

**GAUSS BİNOMİYEL VE FİBONOMİYEL KATSAYILARIN
ÖZELLİKLERİ**

Can KIZILATEŞ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MAYIS 2012

ANKARA

Can KIZILATEŞ tarafından hazırlanan “GAUSS BİNOMİYEL VE FİBONOMİYEL KATSAYILARIN ÖZELLİKLERİ” adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Naim TUĞLU

.....

Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Adnan TERCAN

.....

Matematik Anabilim Dalı, H.Ü.

Doç. Dr. Naim TUĞLU

.....

Matematik Anabilim Dalı, G.Ü.

Prof. Dr. Dursun TAŞÇI

.....

Matematik Anabilim Dalı, G.Ü.

Tarih:30/05/2012

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU

.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Can KIZILATEŞ

GAUSS BİNOMİYEL VE FİBONOMİYEL KATSAYILARIN ÖZELLİKLERİ
(Yüksek Lisans Tezi)

Can KIZILATEŞ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Mayıs 2012

ÖZET

Bu çalışmada Gauss Binomiyel katsayıların ve Fibonomiyel Katsayıların tanımları verildi. Gauss Binomiyel Katsayıların temel özellikleri incelendi. Binomiyel Katsayıları içeren bazı özdeşliklerin q benzerleri verildi. Fibonomiyel Katsayıların temel özellikleri incelendi. Gauss Binomiyel Katsayıların Fibonomiyel Katsayılar cinsinden yazılabileceği ve bazı toplamsal q özdeşliklerin Fibonomiyel Katsayılar cinsinden yazılabileceği gösterildi.

Bilim Kodu : 204.1.025

**Anahtar Kelimeler : Binomiyel katsayılar, Gauss Binomiyel Katsayılar,
Fibonomiyel Katsayılar**

Sayfa Adedi : 52

Tez Yöneticisi : Doç. Dr. Naim TUĞLU

**THE PROPERTIES OF GAUSS BINOMIAL COEFFICIENTS AND
FIBONOMIAL COEFFICIENTS**

(M.Sc. Thesis)

Can Kızılateş

**GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

May 2012

ABSTRACT

In this thesis, the definitions of Gauss Binomial Coefficients and Fibonomial Coefficients were given. Basic features of Gauss Binomial Coefficients were examined. q synonyms of some identities possessing Binomial Coefficients were given. Basic features of Fibonomial Coefficients were examined. It has been proved that Gauss Binomial Coefficients can be expressed in terms of Fibonomial Coefficients and that certain q identities can be expressed in terms of Fibonomial Coefficients.

Science Code : 204.1.025

Key Words :Binomial Coefficients, Gauss Binomial coefficients, Fibonomial Coefficients

Page Number: 52

Advisor : Assoc. Prof. Naim TUĞLU

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli katkılarıyla beni yönlendiren ve her safhasında bilgisine başvurduğum Hocam Doç. Dr. Naim TUĞLU 'ya, yine tecrübelerinden faydalandığım hocalarım Prof. Dr. Dursun TAŞÇI 'ya ve Doç. Dr. Ercan ALTINIŞIK 'a, manevi destekleriyle beni hiç yalnız bırakmayan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ	1
2. GENELLEŞTİRİLMİŞ BİNOMİYEL KATSAYILAR	3
3. GAUSS BİNOMİYEL KATSAYILAR.....	6
4. FİBONOMİYEL KATSAYILAR.....	32
KAYNAKLAR	50
ÖZGEÇMİŞ	52

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılan bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
U_n	U_n dizisinin n . terimi
F_n	n . Fibonacci sayısı
L_n	n . Lucas sayısı
$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$	Fontené-Ward katsayıları
$[n]_U !$	Genelleştirilmiş faktoriyel
$\binom{n}{k}$	Binomiyel katsayısı
$\binom{n}{k}_q$	Gauss binomiyel katsayısı
F_q	Mertebesi q olan cisim
$\binom{n}{k}_F$	Fibonomiyel katsayısı
$f_k(x)$	Fibonacci sayısının k . kuvvetinin üreteç fonksiyonu
(d_n)	İşaretsiz fibonomiyel katsayı dizisi

1. GİRİŞ

Fontené, 1915 de genelleştirilmiş binomiyel katsayıları tanımlamış ve bu genelleştirilmiş katsayılar için temel reküransı vermiştir [1].

Ward, 1936 da dizilerin analizi üzerine kurulu çalışmasında genelleştirilmiş binomiyel katsayıları yeniden tanımlamıştır [2].

Gould, genelleştirilmiş binomiyel katsayıları Fontené-Ward binomiyel katsayılar olarak adlandırmış ve bu katsayıların temel özelliklerini incelemiştir [3].

Jarden, genelleştirilmiş ikinci mertebeden rekürans bağıntısını ele almıştır. Bu reküransın çözümü olan dizinin de genelleştirilmiş binomiyel katsayılar için tanımlı olan dizi olabileceğini göstermiştir [4].

Torretto ve Fuchs, genelleştirilmiş ikinci mertebeden rekürans bağıntısını sağlayan dizi ve bu dizi ile oluşan genelleştirilmiş binomiyel katsayılar arasında toplamsal bir özdeşlik elde etmişlerdir [5].

Kac ve Cheung, Quantum Calculus adlı kitaplarında q benzerlerin birçok özelliklerine değinmişlerdir [6].

Corcino, q benzerlerin daha genel hali olan $p-q$ benzerler üzerinde çalışmıştır. Binomiyel katsayılar ve Gauss Binomiyel katsayıların birçok özelliğinin $p-q$ binomiyel katsayılar ile paralellik gösterdiğini ispatlamıştır [7].

Krot, Fibonomiyel katsayıların tanımını ve özelliklerini vermiştir [8].

Dziemianczuk, Fibonomiyel katsayıların tanımını vermiş ve bu katsayıların temel özelliklerine değinmiştir. Daha sonra Fibonomiyel katsayıları daha da genelleştirerek $\mathcal{T}$ – nomial katsayıları tanımlamıştır [9].

Kwansniewski, binom açılımının fibonomiyel katsayılar yardımıyla $+_F$ işlemini kullanarak yazılabileceğine değinmiştir [10].

Riordan, fibonacci sayısının k . kuvvetinin üreteç fonksiyonunun genel reküransını bulmuştur [17].

Carlitz ve Horadam, Riordan 'nın sonucunu genelleştirmiş ve genelleştirilmiş fibonacci sayılarının farklı çeşitlerinin üreteç fonksiyonları için benzer reküransları bulmuşlardır [18,19].

Shannon ise $f_k(x)$ ifadesinin pay ve paydası için bazı özel sonuçlar bulmuştur [20].

Seibert ve Trojovsky, fibonacci sayılarının k . kuvvetinin üreteç fonksiyonu yardımıyla fibonomiyel katsayılar için bazı özdeşlikler vermişlerdir [11,12].

Bu çalışmada Genelleştirilmiş Binomiyel katsayılar, Gauss Binomiyel Katsayılar ve Fibonomiyel Katsayıların tanımları verildi. Gauss Binomiyel Katsayıların temel özellikleri incelendi. Gauss Binomiyel Katsayıların hangi durumda Binomiyel Katsayılara dönüşebileceği gösterildi. Binomiyel Katsayıları içeren bazı özdeşliklerin q – benzerleri verildi. Fibonomiyel Katsayıların temel özelliklerine değinildi. Gauss Binomiyel Katsayıların, Fibonomiyel Katsayılar cinsinden yazılabileceği ve bazı toplamsal q – özdeşliklerin de Fibonomiyel Katsayılar cinsinden yazılabileceği gösterildi. Son olarak Fibonacci sayılarının k . kuvvetlerinin üreteç fonksiyonunun Fibonomiyel Katsayıyı içeren toplamsal bir özdeşlik şeklinde yazılabileceği incelendi.

2. GENELLEŞTİRİLMİŞ BİNOMİYEL KATSAYILAR

2.1. Tanım

$F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ olmak üzere $n \geq 0$ için

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

rekürans bağıntısıyla tanımlı sayılara Fibonacci sayıları denir. Burada F_n n . Fibonacci sayısıdır. Buna göre ilk on Fibonacci sayısı

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55.

şeklindedir.

$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere n . Fibonacci sayısı

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

şeklinde yazılabileceğini Marie Binet göstermiştir. Bu gösterime Fibonacci sayılarının Binet formülü denir.

2.2. Tanım

$L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ olmak üzere $n \geq 0$ için

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$$

rekürans bağıntısıyla tanımlı sayılara Lucas sayıları denir. Burada L_n n . Lucas sayısıdır. Buna göre ilk on Lucas sayısı

1,3,4,7,11,18, 29,47,76,123.

şeklindedir.

Fibonacci sayılarına benzer şekilde Lucas sayılarınında Binet formülü

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

şeklindedir.

2.3. Tanım

$n \geq k$ doğal sayıları için U_n dizinin n . terimini göstermek üzere

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_U = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{U_n U_{n-1} \dots U_{n-k+1}}{U_k U_{k-1} \dots U_1} \quad (2.1)$$

ve

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} = 1, \quad n < k \text{ veya } k < 0 \text{ için } \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = 0$$

biçiminde tanımlı sayılara genelleştirilmiş binomiyel (Fontené-Ward) katsayıları denir [3].

Gould $n \geq 0$ ve a, b reel sayıları için $\{U_n\}$ dizisini, $U_0 = 0$ ve $U_1 = 1$ olmak şartıyla

$$U_{n+2} = aU_{n+1} + bU_n$$

şeklinde ele almıştır [3].

$$[n]_U! = U_n U_{n-1} \dots U_2 U_1 \text{ ve } [0]! = 1$$

olmak üzere Eş. 2.1

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{[n]_U!}{[k]_U! [n-k]_U!}$$

biçiminde ifade edilebilir.

Genel olarak bu durum binomiyel katsayılar, Gauss binomiyel katsayılar ve fibonomiyel katsayılar içinde düşünülebilir.

Eş. 2.1 de $U_n = n$ alındığında binomiyel katsayılar

Eş. 2.1 de $U_n = F_n$ alındığında fibonomiyel katsayılar

Eş. 2.1 de $U_n = 1 - q^n$ alındığında Gauss binomiyel katsayılar

elde edilir.

3. GAUSS BİNOMİYEL KATSAYILAR

3.1. Tanım

n, j negatif olmayan tamsayılar olmak üzere

$$[n]! = \begin{cases} 1 & , \quad n = 0 \\ [n][n-1] \dots [1] & , \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

olsun. Burada

$$[n] = \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad (3.1)$$

dir. Bu ifade, Gauss tarafından tanımlanmıştır.

$$\binom{n}{j}_q = \frac{[n]!}{[n-j]![j]!}$$

ifadesine Gauss Binomiyel (q -Binomiyel) katsayı denir.

$q \neq 1$ için

$$[n] = \frac{1 - q^n}{1 - q} = q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + 1$$

olduğundan ,

$$\lim_{q \rightarrow 1^-} [n] = \lim_{q \rightarrow 1^-} (q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + 1) = n$$

dir. O halde,

$$\lim_{q \rightarrow 1^-} \binom{n}{j}_q = \binom{n}{j}$$

dir. Burada $\binom{n}{j}$, binomiyel katsayıdır. Ayrıca q -Binomiyel katsayısı

$$\binom{n}{j}_q = \frac{[n]!}{[n-j]![j]!} = \frac{[n][n-1]\dots[n-j+1]}{[j][j-1]\dots[1]}$$

şeklinde de ifade edebiliriz.

Örneğin;

$$\binom{4}{2}_q = \frac{[4][3]}{[2][1]}$$

dir.

$$[4] = \frac{1-q^4}{1-q} \quad [3] = \frac{1-q^3}{1-q} \quad [2] = \frac{1-q^2}{1-q} \quad [1] = \frac{1-q}{1-q}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \binom{4}{2}_q &= \frac{(1-q^4)(1-q^3)}{(1-q^2)(1-q)} \\ &= (1+q^2)(1+q+q^2) \\ &= q^4 + q^3 + 2q^2 + q + 1 \end{aligned}$$

olur.

Gauss Binomiyel katsayılar, Pascal üçgenindeki gibi bir simetriye sahiptir. Ancak bu katsayılar binomiyel katsayıların gösterdiği özellikleri göstermeyebilir.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & \\
 & & & & & & \\
 & & 1 & & 1+q & & 1 \\
 & & & & & & \\
 & 1 & & 1+q+q^2 & & 1+q+q^2 & 1 \\
 & & & & & & \\
 1 & & 1+q+q^2+q^3 & & (1+q+q^2)(1+q^2) & & 1+q+q^2+q^3 & 1 \\
 & & & & & & \\
 & & & & \vdots & &
 \end{array}$$

3.1. Önerme

$$\binom{n}{k}_q = \binom{n}{n-k}_q$$

dir [6].

3.2. Önerme

q -Pascal kuralı aşağıdaki şekilde verilsin. $1 \leq j \leq n-1$ için

$$\binom{n}{j}_q = \binom{n-1}{j-1}_q + q^j \binom{n-1}{j}_q \quad (3.2)$$

$$\binom{n}{j}_q = q^{n-j} \binom{n-1}{j-1}_q + \binom{n-1}{j}_q \quad (3.3)$$

dir [6].

İspat

$1 \leq j \leq n-1$ olmak üzere

$$[n] = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$$

$$= 1 + q + \dots + q^j + q^{j+1} + \dots + q^{n-1}$$

$$= (1 + q + \dots + q^{j-1}) + q^j (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-j-1})$$

$$= [j] + q^j [n-j]$$

dir. O halde

$$\binom{n}{j}_q = \frac{[n]!}{[n-j]![j]!} = \frac{[n-1]![n]}{[j]![n-j]!} = \frac{[n-1]!([j] + q^j[n-j])}{[j]![n-j]!}$$

$$= \frac{[n-1]!}{[j-1]![n-j]!} + \frac{q^j[n-1]!}{[j]![n-j-1]!}$$

$$= \binom{n-1}{j-1}_q + q^j \binom{n-1}{j}_q$$

elde edilir.

Eş. 3.3 ifadesi ise

$$\binom{n}{j}_q = \binom{n}{n-j}_q = \binom{n-1}{n-j-1}_q + q^{n-j} \binom{n-1}{n-j}_q = \binom{n-1}{j}_q + q^{n-j} \binom{n-1}{n-j}_q$$

$$= q^{n-j} \binom{n-1}{j-1}_q + \binom{n-1}{j}_q$$

şeklinde elde edilir.

3.2. Tanım

Herhangi bir n reel sayısı için

$$[n] = \frac{1-q^n}{1-q}$$

dir [6]. Bu ifade, Eş. 3.1 ile tanımlanan ifadenin daha geniş bir halidir.

3.3. Önerme

$$[-n] = -q^{-n}[n]$$

dir.

İspat

$$[-n] = \frac{1-q^{-n}}{1-q} = \frac{1-\frac{1}{q^n}}{1-q} = -q^{-n} \frac{1-q^n}{1-q} = -q^{-n}[n]$$

dir.

$(x+y)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j y^{n-j}$ ifadesinin binom katsayıları için mevcut olduğunu

biliyoruz. Şimdi bu ifadenin q benzerini verelim.

3.3. Tanım

$n \geq 1$ için

$$(x+y)_q^n = (x+y)_q (x+qy)_q (x+q^2y)_q \dots (x+q^{n-1}y)_q$$

$$= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}_q q^{\frac{j(j-1)}{2}} x^{n-j} y^j$$

biçiminde tanımlanmıştır [6].

3.1. Teorem

$q \neq x$ ile komütatif bir değişken olmak üzere

$$\prod_{r=0}^{n-1} (1 + xq^r) = \sum_{k=0}^n q^{\binom{k}{2}} \binom{n}{k}_q x^k$$

dir [7].

İspat

Bu teoremi n üzerine tümevarım yaparak ispatlayalım.

$n = 1$ için

$$(1 + x) = \sum_{k=0}^1 q^{\binom{k}{2}} \binom{1}{k}_q x^k$$

$$= x^0 + x$$

$$= 1 + x$$

dir.

Kabul edelim ki $n \geq 1$

$$\prod_{r=0}^{n-1} (1 + xq^r) = \sum_{k=0}^n q^{\binom{k}{2}} \binom{n}{k}_q x^k$$

doğru olsun.

$n + 1$ için doğruluğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\prod_{r=0}^n (1+xq^r) &= (1+xq^n) \sum_{k=0}^n q^{\binom{k}{2}} \binom{n}{k}_q x^k \\
&= \sum_{k=0}^n q^{\binom{k}{2}} \binom{n}{k}_q x^k + \sum_{k=0}^n q^{\binom{k}{2}+n} \binom{n}{k}_q x^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} q^{\binom{k}{2}} \binom{n}{k}_q x^k + \sum_{k=1}^{n+1} q^{\binom{k-1}{2}+n} \binom{n}{k-1}_q x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \left\{ q^{\binom{k}{2}} \binom{n}{k}_q + q^{\binom{k-1}{2}+n} \binom{n}{k-1}_q \right\} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} q^{\binom{k}{2}} \left\{ \binom{n}{k}_q + q^{n-k+1} \binom{n}{k-1}_q \right\} x^k
\end{aligned}$$

Eş. 3.3 'den dolayı

$$\binom{n+1}{k}_q = \binom{n}{k}_q + q^{n-k+1} \binom{n}{k-1}_q$$

dir. O halde

$$\prod_{r=0}^n (1+xq^r) = \sum_{k=0}^{n+1} q^{\binom{k}{2}} \binom{n+1}{k}_q x^k$$

olup $n+1$ için doğrudur. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek

Teorem 3.1 'de $n=2$ alalım.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^2 q^{\binom{k}{2}} \binom{2}{k}_q x^k &= q^{\binom{0}{2}} \binom{2}{0}_q x^0 + q^{\binom{1}{2}} \binom{2}{1}_q x^1 + q^{\binom{2}{2}} \binom{2}{2}_q x^2 \\
&= 1 + (q+1)x + qx^2 \\
&= (1+xq^0)(1+xq) \\
&= \prod_{r=0}^1 (1+xq^r)
\end{aligned}$$

dir.

3.1. Sonuç

$n \geq 1$ için

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} q^{\binom{2k}{2}} \binom{n}{2k}_q = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} q^{\binom{2k+1}{2}} \binom{n}{2k+1}_q$$

dir [7].

İspat

Teorem 3.1 'de $x = -1$ alırsak

$$\prod_{r=0}^{n-1} (1 - q^r) = \sum_{k=0}^n (-1)^k q^{\binom{k}{2}} \binom{n}{k}_q$$

olur. $r = 0$ ise $1 - q^r = 0$

olduğundan

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k q^{\binom{k}{2}} \binom{n}{k}_q = 0$$

dir. Bu da sonucumuzla eşdeğerdedir.

Örnek

Sonuç 3.1 'de $n = 4$ alalım.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{4}{2} \rfloor} q^{\binom{2k}{2}} \binom{4}{k}_q &= q^{\binom{0}{2}} \binom{4}{0}_q + q^{\binom{2}{2}} \binom{4}{2}_q + q^{\binom{4}{2}} \binom{4}{4}_q \\
 &= 1 + q(q^4 + q^3 + 2q^2 + q + 1) + q^6 \\
 &= q^6 + q^5 + q^4 + 2q^3 + q^2 + q + 1 \\
 &= q^{\binom{1}{2}} \binom{4}{1}_q + q^{\binom{3}{2}} \binom{4}{3}_q \\
 &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{4-1}{2} \rfloor} q^{\binom{2k+1}{2}} \binom{4}{2k+1}_q
 \end{aligned}$$

3.2. Teorem

q x ve y ile komütatif ve $yx = qxy$ ise

$$(x + y)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}_q x^j y^{n-j} \quad (3.4)$$

dir [6].

İspat

İspatı tümevarım yöntemiyle yapalım. Eş. 3.4 'nin $n = 1$ için doğru olduğu açıktır.

$$(x + y) = \binom{1}{0}_q y + \binom{1}{1}_q x = y + x$$

$$y^k x = y^{k-1} yx = y^{k-1} qxy = qy^{k-1} xy = qy^{k-2} yxy = qy^{k-2} qxy^2 = \dots = q^k xy^k$$

elde edilecektir.

Eş. 3.4 'nin n için doğru olduğunu kabul edip $n+1$ için doğruluğunu gösterelim.

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n (x+y)$$

$$\begin{aligned} &= \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j}_q x^j y^{n-j} \right) (x+y) \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}_q x^j y^{n-j} x + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}_q x^j y^{n-j+1} \end{aligned}$$

dir. $y^k x = q^k xy^k$ olduğundan

$$\begin{aligned} (x+y)^{n+1} &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}_q x^j (q^{n-j} xy^{n-j}) + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}_q x^j y^{n-j+1} \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1}_q x^j q^{n-j+1} y^{n-j+1} + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}_q x^j y^{n-j+1} \\ &= \binom{n}{n+1-1}_q x^{n+1} + \binom{n}{0}_q y^{n+1} + \sum_{j=1}^n \left(\binom{n}{j}_q + \binom{n}{j-1}_q q^{n-j+1} \right) x^j y^{n-j+1} \\ &= x^{n+1} + y^{n+1} + \sum_{j=1}^n \left(\binom{n}{j}_q + \binom{n}{j-1}_q q^{n-j+1} \right) x^j y^{n-j+1} \\ &= x^{n+1} + y^{n+1} + \sum_{j=1}^n \binom{n+1}{j}_q x^j y^{n-j+1} \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j}_q x^j y^{n-j+1} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3.3. Teorem

x bir reel sayı k pozitif tamsayı olmak üzere

$$\binom{-x}{k}_q = (-1)^k q^{-kx - \frac{k(k-1)}{2}} \binom{x+k-1}{k}_q$$

dir [13].

İspat

$$\begin{aligned} \binom{-x}{k}_q &= \frac{[-x][-x-1]\dots[-x-k+1]}{[k][k-1]\dots[1]} \\ &= \frac{\frac{1-q^{-x}}{1-q} \frac{1-q^{-x-1}}{1-q} \dots \frac{1-q^{-x-k+1}}{1-q}}{[k][k-1]\dots[1]} \\ &= \frac{\frac{q^x-1}{q^x(1-q)} \frac{q^{x+1}-1}{q^{x+1}(1-q)} \dots \frac{q^{x+k-1}-1}{q^{x+k-1}(1-q)}}{[k][k-1]\dots[1]} \\ &= (-1)^k \frac{[x][x+1]\dots[x+k-1]}{q^x q^{x+1} \dots q^{x+k-1} [k][k-1]\dots[1]} \\ &= (-1)^k \frac{1}{q^{\frac{k(2x+k-1)}{2}}} \binom{x+k-1}{k}_q \\ &= (-1)^k q^{-kx - \frac{k(k-1)}{2}} \binom{x+k-1}{k}_q \end{aligned}$$

3.4. Teorem

n, m ve k pozitif tamsayıları için

$$\binom{n}{m}_q \binom{m}{k}_q = \binom{n}{k}_q \binom{n-k}{m-k}_q = \binom{n}{m-k}_q \binom{n-m+k}{k}_q$$

dir [13].

İspat

$$\binom{n}{m}_q \binom{m}{k}_q = \frac{[n]!}{[n-m]![m]!} \frac{[m]!}{[m-k]![k]!} \quad (3.5)$$

dir.

$n \geq k$ olduğundan Eş. 3.5 'in pay ve paydasını $[n-k]!$ ile çarparsak

$$\begin{aligned} \binom{n}{m}_q \binom{m}{k}_q &= \frac{[n]!}{[n-k]![k]!} \frac{[n-k]!}{[m-k]![n-m]!} \\ &= \binom{n}{k}_q \binom{n-k}{m-k}_q \end{aligned}$$

dir.

İkinci olarak

$$\binom{n}{k}_q \binom{n-k}{m-k}_q = \binom{n}{m-k}_q \binom{n-m+k}{k}_q$$

eşitliğinin doğruluğunu gösterelim.

$$\binom{n}{k}_q \binom{n-k}{m-k}_q = \frac{[n]!}{[n-k]![k]!} \frac{[n-k]!}{[n-m]![m-k]!} \quad (3.6)$$

$n - m + k \geq 0$ olduğundan Eş. 3.6 'nın pay ve paydasını $[n - m + k]!$ ile çarparsak

$$\begin{aligned} \binom{n}{k}_q \binom{n-k}{m-k}_q &= \frac{[n]!}{[m-k]![n-m+k]!} \frac{[n-m+k]!}{[k]![n-m]!} \\ &= \binom{n}{m-k}_q \binom{n-m+k}{k}_q \end{aligned}$$

dir.

3.5. Teorem

n, m ve k pozitif tamsayıları için

$$\binom{n}{m}_q \binom{n-m}{k}_q = \binom{n}{k}_q \binom{n-k}{m}_q = \binom{n}{m+k}_q \binom{m+k}{m}_q$$

dir [13].

İspat

$$\binom{n}{m}_q \binom{n-m}{k}_q = \frac{[n]!}{[n-m]![m]!} \frac{[n-m]!}{[n-m-k]![k]!} \quad (3.7)$$

$n - k \geq 0$ olduğundan Eş. 3.7 'nin pay ve paydasını $[n - k]!$ ile çarparsak

$$\begin{aligned} \binom{n}{m}_q \binom{n-m}{k}_q &= \frac{[n]!}{[k]![n-k]![m]![n-k-m]!} \\ &= \binom{n}{k}_q \binom{n-k}{m}_q \end{aligned}$$

dir.

İkinci olarak

$$\binom{n}{k}_q \binom{n-k}{m}_q = \binom{n}{m+k}_q \binom{m+k}{m}_q$$

eşitliğinin doğruluğunu gösterelim.

$$\binom{n}{k}_q \binom{n-k}{m}_q = \frac{[n]!}{[k]![n-k]!} \frac{[n-k]!}{[m]![n-k-m]!} \quad (3.8)$$

$m+k \geq 0$ olduğundan Eş. 3.8 'in pay ve paydasını $[m+k]!$ ile çarparsak

$$\begin{aligned} \binom{n}{k}_q \binom{n-k}{m}_q &= \frac{[n]!}{[m+k]![n-m-k]!} \frac{[m+k]!}{[m]![k]!} \\ &= \binom{n}{m+k}_q \binom{m+k}{m}_q \end{aligned}$$

dir.

3.6. Teorem

n, k ve m pozitif tamsayılar olmak üzere

$$\sum_{r=k}^m (-1)^{r-k} q^{\frac{r(r+1)}{2}} \binom{n+1}{r+1}_q = q^{\frac{k(k+1)}{2}} \binom{n}{k}_q + (-1)^{m-k} q^{\frac{(m+1)(m+2)}{2}} \binom{n}{m+1}_q$$

ve

$$\sum_{r=k}^n (-1)^{r-k} q^{\frac{r(r+1)}{2}} \binom{n+1}{r+1}_q = q^{\frac{k(k+1)}{2}} \binom{n}{k}_q$$

dir [13].

İspat

Eş. 3.2 'den dolayı

$$\binom{n+1}{r+1}_q = \binom{n}{r}_q + q^{r+1} \binom{n}{r+1}_q$$

dir.

$$\begin{aligned} \sum_{r=k}^m (-1)^{r-k} q^{\frac{r(r+1)}{2}} \binom{n+1}{r+1}_q &= \sum_{r=k}^m (-1)^{r-k} q^{\frac{r(r+1)}{2}} \left(\binom{n}{r}_q + q^{r+1} \binom{n}{r+1}_q \right) \\ &= \sum_{r=k}^m (-1)^{r-k} q^{\frac{r(r+1)}{2}} \binom{n}{r}_q + \sum_{r=k}^m (-1)^{r-k} q^{\frac{(r+1)(r+2)}{2}} \binom{n}{r+1}_q \\ &= \left(q^{\frac{k(k+1)}{2}} \binom{n}{k}_q - q^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}} \binom{n}{k+1}_q + \cdots + (-1)^{m-k} q^{\frac{m(m+1)}{2}} \binom{n}{m}_q \right) \\ &\quad + \left(q^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}} \binom{n}{k+1}_q + \cdots + (-1)^{m-k} q^{\frac{(m+1)(m+2)}{2}} \binom{n}{m+1}_q \right) \\ &= q^{\frac{k(k+1)}{2}} \binom{n}{k}_q + (-1)^{m-k} q^{\frac{(m+1)(m+2)}{2}} \binom{n}{m+1}_q \quad (3.9) \end{aligned}$$

dir.

Eş. 3.9 'da $m = n$ alınırsa

$$\sum_{r=k}^n (-1)^{r-k} q^{\frac{r(r+1)}{2}} \binom{n+1}{r+1}_q = q^{\frac{k(k+1)}{2}} \binom{n}{k}_q$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

3.7. Teorem

n, k ve m pozitif tamsayıları için

$$\sum_{r=m}^n q^{-rk} \binom{r-1}{k-1}_q = q^{-nk} \binom{n}{k}_q - q^{-(m-1)k} \binom{m-1}{k}_q$$

ve

$$\sum_{r=k}^n q^{-rk} \binom{r-1}{k-1}_q = q^{-nk} \binom{n}{k}_q$$

dir [13].

İspat

E.ş. 3.2 'den dolayı

$$\binom{r}{k}_q = \binom{r-1}{k-1}_q + q^k \binom{r-1}{k}_q$$

dir.

$$\begin{aligned} \sum_{r=m}^n q^{-rk} \binom{r-1}{k-1}_q &= \sum_{r=m}^n q^{-rk} \left(\binom{r}{k}_q - q^k \binom{r-1}{k}_q \right) \\ &= \sum_{r=m}^n q^{-rk} \binom{r}{k}_q - \sum_{r=m}^n q^{-k(r-1)} \binom{r-1}{k}_q \\ &= \left(q^{-mk} \binom{m}{k}_q + q^{-(m+1)k} \binom{m+1}{k}_q + \cdots + q^{-nk} \binom{n}{k}_q \right) \\ &\quad - \left(q^{-k(m-1)} \binom{m-1}{k}_q + q^{-km} \binom{m}{k}_q + \cdots + q^{-k(n-1)} \binom{n-1}{k}_q \right) \end{aligned}$$

$$\sum_{r=m}^n q^{-rk} \binom{r-1}{k-1}_q = q^{-nk} \binom{n}{k}_q - q^{-(m-1)k} \binom{m-1}{k}_q \quad (3.10)$$

dir.

Eş. 3.10 'da $m = k$ alınırsa

$$\sum_{r=k}^n q^{-rk} \binom{r-1}{k-1}_q = q^{-nk} \binom{n}{k}_q$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

3.8. Teorem

$$\sum_{j=i}^n (-1)^{n-j} q^{\binom{j-i}{2}} \binom{n}{j}_q \binom{j}{i}_q = \delta_{n,i}$$

dir [7].

İspat

İspatı tümevarım yöntemiyle yapalım.

$n = 0$ için

$$\sum_{j=i}^0 (-1)^{-j} q^{\binom{j-i}{2}} \binom{0}{j}_q \binom{j}{i}_q = \delta_{0,i}$$

$j = i = 0$

olduğundan $n = 0$ için doğrudur.

$n = 1$ için

$$\sum_{j=i}^1 (-1)^{1-j} q^{\binom{j-i}{2}} \binom{1}{j}_q \binom{j}{i}_q = \delta_{1,i}$$

olur.

$i = 0$ ise

$$\sum_{j=0}^1 (-1)^{1-j} q^{\binom{j}{2}} \binom{1}{j}_q \binom{j}{0}_q = \delta_{1,0}$$

ve

$i = 1$ ise

$$\sum_{j=1}^1 (-1)^{1-j} q^{\binom{j-1}{2}} \binom{1}{j}_q \binom{j}{1}_q = \delta_{1,1}$$

olduğundan $n = 1$ için doğrudur.

Kabul edelim ki $n \geq 0$

$$H_n = \sum_{j=i}^n (-1)^{n-j} q^{\binom{j-i}{2}} \binom{n}{j}_q \binom{j}{i}_q = \delta_{n,i}$$

ifadesi doğru olsun. $n+1$ için doğruluğunu gösterelim.

$$H_{n+1} = \sum_{j=i}^{n+1} (-1)^{n+1-j} q^{\binom{j-i}{2}} \binom{n+1}{j}_q \binom{j}{i}_q$$

Eş. 3.3 'den

$$\binom{n+1}{j}_q = \binom{n}{j}_q + q^{n-j+1} \binom{n}{j-1}_q$$

dir. O halde

$$H_{n+1} = \sum_{j=i}^{n+1} (-1)^{n+1-j} q^{\binom{j-i}{2}} \left(\binom{n}{j}_q + q^{n-j+1} \binom{n}{j-1}_q \right) \binom{j}{i}_q$$

$$H_{n+1} = \sum_{j=i}^{n+1} (-1)^{n+1-j} q^{\binom{j-i}{2}} \binom{n}{j}_q \binom{j}{i}_q + \sum_{j=i}^{n+1} (-1)^{n+1-j} q^{\binom{j-i}{2}+n-j+1} \binom{n}{j-1}_q \binom{j}{i}_q$$

$$H_{n+1} = (-1)\delta_{n,i} + \sum_{j=i}^{n+1} (-1)^{n+1-j} q^{\binom{j-i}{2}+n-j+1} \binom{n}{j-1}_q \binom{j}{i}_q$$

$$H_{n+1} = (-1)\delta_{n,i} + \sum_{j=i-1}^n (-1)^{n-j} q^{\binom{j+1-i}{2}+n-j} \binom{n}{j}_q \binom{j+1}{i}_q$$

$$H_{n+1} = (-1)\delta_{n,i} + q^{n-i} \sum_{j=i-1}^n (-1)^{n-j} q^{\binom{j-i}{2}} \binom{n}{j}_q \binom{j+1}{i}_q$$

olur.

Eş. 3.3 'den

$$\binom{j+1}{i}_q = \binom{j}{i}_q + q^{j-i+1} \binom{j}{i-1}_q$$

olduğunu kullanırsak

$$H_{n+1} = -\delta_{n,i} + q^{n-i} \sum_{j=i-1}^n (-1)^{n-j} q^{\binom{j-i}{2}} \binom{n}{j}_q \binom{j}{i}_q + q^{n-i} \sum_{j=i-1}^n (-1)^{n-j} q^{\binom{j-i}{2} + j-i+1} \binom{n}{j}_q \binom{j}{i-1}_q$$

$$H_{n+1} = -\delta_{n,i} + q^{n-i} \delta_{n,i} + q^{n-i} \sum_{j=i-1}^n (-1)^{n-j} q^{\binom{j-i}{2} + j-i+1} \binom{n}{j}_q \binom{j}{i-1}_q$$

$$H_{n+1} = (-1 + q^{n-i}) \delta_{n,i} + q^{n-i} q \sum_{j=i-1}^n (-1)^{n-j} q^{\binom{j-(i-1)}{2}} \binom{n}{j}_q \binom{j}{i-1}_q$$

$$H_{n+1} = q^{n-i+1} \delta_{n,i-1}$$

$$H_{n+1} = \delta_{n+1,i}$$

olup $n+1$ için doğrudur. Böylece ispat tamamlanır.

3.9. Teorem

$$\sum_{j=0}^k q^{(m-j)(k-j)} \binom{m}{j}_q \binom{n}{k-j}_q = \binom{m+n}{k}_q$$

dir [6].

3.10. Teorem

n, j, k ve r doğal sayı olmak üzere

$$\sum_r (-1)^r q^{r[(n-j) + \frac{r+1}{2} - k]} \binom{n-r}{k-r}_q \binom{j}{r}_q = \binom{n-j}{k}_q \quad (3.11)$$

dir.

İspat

Teorem 3.3 'den dolayı

$$\binom{n-r}{k-r}_q = (-1)^{k-r} q^{\frac{(n-r)(k-r)-(k-r)(k-r-1)}{2}} \binom{k-n-1}{k-r}_q$$

$$\binom{n-r}{k-r}_q = (-1)^{k-r} q^{(k-r)\left(\frac{2n-k-r+1}{2}\right)} \binom{k-n-1}{k-r}_q$$

dir. Bu ifadeyi Eş. 3.11 'de yerine yazarsak

$$\begin{aligned} &= \sum_r (-1)^r q^{r[(n-j)+\frac{r+1}{2}-k]} \binom{n-r}{k-r}_q \binom{j}{r}_q \\ &= \sum_r (-1)^r q^{r[(n-j)+\frac{r+1}{2}-k]} (-1)^{k-r} q^{(k-r)\left(\frac{2n-k-r+1}{2}\right)} \binom{k-n-1}{k-r}_q \binom{j}{r}_q \\ &= (-1)^k q^{k(n-j)-\frac{k(k-1)}{2}} \sum_r q^{(j-r)(k-r)} \binom{k-n-1}{k-r}_q \binom{j}{r}_q \end{aligned} \quad (3.12)$$

Teorem 3.9 'dan dolayı

$$\sum_r q^{(j-r)(k-r)} \binom{k-n-1}{k-r}_q \binom{j}{r}_q = \binom{k-n-1+j}{k}_q$$

dir. Bu ifadeyi Eş. 3.12 'de yerine yazarsak

$$= (-1)^k q^{k(n-j)-\frac{k(k-1)}{2}} \binom{k-n-1+j}{k}_q$$

olur. Teorem 3.3 'den

$$(-1)^k q^{k(n-j)-\frac{k(k-1)}{2}} \binom{k-n-1+j}{k}_q = \binom{n-j}{k}_q$$

dir. O halde

$$\sum_r (-1)^r q^{r[(n-j)+\frac{r+1}{2}-k]} \binom{n-r}{k-r}_q \binom{j}{r}_q = \binom{n-j}{k}_q$$

olduğundan teorem ispatlanır.

3.11. Teorem

$$w(\mathbb{S}) = \sum_{s \in \mathbb{S}} s$$

olmak üzere

$A_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ve $A_{n,j}$, A_n 'nin j elemanlı alt kümelerinin bir ailesi olsun. Buna göre $0 \leq j \leq n$ için

$$\binom{n}{j}_q = \sum_{\mathbb{S} \in A_{n,j}} q^{w(\mathbb{S}) - \frac{j(j+1)}{2}} \quad (3.13)$$

dir [6].

İspat

Bu teoremi n üzerinden tümevarım yöntemi ile ispatlayacağız. $n = 1$, $j = 0, 1$ için teoremin doğru olduğunu gösterelim.

$j = 0$ için, $A_{1,0} = \{\{\emptyset\}\}$, $w\{\emptyset\} = 0$ olacaktır. Bu durumda Eş. 3.13 ifadesinin sağ ve sol tarafı aşağıda gösterildiği gibi birbirine eşittir:

$$\binom{1}{0}_q = 1 = \sum q^0 = \sum 1 = 1$$

$n = 1$, $j = 1$ için $A_{1,1} = \{\{1\}\}$, $w\{1\} = 1$ olacaktır. Bu durumda yine Eş. 3.13 'ün sağ ve sol tarafı aşağıda gösterildiği gibi birbirine eşit olacaktır.

$$\binom{1}{1}_q = 1 = \sum q^{1-\frac{2}{2}} = 1$$

Şimdi varsayalım ki, Eş 3.13 , $1 \leq n \leq m-1$, $m \geq 2$ için doğru olsun ve $m = n$ seçelim.

$j = 0$ için, $A_{m,0} = \{\{\emptyset\}\}$ olacak ve Eş. 3.13 ifadesi yine sağlanacaktır. $j \geq 1$ için $A_{m,j} = B \cup B'$ öyleki $B = \{\mathbb{S} \in A_{m,j} : m \notin \mathbb{S}\}$, $B' = \{\mathbb{S} \in A_{m,j} : m \in \mathbb{S}\}$ olacak şekilde tanımlayabiliriz. B deki tüm kümeler A_{m-1} nin j elemanlı alt kümeleridir. B' deki her küme ise, A_{m-1} 'in $(j-1)$ elemanlı alt kümeleridir. Buna göre Eş. 3.13 ifadesi

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbb{S} \in A_{m,j}} q^{w(\mathbb{S}) - \frac{j(j+1)}{2}} &= \sum_{\mathbb{S} \in B} q^{w(\mathbb{S}) - \frac{j(j+1)}{2}} + \sum_{\mathbb{S} \in B'} q^{w(\mathbb{S}) - \frac{j(j+1)}{2}} \\ &= \sum_{\mathbb{S} \in A_{m-1,j}} q^{w(\mathbb{S}) - \frac{j(j+1)}{2}} + \sum_{\mathbb{S} \in A_{m-1,j-1}} q^{(w(\mathbb{S})+m) - \frac{j(j+1)}{2}} \\ &= \sum_{\mathbb{S} \in A_{m-1,j}} q^{w(\mathbb{S}) - \frac{j(j+1)}{2}} + \sum_{\mathbb{S} \in A_{m-1,j-1}} q^{w(\mathbb{S}) - \frac{j(j-1)}{2}} q^{m-j} \\ &= \binom{m-1}{j}_q + q^{m-j} \binom{m-1}{j-1}_q \\ &= \binom{m}{j}_q \end{aligned}$$

dir. Tümevarımdan $1 \leq n \leq m-1$, $m \geq 2$ için Eş. 3.13 ifadesini doğru kabul etmiştik. Ayrıca q -Pascal kuralından dolayı da son eşitlik elde edilmişti. O halde Eş. 3.13 ifadesi j üzerinden tümevarım yardımıyla $0 \leq j \leq m$ için doğrudur. Sonuç olarak n üzerindeki tümevarımdan dolayı da $0 \leq j \leq n$ için teorem doğru olacaktır.

Örnek

Teorem 3.11 'de $n = 4$ ve $j = 2$ alırsak

$$A_4 = \{1, 2, 3, 4\}$$

ve

$$A_{4,2} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$$

olur.

$$w(\{1, 2\}) = 3; w(\{1, 3\}) = 4; w(\{1, 4\}) = 5; w(\{2, 3\}) = 5; w(\{2, 4\}) = 6; w(\{3, 4\}) = 7$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \binom{4}{2}_q &= \sum_{S \in A_{4,2}} q^{w(S) - \frac{2 \cdot 3}{2}} = \sum_{S \in A_{4,2}} q^{w(S) - 3} \\ &= q^{3-3} + q^{4-3} + q^{5-3} + q^{5-3} + q^{6-3} + q^{7-3} \\ &= q^4 + q^3 + 2q^2 + q + 1 \end{aligned}$$

3.12. Teorem

Eğer F_q , mertebesi q olan bir cisim ise (q , bir asal sayının kuvveti), $\binom{n}{j}_q = n$

boyutlu F_q^n vektör uzayının j -boyutlu alt uzaylarının sayısıdır [6].

İspat

$V = F_q^n$, F_q cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. $j = 0$ için

$$\binom{n}{0}_q = \frac{[n]!}{[0]![n]!} = 1$$

ve n boyutlu bir V vektör uzayının sadece bir tane sıfır boyutlu bir alt uzayı vardır. O da $\{0\}$ dir. O halde $j = 0$ için iddia doğrudur.

Şimdi de $j \geq 1$ için teoremi ispatlayalım. V vektör uzayından j -boyutlu bir alt uzay oluşturabilmemiz için V vektör uzayından j -tane lineer bağımsız baz vektörü seçmeliyiz. Baz vektörlerimiz $v_1, v_2, \dots, v_j$ olsun. V , vektör uzay olduğundan $\vec{0}$ vektörünü içermektedir. Her bir baz elemanı da sıfırdan farklı olmalıdır. O halde v_1 baz vektörü V vektör uzayından $q^n - 1$ tane farklı biçimde seçilebilir. İkinci olarak v_2 vektörü, v_1 vektörü tarafından gerilen alt uzayın herhangi bir elemanı olmamalıdır. Çünkü v_1 ve v_2 baz vektörleri lineer bağımsız olmalıdır. Bu yüzden v_2 yi, v_1 tarafından gerilen alt uzayın bir elemanı olarak alamayız. v_1 baz vektörünün oluşturduğu alt uzay $V_1 = \{av_1 : v_1 \neq 0, a \in F_q\}$ şeklinde tanımlanacağından, v_1 tarafından gerilen alt uzayın q tane elemanı olacaktır. O halde v_2 vektörü $q^n - q$ tane farklı şekilde seçilecektir. Benzer şekilde geri kalan baz vektörleri de seçilir. Buna göre n -boyutlu F_q^n vektör uzayından

$$(q^n - 1)(q^n - q) \dots (q^n - q^{j-1}) \quad (3.14)$$

tane farklı yoldan j tane lineer bağımsız baz vektörü seçebiliriz.

Fakat oluşturacağımız bu j lilerin bazıları aynı alt uzayı oluşturacaktır. Çünkü bir vektör uzayı farklı bazlar tarafından oluşturulabilir. Bu nedenle Eş. 3.14 'ü j boyutlu bir alt uzayın kaç farklı baz tarafından gerilebileceği sayısına bölmeliyiz. Herhangi bir j boyutlu alt uzay alalım ve bu alt uzaydan kaç farklı şekilde lineer bağımsız j liler oluşturulabileceğini hesaplayalım. Herhangi bir j boyutlu alt uzayın q^j tane elemanı vardır. Çünkü F_q üzerinde j -boyutlu bir alt uzay aşağıdaki şekilde tanımlanacaktır:

$$(a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_jv_j : v_j \neq 0, v_j \in F_q^n, a_j \in F_q).$$

Burada $\forall a_j \in F_q$ yerine q tane farklı değer yazabileceğimizden dolayı j boyutlu bir alt uzayın q^j tane elemanı vardır. Şimdi j -boyutlu bir alt uzaydan j tane lineer bağımsız vektör seçelim. Bu seçim yine yukarıdaki gibi yapılır.

$$(q^j - 1)(q^j - q) \dots (q^j - q^{j-1}) \quad (3.15)$$

Bunun sonucunda j -boyutlu vektör uzayından (3.15) 'de belirtildiği kadar farklı şekilde j -li lineer bağımsız baz vektörleri seçilebilir. Yani, j -boyutlu bir alt uzay (3.15) deki kadar farklı baz tarafından gerilmektedir. Dolayısıyla birbirinden farklı j -boyutlu alt uzayların sayısı

$$\frac{(q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2) \dots (q^n - q^{j-1})}{(q^j - 1)(q^j - q)(q^j - q^2) \dots (q^j - q^{j-1})} = \frac{q q^2 q^3 \dots q^{j-1} (q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \dots (q^{n-j+1} - 1)}{q q^2 q^3 \dots q^{j-1} (q^j - 1)(q^{j-1} - 1) \dots (q - 1)}$$

$$= \binom{n}{j}_q$$

olacaktır. Yukarıdaki bölme işlemini yapmamızın sebebi

$$(q^j - 1)(q^j - q) \dots (q^j - q^{j-1})$$

tane baz, bir tane j -boyutlu alt uzay oluşturmaktır. Dolayısıyla

$$(q^n - 1)(q^n - q) \dots (q^n - q^{j-1})$$

tane bazın kaç tane farklı j -boyutlu alt uzay oluşturduğunu bulmak için bu iki ifadeyi birbirine böldük. Böylece ispat tamamlanmıştır.

4. FİBONOMİYEL KATSAYILAR

4.1. Tanım

$\{n_F\}_{n \geq 0}$ doğal sayıların bir dizisi olmak üzere $n, k \in \mathbb{N}$ öyle ki $n \geq k$ olsun.

$$n_F! = n_F(n-1)_F \dots 1_F$$

ve

$$n_F^k = n_F(n-1)_F \dots (n-k+1)_F$$

olarak tanımlansın. $0_F! = n_F^0 = 1$ olmak üzere

$$\binom{n}{k}_F = \frac{n_F!}{k_F!(n-k)_F!} = \frac{n_F^k}{k_F!}.$$

F_n , n. Fibonacci sayısı olmak üzere $n_F = F_n$ alırsak

$$\binom{n}{k}_F = \frac{F_n!}{F_k!F_{n-k}!} = \binom{n}{k}_{Fib} = \frac{F_n F_{n-1} \dots F_{n-k+1}}{F_k F_{k-1} \dots F_1} = \prod_{i=1}^k \frac{F_{n-i+1}}{F_i}$$

ifadesine Fibonomiyel (F-Binomiyel) katsayı denir. F-Binomiyel katsayılar Pascal üçgenindeki gibi bir simetriye sahiptir.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 1 \\
 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 \\
 & & & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & 1 \\
 & & & & & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 2 & & 1 \\
 & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 6 & & 3 & & 1 \\
 & & & & & & \vdots & & & & \\
 \end{array}$$

Şimdi Fibonomiyel katsayılar için rekürans bağıntısını verelim.

$$\binom{n}{k}_F = F_{k+1} \binom{n-1}{k}_F + F_{n-k-1} \binom{n-1}{k-1}_F$$

dir [10].

Özellik

$$\binom{n}{k}_F = \binom{n}{n-k}_F$$

dir [9].

Özellik

$$\binom{n}{m}_F \binom{m}{k}_F = \binom{n}{k}_F \binom{n-k}{n-m}_F$$

dir [9].

Özellik

$n = i_1 + i_2 + \dots + i_k$ olmak üzere (multinomial katsayılar)

$$\binom{n}{i_1, i_2, \dots, i_k}_F = \binom{n}{i_1}_F \binom{n-i_1}{i_2}_F \dots \binom{n-i_1-i_2-\dots-i_{k-1}}{i_k}_F$$

dir [9].

Örnek

$$\begin{aligned} \binom{6}{1,2,3} &= \binom{6}{1}_F \cdot \binom{6-1}{2}_F \cdot \binom{6-1-2}{3}_F \\ &= F_6 F_5 F_4 = 8.5.3 = 120 \end{aligned}$$

Özellik

$$F_{n-k} \binom{n}{k}_F = F_n \binom{n-1}{k}_F$$

dir [15].

İspat

$$\begin{aligned} F_{n-k} \binom{n}{k}_F &= F_{n-k} \frac{F_n!}{F_{n-k}! F_k!} \\ &= F_n \frac{F_{n-1}!}{F_{n-k-1}! F_k!} \\ &= F_n \binom{n-1}{k}_F \end{aligned}$$

dir.

Özellik

$$F_k \binom{n}{k}_F = F_n \binom{n-1}{k-1}_F$$

dir [15].

İspat

$$\begin{aligned}
 F_k \binom{n}{k}_F &= F_k \frac{F_n!}{F_{n-k}! F_k!} \\
 &= F_n \frac{F_{n-1}!}{F_{n-k}! F_{k-1}!} \\
 &= F_n \binom{n-1}{k-1}_F
 \end{aligned}$$

Özellik

$$F_k \binom{n}{k}_F = F_{n+1-k} \binom{n}{k-1}_F$$

dir [15].

İspat

$$\begin{aligned}
 F_k \binom{n}{k}_F &= F_k \frac{F_n!}{F_{n-k}! F_k!} \\
 &= \frac{F_n!}{F_{n-k}! F_{k-1}!} \cdot \frac{F_{n+1-k}}{F_{n+1-k}} \\
 &= F_{n+1-k} \binom{n}{k-1}_F
 \end{aligned}$$

dir

4.2. Tanım

$\mathcal{K}$, $\mathcal{P}$ polinomlar cebirinin bir alt kümesi olmak üzere $\{p_n(x)\}_{n \geq 0}$ $\mathcal{P}$ de tanımlı derecesi n olan herhangi bir polinom dizisi olsun. Eğer $\{p_n(x)\}$ dizisi

$$p_n(x+y)_F = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_F p_k(x) p_{n-k}(y) \quad \forall y \in \mathcal{K}$$

şartını sağlarsa F -*binomial* (fibonomiyel) tiptendir denir [8]. Burada $p_n(x) = x^n$ olarak alınırsa

$$(x+y)_F^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_F x^{n-k} y^k$$

şeklindeki F -*binomial* açılımı elde ederiz [10].

Örnek

$$(x+y)_F^1 = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k}_F x^{1-k} y^k = \binom{1}{0}_F x + \binom{1}{1}_F y = x + y$$

$$(x+y)_F^2 = \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k}_F x^{2-k} y^k = \binom{2}{0}_F x^2 + \binom{2}{1}_F xy + \binom{2}{2}_F y^2 = x^2 + xy + y^2$$

$$(x+y)_F^3 = \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k}_F x^{3-k} y^k = \binom{3}{0}_F x^3 + \binom{3}{1}_F x^2 y + \binom{3}{2}_F xy^2 + \binom{3}{3}_F y^3 = x^3 + 2x^2 y + 2xy^2 + y^3$$

dir.

$a, b \in \mathbb{N}$ olmak üzere (a, b) , a ve b nin en büyük ortak bölenini gösterebilirsin. O halde aşağıdaki teoremleri verelim.

4.1. Teorem

$$\frac{F_n}{(F_n, F_k)} \mid \binom{n}{k}_F$$

dir [15].

İspat

En büyük ortak bölenin lineer formundan $(F_n, F_k) = xF_n + yF_k$ olacak şekilde x, y tamsayıları vardır. Bu yüzden

$$(F_n, F_k) \binom{n}{k}_F = xF_n \binom{n}{k}_F + yF_k \binom{n}{k}_F$$

dir.

$$F_k \binom{n}{k}_F = F_n \binom{n-1}{k-1}_F$$

olduğundan

$$\begin{aligned} (F_n, F_k) \binom{n}{k}_F &= xF_n \binom{n}{k}_F + yF_n \binom{n-1}{k-1}_F \\ &= F_n \left(x \binom{n}{k}_F + y \binom{n-1}{k-1}_F \right) \end{aligned}$$

$$e = \left(x \binom{n}{k}_F + y \binom{n-1}{k-1}_F \right)$$

diyelim.

$$(F_n, F_k) \binom{n}{k}_F = F_n e \quad (e \in \mathbb{Z})$$

O halde buradan

$$F_n \mid (F_n, F_k) \binom{n}{k}_F \quad (4.1)$$

dir. Aynı zamanda

$$(F_n, F_k) \mid F_n \quad (4.2)$$

olduğundan (4.1) ve (4.2) den

$$\frac{F_n}{(F_n, F_k)} \mid \binom{n}{k}_F$$

dir.

4.2. Teorem

$$\frac{F_{n-k+1}}{(F_{n+1}, F_k)} \mid \binom{n}{k}_F$$

dir [15].

İspat

En büyük ortak bölenin lineer formundan

$$(F_{n+1}, F_k) = x F_{n+1} + y F_k$$

olacak şekilde x, y tamsayısı vardır.

$$\begin{aligned} (F_{n+1}, F_k) \binom{n}{k}_F &= x F_{n+1} \binom{n}{k}_F + y F_k \binom{n}{k}_F \\ &= x F_{n+1-k} \binom{n+1}{k}_F + y F_{n+1-k} \binom{n}{k-1}_F \\ &= F_{n+1-k} \left(x \binom{n+1}{k}_F + y \binom{n}{k-1}_F \right) \end{aligned}$$

$$d = \left(x \binom{n+1}{k}_F + y \binom{n}{k-1}_F \right)$$

diyelim.

$$(F_{n+1}, F_k) \binom{n}{k}_F = F_{n+1-k} d \quad (d \in \mathbb{Z})$$

O halde buradan

$$F_{n+1-k} \mid (F_{n+1}, F_k) \binom{n}{k}_F \quad (4.3)$$

dir. Aynı zamanda

$$(F_{n+1}, F_k) \mid F_{n-k+1} \quad (4.4)$$

olduğundan (4.3) ve (4.4) den

$$\frac{F_{n-k+1}}{(F_{n+1}, F_k)} \mid \binom{n}{k}_F$$

dir.

4.3. Teorem

$$\binom{n}{k}_F = \frac{F_n}{(F_n, F_k)} \left(\binom{n}{k}_F, \binom{n-1}{k-1}_F \right)$$

dir [16].

Ispat

$$\begin{aligned} F_n \left(\binom{n}{k}_F, \binom{n-1}{k-1}_F \right) &= \left(F_n \binom{n}{k}_F, F_n \binom{n-1}{k-1}_F \right) \\ &= \left(F_n \binom{n}{k}_F, F_k \binom{n}{k}_F \right) \\ &= \binom{n}{k}_F (F_n, F_k) \end{aligned}$$

ise

$$\frac{F_n}{(F_n, F_k)} \left(\binom{n}{k}_F, \binom{n-1}{k-1}_F \right) = \binom{n}{k}_F$$

dir.

4.4. Teorem

$$\binom{n}{k}_F = \frac{F_{n+1-k}}{(F_{n+1-k}, F_k)} \left(\binom{n}{k}_F, \binom{n}{k-1}_F \right)$$

dir [16].

İspat

$$\begin{aligned}
 F_{n+1-k} \left(\binom{n}{k}_F, \binom{n}{k-1}_F \right) &= \left(F_{n+1-k} \binom{n}{k}_F, F_{n+1-k} \binom{n}{k-1}_F \right) \\
 &= \left(F_{n+1-k} \binom{n}{k}_F, F_k \binom{n}{k}_F \right) \\
 &= \binom{n}{k}_F (F_{n+1-k}, F_k)
 \end{aligned}$$

ise

$$\frac{F_{n+1-k}}{(F_{n+1-k}, F_k)} \left(\binom{n}{k}_F, \binom{n-1}{k-1}_F \right) = \binom{n}{k}_F$$

dir.

4.5. Teorem

$$\sum_{j=0}^k (-1)^{(k-j)(m-j)} \alpha^{j(m+n)-mk} \binom{m}{j}_F \binom{n}{k-j}_F = \binom{m+n}{k}_F$$

dir.

İspat

Teorem 3.9' dan q – Vandermonde konvolüsyonu

$$\sum_{j=0}^k q^{(m-j)(k-j)} \binom{m}{j}_q \binom{n}{k-j}_q = \binom{m+n}{k}_q$$

dir.

Burada

$$\binom{m}{j}_q = \frac{[m][m-1]\dots[m-j+1]}{[j][j-1]\dots[1]} = \frac{(1-q^m)(1-q^{m-1})\dots(1-q^{m-j+1})}{(1-q^j)(1-q^{j-1})\dots(1-q)}$$

dir.

$q = \frac{\beta}{\alpha}$ alınırsa,

$$\begin{aligned} \binom{m}{j}_q &= \alpha^{j^2-mj} \frac{(\alpha^m - \beta^m)(\alpha^{m-1} - \beta^{m-1})\dots(\alpha^{m-j+1} - \beta^{m-j+1})}{(\alpha^j - \beta^j)(\alpha^{j-1} - \beta^{j-1})\dots(\alpha - \beta)} \\ &= \alpha^{j^2-mj} \frac{F_m F_{m-1} \dots F_{m-j+1}}{F_j F_{j-1} \dots F_1} \\ &= \alpha^{j^2-mj} \binom{m}{j}_F \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$\binom{n}{k-j}_q = \alpha^{(k-j)^2-n(k-j)} \binom{n}{k-j}_F$$

ve

$$\binom{m+n}{k}_q = \alpha^{k^2-(m+n)k} \binom{m+n}{k}_F$$

dir.

Teorem 3.9 da $q = \frac{\beta}{\alpha}$ alınır ve yukarıdaki eşitlikler teorem de yerlerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\sum_{j=0}^k (\alpha\beta)^{(k-j)(m-j)} \alpha^{j(m+n)-mk} \binom{m}{j}_F \binom{n}{k-j}_F = \binom{m+n}{k}_F$$

olur.

$\alpha\beta = -1$ olduğundan

$$\sum_{j=0}^k (-1)^{(k-j)(m-j)} \alpha^{j(m+n)-mk} \binom{m}{j}_F \binom{n}{k-j}_F = \binom{m+n}{k}_F$$

elde edilir.

4.6. Teorem

$$\sum_r (-1)^{r[(n-j)+\frac{r+3}{2}-k]} \alpha^{r(k-n-1)+j(r-k)} \binom{n-r}{k-r}_F \binom{j}{r}_F = \binom{n-j}{k}_F$$

dir.

İspat

Teorem 3.10' den

$$\sum_r (-1)^r q^{r[(n-j)+\frac{r+1}{2}-k]} \binom{n-r}{k-r}_q \binom{j}{r}_q = \binom{n-j}{k}_q$$

dir.

Burada

$$\binom{n-r}{k-r}_q = \frac{[n-r][n-r-1]\dots[n-k+1]}{[k-r][k-r-1]\dots[1]} = \frac{(1-q^{n-r})(1-q^{n-r-1})\dots(1-q^{n-k+1})}{(1-q^{k-r})(1-q^{k-r-1})\dots(1-q)}$$

dir.

$q = \frac{\beta}{\alpha}$ alınırsa

$$\begin{aligned}
 \binom{n-r}{k-r}_q &= \alpha^{(k-r)^2 - (n-r)(k-r)} \frac{(\alpha^{n-r} - \beta^{n-r})(\alpha^{n-r-1} - \beta^{n-r-1}) \dots (\alpha^{n-k+1} - \beta^{n-k+1})}{(\alpha^{k-r} - \beta^{k-r})(\alpha^{k-r-1} - \beta^{k-r-1}) \dots (\alpha - \beta)} \\
 &= \alpha^{(k-r)^2 - (n-r)(k-r)} \frac{F_{n-r} F_{n-r-1} \dots F_{n-k+1}}{F_{k-r} F_{k-r-1} \dots F_1} \\
 &= \alpha^{(k-r)^2 - (n-r)(k-r)} \binom{n-r}{k-r}_F
 \end{aligned}$$

olur.

Benzer şekilde

$$\binom{j}{r}_q = \alpha^{r^2 - jr} \binom{j}{r}_F$$

ve

$$\binom{n-j}{k}_q = \alpha^{k^2 - (n-j)k} \binom{n-j}{k}_F$$

dir.

Teorem 3.10 da $q = \frac{\beta}{\alpha}$ ve Gauss binomiyel katsayılar yerine Fibonomiyel katsayılar cinsinden değerleri yerlerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\sum_r (-1)^{r[(n-j) + \frac{r+3}{2} - k]} \alpha^{r(k-n-1) + j(r-k)} \binom{n-r}{k-r}_F \binom{j}{r}_F = \binom{n-j}{k}_F$$

ifadesini elde ederiz.

4.7. Teorem

$$\prod_{r=0}^{n-1} (1 + \alpha^{n-r-1} \beta^r x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \binom{n}{k}_F x^k$$

dir.

İspat

Teorem 3.1' den

$$\prod_{r=0}^{n-1} (1 + xq^r) = \sum_{k=0}^n q^{\binom{k}{2}} \binom{n}{k}_q x^k$$

dir.

Burada

$$\binom{n}{k}_q = \alpha^{k^2 - nk} \binom{n}{k}_F \text{ ve } q = \frac{\beta}{\alpha}$$

aldığımızda

$$\prod_{r=0}^{n-1} (1 + \alpha^{-r} \beta^r x) = \sum_{k=0}^n \beta^{\frac{k(k-1)}{2}} \alpha^{\frac{k(k+1)}{2} - nk} \binom{n}{k}_F x^k$$

olur.

x yerine $\alpha^{n-1}x$ yazarsak

$$\begin{aligned} \prod_{r=0}^{n-1} (1 + \alpha^{n-r-1} \beta^r x) &= \sum_{k=0}^n \beta^{\frac{k(k-1)}{2}} \alpha^{\frac{k(k+1)}{2} - nk} \binom{n}{k}_F \alpha^{nk-k} x^k \\ &= \sum_{k=0}^n \beta^{\frac{k(k-1)}{2}} \alpha^{\frac{k(k-1)}{2}} \binom{n}{k}_F x^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\prod_{r=0}^{n-1} (1 + \alpha^{n-r-1} \beta^r x) &= \sum_{k=0}^n (\alpha\beta)^{\frac{k(k-1)}{2}} \binom{n}{k}_F x^k \\
&= \sum_{k=0}^n (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \binom{n}{k}_F x^k
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

Birçok çalışmada F_n fibonacci sayısının k . kuvvetini içeren özellikler ve özdeşlikler için

$$f_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^k x^n$$

üreteç fonksiyonundan faydalanılmıştır [17,18,21].

$f_k(x)$ 'e alternatif olarak

$$f_k(x) = \frac{\sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^i (-1)^{\frac{j(j+1)}{2}} \binom{k+1}{j}_F F_{i-j}^k x^i}{\sum_{i=0}^{k+1} (-1)^{\frac{i(i+1)}{2}} \binom{k+1}{i}_F x^i}$$

Horadam tarafından bulunmuştur [19].

Örnek

$k=1$ için

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= \frac{\sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^i (-1)^{\frac{j(j+1)}{2}} \binom{2}{j}_F F_{i-j} x^i}{\sum_{i=0}^2 (-1)^{\frac{i(i+1)}{2}} \binom{2}{i}_F x^i} \\
 &= \frac{\binom{2}{0}_F F_0 x^0 + \binom{2}{0}_F F_1 x - \binom{2}{1}_F F_0 x}{\binom{2}{0}_F x^0 - \binom{2}{1}_F x^1 - \binom{2}{2}_F x^2} \\
 &= \frac{x}{1-x-x^2} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n
 \end{aligned}$$

$k=2$ için

$$\begin{aligned}
 f_2(x) &= \frac{\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^i (-1)^{\frac{j(j+1)}{2}} \binom{3}{j}_F F_{i-j}^2 x^i}{\sum_{i=0}^3 (-1)^{\frac{i(i+1)}{2}} \binom{3}{i}_F x^i} \\
 &= \frac{\binom{3}{0}_F F_0^2 x^0 + \binom{3}{0}_F F_1^2 x^1 - \binom{3}{1}_F F_0^2 x^1 + \binom{3}{0}_F F_2^2 x^2 - \binom{3}{1}_F F_1^2 x^2 - \binom{3}{2}_F F_0^2 x^2}{\binom{3}{0}_F x^0 - \binom{3}{1}_F x^1 - \binom{3}{2}_F x^2 + \binom{3}{3}_F x^3} \\
 &= \frac{x-x^2}{1-2x-2x^2+x^3} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n^2 x^n
 \end{aligned}$$

Her bir k tek tamsayısı için

$$f_k(x) = 5^{\frac{-k-1}{2}} \sum_{j=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{j} \frac{F_{k-2j} x}{1 - (-1)^j L_{k-2j} x - x^2}$$

ve her bir k çift tamsayısı için

$$f_k(x) = 5^{\frac{-k}{2}} \sum_{j=0}^{\frac{k-2}{2}} (-1)^j \binom{k}{j} \frac{2 - (-1)^j L_{k-2j} x}{1 - (-1)^j L_{k-2j} x + x^2} + \binom{k}{\frac{k}{2}} \frac{(-5)^{\frac{-k}{2}}}{1 - (-1)^{\frac{k}{2}} x}$$

dir [11,12].

İşaretili Fibonomiyel katsayılar

$$d_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \binom{k+1}{n}_F$$

olarak adlandırılan (d_n) tamsayı dizisini alalım. (d_n) 'nin üreteç fonksiyonu her bir k tek tamsayısı için

$$D^{(o)}(x) = \prod_{j=0}^{\frac{k-1}{2}} (1 - (-1)^j L_{k-2j} x - x^2) = \sum_{n=0}^{k+1} d_n x^n$$

ve her bir k çift tamsayısı için

$$D^{(e)}(x) = (1 - (-1)^{\frac{k}{2}} x) \prod_{j=0}^{\frac{k}{2}-1} (1 - (-1)^j L_{k-2j} x + x^2) = \sum_{n=0}^{k+1} d_n x^n$$

dir [11].

Örnek

$k = 1$ için

$$D^{(o)}(x) = \prod_{j=0}^{\frac{1-1}{2}} (1 - (-1)^j L_{1-2j} x - x^2)$$

$$= (1 - L_1 x - x^2)$$

$$= (1 - x - x^2)$$

dir.

$k = 2$ için

$$D^{(e)}(x) = (1 - (-1)^{\frac{2}{2}} x) \prod_{j=0}^{\frac{\frac{2}{2}-1}{2}} (1 - (-1)^j L_{2-2j} x + x^2)$$

$$= (1 + x) (1 - L_2 x + x^2)$$

$$= (1 + x) (1 - 3x + x^2)$$

$$= 1 - 2x - 2x^2 + x^3$$

dir.

KAYNAKLAR

1. Fontené, G., “Généralisation d’une formule concune”, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4: 112 (1915).
2. Ward, M., “A calculus of sequences”, *American Journal of Mathematics*, 58: 255-266 (1936).
3. Gould, H. W., “The Bracket Function and Fontené-Ward Generalized Binomial Coefficients with Applications to Fibonomial Coefficients”, *The Fibonacci Quarterly*, 7: 23-40 (1969).
4. Jarden, D., “Recurring Sequences”, *Riveon Lematimatika*, (1958).
5. Torretto, R., Fuchs, A., “Generalized binomial coefficients”, *The Fibonacci Quarterly*, 2: 296-302 (1964)
6. Kac, V., Cheung, P., “Quantum Calculus”, **Springer** Newyork (2002).
7. Corcino, Roberto B., “On $p-q$ Binomial Coefficients”, *Electronic Journal of Combinatorial Number Theory*, 8: 1-16 (2008).
8. Krot, E., “An Introduction to Finite Fibonomial Calculus”, *Central European Journal of Mathematics*, 2(5): 754-766 (2004).
9. İnternet: Dziemianczuk, M., “Generalization of Fibonomial Coefficients” 2009 arXiv0908.3248D.
10. İnternet: Kwansniewski A. K., “Fibonomial Cumulative Connection Constants” [arXiv:math/0406006v6](https://arxiv.org/abs/math/0406006v6) (2011).
11. Seibert, J., Trojovsky, P., “On certain identities for The Fibonomial Coefficients”, *Tatra Mountains Mathematical Publications*, 32: 119-127 (2005).
12. Seibert, J., Trojovsky, P., “On some identities for The Fibonomial Coefficients”, *Mathematica Slovaca*, 55: 9-19 (2005).
13. Charalambides, Charalambos A., “Enumerative Combinatorics”, **Chapman & Hall / CRC** (2002).
14. Graham, Ronald L., Knuth, Donald E., Patashnik, O., “Concrete Mathematics 2nd ed.”, **Addison Wesley**, (1994).

15. Gould, H. W., "Generalization of Hermite's divisibility theorems and the Mann-Shanks primality criterion for s – Fibonomial Arrays", ***The Fibonacci Quarterly***, 12: 157-166 (1974).
16. Gould, H. W., Schlesinger, P., "Extensions of the Hermite G.C.D theorems for Binomial Coefficients", ***The Fibonacci Quarterly***, 33: 386-390 (1995).
17. Riordan, J., "Generating functions for powers of Fibonacci numbers", ***Duke Mathematical Journal***, 29: 5-12 (1962).
18. Carlitz, L., "Generating functions for powers of a certain sequence of numbers", ***Duke Mathematical Journal***, 29: 521-537 (1962).
19. Horadam, A. F., "Generating functions for powers of a certain generalized sequence of numbers", ***Duke Mathematical Journal***, 32: 437-446 (1965).
20. Shannon, A. G., "A method of Carlitz applied to k – th power generating function for Fibonacci numbers", ***The Fibonacci Quarterly***, 12: 293-299 (1974).
21. Koshy, T., "Fibonacci and Lucas Numbers with Applications", ***A Wiley-Interscience Publication***, (2001).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı : KIZILATEŞ, Can
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 19.11.1987 ANKARA
Medeni hali : Bekar
Telefon : 0 (536) 361 15 99
e-mail : cankizilates@hotmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Gazi Üniversitesi/ Matematik Bölümü	2010
Lise	Aktepe Lisesi Ankara	2005

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Spor yapmak.