur.

3.5.Sonuç: Zaman – frekans değişimleri $\mathbb{R}^d$ den $L^2(\mathbb{R}^d)$ ye düzgün süreklidir.

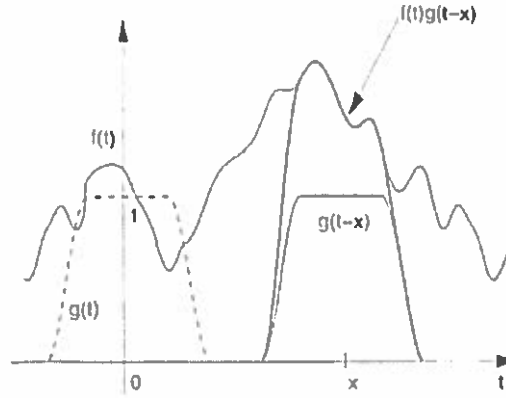
BÖLÜM 4. GABOR DÖNÜŞÜMÜ (KISA ZAMANLI FOURIER DÖNÜŞÜMÜ)

5.1.Tanım: Bir $0 \neq g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ pencere fonksiyonu verilsin. Herhangi bir $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ fonksiyonunun Gabor dönüşümü (kisa zamanlı Fourier dönüşümü),

$$V_g f(x, \omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \overline{g(t-x)} e^{-2\pi i t \cdot \omega} dt, \quad x, \omega \in \mathbb{R}^d$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer g desteğinin merkezi başlangıç noktasında olan kompakt destekli bir f fonksiyonunun Gabor dönüşümü x merkezli komşuluktaki f fonksiyonunun bir diliminin Fourier dönüşümüdür. İşaret analizinde $\mathbb{R}^{2d}$ ye zaman – frekans düzlemi, Fizikte ise faz uzayı denir[4].



Şekil 4.1.

Gabor dönüşümü f fonksiyonuna göre doğrusal ve g fonksiyonuna göre de eşlenik doğrusaldır. Gerçekten her $f, g, h \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$V_g(\alpha f + \beta h)(x, \omega) = \int_{\mathbb{R}^d} (\alpha f + \beta h)(t) \cdot \overline{g(t-x)} \cdot e^{-2\pi i t \cdot \omega} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^d} (\alpha f)(t) \overline{g(t-x)} \cdot e^{-2\pi i t \omega} dt + \int_{\mathbb{R}^d} (\beta h)(t) \overline{g(t-x)} \cdot e^{-2\pi i t \omega} dt \\
&= \alpha \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \overline{g(t-x)} \cdot e^{-2\pi i t \omega} dt + \beta \int_{\mathbb{R}^d} h(t) \overline{g(t-x)} \cdot e^{-2\pi i t \omega} dt \\
&= \alpha V_g f(x, \omega) + \beta V_g h(x, \omega)
\end{aligned}$$

olur. Şimdi de g fonksiyonuna göre eşlenik doğrusal olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned}
V_{(\alpha h + \beta g)} f(x, \omega) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{(\alpha h + \beta g)(t-x)} \cdot e^{-2\pi i t \omega} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \cdot \overline{\alpha h(t-x)} \cdot e^{-2\pi i t \omega} dt + \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{\beta g(t-x)} e^{-2\pi i t \omega} dt \\
&= \bar{\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{h(t-x)} e^{-2\pi i t \omega} dt + \bar{\beta} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{g(t-x)} e^{-2\pi i t \omega} dt \\
&= \bar{\alpha} V_h f(x, \omega) + \bar{\beta} V_g f(x, \omega)
\end{aligned}$$

bulunur.

4.2. Teorem Eğer $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ise $V_g f$ dönüşümü, $\mathbb{R}^{2d}$ üzerinde düzgün sürekli olup aşağıdaki eşitlikler sağlanır[4].

- a) $V_g f(x, \omega) = (f \cdot T_x \bar{g})^\wedge(\omega),$
- b) $V_g f(x, \omega) = \langle f, M_\omega T_x g \rangle,$
- c) $V_g f(x, \omega) = \langle \hat{f}, T_\omega M_{-x} \hat{g} \rangle,$
- d) $V_g f(x, \omega) = e^{-2\pi i x \omega} \cdot (\hat{f} \cdot T_\omega \bar{\hat{g}})^\wedge(-x),$
- e) $V_g f(x, \omega) = e^{-2\pi i x \omega} V_{\hat{g}} \hat{f}(\omega, -x),$
- f) $V_g f(x, \omega) = e^{-2\pi i x \omega} (f * M_\omega g^*)(x),$
- g) $V_g f(x, \omega) = (\hat{f} * M_{-x} \hat{g}^*)(\omega),$

$$h) \quad V_g f(x, \omega) = e^{-\pi i x \omega} \int_{\mathbb{R}^d} f\left(t + \frac{x}{2}\right) \bar{g}\left(t - \frac{x}{2}\right) e^{-2\pi i t \omega} dt.$$

İspat:

Herhangi $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. Her $(x, \omega), (u, s) \in \mathbb{R}^{2d}$ için $\|(x, \omega) - (u, s)\| < \delta$ olsun. O halde , karakter ve öteleme operatörünün sürekliliği ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & |V_g f(x, \omega) - V_g f(u, s)| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \cdot \overline{g(t-x)} \cdot e^{-2\pi i t \omega} dt - \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \cdot \overline{g(t-u)} \cdot e^{-2\pi i t s} dt \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} M_{-\omega} f(t) \cdot T_x \overline{g(t)} dt - \int_{\mathbb{R}^d} M_{-s} f(t) \cdot T_u \overline{g(t)} dt \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} (M_{-\omega} f(t) \cdot T_x \overline{g(t)} - M_{-s} f(t) \cdot T_u \overline{g(t)}) dt \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} (M_{-\omega} f(t) \cdot T_x \overline{g(t)} - M_{-s} f(t) \cdot T_u \overline{g(t)} + M_{-\omega} f(t) \cdot T_u \overline{g(t)} - M_{-\omega} f(t) \cdot T_u \overline{g(t)}) dt \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} M_{-\omega} f(t) \cdot (T_x \overline{g(t)} - T_u \overline{g(t)}) dt - \int_{\mathbb{R}^d} T_u \overline{g(t)} \cdot (M_{-\omega} f(t) - M_{-s} f(t)) dt \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |M_{-\omega} f(t)| \cdot |T_x \overline{g(t)} - T_u \overline{g(t)}| dt + \int_{\mathbb{R}^d} |T_u \overline{g(t)}| \cdot |M_{-\omega} f(t) - M_{-s} f(t)| dt \\ &\leq \|M_{-\omega} f\|_2 \cdot \|T_x \bar{g} - T_u \bar{g}\|_2 + \|T_u \bar{g}\|_2 \cdot \|M_{-\omega} f - M_{-s} f\|_2 \\ &< \|f\|_2 \cdot \frac{\varepsilon}{2\|f\|_2} + \|g\|_2 \cdot \frac{\varepsilon}{2\|g\|_2} = \varepsilon \end{aligned}$$

a) Her $x, \omega \in \mathbb{R}^d$ için,

$$\begin{aligned}
 V_g f(x, \omega) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \cdot \overline{g(t-x)} \cdot e^{-2\pi i t \omega} dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \cdot T_x \bar{g}(t) \cdot e^{-2\pi i t \omega} dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} (f \cdot T_x \bar{g})(t) \cdot e^{-2\pi i t \omega} dt \\
 &= (f \cdot T_x \bar{g})^\wedge(\omega)
 \end{aligned}$$

bulunur.

b) Yine herhangi $x, \omega \in \mathbb{R}^d$ alalım,

$$\begin{aligned}
 V_g f(x, \omega) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \cdot \overline{g(t-x)} \cdot e^{-2\pi i t \omega} dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \cdot \overline{g(t-x)} \cdot \overline{e^{2\pi i t \omega}} dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \cdot \overline{g(t-x)} \cdot e^{2\pi i t \omega} dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \cdot \overline{T_x g(t)} \cdot e^{2\pi i t \omega} dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \cdot \overline{M_\omega T_x g(t)} dt \\
 &= \langle f, M_\omega T_x g \rangle
 \end{aligned}$$

olur.

c) $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ olması kullanılırsa, $M_\omega T_x g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ olur. Buradan, Plancherel teoremi kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{f}, T_\omega M_{-x} \hat{g} \rangle &= \langle \hat{f}, e^{2\pi i \omega x} (T_x M_\omega g)^\wedge \rangle \\
 &= e^{-2\pi i \omega x} \cdot \langle \hat{f}, (T_x M_\omega g)^\wedge \rangle \\
 &= e^{-2\pi i \omega x} \cdot \langle f, T_x M_\omega g \rangle \\
 &= e^{-2\pi i \omega x} \cdot \langle f, e^{-2\pi i \omega x} \cdot M_\omega T_x g \rangle \\
 &= e^{-2\pi i \omega x} \cdot e^{2\pi i \omega x} \cdot \langle f, M_\omega T_x g \rangle \\
 &= V_g f(x, \omega)
 \end{aligned}$$

bulunur.

d) Her $x, \omega \in \mathbb{R}^d$ için ,

$$\begin{aligned}
 (\hat{f} \cdot T_\omega \bar{\hat{g}})^\wedge(-x) &= \int_{\mathbb{R}^d} (\hat{f} \cdot T_\omega \bar{\hat{g}})(u) e^{-2\pi i(-x)u} du \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(u) \cdot T_\omega \bar{\hat{g}}(u) \cdot e^{2\pi i x u} du \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(u) \cdot \bar{\hat{g}}(u - \omega) \cdot \overline{e^{-2\pi i x u}} du \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(u) \cdot \overline{\hat{g}(u - \omega) e^{-2\pi i x u}} du \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(u) \cdot \overline{\hat{g}(u - \omega) e^{-2\pi i x u} e^{2\pi i x \omega} \cdot e^{-2\pi i x \omega}} du \\
 &= \overline{e^{-2\pi i x \omega}} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(u) \cdot \overline{\hat{g}(u - \omega) e^{-2\pi i x u} \cdot e^{2\pi i x \omega}} du
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \overline{e^{-2\pi i x \omega}} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(u) \cdot \overline{\hat{g}(u - \omega)} \cdot e^{-2\pi i x(u - \omega)} du \\
&= e^{2\pi i x \omega} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(u) \cdot \overline{T_\omega \cdot M_{-x} \hat{g}(u)} du \\
&= e^{2\pi i x \omega} \cdot \langle \hat{f}, T_\omega M_{-x} \hat{g} \rangle
\end{aligned}$$

olur . Böylece $(\hat{f} \cdot T_\omega \bar{\hat{g}})^\wedge(-x) = e^{2\pi i x \omega} \langle \hat{f}, T_\omega M_{-x} \hat{g} \rangle$ olduğundan ,

$$\langle \hat{f}, T_\omega M_{-x} \hat{g} \rangle = e^{-2\pi i x \omega} \cdot (\hat{f} \cdot T_\omega \bar{\hat{g}})^\wedge(-x)$$

olup

$$V_g f(x, \omega) = e^{-2\pi i x \omega} (\hat{f} \cdot T_\omega \bar{\hat{g}})^\wedge(-x)$$

elde edilir.

e) Eğer (d) şıkkı kullanılırsa, her $x, \omega \in \mathbb{R}^d$ için,

$$\begin{aligned}
V_g f(x, \omega) &= e^{-2\pi i x \omega} (\hat{f} \cdot T_\omega \bar{\hat{g}})^\wedge(-x) \\
&= e^{-2\pi i x \omega} \int_{\mathbb{R}^d} (\hat{f} \cdot \overline{T_\omega \hat{g}})(t) \cdot e^{-2\pi i t(-x)} dt \\
&= e^{-2\pi i x \omega} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t) \cdot \overline{T_\omega \hat{g}(t)} \cdot e^{-2\pi i t(-x)} dt \\
&= e^{-2\pi i x \omega} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t) \cdot \overline{\hat{g}(t - \omega)} \cdot e^{-2\pi i t(-x)} dt \\
&= e^{-2\pi i x \omega} \cdot V_{\hat{g}} \hat{f}(\omega, -x)
\end{aligned}$$

bulunur.

f) Her $x, \omega \in \mathbb{R}^d$ için,

$$\begin{aligned}
e^{-2\pi i x \omega} (f * M_\omega g^*)(x) &= e^{-2\pi i x \omega} \int_{\mathbb{R}^d} f(u) \cdot M_\omega g^*(x - u) \cdot du \\
&= e^{-2\pi i x \omega} \int_{\mathbb{R}^d} f(u) \cdot g^*(x - u) \cdot e^{2\pi i (x - u) \omega} du \\
&= e^{-2\pi i x \omega} \int_{\mathbb{R}^d} f(u) \cdot \overline{g(u - x)} \cdot e^{2\pi i x \omega} \cdot e^{-2\pi i u \omega} du \\
&= e^{-2\pi i x \omega} \cdot e^{2\pi i x \omega} \int_{\mathbb{R}^d} f(u) \cdot \overline{g(u - x)} \cdot e^{-2\pi i u \omega} du \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(u) \cdot \overline{g(u - x)} \cdot e^{-2\pi i u \omega} du \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(u) \cdot \overline{T_x g(u)} \cdot e^{2\pi i u \omega} \cdot du \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(u) \cdot \overline{(T_x g)(u)} \cdot e^{2\pi i u \omega} du \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(u) \cdot \overline{(M_\omega T_x g)(u)} du \\
&= \langle f, M_\omega T_x g \rangle \\
&= V_g f(x, \omega)
\end{aligned}$$

bulunur.

g) Eğer (d) şıkkı kullanılırsa, her $x, \omega \in \mathbb{R}^d$ için,

$$(\hat{f} * M_{-x} \hat{g}^*)(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t) \cdot M_{-x} \hat{g}^*(\omega - t) \cdot dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t) \cdot \hat{g}^*(\omega - t) \cdot e^{2\pi i(\omega - t)(-x)} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t) \cdot \hat{g}^*(\omega - t) \cdot e^{2\pi i\omega(-x)} \cdot e^{-2\pi it(-x)} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t) \cdot \overline{\hat{g}(-(\omega - t))} \cdot e^{-2\pi i\omega x} \cdot e^{-2\pi it(-x)} dt \\
&= e^{-2\pi i\omega x} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t) \cdot \overline{\hat{g}(t - \omega)} \cdot e^{-2\pi it(-x)} dt \\
&= e^{-2\pi i\omega x} \int_{\mathbb{R}^d} (\hat{f} \cdot \overline{T_\omega \hat{g}})(t) \cdot e^{-2\pi it(-x)} dt \\
&= e^{-2\pi i\omega x} \cdot (\hat{f} \cdot \overline{T_\omega \hat{g}})^\wedge(-x) \\
&= V_g f(x, \omega)
\end{aligned}$$

h) Her $x, \omega \in \mathbb{R}^d$ için eğer $t + \frac{x}{2} = u$ denirse $dt = du$ olur. Buradan,

$$\begin{aligned}
&= e^{-\pi i x \omega} \int_{\mathbb{R}^d} f\left(t + \frac{x}{2}\right) \cdot \bar{g}\left(t - \frac{x}{2}\right) \cdot e^{-2\pi i t \omega} dt \\
&= e^{-\pi i x \omega} \int_{\mathbb{R}^d} f\left(u - \frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) \cdot \bar{g}\left(u - \frac{x}{2} - \frac{x}{2}\right) \cdot e^{-2\pi i(u - \frac{x}{2})\omega} du \\
&= e^{-\pi i x \omega} \int_{\mathbb{R}^d} f(u) \cdot \bar{g}(u - x) \cdot e^{-2\pi i u \omega} \cdot e^{2\pi i \frac{x}{2} \omega} du \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(u) \cdot \bar{g}(u - x) \cdot e^{-2\pi i u \omega} \cdot e^{-\pi i x \omega} e^{\pi i x \omega} du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(u) \cdot \bar{g}(u - x) \cdot e^{-2\pi i u \omega} \cdot du \\
&= V_g f(x, \omega)
\end{aligned}$$

Zaman-frekans analizi f ve $\hat{f}$ nın bilgisini birleştiren gösterimleri elde etmeye çalışır. Amaç her iki bilgiyi eş zamanlı olacak şekilde elde etmektir. Bu sebeple,

$$V_g f(x, \omega) = e^{-2\pi i x \omega} \cdot V_{\bar{g}} \hat{f}(\omega, -x)$$

eşitliği zaman-frekans analizinin temel eşitliğidir.

4.3.Tanım: Her $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ve her $x, t \in \mathbb{R}^d$ için f ve g fonksiyonlarının tensör çarpımı,

$$f \otimes g(x, t) = f(x) \cdot g(t)$$

biçiminde tanımlanır[4].

4.4.Tanım: F fonksiyonu $\mathbb{R}^{2d}$ üzerinde tanımlı herhangi bir fonksiyon olmak üzere $T_a F(x, t)$ dönüşümü her $x, t \in \mathbb{R}^d$ için,

$$T_a F(x, t) = F(t, t - x)$$

biçiminde tanımlanır[4].

4.5.Tanım: F fonksiyonu $\mathbb{R}^{2d}$ üzerinde tanımlı herhangi bir fonksiyon olmak üzere bu fonksiyonun kısmi Fourier dönüşümü de her $x, t \in \mathbb{R}^d$ için,

$$F_2 F(x, t) = \int_{\mathbb{R}^d} F(x, \omega) \cdot e^{-2\pi i t \omega} \cdot d\omega$$

biçiminde ifade edilir[4].

4.6.Teorem: Her $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ için,

$$V_g f = F_2 T_\alpha (f \otimes \bar{g})$$

eşitliği vardır[4].

İspat: Her $x, \omega \in \mathbb{R}^d$ için,

$$\begin{aligned} V_g f(x, \omega) &= (f, T_x \bar{g})^\wedge(\omega) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (f, T_x \bar{g})(t) \cdot e^{-2\pi i t \omega} \cdot dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \cdot \bar{g}(t - x) \cdot e^{-2\pi i t \omega} \cdot dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f \otimes \bar{g}(t, t - x) \cdot e^{-2\pi i t \omega} \cdot dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} T_\alpha (f \otimes \bar{g})(x, t) \cdot e^{-2\pi i t \omega} \cdot dt \\ &= F_2 T_\alpha (f \otimes \bar{g}) \end{aligned}$$

4.7.Teorem: $V_g f$ dönüşümü tanımlı olsun. Her $x, u, \omega, \mu \in \mathbb{R}^d$ için,

$$V_g (T_u M_\mu f)(x, \omega) = e^{-2\pi i u \omega} \cdot V_g f(x - u, \omega - \mu)$$

eşitliği vardır. Bundan başka,

$$|V_g (T_u M_\mu f)(x, \omega)| = |V_g f(x - u, \omega - \mu)|$$

olur[4].

İspat: Özellikle $M_{-\mu} T_{-u} M_\omega T_x = e^{2\pi i u \omega} \cdot M_{\omega - \mu} T_{x - u}$ bağıntısını ispat içerisinde kullanacağımızdan dolayı bu ifadeyi ispatlayalım;

$$M_{-\mu} T_{-u} M_\omega T_x f(t) = e^{-2\pi i t \mu} \cdot (T_{-u} M_\omega T_x f)(t)$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-2\pi i t \mu} \cdot (M_\omega T_x f)(t + u) \\
&= e^{-2\pi i t \mu} \cdot e^{2\pi i t(t+u)\omega} \cdot T_x f(t + u) \\
&= e^{-2\pi i t \mu} \cdot e^{2\pi i u \omega} \cdot e^{2\pi i t \omega} \cdot f(t + u - x) \\
&= e^{2\pi i u \omega} \cdot e^{2\pi i t(\omega - \mu)} \cdot f(t - (x - u)) \\
&= e^{2\pi i u \omega} \cdot M_{\omega - \mu} T_{x-u} f(t) \tag{4.1.}
\end{aligned}$$

bulunur. Şimdi ise hipotezin ispatına geçebiliriz. Her $x, u, \omega, \mu \in \mathbb{R}^d$ ve her $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ için,

$$\begin{aligned}
V_g(T_u M_\mu f)(x, \omega) &= \langle T_u M_\mu f, M_\omega T_x g \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} T_u M_\mu f(t) \cdot \overline{M_\omega T_x g(t)} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} M_\mu f(t - u) \cdot \overline{M_\omega T_x g(t)} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i \mu(t-u)} \cdot f(t - u) \cdot \overline{M_\omega T_x g(t)} dt
\end{aligned}$$

Eğer $t - u = z$ denirse $dt = dz$ ve $t = z + u$ olup,

$$\begin{aligned}
V_g(T_u M_\mu f)(u, \omega) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i \mu z} \cdot f(z) \cdot \overline{M_\omega T_x g(z + u)} dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(z) \cdot \overline{e^{-2\pi i \mu z} \cdot T_{-u} M_\omega T_x g(z)} dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(z) \cdot \overline{M_{-\mu} T_{-u} M_\omega T_x g(z)} dz \\
&= \langle f, M_{-\mu} T_{-u} M_\omega T_x g \rangle
\end{aligned}$$

olur. Bu ifadede (4.1.) eşitliği yazılır ise;

$$\begin{aligned}
V_g(T_u M_\mu f)(x, \omega) &= \langle f, M_{-\mu} T_{-u} M_\omega T_x g \rangle \\
&= \langle f, e^{2\pi i u \omega} \cdot M_{\omega - \mu} T_{x - u} g \rangle \\
&= e^{-2\pi i u \omega} \cdot \langle f, M_{\omega - \mu} T_{x - u} g \rangle \\
&= e^{-2\pi i u \omega} V_g f(x - u, \omega - \mu)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan da,

$$\begin{aligned}
|V_g(T_u M_\mu f)(x, \omega)| &= |e^{-2\pi i u \omega} \cdot V_g f(x - u, \omega - \mu)| \\
&= |e^{-2\pi i u \omega}| \cdot |V_g f(x - u, \omega - \mu)| \\
&= |V_g f(x - u, \omega - \mu)|
\end{aligned}$$

elde edilir.

4.8. Teorem: $L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ uzayı $L^2(\mathbb{R}^d)$ uzayında her yerde yoğundur.

İspat: Herhangi bir $f \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ için $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ve $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ olup,

$$\begin{aligned}
\|f\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \cdot |f(x)| dx \\
&\leq \|f\|_\infty \cdot \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx \\
&= \|f\|_\infty \cdot \|f\|_1 < \infty
\end{aligned}$$

olduğundan $L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ bulunur. Yine,

$$C_c(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d) \text{ ve } C_c(\mathbb{R}^d) \subset L^\infty(\mathbb{R}^d)$$

olduğundan

$$C_c(\mathbb{R}^d) \subset L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d)$$

yazılır. Buradan,

$$\overline{C_c(\mathbb{R}^d)} \subset \overline{L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)} \subset \overline{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

olup $\overline{C_c(\mathbb{R}^d)} = L^2(\mathbb{R}^d)$ ve $\overline{L^2(\mathbb{R}^d)} = L^2(\mathbb{R}^d)$ olduğu için,

$$\overline{L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)} = L^2(\mathbb{R}^d)$$

elde edilir.

4.9. Teorem (Diklik Bağıntısı):

Her $f_1, f_2, g_1, g_2 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ve $V_{g_j} f_j \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$, ($j = 1, 2$), olup

$$\langle V_{g_1} f_1, V_{g_2} f_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} = \langle f_1, f_2 \rangle \langle \overline{g_1}, \overline{g_2} \rangle$$

eşitliği vardır[4].

İspat:

$g_j \in L^1 \cap L^\infty \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ ve $f_j(\mathbb{R}^d)$, ($j = 1, 2$) olsun. $j = 1, 2$ için $f_j T_x \overline{g_j} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ olur. Gerçekten;

$$\begin{aligned} \|f_j T_x \overline{g_j}\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} |f_j(y) \cdot T_x \overline{g_j}(y)|^2 dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |f_j(y)|^2 \cdot |T_x \overline{g_j}(y)|^2 dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |f_j(y)|^2 \cdot |g_j(y-x)|^2 dy \end{aligned}$$

olur. Burada $y-x = u$ değişken değiştirmesi yapılırsa;

$$\begin{aligned} \|f_j T_x \overline{g_j}\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} |f_j(u+x)|^2 \cdot |g_j(u)|^2 du \\ &\leq \|g_j\|_\infty^2 \cdot \int_{\mathbb{R}^d} |f_j(u+x)|^2 du \end{aligned}$$

$$= \|g_j\|_{\infty}^2 \cdot \|T_{-x}f_j\|_2^2 = \|g_j\|_{\infty}^2 \cdot \|f_j\|_2^2$$

bulunur. Böylece $j = 1, 2$ için $g_j \in L^1 \cap L^{\infty}(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ ve $f_j \in L^2(\mathbb{R}^d)$

olduğundan $f_j T_x \bar{g}_j \in L^2(\mathbb{R}^d)$ olur.

Eğer Fubini teoremi ve Parseval formülü kullanılırsa;

$$\begin{aligned} \langle V_{g_1} f_1, V_{g_2} f_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= \iint_{\mathbb{R}^{2d}} V_{g_1} f_1(x, \omega) \cdot \overline{V_{g_2} f_2(x, \omega)} d\omega dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} (f_1 T_x \bar{g}_1)^{\wedge}(\omega) \cdot \overline{(f_2 T_x \bar{g}_2)^{\wedge}(\omega)} d\omega \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \langle (f_1 T_x \bar{g}_1)^{\wedge}, (f_2 T_x \bar{g}_2)^{\wedge} \rangle dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \langle f_1 T_x \bar{g}_1, f_2 T_x \bar{g}_2 \rangle dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f_1(t) \overline{f_2(t)} \cdot g_2(t-x) \overline{g_1(t-x)} dt \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f_1(t) \cdot \overline{f_2(t)} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^d} g_2(t-x) \cdot \overline{g_1(t-x)} dx \right) dt \\ &= \langle f_1, f_2 \rangle \langle \bar{g}_1, \bar{g}_2 \rangle \end{aligned}$$

Herhangi $g_j \in L^2(\mathbb{R}^d)$ alalım; $g_1 \in L^1 \cap L^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ sabitleyelim.

$$\begin{aligned} T: L^1 \cap L^{\infty}(\mathbb{R}^d) &\rightarrow \mathcal{L}, T(g_2) = \langle V_{g_1} f_1, V_{g_2} f_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} \\ &= \langle f_1, f_2 \rangle \langle \bar{g}_1, \bar{g}_2 \rangle \end{aligned}$$

fonksiyonu sınırlı ve doğrusaldır. Gerçekten;

Herhangi $g_1, g_2 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ve her $\alpha, \beta \in K$ için,

$$\begin{aligned}
T(\alpha g_1 + \beta g_2) &= \langle V_{g_1} f_1, V_{(\alpha g_1 + \beta g_2)} f_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} \\
&= \langle f_1, f_2 \rangle \cdot \overline{\langle g_1, \alpha g_2 + \beta g_2 \rangle} \\
&= \langle f_1, f_2 \rangle \cdot (\overline{\langle g_1, \alpha g_2 \rangle} + \overline{\langle g_1, \beta g_2 \rangle}) \\
&= \langle f_1, f_2 \rangle \cdot (\alpha \overline{\langle g_1, g_2 \rangle} + \beta \overline{\langle g_1, g_2 \rangle}) \\
&= \alpha \langle f_1, f_2 \rangle \cdot \overline{\langle g_1, g_2 \rangle} + \beta \langle f_1, f_2 \rangle \cdot \overline{\langle g_1, g_2 \rangle} \\
&= \alpha \langle V_{g_1} f_1, V_{g_2} f_2 \rangle + \beta \langle V_{g_1} f_1, V_{g_2} f_2 \rangle \\
&= \alpha T(g_2) + \beta T(g_2)
\end{aligned}$$

Şimdi de T nin sınırlı olduğunu gösterelim;

Herhangi $g_2 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ için Cauchy – Schwartz eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
|T(g_2)| &= |\langle f_1, f_2 \rangle| \cdot |\overline{\langle g_1, g_2 \rangle}| \\
&\leq \|f_1\|_2 \cdot \|f_2\|_2 \cdot \|g_1\|_2 \cdot \|g_2\|_2
\end{aligned}$$

olup

$$C = \|f_1\|_2 \cdot \|f_2\|_2 \cdot \|g_1\|_2$$

denirse

$$|T(g_2)| \leq C \|g_2\|_2$$

bulunur. Yine aynı ispat tekniği ile $g_2 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ fonksiyonunu sabitleyip keyfi $f_1, f_2, g_1 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ için T nin eşlenik doğrusal ve sınırlı olduğu gösterilir. T fonksiyonu $L^2(\mathbb{R}^d)$ nin yoğun bir alt uzayında sınırlı ve doğrusaldır. Yoğunluk prensibinden T yi $L^2(\mathbb{R}^d)$ uzayına sınırlı olacak şekilde genişletebiliriz. Ayrıca;

$$\begin{aligned}
\|V_{g_j} f_j\|_2^2 &= \langle V_{g_j} f_j, V_{g_j} f_j \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} \\
&= \langle f_j, f_j \rangle \cdot \overline{\langle g_j, g_j \rangle} \\
&= \|f_j\|_2^2 \cdot \|g_j\|_2^2
\end{aligned}$$

olup $j = 1, 2$ için $f_j, g_j \in L^2(\mathbb{R}^d)$ olduğundan $V_{g_j} f_j \in L^2(\mathbb{R}^d)$ elde edilir.

4.10. Teorem: Eğer $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ise

$$\|V_g f\|_2 = \|f\|_2 \|g\|_2$$

eşitliği vardır. Özel olarak $\|g\|_2 = 1$ alınırsa $\|f\|_2 = \|V_g f\|_2$ olur[4].

İspat: Eğer 4.9. Teorem kullanılırsa; Her $f, g \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$ için,

$$\begin{aligned} \|V_g f\|_2^2 &= \langle V_g f, V_g f \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} \\ &= \langle f, f \rangle \cdot \overline{\langle g, g \rangle} \\ &= \|f\|_2^2 \cdot \|g\|_2^2 \end{aligned}$$

olup $\|V_g f\|_2 = \|f\|_2 \|g\|_2$ elde edilir. Özel olarak $\|g\|_2 = 1$ alınırsa $\|V_g f\|_2 = \|f\|_2$ bulunur.

4.11. Teorem: $g, \gamma \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ve $g, \gamma \neq 0$ olsun. Eğer $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ise

$$f = \frac{1}{(\gamma, g)} \iint_{\mathbb{R}^{2d}} V_g f(x, \omega) \cdot M_\omega T_x \gamma d\omega dx$$

eşitliği vardır[4].

İspat: $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ olduğunda

$$\|V_g f\|_2 = \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 < \infty$$

olup, 4.10. Teorem den $V_g f \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$ olur. Eğer vektör değerli integrali alınırsa;

$$\ell(h) = \iint_{\mathbb{R}^{2d}} V_g f(x, \omega) \cdot \langle h, \overline{M_\omega T_x g} \rangle dx d\omega$$

operatörü $L^2(\mathbb{R}^d)$ de sınırlı olur. Gerçekten Cauchy – Schwartz eşitsizliğinden;

$$\begin{aligned} \ell(h) &\leq \|V_g f\|_2 \cdot \|V_g h\|_2 \\ &= \|V_g f\|_2 \cdot \|g\|_2 \cdot \|h\|_2 \end{aligned}$$

yazılır. Böylece ℓ operatörü,

$$\tilde{f} = \frac{1}{\langle \gamma, g \rangle} \iint_{\mathbb{R}^{2d}} V_g f(x, \omega) \cdot M_{\omega} T_x \gamma d\omega dx \in L^2(\mathbb{R}^d) \text{ ve } \|\tilde{f}\|_2 \leq \|V_g f\|_2 \cdot \|g\|_2$$

olacak biçimde $\ell(h) = \langle \tilde{f}, h \rangle$ eşitliğini sağlayan bir tek $\tilde{f}$ tanımlar. O halde

$$\begin{aligned} \ell(h) &= \langle \tilde{f}, h \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f} \cdot \bar{h} \cdot dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{\langle \gamma, g \rangle} \iint_{\mathbb{R}^{2d}} V_g f(x, \omega) \cdot M_{\omega} T_x \gamma d\omega dx \right) \overline{h(t)} dt \\ &= \iint_{\mathbb{R}^{2d}} \frac{1}{\langle \gamma, g \rangle} V_g f(x, \omega) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^d} \overline{h(t)} \cdot M_{\omega} T_x \gamma dt \right) d\omega dx \\ &= \iint_{\mathbb{R}^{2d}} \frac{1}{\langle \gamma, g \rangle} V_g f(x, \omega) \cdot \langle M_{\omega} T_x \gamma, h \rangle d\omega dx \\ &= \frac{1}{\langle \gamma, g \rangle} \cdot \langle V_g f, V_g h \rangle \\ &= \langle f, h \rangle \end{aligned}$$

olup $\tilde{f} = f$ bulunur.

BÖLÜM 5. WIGNER DÖNÜŞÜMÜ VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde zaman – frekans gösterimlerinin matematiksel yorumunda önemli bir yere sahip olan Wigner dönüşümü ve bazı özellikleri verilmiştir.

5.1.Tanım: $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ olmak üzere her $x, \omega \in \mathbb{R}^d$ için

$$Wf(x, \omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f\left(x + \frac{t}{2}\right) \cdot \overline{f\left(x - \frac{t}{2}\right)} \cdot e^{-2\pi i \omega t} \cdot dt$$

biçiminde tanımlanır[4].

5.2.Tanım: $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ olmak üzere her $x, \omega \in \mathbb{R}^d$ için

$$W(f, g)(x, \omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f\left(x + \frac{t}{2}\right) \cdot \overline{g\left(x - \frac{t}{2}\right)} \cdot e^{-2\pi i \omega t} dt$$

biçiminde tanımlanan $W(f, g)$ dönüşümüne f, g fonksiyonlarının Wigner dönüşümü denir[4].

5.3.Teorem: Her $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ için $Ig(x) = g(-x)$ olmak üzere

$$W(f, g)(x, \omega) = 2^d \cdot e^{4\pi i \omega t} \cdot V_{Ig}f(2x, 2\omega)$$

eşitliği vardır[4].

İspat: Eğer $u = x + \frac{t}{2}$ dönüşümü yapılırsa, $du = \frac{dt}{2^d}$ ve $\frac{t}{2} = u - x$ olup,

$$\begin{aligned} W(f, g)(x, \omega) &= \int_{\mathbb{R}^d} f\left(x + \frac{t}{2}\right) \cdot \overline{g\left(x - \frac{t}{2}\right)} \cdot e^{-2\pi i \omega t} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(u) \cdot \overline{g(x - u + x)} \cdot e^{-2\pi i (2u - 2x)\omega} 2^d du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(u) \cdot \overline{g(2x - u)} \cdot e^{-4\pi i l(u-x)\omega} 2^d du \\
&= 2^d \int_{\mathbb{R}^d} f(u) \cdot \overline{g(-(u - 2x))} \cdot e^{-4\pi i u\omega} \cdot e^{4\pi i x\omega} du \\
&= 2^d \cdot e^{4\pi i x\omega} \int_{\mathbb{R}^d} f(u) \cdot \overline{lg(u - 2x)} \cdot e^{-4\pi i u\omega} du \\
&= 2^d \cdot e^{4\pi i x\omega} \int_{\mathbb{R}^d} f(u) \cdot \overline{lg(u - 2x)} e^{4\pi i u\omega} \cdot du \\
&= 2^d \cdot e^{4\pi i x\omega} \int_{\mathbb{R}^d} f(u) \cdot \overline{T_{2x}lg(u)} e^{4\pi i u\omega} \cdot du \\
&= 2^d \cdot e^{4\pi i x\omega} \int_{\mathbb{R}^d} f(u) \cdot \overline{M_{2\omega} T_{2x}lg(u)} \cdot du \\
&= 2^d \cdot e^{4\pi i x\omega} \cdot \langle f, M_{2\omega} T_{2x}lg \rangle \\
&= 2^d \cdot e^{4\pi i x\omega} \cdot V_{lg}f(2x, 2\omega)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece 5.3. Teoremde verilen bağıntı sayesinde Gabor dönüşümüne ait olan çoğu özelliğe Wigner dönüşümünde sahiptir. Bu nedenle Wigner dönüşümü zaman – frekans analizi için önemli bir dönüşüm olduğu görülür.

5.4. Teorem $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ olmak üzere Wigner dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahiptir;

a) $W(f, g)$ dönüşümü $\mathbb{R}^{2d}$ uzayında düzgün süreklidir ve

$$\|W(f, g)\|_{\infty} \leq 2^d \cdot \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$$

eşitliği vardır.

b) $W(f, g) = \overline{W(g, f)}$ olup bundan başka Wf dönüşümü reel değerlidir.

- c) $u, \mu \in \mathbb{R}^d$ olmak üzere Wf dönüşümü kovaryanttır. Diğer bir ifadeyle her $x, \omega \in \mathbb{R}^d$ için

$$W(T_u M_\mu f)(x, \omega) = Wf(x - u, \omega - \mu)$$

eşitliği vardır.

- d) Her $x, \omega \in \mathbb{R}^d$ için $W(\hat{f}, \hat{g})(x, \omega) = W(f, g)(-\omega, x)$ olur.

- e) $f_1, f_2, g_1, g_2 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ olmak üzere

$$\langle W(f_1, g_1), W(f_2, g_2) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} = \langle f_1, f_2 \rangle \cdot \overline{\langle g_1, g_2 \rangle}$$

eşitliği (Moyal eşitliği) vardır.

İspat: Herhangi $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. Her $(x, \omega), (u, s) \in \mathbb{R}^{2d}$ için

$$\|(x, \omega) - (u, s)\| < \delta$$

olsun. Bu durumda zaman – frekans değişkenlerinin sürekliliği ve Cauchy – Schwartz eşitsizliği kullanılırsa; $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & |W(f, g)(x, \omega) - W(f, g)(u, s)| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} f\left(x + \frac{t}{2}\right) \cdot \overline{g\left(x - \frac{t}{2}\right)} \cdot e^{-2\pi i \omega t} dt - \int_{\mathbb{R}^d} f\left(u + \frac{t}{2}\right) \cdot \overline{g\left(u - \frac{t}{2}\right)} \cdot e^{-2\pi i s t} dt \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} f\left(x + \frac{t}{2}\right) \cdot \overline{g\left(x - \frac{t}{2}\right)} \cdot e^{-2\pi i \omega \frac{t}{2}} e^{-2\pi i \omega \frac{t}{2}} dt \right. \\ &\quad \left. - \int_{\mathbb{R}^d} f\left(u + \frac{t}{2}\right) \cdot \overline{g\left(u - \frac{t}{2}\right)} \cdot e^{-2\pi i s \frac{t}{2}} e^{-2\pi i s \frac{t}{2}} dt \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} M_{-\omega} T_{-x} f\left(\frac{t}{2}\right) \cdot M_{-\omega} T_{-x} \bar{g}^*\left(\frac{t}{2}\right) dt - \int_{\mathbb{R}^d} M_{-s} T_{-u} f\left(\frac{t}{2}\right) \cdot M_{-s} T_{-u} \bar{g}^*\left(\frac{t}{2}\right) dt \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_{\mathbb{R}^d} (M_{-\omega} T_{-x} f\left(\frac{t}{2}\right) \cdot M_{-\omega} T_{-x} \bar{g}^*\left(\frac{t}{2}\right) - M_{-s} T_{-u} f\left(\frac{t}{2}\right) \cdot M_{-s} T_{-u} \bar{g}^*\left(\frac{t}{2}\right) \right. \\
&\quad \left. - M_{-\omega} T_{-x} f\left(\frac{t}{2}\right) \cdot M_{-s} T_{-u} \bar{g}^*\left(\frac{t}{2}\right) + M_{-\omega} T_{-x} f\left(\frac{t}{2}\right) \cdot M_{-s} T_{-u} \bar{g}^*\left(\frac{t}{2}\right) \right| dt \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left| M_{-\omega} T_{-x} f\left(\frac{t}{2}\right) \right| \cdot \left| M_{-\omega} T_{-x} \bar{g}^*\left(\frac{t}{2}\right) - M_{-s} T_{-u} \bar{g}^*\left(\frac{t}{2}\right) \right| dt \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^d} \left| M_{-s} T_{-u} f\left(\frac{t}{2}\right) \right| \cdot \left| M_{-\omega} T_{-x} \bar{g}^*\left(\frac{t}{2}\right) - M_{-s} T_{-u} \bar{g}^*\left(\frac{t}{2}\right) \right| dt
\end{aligned}$$

olup $\frac{t}{2} = y$ denirse

$$\begin{aligned}
&= 2^d \int_{\mathbb{R}^d} |M_{-\omega} T_{-x} f(y)| \cdot |M_{-\omega} T_{-x} \bar{g}^*(y) - M_{-s} T_{-u} \bar{g}^*(y)| dy \\
&\quad + 2^d \int_{\mathbb{R}^d} |M_{-s} T_{-u} f(y)| \cdot |M_{-\omega} T_{-x} \bar{g}^*(y) - M_{-s} T_{-u} \bar{g}^*(y)| dy \\
&= 2^d \|M_{-\omega} T_{-x} f\|_2 \cdot \|M_{-\omega} T_{-x} \bar{g}^* - M_{-s} T_{-u} \bar{g}^*\|_2 \\
&\quad + 2^d \|M_{-s} T_{-u} f\|_2 \cdot \|M_{-\omega} T_{-x} \bar{g}^* - M_{-s} T_{-u} \bar{g}^*\|_2
\end{aligned}$$

yazılır. Eğer zaman – frekans dönüşümlerinin (3.2.Teorem) $L^2(\mathbb{R}^d)$ üzerinde izometri olması kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&|W(f, g)(x, \omega) - W(f, g)(u, s)| \\
&\leq 2^d \|f\|_2 \cdot \|M_{-\omega} T_{-x} \bar{g}^* - M_{-s} T_{-u} \bar{g}^*\|_2 + 2^d \|\bar{g}^*\|_2 \cdot \|M_{-\omega} T_{-x} \bar{g}^* - M_{-s} T_{-u} \bar{g}^*\|_2 \\
&= 2^d \|M_{-\omega} T_{-x} \bar{g}^* - M_{-s} T_{-u} \bar{g}^*\|_2 (\|f\|_2 + \|g\|_2) \\
&< 2^d \frac{\varepsilon}{2^d (\|f\|_2 + \|g\|_2)} \cdot (\|f\|_2 + \|g\|_2) = \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Wigner dönüşümü $\mathbb{R}^{2d}$ üzerinde süreklidir.

a) Herhangi $x, \omega \in \mathbb{R}^d$ için

$$\begin{aligned}
 |W(f, g)(x, \omega)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} f\left(x + \frac{t}{2}\right) \overline{g\left(x - \frac{t}{2}\right)} e^{-2\pi i \omega t} dt \right| \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left| f\left(x + \frac{t}{2}\right) \right| \left| \overline{g\left(x - \frac{t}{2}\right)} \right| |e^{-2\pi i \omega t}| dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| f\left(x + \frac{t}{2}\right) \right| \left| g\left(x - \frac{t}{2}\right) \right| dt
 \end{aligned}$$

olup eğer Cauchy- Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$|W(f, g)(x, \omega)| \leq \left\| f\left(x + \frac{t}{2}\right) \right\|_2 \left\| g\left(x - \frac{t}{2}\right) \right\|_2 \quad (5.1.)$$

yazılır. Buradan $x + \frac{t}{2} = u$ denirse;

$$\begin{aligned}
 \left\| f\left(x + \frac{t}{2}\right) \right\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| f\left(x + \frac{t}{2}\right) \right|^2 dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(u)|^2 2^d du \\
 &= 2^d \|f\|_2^2
 \end{aligned}$$

olup

$$\left\| f\left(x + \frac{t}{2}\right) \right\|_2 = 2^{\frac{d}{2}} \|f\|_2$$

bulunur. Benzer biçimde

$$\left\| g\left(x - \frac{t}{2}\right) \right\|_2 = 2^{\frac{d}{2}} \|g\|_2$$

olup bu ifadeler (5.1.) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$|W(f, g)(x, \omega)| \leq 2^{\frac{d}{2}} \|f\|_2 \cdot 2^{\frac{d}{2}} \|g\|_2$$

$$= 2^d \|f\|_2 \|g\|_2$$

olur. Böylece

$$\|W(f, g)\|_\infty = \operatorname{esssup}_{x, \omega \in \mathbb{R}^d} |W(f, g)(x, \omega)| \leq 2^d \|f\|_2 \|g\|_2$$

elde edilir.

b) Her $(x, \omega) \in \mathbb{R}^{2d}$ için

$$\begin{aligned} W(f, g)(x, \omega) &= \int_{\mathbb{R}^d} f\left(x + \frac{t}{2}\right) \cdot \overline{g\left(x - \frac{t}{2}\right)} \cdot e^{-2\pi i \omega t} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f\left(x + \frac{t}{2}\right)} \cdot g\left(x - \frac{t}{2}\right) e^{2\pi i \omega t} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f\left(x + \frac{t}{2}\right)} \cdot g\left(x - \frac{t}{2}\right) \cdot e^{2\pi i \omega t} dt \end{aligned}$$

Bu son eşitlikte $t = -u$ dönüşümü uygulanırsa $dt = -du$ olup integralde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} W(f, g)(x, \omega) &= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f\left(x - \frac{u}{2}\right)} \cdot g\left(x + \frac{u}{2}\right) \cdot e^{-2\pi i \omega u} \cdot (-du) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f\left(x - \frac{u}{2}\right)} \cdot g\left(x + \frac{u}{2}\right) \cdot e^{-2\pi i \omega u} \cdot du \\ &= \overline{W(g, f)} \end{aligned}$$

bulunur.

c) Herhangi $(x, \omega) \in \mathbb{R}^{2d}$ alalım,

$$\begin{aligned}
& W(T_u M_\mu f)(x, \omega) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} (T_u M_\mu f)\left(x + \frac{t}{2}\right) \cdot \overline{(T_u M_\mu f)\left(x - \frac{t}{2}\right)} e^{-2\pi i \omega t} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} (M_\mu f)\left(x + \frac{t}{2} - u\right) \cdot \overline{(M_\mu f)\left(x - \frac{t}{2} - u\right)} e^{-2\pi i \omega t} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f\left(x + \frac{t}{2} - u\right) e^{2\pi i \left(x + \frac{t}{2} - u\right) \mu} \cdot \overline{f\left(x - \frac{t}{2} - u\right) e^{2\pi i \left(x - \frac{t}{2} - u\right) \mu}} e^{-2\pi i \omega t} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f\left(x + \frac{t}{2} - u\right) \cdot e^{2\pi i \left(x + \frac{t}{2} - u\right) \mu} \cdot \overline{f\left(x - \frac{t}{2} - u\right) e^{-2\pi i \left(x - \frac{t}{2} - u\right) \mu}} \cdot e^{-2\pi i \omega t} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f\left(x + \frac{t}{2} - u\right) \cdot \overline{f\left(x - \frac{t}{2} - u\right)} e^{2\pi i x \mu} e^{2\pi i \left(\frac{t}{2} - u\right) \mu} e^{-2\pi i x \mu} e^{2\pi i \left(\frac{t}{2} + u\right) \mu} e^{-2\pi i \omega t} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f\left(x + \frac{t}{2} - u\right) \cdot \overline{f\left(x - \frac{t}{2} - u\right)} e^{2\pi i \mu t - 2\pi i \omega t} \cdot dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f\left(x + \frac{t}{2} - u\right) \cdot \overline{f\left(x - \frac{t}{2} - u\right)} e^{-2\pi i (\omega - \mu) t} \cdot dt \\
&= Wf(x - u, \omega - \mu)
\end{aligned}$$

elde edilir.

d) Herhangi $(x, \omega) \in \mathbb{R}^{2d}$ alalım. Eğer Parseval eşitsizliği, 5.3. Teorem ve $I\hat{g} = \widehat{I\hat{g}}$ olması kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
W(\hat{f}, \hat{g})(x, \omega) &= 2^d \cdot e^{4\pi i x \omega} \cdot V_{I\hat{g}} \hat{f}(2x, 2\omega) \\
&= 2^d e^{4\pi i x \omega} \langle \hat{f}, M_{2\omega} T_{2x} I\hat{g} \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2^d \cdot e^{4\pi i x \omega} \cdot \langle \hat{f}, (T_{-2\omega} M_{2x} I g)^\wedge \rangle \\
&= 2^d \cdot e^{4\pi i x \omega} \cdot \langle f, T_{-2\omega} M_{2x} I g \rangle \\
&= 2^d e^{4\pi i x \omega} \langle f, e^{-2\pi i (-2\omega) 2x} \cdot M_{2x} T_{-2\omega} I g \rangle \\
&= 2^d e^{4\pi i x \omega} e^{2\pi i (-2\omega) 2x} \langle f, M_{2x} T_{-2\omega} I g \rangle \\
&= 2^d e^{4\pi i x \omega} e^{-8\pi i x \omega} \langle f, M_{2x} T_{-2\omega} I g \rangle \\
&= 2^d e^{-4\pi i x \omega} \langle f, M_{2x} T_{-2\omega} I g \rangle \\
&= W(f, g)(-\omega, x)
\end{aligned}$$

e) $f_1, f_2, g_1, g_2 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ olsun. Eğer 5.3. Teorem kullanılır ve $2x = u$, $2\omega = v$ değişken değiştirmesi yapılırsa $2^d dx = du$, $dx = \frac{du}{2^d}$ bulunur.

$$\begin{aligned}
&\langle W(f_1, g_1), W(f_2, g_2) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} \\
&= \iint_{\mathbb{R}^{2d}} W(f_1, g_1)(x, \omega) \cdot \overline{W(f_2, g_2)(x, \omega)} dx \cdot d\omega \\
&= \iint_{\mathbb{R}^{2d}} 2^d e^{4\pi i x \omega} V_{I_{g_1}} f_1(2x, 2\omega) \cdot \overline{2^d e^{4\pi i x \omega} V_{I_{g_2}} f_2(2x, 2\omega)} dx d\omega \\
&= 2^{2d} \cdot \iint_{\mathbb{R}^{2d}} V_{I_{g_1}} f_1(2x, 2\omega) \cdot \overline{V_{I_{g_2}} f_2(2x, 2\omega)} dx \cdot d\omega \\
&= 2^{2d} \iint_{\mathbb{R}^{2d}} V_{I_{g_1}} f_1(u, v) \cdot \overline{V_{I_{g_2}} f_2(u, v)} 2^{-d} 2^{-d} du dv \\
&= 2^{2d} 2^{-2d} \iint_{\mathbb{R}^{2d}} V_{I_{g_1}} f_1(u, v) \overline{V_{I_{g_2}} f_2(u, v)} du dv
\end{aligned}$$

bulunur. Bu son ifadede eğer diklik bağıntısı (4.9. Teorem) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\langle W(f_1, g_1), W(f_2, g_2) \rangle_{L^2} &= \iint_{\mathbb{R}^{2d}} V_{I_{g_1}} f_1(u, v) \overline{V_{I_{g_2}} f_2(u, v)} du dv \\
&= \langle f_1, f_2 \rangle \cdot \overline{\langle I_{g_1}, I_{g_2} \rangle} \quad (5.2.)
\end{aligned}$$

yazılır. Öte yandan $-t = u$ değişken değiştirmesi aşağıdaki ifadede yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\langle I g_1, I g_2 \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} I g_1(t) \overline{I g_2(t)} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} g_1(-t) \overline{g_2(-t)} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} g_1(u) \overline{g_2(u)} du \\
&= \langle g_1, g_2 \rangle
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece bu son ifade (5.2.) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\langle W(f_1, g_1), W(f_2, g_2) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} &= \langle f_1, f_2 \rangle \overline{\langle I g_1, I g_2 \rangle} \\
&= \langle f_1, f_2 \rangle \overline{\langle g_1, g_2 \rangle}
\end{aligned}$$

elde edilir.

5.5.Tanım: $F, \mathbb{R}^{2d}$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere bu fonksiyonun simetrik koordinat dönüşümü

$$T_s F(x, t) = F\left(x + \frac{t}{2}, x - \frac{t}{2}\right)$$

biçiminde tanımlanır[4].

5.6.Teorem: $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ olmak üzere

$$W(f, g) = F_2 T_s(f \otimes \bar{g})$$

eşitliği vardır[4].

İspat: Herhangi bir $(x, \omega) \in \mathbb{R}^{2d}$ verilsin,

$$F_2 T_s(f \otimes \bar{g})(x, \omega) = \int_{\mathbb{R}^d} T_s(f \otimes \bar{g})(x, t) \cdot e^{-2\pi i \omega t} \cdot dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^d} (f \otimes \bar{g}) \left(x + \frac{t}{2}, x - \frac{t}{2} \right) \cdot e^{-2\pi i \omega t} \cdot dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f \left(x + \frac{t}{2} \right) \cdot \bar{g} \left(x - \frac{t}{2} \right) \cdot e^{-2\pi i \omega t} \cdot dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f \left(x + \frac{t}{2} \right) \cdot \overline{g \left(x - \frac{t}{2} \right)} \cdot e^{-2\pi i \omega t} \cdot dt \\
&= W(f, g)(x, \omega)
\end{aligned}$$

bulunur.

5.7.Tanım: $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ olmak üzere Af fonksiyonu

$$Af(x, \omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f\left(t + \frac{x}{2}\right) \overline{f\left(t - \frac{x}{2}\right)} e^{-2\pi i \omega t} dt$$

biçiminde tanımlanır[4].

5.8. Tanım: $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ olmak üzere belirsizlik fonksiyonu

$$A(f, g)(x, \omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f\left(t + \frac{x}{2}\right) \overline{g\left(t - \frac{x}{2}\right)} e^{-2\pi i \omega t} dt$$

biçiminde tanımlanır[4].

3.2. Teorem den

$$Af(x, \omega) = e^{\pi i x \omega} \cdot V_f f(x, \omega)$$

ve

$$A(f, g)(x, \omega) = e^{\pi i x \omega} \cdot V_g f(x, \omega)$$

eşitlikleri yazılır. Bununla birlikte

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{R}^{2d}} |Af(x, \omega)|^2 dx d\omega &= \langle Af(x, \omega), Af(x, \omega) \rangle_{L^2} \\
&= \langle e^{\pi i \omega x} \cdot V_f f, e^{\pi i \omega x} V_f f \rangle_{L^2} \\
&= e^{\pi i \omega x} \cdot e^{-\pi i \omega x} \langle V_f f, V_f f \rangle \\
&= \|f\|_2^2 \|f\|_2^2 \\
&= \|f\|_2^4
\end{aligned}$$

bağıntısı bulunur.

5.8.Teorem: $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ve $F, \mathbb{R}^{2d}$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere $U F(x, \omega) = F(\omega, -x)$ olsun. Bu durumda

$$W(f, g) = F \cup A(f, g)$$

eşitliği vardır.

İspat: Herhangi $(x, \omega) \in \mathbb{R}^{2d}$ için $F = F_1 F_2$ olmak üzere eğer 5.6. Teorem kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
F^{-1}W(f, g)(x, \omega) &= F_1^{-1}F_2^{-1}F_2 T_s(f \otimes \bar{g})(x, \omega) \\
&= F_1^{-1}T_s(f \otimes \bar{g})(x, \omega) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} T_s(f \otimes \bar{g})(t, \omega) \cdot e^{2\pi i t x} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f\left(t + \frac{\omega}{2}\right) \bar{g}\left(t - \frac{\omega}{2}\right) \cdot e^{2\pi i t x} dt \\
&= A(f, g)(\omega, -x) \\
&= U A(f, g)(x, \omega)
\end{aligned}$$

Eğer f, g fonksiyonları $L^2(\mathbb{R}^d)$ de her yerde yoğun uygun bir uzaydan alınırsa F_2 ve T_s operatörleri sürekli oldukların Wigner dönüşümü tüm $L^2(\mathbb{R}^d)$ genişletilebilir. Böylece

$$F(F^{-1}W(f,g)) = F(\cup A(f,g))$$

$$W(f,g) = F \cup A(f,g)$$

elde edilir.

5.9.Teorem: Eğer $f, \hat{f} \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ için,

$$\int_{\mathbb{R}^d} Wf(x, \omega) d\omega = |f(x)|^2, \quad (5.3.)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} Wf(x, \omega) dx = |\hat{f}(\omega)|^2, \quad (5.4.)$$

özellikle,

$$\iint_{\mathbb{R}^{2d}} Wf(x, \omega) dx d\omega = \|f\|_2^2 \quad (5.5.)$$

olur[4].

İspat: Eğer 4.2.Teorem ve 5.3. Teorem kullanılırsa

$$|Wf(x, \omega)| d\omega = 2^d |V_f(2x, 2\omega)| = 2^d |\hat{f} * M_{-2x} \hat{f}^*(2\omega)|$$

yazılır. Öte yandan $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ kabulünden dolayı her sabit $x \in \mathbb{R}^d$ için

$Wf(x, \cdot) \in L^1(d\omega)$ bulunur. O halde 5.6. Teorem kullanılırsa

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} Wf(x, \omega) d\omega &= F_2^{-1}[(F_2 T_s)(f \otimes \bar{f})](x, 0) \\ &= F_2^{-1} F_2 T_s(f \otimes \bar{f})(x, 0) \\ &= T_s(f \otimes \bar{f})(x, 0) \\ &= (f, \bar{f})(x, x) \\ &= f(x) \cdot \bar{f}(x) \end{aligned}$$

$$= |f(x)|^2$$

bulunur. Eğer 5.6. Teorem ve 5.4. Teoremin (d) şıkkı kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} Wf(x, \omega) dx &= \int_{\mathbb{R}^d} W\hat{f}(\omega, -x) dx \\ &= F_2^{-1} \left[F_2 T_s (\hat{f} \otimes \hat{\hat{f}}) \right] (\omega, 0) \\ &= F_2^{-1} F_2 T_s (\hat{f} \otimes \hat{\hat{f}}) (\omega, 0) \\ &= T_s (\hat{f} \otimes \hat{\hat{f}}) (\omega, 0) \\ &= (\hat{f} \otimes \hat{\hat{f}}) (\omega, \omega) \\ &= \hat{f}(\omega) \hat{\hat{f}}(\omega) \\ &= |\hat{f}(\omega)|^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi

$f, \hat{f} \in L^1 \cap L^2$ olsun. Eğer (5.4.) eşitliği, Plancherel teoremi ve Fubini teoremi kullanılırsa

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^d} Wf(x, \omega) dx d\omega &= \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx \\ &= \iint_{\mathbb{R}^{2d}} Wf(x, \omega) d\omega dx \\ &= \iint_{\mathbb{R}^{2d}} Wf(x, \omega) dx d\omega = \|f\|_2^2 \end{aligned}$$

bulunur. (5.3.) eşitliğinde Wigner dönüşümünün ikinci değişkene göre integrali; x -konumlu bir yerde parçacığın bulunma olasılık yoğunluğunu. (5.4.) eşitliğinde ise Wigner dönüşümünün birinci değişken integrali; parçacığın momentumunun ω değerini alma olasılığını vermektedir.

SONUÇ

Bu çalışmada Gabor ve Wigner dönüşümünün önemli özellikleri anlatılmıştır. Bu dönüşümler arasındaki bağıntılar verilmiştir. Ayrıca bu dönüşümleri zaman – frekans analizinde ne anlama geldikleri yorumlanmıştır. Gabor ve Wigner dönüşümlerinin sınırlılık, süreklilik gibi bazı önemli özellikleri çeşitli fonksiyon uzaylarında incelenebilir.

KAYNAKLAR

- [1] Rudin, W., 1973. Functional Analysis. Mc Graw – Hill, Inc., 397.
- [2] Schwartz, L., 1966. Mathematics for the Physical Science. Addison–Wesley Publishing Company, 358.
- [3] Katznelson, Y., 1968. An Introduction to Harmonic Analysis. Dover Publications, New York, 264.
- [4] Gröchenig, A.T., 2001. Foundations of Time – Frequency Analysis. Birkhauser, Boston. 359.
- [5] Rudin, W., 1966. Real and Complex Analysis. Mc Graw – Hill, New York.
- [6] Rudin, W., 1960. Fourier Analysis on Groups, Interscience Publishers, New York.
- [7] Hewitt, E., Stromberg, K. 1965. Real and Abstract Analysis. New York.
- [8] Karaoğlu, B., 1998. Fizik ve Mühendislikte Matematik Yöntemler. 3. Baskı, Güven Yayınları, İstanbul.
- [9] Royden, H.L. 1968. Real Analysis. Macmillian, New York.
- [10] Taylor, A.E. 1957. Introduction to Function Analysis. New York, 423.

ÖZGEÇMİŞ

Mahmut YILDIZ 1976 yılında Tirebolu’da doğdu. İlk ve orta eğitimini Tirebolu’da, lise eğitimini İstanbul’da tamamladı. 1993 yılında Üsküdar Cumhuriyet Lisesi’nden mezun oldu. 1994 yılında başladığı Atatürk Üniversitesi Matematik Bölümü’nü 1998 yılında bitirdi. 2015 yılında Giresun Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı. Halen Giresun Nurettin Canikli Anadolu İmam Hatip Lisesi’nde Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır.