



T.C.

TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MATEMATİK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

GAMMA YAKIN-HALKALARIN BİPOLAR ESNEK İDEALLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Seher KAHRAMAN

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Filiz ÇITAK

TOKAT- 2022

ETİK SÖZLEŞME

Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Filiz ÇITAK danışmanlığında hazırlamış olduğum “Gamma Yakın-Halkaların Bipolar Esnek İdealleri” adlı Yüksek Lisans tezinin bilimsel etik değerlere ve kurallara uygun, özgün bir çalışma olduğunu, aksinin tespit edilmesi halinde her türlü yasal yaptırımını kabul edeceğimi beyan ederim.

25/11/2022

Seher KAHRAMAN



JÜRİ KABUL VE ONAY

Seher KAHRAMAN tarafından hazırlanan “**Gamma Yakın-Halkaların Bipolar Esnek İdealleri**” adlı tez çalışmasının savunma sınavı 25.11.2022 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen Jüri tarafından Oy Birliği / Oy Çokluğu ile Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri (Unvanı, Adı Soyadı)

İmzası

Üye (Başkan): Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN

Üye: Prof. Dr. Naim ÇAĞMAN

Üye (Danışman): Dr. Öğr. Üyesi Filiz ÇITAK

ONAY

...../...../.....

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

ÖZET

GAMMA YAKIN-HALKALARIN BİPOLAR ESNEK İDEALLERİ

Seher KAHRAMAN

Yüksek Lisans, Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Filiz ÇITAK

Kasım 2022, 63 sayfa

Bilimsel çalışmaların ilerlemesiyle birlikte belirsizlik içeren problemler ortaya çıkmıştır. Klasik matematik, bu belirsizlik içeren problemleri anlamlandırmada ve modelleyebilmede yetersiz kalmıştır. Bu yetersizlikten dolayı bilim insanları yeni teoriler ortaya atmıştır. Bunlardan biri esnek küme teorisidir. Esnek küme teorisi ilk olarak Molodtsov tarafından çalışılmıştır. Daha sonra birçok araştırmacı esnek kümeleri kullanarak farklı alanlarda çeşitli çalışmalar yapmışlardır. Bu tez çalışmasında ilk olarak cebirle ilgili temel tanım ve teoremlere yer verildi. Sonrasında gamma halkalar, yakın-halkalar, gamma yakın-halkalar ve esnek kümeler tanım ve teoremlerle incelendi. İkinci bölümde bazı bipolar esnek yapılar araştırıldı. Bunlar sırasıyla bipolar esnek kümeler, bipolar esnek gruplar ve yakın-halkalarda bipolar esnek ideallerdir. Daha sonra bir gamma yakın-halkanın bipolar esnek idealleri tanımlandı. Bu cebirsel yapının bazı temel özellikleri incelendi. Bipolar esnek idealler yardımıyla bipolar esnek koset kümesi oluşturuldu ve bu kümenin bir gamma yakın-halka olduğu gösterildi. Devamında bipolar esnek koset kümesi yardımıyla bipolar esnek küme tanımlandı ve bu kümenin bir bipolar esnek ideal olduğu gösterildi. Son olarak gamma yakın-halkanın bipolar esnek idealleri yardımıyla bir fonksiyon tanımlandı ve bu fonksiyonun gamma yakın-halka epimorfizma olduğu gösterilerek tez çalışması sonlandırıldı.

ANAHTAR KELİMELER: Esnek kümeler, Bipolar esnek kümeler, Gamma halkalar, Yakın-halkalar, Gamma yakın-halkalar, Bipolar esnek idealler

ABSTRACT

BIPOLAR SOFT IDEALS OF GAMMA NEAR-RINGS

Seher KAHRAMAN

Master's Thesis, Division of Algebra and Number Theory

Advisor: Assoc.Prof. Filiz Çıtak

November 2022, 63 pages

With the advancement of scientific studies, problems involving uncertainty have emerged. Classical mathematics was insufficient to model or make sense of these uncertain problems. Due to this insufficiency, scientists have put forward new theories. One of them is the soft set theory, which was first studied by Molodtsov. Then, many researchers have done various studies in different fields using soft sets. In this thesis, first of all, basic definitions and theorems about algebra were given. Afterward, gamma rings, near-rings, near-gamma-rings and soft sets are examined with definitions and theorems have been studied. In the second part, some bipolar soft structures such as bipolar soft sets, bipolar soft groups, and bipolar soft ideals in near-rings were investigated. In addition to this, bipolar soft ideals of a gamma near-ring were defined. Some basic properties of this algebraic structure have been analyzed. Bipolar soft coset set was defined with the help of bipolar soft ideals and this set was shown to be a gamma near-ring. Finally, a function was defined with the help of bipolar soft ideals of a gamma near-ring and this study was concluded by showing that this function is a gamma near-ring epimorphism.

KEYWORDS: Soft sets, Bipolar soft sets, Gamma rings, Near-rings, Gamma near-rings, Bipolar soft ideals

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın tamamlanmasında büyük emeği bulunan, tezin yönlendirilmesi ve araştırmaların yürütülmesi ile ilgili her türlü bilgi ve deneyimini benimle paylaşan, özverili ve anlayışlı yaklaşımı ile yoluma ışık tutan, her zaman desteğini hissettiğim tez danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Filiz Çıtak’a (Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi) teşekkürü bir borç bilirim.

Desteği, sevgisi ve sabrı ile her zaman yanımda olan aileme, sevgili Doç. Dr. Derya Kahraman Döğüşcü ablama ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Seher KAHRAMAN

25 Kasım 2022

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	i
ABSTRACT.....	ii
ÖNSÖZ	iii
İÇİNDEKİLER	iv
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	5
2.1 Temel Tanımlar ve Teoremler	5
2.2 Gamma Halkalar, Yakın-Halkalar ve Gamma Yakın-Halkalar	9
2.3 Esnek Kümeler	15
3. BİPOLAR ESNEK YAPILAR.....	20
3.1 Bipolar Esnek Kümeler	20
3.2 Bipolar Esnek Gruplar	26
3.3 Yakın-Halkalarda Bipolar Esnek İdealler	33
4. GAMMA YAKIN-HALKANIN BİPOLAR ESNEK İDEALLERİ	37
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	52
6. KAYNAKLAR	53
7. ÖZGEÇMİŞ.....	Hata! Yer işareti tanımlanmamış.

1. GİRİŞ

İnsanlık tarihi var olduğundan bu yana matematiğe ihtiyaç duyulmaktadır. Matematiğin hayatı anlamlandırmada önemli rol oynadığı şüğüdürmez bir gerçektir. Bilimin ilerlemesi matematik çalışmalarının ilerlemesiyle doğrudan ilişkili olan disiplinler arası çalışmaları gerektirmektedir. Önceleri Aristo mantığının ön planda olduğu kesin sonuçlar elde edilirken, insanlık tarihinin gelişmesiyle teknolojik ihtiyaçlar doğrultusunda klasik matematik yeterli gelmemiştir. Klasik mantık ile çözülemeyen belirsizlik durumları, bulanık (fuzzy) küme teorisi (Zadeh, 1965), kaba (rough) küme teorisi (Pawlak, 1982), esnek (soft) küme teorisi (Molodstov, 1999) gibi kavramları karşımıza çıkarmıştır.

Zadeh'in bulanık küme çalışmasını anlamak için basit bir mekanizma olan radyo ele alınabilir. Radyoda sesin 'kapalı', 'açık' kesin ifadelerine ek olarak 'ses düzeyini artırma, azaltma' eklendiğinde karar verme mekanizmasında aralık elde edilmiş olur. İşte bu aralık $[0,1]$ gerçık sayılar aralığıyla elde edilir. Zadeh'in çalışması, gerçık hayat durumlarında kesin olmayan ifadelerde karar vermeyi kolaylaştıran modellenmeyi bilim dünyasına sunar. Zadeh'in "biraz basit biraz da eğlenceli" dediğı fikir daha sonrasında bilim dünyasının bakış açısını değiştirmeye, teknoloji dünyasında da makinaları insanlaştırmaya ön adım olmuştur. Zadeh, yaptığı çalışma ile klasik mantığın oluşturduğu keskinliği ortadan kaldırmış, bilim dünyasında yeni bir ufuk açmıştır. 1970 yılında, Londra Queen Mary College'de Prof. Ebrahim H. Hamdani tarafından bir buhar makinesinde bulanık mantık ilk kez uygulanmıştır (Arı, 1995). 1980 yılındaysa, Danimarka'daki bir çimento fabrikasının fırınıını kontrol etmede kullanılmıştır. Fırında kullanılan kimyasalların yakılmasında sıcaklığının çok ya da az olmasını bulanık mantık ile çözümlemişlerdir. Böylece hassas ölçümlerin yapılmasına ve hataların önüne geçilmesine sebebiyet oluşturmuşlardır (Alan, 2003).

Akademi dünyasında ise bilimsel çalışmalar kronolojik olarak şu şekildedir: Nobusawa (1964), halkaları incelemiş, Barnes (1966), Nobusawa'nın gamma halkaları üzerine çalışmıştır. 1971 yılına gelindiğinde Rosenfeld tarafından bulanık kümelerin cebirsel yapıları incelenmiştir, ardından ilk kez bulanık grup tanımını yapmıştır. Daha sonra Giles (1979), bulanık küme ve çok değerli mantık arasında ilişki kurmuştur. Pilz (1983), yakın

halka çalışmış, sonrasında Atanassov (1986) sezgisel bulanık küme ve Booth (1988) gamma yakın halkalar ve Zhang (1994) bipolar bulanık kümeler üzerine ilk incelemeyi yapmıştır.

Bulanık kümede yapılan işlemler için gerekli olan üyelik fonksiyonu belirlenmesinde oluşan zorluklardan dolayı bilim insanları, üyelik fonksiyonu olmaksızın bir belirsizlik oluşturmak istemişlerdir. Çalışmaların sonucunda Molodstov (1999) tarafından üyelik fonksiyonuna ihtiyaç duyulmadan elde edilen esnek küme teorisini ortaya atılmıştır. Molodstov; oyun teorisi, olasılık teorisi, Riemann integrali, ölçüm teorisi gibi birçok alana esnek küme teorisini uygulamıştır (1999). Molodstov'un çalışmaları bilim dünyasında takip edilmiş, Maji ve arkadaşları (2003) esnek kümenin cebirsel yapılarını incelemiş, küme işlemlerini tanımlamışlardır. Chen ve arkadaşları (2005), esnek kümeler kullanılarak esnek bağıntı, esnek fonksiyon, esnek dönüşüm gibi birçok çalışma yapmışlardır. Dutta ve Chanda (2005), gamma halkanın bulanık ideallerinin yapılarını incelemişlerdir. Feng ve arkadaşları (2008), esnek yarı halkalar üzerine ve Nandakumar (2009) yakın halka çalışmışlardır. Feng ve arkadaşları (2010), bulanık kümeler ile kaba kümelerin esnek kümeler üzerinde çalışmalar yapmışlardır. Çağman ve Enginoğlu (2010) esnek küme tanımını yeniden oluşturup daha fonksiyonel hale getirmişlerdir. Ali (2010) ise bulanık kümeler ve kaba kümeleri birleştirerek esnek kümeler üzerinde çalışmışlardır. Aktaş ve Çağman (2010) çalışmalarının sonucunda esnek kesişimsel grup, esnek grup tanımını yapmışlardır ve bulanık küme ile esnek küme arasındaki ilişkiyi incelemişlerdir.

Babitha ve Sunil (2010) esnek bağıntı ve fonksiyon, Gong ve arkadaşları (2010) birebir ve örten esnek kümeler, Majumdar ve Samanta (2010) bulanık esnek kümeler, Jiang ve arkadaşları (2010) aralık değerli sezgisel esnek kümeler üzerine çalışmalar yapmışlardır. Yetiş (2010) gamma halkalar ve Uma ve arkadaşları (2010) yakın halka üzerinde çalışmışlardır. Yine aynı yıl Acar ve arkadaşları (2010), esnek küme ve esnek halkalar, Çağman ve Enginoğlu (2010) esnek matris teori ve esnek kümeler ile ilgili çalışmalar yürütmüşlerdir. Feng ve arkadaşları (2011), esnek kümeler ve esnek kaba kümeleri çalışmışlardır. Çağman ve arkadaşları (2011), FP-esnek küme teorisi üzerine çalışma yapmış, Sezgin ve arkadaşları (2011) esnek yakın halkalar, Akkaymak (2012) yakın halkalar ile ilgili çalışmalar yapmıştır. Onar (2012) bulanık esnek gamma halka ve aynı

yıl arkadaşları ile bulanık esnek gamma halkalar çalışmıştır. Sezgin ve arkadaşları (2012) esnek kesişimsel yakın halkalar, Çağman ve arkadaşları (2012) bipolar esnek grup tanımlamış ve bazı cebirsel özelliklerini araştırmışlardır. Aynı yıl Çağman ve Deli (2012), FP-esnek küme üzerine çalışma yapmışlardır. Sut (2012) bulanık esnek bağıntı çalışmıştır. Satyanarayana (2012) gamma yakın halkalar çalışmıştır. Gündüz ve Bayramov (2013) sezgisel bulanık esnek modülleri tanımlamış, bazı özellikleri incelemiş, Baik (2013) ise yakın halkaların bipolar bulanık ideallerini üzerinde çalışmıştır. Karaaslan ve arkadaşları (2013) bulanık esnek grup hakkında çalışmalar yürütmüşlerdir. Devamındaysa Shabir ve Naz (2013), bipolar esnek kümeleri tanımlamışlardır. Karaaslan ve Karataş (2014) ise bipolar esnek kümelerle ilgili çalışmalara devam etmişlerdir. Abdullah ve arkadaşları (2014) bipolar bulanık esnek kümeler ile ilgili çalışmalar yapmışlardır. Akram ve arkadaşları (2014), bipolar bulanık esnek yarıgrupların karakterizasyonu, Çağman (2014), esnek kümeler teorisi üzerine çalışma yürütmüşlerdir. Abdullah ve arkadaşları (2014), bipolar bulanık esnek küme üzerine çalışmışlardır. Naz ve Shabir (2014) bipolar bulanık esnek kümelerin cebirsel yapılarını, Çıtak ve Çağman (2015) esnek kesişimsel halkaların cebirsel yapılarını, Ersoy ve arkadaşları (2015) ise bulanık esnek gamma yakın halkanın yapısını incelemişlerdir. Maji (2015), netrosofik esnek kümeler üzerine çalışmıştır.

Bilim dünyasında çalışmalar devam ederken Karaaslan ve arkadaşları (2016) yeni yaklaşımlarıyla bipolar esnek grubu tanımlamışlardır. Atagün ve Aygün (2016) esnek kümeler üzerine ve Karaaslan (2016) bipolar esnek kaba bağıntı üzerine çalışmalar yapmışlardır. Hayat ve Mahmood (2016) bipolar esnek kümelerin bazı cebirsel yapılarını incelemiştir. Çıtak (2018) yarı halkaların esnek birleşimsel idealler üzerine çalışmıştır. Çıtak ve Çağman (2017) yarı halkaların esnek kesişimsel ideallerin cebirsel yapılarını incelemişlerdir. Massa'deh (2017) bipolar bulanık kosetler, bipolar bulanık idealler ve gamma yakın halkanın izomorfizması üzerine çalışmıştır. Khan ve arkadaşları (2019) çoklu bulanık bipolar esnek kümeleri incelemişlerdir. Anitha ve Yasodara (2019) bipolar alt grupları üzerine, Genç (2019) gamma halka üzerine çalışmışlardır. Sezgin ve arkadaşları (2019) esnek küme yoluyla grup teorisi tanımlayıp incelemişlerdir. Çıtak (2022) ise yakın halkalarda bipolar esnek ideali incelemişlerdir. Esnek kümeler

kullanılarak yeni cebirsel yapılar tanımlaması son yıllarda oldukça yoğun bir şekilde devam etmektedir.

Bu tez çalışmasında yukarıda bahsi geçen çalışmalar incelenmiş, ardından gamma yakın-halkaların bipolar esnek idealleri konu alınmıştır. Tez çalışmasında ilk olarak cebirle ilgili temel tanım ve teoremlere yer verildi. Sonrasında gamma halkalar, yakın-halkalar, gamma yakın-halkalar ve esnek kümeler incelendi. Daha sonra, bipolar esnek kümeler, bipolar esnek gruplar ve yakın- halkalarda bipolar esnek idealler araştırıldı. Son olarak, bir gamma yakın-halkanın bipolar esnek ideali tanımlanarak bazı temel özellikleri incelendi. Bipolar esnek idealler yardımıyla bipolar esnek koset kümesi oluşturuldu ve bu kümenin bir gamma yakın-halka olduğu gösterildi. Koset kümesi yardımıyla bipolar esnek küme tanımlanarak bu kümenin bir bipolar esnek ideal olduğu ispatlandı. Gamma yakın-halkanın bipolar esnek ideali yardımıyla bir dönüşüm tanımlanarak bu dönüşümün gamma yakın-halka epimorfizması olduğu gösterilerek tez çalışması sonlandırıldı.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Temel Tanımlar ve Teoremler

Bu bölümde tezde kullanılacak olan grup ve halkalarla ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 2.1.1. G boştan farklı bir küme ve “ $\cdot$ ” G üzerinde tanımlı ikili işlem olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $(G, \cdot)$ cebirsel yapısına bir grup denir (Arıkan ve Halıcıoğlu, 2015).

- i. $\forall g_1, g_2, g_3 \in G$ için $(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$ tür (Birleşme özelliği).
- ii. $\forall g \in G$ için $g \cdot e_G = e_G \cdot g = g$ olacak şekilde bir $e_G \in G$ vardır (Birim eleman özelliği).
- iii. $\forall g \in G$ için $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e_G$ olacak şekilde bir $g^{-1} \in G$ vardır (Ters eleman özelliği).

Ayrıca $\forall g_1, g_2 \in G$ için $g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1$ ise G grubuna değişmeli (abel) grup denir.

Not 2.1.2. $(G, \cdot)$ cebirsel yapısı birleşme özelliğini sağlıyorsa yarı grup olarak tanımlanır (Arıkan ve Halıcıoğlu, 2015).

Not 2.1.3. Bundan sonra G grubunda “ $g_1 \cdot g_2$ ” yerine “ $g_1 g_2$ ” ifadesi kullanılacaktır.

Tanım 2.1.4. G bir grup ve $\emptyset \neq H \subseteq G$ olsun. H , G nin işlemine göre grup şartlarını sağlıyorsa, H ye G nin alt grubu denir. $H \leq G$ ile gösterilir (Arıkan ve Halıcıoğlu, 2015).

Örnek 2.1.5. G bir grup ve e_G , G nin birim elemanı olsun. $\{e_G\}$ ve G alt kümeleri, G nin birer alt grubudur (Arıkan ve Halıcıoğlu, 2015).

Tanım 2.1.6. G bir grup ve e_G , G nin birim elemanı olsun. $\{e_G\}$ ve G alt grubuna G nin aşikar alt grubu denir (Arıkan ve Halıcıoğlu, 2015).

Teorem 2.1.7. G bir grup ve $\emptyset \neq H \subseteq G$ olsun. H nin, G nin bir alt grubu olması için gerek ve yeter şart

- i. $\forall h_1, h_2 \in H$ için $h_1 h_2 \in H$,
- ii. $\forall h_1 \in H$ için $h_1^{-1} \in H$.

Not 2.1.8. Toplamsal gruplar için bu teoremdeki i. ve ii. şartları aşağıdaki gibidir:

- i. $\forall h_1, h_2 \in H$ için $h_1 + h_2 \in H$,
- ii. $\forall h_1 \in H$ için $-h_1 \in H$.

(Arıkan ve Halıcıoğlu, 2015).

Tanım 2.1.9. G bir grup ve $H \leq G$ olsun. $\forall g \in G$ ve $\forall h \in H$ için $ghg^{-1} \in H$ oluyorsa H alt grubuna G grubunun normal alt grubu denir. $H \triangleleft G$ ile gösterilir (Arıkan ve Halıcıoğlu, 2015).

Tanım 2.1.10. $(G, *)$ ve $(H, \circ)$ iki grup olmak üzere $\theta: G \rightarrow H$ bir fonksiyon olsun.

$\forall g_1, g_2 \in G$ için $\theta(g_1 * g_2) = \theta(g_1) \circ \theta(g_2)$ ise θ ya G den H ye bir grup homomorfizması denir.

Eğer θ homomorfizması birebir ise monomorfizma, örten ise epimorfizma, birebir ve örten ise izomorfizma olarak isimlendirilir. Ayrıca $G = H$ ve θ homomorfizma ise θ ya endomorfizma, θ izomorfizma ise θ ya otomorfizma denir (Arıkan ve Halıcıoğlu, 2015).

Tanım 2.1.11. $\theta: G \rightarrow H$ bir grup homomorfizması olmak üzere $\text{Ker}\theta = \{g \in G : \theta(g) = e_H\}$ kümesine θ nın çekirdeği denir (Arıkan ve Halıcıoğlu, 2015).

Örnek 2.1.12. P ve T değişmeli gruplar olsun.

$H = \text{Hom}(P, T) = \{h : P \rightarrow T, h \text{ homomorfizma}\}$ ve $\Gamma = \text{Hom}(T, P) = \{n : T \rightarrow P, n$

homomorfizma} olmak üzere H ve Γ kümeleri üzerinde toplama işlemi $\forall h_1, h_2 \in H$

ve $n_1, n_2 \in \Gamma$ için $(h_1 + h_2)(p) = h_1(p) + h_2(p)$ ve $(n_1 + n_2)(t) = n_1(t) + n_2(t)$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda, H ve Γ toplamsal değişmeli gruptur.

İlk olarak $\forall h_1, h_2 \in H$ için değişme özelliğini gösterelim. $\forall p \in P$ için

$$(h_1 + h_2)(p) = h_1(p) + h_2(p) = h_2(p) + h_1(p) = (h_2 + h_1)(p)$$

$$h_1 + h_2 = h_2 + h_1$$

elde edilir.

i. $h_1 : P \rightarrow T$ ve $h_2 : P \rightarrow T$ ye olduğundan $h_1 + h_2 : P \rightarrow T$ dir. $\forall h_1, h_2 \in H$ için $h_1 + h_2 \in H$ nin homomorfizma olduğunu gösterelim.

$\forall p, k \in P$ için $(h_1 + h_2)(p + k) = (h_1 + h_2)(p) + (h_1 + h_2)(k)$ eşitliğini gösterelim.

$(h_1 + h_2)(p + k) = h_1(p + k) + h_2(p + k)$ için h_1 ve h_2 homomorfizma olduğundan

$$\begin{aligned} h_1(p + k) + h_2(p + k) &= h_1(p) + h_1(k) + h_2(p) + h_2(k) \\ &= h_1(p) + h_2(p) + h_1(k) + h_2(k) \\ &= (h_1 + h_2)(p) + (h_1 + h_2)(k) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $h_1 + h_2 \in H$ bir homomorfizmadır.

ii. $\forall h_1, h_2, h_3 \in H$ için birleşme özelliğini gösterelim. $\forall p \in P$ için

$$\begin{aligned} ((h_1 + h_2) + h_3)(p) &= (h_1 + h_2)(p) + h_3(p) \\ &= (h_1(p) + h_2(p)) + h_3(p) \\ &= h_1(p) + (h_2(p) + h_3(p)) \\ &= h_1(p) + (h_1 + h_2)(p) \\ &= (h_1 + (h_1 + h_2))(p) \end{aligned}$$

oldüğundan birleşme özelliği sağlar.

iii. $\forall h_1 \in H$ için birim eleman özelliğini gösterelim. $\forall p \in P$ için $h_1(p) + h_2(p) = h_1(p)$ olacak şekilde $h_2(p) = e_T$ ve $h_2 \in H$ için h_2 , aşıkâr homomorfizmadır ve H nin birim elemanıdır.

iv. $\forall h_1 \in H$ için ters eleman özelliğini gösterelim. $\forall p \in P$ için $h_1(p) + h_2(p) = e_T$ eşitliğini sağlayan $h_2(p) = -h_1(p)$ ve $h_2 \in H$ için $h_2 = -h_1$ fonksiyonudur. Böylece H bir değişmeli gruptur. Aynı işlemler ile Γ nın da değişmeli grup olduğu gösterilebilir (Yetiş, 2010).

Tanım 2.1.13. R boştan farklı bir küme ve "+", ".", R üzerinde tanımlı ikili işlem olsun.

Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $(R, +, \cdot)$ yapısına bir halka denir.

- i. $(R, +)$ bir değişmeli (abelyan) gruptur.
- ii. $\forall r_1, r_2, r_3 \in R$ için $r_1 \cdot (r_2 \cdot r_3) = (r_1 \cdot r_2) \cdot r_3$ (Birleşme özelliği).
- iii. $\forall r_1, r_2, r_3 \in R$ için $r_1 \cdot (r_2 + r_3) = (r_1 \cdot r_2) + (r_1 \cdot r_3)$ ve $(r_1 + r_2) \cdot r_3 = (r_1 \cdot r_3) + (r_2 \cdot r_3)$ dir (Sağdan ve soldan dağılma özelliği).

Bunlara ek olarak,

- i. $\forall r_1, r_2 \in R$ için $r_1 \cdot r_2 = r_2 \cdot r_1$ ise R ye değişmeli halka denir.
- ii. $\forall r \in R$ için $r \cdot e_R = e_R \cdot r = r$ olacak şekilde bir $e_R \in R$ var ise e_R ye halkanın birimi, R de birimli halka denir.

(Arıkan ve Halıcıoğlu, 2015).

Not 2.1.14. Bundan sonra R halkasında " $r_1 \cdot r_2$ " yerine " $r_1 r_2$ " ifadesi kullanılacaktır.

Tanım 2.1.15. R bir halka ve $\emptyset \neq A \subseteq R$ için A , R nin işlemlerine göre halka şartlarını sağlıyorsa A ya R nin alt halkası denir (Arıkan ve Halıcıoğlu, 2015).

Teorem 2.1.16. R bir halka ve $\emptyset \neq A \subseteq R$ olsun. A , R nin alt halkası olması için gerek ve yeter şart

- i. $\forall r_1, r_2 \in A$ için $r_1 - r_2 \in A$
- ii. $\forall r_1, r_2 \in A$ için $r_1 r_2 \in A$

olmasıdır (Arıkan ve Halıcıoğlu, 2015).

Tanım 2.1.17. R ve S iki halka, $\theta: R \rightarrow S$ bir fonksiyon olsun. $\forall r_1, r_2 \in R$ için

$\theta(r_1 + r_2) = \theta(r_1) + \theta(r_2)$ ve $\theta(r_1 r_2) = \theta(r_1)\theta(r_2)$ ise θ ya R den S ye bir halka homomorfizması denir.

Eğer θ homomorfizması birebir ise monomorfizma, örten ise epimorfizma, birebir ve örten ise izomorfizma olarak isimlendirilir (Arıkan ve Halıcıoğlu, 2015).

Tanım 2.1.18. R bir halka ve $r \in R$ olsun. Eğer $r^2 = r$ ise r ye idempotent eleman denir (Arıkan ve Halıcıoğlu, 2015).

Örnek 2.1.19. R değişmeli bir halka olmak üzere R deki idempotent elemanların kümesinin çarpımsal kapalı olduğunu gösterelim.

R deki idempotent elemanların kümesi A olsun. Buna göre $r_1, r_2 \in A$ için $r_1 r_2 \in A$ olduğunu gösterelim. R değişmeli ve $r_1^2 = r_1, r_2^2 = r_2$ olduğundan

$(r_1 r_2)^2 = r_1 r_2 r_1 r_2 = r_1 r_1 r_2 r_2 = r_1^2 r_2^2 = r_1 r_2$ dir. Böylece R deki idempotent elemanların kümesi çarpımsal kapalıdır (Arıkan ve Halıcıoğlu, 2015).

Tanım 2.1.20. R bir halka ve $\emptyset \neq I \subseteq R$ olsun. Eğer

- i. $\forall i_1, i_2 \in I$ için $i_1 - i_2 \in I$,
- ii. $\forall r \in R$ ve $\forall i_1 \in I$ için $i_1 r$ ve $r i_1 \in I$

ise I ya R nin bir ideali denir (Arıkan ve Halıcıoğlu, 2015).

2.2 Gamma Halkalar, Yakın-Halkalar ve Gamma Yakın-Halkalar

Bu bölümde gamma halkalar, yakın-halkalar ve gamma yakın-halkalar ile ilgili temel kavramlara yer verilmiştir.

Tanım 2.2.1. P ve T toplamsal değişmeli iki grup olsun.

$H = \text{Hom}(P, T) = \{h : P \rightarrow T, h \text{ homomorfizma}\}$ ve $\Gamma = \text{Hom}(T, P) = \{n : T \rightarrow P, n \text{ homomorfizma}\}$ grup homomorfizmalarının kümesi olmak üzere $\forall h_1, h_2 \in H, \forall n_1 \in \Gamma$ için $H \times \Gamma \times H \rightarrow H$ toplamsal grubu içine bileşke işlemi ile $(h_1, n_1, h_2) \rightarrow h_1 n_1 h_2$ şeklinde tanımlanmıştır.

- i. $h_1 n_1 h_2 \in H$ ve $n_1 h_1 n_2 \in \Gamma$
- ii. $(h_1 + h_2) n_1 h_3 = h_1 n_1 h_3 + h_2 n_1 h_3,$
 $h_1 n_1 (h_2 + h_3) = h_1 n_1 h_2 + h_1 n_1 h_3,$
 $h_1 (n_1 + n_2) h_2 = h_1 n_1 h_2 + h_1 n_2 h_2,$
- iii. $(h_1 n_1 h_2) n_2 h_3 = h_1 (n_1 h_2 n_2) h_3 = h_1 n_1 (h_2 n_2 h_3)$
- iv. $\forall h_1, h_2 \in H$ için $h_1 n_1 h_2 = e_H$ iken $n_1 = e_H$

oluyorsa H ye Γ - halka denir (Nobusawa, 1964).

Bu tanım aşağıdaki gibi yeniden tanımlanmıştır.

Tanım 2.2.2. P ve T toplamsal değişmeli iki grup olsun. $\forall h_1, h_2, h_3 \in H$ ve $\forall n_1, n_2 \in \Gamma$ için

- i. $h_1 n_1 h_2 \in H$
- ii. $(h_1 + h_2) n_1 h_3 = h_1 n_1 h_3 + h_2 n_1 h_3$
 $h_1 n_1 (h_2 + h_3) = h_1 n_1 h_2 + h_1 n_1 h_3$
 $h_1 (n_1 + n_2) h_2 = h_1 n_1 h_2 + h_1 n_2 h_2$
- iii. $(h_1 n_1 h_2) n_2 h_3 = h_1 n_1 (h_2 n_2 h_3)$

şartlarını sağlayan H ye Γ - halka denir (Barnes, 1996).

Örnek 2.2.3. P ve T değişmeli gruplar olsun. $H = \text{Hom}(P, T)$ ve $\Gamma = \text{Hom}(T, P)$ olmak üzere H , bileşke işlemi ile Γ - halkaya örnektir.

$$H = \text{Hom}(P, T) = \{h : P \rightarrow T, h \text{ hom omorfizma}\}$$

$$\Gamma = \text{Hom}(T, P) = \{n : T \rightarrow P, n \text{ hom omorfizma}\}$$

H ve Γ kümeleri üzerinde toplama işlemi $(h_1 + h_2)(p) = h_1(p) + h_2(p)$ ve $(n_1 + n_2)(s) = n_1(s) + n_2(s)$ şeklinde tanımlanmak üzere H ve Γ nın toplamsal değişmeli gruplar olduğu Örnek 2.1.11. de gösterilmiştir. Şimdi H nin bir Γ - halka olduğu gösterilsin.

i. $\forall h_1, h_2 \in H$ ve $\forall n_1 \in \Gamma$ için $h_1 n_1 h_2 \in H$ olduğunu gösterelim. $\forall p, s \in P$ için

$$\begin{aligned} h_1 n_1 h_2 (p + s) &= h_1 n_1 (h_2(p) + h_2(s)) \\ &= h_1 (n_1 (h_2(p)) + n_1 (h_2(s))) \\ &= h_1 (n_1 (h_2(p))) + h_1 (n_1 (h_2(s))) \\ &= h_1 n_1 h_2(p) + h_1 n_1 h_2(s) \end{aligned}$$

Böylece $h_1 n_1 h_2$ bir homomorfizma olup H nin bir elemanıdır.

ii. $\forall h_1, h_2, h_3 \in H$, $n_1 \in \Gamma$ ve $\forall p \in P$ için $(h_1 + h_2) n_1 h_3 = h_1 n_1 h_3 + h_2 n_1 h_3$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} ((h_1 + h_2) n_1 h_3)(p) &= ((h_1 + h_2) n_1)(h_3(p)) \\ &= (h_1 + h_2)(n_1(h_3(p))) \\ &= h_1(n_1(h_3(p))) + h_2(n_1(h_3(p))) \\ &= h_1 n_1 h_3(p) + h_2 n_1 h_3(p). \end{aligned}$$

$\forall h_1, h_2, h_3 \in H$, $n_1 \in \Gamma$ ve $\forall p \in P$ için $h_1 n_1 (h_2 + h_3) = h_1 n_1 h_2 + h_1 n_1 h_3$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} (h_1 n_1 (h_2 + h_3))(p) &= h_1 n_1 ((h_2 + h_3)(p)) \\ &= h_1 n_1 (h_2(p) + h_3(p)) \\ &= h_1 (n_1(h_2(p))) + h_1 (n_1(h_3(p))) \\ &= h_1 n_1 h_2(p) + h_1 n_1 h_3(p). \end{aligned}$$

$\forall h_1, h_2 \in H$, $n_1, n_2 \in \Gamma$ ve $\forall p \in P$ için $h_1(n_1 + n_2)h_2 = h_1 n_1 h_2 + h_1 n_2 h_2$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} (h_1(n_1 + n_2)h_2)(p) &= (h_1(n_1 + n_2))(h_2(p)) \\ &= h_1((n_1 + n_2)h_2(p)) \\ &= h_1(n_1(h_2(p)) + n_2(h_2(p))) \\ &= h_1(n_1(h_2(p))) + h_1(n_2(h_2(p))) \\ &= h_1 n_1 h_2(p) + h_1 n_2 h_2(p). \end{aligned}$$

iii. $\forall h_1, h_2, h_3 \in H, n_1, n_2 \in \Gamma$ ve $\forall p \in P$ için $(h_1 n_1 h_2) n_2 h_3 = h_1 n_1 (h_2 n_2 h_3)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} ((h_1 n_1 h_2) n_2 h_3)(p) &= (h_1 n_1 h_2) n_2 (h_3(p)) \\ &= h_1 n_1 h_2 (n_2 (h_3(p))) \\ &= h_1 n_1 (h_2 (n_2 (h_3(p)))) \\ &= (h_1 n_1 (h_2 n_2 h_3))(p) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece H bir Γ - halkadır (Yetiş, 2010).

Tanım 2.2.4. H_1 ve H_2 , Γ - halkalar ve $\theta: H_1 \rightarrow H_2$ bir dönüşüm olsun. $\forall h_1, h_2 \in H$ için $\theta(h_1 + h_2) = \theta(h_1) + \theta(h_2)$ ve $\theta(h_1 h_2) = \theta(h_1) \theta(h_2)$ şartları sağlanıyorsa θ dönüşümüne bir Γ -halka homomorfizması denir (Yetiş, 2010).

Tanım 2.2.5. H bir Γ - halkası ve $H_1 \subset H$ olsun. H_1 , H nin toplamsal alt grubu ve

- i. $H_1 \Gamma H = \{h_1 \alpha h : h_1 \in H_1, \alpha \in \Gamma, h \in H\}$ olmak üzere $H_1 \Gamma H \subset H_1$ ise H_1 e sağ ideal denir.
- ii. $H \Gamma H_1 = \{h \alpha h_1 : h \in H, \alpha \in \Gamma, h_1 \in H_1\}$ olmak üzere $H \Gamma H_1 \subset H_1$ ise H_1 e sol ideal denir.

H_1 , H nin hem sağ hem sol ideal ise H_1 e Γ - halkasının ideali denir (Barnes, 1996).

Önerme 2.2.6. H_1 ve H_2 , H Γ - halkasının iki sağ (sol) ideali olsun.

$H_1 + H_2 = \{h_1 + h_2 : h_1 \in H_1, h_2 \in H_2\}$ kümesi de H nin bir sağ (sol) idealidir. Bu kümeye H_1 ile H_2 nin toplamı denir (Yetiş, 2010).

İspat: $H_1 + H_2$ kümesinin H , Γ -halkasının bir sağ ideali olduğunu gösterelim.

$e_H \in H_1$ ve $e_H \in H_2$ için $e_H = e_H + e_H \in H_1 + H_2$ olup $\emptyset \neq H_1 + H_2 \subseteq H$ dir.

$\forall x = h_1 + h_2, y = h_3 + h_4 \in H_1 + H_2$ için $x - y \in H_1 + H_2$ olduğundan toplamsal alt gruptur.

$(H_1 + H_2)\Gamma H = \{(h_1 + h_2)\alpha h : h_1 + h_2 \in H_1 + H_2, \alpha \in \Gamma, h \in H\} \subset H_1 + H_2$ olduğunu gösterelim.

$\chi \in (H_1 + H_2)\Gamma H$ olsun. $\chi = (h_1 + h_2)\alpha h = h_1\alpha h + h_2\alpha h \in H_1 + H_2$ ve

$\chi \in (H_1 + H_2)\Gamma H$ iken $\chi \in H_1 + H_2$ olduğundan $(H_1 + H_2)\Gamma H \subset H_1 + H_2$ olup sağ idealdir.

Benzer şekilde $H_1 + H_2, H$ nin saol ideal olduğu da gösterilebilir.

Tanım 2.2.7. R boştan farklı bir küme ve “+” ve “.”, R üzerinde tanımlı ikili işlem olsun. Eğer aşağıdaki şartları sağlıyorsa $(R, +, .)$ cebirsel yapısı aşağıdaki şartları sağlıyorsa yakın-halka denir.

- i. $(R, +)$ bir grup (değişmeli olması gerekmiyor)
- ii. $(R, .)$ bir yarı grup
- iii. $\forall r_1, r_2, r_3 \in R$ için $(r_1 + r_2)r_3 = r_1r_3 + r_2r_3$ (Sağ yakın-halka)
 $\forall r_1, r_2, r_3 \in R$ için $r_3(r_1 + r_2) = r_3r_1 + r_3r_2$ (Sol yakın-halka) (Pilz, 1983).

Örnek 2.2.8. G bir grup olmak üzere $M(G) = \{\delta : G \rightarrow G \text{ bir fonksiyon}\}$ ile tanımlanan küme, fonksiyonlarda toplama ve bileşke işlemleri ile bir sağ yakın-halkadır. (Fonksiyonlarda bileşke işleminin fonksiyonlarda toplama işlemi üzerine soldan dağılma özelliği sağlanmadığından bir halka değildir) (Pilz, 1983).

Örnek 2.2.9. $(R, +)$ bir grup ve $\forall r_1, r_2 \in R$ için

$$r_1r_2 = \begin{cases} r_1, r_2 \neq e_R \\ e_R, r_2 = e_R \end{cases}$$

şeklinde bir çarpma işlemi tanımlansın. R bir sağ yakın-halkadır (Akkaymak, 2012).

Tanım 2.2.10. R bir yakın-halka ve $(H, +), (R, +)$ nin bir alt grubu olsun. $\forall h_1, h_2 \in H$ için $h_1h_2 \in H$ ise H ye R nin alt yakın-halkası denir (Pilz, 1983).

Tanım 2.2.11. R bir yakın-halka olsun. $\forall r \in R$ için $rR = Rr$ oluyorsa R ye bir alt değişmeli yakın-halka denir. R yakın-halkasının merkezi $M(R) = \{r \in R \mid ra = ar, \forall r \in R\}$ ile tanımlanır (Nandakumar, 2009).

Önerme 2.2.12. R bir alt değişmeli yakın-halka ve $K = \{r \in R \mid r \text{ idempotent}\}$ olmak üzere $K \neq \{e_R\}$ olsun. Bu durumda $K \subseteq M(R)$ olur (Uma ve ark., 2010).

İspat: $K \neq \{e_R\}$ olsun. $\forall k \in K$ için R bir alt değişmeli yakın-halka olduğundan $kR = Rk$ olur.

$\forall r \in R$ için $kr = ak$ ve $kr = kb$ olacak şekilde $a, b \in R$ vardır. Buradan

$$krk = k(rk) = k(ka) = k^2a = ka = kr$$

$$krk = (kr)k = (bk)k = bk^2 = bk = rk$$

olur. Böylece $kr = rk$ elde edilir. Buradan $k \in M(R)$ dir. O halde $K \subseteq M(R)$ olduğu görülür.

Tanım 2.2.13. R ve T yakın-halkalar ve $\theta: R \rightarrow T$ bir dönüşüm olsun. $\forall r_1, r_2 \in R$ için $\theta(r_1 + r_2) = \theta(r_1) + \theta(r_2)$ ve $\theta(r_1 r_2) = \theta(r_1)\theta(r_2)$ şartları sağlanıyorsa θ dönüşümüne bir yakın-halka homomorfizması denir (Pilz, 1983).

Tanım 2.2.14. R bir yakın-halka ve I , R nin bir normal alt grubu olsun. Aşağıdaki şartları sağlıyorsa I ya R yakın-halkasının ideali denir (Pilz, 1983).

i. $IR \subseteq I$

ii. $\forall r_1, r_2 \in R$ ve $\forall i \in I$ için $r_1(r_2 + i) - r_1 r_2 \in I$

Not 2.2.15. R bir yakın-halka ve I , R nin bir ideali olsun. R/I ya bölüm yakın-halkası denir. $R/I = \{r + I \mid r \in R\}$ şeklinde gösterilir (Pilz, 1983).

Not 2.2.16. $\{e_R\}$ ve R , R yakın-halkasının idealleridir. Bunlara R nin aşık idealleri denir (Pilz, 1983).

Not 2.2.17. R ve T yakın-halkalar ve $\theta \in \text{Hom}(R, T)$ ise $\text{çek}\theta = \{r \in R \mid \theta(r) = e_T\}$, θ homomorfizmasının çekirdeğidir (Pilz, 1983).

Tanım 2.2.18. $(R, +)$ değişmeli olmayan bir grup ve Γ boştan farklı bir küme olsun.

Eğer $\forall r_1, r_2, r_3 \in R$ ve $t, k \in \Gamma$ için aşağıdaki şartları sağlayan $R \times \Gamma \times R \rightarrow R$ dönüşümü varsa R ye Γ -yakın-halka denir.

(Burada işlem bileşke işlemi olmak üzere (r_1, t, r_2) nin görüntüsü $r_1 t r_2$ ile gösterilir.)

- i. $(r_1 + r_2) t r_3 = r_1 t r_3 + r_2 t r_3$
- ii. $(r_1 t r_2) k r_3 = r_1 t (r_2 k r_3)$ (Satyanarayana, 2012).

Tanım 2.2.19. R , Γ -yakın-halka olsun. I , $(R, +)$ nin normal altgrubu ve $\forall r_1, r_2, r_3 \in R$ ve $t \in \Gamma$ için

- i. $r_1 t (r_2 + i) - r_1 t r_2 \in I$ ise I ya R nin sol ideali,
- ii. $i t r_1 \in I$ ise I ya R nin sağ ideali denir.

I hem sol ideal hem de sağ ideal ise I ya R nin ideali denir (Satyanarayana, 2012).

2.3 Esnek Kümeler

Bu bölümde, esnek kümeler ile ilgili tanım, teorem ve örneklere yer verilmiştir. Bölüm boyunca U evrensel küme, $P(U)$ U kümesinin kuvvet kümesini, E parametre kümesini ve K, M, N, P ise E kümesinin alt kümelerini gösterecektir.

Tanım 2.3.1. E parametre kümesi ve $M \subseteq E$ olsun. $\forall m \notin M$ için $\varpi_M(m) = \emptyset$ olmak üzere $\varpi_M : E \rightarrow P(U)$ fonksiyonuna, U üzerinde esnek küme denir. $\varpi_M = \{(m, \varpi_M(m)) : m \in E, \varpi_M(m) \in P(U)\}$ sıralı ikilisiyle gösterilir (Molodtsov, 1999).

Örnek 2.3.2. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ kümesi kitapların kümesi, $E = \{m_1, m_2, m_3, m_4,$

m_5 } parametreler kümesi olsun. $m_1 \rightarrow \text{ince}$, $m_2 \rightarrow \text{eğlenceli}$, $m_3 \rightarrow \text{sıkıcı}$, $m_4 \rightarrow \text{akıcı}$, $m_5 \rightarrow \text{sürükleyici}$ olacak şekilde parametreler olsun. $M = \{m_1, m_4, m_5\} \subseteq E$ ve $\varpi_M(m_1) = \{u_3, u_5\}$, $\varpi_M(m_4) = \{u_1, u_3\}$, ve $\varpi_M(m_5) = U$ olduğu kabul edilsin. ϖ_M esnek kümesi şu şekildedir:

$$\varpi_M = \{((m_1, \{u_3, u_5\}), (m_2, \emptyset), (m_3, \emptyset), (m_4, \{u_1, u_3\}), (m_5, U))\}.$$

Tanım 2.3.3. ϖ_M , U üzerinde esnek küme olsun. $\forall m \in E$ için

- i. $\varpi_M(m) = \emptyset$ ise ϖ_M esnek kümesine boş esnek küme denir ve $\varpi_\emptyset$ ile gösterilir.
- ii. $\forall m \in M$ için $\varpi_M(m) = U$ ise ϖ_M esnek kümesine, M – evrensel esnek küme denir ve ϖ_M ile gösterilir. $M = E$ ise evrensel esnek küme ϖ_E ile gösterilir.
- iii. $\neg\varpi_M(m) = U - \varpi_M(m)$ şeklinde tanımlanan $\neg\varpi_M$ ye ϖ_M nin tümleyeni denir. $\neg\varpi_M$ ile gösterilir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Örnek 2.3.4. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ kümesi kitapların kümesi, $E = \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$ parametreler kümesi olsun. $m_1 \rightarrow \text{ince}$, $m_2 \rightarrow \text{eğlenceli}$, $m_3 \rightarrow \text{sıkıcı}$, $m_4 \rightarrow \text{akıcı}$, $m_5 \rightarrow \text{sürükleyici}$ olacak şekilde parametreler olsun.

$M = \{m_1, m_3\}$ olmak üzere $\varpi_M(m_1) = \emptyset$, $\varpi_M(m_3) = \emptyset$ olsun. ϖ_M , boş esnek kümedir.

Yani $\varpi_M = \varpi_\emptyset$ olur.

$M = \{m_2, m_5\}$ olmak üzere $\varpi_M(m_2) = U$, $\varpi_M(m_5) = U$ olsun. ϖ_M , M – evrensel esnek kümedir. Yani $\varpi_M = \varpi_M$ olur.

$M = E$ ve $\varpi_M(m_i) = U$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ise ϖ_M , evrensel esnek kümedir. Yani $\varpi_M = \varpi_E$ olur.

Önerme 2.3.5. ϖ_M , U üzerinde esnek küme olsun.

- i. $\neg(\neg\varpi_M) = \varpi_M$
- ii. $\neg\varpi_\emptyset = \varpi_E$ (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

İspat: $\forall m \in E$ için

- i. $\neg(\neg\varpi_M(m)) = \varpi_M(m)$
- ii. $\neg\varpi_\emptyset(m) = U - \varpi_\emptyset(m)$ olur.

Tanım 2.3.6. ϖ_M ve ϖ_N , U üzerinde iki esnek küme olsun.

- i. $\forall m \in E$ için $\varpi_M(m) \subseteq \varpi_N(m)$ ise ϖ_M esnek kümesine ϖ_N esnek kümesinin alt kümesi denir ve $\varpi_M \subseteq \varpi_N$ ile gösterilir.
- ii. $\forall m \in E$ için $\varpi_M(m) = \varpi_N(m)$ ise ϖ_M ve ϖ_N esnek kümelerine esnek eşit kümeler denir ve $\varpi_M = \varpi_N$ ile gösterilir. (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Not 2.3.7. $\varpi_M \subseteq \varpi_N$ için ϖ_M nin her elemanı ϖ_N nin de elemanı değildir. Bu nedenle klasik alt küme tanımı şu durumda geçerli değildir, $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ evrensel küme, $E = \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$ parametreler kümesi olsun. $M = \{m_2\}$, $N = \{m_2, m_5\}$ olmak üzere $\varpi_M = \{(m_2, \{u_1, u_3\})\}$, $\varpi_N = \{(m_2, \{u_1, u_3, u_4\}), (m_5, \{u_1, u_4, u_6\})\}$ şeklinde U üzerinde iki esnek küme tanımlansın. Bu durumda $\varpi_M \subseteq \varpi_N$ olup açıkça görülür ki ϖ_M nin elemanı ϖ_N nin elemanı değildir, yani $(m_2, \{u_1, u_3\}) \in \varpi_M$ olur ama $(m_2, \{u_1, u_3\}) \notin \varpi_N$ dir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Önerme 2.3.8. $\varpi_M, \varpi_N, \varpi_K$, U üzerinde esnek kümeler olsun.

- i. $\varpi_M \subseteq \varpi_E$
- ii. $\varpi_\emptyset \subseteq \varpi_M$
- iii. $\varpi_M \subseteq \varpi_M$
- iv. $\varpi_M \subseteq \varpi_N$ ve $\varpi_N \subseteq \varpi_K \Rightarrow \varpi_M \subseteq \varpi_K$ (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

İspat: $\forall m \in E$ için

- i. $\varpi_M(m) \subseteq \varpi_E(m) = U$
- ii. $\varpi_\emptyset(m) = \emptyset \subseteq \varpi_M(m)$
- iii. $\varpi_M(m) \subseteq \varpi_M(m)$

iv. $\varpi_M(m) \subseteq \varpi_N(m)$ ve $\varpi_N(m) \subseteq \varpi_K(m) \Rightarrow \varpi_M(m) \subseteq \varpi_K(m)$ olur.

Tanım 2.3.9. ϖ_M ve ϖ_N , U üzerinde iki esnek küme olsun.

- i. ϖ_M ve ϖ_N birleşimi $\varpi_M \tilde{\cup} \varpi_N$ olmak üzere, $\forall m \in E$ için $\varpi_{M \tilde{\cup} N}(m) = \varpi_M(m) \cup \varpi_N(m)$ şeklinde tanımlanır.
- ii. ϖ_M ve ϖ_N kesişimi $\varpi_M \tilde{\cap} \varpi_N$ olmak üzere, $\forall m \in E$ için $\varpi_{M \tilde{\cap} N}(m) = \varpi_M(m) \cap \varpi_N(m)$ şeklinde tanımlanır (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Önerme 2.3.10. $\varpi_M, \varpi_N, \varpi_K$, U üzerinde esnek kümeler olsun,

- i. $\varpi_M \tilde{\cup} \varpi_M = \varpi_M$
- ii. $\varpi_M \tilde{\cap} \varpi_{\emptyset} = \varpi_M$
- iii. $\varpi_M \tilde{\cup} \varpi_{\bar{E}} = \varpi_{\bar{E}}$
- iv. $\varpi_M \tilde{\cup} \neg \varpi_M = \varpi_{\bar{E}}$
- v. $\varpi_M \tilde{\cup} \varpi_N = \varpi_N \tilde{\cup} \varpi_M$
- vi. $(\varpi_M \tilde{\cup} \varpi_N) \tilde{\cup} \varpi_K = \varpi_M \tilde{\cup} (\varpi_N \tilde{\cup} \varpi_K)$

olur (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Önerme 2.3.11. $\varpi_M, \varpi_N, \varpi_K$, U üzerinde esnek kümeler olsun,

- i. $\varpi_M \tilde{\cap} \varpi_M = \varpi_M$
- ii. $\varpi_M \tilde{\cap} \varpi_{\emptyset} = \varpi_{\emptyset}$
- iii. $\varpi_M \tilde{\cap} \varpi_{\bar{E}} = \varpi_M$
- iv. $\varpi_M \tilde{\cap} \neg \varpi_M = \varpi_{\emptyset}$
- v. $\varpi_M \tilde{\cap} \varpi_N = \varpi_N \tilde{\cap} \varpi_M$
- vi. $(\varpi_M \tilde{\cap} \varpi_N) \tilde{\cap} \varpi_K = \varpi_M \tilde{\cap} (\varpi_N \tilde{\cap} \varpi_K)$

olur (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Önerme 2.3.12. ϖ_M, ϖ_N , U üzerinde iki esnek küme olsun,

$$i. \quad \neg(\varpi_M \tilde{\cup} \varpi_N) = \neg\varpi_M \tilde{\cap} \neg\varpi_N$$

$$ii. \quad \neg(\varpi_M \tilde{\cap} \varpi_N) = \neg\varpi_M \tilde{\cup} \neg\varpi_N$$

olur (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

İspat: $\forall m \in E$ için

$$\begin{aligned} i. \quad \neg\varpi_{M \cup N}(m) &= \neg(\varpi_M(m) \cup \varpi_N(m)) \\ &= (\neg\varpi_M(m) \cap \neg\varpi_N(m)) \\ &= \neg\varpi_M \tilde{\cap} \neg\varpi_N. \end{aligned}$$

ii. Benzer şekilde gösterilir.

Önerme 2.3.13. $\varpi_M, \varpi_N, \varpi_K$, U üzerinde esnek kümeler olsun.

$$i. \quad \varpi_M \tilde{\cup} (\varpi_N \tilde{\cap} \varpi_K) = (\varpi_M \tilde{\cup} \varpi_N) \tilde{\cap} (\varpi_M \tilde{\cup} \varpi_K),$$

$$ii. \quad \varpi_M \tilde{\cap} (\varpi_N \tilde{\cup} \varpi_K) = (\varpi_M \tilde{\cap} \varpi_N) \tilde{\cup} (\varpi_M \tilde{\cap} \varpi_K)$$

olur (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

İspat: $\forall m \in E$ için

$$\begin{aligned} i. \quad \varpi_{M \cup (N \cap K)}(m) &= \varpi_M(m) \cup \varpi_{N \cap K}(m) \\ &= \varpi_M(m) \cup (\varpi_N(m) \cap \varpi_K(m)) \\ &= (\varpi_M(m) \cup \varpi_N(m)) \cap (\varpi_M(m) \cup \varpi_K(m)) \\ &= \varpi_{M \cup N}(m) \cap \varpi_{M \cup K}(m) \\ &= \varpi_{(M \cup N) \cap (M \cup K)}(m). \end{aligned}$$

ii. Benzer şekilde gösterilir.

3. BİPOLAR ESNEK YAPILAR

3.1 Bipolar Esnek Kümeler

Bu bölümde, bipolar esnek kümeler hakkında bazı cebirsel özelliklere yer verilecektir. Ayrıca U evrensel küme ve E parametre kümesi olsun. E_1, E_2 E nin alt kümeleri olsun.

Tanım 3.1.1. $\forall m \in E$ için $\mathfrak{F}_E(m) \cap \delta_{-E}(\neg m) = \emptyset$ olacak şekilde $\mathfrak{F}_E : E \rightarrow P(U)$ ve $\delta_{-E} : \neg E \rightarrow P(U)$ fonksiyonları ile elde edilen $(\mathfrak{F}_E, \delta_{-E})$ ikilisine U üzerinde bipolar esnek küme denir (Shabir ve Naz, 2013).

Tanım 3.1.2. $E_1 \cup E_2 = E$ ve $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ olacak şekilde E_1 ve E_2 , E parametre kümesinin boştan farklı iki alt kümesi olsun. $\forall m \in E_1$ için $\mathfrak{F}_{E_1}(m) \cap \mathfrak{F}_{E_2}(\mathfrak{F}(m)) = \emptyset$ olacak şekilde $(\mathfrak{F} : E_1 \rightarrow E_2$ birebir fonksiyon) $\mathfrak{F}_{E_1} : E_1 \rightarrow P(U)$ ve $\mathfrak{F}_{E_2} : E_2 \rightarrow P(U)$ fonksiyonları ile elde edilen $(\mathfrak{F}_{E_1}, \mathfrak{F}_{E_2})$ ikilisine bipolar esnek küme denir. $(\mathfrak{F}_{E_1}, \mathfrak{F}_{E_2})$ bipolar esnek küme aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\mathfrak{F}_E = (\mathfrak{F}_{E_1}, \mathfrak{F}_{E_2}) = \left\{ \left\langle (m, \mathfrak{F}_{E_1}(m)), (\mathfrak{F}(m), \mathfrak{F}_{E_2}(\mathfrak{F}(m))) \right\rangle : m \in E, \mathfrak{F}_{E_1}(m) \cap \mathfrak{F}_{E_2}(\mathfrak{F}(m)) = \emptyset \right\}$$

(Karaaslan ve Karataş, 2014).

Karaaslan ve ark. (2016) bipolar esnek küme tanımını şu şekilde yeniden tanımlamışlardır.

Tanım 3.1.3. E parametre kümesi ve $S \subseteq E$ olsun. $\mathfrak{F} : S \rightarrow E$ birebir fonksiyon olacak şekilde $S \cup \mathfrak{F}(S)$, S nin genişletilmiş parametre kümesi olarak tanımlanır ve ε_S ile gösterilir. $S = E$ ise S nin genişletilmiş parametre kümesi ε ile tanımlanır (Karaaslan ve ark., 2016).

Tanım 3.1.4. $\mathfrak{F} : S \rightarrow \varepsilon_S$ birebir fonksiyon olmak üzere $\forall m \in E$ için E parametre kümesi $S \subseteq E$ ve $S \cup \mathfrak{F}(S) = \varepsilon_S$ olsun. $\mathfrak{F}_1(m) \cap \mathfrak{F}_2(\mathfrak{F}(m)) = \emptyset$ olacak şekilde $\mathfrak{F}_1 : S \rightarrow P(U)$ ve

$\mathfrak{F}_2 : \mathfrak{F}(S) \rightarrow P(U)$ fonksiyonları ile elde edilen $(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2)$ ikilisine bipolar esnek küme denir. $(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2)$ bipolar esnek küme aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\mathfrak{F}_s = (\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2) = \{(m, \mathfrak{F}_1(m)), \mathfrak{F}_2(\mathfrak{F}(m)) : \forall m \in E, \mathfrak{F}_1(m) \cap \mathfrak{F}_2(\mathfrak{F}(m)) = \emptyset\}$$

$\mathfrak{F}_1$ ve $\mathfrak{F}_2$ kümeleri sırasıyla $\mathfrak{F}_s^+$ ve $\mathfrak{F}_s^-$ ile gösterilecektir. Bu kümelere pozitif ve negatif bipolar esnek küme denir. Bipolar esnek küme $\mathfrak{F}_s = (\mathfrak{F}_s^+, \mathfrak{F}_s^-)$ ile gösterilir. $\forall m \in E$ için görüntü kümesi $\mathfrak{F}_s(m) = (\mathfrak{F}_s^+(m), \mathfrak{F}_s^-(m))$ şeklinde tanımlanır ve aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\mathfrak{F}_s = (\mathfrak{F}_s^+, \mathfrak{F}_s^-) = \{(m, \mathfrak{F}_s^+(m), \mathfrak{F}_s^-(m)) : \forall m \in E, \mathfrak{F}_s^+(m) \cap \mathfrak{F}_s^-(m) = \emptyset\}$$

(Karaaslan ve ark., 2016).

Örnek 3.1.5. $E = \mathbb{Z}_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$ parametre kümesi, $S = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$, $\mathbb{Z}_8$ in alt kümesi ve $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ olsun. $\mathfrak{F} : S \rightarrow \mathbb{Z}_8$ birebir fonksiyonu $\mathfrak{F}(s) = s^{-1}$ ile tanımlansın.

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_s^+(\bar{0}) &= \{u_1, u_2\}, & \mathfrak{F}_s^-(\bar{0}) &= \{u_4\} \\ \mathfrak{F}_s^+(\bar{2}) &= \{u_4, u_5\}, & \mathfrak{F}_s^-(\bar{6}) &= \{u_2, u_3, u_6\} \\ \mathfrak{F}_s^+(\bar{4}) &= \{u_1, u_3, u_5\}, & \mathfrak{F}_s^-(\bar{4}) &= \{u_2\} \\ \mathfrak{F}_s^+(\bar{6}) &= \{u_2, u_4, u_5\}, & \mathfrak{F}_s^-(\bar{2}) &= \{u_1, u_6\} \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\mathfrak{F}_s = \left\{ \left((\bar{0}, \{u_1, u_2\}, \{u_4\}), (\bar{2}, \{u_4, u_5\}, \{u_2, u_3, u_6\}), (\bar{4}, \{u_1, u_3, u_5\}, \{u_2\}), (\bar{6}, \{u_2, u_4, u_5\}, \{u_1, u_6\}) \right) \right\}.$$

elde edilir.

Tanım 3.1.6. $\mathfrak{F}_s = (\mathfrak{F}_s^+, \mathfrak{F}_s^-)$ ve $\mathfrak{F}_T = (\mathfrak{F}_T^+, \mathfrak{F}_T^-)$, U üzerinde iki bipolar esnek kümeler olsun.

- i. $\forall m \in E$ için $\mathfrak{F}_s^+(m) \subseteq \mathfrak{F}_T^+(m)$ ve $\mathfrak{F}_s^-(m) \supseteq \mathfrak{F}_T^-(m)$ ise $\mathfrak{F}_s$ ye $\mathfrak{F}_T$ nin bipolar esnek alt kümesi denir. $\mathfrak{F}_s \sqsubseteq \mathfrak{F}_T$ şeklinde gösterilir.
- ii. $\mathfrak{F}_s \sqsubseteq \mathfrak{F}_T$ ve $\mathfrak{F}_T \sqsubseteq \mathfrak{F}_s$ ise $\mathfrak{F}_s$ ve $\mathfrak{F}_T$ iki bipolar esnek kümelerine bipolar eşit esnek kümeler denir. $\mathfrak{F}_s = \mathfrak{F}_T$ şeklinde gösterilir (Karaaslan ve Karataş, 2014).

Tanım 3.1.7. $\mathfrak{F}_S = (\mathfrak{F}_S^+, \mathfrak{F}_S^-)$ ve $\mathfrak{F}_T = (\mathfrak{F}_T^+, \mathfrak{F}_T^-)$, U üzerinde bipolar esnek kümeler olsun.

i. $\mathfrak{F}_S$ ve $\mathfrak{F}_T$ bipolar esnek birleşimi, $\forall m \in E$ için

$$(\mathfrak{F}_S^+ \cup \mathfrak{F}_T^+): S \cup T \rightarrow P(U), \quad (\mathfrak{F}_S^+ \cup \mathfrak{F}_T^+)(m) = \mathfrak{F}_S^+(m) \cup \mathfrak{F}_T^+(m)$$

$$(\mathfrak{F}_S^- \cap \mathfrak{F}_T^-): S \cup T \rightarrow P(U), \quad (\mathfrak{F}_S^- \cap \mathfrak{F}_T^-)(m) = \mathfrak{F}_S^-(m) \cap \mathfrak{F}_T^-(m)$$

ile tanımlanır ve $\mathfrak{F}_S \sqcup \mathfrak{F}_T$ şeklinde gösterilir. $\mathfrak{F}_S$ ve $\mathfrak{F}_T$ bipolar esnek kesişimi,

ii. $(\mathfrak{F}_S^+ \cap \mathfrak{F}_T^+): S \cap T \rightarrow P(U), \quad (\mathfrak{F}_S^+ \cap \mathfrak{F}_T^+)(m) = \mathfrak{F}_S^+(m) \cap \mathfrak{F}_T^+(m)$

$$(\mathfrak{F}_S^- \cup \mathfrak{F}_T^-): S \cap T \rightarrow P(U), \quad (\mathfrak{F}_S^- \cup \mathfrak{F}_T^-)(m) = \mathfrak{F}_S^-(m) \cup \mathfrak{F}_T^-(m)$$

ile tanımlanır ve $\mathfrak{F}_S \sqcap \mathfrak{F}_T$ şeklinde gösterilir (Karaaslan ve Karataş, 2014).

Tanım 3.1.8. $\mathfrak{F}_S = (\mathfrak{F}_S^+, \mathfrak{F}_S^-)$, U üzerinde bipolar esnek küme olsun. $\forall m \in E$ için

i. $\mathfrak{F}_S^+(m) = \emptyset$ ve $\mathfrak{F}_S^-(m) = U$ ise $\mathfrak{F}_S$ bipolar esnek kümesine boş bipolar esnek küme denir ve $(\Phi, \tilde{U})$ ile gösterilir.

ii. $\mathfrak{F}_S^+(m) = U$ ve $\mathfrak{F}_S^-(m) = \emptyset$ ise $\mathfrak{F}_S$ bipolar esnek kümesine mutlak bipolar esnek küme denir ve $(\tilde{U}, \Phi)$ ile gösterilir.

iii. $\mathfrak{F}_S = (\mathfrak{F}_S^+, \mathfrak{F}_S^-)$ bipolar esnek kümesinin tümleyeni, $\neg \mathfrak{F}_S(m) = \left\{ (m, \mathfrak{F}_S^-(m), \mathfrak{F}_S^+(m)) : m \in E \right\}$ ile tanımlanır ve $\neg \mathfrak{F}_S$ ile gösterilir (Karaaslan ve Karataş, 2014).

Örnek 3.1.9. $E = \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6\}$ parametre kümesi, $S_1 = \{m_1, m_3, m_5\}$ ve $S_2 = \{m_2, m_4, m_6\}$, E nin alt kümeleri ve $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ olsun. $\mathfrak{F}: S_1 \rightarrow S_2$ olacak şekilde $\forall m_i \in E$ için $\mathfrak{F}(m_i) = m_{i+1}$ birebir fonksiyonu tanımlansın. Buradan, $\mathfrak{F}(m_1) = m_2$, $\mathfrak{F}(m_3) = m_4$ ve $\mathfrak{F}(m_5) = m_6$ fonksiyonları elde edilir.

$$\mathfrak{F}_S^+(m_1) = \{u_1, u_2\}, \quad \mathfrak{F}_S^-(m_1) = \{u_4, u_5\}$$

$$\mathfrak{F}_S^+(m_3) = \{u_4, u_5\}, \quad \mathfrak{F}_S^-(m_3) = \{u_2, u_3, u_6\}$$

$$\mathfrak{F}_S^+(m_5) = \{u_1, u_4\}, \quad \mathfrak{F}_S^-(m_5) = \{u_2, u_5, u_6\}$$

olmak üzere

$$\mathfrak{F}_S = \left\{ (m_1, \{u_1, u_2\}, \{u_4, u_5\}), (m_3, \{u_4, u_5\}, \{u_2, u_3, u_6\}), (m_5, \{u_1, u_4\}, \{u_2, u_5, u_6\}) \right\}$$

bipolar esnek kümesi elde edilir. Ayrıca

$T_1 = \{m_1, m_3, m_5\}$ ve $T_2 = \{m_2, m_4, m_6\}$, E nin alt kümeleri ve $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ olsun. $\mathfrak{F}: T_1 \rightarrow T_2$ olacak şekilde $\forall m_i \in E$ için $\mathfrak{F}(m_i) = m_{i+3}$ birebir fonksiyonu tanımlansın. Buradan,

$\mathfrak{F}(m_1) = m_4$ $\mathfrak{F}(m_2) = m_5$ ve $\mathfrak{F}(m_3) = m_6$ fonksiyonları elde edilir.

$$\mathfrak{F}_T^+(m_1) = \{u_1, u_2, u_4\}, \quad \mathfrak{F}_T^-(m_1) = \{u_5, u_6\}$$

$$\mathfrak{F}_T^+(m_3) = \{u_2, u_5\}, \quad \mathfrak{F}_T^-(m_3) = \{u_1, u_4, u_6\}$$

$$\mathfrak{F}_T^+(m_5) = \{u_2, u_4\}, \quad \mathfrak{F}_T^-(m_5) = \{u_1, u_3, u_6\}$$

olacak şekilde

$$\mathfrak{F}_T = \{(m_1, \{u_1, u_2, u_4\}, \{u_5, u_6\}), (m_3, \{u_2, u_5\}, \{u_1, u_4, u_6\}), (m_5, \{u_2, u_4\}, \{u_1, u_3, u_6\})\}$$

bipolar esnek kümesi elde edilir.

$\mathfrak{F}_S$ ve $\mathfrak{F}_T$ bipolar esnek kümelerin birleşimi

$$\mathfrak{F}_S \sqcup \mathfrak{F}_T = \{(m_1, \{u_1, u_2, u_4\}, \{u_5\}), (m_3, \{u_2, u_4, u_5\}, \{u_6\}), (m_5, \{u_1, u_2, u_4\}, \{u_6\})\}$$

ve

$\mathfrak{F}_S$ ve $\mathfrak{F}_T$ bipolar esnek kümelerin kesişimi

$$\mathfrak{F}_S \sqcap \mathfrak{F}_T = \{(m_1, \{u_1, u_2\}, \{u_4, u_5, u_6\}), (m_3, \{u_5\}, \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_6\}), (m_5, \{u_4\}, \{u_1, u_2, u_3, u_5, u_6\})\}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.10. $\mathfrak{F}_S = (\mathfrak{F}_S^+, \mathfrak{F}_S^-)$, $\mathfrak{F}_T = (\mathfrak{F}_T^+, \mathfrak{F}_T^-)$ ve $\mathfrak{F}_K = (\mathfrak{F}_K^+, \mathfrak{F}_K^-)$, U üzerinde bipolar esnek kümeler olsun. Bu durumda

- i. $\mathfrak{F}_S \subseteq (\tilde{U}, \Phi)$
- ii. $(\Phi, \tilde{U}) \subseteq \mathfrak{F}_S$
- iii. $\mathfrak{F}_S \subseteq \mathfrak{F}_T$ ve $\mathfrak{F}_T \subseteq \mathfrak{F}_K$ ise $\mathfrak{F}_S \subseteq \mathfrak{F}_K$

dir (Karaaslan ve Karataş, 2014).

Teorem 3.1.11. $\mathfrak{F}_S = (\mathfrak{F}_S^+, \mathfrak{F}_S^-)$, $\mathfrak{F}_T = (\mathfrak{F}_T^+, \mathfrak{F}_T^-)$ ve $\mathfrak{F}_K = (\mathfrak{F}_K^+, \mathfrak{F}_K^-)$, U üzerinde bipolar esnek kümeler olsun. Bu durumda

- i. $\mathfrak{F}_S \sqcup \mathfrak{F}_S = \mathfrak{F}_S$
- ii. $\mathfrak{F}_S \sqcup (\Phi, \tilde{U}) = \mathfrak{F}_S$
- iii. $\mathfrak{F}_S \sqcup (\tilde{U}, \Phi) = (\tilde{U}, \Phi)$
- iv. $\mathfrak{F}_S \sqcup \neg \mathfrak{F}_S = (\tilde{U}, \Phi)$
- v. $\mathfrak{F}_S \sqcup \mathfrak{F}_T = \mathfrak{F}_T \sqcup \mathfrak{F}_S$
- vi. $\mathfrak{F}_S \sqcup [\mathfrak{F}_T \sqcup \mathfrak{F}_K] = [\mathfrak{F}_S \sqcup \mathfrak{F}_T] \sqcup \mathfrak{F}_K$

dir (Karaaslan ve Karataş, 2014).

Teorem 3.1.12. $\mathfrak{F}_S = (\mathfrak{F}_S^+, \mathfrak{F}_S^-)$, $\mathfrak{F}_T = (\mathfrak{F}_T^+, \mathfrak{F}_T^-)$ ve $\mathfrak{F}_K = (\mathfrak{F}_K^+, \mathfrak{F}_K^-)$, U üzerinde bipolar esnek kümeler olsun. Bu durumda

- i. $\mathfrak{F}_S \sqcap \mathfrak{F}_S = \mathfrak{F}_S$
- ii. $\mathfrak{F}_S \sqcap (\Phi, \tilde{U}) = (\Phi, \tilde{U})$
- iii. $\mathfrak{F}_S \sqcap (\tilde{U}, \Phi) = \mathfrak{F}_S$
- iv. $\mathfrak{F}_S \sqcap \neg \mathfrak{F}_S = (\Phi, \tilde{U})$
- v. $\mathfrak{F}_S \sqcap \mathfrak{F}_T = \mathfrak{F}_T \sqcap \mathfrak{F}_S$
- vi. $\mathfrak{F}_S \sqcap [\mathfrak{F}_T \sqcap \mathfrak{F}_K] = [\mathfrak{F}_S \sqcap \mathfrak{F}_T] \sqcap \mathfrak{F}_K$

dir (Karaaslan ve Karataş, 2014).

Teorem 3.1.13. $\mathfrak{F}_S = (\mathfrak{F}_S^+, \mathfrak{F}_S^-)$, $\mathfrak{F}_T = (\mathfrak{F}_T^+, \mathfrak{F}_T^-)$ ve $\mathfrak{F}_K = (\mathfrak{F}_K^+, \mathfrak{F}_K^-)$, U üzerinde bipolar esnek kümeler olsun. Bu durumda

- i. $(\mathfrak{F}_S) \sqcap [\mathfrak{F}_T \sqcup \mathfrak{F}_K] = [\mathfrak{F}_S \sqcap \mathfrak{F}_T] \sqcup [\mathfrak{F}_S \sqcap \mathfrak{F}_K]$
- ii. $\mathfrak{F}_S \sqcup [\mathfrak{F}_T \sqcap \mathfrak{F}_K] = [(\mathfrak{F}_S) \sqcup (\mathfrak{F}_T)] \sqcap [(\mathfrak{F}_S) \sqcup \mathfrak{F}_K]$

dir (Karaaslan ve Karataş, 2014).

Teorem 3.1.14. $\mathfrak{F}_S = (\mathfrak{F}_S^+, \mathfrak{F}_S^-)$, U üzerinde bipolar esnek küme olsun. Bu durumda

- i. $\neg(\neg \mathfrak{F}_S) = \mathfrak{F}_S$
- ii. $\neg(\Phi, \tilde{U}) = (\tilde{U}, \Phi)$

$$\text{iii. } \neg(\tilde{U}, \Phi) = (\Phi, \tilde{U})$$

dir (Karaaslan ve Karataş, 2014).

Teorem 3.1.15. $\mathfrak{F}_T = (\mathfrak{F}_T^+, \mathfrak{F}_T^-)$ ve $\mathfrak{F}_K = (\mathfrak{F}_K^+, \mathfrak{F}_K^-)$, U üzerinde bipolar esnek kümeler olsun.

Bipolar esnek kümede De Morgan's kanunu geçerlidir.

$$\text{i. } \neg[(\mathfrak{F}_T^+, \mathfrak{F}_T^-) \sqcup (\mathfrak{F}_K^+, \mathfrak{F}_K^-)] = \neg(\mathfrak{F}_T^+, \mathfrak{F}_T^-) \sqcap \neg(\mathfrak{F}_K^+, \mathfrak{F}_K^-)$$

$$\text{ii. } \neg[(\mathfrak{F}_T^+, \mathfrak{F}_T^-) \sqcap (\mathfrak{F}_K^+, \mathfrak{F}_K^-)] = \neg(\mathfrak{F}_T^+, \mathfrak{F}_T^-) \sqcup \neg(\mathfrak{F}_K^+, \mathfrak{F}_K^-)$$

dir (Karaaslan ve Karataş, 2014).

İspat:

$$\text{i. } (\mathfrak{F}_T^+, \mathfrak{F}_T^-) \sqcup (\mathfrak{F}_K^+, \mathfrak{F}_K^-) = (\mathfrak{F}_S^+, \mathfrak{F}_S^-) \text{ ve } \neg(\mathfrak{F}_S^+, \mathfrak{F}_S^-) = (\mathfrak{F}_P^+, \mathfrak{F}_P^-) \text{ olsun. } \forall m \in E \text{ için}$$

$$\mathfrak{F}_S^+(m) = \mathfrak{F}_T^+(m) \cup \mathfrak{F}_K^+(m) \text{ ve } \mathfrak{F}_S^-(m) = \mathfrak{F}_T^-(m) \cap \mathfrak{F}_K^-(m) \text{ dir. } \forall m \in E \text{ için}$$

$$\mathfrak{F}_P^+(m) = \mathfrak{F}_S^-(m) = \mathfrak{F}_T^-(m) \cap \mathfrak{F}_K^-(m) \quad (1)$$

ve

$$\mathfrak{F}_P^-(m) = \mathfrak{F}_S^+(m) = \mathfrak{F}_T^+(m) \cup \mathfrak{F}_K^+(m) \quad (2)$$

olur. Ayrıca

$$\neg(\mathfrak{F}_T^+, \mathfrak{F}_T^-) = (\mathfrak{F}_{S_1}^+, \mathfrak{F}_{S_1}^-) \text{ ve } \neg(\mathfrak{F}_K^+, \mathfrak{F}_K^-) = (\mathfrak{F}_{S_2}^+, \mathfrak{F}_{S_2}^-)$$

dir. Böylece

$$\mathfrak{F}_{S_1}^+(m) = \mathfrak{F}_T^-(m), \mathfrak{F}_{S_2}^+(m) = \mathfrak{F}_K^-(m), \mathfrak{F}_{S_1}^-(m) = \mathfrak{F}_T^+(m) \text{ ve } \mathfrak{F}_{S_2}^-(m) = \mathfrak{F}_K^+(m)$$

olur. Öyleyse $\forall m \in E$ için

$$\mathfrak{F}_{S_1}^+ \sqcap \mathfrak{F}_{S_2}^+(m) = \mathfrak{F}_T^-(m) \cap \mathfrak{F}_K^-(m) \quad (3)$$

ve

$$\mathfrak{F}_{S_1}^- \sqcap \mathfrak{F}_{S_2}^-(m) = \mathfrak{F}_T^+(m) \cup \mathfrak{F}_K^+(m) \quad (4)$$

elde edilir.

(1), (2), (3) ve (4) ten eşitlik elde edilir. Böylece bipolar esnek kümede De Morgan's kanunu geçerlidir.

ii. Benzer şekilde ispatlanır.

3.2 Bipolar Esnek Gruplar

Bu bölümde bipolar esnek grubun bazı cebirsel özellikleri incelenecektir. U evrensel küme olsun.

Tanım 3.2.1. G bir grup ve $\mathfrak{F}_G$, U üzerinde esnek küme olsun.

- i. $\forall g_1, g_2 \in G$ için $\mathfrak{F}_G(g_1 g_2) \supseteq \mathfrak{F}_G(g_1) \cap \mathfrak{F}_G(g_2)$ ise $\mathfrak{F}_G$ ye U üzerinde esnek yarı grup,
- ii. $\forall g_1 \in G$ için $\mathfrak{F}_G(g_1^{-1}) = \mathfrak{F}_G(g_1)$ ise $\mathfrak{F}_G$ esnek yarı grubuna, U üzerinde esnek grup denir (Çağman ve ark., 2012).

Tanım 3.2.2. ς bir grup ve ς nin genişletilmiş parametre kümesi $\varsigma \cup \mathfrak{F}(\varsigma) = G$ için $\mathfrak{F} : \varsigma \rightarrow G$ birebir fonksiyon olsun. $\mathfrak{F}_G = (\mathfrak{F}_G^+, \mathfrak{F}_G^-)$, U üzerinde bir bipolar esnek küme olsun. $\forall g_1, g_2 \in G$ için $\mathfrak{F}_G(g_1 g_2) \supseteq \mathfrak{F}_G(g_1) \cap \mathfrak{F}_G(g_2)$ ise $\mathfrak{F}_G = (\mathfrak{F}_G^+, \mathfrak{F}_G^-)$, U üzerinde bipolar esnek yarı grup denir.

Burada $\mathfrak{F}_G(g_1 g_2) \supseteq \mathfrak{F}_G(g_1) \cap \mathfrak{F}_G(g_2)$ olması $\mathfrak{F}_G^+(g_1 g_2) \supseteq \mathfrak{F}_G^+(g_1) \cap \mathfrak{F}_G^+(g_2)$ ve $\mathfrak{F}_G^-(g_1 g_2) \subseteq \mathfrak{F}_G^-(g_1) \cup \mathfrak{F}_G^-(g_2)$ olmalıdır (Karaaslan ve ark., 2016).

Tanım 3.2.3. $\mathfrak{F}_G = (\mathfrak{F}_G^+, \mathfrak{F}_G^-)$, U üzerinde bipolar esnek yarı grup olsun. $\forall g_1 \in G$ için $\mathfrak{F}_G(g_1^{-1}) = \mathfrak{F}_G(g_1)$ ise $\mathfrak{F}_G$ ye bipolar esnek grup denir (Karaaslan ve ark 2016).

Örnek 3.2.4. $U = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ evrensel küme ve $G = S_3$ simetrik grup olsun. Bipolar pozitif esnek küme ve bipolar negatif esnek küme sırasıyla $o(\sigma)$, $\sigma \in S_3$ ün mertebesi olmak üzere $\mathfrak{F}_G^+$ ve $\mathfrak{F}_G^-$ aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\mathfrak{F}_G^+(\sigma) = \begin{cases} \{x \in U, x \leq r^2 - 2r\} & o(\sigma) = r \neq 1 \\ U, & o(\sigma) = 1 \end{cases}$$

ve

$$\mathfrak{F}_G^-(\sigma) = \begin{cases} \{x \in U, x > r^2 - 2r\} & o(\sigma) = r \neq 1 \\ \emptyset, & o(\sigma) = 1 \end{cases}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_G = \{ & ((1), U, \emptyset), ((12), \{-3, -2, -1, 0\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}), \\ & ((13), \{-3, -2, -1, 0\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}), \\ & ((23), \{-3, -2, -1, 0\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}), \\ & ((123), \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}, \{4, 5\}), \\ & ((132), \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}, \{4, 5\}) \}. \end{aligned}$$

$\mathfrak{F}_G$ bipolar esnek kümesi, U üzerinde bipolar esnek gruptur.

Teorem 3.2.5. $\mathfrak{F}_G = (\mathfrak{F}_G^+, \mathfrak{F}_G^-)$, U üzerinde bipolar esnek grup olsun.

- i. $\forall g_1 \in G$ için $\mathfrak{F}_G(e_G) \supseteq \mathfrak{F}_G(g_1)$ dir.
- ii. $\forall g_1, g_2 \in G$ için $\mathfrak{F}_G(g_1 g_2) \supseteq \mathfrak{F}_G(g_2)$ olması için gerek ve yeter şart $\mathfrak{F}_G(g_1) \supseteq \mathfrak{F}_G(e_G)$ olmasıdır (Karaaslan ve ark 2016).

İspat:

- i. $\mathfrak{F}_G = (\mathfrak{F}_G^+, \mathfrak{F}_G^-)$, U üzerinde bipolar esnek grup olduğundan $\forall g_1 \in G$ için

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_G^+(e_G) &= \mathfrak{F}_G^+(g_1 g_1^{-1}) \supseteq \mathfrak{F}_G^+(g_1) \cap \mathfrak{F}_G^+(g_1^{-1}) \\ &= \mathfrak{F}_G^+(g_1) \cap \mathfrak{F}_G^+(g_1) \\ &= \mathfrak{F}_G^+(g_1) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_G^-(e_G) &= \mathfrak{F}_G^-(g_1 g_1^{-1}) \subseteq \mathfrak{F}_G^-(g_1) \cup \mathfrak{F}_G^-(g_1^{-1}) \\ &= \mathfrak{F}_G^-(g_1) \cup \mathfrak{F}_G^-(g_1) \\ &= \mathfrak{F}_G^-(g_1) \end{aligned}$$

olur. Böylece $\mathfrak{F}_G(e_G) \supseteq \mathfrak{F}_G(g_1)$ elde edilir.

ii. $\forall g_1, g_2 \in G$ için $\mathfrak{F}_G(g_1 g_2) \supseteq \mathfrak{F}_G(g_2)$ olsun. $g_2 = e_G$ alınırsa

$\mathfrak{F}_G^+(g_1) \supseteq \mathfrak{F}_G^+(e_G)$ ve $\mathfrak{F}_G^-(g_1) \subseteq \mathfrak{F}_G^-(e_G)$ elde edilir. Böylece $\mathfrak{F}_G(g_1) \supseteq \mathfrak{F}_G(e_G)$ olur.

Karşıt olarak, $\mathfrak{F}_G(g_1) \supseteq \mathfrak{F}_G(e_G)$ olsun.

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_G^+(g_1 g_2) &\supseteq \mathfrak{F}_G^+(g_1) \cap \mathfrak{F}_G^+(g_2) \\ &= \mathfrak{F}_G^+(e_G) \cap \mathfrak{F}_G^+(g_2) \\ &= \mathfrak{F}_G^+(g_2)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_G^-(g_1 g_2) &\subseteq \mathfrak{F}_G^-(g_1) \cup \mathfrak{F}_G^-(g_2) \\ &= \mathfrak{F}_G^-(e_G) \cup \mathfrak{F}_G^-(g_2) \\ &= \mathfrak{F}_G^-(g_2)\end{aligned}$$

olur. Böylece $\mathfrak{F}_G(g_1 g_2) \supseteq \mathfrak{F}_G(g_2)$ elde edilir.

Teorem 3.2.6. $\mathfrak{F}_G = (\mathfrak{F}_G^+, \mathfrak{F}_G^-)$, U üzerinde bipolar esnek küme olsun. $\mathfrak{F}_G$, U üzerinde bipolar esnek grup olması için gerek ve yeter şart $\forall g_1, g_2 \in G$ için $\mathfrak{F}_G(g_1 g_2^{-1}) \supseteq \mathfrak{F}_G(g_1) \cap \mathfrak{F}_G(g_2)$ olmasıdır (Karaaslan ve ark 2016).

İspat: $\mathfrak{F}_G = (\mathfrak{F}_G^+, \mathfrak{F}_G^-)$, U üzerinde bipolar esnek grup olsun. $\forall g_1, g_2 \in G$ için

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_G^+(g_1 g_2^{-1}) &\supseteq \mathfrak{F}_G^+(g_1) \cap \mathfrak{F}_G^+(g_2^{-1}) \\ &= \mathfrak{F}_G^+(g_1) \cap \mathfrak{F}_G^+(g_2)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_G^-(g_1 g_2^{-1}) &\subseteq \mathfrak{F}_G^-(g_1) \cup \mathfrak{F}_G^-(g_2^{-1}) \\ &= \mathfrak{F}_G^-(g_1) \cup \mathfrak{F}_G^-(g_2)\end{aligned}$$

Böylece $\mathfrak{F}_G(g_1 g_2^{-1}) \supseteq \mathfrak{F}_G(g_1) \cap \mathfrak{F}_G(g_2)$ elde edilir.

Karşıt olarak, $\forall g_1, g_2 \in G$ için $\mathfrak{F}_G(g_1 g_2^{-1}) \supseteq \mathfrak{F}_G(g_1) \cap \mathfrak{F}_G(g_2)$ olsun. $g_1 = e_G$ alırsak

$\mathfrak{F}_G^+(g_2^{-1}) \supseteq \mathfrak{F}_G^+(g_2)$ ve $\mathfrak{F}_G^-(g_2^{-1}) \subseteq \mathfrak{F}_G^-(g_2)$ olur. Buradan,

$$\mathfrak{F}_G^+(g_2) = \mathfrak{F}_G^+(g_2^{-1})^{-1} \supseteq \mathfrak{F}_G^+(g_2^{-1})$$

$$\mathfrak{F}_G^-(g_2) = \mathfrak{F}_G^-(g_2^{-1})^{-1} \subseteq \mathfrak{F}_G^-(g_2^{-1})$$

elde edilir. Böylece

$$\mathfrak{F}_G(g_2^{-1}) = \mathfrak{F}_G(g_2)$$

olur. $g_1 \neq e_G$ ise $\forall g_1, g_2 \in G$ için

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_G^+(g_1 g_2) &= \mathfrak{F}_G^+(g_1 (g_2^{-1})^{-1}) \\ &\supseteq \mathfrak{F}_G^+(g_1) \cap \mathfrak{F}_G^+(g_2^{-1}) \\ &= \mathfrak{F}_G^+(g_1) \cap \mathfrak{F}_G^+(g_2) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_G^-(g_1 g_2) &= \mathfrak{F}_G^-(g_1 (g_2^{-1})^{-1}) \\ &\subseteq \mathfrak{F}_G^-(g_1) \cup \mathfrak{F}_G^-(g_2^{-1}) \\ &= \mathfrak{F}_G^-(g_1) \cup \mathfrak{F}_G^-(g_2) \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç olarak $\mathfrak{F}_G = (\mathfrak{F}_G^+, \mathfrak{F}_G^-)$, U üzerinde bipolar esnek gruptur.

Teorem 3.2.7. $\mathfrak{F}_G = (\mathfrak{F}_G^+, \mathfrak{F}_G^-)$, U üzerinde bipolar esnek grup olsun. $\forall g_1, g_2 \in G$ için $\mathfrak{F}_G^+(g_1 g_2^{-1}) = U$ ve $\mathfrak{F}_G^-(g_1 g_2^{-1}) = \emptyset$ oluyorsa $\mathfrak{F}_G(g_1) = \mathfrak{F}_G(g_2)$ dir (Karaaslan ve ark 2016).

İspat: $\forall g_1, g_2 \in G$ için

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_G^+(g_1) &= \mathfrak{F}_G^+((g_1 g_2^{-1}) g_2) \\ &\supseteq \mathfrak{F}_G^+(g_1 g_2^{-1}) \cap \mathfrak{F}_G^+(g_2) \\ &= U \cap \mathfrak{F}_G^+(g_2) \\ &= \mathfrak{F}_G^+(g_2) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_G^+(g_2) &= \mathfrak{F}_G^+(g_2^{-1}) \\ &= \mathfrak{F}_G^+(g_1^{-1} (g_1 g_2^{-1})) \\ &\supseteq \mathfrak{F}_G^+(g_1^{-1}) \cap \mathfrak{F}_G^+(g_1 g_2^{-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathfrak{F}_G^+(g_1^{-1}) \cap U \\
&= \mathfrak{F}_G^+(g_1)
\end{aligned}$$

Böylece $\mathfrak{F}_G^+(g_1) = \mathfrak{F}_G^+(g_2)$ olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}_G^-(g_1) &= \mathfrak{F}_G^-(g_1 g_2^{-1} g_2) \\
&\subseteq \mathfrak{F}_G^-(g_1 g_2^{-1}) \cup \mathfrak{F}_G^-(g_2) \\
&= \emptyset \cup \mathfrak{F}_G^-(g_2) \\
&= \mathfrak{F}_G^-(g_2)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}_G^-(g_2) &= \mathfrak{F}_G^-(g_2^{-1}) \\
&= \mathfrak{F}_G^-(g_1^{-1} (g_1 g_2^{-1})) \\
&\subseteq \mathfrak{F}_G^-(g_1^{-1}) \cup \mathfrak{F}_G^-(g_1 g_2^{-1}) \\
&= \mathfrak{F}_G^-(g_1^{-1}) \cup \emptyset \\
&= \mathfrak{F}_G^+(g_1) \text{ dir.}
\end{aligned}$$

Böylece $\mathfrak{F}_G^-(g_1) = \mathfrak{F}_G^-(g_2)$ olur. Sonuç olarak $\mathfrak{F}_G(g_1) = \mathfrak{F}_G(g_2)$ elde edilir.

Teorem 3.2.8. $\mathfrak{F}_G = (\mathfrak{F}_G^+, \mathfrak{F}_G^-)$ ve $\zeta_G = (\zeta_G^+, \zeta_G^-)$, U üzerinde iki bipolar esnek grup olsun. Bipolar esnek grupların kesişimi $\mathfrak{F}_G \sqcap \zeta_G$, U üzerinde bipolar esnek gruptur (Karaaslan ve ark 2016).

İspat: $\forall g_1, g_2 \in G$ için,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}_G \cap \zeta_G(g_1 g_2^{-1}) &\supseteq \mathfrak{F}_G^+(g_1 g_2^{-1}) \cap \zeta_G^+(g_1 g_2^{-1}) \\
&\supseteq (\mathfrak{F}_G^+(g_1) \cap \mathfrak{F}_G^+(g_2)) \cap (\zeta_G^+(g_1) \cap \zeta_G^+(g_2)) \\
&= (\mathfrak{F}_G^+(g_1) \cap \zeta_G^+(g_1)) \cap (\mathfrak{F}_G^+(g_2) \cap \zeta_G^+(g_2)) \\
&= (\mathfrak{F}_G^+ \cap \zeta_G^+)(g_1) \cap (\mathfrak{F}_G^+ \cap \zeta_G^+)(g_2)
\end{aligned}$$

ve

$$\mathfrak{F}_G \cap \zeta_G(g_1 g_2^{-1}) \subseteq \mathfrak{F}_G^-(g_1 g_2^{-1}) \cup \zeta_G^-(g_1 g_2^{-1})$$

$$\begin{aligned}
&\subseteq (\mathfrak{F}_G^-(g_1) \cup \mathfrak{F}_G^-(g_2)) \cup (\zeta_G^-(g_1) \cup \zeta_G^-(g_2)) \\
&= (\mathfrak{F}_G^-(g_1) \cup \zeta_G^-(g_1)) \cup (\mathfrak{F}_G^-(g_2) \cup \zeta_G^-(g_2)) \\
&= (\mathfrak{F}_G^- \cup \zeta_G^-)(g_1) \cup (\mathfrak{F}_G^- \cup \zeta_G^-)(g_2)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\mathfrak{F}_G \cap \zeta_G(g_1 g_2^{-1}) \supseteq \mathfrak{F}_G(g_1 g_2^{-1}) \cap \zeta_G(g_1 g_2^{-1})$ olur. Böylece iki bipolar esnek grubun kesişimi $\mathfrak{F}_G \cap \zeta_G$, U üzerinde bipolar esnek gruptur.

Not 3.2.9. Genellikle bipolar esnek grupların birleşimi $\mathfrak{F}_G \sqcup \zeta_G$, U üzerinde bipolar esnek grup değildir.

Örnek 3.2.10. $G = Z_4$ parametre kümesi ve $U = Z_{10}$ evrensel küme olsun. U üzerinde $\mathfrak{F}_G = (\mathfrak{F}_G^+, \mathfrak{F}_G^-)$ ve $\zeta_G = (\zeta_G^+, \zeta_G^-)$ ile iki bipolar esnek grup oluşturulur.

$$\mathfrak{F}_G^+(\bar{0}) = Z$$

$$\mathfrak{F}_G^+(\bar{1}) = \{\bar{4}, \bar{7}, \bar{9}\}$$

$$\mathfrak{F}_G^+(\bar{2}) = Z$$

$$\mathfrak{F}_G^+(\bar{3}) = \{\bar{4}, \bar{7}, \bar{9}\}$$

$$\mathfrak{F}_G^-(\bar{0}) = \emptyset$$

$$\mathfrak{F}_G^-(\bar{1}) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{6}, \bar{8}\}$$

$$\mathfrak{F}_G^-(\bar{2}) = \emptyset$$

$$\mathfrak{F}_G^-(\bar{3}) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{6}, \bar{8}\}$$

ve

$$\zeta_G^+(\bar{0}) = Z$$

$$\zeta_G^+(\bar{1}) = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{8}\}$$

$$\zeta_G^+(\bar{2}) = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{8}\}$$

$$\zeta_G^+(\bar{3}) = Z$$

$$\zeta_G^-(\bar{0}) = \emptyset$$

$$\zeta_G^-(\bar{1}) = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$$

$$\zeta_G^-(\bar{2}) = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$$

$$\zeta_G^-(\bar{3}) = \emptyset$$

Buradan

$$(\zeta_G \cup \mathfrak{F}_G)^+(\bar{0}) = \zeta_G^+(\bar{0}) \cup \mathfrak{F}_G^+(\bar{0}) = Z$$

$$(\zeta_G \cup \mathfrak{F}_G)^+(\bar{1}) = \zeta_G^+(\bar{1}) \cup \mathfrak{F}_G^+(\bar{1}) = \{\bar{1}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}\}$$

$$(\zeta_G \cup \mathfrak{F}_G)^+(\bar{2}) = \zeta_G^+(\bar{2}) \cup \mathfrak{F}_G^+(\bar{2}) = Z$$

$$(\zeta_G \cup \mathfrak{F}_G)^+(\bar{3}) = \zeta_G^+(\bar{3}) \cup \mathfrak{F}_G^+(\bar{3}) = \{\bar{1}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}\}$$

ve

$$(\zeta_G \cap \mathfrak{F}_G)^-(\bar{0}) = \zeta_G^-(\bar{0}) \cap \mathfrak{F}_G^-(\bar{0}) = \emptyset$$

$$(\zeta_G \cap \mathfrak{F}_G)^-(\bar{1}) = \zeta_G^-(\bar{1}) \cap \mathfrak{F}_G^-(\bar{1}) = \{\bar{2}, \bar{6}\}$$

$$(\zeta_G \cap \mathfrak{F}_G)^-(\bar{2}) = \zeta_G^-(\bar{2}) \cap \mathfrak{F}_G^-(\bar{2}) = \emptyset$$

$$(\zeta_G \cap \mathfrak{F}_G)^-(\bar{3}) = \zeta_G^-(\bar{3}) \cap \mathfrak{F}_G^-(\bar{3}) = \emptyset$$

elde edilir. Buradan $(\zeta_G \cup \mathfrak{F}_G)^+(\bar{2} + \bar{3}) \not\subseteq (\zeta_G \cup \mathfrak{F}_G)^+(\bar{2}) \cap (\zeta_G \cup \mathfrak{F}_G)^+(\bar{3})$ ve

$(\zeta_G \cap \mathfrak{F}_G)^-(\bar{2} + \bar{3}) \not\subseteq (\zeta_G \cap \mathfrak{F}_G)^-(\bar{2}) \cap (\zeta_G \cap \mathfrak{F}_G)^-(\bar{3})$ olduğu görülür. Dolayısıyla

$\zeta_G \sqcup \mathfrak{F}_G$, U üzerinde bipolar esnek grup değildir.

Tanım 3.2.11. H , G nin bir alt grubu, $\mathfrak{F}_G = (\mathfrak{F}_G^+, \mathfrak{F}_G^-)$ ise U üzerinde bir bipolar esnek grup ve $\mathfrak{F}_H = (\mathfrak{F}_H^+, \mathfrak{F}_H^-)$ U üzerinde boştan farklı bir bipolar esnek alt küme olsun. $\mathfrak{F}_H$, U üzerinde bipolar esnek grup ise $\mathfrak{F}_H$ ye $\mathfrak{F}_G$ nin bipolar esnek alt grubu denir ve $\mathfrak{F}_H \preceq \mathfrak{F}_G$ ile gösterilir (Karaaslan ve ark 2016).

Örnek 3.2.12. Örnek.3.2.10. da verilen $\mathfrak{F}_G = (\mathfrak{F}_G^+, \mathfrak{F}_G^-)$, U üzerinde bir bipolar esnek grup alınsın. $H = \{0, 2\} \leq G$ olsun. $\mathfrak{F}_H = (\mathfrak{F}_H^+, \mathfrak{F}_H^-)$ bipolar esnek kümesi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\mathfrak{F}_H^+(0) = \mathfrak{F}_H^+(2) = Z$$

ve

$$\mathfrak{F}_H^-(0) = \mathfrak{F}_H^-(2) = \emptyset.$$

Buradan $\mathfrak{F}_H, \mathfrak{F}_G$ nin U üzerinde bir bipolar esnek alt grubu olur.

Teorem 3.2.13. $\mathfrak{F}_G = (\mathfrak{F}_G^+, \mathfrak{F}_G^-)$, U üzerinde bir bipolar esnek grup ve $\mathfrak{F}_K, \mathfrak{F}_L$ ise $\mathfrak{F}_G$ nin bipolar esnek alt grupları olsun. Buradan $\mathfrak{F}_K \sqcap \mathfrak{F}_L \preceq \mathfrak{F}_G$ dir (Karaaslan ve ark 2016).

İspat: $\forall g_1, g_2 \in G$ için,

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_{K \cap L}^+(g_1 g_2^{-1}) &= \mathfrak{F}_K^+(g_1 g_2^{-1}) \cap \mathfrak{F}_L^+(g_1 g_2^{-1}) \\ &\supseteq (\mathfrak{F}_K^+(g_1) \cap \mathfrak{F}_K^+(g_2)) \cap (\mathfrak{F}_L^+(g_1) \cap \mathfrak{F}_L^+(g_2)) \\ &= (\mathfrak{F}_K^+(g_1) \cap \mathfrak{F}_L^+(g_1)) \cap (\mathfrak{F}_K^+(g_2) \cap \mathfrak{F}_L^+(g_2)) \\ &= \mathfrak{F}_{K \cap L}^+(g_1) \cap \mathfrak{F}_{K \cap L}^+(g_2)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_{K \cap L}^-(g_1 g_2^{-1}) &= \mathfrak{F}_K^-(g_1 g_2^{-1}) \cup \mathfrak{F}_L^-(g_1 g_2^{-1}) \\ &\subseteq (\mathfrak{F}_K^-(g_1) \cup \mathfrak{F}_K^-(g_2)) \cup (\mathfrak{F}_L^-(g_1) \cup \mathfrak{F}_L^-(g_2)) \\ &= (\mathfrak{F}_K^-(g_1) \cup \mathfrak{F}_L^-(g_1)) \cup (\mathfrak{F}_K^-(g_2) \cup \mathfrak{F}_L^-(g_2)) \\ &= \mathfrak{F}_{K \cup L}^-(g_1) \cup \mathfrak{F}_{K \cup L}^-(g_2)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $\mathfrak{F}_K \sqcap \mathfrak{F}_L$, U üzerinde bir bipolar esnek alt gruptur.

3.3 Yakın-Halkalarda Bipolar Esnek İdealler

Bu bölümde yakın-halkalarda bipolar esnek ideal ve bazı cebirsel özellikleri incelenecektir.

Tanım 3.3.1. R_1 ve R_2 iki yakın-halka olmak üzere $R_1 \cup R_2 = R$ ve $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ olsun.

R parametre kümesi ve U evrensel küme olsun. $\mathfrak{F}_R : R_1 \rightarrow R_2$ fonksiyonu izomorfizma olmak üzere $\mathfrak{F}_R^+ : R_1 \rightarrow P(U)$ ve $\mathfrak{F}_R^- : R_2 \rightarrow P(U)$ fonksiyonları $\forall r \in R_1$ için $\mathfrak{F}_R^+(r) \cap \mathfrak{F}_R^-(\mathfrak{F}_R(r)) = \emptyset$ olacak şekilde iki dönüşüm ise $(\mathfrak{F}_R^+, \mathfrak{F}_R^-)$ ikilisine U üzerinde yakın-halkanın bipolar esnek kümesi denir (Çıtak, 2020).

Tanım 3.3.2. $\mathfrak{F}_R = (\mathfrak{F}_R^+, \mathfrak{F}_R^-)$, U üzerinde bipolar esnek küme olsun. $r_3 = \mathfrak{F}(r_1)$, $r_4 = \mathfrak{F}(r_2)$ olacak şekilde $\forall r_1, r_2 \in R_1$ ve $r_3, r_4 \in R_2$ için

$$i. \quad \mathfrak{F}_R^+(r_1 - r_2) \supseteq \mathfrak{F}_R^+(r_1) \cap \mathfrak{F}_R^+(r_2),$$

$$\mathfrak{F}_R^-(r_3 - r_4) \subseteq \mathfrak{F}_R^-(r_3) \cup \mathfrak{F}_R^-(r_4)$$

$$ii. \quad \mathfrak{F}_R^+(r_1 r_2) \supseteq \mathfrak{F}_R^+(r_1) \cap \mathfrak{F}_R^+(r_2),$$

$$\mathfrak{F}_R^-(r_3 r_4) \subseteq \mathfrak{F}_R^-(r_3) \cup \mathfrak{F}_R^-(r_4)$$

ise $\mathfrak{F}_R$ ye U üzerinde bipolar esnek yakın-halka denir (Çıtak, 2020).

Tanım 3.3.3. $\mathfrak{F}_R = (\mathfrak{F}_R^+, \mathfrak{F}_R^-)$, U üzerinde bipolar esnek yakın-halka olsun. $r_4 = \mathfrak{F}(r_1)$, $r_5 = \mathfrak{F}(r_2)$ ve $r_6 = \mathfrak{F}(r_3)$ olacak şekilde $\forall r_1, r_2, r_3 \in R_1$ ve $r_4, r_5, r_6 \in R_2$ için

$$i. \quad \mathfrak{F}_R^+(r_2 + r_1 - r_2) \supseteq \mathfrak{F}_R^+(r_1),$$

$$\mathfrak{F}_R^-(r_5 + r_4 - r_5) \subseteq \mathfrak{F}_R^-(r_4)$$

$$ii. \quad \mathfrak{F}_R^+(r_1 r_2) \supseteq \mathfrak{F}_R^+(r_2),$$

$$\mathfrak{F}_R^-(r_4 r_5) \subseteq \mathfrak{F}_R^-(r_5)$$

$$iii. \quad \mathfrak{F}_R^+((r_1 + r_3)r_2 - r_1 r_2) \supseteq \mathfrak{F}_R^+(r_3),$$

$$\mathfrak{F}_R^-((r_4 + r_6)r_5 - r_4 r_5) \subseteq \mathfrak{F}_R^-(r_6)$$

ise $\mathfrak{F}_R = (\mathfrak{F}_R^+, \mathfrak{F}_R^-)$, bipolar esnek kümesine bipolar esnek ideal denir (Çıtak, 2020).

Teorem 3.3.4. I_1 ve I_2 , sırasıyla R_1 ve R_2 yakın-halkalarının idealleri olsun. U üzerinde $\mathfrak{F}_R$ bipolar esnek kümesi, $T_1 \supseteq T_2$ ve $S_1 \subseteq S_2$ olacak şekilde $T_1, T_2, S_1, S_2 \in P(U)$ ve $m_1 = \mathfrak{F}(r_1)$ olacak şekilde $\forall r_1 \in R_1$ için

$$\mathfrak{F}_R^+ : R_1 \rightarrow P(U), \quad \mathfrak{F}_R^+(r_1) = \begin{cases} T_1, & r_1 \in I_1 \text{ ise} \\ T_2, & r_1 \notin I_1 \text{ ise} \end{cases}$$

ve

$$\mathfrak{F}_R^- : R_2 \rightarrow P(U), \quad \mathfrak{F}_R^-(m_1) = \begin{cases} S_1, & m_1 \in I_2 \text{ ise} \\ S_2, & m_1 \notin I_2 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $\mathfrak{F}_R = (\mathfrak{F}_R^+, \mathfrak{F}_R^-)$, U üzerinde bipolar esnek idealdir (Çıtak, 2020).

İspat: $r_1, r_2 \in R_1$ olsun.

i. $r_1, r_2 \in I_1$ ve $m_1, m_2 \in I_2$ olsun. I_1 ve I_2 sırasıyla R_1 ve R_2 nin idealleri olduğundan $r_1 - r_2 \in I_1$ ve $m_1 - m_2 \in I_2$ dir.

$$\mathfrak{F}_R^+(r_1 - r_2) = T_1 = \mathfrak{F}_R^+(r_1) \cap \mathfrak{F}_R^+(r_2)$$

$$\mathfrak{F}_R^-(m_1 - m_2) = S_1 = \mathfrak{F}_R^-(m_1) \cup \mathfrak{F}_R^-(m_2)$$

ve

$$\mathfrak{F}_R^+(r_1 r_2) = T_1 = \mathfrak{F}_R^+(r_1) \cap \mathfrak{F}_R^+(r_2)$$

$$\mathfrak{F}_R^-(m_1 m_2) = S_1 = \mathfrak{F}_R^-(m_1) \cap \mathfrak{F}_R^-(m_2)$$

olur.

ii. $r_1 \notin I_1$ veya $r_2 \notin I_1$ ve $m_1 \notin I_2$ veya $m_2 \notin I_2$ olsun.

$$T_2 = \mathfrak{F}_R^+(r_1 - r_2) \supseteq T_2 = \mathfrak{F}_R^+(r_1) \cap \mathfrak{F}_R^+(r_2)$$

$$S_2 = \mathfrak{F}_R^-(m_1 - m_2) \subseteq S_2 = \mathfrak{F}_R^-(r_1) \cup \mathfrak{F}_R^-(r_2)$$

ve

$$T_2 = \mathfrak{F}_R^+(r_1 r_2) \supseteq \mathfrak{F}_R^+(r_1) \cap \mathfrak{F}_R^+(r_2)$$

$$S_2 = \mathfrak{F}_R^-(m_1 m_2) \subseteq S_2 = \mathfrak{F}_R^-(r_1) \cup \mathfrak{F}_R^-(r_2) \text{ dir.}$$

Böylece $\mathfrak{F}_R = (\mathfrak{F}_R^+, \mathfrak{F}_R^-)$, U üzerinde bipolar esnek yakın-halkadır.

iii. $r_1, r_2 \in R_1$ olsun. $r_1 \in I_1$ veya $m_1 \in I_2$ ise $r_2 + r_1 - r_2 \in I_1$ ve $m_2 + m_1 - m_2 \in I_2$ olur.

$$\mathfrak{F}_R^+(r_2 + r_1 - r_2) = T_1 = \mathfrak{F}_R^+(r_1)$$

$$\mathfrak{F}_R^-(m_2 + m_1 - m_2) = S_1 = \mathfrak{F}_R^-(m_1)$$

$r_1 \notin I_1$ veya $m_1 \notin I_2$ ise $r_2 + r_1 - r_2 \in I_1$ veya $r_2 + r_1 - r_2 \notin I_1$ ve $m_2 + m_1 - m_2 \in I_2$ veya $m_2 + m_1 - m_2 \notin I_2$ olur. Böylece,

$$\mathfrak{F}_R^+(r_2 + r_1 - r_2) \supseteq T_2 = \mathfrak{F}_R^+(r_1)$$

$$\mathfrak{F}_R^-(m_2 + m_1 - m_2) \subseteq S_2 = \mathfrak{F}_R^-(m_1)$$

elde edilir. Buradan, $\mathfrak{F}_R^+(r_2 + r_1 - r_2) \supseteq \mathfrak{F}_R^+(r_1)$ ve $\mathfrak{F}_R^-(m_2 + m_1 - m_2) \subseteq \mathfrak{F}_R^-(m_1)$ olduğu görülür.

iv. $r_1, r_2 \in R_1$ olsun. $r_2 \in I_1$ veya $m_2 \in I_2$ ise $r_1 r_2 \in I_1$ ve $m_1 m_2 \in I_2$ olur. Böylece,

$$\mathfrak{F}_R^-(r_1 r_2) = T_1 = \mathfrak{F}_R^+(r_1)$$

$$\mathfrak{F}_R^-(m_1 m_2) = S_1 = \mathfrak{F}_R^-(m_1)$$

elde edilir. $r_2 \notin I_1$ veya $m_2 \notin I_2$ ise $r_1 r_2 \in I_1$ veya $r_1 r_2 \notin I_1$ ve $m_1 m_2 \in I_2$ olur. Böylece,

$$\mathfrak{F}_R^-(r_1 r_2) \supseteq T_2 = \mathfrak{F}_R^+(r_1)$$

$$\mathfrak{F}_R^-(m_1 m_2) \subseteq S_2 = \mathfrak{F}_R^-(m_1)$$

Bu durumda $\mathfrak{F}_R^+(r_1 r_2) \supseteq \mathfrak{F}_R^+(m_2)$ ve $\mathfrak{F}_R^-(m_1 m_2) \subseteq \mathfrak{F}_R^-(m_2)$ olduğu görülür.

v. $r_1, r_2, r_3 \in R_1$ olsun. $r_3 \in I_1$ veya $m_3 \in I_2$ ise $(r_1 + r_3)r_2 - r_1 r_2 \in I_1$ ve $(m_1 + m_3)m_2 - m_1 m_2 \in I_2$ olur.

Böylece,

$$\mathfrak{F}_R^+((r_1 + r_3)r_2 - r_1 r_2) = T_1 = \mathfrak{F}_R^+(r_3)$$

ve

$$\mathfrak{F}_R^-((m_1 + m_3)m_2 - m_1 m_2) = S_1 = \mathfrak{F}_R^-(m_3)$$

elde edilir.

$r_3 \notin I_1$ veya $m_3 \notin I_2$ ise $(r_1 + r_3)r_2 - r_1 r_2 \in I_1$ veya

$(r_1 + r_3)r_2 - r_1 r_2 \notin I_1$ ve $(m_1 + m_3)m_2 - m_1 m_2 \in I_2$ veya $(m_1 + m_3)m_2 - m_1 m_2 \notin I_2$ olur.

Böylece,

$$\mathfrak{F}_R^-((r_1 + r_3)r_2 - r_1 r_2) \supseteq T_1 = \mathfrak{F}_R^+(r_3)$$

ve

$$\mathfrak{F}_R^-((r_1 + r_3)r_2 - r_1 r_2) \subseteq S_1 = \mathfrak{F}_R^-(m_3)$$

elde edilir.

Buradan $\mathfrak{F}_R^+((r_1 + r_3)r_2 - r_1 r_2) \supseteq \mathfrak{F}_R^+(r_3)$ ve $\mathfrak{F}_R^-((m_1 + m_3)m_2 - m_1 m_2) \subseteq \mathfrak{F}_R^-(m_3)$ olduğu görülür.

Sonuç olarak $\mathfrak{F}_R = (\mathfrak{F}_R^+, \mathfrak{F}_R^-)$, U üzerinde bipolar esnek idealdir.

4. GAMMA YAKIN-HALKANIN BİPOLAR ESNEK İDEALLERİ

Bu bölümde gamma yakın-halkanın bipolar esnek ideali ve bazı cebirsel özellikleri incelenecektir.

Tanım 4.1.1. N Γ - yakın-halka ve $\mathfrak{F}_N = (\mathfrak{F}_N^+, \mathfrak{F}_N^-)$, U üzerinde bipolar esnek küme olsun.

$\forall n_1, n_2, n_3 \in N$ ve $t \in \Gamma$ için

- i. $\mathfrak{F}_N^+(n_1 - n_2) \supseteq \mathfrak{F}_N^+(n_1) \cap \mathfrak{F}_N^+(n_2)$,
 $\mathfrak{F}_N^-(n_1 - n_2) \subseteq \mathfrak{F}_N^-(n_1) \cup \mathfrak{F}_N^-(n_2)$,
 $\mathfrak{F}_N^+(n_2 + n_1 - n_2) \supseteq \mathfrak{F}_N^+(n_1)$,
 $\mathfrak{F}_N^-(n_2 + n_1 - n_2) \subseteq \mathfrak{F}_N^-(n_1)$,
 $\mathfrak{F}_N^+(n_1 t(n_2 + n_3) - n_1 t n_2) \supseteq \mathfrak{F}_N^+(n_3)$,
 $\mathfrak{F}_N^-(n_1 t(n_2 + n_3) - n_1 t n_2) \subseteq \mathfrak{F}_N^-(n_3)$

ise $\mathfrak{F}_N$ ye N nin bipolar esnek sol ideali denir.

- ii. $\mathfrak{F}_N^+(n_1 t n_2) \supseteq \mathfrak{F}_N^+(n_1)$,
 $\mathfrak{F}_N^-(n_1 t n_2) \subseteq \mathfrak{F}_N^-(n_1)$

ise $\mathfrak{F}_N$ ye N nin bipolar esnek sağ ideali denir.

Not 4.1.2. $\mathfrak{F}_N$ hem bipolar esnek sol ideal hem de bipolar esnek sağ ideal ise $\mathfrak{F}_N$ ye N nin bipolar esnek ideali denir.

Önerme 4.1.3. $\mathfrak{F}_N = (\mathfrak{F}_N^+, \mathfrak{F}_N^-)$, N Γ - yakın-halkasının bipolar esnek ideali olsun. $\forall n \in N$ için

- i. $\mathfrak{F}_N^+(e_N) \supseteq \mathfrak{F}_N^+(n)$ ve $\mathfrak{F}_N^-(e_N) \subseteq \mathfrak{F}_N^-(n)$ dir.
- ii. $\mathfrak{F}_N^+(n) = \mathfrak{F}_N^+(-n)$ ve $\mathfrak{F}_N^-(n) = \mathfrak{F}_N^-(-n)$ dir.

İspat: $\forall n_1, n_2 \in N$ için

i. $\mathfrak{F}_N^+(n_1 - n_2) \supseteq \mathfrak{F}_N^+(n_1) \cap \mathfrak{F}_N^+(n_2)$

olduğu bilinir. $n_1 = n_2$ alınırsa

$$\mathfrak{F}_N^+(n_1 - n_1) \supseteq \mathfrak{F}_N^+(n_1) \cap \mathfrak{F}_N^+(n_1)$$

$$\mathfrak{F}_N^+(e_N) \supseteq \mathfrak{F}_N^+(n_1)$$

elde edilir

ve

$$\mathfrak{F}_N^-(n_1 - n_2) \subseteq \mathfrak{F}_N^-(n_1) \cup \mathfrak{F}_N^-(n_2)$$

olduğu bilinir. $n_1 = n_2$ alınırsa

$$\mathfrak{F}_N^-(n_1 - n_1) \subseteq \mathfrak{F}_N^-(n_1) \cup \mathfrak{F}_N^-(n_1)$$

$$\mathfrak{F}_N^-(e_N) \subseteq \mathfrak{F}_N^-(n_1)$$

elde edilir.

ii. $\mathfrak{F}_N^+(n_1 - n_2) \supseteq \mathfrak{F}_N^+(n_1) \cap \mathfrak{F}_N^+(n_2)$

olduğu bilinir. $n_1 = e_N$ alınırsa

$$\mathfrak{F}_N^+(e_N - n_2) \supseteq \mathfrak{F}_N^+(e_N) \cap \mathfrak{F}_N^+(n_2)$$

$$\mathfrak{F}_N^+(-n_2) \supseteq \mathfrak{F}_N^+(n_2)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\mathfrak{F}_N^+(n_1 - (-n_2)) \supseteq \mathfrak{F}_N^+(n_1) \cap \mathfrak{F}_N^+(-n_2)$$

için $n_1 = e_N$ alınırsa

$$\mathfrak{F}_N^+(e_N - (-n_2)) \supseteq \mathfrak{F}_N^+(e_N) \cap \mathfrak{F}_N^+(-n_2)$$

$$\mathfrak{F}_N^+(n_2) \supseteq \mathfrak{F}_N^+(-n_2)$$

elde edilir. Böylece her iki kapsamadan

$$\mathfrak{F}_N^+(n_2) = \mathfrak{F}_N^+(-n_2)$$

ve

$$\mathfrak{F}_N^-(n_1 - n_2) \subseteq \mathfrak{F}_N^-(n_1) \cup \mathfrak{F}_N^-(n_2)$$

olduğu bilinir. $n_1 = e_N$ alınırsa

$$\mathfrak{F}_N^-(e_N - n_2) \subseteq \mathfrak{F}_N^-(e_N) \cup \mathfrak{F}_N^-(n_2)$$

$$\mathfrak{F}_N^-(-n_2) \subseteq \mathfrak{F}_N^-(n_2)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\mathfrak{F}_N^-(n_1 - (-n_2)) \subseteq \mathfrak{F}_N^-(n_1) \cup \mathfrak{F}_N^-(-n_2)$$

için $n_1 = e_N$ alınırsa

$$\mathfrak{F}_N^-(e_N - (-n_2)) \subseteq \mathfrak{F}_N^-(e_N) \cup \mathfrak{F}_N^-(-n_2)$$

$$\mathfrak{F}_N^-(n_2) \subseteq \mathfrak{F}_N^-(-n_2)$$

elde edilir. Böylece her iki kapsamadan

$$\mathfrak{F}_N^-(n_2) = \mathfrak{F}_N^-(-n_2)$$

olur.

Tanım 4.1.4. $\mathfrak{F}_N = (\mathfrak{F}_N^+, \mathfrak{F}_N^-)$, N nin bipolar esnek ideali ve $n_1 \in N$ olsun.

$\forall n_2 \in N$ için $(n_1 + \mathfrak{F}_N^+)(n_2) = \mathfrak{F}_N^+(n_2 - n_1)$ ve $(n_1 + \mathfrak{F}_N^-)(n_2) = \mathfrak{F}_N^-(n_2 - n_1)$ şeklinde tanımlanan $n_1 + \mathfrak{F}_N$ bipolar esnek kümesine, $\mathfrak{F}_N$ bipolar esnek idealinin bipolar esnek koseti denir.

Önerme 4.1.5. $\mathfrak{F}_N = (\mathfrak{F}_N^+, \mathfrak{F}_N^-)$, N Γ -yakın-halkasının bipolar esnek ideali olsun.

$\forall n_1, n_2 \in N$ için

- i. $n_1 + \mathfrak{F}_N = n_2 + \mathfrak{F}_N \Leftrightarrow \mathfrak{F}_N(n_1 - n_2) = \mathfrak{F}_N(e_N)$
- ii. $n_1 + \mathfrak{F}_N = n_2 + \mathfrak{F}_N \Rightarrow \mathfrak{F}_N(n_1) = \mathfrak{F}_N(n_2)$
- iii. $\mathfrak{F}_N(n_1 + n_2) = \mathfrak{F}_N(n_2 + n_1)$

İspat: $\forall n_1, n_2 \in N$ için

- i. $\Rightarrow: n_1 + \mathfrak{F}_N = n_2 + \mathfrak{F}_N$ olsun. $\forall n_3 \in N$ için

$$(n_1 + \mathfrak{F}_N^+)(n_3) = (n_2 + \mathfrak{F}_N^+)(n_3)$$

$$\mathfrak{F}_N^+(n_3 - n_1) = \mathfrak{F}_N^+(n_3 - n_2)$$

$n_3 = n_1$ alınırsa $\mathfrak{F}_N^+(e_N) = \mathfrak{F}_N^+(n_1 - n_2)$ elde edilir.

Ayrıca

$$(n_1 + \mathfrak{F}_N^-(n_3)) = (n_2 + \mathfrak{F}_N^-(n_3))$$

$$\mathfrak{F}_N^-(n_3 - n_1) = \mathfrak{F}_N^-(n_3 - n_2)$$

$$n_3 = n_1 \text{ alınırsa } \mathfrak{F}_N^-(e_N) = \mathfrak{F}_N^-(n_1 - n_2)$$

Böylece $\mathfrak{F}_N(n_1 - n_2) = \mathfrak{F}_N(e_N)$ olur.

$$\Leftarrow: \quad \mathfrak{F}_N(n_1 - n_2) = \mathfrak{F}_N(e_N)$$

olsun. $\forall n_4 \in N$ için

$$(n_1 + \mathfrak{F}_N^+)(n_4) = \mathfrak{F}_N^+(n_4 - n_1) = \mathfrak{F}_N^+(e_N)$$

ve

$$(n_2 + \mathfrak{F}_N^+)(n_4) = \mathfrak{F}_N^+(n_4 - n_2) = \mathfrak{F}_N^+(e_N)$$

dir.

Böylece $(n_1 + \mathfrak{F}_N^+)(n_4) = (n_2 + \mathfrak{F}_N^+)(n_4)$ olur. Buradan, $n_1 + \mathfrak{F}_N^+ = n_2 + \mathfrak{F}_N^+$ elde edilir.

Ayrıca

$$(n_1 + \mathfrak{F}_N^-)(n_4) = \mathfrak{F}_N^-(n_4 - n_1) = \mathfrak{F}_N^-(e_N)$$

ve

$$(n_2 + \mathfrak{F}_N^-)(n_4) = \mathfrak{F}_N^-(n_4 - n_2) = \mathfrak{F}_N^-(e_N)$$

dir.

Böylece $(n_1 + \mathfrak{F}_N^-)(n_4) = (n_2 + \mathfrak{F}_N^-)(n_4)$ olur. Buradan, $n_1 + \mathfrak{F}_N^- = n_2 + \mathfrak{F}_N^-$ elde edilir.

Sonuç olarak $n_1 + \mathfrak{F}_N = n_2 + \mathfrak{F}_N \Leftrightarrow \mathfrak{F}_N(n_1 - n_2) = \mathfrak{F}_N(e_N)$ olur.

ii. $n_1 + \mathfrak{F}_N = n_2 + \mathfrak{F}_N$ olsun. $\forall n_3 \in N$ için

$$(n_1 + \mathfrak{F}_N^+)(n_3) = (n_2 + \mathfrak{F}_N^+)(n_3)$$

$$\mathfrak{F}_N^+(n_3 - n_1) = \mathfrak{F}_N^+(n_3 - n_2)$$

$$\mathfrak{F}_N^+(n_1 - n_3) = \mathfrak{F}_N^+(n_2 - n_3)$$

olur. $n_3 = e_N$ alınırsa $\mathfrak{F}_N^+(n_1 - e_N) = \mathfrak{F}_N^+(n_2 - e_N)$

$$\mathfrak{F}_N^+(n_1) = \mathfrak{F}_N^+(n_2)$$

ve

$$(n_1 + \mathfrak{F}_N^-)(n_3) = (n_2 + \mathfrak{F}_N^-)(n_3)$$

$$\mathfrak{F}_N^-(n_3 - n_1) = \mathfrak{F}_N^-(n_3 - n_2)$$

$$\mathfrak{F}_N^-(n_1 - n_3) = \mathfrak{F}_N^-(n_2 - n_3)$$

olur. $n_3 = e_N$ alınırsa $\mathfrak{F}_N^-(n_1 - e_N) = \mathfrak{F}_N^-(n_2 - e_N)$

$$\mathfrak{F}_N^-(n_1) = \mathfrak{F}_N^-(n_2)$$

olur. Böylece $n_1 + \mathfrak{F}_N = n_2 + \mathfrak{F}_N \Rightarrow \mathfrak{F}_N(n_1) = \mathfrak{F}_N(n_2)$ elde edilir.

iii. $\mathfrak{F}_N(n_1 + n_2) = \mathfrak{F}_N(n_2 + n_1)$ olduğu gösterilsin. $\forall n_1, n_2, n_3 \in N$ için

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_N^+(e_N) &= \mathfrak{F}_N^+(n_1 + n_2 - n_2 - n_1) \\ &= \mathfrak{F}_N^+(n_1 + n_2 - (n_2 + n_1)) \end{aligned}$$

olur. Buradan $\mathfrak{F}_N^+(e_N) = \mathfrak{F}_N^+(n_1 + n_2 - (n_2 + n_1))$ elde edilir.

i. den $n_1 + n_2 + \mathfrak{F}_N^+ = n_2 + n_1 + \mathfrak{F}_N^+$ olur. ii. den $\mathfrak{F}_N^+(n_1 + n_2) = \mathfrak{F}_N^+(n_2 + n_1)$ elde edilir.

Ayrıca,

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_N^-(e_N) &= \mathfrak{F}_N^-(n_1 + n_2 - n_2 - n_1) \\ &= \mathfrak{F}_N^-(n_1 + n_2 - (n_2 + n_1)) \end{aligned}$$

Buradan $\mathfrak{F}_N^-(e_N) = \mathfrak{F}_N^-(n_1 + n_2 - (n_2 + n_1))$ elde edilir.

i. den $n_1 + n_2 + \mathfrak{F}_N^- = n_2 + n_1 + \mathfrak{F}_N^-$ olur. ii. den $\mathfrak{F}_N^-(n_1 + n_2) = \mathfrak{F}_N^-(n_2 + n_1)$ elde edilir.

Böylece $\mathfrak{F}_N(n_1 + n_2) = \mathfrak{F}_N(n_2 + n_1)$ bulunur.

Not 4.1.6. $\mathfrak{F}_N = (\mathfrak{F}_N^+, \mathfrak{F}_N^-)$, N Γ -yakın-halkasının bipolar esnek ideali olsun. $\mathfrak{F}_N$ nin bütün bipolar esnek kosetlerinin kümesi $N / \mathfrak{F}_N = \{n_1 + \mathfrak{F}_N : n_1 \in N\}$ ile gösterilir.

Teorem 4.1.7. $\mathfrak{F}_N = (\mathfrak{F}_N^+, \mathfrak{F}_N^-)$, N Γ -yakın-halkasının bipolar esnek ideali olsun.

$\forall n_1, n_2 \in N$ ve $t \in \Gamma$ için

$$(n_1 + \mathfrak{F}_N) + (n_2 + \mathfrak{F}_N) = (n_1 + n_2) + \mathfrak{F}_N \text{ ve } (n_1 + \mathfrak{F}_N)t(n_2 + \mathfrak{F}_N) = n_1 t n_2 + \mathfrak{F}_N$$

işlemlerine göre $N / \mathfrak{F}_N$ bir Γ -yakın-halkadır.

İspat: İlk olarak "+" işleminin iyi tanımlı olduğunu inceleyelim

$\forall n_1 + \mathfrak{F}_N, n_2 + \mathfrak{F}_N, n_3 + \mathfrak{F}_N, n_4 + \mathfrak{F}_N \in N / \mathfrak{F}_N$ için

$(n_1 + \mathfrak{F}_N) = (n_3 + \mathfrak{F}_N)$ ve $(n_2 + \mathfrak{F}_N) = (n_4 + \mathfrak{F}_N)$ olsun.

$(n_1 + \mathfrak{F}_N^+) + (n_2 + \mathfrak{F}_N^+) = (n_3 + \mathfrak{F}_N^+) + (n_4 + \mathfrak{F}_N^+)$ olduğunu göstermeliyiz.

Önerme 4.1.5 ten $\mathfrak{F}_N^+(n_1 - n_3) = \mathfrak{F}_N^+(n_2 - n_4) = \mathfrak{F}_N^+(e_N)$ olur.

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{F}_N^+((n_1 + n_2) - (n_3 + n_4)) &= \mathfrak{F}_N^+((n_3 + n_4) - (n_1 + n_2)) \\
 &= \mathfrak{F}_N^+((n_3 + n_4) - (n_4 + n_1) + (n_4 + n_1) - (n_1 + n_2)) \\
 &= \mathfrak{F}_N^+(n_3 + n_4 - n_4 - n_1 + n_4 + n_1 - n_1 - n_2) \\
 &= \mathfrak{F}_N^+((n_3 - n_1) + (n_4 - n_2)) \\
 &\supseteq \mathfrak{F}_N^+((n_3 - n_1) \cap (n_4 - n_2)) \\
 &= \mathfrak{F}_N^+(e_N) \cap \mathfrak{F}_N^+(e_N) \\
 &= \mathfrak{F}_N^+(e_N)
 \end{aligned}$$

Ayrıca, Önerme 4.1.3. ten $\mathfrak{F}_N^+(e_N) \supseteq \mathfrak{F}_N^+((n_1 + n_2) - (n_3 + n_4))$ olduğu biliniyor. Buradan

$\mathfrak{F}_N^+((n_1 + n_2) - (n_3 + n_4)) = \mathfrak{F}_N^+(e_N)$ elde edilir. Böylece

$(n_1 + n_2) + \mathfrak{F}_N^+ = (n_3 + n_4) + \mathfrak{F}_N^+$ olur. Buradan

$(n_1 + \mathfrak{F}_N^+) + (n_2 + \mathfrak{F}_N^+) = (n_3 + \mathfrak{F}_N^+) + (n_4 + \mathfrak{F}_N^+)$ elde edilir. Ayrıca,

$(n_1 + \mathfrak{F}_N^-) = (n_3 + \mathfrak{F}_N^-)$ ve $(n_2 + \mathfrak{F}_N^-) = (n_4 + \mathfrak{F}_N^-)$ olsun.

Önerme 4.1.5 ten $\mathfrak{F}_N^-(n_1 - n_3) = \mathfrak{F}_N^-(n_2 - n_4) = \mathfrak{F}_N^-(e_N)$ olur.

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{F}_N^-((n_1 + n_2) - (n_3 + n_4)) &= \mathfrak{F}_N^-((n_3 + n_4) - (n_1 + n_2)) \\
 &= \mathfrak{F}_N^-((n_3 + n_4) - (n_4 + n_1) + (n_4 + n_1) - (n_1 + n_2)) \\
 &= \mathfrak{F}_N^-(n_3 + n_4 - n_4 - n_1 + n_4 + n_1 - n_1 - n_2) \\
 &= \mathfrak{F}_N^-((n_3 - n_1) + (n_4 - n_2)) \\
 &\subseteq \mathfrak{F}_N^-((n_3 - n_1) \cup (n_4 - n_2)) \\
 &= \mathfrak{F}_N^-(e_N) \cup \mathfrak{F}_N^-(e_N) \\
 &= \mathfrak{F}_N^-(e_N)
 \end{aligned}$$

Ayrıca, Önerme 4.1.3. ten $\mathfrak{F}_N^-(e_N) \subseteq \mathfrak{F}_N^-((n_1 + n_2) - (n_3 + n_4))$ olduğu biliniyor. Buradan

$\mathfrak{F}_N^-((n_1 + n_2) - (n_3 + n_4)) = \mathfrak{F}_N^-(e_N)$ elde edilir. Böylece

$(n_1 + n_2) + \mathfrak{F}_N^- = (n_3 + n_4) + \mathfrak{F}_N^-$ olur. Buradan

$(n_1 + \mathfrak{F}_N^-) + (n_2 + \mathfrak{F}_N^-) = (n_3 + \mathfrak{F}_N^-) + (n_4 + \mathfrak{F}_N^-)$ elde edilir.

Sonuç olarak "+" işlemi iyi tanımlıdır.

Şimdi "." işleminin iyi tanımlı olduğunu inceleyelim.

$\forall n_1 + \mathfrak{F}_N, n_2 + \mathfrak{F}_N, n_3 + \mathfrak{F}_N, n_4 + \mathfrak{F}_N \in N / \mathfrak{F}_N \quad t \in \Gamma$ için $(n_1 + \mathfrak{F}_N) = (n_3 + \mathfrak{F}_N)$ ve

$(n_2 + \mathfrak{F}_N) = (n_4 + \mathfrak{F}_N)$ olsun.

$(n_1 + \mathfrak{F}_N)t(n_2 + \mathfrak{F}_N) = (n_3 + \mathfrak{F}_N)t(n_4 + \mathfrak{F}_N)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{F}_N^+(n_1 t n_2 - n_3 t n_4) &= \mathfrak{F}_N^+(n_3 t n_4 - n_1 t n_2) \\
 &= \mathfrak{F}_N^+(n_3 t n_4 - n_1 t n_4 + n_1 t n_4 - n_1 t n_2) \\
 &= \mathfrak{F}_N^+((n_3 - n_1)t n_4 + n_1 t(n_2 + (-n_2 + n_4)) - n_1 t n_2) \\
 &= \mathfrak{F}_N^+((n_3 - n_1)t n_4 - (-n_1 t)(n_2 + (-n_2 + n_4)) - n_1 t n_2) \\
 &\supseteq \mathfrak{F}_N^+((n_3 - n_1)t n_4) \cap \mathfrak{F}_N^+((-n_1 t)(n_2 + (-n_2 + n_4)) - n_1 t n_2) \\
 &= \mathfrak{F}_N^+((n_3 - n_1)t n_4) \cap \mathfrak{F}_N^+(n_1 t(n_2 + (-n_2 + n_4)) - n_1 t n_2) \\
 &\supseteq \mathfrak{F}_N^+(n_3 - n_1) \cap \mathfrak{F}_N^+(-n_2 + n_4) \\
 &= \mathfrak{F}_N^+(e_N) \cap \mathfrak{F}_N^+(e_N) \\
 &= \mathfrak{F}_N^+(e_N).
 \end{aligned}$$

Ayrıca, Önerme 4.1.3. ten $\mathfrak{F}_N^+(e_N) \supseteq \mathfrak{F}_N^+(n_1 t n_2 - n_3 t n_4)$ olduğu biliniyor. Buradan

$\mathfrak{F}_N^+(n_1 t n_2 - n_3 t n_4) = \mathfrak{F}_N^+(e_N)$ elde edilir.

Böylece $n_1 t n_2 + \mathfrak{F}_N^+ = n_3 t n_4 + \mathfrak{F}_N^+$ olur. $(n_1 + \mathfrak{F}_N^+)t(n_2 + \mathfrak{F}_N^+) = (n_3 + \mathfrak{F}_N^+)t(n_4 + \mathfrak{F}_N^+)$ elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{F}_N^-(n_1 t n_2 - n_3 t n_4) &= \mathfrak{F}_N^-(n_3 t n_4 - n_1 t n_2) \\
 &= \mathfrak{F}_N^-(n_3 t n_4 - n_1 t n_4 + n_1 t n_4 - n_1 t n_2) \\
 &= \mathfrak{F}_N^-((n_3 - n_1)t n_4 + n_1 t(n_2 + (-n_2 + n_4)) - n_1 t n_2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathfrak{F}_N^- \left((n_3 - n_1)t n_4 - (-n_1 t)(n_2 + (-n_2 + n_4)) - n_1 t n_2 \right) \\
&\subseteq \mathfrak{F}_N^- \left((n_3 - n_1)t n_4 \right) \cup \mathfrak{F}_N^- \left((-n_1 t)(n_2 + (-n_2 + n_4)) - n_1 t n_2 \right) \\
&= \mathfrak{F}_N^- \left((n_3 - n_1)t n_4 \right) \cup \mathfrak{F}_N^- \left(n_1 t (n_2 + (-n_2 + n_4)) - n_1 t n_2 \right) \\
&\subseteq \mathfrak{F}_N^-(n_3 - n_1) \cup \mathfrak{F}_N^-(-n_2 + n_4) \\
&= \mathfrak{F}_N^-(e_N) \cup \mathfrak{F}_N^-(e_N) \\
&= \mathfrak{F}_N^-(e_N) \text{ olur.}
\end{aligned}$$

Ayrıca Önerme 4.1.3. ten $\mathfrak{F}_N^-(e_N) \subseteq \mathfrak{F}_N^-(n_1 t n_2 - n_3 t n_4)$ olduğu biliniyor. Buradan

$$\mathfrak{F}_N^-(n_1 t n_2 - n_3 t n_4) = \mathfrak{F}_N^-(e_N) \text{ elde edilir.}$$

Böylece, $n_1 t n_2 + \mathfrak{F}_N^- = n_3 t n_4 + \mathfrak{F}_N^-$ olur.

Buradan $(n_1 + \mathfrak{F}_N^-)t(n_2 + \mathfrak{F}_N^-) = (n_3 + \mathfrak{F}_N^-)t(n_4 + \mathfrak{F}_N^-)$ elde edilir.

Sonuç olarak " $\cdot$ " işlemi iyi tanımlıdır.

Şimdi yukarıdaki işlemlere göre, $N / \mathfrak{F}_N = \{n_1 + \mathfrak{F}_N : n_1 \in N\}$ kümesinin Γ -yakın-halka olduğunu gösterelim. $\forall n_1 + \mathfrak{F}_N, n_2 + \mathfrak{F}_N, n_3 + \mathfrak{F}_N \in N / \mathfrak{F}_N$ ve $t, k \in \Gamma$ olsun.

$$\begin{aligned}
\left[(n_1 + \mathfrak{F}_N^+) + (n_2 + \mathfrak{F}_N^+) \right] t (n_3 + \mathfrak{F}_N^+) &= \left((n_1 + n_2) + \mathfrak{F}_N^+ \right) t (n_3 + \mathfrak{F}_N^+) \\
&= \left((n_1 + n_2) t n_3 \right) + \mathfrak{F}_N^+ \\
&= \left((n_1 t n_3) + (n_2 t n_3) \right) + \mathfrak{F}_N^+ \\
&= \left((n_1 t n_3) + \mathfrak{F}_N^+ \right) + \left((n_2 t n_3) + \mathfrak{F}_N^+ \right) \\
&= (n_1 + \mathfrak{F}_N^+) t (n_3 + \mathfrak{F}_N^+) + (n_2 + \mathfrak{F}_N^+) t (n_3 + \mathfrak{F}_N^+)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(n_1 + \mathfrak{F}_N^-) + (n_2 + \mathfrak{F}_N^-) t (n_3 + \mathfrak{F}_N^-) &= \left((n_1 + n_2) + \mathfrak{F}_N^- \right) t (n_3 + \mathfrak{F}_N^-) \\
&= \left((n_1 + n_2) t n_3 \right) + \mathfrak{F}_N^- \\
&= \left((n_1 t n_3) + (n_2 t n_3) \right) + \mathfrak{F}_N^- \\
&= \left((n_1 t n_3) + \mathfrak{F}_N^- \right) + \left((n_2 t n_3) + \mathfrak{F}_N^- \right) \\
&= (n_1 + \mathfrak{F}_N^-) t (n_3 + \mathfrak{F}_N^-) + (n_2 + \mathfrak{F}_N^-) t (n_3 + \mathfrak{F}_N^-).
\end{aligned}$$

Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\left[(n_1 + \mathfrak{F}_N^+) t(n_2 + \mathfrak{F}_N^+) \right] k(n_3 + \mathfrak{F}_N^+) &= (n_1 t n_2 + \mathfrak{F}_N^+) k(n_3 + \mathfrak{F}_N^+) \\
&= (n_1 t n_2) k n_3 + \mathfrak{F}_N^+ \\
&= n_1 t (n_2 k n_3) + \mathfrak{F}_N^+ \\
&= (n_1 + \mathfrak{F}_N^+) t (n_2 k n_3 + \mathfrak{F}_N^+) \\
&= (n_1 + \mathfrak{F}_N^+) t \left[(n_2 + \mathfrak{F}_N^+) k(n_3 + \mathfrak{F}_N^+) \right]
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\left[(n_1 + \mathfrak{F}_N^-) t(n_2 + \mathfrak{F}_N^-) \right] k(n_3 + \mathfrak{F}_N^-) &= (n_1 t n_2 + \mathfrak{F}_N^-) k(n_3 + \mathfrak{F}_N^-) \\
&= (n_1 t n_2) k n_3 + \mathfrak{F}_N^- \\
&= n_1 t (n_2 k n_3) + \mathfrak{F}_N^- \\
&= (n_1 + \mathfrak{F}_N^-) t (n_2 k n_3 + \mathfrak{F}_N^-) \\
&= (n_1 + \mathfrak{F}_N^-) t \left[(n_2 + \mathfrak{F}_N^-) k(n_3 + \mathfrak{F}_N^-) \right].
\end{aligned}$$

Dolayısıyla $N / \mathfrak{F}_N$ bir Γ -yakın-halkadır.

Teorem 4.1.8. $\mathfrak{F}_N = (\mathfrak{F}_N^+, \mathfrak{F}_N^-)$, N Γ -yakın-halkasının bipolar esnek ideali olsun.

$\Omega_{\mathfrak{F}_N}^+ : N / \mathfrak{F}_N^+ \rightarrow P(U)$ ve $\Omega_{\mathfrak{F}_N}^- : N / \mathfrak{F}_N^- \rightarrow P(U) \forall n_1 \in N$ için $\Omega_{\mathfrak{F}_N}^+(n_1 + \mathfrak{F}_N^+) = \mathfrak{F}_N^+(n_1)$ ve $\Omega_{\mathfrak{F}_N}^-(n_1 + \mathfrak{F}_N^-) = \mathfrak{F}_N^-(n_1)$ ile tanımlansın. $\mathfrak{F}_N = (\mathfrak{F}_N^+, \mathfrak{F}_N^-)$, N , Γ -yakın-halkasının bipolar esnek ideali olsun. O zaman $\Omega_{\mathfrak{F}_N} = (\Omega_{\mathfrak{F}_N}^+, \Omega_{\mathfrak{F}_N}^-)$, $N / \mathfrak{F}_N$ Γ -yakın-halkasının bipolar esnek idealidir.

İspat: Önce $\Omega_{\mathfrak{F}_N}$ iyi tanımlı olduğunu gösterelim.

$\forall n_1 + \mathfrak{F}_N, n_2 + \mathfrak{F}_N \in N / \mathfrak{F}_N$ için $n_1 + \mathfrak{F}_N^+ = n_2 + \mathfrak{F}_N^+$ olsun. Buradan

Önerme 4.1.5 ten $\mathfrak{F}_N^+(n_1) = \mathfrak{F}_N^+(n_2)$ olur. Böylece

$$\Omega_{\mathfrak{F}_N}^+(n_1 + \mathfrak{F}_N^+) = \Omega_{\mathfrak{F}_N}^+(n_2 + \mathfrak{F}_N^+) \text{ olur.}$$

Ve $n_1 + \mathfrak{F}_N^- = n_2 + \mathfrak{F}_N^-$ olsun. Buradan Önerme 4.1.5 ten $\mathfrak{F}_N^-(n_1) = \mathfrak{F}_N^-(n_2)$ olur.

Böylece $\Omega_{\mathfrak{F}_N}^-(n_1 + \mathfrak{F}_N^-) = \Omega_{\mathfrak{F}_N}^-(n_2 + \mathfrak{F}_N^-)$ olur. Bu nedenle, $\Omega_{\mathfrak{F}_N}$ iyi tanımlıdır. Şimdi

$\Omega_{\mathfrak{F}_N}$, $N/\mathfrak{F}_N$ nin bipolar esnek ideali olduğu gösterilsin.

$\forall n_1 + \mathfrak{F}_N, n_2 + \mathfrak{F}_N, n_3 + \mathfrak{F}_N \in \Omega_{\mathfrak{F}_N}$ ve $t \in \Gamma$ için,

i. $\Omega_{\mathfrak{F}_N}$ nin $N/\mathfrak{F}_N$ nin bipolar esnek sol ideali olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}\Omega_{\mathfrak{F}_N}^+ \left((n_1 + \mathfrak{F}_N^+) + (n_2 + \mathfrak{F}_N^+) \right) &= \Omega_{\mathfrak{F}_N}^+ (n_1 + n_2 + \mathfrak{F}_N^+) \\ &= \mathfrak{F}_N^+ (n_1 + n_2) \\ &= \mathfrak{F}_N^+ (n_1 - (-n_2)) \\ &\supseteq \mathfrak{F}_N^+ (n_1) \cap \mathfrak{F}_N^+ (n_2) \\ &= \Omega_{\mathfrak{F}_N}^+ (n_1 + \mathfrak{F}_N^+) \cap \Omega_{\mathfrak{F}_N}^+ (n_2 + \mathfrak{F}_N^+)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\Omega_{\mathfrak{F}_N}^- \left((n_1 + \mathfrak{F}_N^-) + (n_2 + \mathfrak{F}_N^-) \right) &= \Omega_{\mathfrak{F}_N}^- (n_1 + n_2 + \mathfrak{F}_N^-) \\ &= \mathfrak{F}_N^- (n_1 + n_2) \\ &= \mathfrak{F}_N^- (n_1 - (-n_2)) \\ &\subseteq \mathfrak{F}_N^- (n_1) \cup \mathfrak{F}_N^- (n_2) \\ &= \Omega_{\mathfrak{F}_N}^- (n_1 + \mathfrak{F}_N^-) \cup \Omega_{\mathfrak{F}_N}^- (n_2 + \mathfrak{F}_N^-)\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}\Omega_{\mathfrak{F}_N}^+ \left((n_2 + \mathfrak{F}_N^+) + (n_1 + \mathfrak{F}_N^+) - (n_2 + \mathfrak{F}_N^+) \right) &= \Omega_{\mathfrak{F}_N}^+ \left((n_2 + n_1 - n_2) + \mathfrak{F}_N^+ \right) \\ &= \mathfrak{F}_N^+ (n_2 + n_1 - n_2) \\ &\supseteq \mathfrak{F}_N^+ (n_1) \\ &= \Omega_{\mathfrak{F}_N}^+ (n_1 + \mathfrak{F}_N^+)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\Omega_{\mathfrak{F}_N}^- \left((n_2 + \mathfrak{F}_N^-) + (n_1 + \mathfrak{F}_N^-) - (n_2 + \mathfrak{F}_N^-) \right) &= \Omega_{\mathfrak{F}_N}^- \left((n_2 + n_1 - n_2) + \mathfrak{F}_N^- \right) \\ &= \mathfrak{F}_N^- (n_2 + n_1 - n_2) \\ &\subseteq \mathfrak{F}_N^- (n_1) \\ &= \Omega_{\mathfrak{F}_N}^- (n_1 + \mathfrak{F}_N^-) \text{ olur.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Omega_{\mathfrak{F}_N}^+ (n_1 + \mathfrak{F}_N^+) t((n_2 + \mathfrak{F}_N^+) + (n_3 + \mathfrak{F}_N^+)) - (n_1 + \mathfrak{F}_N^+) t(n_2 + \mathfrak{F}_N^+) \\
&= \Omega_{\mathfrak{F}_N}^+ ((n_1 + \mathfrak{F}_N^+) t(n_2 + n_3) + \mathfrak{F}_N^+) - (n_1 + \mathfrak{F}_N^+) t(n_2 + \mathfrak{F}_N^+) \\
&= \Omega_{\mathfrak{F}_N}^+ (n_1 t(n_2 + n_3) + \mathfrak{F}_N^+) - (n_1 t n_2 + \mathfrak{F}_N^+) \\
&= \Omega_{\mathfrak{F}_N}^+ ((n_1 t(n_2 + n_3) - n_1 t n_2) + \mathfrak{F}_N^+) \\
&= \mathfrak{F}_N^+ (n_1 t(n_2 + n_3) - (n_1 t n_2)) \\
&\supseteq \mathfrak{F}_N^+ (n_3) \\
&= \Omega_{\mathfrak{F}_N}^+ (n_3 + \mathfrak{F}_N^+)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \Omega_{\mathfrak{F}_N}^- (n_1 + \mathfrak{F}_N^-) t((n_2 + \mathfrak{F}_N^-) + (n_3 + \mathfrak{F}_N^-)) - (n_1 + \mathfrak{F}_N^-) t(n_2 + \mathfrak{F}_N^-) \\
&= \Omega_{\mathfrak{F}_N}^- ((n_1 + \mathfrak{F}_N^-) t(n_2 + n_3) + \mathfrak{F}_N^-) - (n_1 + \mathfrak{F}_N^-) t(n_2 + \mathfrak{F}_N^-) \\
&= \Omega_{\mathfrak{F}_N}^- (n_1 t(n_2 + n_3) + \mathfrak{F}_N^-) - (n_1 t n_2 + \mathfrak{F}_N^-) \\
&= \Omega_{\mathfrak{F}_N}^- ((n_1 t(n_2 + n_3) - n_1 t n_2) + \mathfrak{F}_N^-) \\
&= \mathfrak{F}_N^- (n_1 t(n_2 + n_3) - (n_1 t n_2)) \\
&\subseteq \mathfrak{F}_N^- (n_3) \\
&= \Omega_{\mathfrak{F}_N}^- (n_3 + \mathfrak{F}_N^-)
\end{aligned}$$

olur.

Böylece $\Omega_{\mathfrak{F}_N}$, $N/\mathfrak{F}_N$ nin bipolar esnek sol idealidir.

ii. $\Omega_{\mathfrak{F}_N}$ nin $N/\mathfrak{F}_N$ nin bipolar esnek sağ ideali olduğu gösterilsin.

$$\begin{aligned}
\Omega_{\mathfrak{F}_N}^+ (n_1 + \mathfrak{F}_N^+) t(n_2 + \mathfrak{F}_N^+) &= \Omega_{\mathfrak{F}_N}^+ (n_2 t n_2 + \mathfrak{F}_N^+) \\
&= \mathfrak{F}_N^+ (n_1 t n_2) \\
&\supseteq \mathfrak{F}_N^+ (n_1) \\
&= \Omega_{\mathfrak{F}_N}^+ (n_1 + \mathfrak{F}_N^+)
\end{aligned}$$

ve

$$\Omega_{\mathfrak{F}_N}^- (n_1 + \mathfrak{F}_N^-) t(n_2 + \mathfrak{F}_N^-) = \Omega_{\mathfrak{F}_N}^- (n_2 t n_2 + \mathfrak{F}_N^-)$$

$$\begin{aligned}
&= \mathfrak{F}_N^-(n_1 t n_2) \\
&\subseteq \mathfrak{F}_N^-(n_1) \\
&= \Omega_{\mathfrak{F}_N}^-(n_1 + \mathfrak{F}_N^-)
\end{aligned}$$

Böylece $\Omega_{\mathfrak{F}_N}$, $N / \mathfrak{F}_N$ nin bipolar esnek sağ idealidir.

Sonuç olarak, $\Omega_{\mathfrak{F}_N} = (\Omega_{\mathfrak{F}_N}^+, \Omega_{\mathfrak{F}_N}^-)$, $N / \mathfrak{F}_N$ nin bipolar esnek idealidir.

Tanım 4.1.9. N_1 ve N_2 , Γ -yakın-halkalar olsun. $\theta: N_1 \rightarrow N_2$ bir fonksiyon olmak üzere $\forall n_1, n_2 \in N_1$, $t \in \Gamma$ için $\theta(n_1 + n_2) = \theta(n_1) + \theta(n_2)$ ve $\theta(n_1 t n_2) = \theta(n_1) t \theta(n_2)$ ise θ ya Γ -yakın-halka homomorfizması denir. Ayrıca θ birebir ise monomorfizma, örten ise epimorfizma, hem birebir hem örten ise izomorfizma denir.

Önerme 4.1.10. $\mathfrak{F}_N = (\mathfrak{F}_N^+, \mathfrak{F}_N^-)$, N Γ -yakın-halkasının bipolar esnek ideali olsun $N_{\mathfrak{F}_N} = \{n \in N : \mathfrak{F}_N^+(n) = \mathfrak{F}_N^+(e_N), \mathfrak{F}_N^-(n) = \mathfrak{F}_N^-(e_N)\}$ kümesi N , Γ -yakın-halkasının idealidir.

İspat: $\forall n_1, n_2 \in N_{\mathfrak{F}_N}$ için $n_1 - n_2 \in N_{\mathfrak{F}_N}$ olduğunu gösterelim. $n_1, n_2 \in N_{\mathfrak{F}_N}$ olduğundan

$$\mathfrak{F}_N^+(n_1) = \mathfrak{F}_N^+(e_N), \quad \mathfrak{F}_N^-(n_1) = \mathfrak{F}_N^-(e_N)$$

ve

$$\mathfrak{F}_N^+(n_2) = \mathfrak{F}_N^+(e_N), \quad \mathfrak{F}_N^-(n_2) = \mathfrak{F}_N^-(e_N)$$

olur.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}_N^+(n_1 - n_2) &\supseteq \mathfrak{F}_N^+(n_1) \cap \mathfrak{F}_N^+(n_2) \\
&= \mathfrak{F}_N^+(e_N) \cap \mathfrak{F}_N^+(e_N) \\
&= \mathfrak{F}_N^+(e_N)
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca $\mathfrak{F}_N^+(e_N) \supseteq \mathfrak{F}_N^+(n_1 - n_2)$ olduğu biliniyor. Böylece $\mathfrak{F}_N^+(n_1 - n_2) = \mathfrak{F}_N^+(e_N)$ olur.

Benzer şekilde $\mathfrak{F}_N^-(n_1 - n_2) = \mathfrak{F}_N^-(e_N)$ olduğu gösterilir. Buradan, $n_1 - n_2 \in N_{\mathfrak{F}_N}$ elde edilir. Böylece, $N_{\mathfrak{F}_N}$, N nin alt grubudur.

$\forall n_1 \in N_{\mathfrak{F}_N}$ ve $n_2 \in N$ için $n_2 + n_1 + (-n_2) \in N_{\mathfrak{F}_N}$ olduğu gösterilsin.

$n_1 \in N_{\mathfrak{F}_N}$ olduğundan $\mathfrak{F}_N^+(n_1) = \mathfrak{F}_N^+(e_N)$ ve $\mathfrak{F}_N^-(n_1) = \mathfrak{F}_N^-(e_N)$ dir.

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_N^+(n_2 + n_1 + (-n_2)) &\supseteq \mathfrak{F}_N^+(n_1) \\ &= \mathfrak{F}_N^+(e_N)\end{aligned}$$

olur. Ayrıca $\mathfrak{F}_N^+(e_N) \supseteq \mathfrak{F}_N^+(n_2 + n_1 + (-n_2))$ olduğu biliyor. Böylece,

$\mathfrak{F}_N^+(n_2 + n_1 + (-n_2)) = \mathfrak{F}_N^+(e_N)$ olur. Benzer şekilde,

$\mathfrak{F}_N^-(n_2 + n_1 + (-n_2)) = \mathfrak{F}_N^-(e_N)$ olduğu gösterilir. Buradan $n_2 + n_1 + (-n_2) \in N_{\mathfrak{F}_N}$ elde edilir. Böylece $N_{\mathfrak{F}_N}$, N nin normal alt grubudur.

$\forall n_1, n_2 \in N$, $t \in \Gamma$ ve $n \in N_{\mathfrak{F}_N}$ için $n_1 t(n_2 + n) - n_1 t n_2 \in N_{\mathfrak{F}_N}$ olduğunu gösterelim.

$n \in N_{\mathfrak{F}_N}$ olduğundan $\mathfrak{F}_N^+(n) = \mathfrak{F}_N^+(e_N)$, $\mathfrak{F}_N^-(n) = \mathfrak{F}_N^-(e_N)$ dir.

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_N^+(n_1 t(n_2 + n) - n_1 t n_2) &\supseteq \mathfrak{F}_N^+(n) \\ &= \mathfrak{F}_N^+(e_N)\end{aligned}$$

olur. Ayrıca $\mathfrak{F}_N^+(e_N) \supseteq \mathfrak{F}_N^+(n_1 t(n_2 + n) - n_1 t n_2)$ olduğu biliniyor.

Böylece, $\mathfrak{F}_N^+(n_1 t(n_2 + n) - n_1 t n_2) = \mathfrak{F}_N^+(e_N)$ olur. Benzer şekilde

$\mathfrak{F}_N^-(n_1 t(n_2 + n) - n_1 t n_2) = \mathfrak{F}_N^-(e_N)$ olduğu gösterilir.

Buradan $n_1 t(n_2 + n) - n_1 t n_2 \in N_{\mathfrak{F}_N}$ elde edilir. Böylece $N_{\mathfrak{F}_N}$, N nin sol idealidir.

$\forall n_1 \in N$, $t \in \Gamma$ ve $n \in N_{\mathfrak{F}_N}$ için $ntn_1 \in N_{\mathfrak{F}_N}$ olduğunu gösterelim.

$n \in N_{\mathfrak{F}_N}$ olduğundan $\mathfrak{F}_N^+(n) = \mathfrak{F}_N^+(e_N)$, $\mathfrak{F}_N^-(n) = \mathfrak{F}_N^-(e_N)$ dir.

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_N^+(ntn_1) &\supseteq \mathfrak{F}_N^+(n) \\ &= \mathfrak{F}_N^+(e_N)\end{aligned}$$

olur. Ayrıca $\mathfrak{F}_N^+(e_N) \supseteq \mathfrak{F}_N^+(ntn_1)$ olduğu biliniyor.

Böylece $\mathfrak{F}_N^+(ntn_1) = \mathfrak{F}_N^+(e_N)$ olduğu görülür. Benzer şekilde $\mathfrak{F}_N^-(ntn_1) = \mathfrak{F}_N^-(e_N)$ olduğu gösterilir. Buradan $ntn_1 \in N_{\mathfrak{F}_N}$ elde edilir. Böylece $N_{\mathfrak{F}_N}$, N nin sağ idealidir. Sonuç olarak $N_{\mathfrak{F}_N}$, N Γ -yakın-halkasının idealidir.

Teorem 4.1.11. $\mathfrak{F}_N = (\mathfrak{F}_N^+, \mathfrak{F}_N^-)$, N Γ -yakın-halkasının bipolar esnek ideali olsun. $\forall n_1 \in N$ için $\theta(n_1) = n_1 + \mathfrak{F}_N^+$ ve $\theta(n_1) = n_1 + \mathfrak{F}_N^-$ ile tanımlanan $\theta: N \rightarrow N / \mathfrak{F}_N$ fonksiyonu, çekirdeği $N_{\mathfrak{F}_N}$ olan bir Γ -yakın-halka epimorfizmasıdır. Ayrıca, $N / \mathfrak{F}_N$ ile $N / N_{\mathfrak{F}_N}$ izomorftur. $(n_1 + N_{\mathfrak{F}_N} \rightarrow n_1 + \mathfrak{F}_N)$.

İspat: $\forall n_1, n_2 \in N$ ve $t \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned}\theta(n_1 + n_2) &= (n_1 + n_2) + \mathfrak{F}_N^+ \\ &= (n_1 + \mathfrak{F}_N^+) + (n_2 + \mathfrak{F}_N^+) \\ &= \theta(n_1) + \theta(n_2)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\theta(n_1 + n_2) &= (n_1 + n_2) + \mathfrak{F}_N^- \\ &= (n_1 + \mathfrak{F}_N^-) + (n_2 + \mathfrak{F}_N^-) \\ &= \theta(n_1) + \theta(n_2)\end{aligned}$$

olduğu görülür. Ayrıca,

$$\begin{aligned}\theta(n_1 t n_2) &= (n_1 t n_2) + \mathfrak{F}_N^+ \\ &= (n_1 + \mathfrak{F}_N^+) t (n_2 + \mathfrak{F}_N^+) \\ &= \theta(n_1) t \theta(n_2)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\theta(n_1 t n_2) &= (n_1 t n_2) + \mathfrak{F}_N^- \\ &= (n_1 + \mathfrak{F}_N^-) t (n_2 + \mathfrak{F}_N^-) \\ &= \theta(n_1) t \theta(n_2)\end{aligned}$$

olduğu görülür. Buradan θ , bir Γ -yakın-halka homomorfizmasıdır.

$\forall n_1 + \mathfrak{F}_N \in N / \mathfrak{F}_N$ için $\theta(n_1) = n_1 + \mathfrak{F}_N^+$ ve $\theta(n_1) = n_1 + \mathfrak{F}_N^-$ olacak şekilde ve $\exists n_1 \in N$ var olduğundan θ örtendir. Buradan, θ bir Γ -yakın-halka epimorfizmasıdır.

$\ker \theta = \{n_1 \in N : \theta(n_1) = e_N\}$ kümesi θ nın çekirdeğidir. Teoremden

$$\theta(n_1) = e_N + \mathfrak{F}_N^+$$

ve

$$\theta(n_1) = n_1 + \mathfrak{F}_N^+$$

olur. Önerme 4.1.5 ten, $n_1 + \mathfrak{F}_N^+ = e_N + \mathfrak{F}_N^+ \Rightarrow \mathfrak{F}_N^+(n_1) = \mathfrak{F}_N^+(e_N)$ elde edilir.

$$\theta(n_1) = e_N + \mathfrak{F}_N^-$$

ve

$$\theta(n_1) = n_1 + \mathfrak{F}_N^-$$

olur. Önerme 4.1.5 ten, $n_1 + \mathfrak{F}_N^- = e_N + \mathfrak{F}_N^- \Rightarrow \mathfrak{F}_N^-(n_1) = \mathfrak{F}_N^-(e_N)$ elde edilir.

Böylece $\mathfrak{F}_N(n_1) = \mathfrak{F}_N(e_N)$ ve $n_1 \in N / \mathfrak{F}_N$ olur.

Sonuç olarak, $\ker \theta = N_{\mathfrak{F}_N}$ olur.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Tez, beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde literatür hakkında bilgi verilmiştir. İkinci bölümde Tez içerisinde kullanacağımız cebirsel yapılar için temel oluşturacak tanım ve teoremlere yer verildi. Ayrıca, gamma halka, yakın-halka, gamma yakın-halka, esnek küme gibi kavramların bazı cebirsel özellikleri incelendi. Üçüncü bölümde bipolar yapısı ele alınarak bipolar esnek küme, bipolar esnek grup ve yakın-halkalarda bipolar esnek idealler gibi yapılar araştırıldı.

Dördüncü bölümde gamma yakın-halkanın bipolar esnek idealleri tanımlandı. Bipolar esnek idealler yardımıyla bipolar esnek koset kümesi oluşturuldu ve bu kümenin bir gamma yakın-halka olduğu gösterildi. Bir bipolar esnek küme tanımlanarak bu kümenin bipolar esnek ideal olduğu ispatlandı. Son olarak gamma yakın-halkanın bipolar esnek idealiyle bir dönüşüm tanımlanarak bu dönüşümün çekirdeği gösterildi ve gamma yakın-halka epimorfizması olduğu gösterildi.

Tez çalışmasından elde edilen sonuçlar kullanılarak bipolar esnek ideallerin farklı cebirsel yapıları çalışılabilir.

6. KAYNAKLAR

- Abdullah, S., Aslam, M. ve Ullah, K., 2014. Bipolar fuzzy soft sets and its applications in decision making problem. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 27 (2), 729-742.
- Acar, U., Koyuncu F. ve Tanay, B., 2010. Soft sets and soft rings. *Computers and Mathematics with Applications*, 59, 3458–3463.
- Alan, A. Y., 2003. Nispi Mantık (Fuzzy Logic), International Seminar Group, Germany.
- Ali, M. I., Davvaz, B., Li, C. ve Feng, F., 2010. Soft sets combined with fuzzy sets and rough sets: a tentative approach. *Soft Comput*, 14 (9), 899-911.
- Ali, M. I., Feng, F., Liu, X., Min W. K. ve Shabir M., 2009. On some new operations in soft set theory. *Computers and Mathematics with Application*, 57, 1547-1553.
- Akkaymak E. A., 2012. α_1 , α_2 Yakın Halkaların Regülerliği Üzerine. (Y. Lisans Tezi), Bozok Üniversitesi. Fen Bilimleri Enstitüsü, Yozgat.
- Akram, M., Kavikumar, J. ve Khamis, A. B., 2014. Characterization of bipolar fuzzy soft semigroup. *Indiana Journal of Science and Thecnology* 7 (8), 1211–1221.
- Aktaş, H. ve Çağman, N., 2007. Soft sets and soft groups. *Information Sciences*, 177, 2726-2735.
- Anitha, M. S. ve Yasodara, B., 2019. Properties of bipolar-valued fuzzy subsemigroups of a semigroup. *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, 22:5, 711-717.
- Arıkan, A. ve Halıcıoğlu, S., 2015. Cebire Giriş, Palme yayıncılık, 467, Ankara.
- Atagün., A. ve Aygün, E., 2016. Groups of soft sets. *J Intel Fuzzy Syst.*, 30, 729–733.
- Atanassov, K., 1986. Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy sets and systems*, 20 (1), 87-96.
- Babitha, K. V. ve Sunil, J. J., 2009. Soft set relations and functions. *Computers and Mathematics with Applications*, 60 (7), 1840-1849.
- Baik, H. G., 2013. Bipolar fuzzy ideals of near rings, *Journal of Korean Institute of Intelligent Systems* 22, 394-398.
- Booth, G. L., 1988. A note on gamma near rings. *Stud. Sci. Math. Hungar*, 23, 471-475.
- Barnes, W. E., 1966. On the Γ -ring of Nobusawa. *Pacific J. Math*, 18, 411–422.
- Chen, D., Tsang, E. C. C., Yeung, D. S. ve Wang, X., 2005. The Parameterization Reduction of Soft Sets and Its Applications. *Computers and Mathematics with Applications*, 49 (56), 757-763.
- Çağman, N., 2014. Contributions to the theory of soft sets. *Journal of New Results in Science* (4), 33-41.
- Çağman, N., Çıtak, F. ve Aktaş H., 2012. Soft int-group and its applications to group theory. *Neural Computing and Applications*, 21 (1), 151-158.
- Çağman, N. ve Deli, I., 2012. Product of FP-soft sets and its applications. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 41 (3), 365 -374.
- Çağman, N. ve Enginoğlu, S., 2010a. Soft matrix theory and decision making. *Computers and Mathematics with Application*, 59, 3308-3314.
- Çağman, N. ve Enginoğlu, S., 2010b. Soft set theory and uni-int decision making. *European Journal of Operational Research*, 207 (2), 847-855.
- Çağman, N., Erdoğan, F. ve Enginoğlu, S., 2011. FP-soft set theory and its applications. *Annals of Fuzzy Mathematics and informatics*, 2/2, 219-226.

- Çıtak, F., 2018. Soft K-Uni Ideals Of Semirings And Its Algebraic Applications. *Iğdır Üniveristesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 8(4), 281-294.
- Çıtak, F., 2022. Characterization of bipolar soft ideal in near rings. *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, 25(6), 1717-1728.
- Çıtak, F. ve Çağman, N., 2015. Soft int-rings and its algebraic applications. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems* 28(3), 1225-1233.
- Çıtak, F. ve Çağman, N., 2017. Soft K-İnt-İdeals Of Semirings And Its Algebraic Structures. *Annals Of Fuzzy Mathematics And Informatics*, 13(4), 531-538.
- Dutta, T. K. ve Chanda, T., 2005. Structures of fuzzy ideals of Γ -ring. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, 28, 9-18.
- Ersoy, B. A., Onar, S., Davvaz, B. Ve Hila, K., 2015. Structure of idealistic fuzzy soft Γ near ring. *UPB Scientific Bulletin, Series A*, Vol. 77, 15-28
- Feng, F., Jun, Y. B. ve Zhao, X., 2008. Soft semirings. *Computers & Mathematics with Applications*, 56 (10), 2621-2628.
- Feng, F., Li, C., Davvaz, B. Ve İrfan Ali, M., 2010. Soft sets combined with fuzzy sets and rough sets: a tentative approach. *Soft Computing* 14, 899–911.
- Feng, F., Liu, X., Fotea V. L. ve Jun, Y. B., 2011. Soft sets and soft rough sets. *Information Sciences* 181, 1125–1137.
- Genç, A., 2019. Belirli Koşul Altındaki Asal Gamma Halkalarının Tek Yanlı İdealleri ve Türevleri Üzerine. *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 21(1), 223-231.
- Giles, R, 1979. A formal system for fuzzy reasoning, *Fuzzy Sets and Systems*, 2 (3), 233-257.
- Gong, K., Xiao, Z. and Zhang, X., 2010. The Bijective Soft Set with Its Operations. *Computers and Mathematics with Applications*, 60 (8), 2270-2278.
- Gündüz, C. ve Bayramov, S., 2013. Some results on fuzzy soft topological spaces. *Mathematical Problems in Engineering*, 1-10.
- Hayat, K. ve Mahmood, T., 2016. Some Applications of Bipolar Soft Set: Characterizations of Two Isomorphic Hemi-Rings via BSI-h-Ideals. *British Journal of Mathematics and Computer Science*, 13 (2), 1-21.
- Jiang, Y., Tang, Y., Chen, Q., Liu, H. ve Tang, J., 2010. Interval-valued intuitionistic fuzzy soft sets and their properties. *Computers and Mathematics with Applications*, 60 (3), 906-918.
- Karaaslan, F., 2016. Bipolar soft rough relations. *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat.* 65 (1), 105-126.
- Karaaslan F., Ahmad I., Ullah A., 2016. Bipolar soft groups. *J Intel Fuzzy Syst* 31(1), 651–662.
- Karaaslan, F. ve Karataş, S., 2012. A new approach to bipolar soft sets and its applications. *Journal of Science & Technology*, 41 (5), 469-476.
- Karaaslan, F. ve Karataş, S., 2014. A new approach to bipolar soft sets and its applications. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, 1-14.
- Karaaslan, K., Kaygısız, K. ve Çağman, N., 2013. On intuitionistic fuzzy soft groups. *Journal of NewResults in Science* 3, 72–86.
- Khan, A., Izhar, M., ve Khalaf, M., 2019. Generalised multi-fuzzy bipolar soft sets and its application in decision making. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems* 37:2, 2713-2725.
- Maji P. K., 2015. An application of weighted neutrosophic soft sets in a decission

- making problem. Springer proceedings in Mathematics and Statistics, 125, 215-223.
- Maji, P. K., Biswas, R. ve Roy, A. R., 2003. Soft set theory. Computers and Mathematics with Applications, 45 (4-5), 555-562.
- Majumdar, P. ve Samanta, S. K., 2010. Generalised fuzzy soft sets. Computers and Mathematics with Applications, 59 (4), 1425-1432.
- Massa'deh, M. O., 2017. On bipolar fuzzy cosets, bipolar fuzzy ideals and isomorphisms of Γ -near rings. Far East Journal of Mathematical Sciences, 102(4), 731-747.
- Molodtsov, D., 1999. Soft set theory-first result. Computers and Mathematics with Applications, 37 (4-5), 19-31.
- Nandakumar, P., 2009. Bi-regular Near-rings. Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 33, 491-496.
- Naz, M. ve Shabir, M., 2014. On bipolar fuzzy soft sets their algebraic structures and applications. J Intel Fuzzy Syst, 26(4), 1645-1656.
- Nobusawa, N., 1964. On a generalization of the ring theory, Osaka J. Math. 1(1), 81-89.
- Onar, A., 2012. Bulanık Esnek Gamma Halkaları. (Y. Lisans Tezi), Yıldız Teknik Üniversitesi. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Onar, A., Ersoy, B.A. ve Tekir. U., 2012. Fuzzy soft Gamma ring. Iranian Journal of Science & Technology. 36, 469-476.
- Pawlak, Z. 1982. Rough Sets. International Journal of Computer and Information Sciences, 11(5), 341-356.
- Pilz, G., 1983. Near-rings. North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford.
- Rosenfeld A. 1971. Fuzzy groups. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 35, 512-517.
- Satyanarayana, B., 2012. Gamma Near Rings. Lecture Programme, A Central University.
- Sezgin, A., Atagün, A.O. ve Aygün, E., 2011. A note on soft near rings and idealistic soft near rings. Filomat, 25, 53-68.
- Sezgin, A., Atagün A. O. ve Çağman N., (2012) Soft intersection nearrings with its applications. Neural Computing and Applications, 21, 221-229
- Sezgin, A., Çağman, N. ve Çıtak, F., 2019. α -Inclusions Applied To Group Theory Via Soft Set And Logic. Communications Series A1: Mathematics And Statistics, 68 (1), 334-352.
- Shabir, M.ve Naz, M., 2013. On Bipolar Soft Sets. arXiv:1303.1344v1.7 (4).
- Sut, D. K., 2012. An application of fuzzy soft relation in decision making problems. International Journal of Mathematics Trends and Technology 3/2, 51-54.
- Uma, S., Balakrishnan, R., Tamizh Chelvam, T., 2010. α_1 , α_2 Near-rings. International Journal of Algebra, 4(2), 71-79.
- Yetiş, S., 2010. Gamma halkalar. (Y. Lisans Tezi), Yıldız Teknik Üniversitesi. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Zadeh, L. A., 1965. Fuzzy sets. Information and control, 8 (3), 338-353.
- Zhang, W.R., 1994. Bipolar fuzzy sets. Proceeding of Fuzzyieee, 835-840.