



**T.C.
AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GALİLEAN UZAYINDA BİR UZAY EĞRİSİNİN
BAĞLANTILI REGLE YÜZEYLERİ VE REGLE İNVARYANTLARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DUYGU AYDOĞAN

HAZİRAN

DUYGU AYDOĞAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAZİRAN 2023

**GALİLEAN UZAYINDA BİR UZAY EĞRİSİNİN
BAĞLANTILI REGLE YÜZEYLERİ VE REGLE İNVARYANTLARI**

Duygu AYDOĞAN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**Danışman
Prof. Dr. Keziban ORBAY**

**AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

HAZİRAN 2023

Yüksek Lisans Tezi Kabul ve Onay Sayfası

Duygu AYDOĞAN tarafından hazırlanan “Galilean Uzayında Bir Uzay Eğrisinin Bağlantılı Regle Yüzeyleri ve Regle İnvaryantları” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Keziban ORBAY

Matematik Anabilim Dalı , Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Başkan: Prof. Dr. İsmail AYDEMİR

Matematik Anabilim Dalı , Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Doç. Dr. Tevfik ŞAHİN

Matematik Anabilim Dalı , Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 06/06/2023

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

(İmza)

Duygu AYDOĞAN

06.06.2023

GALİLEAN UZAYINDA BİR UZAY EĞRİSİNİN
BAĞLANTILI REGLE YÜZEYLERİ VE REGLE İNVARİYANTLARI
(Yüksek Lisans Tezi)

Duygu AYDOĞAN

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Haziran 2023

ÖZET

Bu çalışmada; G_3 Galilean uzayında, Galilean birim küre yüzeyi üzerindeki bir eğriyi dayanak eğrisi olarak alan regle yüzeylerin regle invaryantlarını elde etmek amaçlanmıştır. Bunun için öncelikle Galilean birim küre yüzeyi üzerindeki eğrinin ortonormal çatısı ve türev denklemleri hesaplanmıştır. Daha sonra Galilean anlamında regle yüzeylerin yapı fonksiyonları ve regle invaryantları tanımlanarak G_3 Galilean uzayında küresel eğriyi baz eğrisi kabul eden regle yüzeylerin regle invaryantları elde edilmiştir.

Sayfa Adedi	: 39
Anahtar Kelimeler	: Galilean Uzayı, Galilean Küre, Regle İnvaryantlar
Danışman	: Prof. Dr. Keziban ORBAY

RULED INVARIANTS AND ASSOCIATED RULED SURFACES OF A SPACE
CURVE IN GALILEAN SPACE

(M. Sc. Thesis)

Duygu AYDOĞAN

AMASYA UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June 2023

ABSTRACT

The aim of this study is to obtain the ruled invariants of the ruled surfaces in the Galilean space G_3 , which take a curve on the surface of the Galilean unit sphere as the base curve. For this purpose, first the orthonormal framework and derivative equations of the curve on the Galilean unit sphere surface are calculated. Then, by defining the structure functions and regle invariants of the regle surfaces in the Galilean sense, the regle invariants of the regle surfaces that take the spherical curve as the base curve in Galilean G_3 space are obtained.

Number of pages : 39

Keywords : Galilean space, Galilean sphere, Ruled invariants

Supervisor : Prof. Dr. Keziban ORBAY

ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR

Tez konusunun belirlenmesinden başlayarak çalışma sürecinde bilgi ve birikimleri ile bana rehberlik eden, yaşanan tüm olumsuzluklara rağmen desteğini her zaman hissettiren saygı değer hocam Prof. Dr. Keziban ORBAY’a teşekkür ederim. Ayrıca bana olan inancını hiç yitirmeyen, bugünlere gelmeme vesile olan sevgili aileme ve bu tezin ortaya çıkma sürecinde beni hep motive eden sevgili arkadaşım Dr. Orhan İSMAİLOV’a teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR	3
2.1 G_3 Galilean Uzayında Temel İşlemler	3
2.2 G_3 Galilean Uzayında Eğriler.....	4
2.3 G_3 Galilean Uzayında Regle Yüzeyler.....	7
2.3.1 G_3 Galilean uzayında A- tipi regle yüzeyler	9
2.3.2 G_3 Galilean uzayında B- tipi regle yüzeyler.....	10
2.3.3 G_3 Galilean uzayında C- tipi regle yüzeyler	12
3. G_3 GALİLEAN UZAYINDA KÜRESEL EĞRİLERİN FRENET ÇATISI.....	14
4. G_3 GALİLEAN UZAYINDA REGLE YÜZEYLER VE REGLE İNVARYANTLARI.....	22
4.1 G_3 Galilean Uzayında A-Tip Regle Yüzeyin İnvaryantları	23
4.2 G_3 Galilean Uzayında B-Tip Regle Yüzeyin İnvaryantları.....	28
4.3 G_3 Galilean Uzayında C-Tip Regle Yüzeyin İnvaryantları	31
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	35
6. KAYNAKLAR.....	37
7. ÖZGEÇMİŞ.....	39

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, yanda açıklamaları verilmek üzere aşağıda listelenmiştir.

Simgeler	Açıklama
G_3	3 boyutlu Galile uzayı
$\langle A, B \rangle_G$	Galile skaler çarpımı
d_G	Galile uzaklık
$\ A\ _G$	Galile norm
$A \times_G B$	Galile vektörel çarpım
κ	Eğrilik
τ	Burulma (Torsiyon)
T	Teğet vektör
N	Asli normal vektör
B	Binormal vektör
S_G^2	Galile küre
$S_{G_3}^2$	3 boyutlu Galile küre
K_g	Geodezik eğrilik
φ	Regle yüzey
φ_A	A-Tip regle yüzey
φ_B	B-Tip regle yüzey
φ_C	C-Tip regle yüzey
t	Teğet vektör
n	Normal vektör

b	Binormal vektör
α	Galile uzayında regüler eğri
δ	Dağılma parametresi (dral)
λ	Öteleme yoğunluk fonksiyonu
μ	Uzaklık yoğunluk fonksiyonu
κ_g	Dönme yoğunluk fonksiyonu
Λ, K, M	Regle invaryantlar



1. GİRİŞ

Öklid (Eukleides: M.Ö. 325- M.Ö. 270), toplam 13 kitaptan oluşan ve tüm zamanların en etkili kitapları arasında yer alan “The Elements” adlı eseriyle geometrinin temelini oluşturmuştur. Öklid geometrisi postulatlar olarak isimlendirilen beş aksiyom üzerine kurulmuştur. Bu aksiyomların beşincisi “Bir nokta ve bir doğru verildiğinde, verilen noktadan geçen ve verilen doğruya paralel olan bir tek doğru çizilebilir” şeklinde olup Öklid geometrisinden farklı geometrilerin ortaya çıkmasına sebep olmuştur. Öklid geometrisi yaklaşık 2000 yıl hüküm sürdükten sonra 19. yüzyıldan itibaren bazı Öklid dışı geometriler ortaya konmuştur (Hakim, 2004). Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Nikolai İvanoviç Lobachevsky (1792-1856) ve Janos Bolyai (1802-1860) hiperbolik geometrinin temellerini atmıştır. Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) eliptik geometriyi oluşturmuştur. Hendrik Lorentz (1853-1928) reel uzayda iç çarpımı farklı tanımlayarak Lorentz geometriyi belirlemiştir (Hakim, 2007).

Einstein’ın genel görecelik kuramı Öklid geometrisinin fiziksel uzayın ihtiyacını karşılamadığını göstermiştir (Hakim, 2007). Galilean geometrisi bu kavramla ilişkilidir. Yaglom (1979) tarafından Galilean geometrinin fiziksel temelleri atılmış ve Rösche (1984) tarafından geliştirilmiştir. Sonrasında Pavkovic ve Kamenarovic (1987), Divjak (1998), Divjak ve Sipus (2002, 2003) ve Sipus (2008) Galilean uzaylarında çalışmışlardır. Web of Science ve Scopus verilerine göre Galilean uzayı ile ilgili Türkiye adresli ilk uluslararası indekslerde yayınlanan çalışmalar 2004 yılından itibaren görülmeye başlamıştır. Bektaş (2004, 2006) 3- boyutlu Pseudo-Galilean uzayında regle yüzeyler için genel helislerin karakterizasyonu üzerine çalışmıştır. Öğrenmiş, Ergüt ve Bektaş (2007) 3-boyutlu Galilean uzayında helisleri karakterize eden özellikleri incelemiştir. Öğrenmiş, Öztekin ve Ergüt (2009) Galilean uzayında Bertrand ve Mannheim eğrileri tanıtarak onların özelliklerini araştırmıştır. Sonraki yıllarda gerek Galilean gerekse pseudo- Galilean uzaylarında eğriler ve yüzeyler üzerine çalışmalar giderek artmıştır.

Klasik diferensiyel geometri, eğrilerin ve yüzeylerin yerel özelliklerini inceler. Yerel özelliklerden kasıt eğrinin veya yüzeyin sadece bir noktanın komşuluğundaki davranışına bağlı olan özelliklerdir. Yaygın diferensiyel geometri ise bu yerel özelliklerin eğrinin veya yüzeyin tümünün davranışı üzerindeki etkisini araştırır (Carmo, 1976). Bir eğrinin bir

noktasındaki Frenet çatısı, eğriliği ve burulması eğriyi o noktada karakterize ederken, yüzeyin bir noktasındaki Frenet çatısı, dağılma parametresi ve eğrilikleri de yüzeyi o noktada karakterize eder. Pek çok yüzey çeşidi vardır. Üzerinde çalışılması en çok tercih edilen yüzeylerden biri regle yüzeydir. Regle yüzey, 3- boyutlu uzayda bir doğrunun bir eğriye dayanarak sürekli hareketiyle oluşan yüzeydir. Liu, Yu ve Jung (2014), Liu ve Yuan (2012) ve Yu, Liu ve Jung (2014) 3-boyutlu Öklid ve Minkowski uzayında regle yüzeylerin yapı fonksiyonlarını tanımlamışlardır. Bazı geometrik özelliklerini vermişlerdir. Yapı fonksiyonları regle yüzeyin regle invaryantları olarak adlandırılmaktadır. Liu, Liu ve Jung (2018) bir uzay eğrisi ile bağlantılı regle yüzeyleri ve regle invaryantları çalışmışlar ve üç boyutlu Öklid uzayındaki regle yüzeyin regle invaryantlar teorisini kullanarak bir regle yüzeyin bir uzay eğrisinin asal normal regle yüzeyi olması için gereken koşulları vermişlerdir.

Bu çalışmada; Liu ve diğerlerinin (2018) çalışmasına paralel olarak Galilean uzayında Galilean birim küre yüzeyi üzerindeki bir eğriyi dayanak eğrisi olarak alan regle yüzeylerin regle invaryantlarını elde etmek amaçlanmıştır.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde G_3 Galilean uzayında geçerli olan temel tanım ve kavramlara yer verilmiştir. İlk olarak temel işlemler sonrasında eğriler ve regle yüzeyler için kullanılan temel bilgiler sunulmuştur.

2.1. G_3 Galilean Uzayında Temel İşlemler

2.1.1. Tanım 3-boyutlu Galilean uzayında verilen $A = (x_1, y_1, z_1)$ ve $B = (x_2, y_2, z_2)$ vektörlerinin Galilean iç çarpımı;

$$\langle A, B \rangle_G = A \cdot B = \begin{cases} x_1 x_2, & x_1 \neq 0 \text{ veya } x_2 \neq 0 \\ y_1 y_2 + z_1 z_2, & x_1 = 0 \text{ ve } x_2 = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Bu iç çarpım ile R^3 reel afin uzayı birlikte düşünülürse $(R^3, \langle A, B \rangle_G)$ ikilisine Galile uzayı denir ve bu uzay G_3 ile gösterilir (Yaglom, 1979).

2.1.2. Tanım G_3 Galilean uzayında $A = (x_1, y_1, z_1)$ ve $B = (x_2, y_2, z_2)$ vektörleri verilsin. Eğer $\langle A, B \rangle_G = 0$ ise bu vektörlere Galile anlamında diktirler denir (Yaglom, 1979).

2.1.3. Tanım G_3 Galilean uzayında $A = (x_1, y_1, z_1)$ ve $B = (x_2, y_2, z_2)$ noktalarını göz önüne alalım. Bu iki nokta arasındaki uzaklık

$$d_G(A, B) = \begin{cases} |x_2 - x_1|, & x_2 \neq x_1 \\ \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, & x_1 = x_2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (Yaglom, 1979).

2.1.4. Tanım G_3 Galilean uzayında bir $X = (x, y, z)$ vektörünün normu

$$\|X\|_G = \begin{cases} x, & x \neq 0 \\ \sqrt{x^2 + y^2}, & x = 0 \end{cases}$$

dir (Yaglom, 1979).

2.1.5.Tanım $A = (x_1, y_1, z_1)$ ve $B = (x_2, y_2, z_2) \in G_3$ olsun. A ve B vektörlerinin Galilean vektörel çarpımı

$$A \times_G B = \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

biçimindedir. Eğer $x_1 = 0$ ve $x_2 = 0$ ise

$$A \times_G B = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & y_1 & z_1 \\ 0 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

şeklinde tanımlanır (Yaglom, 1979).

2.1.6.Tanım $X = (x, y, z) \in G_3$ vektörü için eğer $x = 0$ ise X vektörüne izotropik vektör, eğer $x \neq 0$ ise X vektörüne non-izotropik vektör denir (Yaglom, 1979).

2.2. G_3 Galilean Uzayında Eğriler

2.2.1. Tanım G_3 Galilean uzayında bir

$$\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G_3$$

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

diferansiyellenebilir fonksiyonu verilsin. $\alpha(t) \in G_3$ noktalar kümesine G_3 Galilean uzayında bir eğri denir. Burada $t \in I$ ve $x, y, z: I \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonları α eğrisinin koordinat fonksiyonlarıdır (Divjak, 1998).

2.2.2.Tanım $\alpha(t)$, G_3 Galilean uzayında bir eğri olmak üzere $\alpha'(t)$ vektörüne α eğrisinin teğet vektörü denir. Eğer $\alpha'(t) \neq 0$ ise α eğrisine regüler eğri ve $\|\alpha'(t)\|_G = 1$ ise α eğrisine birim hızlı eğri denir (Divjak,1998:117-128).

2.2.3. Tanım G_3 Galilean uzayında bir regüler α eğrisi $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ olarak verilsin. Bu eğrinin yay uzunluğu parametresi

$$ds = |x'(t)dt| = |dx|$$

şeklinde olup, α eğrisinin yay uzunluğu ise $ds = dx$ ve $s = x$ olarak ifade edilir (Divjak, 1998).

Galilean uzayında eğri yay parametresine göre parametrelendirilirse $\alpha(x) = (x, y(x), z(x))$ biçiminde olur. $I \subseteq R$ açık aralığında

$$\alpha: I \rightarrow G_3$$

$$\alpha(x) = (x, y(x), z(x))$$

eğrisi verilsin. Bu durumda $y, z: I \rightarrow R$ fonksiyonlarına α eğrisinin Galilean koordinat fonksiyonları adı verilir. $\alpha(x)$ de x 'e göre türev alınırsa

$$\alpha'(x) = (1, y'(x), z'(x))$$

bulunur. Burada $\|\alpha'(x)\|_G = 1$ olduğundan α eğrisinin Galilean uzayında birim hızlı eğri olduğu görülmüş olur (Divjak, 1998).

2.2.4. Tanım $I \subseteq R$ açık aralığında

$$\alpha: I \rightarrow G_3$$

$$\alpha(x) = (x, y(x), z(x))$$

eğrisi verilsin. Burada α eğrisi ard arda iki kez türevlenirse

$$\alpha'(x) = (1, y'(x), z'(x)) \text{ ve } \alpha''(x) = (0, y''(x), z''(x))$$

eşitlikleri bulunur. Görüldüğü gibi $\|\alpha'(x)\|_G = 1$ olduğundan

$$\alpha'(x) = T(x) = (1, y'(x), z'(x))$$

olur ve bu vektöre eğrinin teğet vektörü denir. Elde edilen türev vektörlerinin iç çarpımı alınır

$$\langle \alpha'(x), \alpha''(x) \rangle_G = 0$$

olur. Bu demektir ki $\alpha'(x) \perp \alpha''(x)$ olup, $\alpha''(x)$ vektörü $T(x)$ vektörüne diktir. Böylece eğrinin Birim normal vektörü olan

$$N(x) = \frac{\alpha''(x)}{\|\alpha''(x)\|_G}$$

biçiminde hesaplanır. Eğrinin parametrik ifadesindeki değerler kullanılırsa

$$N(x) = \frac{\alpha''(x)}{\sqrt{(y'')^2(x) + (z'')^2(x)}} (0, y''(x), z''(x))$$

denklemleri bulunur. Son olarak, eğrinin birim binormal vektörü

$$B(x) = \frac{1}{\sqrt{(y'')^2(x) + (z'')^2(x)}} (0, -z''(x), y''(x))$$

şeklinde elde edilir. Böylece G_3 de elde edilen $\{T(x), N(x), B(x)\}$ çatısına birim hızlı eğriler için Serret-Frenet çatısı adı verilir (Pavkovic ve Kamenarovic, 1987).

2.2.5. Tanım G_3 Galilean uzayında birim hızlı α eğrisi için Frenet formülleri

$$\begin{pmatrix} T'(x) \\ N'(x) \\ B'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(x) & 0 \\ 0 & 0 & \tau(x) \\ 0 & -\tau(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(x) \\ N(x) \\ B(x) \end{pmatrix}$$

biçiminde olup, κ eğrilik ve τ burulma fonksiyonları

$$\kappa(x) = \sqrt{(y'')^2(x) + (z'')^2(x)}$$

$$\tau(x) = \frac{\det(\alpha'(x), \alpha''(x), \alpha'''(x))}{\kappa^2(x)}$$

denklemleri ile verilir (Pavkovic ve Kamenarovic, 1987).

2.2.6. Tanım G_3 Galile uzayında birim hızlı olmayan bir $\beta: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow G_3$ eğrisi için eğrilik

$$\kappa = \frac{\|\beta' \times_G \beta''\|_G}{\|\beta'\|_G^3}$$

şeklinde tanımlanır (Pavkovic ve Kamenarovic, 1987).

2.2.7.Tanım G_3 Galilean uzayında küre, sabit bir X_0 noktasına eşit uzaklıkta bulunan noktalar cümlesi olarak tanımlanır ve

$$\langle X - X_0, X - X_0 \rangle_G = r^2$$

denklemleri ile gösterilir. Galilean küresinin merkezi başlangıç noktası ve yarıçapı 1 ise merkezli birim küre adını alır ve

$$\langle X, X \rangle_G = 1$$

denklemleriyle verilir (Yaglom,1979).

2.2.8. Tanım $\gamma(s)$ birim vektörünün birim küre yüzeyinde çizdiği eğrinin teğet vektörü

$$t(s) = \gamma'(s)$$

ve

$$d(s) = \gamma(s) \times_G t(s)$$

olmak üzere $\{t(s), \gamma(s), d(s)\}$ ortonormal sistemine küresel eğrinin Serret-Frenet çatısı denir.

2.3. G_3 Galilean Uzayında Regle Yüzeyler

2.3.1. Tanım: G_3 Galilean uzayında bir açık alt cümle U olmak üzere

$$\gamma: U \rightarrow R$$

fonksiyonunun k -yıncı mertebeden bütün kısmi türevleri var ve sürekli ise γ fonksiyonuna C^k ($k \geq 1$) sınıfından diferansiyellebilirdir denir (Röschel, 1984).

2.3.2. Tanım G_3 Galilean uzayında, verilen bir l doğrusunun verilen bir r eğrisi boyunca hareketiyle bir yüzey elde edilebiliyorsa bu yüzeye G_3 Galilean uzayında bir regle yüzey denir. Bu durumda G_3 Galilean uzayında, C^3 sınıfından bir regle yüzey

$$\varphi(x, v) = r(x) + v\alpha(x); \quad r, \alpha \in C^3, v \in R$$

denklemini ile verilir. Burada r eğrisi l doğrusunun, Galilean yay uzunluğu ile parametrize edilmiş dayanak eğrisi, α ise l doğrusunun r noktasında ki doğrultman vektörüdür.

$$r(x) = (x, y(x), z(x))$$

denklemini sahiptir. Ayrıca $\alpha(x)$ anadoğrusu,

$$\alpha(x) = (1, \alpha_2(x), \alpha_3(x))$$

veya

$$\alpha(x) = (0, \alpha_2(x), \alpha_3(x)) \quad , \quad |\alpha_2^2(x) + \alpha_3^2(x)| = 1$$

şeklinde ifade edilir (Röschel, 1984).

2.3.3. Tanım G_3 Galilean uzayında

$$\varphi(x, v) = r(x) + v\alpha(x)$$

bir regle yüzey olsun. Eğer bu yüzey için

$$\varphi_x \neq 0, \quad \varphi_v \neq 0, \quad \varphi_x \times \varphi_v \neq 0$$

sağlanıyorsa bu regle yüzeye regülerdir denir (Divjak ve Sipus, 2003).

2.3.4. Tanım Regle yüzeyin komşu iki anadoğrusu arasındaki en kısa uzaklığın anadoğrular arasındaki açıya oranına regle yüzeyin dağılma parametresi (drali) denir ve

$$\delta(x) = \frac{\det(r', \alpha, \alpha')}{\|\alpha'\|^2}$$

denklemleriyle hesaplanır (Röschel, 1984).

Galilean uzayında regle yüzeyler; A-tipi, B-tipi ve C-tipi olmak üzere üç farklı tiptedir.

2.3.1. G_3 Galilean uzayında A-tipi regle yüzeyler

G_3 Galilean uzayında $\{0\} \subset I \subset R$ olmak üzere diferansiyellenebilir birim hızlı bir eğri

$$\begin{aligned} r: I &\rightarrow G_3 \\ x &\rightarrow r(x) = (x, y(x), z(x)) \end{aligned}$$

olsun. $\forall x \in I$ için $r(x)$ noktasındaki teğet vektör ile anadoğrusunun doğrultman vektörü lineer bağımsız olacak şekilde

$$\begin{aligned} l: R &\rightarrow G_3 \\ v &\rightarrow l(v) = (x + v, y(x) + va_2(x), z(x) + va_3(x)) \end{aligned}$$

doğrusunu seçelim. Burada $\alpha(x) = (1, a_2(x), a_3(x))$, l doğrusunun $r(x)$ noktasındaki doğrultman vektörüdür. l doğrusu r eğrisi boyunca hareket etsin. Bu durumda $(I \times R, \varphi)$ parametrizasyonu ile verilen bir regle yüzey

$$\begin{aligned} \varphi: I \times R &\rightarrow G_3 \\ (x, v) &\rightarrow \varphi(x, v) = (x + v, y(x) + va_2(x), z(x) + va_3(x)) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bu şekilde gösterilen $\varphi(x, v)$ regle yüzeyi A-tip regle yüzey olarak adlandırılır. Burada $y(x), z(x), a_2(x), a_3(x) \in C^3, x \in I \subset R, v \in R$ dir.

A-tip regle yüzeylerin $a(x) = (1, a_2(x), a_3(x))$ olarak verilen anadoğrusu non-izotropiktir.

A-tip regle yüzeylerin ortanormal üçyüzlüsü $\kappa(x) \neq 0$ olmak üzere

$$t(x) = a(x) = (1, a_2(x), a_3(x))$$

$$n(x) = \frac{1}{\kappa(x)} a'(x) = \frac{1}{\kappa(x)} (0, a_2'(x), a_3'(x))$$

$$b(x) = \frac{1}{\kappa(x)} (0, -a_3'(x), a_2'(x))$$

ve Ferenet denklemleri

$$t'(x) = \kappa(x)n(x)$$

$$n'(x) = \tau(x)b(x)$$

$$b'(x) = -\tau(x)n(x)$$

dir. Burada $\kappa(x)$ ve $\tau(x)$, sırasıyla, A-tipi regle yüzeyin eğriliği ve torsiyonu olup

$$\kappa(x) = \sqrt{(a_2'(x))^2 + (a_3'(x))^2}, \quad \tau(x) = \frac{a_2'(x)a_3''(x) - a_2''(x)a_3'(x)}{\kappa^2(x)}$$

dir (Röschel,1984).

2.3.2. G_3 Galilean uzayında B-tipi regle yüzeyler

G_3 Galilean uzayında $\{0\} \subset I \subset R$ olmak üzere diferansiyellenebilir birim hızlı bir eğri

$$r: I \rightarrow G_3$$

$$x \rightarrow r(x) = (0, y(x), z(x))$$

ve

$$(y')^2(x) + (z')^2(x) = 1$$

olsun. $\forall x \in I$ için $r(x)$ noktasındaki teğet vektör ile anadoğrunun doğrultman vektörü lineer bağımsız olacak şekilde

$$l: R \rightarrow G_3$$

$$v \rightarrow l(v) = (v, y(x) + va_2(x), z(x) + va_3(x))$$

Doğrusunu seçelim. Burada $a(x) = (1, a_2(x), a_3(x))$, l doğrusunun $r(x)$ noktasındaki doğrultman vektörüdür.

l doğrusu r eğrisi boyunca hareket ettiğinde $(l \times R, \varphi)$ parametrizasyonu ile verilen regle yüzey

$$\varphi: I \times R \rightarrow G^3$$

$$(x, v) \rightarrow \varphi(x, v) = (v, y(x) + va_2(x), z(x) + va_3(x))$$

şeklinde olur. Bu şekilde gösterilen $\varphi(x, v)$ regle yüzeyi B-tip regle yüzey olarak adlandırılır. Burada $y(x), z(x), a_2(x), a_3(x) \in C^3, x \in I \subset R, v \in R$ dir.

B-tip regle yüzeylerin $a(x) = (1, a_2(x), a_3(x))$ olarak verilen anadoğrusu non-izotropiktir. B-tip regle yüzeylerin ortanormal üçyüzlüsü $\kappa(x) \neq 0$ olmak üzere

$$t(x) = a(x) = (1, a_2(x), a_3(x))$$

$$n(x) = (0, -z'(x), y'(x))$$

$$b(x) = (0, y'(x), z'(x))$$

ve Frenet formülleri

$$t'(x) = \kappa(x)n(x)$$

$$n'(x) = \tau(x)b(x)$$

$$b'(x) = -\tau(x)n(x)$$

dir. Burada $\kappa(x)$ ve $\tau(x)$ sırasıyla B-tip regle yüzeyin eğriliği ve burulması olup

$$\kappa(x) = -\frac{a'_2(x)}{z'(x)}, \quad \tau(x) = \frac{y''(x)}{z'(x)}$$

dir (Röschel,1984).

2.3.3. G_3 Galilean uzayında C-tipi regle yüzeyler

G_3 Galilean uzayında $\{0\} \subset I \subset R$ olmak üzere diferansiyellenebilir birim hızlı bir eğri,

$$\begin{aligned} r: I &\rightarrow G_3 \\ x &\rightarrow r(x) = (x, y(x), 0) \end{aligned}$$

ve

$$a_2^2 + a_3^2 = 1$$

olsun. $\forall u \in I$ için $r(x)$ noktasındaki teğet vektör ile anadoğrunun doğrultman vektörü lineer bağımsız olacak şekilde

$$\begin{aligned} l: R &\rightarrow G_3 \\ v &\rightarrow l(v) = (x, y(x) + va_2(x), va_3(x)) \end{aligned}$$

doğrusunu seçelim. Burada $a(x) = (0, a_2(x), a_3(x))$, l doğrusunun $r(x)$ noktasındaki doğrultman vektörüdür.

l doğrusu r eğrisi boyunca hareket etsin. Bu durumda $(I \times R, \varphi)$ parametrizasyonu ile verilen bir regle yüzey

$$\begin{aligned} \varphi: I \times R &\rightarrow G_3 \\ (x, v) &\rightarrow \varphi(x, v) = (x, y(x) + va_2(x), va_3(x)) \end{aligned}$$

şeklinde olur. Bu şekilde elde edilen $\varphi(x, v)$ regle yüzey C-Tip regle yüzey olarak adlandırılır. Burada $y(x), a_2(x), a_3(x) \in \mathcal{C}^3$, $x \in I \subset \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}$ dir.

C-tipi regle yüzeylerin $a(x) = (0, a_2(x), a_3(x))$ şeklindeki anadoğrusu izotropiktir. C-tipi regle yüzeyin ortanormal üçyüzlüsü $\kappa(x) \neq 0$ olmak üzere

$$t(x) = r'(x) = (1, y'(x), 0)$$

$$n(x) = a(x) = (0, a_2(x), a_3(x))$$

$$b(x) = (0, -a_3(x), a_2(x))$$

ve Frenet formülleri

$$t' = (0, y''(x), 0) = \kappa(n \cos \psi(x) - b \sin \psi(x))$$

$$n' = \frac{1}{\delta} b$$

$$b' = -\frac{1}{\delta} n$$

dir. Burada $\kappa(x)$ ve $\delta(x)$, sırasıyla, C-tipi regle yüzeyin eğriliği ve drali olup

$$\kappa(x) = y''(x), \quad \delta(x) = -\frac{a_3(x)}{a_2'(x)}$$

dir. ψ açısı ise $z = 0$ düzlemi ile regle yüzeyin doğrultmanı arasındaki açıdır (Röschel,1984).

3. G_3 GALİLEAN UZAYINDA KÜRESEL EĞRİLERİN FRENET ÇATISI

G_3 Galilean uzayında; merkezi $O = (0,0,0)$ ve yarıçapı $\|r\| = 1$ olan birim küre yüzeyi

$$S_G^2 = \{X(x, y, z) \in G_3 \mid \langle X - O, X - O \rangle_G = r^2\}$$

$$S_G^2 = \{X(x, y, z) \in G_3 \mid \langle X, X \rangle_G = 1\}$$

dir. Buna göre iki durum ortaya çıkar:

İlk durum; $x \neq 0$ ise $\langle X, X \rangle_G = x^2 = 1$ olur ve bu bize Galilean küresinin, küre üzerinde alınan nokta non- izotropik ise reel uzayda birbirine paralel olan $x = 1$ ve $x = -1$ düzlemlerine karşılık geldiğini gösterir.

İkinci durum; $x = 0$ ise $\langle X, X \rangle_G = y^2 + z^2 = 1$ olur ve bu bize Galilean küresinin, küre üzerinde alınan nokta izotropik ise reel uzayda anadoğrusu $x = 0$ olan bir silindire karşılık geldiğini gösterir.

3.1. Teorem G_3 Galilean uzayında merkezli küre denklemi $x^2 = 1$ şeklinde olsun.

$$\begin{aligned} \alpha: I \subset G_3 &\rightarrow S_{G_3}^2 \\ x &\rightarrow \alpha(x) = (\mp 1, y(x), z(x)) \end{aligned}$$

birim hızlı eğrinin Frenet çatısı

$$T(x) = \alpha'(x) = (0, y'(x), z'(x))$$

$$N(x) = \overrightarrow{O\alpha}(x) = (\mp 1, y(x), z(x))$$

$$B(x) = T(x) \times_G N(x) = (0, \mp z'(x), \pm y'(x))$$

ve küresel eğrinin Frenet çatısının türev denklemleri

$$\begin{pmatrix} T'(x) \\ N'(x) \\ B'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mp \kappa_g(x) \\ 1 & 0 & 0 \\ \pm \kappa_g(x) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(x) \\ N(x) \\ B(x) \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

İspat T, N, B Frenet vektörleri için

$$\langle T(x), T(x) \rangle_G = (y')^2(x) + (z')^2(x) = 1$$

$$\langle N(x), N(x) \rangle_G = 1$$

$$\langle B(x), B(x) \rangle_G = (z')^2(x) + (y')^2(x) = 1$$

ve

$$\langle T(x), N(x) \rangle_G = \langle N(x), B(x) \rangle_G = \langle B(x), T(x) \rangle_G = 0$$

olduğundan $\{T, N, B\}$ çatısı bir ortonormal çatı oluşturur. Eğrinin Frenet vektörlerinin türevleri alınır

$$T'(x) = (0, y''(x), z''(x))$$

$$N'(x) = (0, y'(x), z'(x))$$

$$B'(x) = (0, \mp z''(x), \pm y''(x))$$

elde edilir. $\langle T(x), T(x) \rangle_G = 1$ eşitliğinde türev alınır

$$\langle T'(x), T(x) \rangle_G + \langle T(x), T'(x) \rangle_G = 0$$

$$2\langle T'(x), T(x) \rangle_G = 0$$

olup

$$\langle T'(x), T(x) \rangle_G = y'(x)y''(x) + z'(x)z''(x) = 0 \quad (3.1)$$

denkleminde ulaşılır. Benzer şekilde

$$\langle T'(x), N(x) \rangle_G = 0$$

$$\langle T'(x), B(x) \rangle_G = \mp z'(x)y''(x) \pm y'(x)z''(x)$$

$$\langle N'(x), T(x) \rangle_G = \langle T(x), T(x) \rangle_G = (y')^2(x) + (z')^2(x) = 1$$

$$\langle N'(x), N(x) \rangle_G = 0$$

$$\langle N'(x), B(x) \rangle_G = 0$$

$$\langle B'(x), T(x) \rangle_G = \mp y'(x)z''(x) \pm z'(x)y''(x)$$

$$\langle B'(x), N(x) \rangle_G = 0$$

$$\langle B'(x), B(x) \rangle_G = z'(x)z''(x) + y(x)y''(x) = 0$$

eşitlikleri elde edilir.

$\alpha(x) = (\mp 1, y(x), z(x))$ eğrisinin birinci ve ikinci türevi alınacak olursa

$$\alpha'(x) = (0, y'(x), z'(x)) = T(x)$$

ve

$$\alpha''(x) = (0, y''(x), z''(x))$$

elde edilir. Eğrinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g(x) = \langle \alpha''(x), B(x) \rangle_G = \langle T'(x), B(x) \rangle_G = \mp z'(x)y''(x) \pm y'(x)z''(x)$$

eğrinin normal eğriliği

$$\kappa_n(x) = \langle \alpha''(x), N(x) \rangle_G = \langle T'(x), N(x) \rangle_G = 0$$

ve eğrinin geodezik burulması

$$\tau_\alpha(x) = -\langle N'(x), B(x) \rangle_G = 0$$

olur. Elde edilen eşitliklerden eğrinin Frenet çatısının türev vektörleri

$$\begin{pmatrix} T'(x) \\ N'(x) \\ B'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mp \kappa_g(x) \\ 1 & 0 & 0 \\ \pm \kappa_g(x) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(x) \\ N(x) \\ B(x) \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.

3.2. Teorem G_3 Galilean uzayında merkezli küre denklemi $x^2 = 1$ şeklinde olsun. Küre üzerindeki $\alpha(x) = (\mp 1, y(x), z(x))$ eğrisinin Galilean anlamında geodezik eğri olması için gerek ve yeter şart $y'(x)$ ve $z'(x)$ fonksiyonlarının lineer bağımlı fonksiyonlar olmasıdır.

İspat Küre üzerindeki $\alpha(x) = (\mp 1, y(x), z(x))$ eğrisi geodezik eğri olsun. Teorem 3.1. de elde edilen (3.1) eşitliği ve eğrinin geodezik eğri olma durumu birlikte ele alınırsa

$$\langle T'(x), T(x) \rangle_G = y'(x)y''(x) + z'(x)z''(x) = 0$$

$$\kappa_g(x) = \mp z'(x)y''(x) \pm y'(x)z''(x) = 0$$

eşitliklerinden $y''(x)$ ve $z''(x)$ fonksiyonlarının sıfır olduğu bulunur. Buradan

$$y'(x) = c; c \in \mathbb{R}$$

$$z'(x) = d; d \in \mathbb{R}$$

$$\frac{y'(x)}{z'(x)} = \frac{c}{d}$$

$$y'(x) = \frac{c}{d} z'(x)$$

eşitliği elde edilir. Bu bize $y'(x)$ ve $z'(x)$ fonksiyonlarının lineer bağımlı olduğunu gösterir.

Tersine; $y'(x)$ ve $z'(x)$ fonksiyonları lineer bağımlı olsun. Bu durumda

$$y'(x) = \lambda z'(x); \lambda \in \mathbb{R}$$

yazılabilir ki bu $\kappa_g(x) = 0$ demektir. Yani α eğrisi bir geodezik eğri olur.

Sonuç G_3 Galilean uzayında merkezil küre denklemi $x^2 = 1$ olsun. Küre üzerindeki $\alpha(x) = (\pm 1, y(x), z(x))$ eğrisi Galilean anlamında eğrilik çizgisidir.

3.3. Teorem G_3 Galilean uzayında $y^2(x) + z^2(x) = 1$ merkezil denklemlili küre için

$$(y'(x)z(x) - y(x)z'(x))^2 = 1$$

$$y'(x)y(x) + z'(x)z(x) = 0$$

olsun. Bu durumda

$$\alpha: I \subset G_3 \rightarrow S_{G_3}^2$$

$$x \rightarrow \alpha(x) = (0, y(x), z(x))$$

şeklinde verilen birim hızlı küresel eğrinin Frenet çatısı

$$T(x) = \alpha'(x) = (0, y'(x), z'(x))$$

$$N(x) = \overrightarrow{O\alpha}(x) = (0, y(x), z(x))$$

$$B(x) = T(x) \times_G N(x) = (\pm 1, 0, 0)$$

ve küresel eğrinin Frenet çatısının türev denklemleri

$$\begin{pmatrix} T'(x) \\ N'(x) \\ B'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(x) \\ N(x) \\ B(x) \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

İspat $\alpha(x)$ eğrisinin birim hızlı eğri olmasından dolayı $(y')^2(x) + (z')^2(x) = 1$ dir. Ferenet vektörlerinin iç çarpımlarına bakılırsa

$$\langle T(x), T(x) \rangle_G = (y')^2(x) + (z')^2(x) = 1$$

$$\langle N(x), N(x) \rangle_G = y^2(x) + z^2(x) = 1$$

$$\langle B(x), B(x) \rangle_G = (y'(x)z(x) - y(x)z'(x))^2 = 1 \quad (3.2)$$

$$\langle T(x), N(x) \rangle_G = y'(x)y(x) + z'(x)z(x) = 0 \quad (3.3)$$

$$\langle N(x), B(x) \rangle_G = \langle B(x), T(x) \rangle_G = 0$$

olur ki $\{T, N, B\}$ çatısı bir ortonormal çatı oluşturur. Denklem (3.2) den $\langle B(x), B(x) \rangle_G = 1$ olması için $B = (\pm 1, 0, 0)$ olmalıdır. Bu durumda

$$B(x) = (y'(x)z(x) - y(x)z'(x), 0, 0) = (\pm 1, 0, 0)$$

ve

$$y'(x)z(x) - y(x)z'(x) = \pm 1$$

olup (3.3) deki denklemimiz ile ortak çözüm yapılırsa

$$y'(x) = \pm z(x) \text{ ve } z'(x) = \mp y(x) \quad (3.4)$$

elde edilir. Buna göre Frenet vektörleri tekrar düzenlenecek olursa,

$$\begin{aligned} T(x) &= \alpha'(x) &= (0, \pm z(x), \mp y(x)) \\ N(x) &= \overrightarrow{O\alpha}(x) &= (0, y(x), z(x)) \\ B(x) &= T(x) \times_G N(x) &= (\pm 1, 0, 0) \end{aligned}$$

olur ve türevleri alınırsa

$$T'(x) = (0, \pm z'(x), \mp y'(x)) = (0, \mp y(x), \mp z(x))$$

$$N'(x) = (0, y'(x), z'(x)) = (0, \pm z(x), \mp y(x))$$

$$B'(x) = (0,0,0)$$

elde edilir. Frenet vektörleri ve türev vektörlerinin birbirleri ile iç çarpımları alınacak olursa

$$\langle T'(x), T(x) \rangle_G = 0$$

$$\langle T'(x), N(x) \rangle_G = \mp y^2(x) \mp z^2(x) = \mp 1$$

$$\langle T'(x), B(x) \rangle_G = 0$$

$$\langle N'(x), T(x) \rangle_G = z^2(x) + y^2(x) = 1$$

$$\langle N'(x), N(x) \rangle_G = \langle N'(x), B(x) \rangle_G = 0$$

$$\langle B'(x), T(x) \rangle_G = \langle B'(x), N(x) \rangle_G = \langle B'(x), B(x) \rangle_G = 0$$

denklemlerine ulaşılır. Eğrinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g(x) = \langle \alpha''(x), B(x) \rangle_G = \langle T'(x), B(x) \rangle_G = 0$$

eğrinin normal eğriliği

$$\kappa_n(x) = \langle \alpha''(x), N(x) \rangle_G = \langle T'(x), N(x) \rangle_G = -1$$

ve eğrinin geodezik burulması

$$\tau_\alpha(x) = -\langle N'(x), B(x) \rangle_G = 0$$

olur. Sonuç olarak küresel eğrinin Frenet çatısının türev denklemleri

$$\begin{pmatrix} T'(x) \\ N'(x) \\ B'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(x) \\ N(x) \\ B(x) \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılır.

Sonuç G_3 Galilean uzayında merkezil küre denklemi $y^2(x) + z^2(x) = 1$ olsun. Küre üzerindeki $\alpha(x) = (0, y(x), z(x))$ eğrisi hem Galilean anlamında eğrilik çizgisi hem de Galilean anlamında geodezik eğridir.



4. G_3 GALİLEAN UZAYINDA REGLE YÜZEYLER VE REGLE İNVARYANTLARI

Bu bölümde önce Galilean anlamında regle yüzeylerin yapı fonksiyonları ve regle invaryantları tanımlanacaktır. Sonra G_3 Galilean uzayında küresel eğriyi dayanak eğrisi kabul eden regle yüzeylerin regle invaryantları elde edilecektir.

G_3 Galilean uzayında

$$\varphi(x, v) = c(x) + v\alpha(x)$$

regle yüzey için

$$c: I \rightarrow G_3$$

$$x \rightarrow c(x) = (c_1(x), c_2(x), c_3(x))$$

dayanak eğrisi olup

$$\alpha: I \subset G_3 \rightarrow S_{G_3}^2$$

$$x \rightarrow \alpha(x) = (x(x), y(x), z(x))$$

eğrisi regle yüzeyin doğrultman vektörüdür. Burada $\alpha(x)$ eğrisi birim küresel bir eğri ve dayanak eğrisi $c(x)$ yüzeyin striksiyon çizgisi olup

$$\langle c'(x), \alpha'(x) \rangle_G = \langle c'(x), T(x) \rangle_G = 0$$

dir. Dolayısıyla

$$c'(x) = \lambda(x)N(x) + \mu(x)B(x)$$

dayanak eğrisinin türev denklemi, doğrultman vektörünün teğet vektöründen bağımsızdır.

4.1.Tanım $\lambda(x)$, $\mu(x)$ ve $\kappa_g(x)$ fonksiyonlarına $\varphi(x, v)$ regle yüzeyin Galilean anlamında yapı fonksiyonları denir. $\lambda(x)$ fonksiyonuna $\varphi(x, v)$ regle yüzeyin Galilean anlamında regle öteleme yoğunluk fonksiyonu, $\mu(x)$ fonksiyonuna $\varphi(x, v)$ regle yüzeyin Galilean anlamında regle uzaklık yoğunluk fonksiyonu ve $\kappa_g(x)$ fonksiyonuna $\varphi(x, v)$ regle yüzeyin Galilean anlamında kendi kendine dönme yoğunluk fonksiyonu veya regle açısai yoğunluk fonksiyonu denir.

4.2. Tanım G_3 Galilean uzayında

$$\Lambda = \lambda(x)dx$$

$$M = \mu(x)dx$$

$$K = K_g(x)dx^2$$

şeklinde tanımlanan Λ ve M , 1 – *formlarına* ve K , 2 – *formuna* $\varphi(x, v)$ regle yüzeyinin Galilean anlamında regle invaryantları denir.

4.1. G_3 Galilean Uzayında A-Tipi Regle Yüzeyin İnvaryantları

G_3 Galilean uzayında $x^2 = 1$ denkleminde sahip Galile birim küresi üzerindeki

$$\alpha: I \subset G_3 \rightarrow S_{G_3}^2$$

$$x \rightarrow \alpha(x) = (1, y(x), z(x))$$

eğrisi ve dayanak eğrisi olarak birim hızlı

$$c: I \subset R \rightarrow G_3$$

$$x \rightarrow c(x) = (x, c_2(x), c_3(x))$$

eğrisini ele alalım

$$\varphi: I \times R \rightarrow G_3$$

$$(x, v) \rightarrow \varphi(x, v) = c(x) + v\alpha(x) = (x + v, c_2(x) + vy(x), c_3(x) + vz(x))$$

şeklinde elde edilen yüzey A-tipi regle yüzey olup bundan sonra bu regle yüzey $\varphi_A(x, v)$ şeklinde gösterilecektir. Burada $c(x)$ birim hızlı olup

$$\forall x \in I \text{ için } \langle c'(x), \alpha'(x) \rangle_G = 0$$

olduğundan $c(x)$ dayanak eğrisi, $\varphi_A(x, v)$ regle yüzeyinin sitriksiyon çizgisi olur. $\varphi_A(x, v)$ regle yüzeyin ortanormal üçyüzlüsü $\kappa(x) \neq 0$ olmak üzere

$$t(x) = (1, y(x), z(x))$$

$$n(x) = \frac{1}{\kappa(x)} (0, y'(x), z'(x))$$

$$b(x) = \frac{1}{\kappa(x)} (0, -z'(x), y'(x))$$

ve $\varphi_A(x, v)$ regle yüzeyin türev denklemleri,

$$t'(x) = (0, y'(x), z'(x))$$

$$n'(x) = \tau(x) (0, -z'(x), y'(x))$$

$$b'(x) = -\tau(x) (0, y'(x), z'(x))$$

olur. Burada $\kappa(x)$ ve $\tau(x)$, sırasıyla, A-tipi regle yüzeyin eğriliği ve burulması olup

$$\kappa(x) = \sqrt{(y')^2(x) + (z')^2(x)} \quad \text{ve} \quad \tau(x) = \frac{y'(x)z''(x) - y''(x)z'(x)}{\kappa^2(x)}$$

dir.

4.1.1. Teorem $\varphi_A(x, v)$ regle yüzeyi ile $\alpha(x)$ eğrisinin Frenet çatısı ve türev denklemleri arasında

$$T(x) = n(x)$$

$$T'(x) = n'(x)$$

$$N(x) = t(x)$$

$$N'(x) = t'(x)$$

$$B(x) = -b(x)$$

$$-\tau(x)N'(x) = b'(x)$$

eşitlikleri vardır.

İspat $\varphi_A(x, v)$ regle yüzeyin Frenet çatısı ve türev denklemleri ile Teorem 3.1. de verilen $\alpha(x)$ küresel eğrinin Frenet çatısı ve türev denklemleri karşılaştırıldığında ispat açıktır.

4.1.2. Teorem $\varphi_A(x, v)$ regle yüzeyin eğriliği $\kappa(x) = 1$ olup, $\tau(x)$ burulması ve $\alpha(x)$ eğrisinin $K_g(x)$ eğriliği arasında

$$K_g(x) = -\tau(x)$$

eşitliği vardır.

İspat $\alpha(x) = (1, y(x), z(x))$ eğrisi birim hızlı eğri olup

$$\|\alpha'\|_G = \sqrt{(y')^2 + (z')^2} = 1$$

dir. Dolayısıyla

$$\kappa(x) = \sqrt{(y')^2(x) + (z')^2(x)} = 1$$

ve

$$\begin{aligned} K_g(x) &= z'(x)y''(x) - z''(x)y'(x) \\ &= -\tau(x)\kappa^2(x) \\ &= -\tau(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

4.1.3. Teorem $\varphi_A(x, v)$ regle yüzeyin sitriksiyon çizgisinin teğet vektörü ile doğrultmanının normal vektörü arasında

$$\langle c'(x) - N(x), T'(x) \rangle_G = 1$$

bağıntısı vardır.

İspat $\alpha(x)$ eğrisi, $\varphi_A(x, v)$ regle yüzeyinin sitriksiyon çizgisi olduğundan

$$\langle c'(x), \alpha'(x) \rangle_G = 1$$

dir. Bu eşitlikte türev alınırsa

$$\langle c''(x), \alpha'(x) \rangle_G + \langle c'(x), \alpha''(x) \rangle_G = 0$$

olur. Burada Galile iç çarpımından

$$\langle c'(x), \alpha''(x) \rangle_G = 0$$

$$\langle c''(x), \alpha'(x) \rangle_G = 0 \quad (3.5)$$

dır. $\varphi_A(x, v)$ regle yüzeyin yapı fonksiyonları tanımından

$$c'(x) = \lambda(x)N(x) + \mu(x)B(x)$$

$$(1, c'_2(x), c'_3(x)) = \lambda(x)(1, y(x), z(x)) + \mu(x)(0, z'(x), -y'(x))$$

yazılır ve

$$\lambda(x) = 1$$

$$c'_2(x) = \lambda(x)y(x) + \mu(x)z'(x) = y(x) + \mu(x)z'(x)$$

$$c'_3(x) = \lambda(x)z(x) - \mu(x)y'(x) = z(x) - \mu(x)y'(x)$$

eşitliklerine ulaşılır. $\mu(x)$ fonksiyonu yalnız bırakıldığında

$$\frac{c'_2(x) - y(x)}{z'(x)} = \frac{z(x) - c'_3(x)}{y'(x)}$$

$$c'_2(x)y'(x) - y(x)y'(x) = z(x)z'(x) - c'_3(x)z'(x)$$

olur. Eşitlikte türev alınırsa

$$\begin{aligned} & c''_2(x)y'(x) + c'_2(x)y''(x) - (y')^2(x) - y(x)y''(x) \\ &= (z')^2(x) + z(x)z''(x) - c''_3(x)z'(x) - c'_3(x)z''(x) \\ & c''_2(x)y'(x) + c'_2(x)y''(x) + c''_3(x)z'(x) + c'_3(x)z''(x) \\ &= (z')^2(x) + z(x)z''(x) + (y')^2(x) + y(x)y''(x) \\ & \langle c''(x)', \alpha'(x) \rangle_G + c'_2(x)y''(x) + c'_3(x)z''(x) = z(x)z''(x) + y(x)y''(x) + \\ & \langle c''(x)', \alpha'(x) \rangle_G + y''(x)(c'_2(x) - y(x)) + z''(x)(c'_3(x) - z(x)) = 1 \end{aligned} \quad (3.6)$$

elde edilir. (3.5) ve (3.6) denklemleri birlikte düşünülürse

$$y''(x)(c'_2(x) - y(x)) + z''(x)(c'_3(x) - z(x)) = 1$$

$$\langle c'(x) - \alpha(x), \alpha''(x) \rangle_G = 1$$

$$\langle c'(x) - N(x), T'(x) \rangle_G = 1$$

bulunur.

Sonuç $\varphi_A(x, v)$ regle yüzeyin yapı fonksiyonları

$$\lambda(x) = 1$$

$$\mu(x) = \frac{c'_2(x) - y(x)}{z'(x)}$$

$$K_g(x) = -\tau(x)$$

ve regle invaryantları

$$\Lambda = dx$$

$$M = \frac{c_2'(x) - y(x)}{z'(x)} dx$$

$$K = -\tau(x) dx^2$$

dir.

4.2. G_3 Galilean Uzayında B-Tipi Regle Yüzeyin İnvaryantları

G_3 Galilean uzayında $x^2 = 1$ denkleminde sahip Galile birim küresi üzerindeki

$$\begin{aligned} \alpha: I \subset G_3 &\rightarrow S_{G_3}^2 \\ x \rightarrow \alpha(x) &= (1, y(x), z(x)) \end{aligned}$$

eğrisi ve dayanak eğrisi olarak birim hızlı

$$\begin{aligned} c: I \subset R &\rightarrow G_3 \\ x \rightarrow c(x) &= (0, c_2(x), c_3(x)) \end{aligned}$$

eğrisi ele alınırsa

$$\begin{aligned} \varphi: I \times R &\rightarrow G_3 \\ (x, v) \rightarrow \varphi(x, v) &= c(x) + v\alpha(x) = (v, c_2(x) + vy(x), c_3(x) + vz(x)) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilen yüzey B-tipi regle yüzey olup bundan sonra bu regle yüzey $\varphi_B(x, v)$ şeklinde gösterilecektir. Kabul edelim ki $c(x)$ dayanak eğrisi $\varphi_B(x, v)$ regle yüzeyin sitriksiyon çizgisi olsun. Bu durumda

$$(c_2')^2(x) + (c_3')^2(x) = 1 \quad (3.7)$$

$$\langle c'(x), \alpha'(x) \rangle_G = c_2'(x)y'(x) + c_3'(x)z'(x) = 0 \quad (3.8)$$

olur. $\varphi_B(x, v)$ regle yüzeyin ortanormal üçyüzlüsü $\kappa(x) \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
t(x) &= (1, y(x), z(x)) \\
n(x) &= (0, -c_3'(x), c_2'(x)) \\
b(x) &= (0, c_2'(x), c_3'(x))
\end{aligned}$$

ve $\varphi_B(x, v)$ regle yüzeyin türev denklemleri

$$\begin{aligned}
t'(x) &= \kappa(x)n(x) \\
n'(x) &= \tau(x)b(x) \\
b'(x) &= -\tau(x)n(x)
\end{aligned}$$

olur. Burada $\kappa(x)$ ve $\tau(x)$, sırasıyla, B-tipi regle yüzeyin eğriliği ve burulması olup

$$\kappa(x) = -\frac{y'(x)}{c_3'(x)} \quad \text{ve} \quad \tau(x) = \frac{c_2''(x)}{c_3'(x)}$$

dir.

4.2.1. Teorem $\varphi_B(x, v)$ regle yüzeyi ile $\alpha(x)$ eğrisinin Frenet çatısı ve türev denklemleri arasında

$$\begin{aligned}
t(x) &= N(x) & t'(x) &= N'(x) \\
n(x) &= \frac{1}{\kappa(x)} T(x) & n'(x) &= \frac{\tau(x)}{K_g(x)\kappa(x)} T'(x) \\
b(x) &= \frac{1}{\kappa(x)} B(x) & b'(x) &= \frac{\tau(x)}{K_g(x)\kappa(x)} B'(x)
\end{aligned}$$

eşitlikleri vardır.

İspat $\varphi_B = (x, v)$ regle yüzeyin Frenet çatısı ve türev denklemleri ile Teorem 3.1. de verilen $\alpha(x)$ küresel eğrinin Frenet çatısı ve türev denklemleri karşılaştırıldığında ispat açıktır.

4.2.2. Teorem $\varphi_B(x, v)$ regle yüzeyin yapı fonksiyonları

$$\lambda(x) = 0$$

$$\mu(x) = \frac{1}{\kappa(x)}$$

$$K_g(x) = \tau(x)\kappa^2(x)$$

dir.

İspat $\varphi_B(x, v)$ regle yüzeyin yapı fonksiyonları tanımından

$$c'(x) = \lambda(x)N(x) + \mu(x)B(x)$$

$$(0, c'_2(x), c'_3(x)) = \lambda(x)(1, y(x), z(x) + \mu(x)(0, z'(x), -y'(x))$$

yazılır ve

$$\lambda(x) = 0$$

$$\mu(x) = \frac{c'_2(x)}{z'(x)} = -\frac{c'_3(x)}{y'(x)} = \frac{1}{\kappa(x)}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.7) denkleminde türev alınırsa

$$(c'_2)^2(x) + (c'_3)^2(x) = 1$$

$$2c'_2(x)c''_2(x) + 2c'_3(x)c''_3(x) = 0$$

$$c''_3(x) = -\frac{c'_2(x)c''_2(x)}{c'_3(x)} = -\tau(x)c'_2(x) \quad (3.9)$$

eşitliğine ulaşılır. (3.7) de verilen denklemden

$$\langle c'(x), \alpha'(x) \rangle_G = c'_2(x)y'(x) + c'_3(x)z'(x) = 0$$

$$c'_2(x)y'(x) = -c'_3(x)z'(x)$$

$$\frac{c_2'(x)}{c_3'(x)} = -\frac{z'(x)}{y'(x)}$$

olup türev alınırsa

$$\frac{c_2''(x)c_3'(x) - c_2'(x)c_3''(x)}{(c_3')^2(x)} = \frac{-z''(x)y'(x) + z'(x)y''(x)}{(y')^2(x)}$$

$$\frac{\tau(x)c_3'(x)c_3'(x) - c_2'(x)(-\tau(x)c_2'(x))}{\frac{(y')^2(x)}{\kappa^2(x)}} = \frac{K_g(x)}{(y')^2(x)}$$

$$K_g(x) = \tau(x)\kappa^2(x)$$

eşitliği elde edilir.

Sonuç $\varphi_B(x, v)$ regle yüzeyin regle invaryantları

$$\Lambda = 0$$

$$M = \frac{1}{\kappa(x)} dx$$

$$K = \tau(x)\kappa^2(x)dx^2$$

dir.

4.3. G_3 Galilean Uzayında C-Tipi Regle Yüzeyin İnvaryantları

G_3 Galilean uzayında $y^2(x) + z^2(x) = 1$ denklemine sahip Galile birim küresi üzerindeki

$$\alpha: I \subset G_3 \rightarrow S_{G_3}^2$$

$$x \rightarrow \alpha(x) = (0, y(x), z(x))$$

eğrisi ve dayanak eğrisi olarak birim hızlı

$$c: I \subset R \rightarrow G_3$$

$$x \rightarrow c(x) = (x, c_2(x), 0)$$

eğrisi ele alınırsa

$$\varphi: I \times R \rightarrow G_3$$

$$(x, v) \rightarrow \varphi(x, v) = c(x) + v\alpha(x) = (x, c_2(x) + vy(x), vz(x))$$

şeklinde elde edilen yüzey C-tipi regle yüzey olup, bundan sonra bu regle yüzey $\varphi_C(x, v)$ şeklinde gösterilecektir. Burada $c(x)$ birim hızlı olup

$$\forall x \in I \text{ için } \langle c'(x), \alpha'(x) \rangle_G = 0$$

dır ve $c(x)$ dayanak eğrisi $\varphi_C(x, v)$ regle yüzeyinin sitriksiyon çizgisidir. $\varphi_C(x, v)$ regle yüzeyin ortanormal üçyüzlüsü $\kappa(x) \neq 0$ olmak üzere

$$t(x) = (1, c'_2(x), 0)$$

$$n(x) = (0, y(x), z(x))$$

$$b(x) = (0, -z(x), y(x))$$

ve $\varphi_C(x, v)$ regle yüzeyin türev denklemleri

$$t'(x) = (0, c_2''(x), 0) = \kappa(x)(n(x) \cos \psi(x) - b(x) \sin \psi(x))$$

$$n'(x) = \frac{1}{\delta(x)} (0, -z(x), y(x))$$

$$b'(x) = -\frac{1}{\delta(x)} (0, y(x), z(x))$$

olur. Burada $\kappa(x)$ ve $\delta(x)$, sırasıyla, C-tipi regle yüzeyin eğriliği ve drali olup

$$\kappa(x) = c_2''(x) \text{ ve } \delta(x) = -\frac{z(x)}{y'(x)}$$

dir ve ψ açısı, $z = 0$ düzlemi ile $\varphi_C(x, v)$ regle yüzeyin doğrultmanı arasında kalan açıdır.

4.3.1.Teorem $\varphi_C(x, v)$ regle yüzey ile $\alpha(x)$ eğrisinin Frenet çatısı ve türev denklemleri arasında

$$n(x) = N(x), b(x) = -T(x), n'(x) = -\frac{1}{\delta(x)}N'(x)$$

eşitlikleri vardır.

İspat $\varphi_C(x, v)$ regle yüzeyin Frenet çatısı ve türev denklemleri ile Teorem 3.1. de verilen $\alpha(x)$ küresel eğrinin Frenet çatısı ve türev denklemleri karşılaştırıldığında ispat açıktır.

4.3.2.Teorem $\varphi_C(x, v)$ regle yüzeyin yapı fonksiyonları

$$\lambda(x) = \frac{c'_2(x)}{y(x)}$$

$$\mu(x) = \mp 1$$

$$K_g(x) = 1$$

dir.

Sonuç $\varphi_C(x, v)$ regle yüzeyin regle invaryantları

$$\Lambda = \frac{c'_2(x)}{y(x)}$$

$$M = \mp 1 dx$$

$$K = 0$$

dır.

Sonuç $\varphi_C(x, v)$ regle yüzeyin $\delta(x)$ fonksiyonu

$$\delta(x) = \mp 1$$

dir.



5. SONUÇ VE ÖNERİLER

G_3 Galilean uzayında regle yüzeyler, yüzeyin dayanak eğrisine göre A, B, C tipinde olmak üzere üç farklı tiptedir. Buna bağlı olarak G_3 Galilean uzayında küresel eğri ve bu eğriyi baz eğrisi kabul eden regle yüzeylerin regle invaryantları elde edildi.

$x^2 = 1$ denkleminde sahip Galile küresinde alınan birim hızlı eğrimiz

$$\alpha(x) = (1, y(x), z(x))$$

ve dayanak eğrimiz

$$c(x) = (x, c_2(x), c_3(x))$$

olmak üzere A-tipi regle yüzey ve regle invaryantları elde edilebildiği görüldü.

$x^2 = 1$ denkleminde sahip Galile küresinde alınan birim hızlı eğri

$$\alpha(x) = (1, y(x), z(x))$$

dayanak eğrisi

$$c(x) = (0, c_2(x), c_3(x))$$

olarak alındığında sırasıyla A-tipi ve B-tipi regle yüzeyler ile buna bağlı regle invaryantlarının elde edilebildiği fakat C-tipi regle yüzey elde edilemediği görüldü. Yine

$y^2(x) + z^2(x) = 1$ denkleminde sahip Galile küresinde alınan birim hızlı eğri

$$\alpha(x) = (0, y(x), z(x))$$

dayanak eğrisi

$$c(x) = (x, c_2(x), 0)$$

olarak alındığında sadece C-tipi regle yüzey ve buna bağlı regle invaryantlarının elde edilebildiği görüldü.

Bu çalışmada; G_3 Galilean uzayında, Galilean birim küre yüzeyi üzerindeki bir eğriyi dayanak eğrisi kabul eden regle yüzeylerin regle invaryantları üzerinde çalışılmıştır. İleride Yarı-Galilean uzayda birim küre üzerindeki eğri için de benzer araştırmalar yapılabilir.



KAYNAKLAR

- Bektaş, M. (2004). On Characterizations of General Helices for Ruled Surfaces in the Pseudo-Galilean Space $G(3)(1)$ -(Part-I), *Journal of Mathematics of Kyoto University*, 44 (3), 523-528.
- Bektaş, M. (2006). On Characterizations of General Helices for Ruled Surfaces in the Pseudo-Galilean Space $G(3)(1)$ -(Part-II), *Thai Journal of Mathematics*, 4 (2), 389-394.
- Carmo, M. P. (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Divjak, B. (1998). Curves in Pseudo-Galilean Geometry, *Annales Univ. Sci. Budapest*, 41(1998),117-128.
- Divjak, B. and Sipus, Z. M. (2002). Special Curves on the Ruled Surfaces in Galilean and Pseudo-Galilean Spaces, *Acta Mathematica Hungarica*, 98, 203-215.
- Divjak, B. and Sipus Z. M. (2003). Minding's Isometries of Ruled Surface in Galilean and Pseudo-Galilean Space, *Journal of Geometry*, 77(1), 35-47.
- Hakim, J. (2004). *The Story of Science Aristotle Leads the Way*, Smithsonian Books, Washington and New York.
- Hakim, J. (2007). *The Story of Science Einstein Adds a New Dimensions*, Smithsonian Books, Washington and New York.
- Liu, H., Liu, Y. and Jung, S. D. (2018). Ruled Invariants and Associated Ruled Surfaces of a Space Curve, *Applied Mathematics and Computation*, 348, 479-486.
- Liu, H., Yu, Y. and Jung, S. D. (2014). Invariants of non Developable Ruled Surfaces in Euclidean 3-Space, *Beitraege zur Algebra und Geometrie*, 55, 189–199.
- Liu, H. and Yuan, Y. (2012). Pitch Functions of Ruled Surfaces and B-Scrolls in Minkowski 3-Space, *Journal of Geometry and Physics*, 62 (1), 47–52.
- Ögrenmiş, A.O., Ergüt, M. and Bektas, M. (2007). On the Helices in the Galilean Space $G(3)$, *Iranian Journal of Science and Technology Transaction A-Science*, 31 (A2), 177-181.
- Ögrenmiş, A.O., Öztekin, H. and Ergüt, M. (2009). Bertrand Curves in Galilean Space and their Chravterizations, *Kragujevac Journal of Mathematics*, 32, 139-147.
- Pavkovic B. J. and Kamenarovic I. (1987). The Equiform Differential Geometry of Curves in the Galilean Space G_3 , *Glasnik Mathematics*, 22 (42), 449-457.
- Röschel, O. (1984). *Die Geometrie Des Galileischen Raumes*, Habilitationsschrift, Leoben.

- Sipus, Z. M. (2008). Ruled Weingarten Surfaces in the Galilean Space, *Periodica Mathematica Hungarica*, 56(2), 213-225.
- Yaglom I.M. (1979). *A Simple Non-Euclidean Geometry and Physical Basis*, Springer, Verlag, New York.
- Yu, Y., Liu, H. and Jung, S. D. (2014). Structure and Characterization of Ruled Surfaces in Euclidean 3-Space, *Applied Mathematics and Computation*, 233, 252–259.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı-Soyadı : Duygu AYDOĞAN

Eğitim Derecesi

Okul/Program

Mezuniyet Yılı

Lisans

Amasya Üniversitesi/ Matematik

2015

Lise

Alparslan Lisesi

2005

İş Deneyimi/Yıl

Çalıştığı Yer

Görevi

2014/2015

Suluova Hürriyet Ortaokulu

Matematik Öğretmeni

2015/2016

Ümitköy Özel Grup Matematik

Matematik Öğretmeni

2017/2020

Jale Tezer Koleji

Matematik Öğretmeni

2020/2022

Özel Desem Özel Öğretim Kursu

Matematik Öğretmeni

2022/-

Odtülüler Eğitim Kurumları

Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler),

Aydoğan, D. ve Orbay, K. (2022). Structure Functions of Ruled Surfaces in the Galilean Space, *19th International Geometry Symposium*, 27-30 June 2022, Edirne-Türkiye.