



**T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

GAUSS CHEBYSHEV POLİNOMLARI VE ÖZELLİKLERİ

VUSLAT ŞEYDA DURUSOY

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman: Doç. Dr. Funda TAŞDEMİR

ARALIK – 2024

YOZGAT

T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GAUSS CHEBYSHEV POLİNOMLARI VE ÖZELLİKLERİ

VUSLAT ŞEYDA DURUSOY

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman: Doç. Dr. Funda TAŞDEMİR

**Bu çalışma Yozgat Bozok Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri
(BAP) Koordinasyon Birimi tarafından FYL – 2023 - 1196 kodu ile
desteklenmiştir.**

ARALIK – 2024

YOZGAT



YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
LİSANSÜSTÜ TEZ ONAY FORMU

T.C.

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı Tezli Yüksek Lisans Programı öğrencisi Vuslat Şeyda DURUSOY' un hazırladığı “**Gauss Chebyshev Polinomları ve Özellikleri**” başlıklı tezi ile ilgili tez savunma sınavı, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri gereğince 03/12/2024 Salı günü saat 11.00'da yapılmış, tezin onayına oy birliği ile karar verilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Mehmet EKİCİ

Jüri Üyesi : Doç. Dr. Funda TAŞDEMİR

(Danışman)

Jüri Üyesi : Dr. Öğr. Üyesi Hasan ARSLAN

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun/...../..... tarih ve sayılı Enstitü Yönetim Kurulu Kararı ile onaylanmıştır.

...../...../.....

Prof. Dr. Ümit BUDAK

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan eder, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Vuslat Şeyda DURUSOY

03/12/2024

ÖN SÖZ

Bu tez çalışmamın hazırlanma sürecinde değerli bilgilerini ve zamanını ayırarak her türlü desteği sağlayan, çalışmam ile yakından ilgilenen kıymetli danışman hocam Doç. Dr. Funda TAŞDEMİR' e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Çalışmama katkılarından dolayı sayın Doç. Dr. Mehmet EKİCİ' ye ve Dr. Öğr. Üyesi Hasan ARSLAN' a teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca çalışma sürecinde ve hayatımın her döneminde bana destek olan babam Hüseyin DURUSOY, annem Ayşegül DURUSOY' a ve kardeşlerime teşekkür ederim.

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde maddi destek sağlayan Yozgat Bozok Üniversitesi Bilimsel Araştırma Merkezi (BAP) Koordinasyon Birimine katkılarından dolayı teşekkür ederim.

Bu tez çalışması;

Yozgat Bozok Üniversitesi Bilimsel Araştırma Merkezi (BAP) Koordinasyon Birimi tarafından FLY-2023-1196 kodu ile desteklenmiştir.

Vuslat Şeyda DURUSOY

03/12/2024

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GAUSS CHEBYSHEV POLİNOMLARI VE ÖZELLİKLERİ

VUSLAT ŞEYDA DURUSOY

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. FUNDA TAŞDEMİR

Bu tez çalışmasında, iyi bilinen birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü çeşit Chebyshev polinomlarını kompleks (karmaşık) düzleme genişleterek, Gauss Chebyshev polinomları adı verilen yeni Gauss polinom aileleri tanımlanmıştır. Yeni tanımlanan bu kavramların temel özellikleri (Binet formülleri, üreteç fonksiyonları, kombinatoryal özellikleri vs.), bilinen Chebyshev polinomları ile ilişkileri, özel sayı dizileri ve özel sayı dizilerinin polinomları ile ilişkilerine yer verilmiştir.

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümü olup konu hakkında genel bilgilendirme ve literatürde yapılan çalışmalar kısaca verilmiştir. İkinci bölümde, tez çalışması boyunca yararlanılan özel sayı dizileri, özel sayı dizilerinin polinomları ve Chebyshev polinomları ile ilgili tanım ve teoremler verilmiştir. Tezin üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümleri özgün çalışmalardan oluşmaktadır. Üçüncü bölümde birinci ve ikinci çeşit Gauss Chebyshev polinomları tanımlanarak, Binet formülleri, üreteç fonksiyonları, Cassini, Catalan, d'Ocagne gibi temel özdeşlikleri, bilinen Chebyshev polinomları ve birbirleri ile ilişkileri detaylı incelenmiştir. Dördüncü bölümde ise üçüncü ve dördüncü çeşit Gauss Chebyshev polinomları tanımlanarak, temel özellikleri, bilinen Chebyshev polinomları ve birinci ve ikinci çeşit Gauss Chebyshev polinomlarıyla ilişkileri verilmiştir. Beşinci bölümde, yeni tanımlanan dört çeşit Gauss Chebyshev polinomları ile Fibonacci, Lucas, Pell ve Pell-Lucas sayı dizileri/polinomları arasındaki ve bazı özel değerlerdeki ilişkileri verilmiştir. Altıncı bölümde, sonuç ve öneri kısmı ile tez çalışması tamamlanmıştır.

2024, xi + 57 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Birinci çeşit Gauss Chebyshev polinomu, İkinci çeşit Gauss Chebyshev polinomu, Üçüncü çeşit Gauss Chebyshev polinomu, Dördüncü çeşit Gauss Chebyshev polinomu, Binet formülü, Üreteç fonksiyonu.

ABSTRACT

MASTER THESIS

GAUSSIAN CHEBYSHEV POLYNOMIALS AND THEIR PROPERTIES

VUSLAT ŞEYDA DURUSOY

**YOZGAT BOZOK UNIVERSITY
SCHOOL OF GRADUATE STUDIES
MATHEMATICS**

SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. FUNDA TAŞDEMİR

In this thesis, by extending the well-known first, second, third and fourth kind Chebyshev polynomials to the complex plane, new families of Gaussian polynomials called Gaussian Chebyshev polynomials are defined. The basic properties of these newly defined concepts (Binet formulas, generating functions, combinatorial properties, etc.), their relations with known Chebyshev polynomials, and the relations with special number sequences and polynomials of special number sequences are included.

This thesis consists of six chapters. The first chapter is the introduction and provides general information about the subject and brief information about the studies in the literature. In the second chapter, definitions and theorems related to special number sequences, polynomials of special number sequences and Chebyshev polynomials used throughout the thesis are given. The third, fourth and fifth chapters of the thesis consist of original studies. In the third chapter, the first and second kinds of Gaussian Chebyshev polynomials are defined, Binet formulas, generating formulas, their basic identities such as Cassini, Catalan, d'Ocagne, their relations with known Chebyshev polynomials, and relations with each other are examined in detail. In the fourth section, the third and fourth kinds of Gaussian Chebyshev polynomials are defined, their basic properties, their relations with known Chebyshev polynomials and first and second kind Gaussian Chebyshev polynomials are given. In the fifth section, the relationships between the newly defined four kinds of Gaussian Chebyshev polynomials and Fibonacci, Lucas, Pell and Pell-Lucas number sequences/polynomials and relationships with some special values are given. In the sixth chapter, the thesis is completed by with the conclusion and recommendation chapter.

2024, xi +57 Pages

Keywords: Gaussian Chebyshev polynomial of the first kind, Gaussian Chebyshev polynomial of the second kind, Gaussian Chebyshev polynomial of the third kind, Gaussian Chebyshev polynomial of the fourth kind, Binet's formula, Generating function.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TEZ ONAY FORMU	ii
TEZ BEYANI.....	iii
ÖN SÖZ	iv
ÖZET	v
ABSTRACT.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
TABLolar LİSTESİ.....	ix
SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ	x
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL BİLGİLER	3
2.1. Rekürans Bağntıya Sahip Sayı Dizileri	3
2.2. Rekürans Bağntıya Sahip Diziler ile İlişkili Polinomlar.....	5
2.3. Chebyshev Polinomları ve Özellikleri	6
2.4. Gauss Özel Sayı Dizileri ve Polinomları	12
3. BİRİNCİ VE İKİNCİ ÇEŞİT GAUSS CHEBYSHEV POLİNOMLARI.....	14
3.1. Birinci Çeşit Gauss Chebyshev Polinomları	14
3.2. İkinci Çeşit Gauss Chebyshev Polinomları.....	20
3.3. Birinci ve İkinci Çeşit Gauss Chebysev Polinomlarının İlişkileri	25
4. ÜÇÜNCÜ VE DÖRDÜNCÜ ÇEŞİT GAUSS CHEBYSHEV POLİNOMLARI.....	28
4.1. Üçüncü Çeşit Gauss Chebyshev Polinomları.....	28
4.2. Dördüncü Çeşit Gauss Chebyshev Polinomları	31
4.3. Üçüncü ve Dördüncü Çeşit Gauss Chebyshev Polinomlarının İlişkileri	34

5. GAUSS CHEBYSHEV POLİNOMLARI İLE ÖZEL SAYI DİZİLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİLER	36
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	42
7. KAYNAKÇA.....	43
ÖZGEÇMİŞ.....	46



TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo

Sayfa

Tablo 4.1. Chebyshev ve Gauss Chebyshev Polinomları... ..	35
--	----



SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılmış olan simgeler açıklamaları ile aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
F_n	: Fibonacci sayısı
$F_n(x)$	: Fibonacci polinomu
GF_n	: Gauss Fibonacci sayısı
$GF_n(x)$	: Gauss Fibonacci polinomu
GL_n	: Gauss Lucas sayısı
$GL_n(x)$	: Gauss Lucas polinomu
GP_n	: Gauss Pell sayısı
$GP_n(x)$	: Gauss Pell polinomu
GQ_n	: Gauss Pell-Lucas sayısı
$GQ_n(x)$	: Gauss Pell-Lucas polinomu
$GT_n(x)$	: n . mertebeden birinci çeşit Gauss Chebyshev polinomu
$GU_n(x)$	: n . mertebeden ikinci çeşit Gauss Chebyshev polinomu
$GV_n(x)$	: n . mertebeden üçüncü çeşit Gauss Chebyshev polinomu
$GW_n(x)$	: n . mertebeden dördüncü çeşit Gauss Chebyshev polinomu
L_n	: Lucas sayısı
$L_n(x)$	: Lucas polinomu
P_n	: Pell sayısı
$P_n(x)$	: Pell polinomu
Q_n	: Pell-Lucas sayısı
$Q_n(x)$	: Pell-Lucas polinomu
$T_n(x)$	: n . mertebeden birinci çeşit Chebyshev polinomu
$U_n(x)$	: n . mertebeden ikinci çeşit Chebyshev polinomu

$V_n(x)$: n . mertebeden üçüncü çeşit Chebyshev polinomu

$W_n(x)$: n . mertebeden dördüncü çeşit Chebyshev polinomu



1. GİRİŞ

Cebir ve sayılar teorisi için sayı dizileri önemli bir yere sahiptir. Sayı dizileri arasında en çok bilineni Fibonacci sayı dizisidir. Fibonacci sayı dizisi birçok nedenden dolayı büyük önem arz etmektedir. Bu nedenlerin birkaç tanesi şöyledir; dizinin ilk elemanları doğada bitkilerde, böceklerde kısacası birçok yerde uyum içinde karşımıza çıkmaktadır. Dizinin ardışık terimlerinde büyük olanı küçük olana böldüğümüzde hep aynı oranı vermektedir. “Altın oran” denilen bu sayı vücudumuzdaki oranlardan Mısır’daki piramitlere kadar birçok alanda karşımıza çıkmaktadır. Bir diğer neden ise kuvvet serileri teorisinde, üreteç fonksiyonlarında ve bunun gibi birden fazla alanda bu diziler yardımıyla ciddi ilerlemeler elde edilmiştir. Fibonacci sayılarının matematiğin yanı sıra diğer disiplinlerde yer alması literatürde büyük öneme sahip olmasına yol açmıştır. Fibonacci sayılarının farklı başlangıç şartları ve farklı bağıntılarla oluşturulmasıyla benzer sayı dizileri ve polinomları tanımlanmıştır. Bunlardan literatürde en sık karşılaştıklarımız Lucas, Pell, Pell-Lucas gibi sayı dizileri ve bu dizilerin polinomlarıdır. Bu konularda araştırmalar devam etmektedir.

Özel sayı dizileri/polinomları ile ilgili teoremler ve özelliklere birçok kaynakta yer verilmiştir (Rivlin, 1990; Horadam 1996; Koshy, 2001; Mason & Handsomb, 2002; Stakhov & Rozin, 2006; Benjamin & Walton, 2009; Halıcı & Öz, 2016; Yang & Zhang, 2018; Koshy, 2019; Frontczak & Goy, 2021).

Carl Friedrich Gauss (1777–1855) Matematik alanının yanı sıra jeolojiden astronomiye farklı disiplinlerde de yaptığı çalışmalar ile tanınan önemli bilim insanlarından. Gauss 1832 yılında ilk kez Gauss sayı dizisini tanımlamıştır. Herhangi $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $i = \sqrt{-1}$ için $a + bi$ ile ifade edilen sayılar Gauss tamsayıları olarak adlandırılmıştır. Böylece

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}, i = \sqrt{-1}\}$$

dir.

Daha sonra Horadam (1963) Gauss Fibonacci sayıları yani kompleks Fibonacci sayılarını tanımlamıştır. Horadam (1971) tarafından tanımlanan Pell ve Pell Lucas sayı dizileri, Halıcı ve Öz (2016) tarafından Gauss Pell ve Gauss Pell-Lucas sayı dizileri ile kompleks düzleme taşınmış, bu sayı dizileri ile ilgili bazı özellikler elde edilmiştir. Horadam (1996) Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayılarını detaylı olarak incelemiştir. Aşçı ve Gürel (2013) Gauss Jacobsthal ve Gauss Jacobsthal-Lucas dizisini ve polinomunu tanımlamış, önemli özdeşlikler elde etmiştir. Taş (2019), yeni bir k –Gauss Fibonacci sayıları ailesi oluşturmuş

ve bu aile ile bilinen Gauss Fibonacci arasındaki bazı ilişkileri incelemiştir. Gürel (2015) Gauss Pell ve Gauss Pell-Lucas dizilerinin Binet formüllerini, üreteç fonksiyonlarını ve bazı önemli özdeşliklerini vermiştir. Taşçı ve Acar (2017) yeni bir dizi olan Gauss Tetranacci dizisini tanımlanmış, bu dizinin Binet benzeri formülü, toplam formülleri ve üreteç fonksiyonlarını ve matris gösterimlerini elde etmiştir. Özkan ve Taştan (2020) Gauss Fibonacci polinomları ve Gauss Lucas polinomlarını tanımlayarak bilinen ailelerle ilişkilerini incelemiştir. Halıcı ve Öz (2018) Gauss Pell polinomlarını tanımlamış; bu polinomların üreteç fonksiyonlarını, Binet formüllerini vermiştir. Yağmur ve Karaaslan (2019), çalışmalarında Gauss modified Pell dizisini tanımlamış ve bazı kombinatoriyal özellikleri incelemiştir. Taşçı (2021) çalışmasında, Gauss Mersenne sayılarını tanımlamış, özelliklerini ve bilinen sayı dizileri ile ilişkisini göstermiştir. Arslan (2021) Gauss Pell ve Gauss Pell-Lucas kuaterniyonlarını tanıtmış ve bazı özelliklerini incelemiştir. Yağmur ve Duzcu (2022) Gauss Pell kuaterniyon polinomlarını tanıtmış ve bazı özelliklerini incelemiştir. Ulutaş ve Toy (2022) Gaussian Fibonacci sayılarının genelleştirilmiş hali olan genelleştirilmiş Gaussian Fibonacci sayılarını incelenmiştir. Yine bu çalışmada, genelleştirilmiş Gaussian Fibonacci sayıları için toplam formüllerinin kapalı formları bulunmuş ve belirli durumlarda mevcut sonuçların yeniden elde edildiği gösterilmiştir. Rivlin (1990) Chebyshev polinomlarını tanımlamış ve özelliklerini incelemiştir. Turgut (2023) daha önce tanımlanan Chebyshev polinomlarını dört çeşit olarak detaylı olarak incelemiştir.

Bu tez çalışmasında Gauss polinomları ailesinin yeni bir üyesi olan Gauss Chebyshev polinomları dört çeşit olarak tanımlanmıştır. Yeni tanımlanan bu polinomların Binet benzeri formülü, üreteç fonksiyonu, bilinen Chebyshev polinomları ile ilişkileri ve birbirleri ile olan ilişkileri incelenmiştir. Ayrıca elde edilen Gauss Chebyshev polinomları ile literatürde iyi bilinen sayı dizileri ve polinomları arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

2. TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde tez çalışmasında yararlanılacak temel kavram ve teoremler yer almıştır.

Bu kısımda, ilk olarak başlangıç koşulları dışında bir terimi diğer terimler cinsinden ifade edilen diziler incelenecektir.

2.1. Rekürans Bağntıya Sahip Sayı Dizileri

Rekürans bağntıya sahip sayı dizileri, teriminin önceki terimlerin birbirleri ile işleme alınması ile elde edilir. Uygulanan işlemlere ise rekürans bağntısı denir.

Tanım 2.1.1. (Fibonacci Sayıları)

$F_0 = 0, F_1 = 1$ başlangıç şartları ve $\forall n \geq 2$ için,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

yineleme bağntısı ile elde edilen sayı dizilerine Fibonacci sayıları denir ve n . Fibonacci sayısı F_n ile gösterilir.

Başlıca Fibonacci sayıları:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... şeklindedir.

Tanım 2.1.2. (Lucas Sayıları)

$L_0 = 2, L_1 = 1$ başlangıç şartları ve $\forall n \geq 2$ için,

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

yineleme bağntısı ile elde edilen sayı dizilerine Lucas sayıları denir ve n . Lucas sayısı L_n ile gösterilir.

Başlıca Lucas sayıları:

2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, ... şeklindedir.

Tanım 2.1.3. (Pell Sayıları)

$P_0 = 0, P_1 = 1$ başlangıç şartları ve $\forall n \geq 2$ için,

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$$

yineleme bağntısı ile elde edilen sayı dizilerine Pell sayıları denir ve n . Pell sayısı P_n ile gösterilir.

Başlıca Pell sayıları:

0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, ... şeklindedir.

Tanım 2.1.4. (Pell-Lucas Sayıları)

$Q_0 = 2, Q_1 = 2$ başlangıç şartları ve $\forall n \geq 2$ için,

$$Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}$$

yineleme bağıntısı ile elde edilen sayı dizilerine Pell-Lucas sayıları denir ve n . Pell-Lucas sayısı Q_n ile gösterilir.

Başlıca Pell-Lucas sayıları:

2, 2, 6, 14, 34, 82, 198, 478, 1154, ... şeklindedir.

Teorem 2.1.5. (Binet Formülleri)

$x^2 - x - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri α ve β olmak üzere F_n ve L_n için Binet formülleri sırasıyla

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

ve

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

şeklindedir. (Koshy, 2001)

Burada

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

ile verilir.

Benzer şekilde $x^2 - 2x - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri γ ve δ olmak üzere P_n ve Q_n için Binet formülleri sırasıyla

$$P_n = \frac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma - \delta}$$

ve

$$Q_n = \frac{\gamma^n + \delta^n}{2}$$

dır. Burada

$$\gamma = 1 + \sqrt{2}, \quad \delta = 1 - \sqrt{2}$$

ile verilir.

2.2. Rekürans Bağntıya Sahip Diziler ile İlişkili Polinomlar

Literatürde farklı biçimlerde tanımlanan polinom dizileri mevcuttur. Bunların literatürde en sık kullanılanları Fibonacci, Lucas, Pell ve Pell-Lucas polinomlarıdır.

Fibonacci polinomları ilk kez 1883 yılında Belçikalı matematikçi Eugene C. Catalan ve daha sonra Ernst Jacobsthal (1882-1965) tarafından araştırılmıştır. Yine Lucas polinomları 1970 yılında Marjorie Bicknell tarafından çalışılmıştır.

Tanım 2.2.1. (Fibonacci Polinomu)

$F_0(x) = 0, F_1(x) = 1$ ve $n \geq 2$ için,

$$F_n(x) = xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x)$$

yineleme bağntısı ile elde edilen polinomlara Fibonacci polinomu denir ve $F_n(x)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.2. (Lucas Polinomu)

$L_0(x) = 2, L_1(x) = x$ ve $n \geq 2$ için,

$$L_n(x) = xL_{n-1}(x) + L_{n-2}(x)$$

yineleme bağntısı ile elde edilen polinomlara Lucas polinomu denir ve $L_n(x)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.3. (Pell Polinomu)

$P_0(x) = 0, P_1(x) = 1$ ve $n \geq 2$ için,

$$P_n(x) = 2xP_{n-1}(x) + P_{n-2}(x)$$

yineleme bağntısı ile elde edilen polinomlara Pell polinomu denir ve $P_n(x)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.4. (Pell-Lucas Polinomu)

$Q_0(x) = 2, Q_1(x) = 2x$ ve $n \geq 2$ için,

$$Q_n(x) = 2xQ_{n-1}(x) + Q_{n-2}(x)$$

yineleme bağntısı ile elde edilen polinomlara Pell-Lucas polinomu denir ve $Q_n(x)$ ile gösterilir.

Uyarı: Polinom dizileri kendi sayı dizileri ile yakından ilişkilidir.

Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas polinom dizilerinde $x = 1$ alındığında polinomlar sırasıyla Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas sayılarına dönüşür.

Teorem 2.2.5. (Binet Formülleri)

$\lambda^2 - x\lambda - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ olmak üzere $F_n(x)$ ve $L_n(x)$ için Binet formülleri sırasıyla

$$F_n(x) = \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}$$

ve

$$L_n(x) = \alpha^n(x) + \beta^n(x)$$

biçimindedir.

Burada

$$\alpha(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}, \quad \beta(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

ile verilir.

Benzer şekilde $\lambda^2 - 2x\lambda - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri $\gamma(x)$ ve $\delta(x)$ olmak üzere $P_n(x)$ ve $Q_n(x)$ için Binet formülleri sırasıyla

$$P_n(x) = \frac{\gamma^n(x) - \delta^n(x)}{\gamma(x) - \delta(x)}$$

ve

$$Q_n(x) = \gamma^n(x) + \delta^n(x)$$

dır. Burada

$$\gamma(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}, \quad \delta(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$$

ile verilir.

2.3. Chebyshev Polinomları ve Özellikleri

Adını ünlü Rus matematikçi Pafnuty Lvovich Chebyshev'den (1821-1894) alan Chebyshev polinomları Pell ve Pell-Lucas polinomlarıyla yakından ilişkilidir. Tıpkı Pell polinom ailesinin, birbirleriyle yakından ilişkili iki alt aile olan $\{P_n(x)\}$ ve $\{Q_n(x)\}$ 'den oluştuğu gibi Chebyshev ailesi de $\{T_n(x)\}$ ve $\{U_n(x)\}$ ile yakından ilişkili iki alt aileden oluşur (T harfi Fransızca Tchebycheff'ten veya Almanca

Tschebyscheff'ten gelir.). Chebyshev polinomları, yaklaşım teorisi, kombinatorik, Fourier serileri, nümerik analiz, graf teorisinde ve diğer birçok alanda çeşitli uygulamalara sahiptir.

Bu kısımda dört çeşit Chebyshev polinomu temel düzeyde incelenecektir. (Koshy, 2014)

Tanım 2.3.1. (Birinci Çeşit Chebyshev Polinomu)

$T_0(x) = 1, T_1(x) = x$ ve $n \geq 2$ için,

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \quad (2.1)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanan polinomlara birinci çeşit Chebyshev polinomu denir ve $T_n(x)$ ile gösterilir.

Birinci çeşit Chebyshev polinomunun ilk beş terimi aşağıda verilmiştir:

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

dir.

Tanım 2.3.2. (İkinci Çeşit Chebyshev Polinomu)

$U_0(x) = 1, U_1(x) = 2x$ ve $n \geq 2$ için

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x) \quad (2.2)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanan polinomlara İkinci çeşit Chebyshev polinomu denir ve $U_n(x)$ ile gösterilir.

İkinci çeşit Chebyshev polinomunun ilk beş terimi aşağıda verilmiştir:

$$U_0(x) = 1$$

$$U_1(x) = 2x$$

$$U_2(x) = 4x^2 - 1$$

$$U_3(x) = 8x^3 - 4x$$

$$U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1$$

dir.

Tanım 2.3.3. (Üçüncü Çeşit Chebyshev Polinomu)

$V_0(x) = 1$, $V_1(x) = 2x - 1$ ve $n \geq 2$ için

$$V_n(x) = 2xV_{n-1}(x) - V_{n-2}(x) \quad (2.3)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanan polinomlara üçüncü çeşit Chebyshev polinomu denir ve $V_n(x)$ ile gösterilir.

Üçüncü çeşit Chebyshev polinomunun ilk beş terimi aşağıda verilmiştir:

$$V_0(x) = 1$$

$$V_1(x) = 2x - 1$$

$$V_2(x) = 4x^2 - 2x - 1$$

$$V_3(x) = 8x^3 - 4x^2 - 4x + 1$$

$$V_4(x) = 16x^4 - 8x^3 - 12x^2 + 4x + 1$$

dir.

Tanım 2.3.4. (Dördüncü Çeşit Chebyshev Polinomu)

$W_0(x) = 1$, $W_1(x) = 2x + 1$ ve $n \geq 2$ için

$$W_n(x) = 2xW_{n-1}(x) - W_{n-2}(x) \quad (2.4)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanan polinomlara dördüncü çeşit Chebyshev polinomu denir ve $W_n(x)$ ile gösterilir.

Dördüncü çeşit Chebyshev polinomunun ilk beş terimi aşağıda verilmiştir:

$$W_0(x) = 1$$

$$W_1(x) = 2x + 1$$

$$W_2(x) = 4x^2 + 2x - 1$$

$$W_3(x) = 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$$

$$W_4(x) = 16x^4 + 8x^3 - 12x^2 - 4x + 1$$

dir.

Teorem 2.3.5. (Binet Formülleri)

$t^2 - 2xt + 1 = 0$ karakteristik denkleminin çözümleri $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ olmak üzere $T_n(x)$, $U_n(x)$, $V_n(x)$ ve $W_n(x)$ için Binet formülleri sırasıyla

$$T_n(x) = \frac{\alpha^n(x) + \beta^n(x)}{2},$$

$$U_n(x) = \frac{\alpha^{n+1}(x) - \beta^{n+1}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)},$$

$$V_n(x) = \frac{\alpha^{n+1}(x) - \beta^{n+1}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} - \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)},$$

$$W_n(x) = \frac{\alpha^{n+1}(x) - \beta^{n+1}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} + \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}$$

ile verilir. Burada

$$\alpha(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}, \quad \beta(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$$

dır.

Aşağıdaki Lemma ile birinci ve ikinci çeşit Chebyshev polinomların temel özellikleri ispatsız olarak verilmiştir. (Koshy, 2014)

Lemma 2.3.6. $T_n(x), U_n(x)$ sırasıyla birinci ve ikinci çeşit Chebyshev polinomları olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır.

- i) $U_n(x) - U_{n-2}(x) = 2T_n(x),$
- ii) $U_n(x) - xU_{n-1}(x) = T_n(x),$
- iii) $T_{m+n}(x) + T_{m-n}(x) = 2T_m(x)T_n(x),$
- iv) $T_{m+n}(x) - T_{m-n}(x) = 2(x^2 - 1)U_{m-1}(x)U_{n-1}(x),$
- v) $U_{m+n}(x) + U_{m-n}(x) = 2U_m(x)T_n(x),$
- vi) $U_{m+n}(x) - U_{m-n}(x) = 2U_{n-1}(x)T_{m+1}(x),$
- vii) $T_{m+n}(x) = T_m(x)U_n(x) - T_{m-1}(x)U_{n-1}(x),$
- viii) $U_{m+n}(x) = U_m(x)U_n(x) - U_{m-1}(x)U_{n-1}(x),$
- ix) $T_{n+1}(x)T_{n-1}(x) - T_n^2(x) = (x^2 - 1),$
- x) $U_{n+1}(x)U_{n-1}(x) - U_n^2(x) = -1,$
- xi) $T_n^2(x) - (x^2 - 1)U_n^2(x) = 1$

dir.

Şimdi verilecek olan Lemma ile birinci ve ikinci çeşit Chebyshev polinom ilişkileri ispatsız verilmiş olup ispat Binet formüllerinden açıktır.

Lemma 2.3.7. $T_n(x), U_n(x)$ sırasıyla birinci ve ikinci çeşit Chebyshev polinomları olmak üzere

- i) $T_n^2(x) + T_m^2(x) = 1 + T_{n+m}(x)T_{n-m}(x)$
- ii) $T_{m+1}(x)T_n(x) - T_m(x)T_{n+1}(x) = (x^2 - 1)U_{m-n-1}(x),$
- iii) $U_{m+1}(x)U_n(x) - U_m(x)U_{n+1}(x) = U_{n-m-1}(x)$

dir.

Aşağıdaki Lemma ile üçüncü ve dördüncü çeşit Chebyshev polinomlarının birinci ve ikinci çeşit Chebyshev polinomları ve birbirleri ile olan ilişkileri ispatsız verilmiştir.

Lemma 2.3.8. (Çakmak & Uslu, 2019) $V_n(x), W_n(x)$ sırasıyla üçüncü ve dördüncü çeşit Chebyshev polinomları olmak üzere

- i) $V_n(x) = U_n(x) - U_{n-1}(x),$
- ii) $V_n(x) + V_{n-1}(x) = 2T_n(x),$
- iii) $W_n(x) = U_n(x) + U_{n-1}(x),$
- iv) $W_n(x) - W_{n-1}(x) = 2T_n(x),$
- v) $V_n(x) + V_{n-1}(x) = W_n(x) - W_{n-1}(x),$
- vi) $V_n(x) + W_n(x) = 2U_n(x)$

dir.

Bundan sonraki kısımda, Chebyshev polinomlarının bazı özel değerlerde özel sayı dizilerine dönüşmüş olduğu lemmalar ile gösterilmiştir.

Lemma 2.3.9. (Adegoke vd., 2023) $T_n(x), U_n(x)$ sırasıyla birinci ve ikinci çeşit Chebyshev polinomları olmak üzere

- i) $T_n\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}L_{2n}$
- ii) $T_n\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{i^n}{2}L_n$
- iii) $T_n\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{2}L_{4n}$
- iv) $T_n(\sqrt{5}) = \begin{cases} \frac{1}{2}L_{3n}, & n \text{ çift} \\ \frac{\sqrt{5}}{2}F_{3n}, & n \text{ tek} \end{cases}$

$$\text{v)} \quad T_n\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}L^n, & n \text{ çift} \\ \frac{\sqrt{5}}{2}F_n, & n \text{ tek} \end{cases}$$

$$\text{viii)} \quad U_n\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{3}F_{4n+4}$$

$$\text{vi)} \quad U_n\left(\frac{3}{2}\right) = F_{2n+2}$$

$$\text{ix)} \quad U_n(\sqrt{5}) = \begin{cases} \frac{1}{4}L_{3n+3}, & n \text{ çift} \\ \frac{\sqrt{5}}{4}F_{3n+3}, & n \text{ tek} \end{cases}$$

$$\text{vii)} \quad U_n\left(\frac{i}{2}\right) = i^n F_{n+1}$$

$$\text{x)} \quad U_n\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \begin{cases} L_{n+1}, & n \text{ çift} \\ \sqrt{5}F_{n+1}, & n \text{ tek} \end{cases}$$

dir.

Lemma 2.3.10. (Koshy, 2014) $T_n(x), U_n(x)$ sırasıyla birinci ve ikinci çeşit Chebyshev polinomları ve P_n, Q_n sırasıyla Pell ve Pell – Lucas sayıları olmak üzere

$$\text{i)} \quad T_n(3) = Q_{2n}$$

$$\text{ii)} \quad U_{n-1}(3) = \frac{1}{2}P_{2n}$$

dir.

Lemma 2.3.11. (Rivlin, 1990) $V_n(x)$ üçüncü çeşit Chebyshev polinomları ve F_n, L_n sırasıyla Fibonacci ve Lucas sayıları olmak üzere

$$\text{i)} \quad V_n(-1) = (-1)^n(2n+1)$$

$$\text{ii)} \quad V_n(1) = 1$$

$$\text{iii)} \quad V_n\left(\frac{3}{2}\right) = F_{2n+1}$$

$$\text{iv)} \quad V_n\left(-\frac{3}{2}\right) = (-1)^n L_{2n+1}$$

$$\text{v)} \quad V_n\left(-\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} -2, & n \equiv 1(3) \\ 1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$\text{vi)} \quad V_n(0) = \begin{cases} 1, & n \equiv 0,3(4) \\ -1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$\text{vii)} \quad V_n\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 1, & n \equiv 0,5(6) \\ 0, & n \equiv 1,4(6) \\ -1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dir.

Lemma 2.3.12. $T_n(x), U_n(x)$ sırasıyla birinci ve ikinci çeşit Chebyshev polinomu ve $F_n(x), L_n(x), P_n(x), Q_n(x)$ sırasıyla Fibonacci, Lucas, Pell ve Pell – Lucas polinomları olmak üzere

$$i) \quad Q_n(x) = L_n(2x) = 2(-i)^n T_n(ix)$$

$$ii) \quad P_n(x) = F_n(2x) = (-i)^{n-1} U_{n-1}(ix)$$

dir.

2.4. Gauss Özel Sayı Dizileri ve Polinomları

Carl Friedrich Gauss 1832 yılında ilk kez Gauss sayı dizisini tanımlamıştır. Daha sonra Horadam (1963) Gauss Fibonacci sayılarını tanımlamıştır. Halıcı ve Öz (2016) tarafından Gauss Pell ve Gauss Pell-Lucas sayı dizileri ile kompleks düzleme taşınmış, bu sayı dizileri ile ilgili bazı özellikler elde edilmiştir. Gürel (2015) Gauss Pell ve Gauss Pell-Lucas dizilerinin Binet formüllerini, üreteç fonksiyonlarını ve bazı önemli özdeşliklerini vermiştir. Özkan ve Taştan (2020) Gauss Fibonacci polinomları ve Gauss Lucas polinomlarını tanımlayarak bilinen ailelerle ilişkilerini incelemiştir. Halıcı ve Öz (2018) Gauss Pell polinomlarını tanımlamış; bu polinomların üreteç fonksiyonlarını, Binet formüllerini vermiştir.

Tanım 2.4.1. (Gauss Fibonacci Sayı Dizisi)

$GF_1 = 1, GF_2 = 1 + i$ ve $n \geq 2$ olmak üzere,

$$GF_n = GF_{n-1} + GF_{n-2}$$

yineleme bağıntısı ile elde edilen sayı dizilerine Gauss Fibonacci sayı dizisi denir ve GF_n ile gösterilir.

Tanım 2.4.2. (Gauss Lucas Sayı Dizisi)

$GL_1 = 1 + 2i, GL_2 = 3 + i$ ve $n \geq 2$ olmak üzere,

$$GL_n = GL_{n-1} + GL_{n-2}$$

yineleme bağıntısı ile elde edilen sayı dizilerine Gauss Lucas sayı dizisi denir ve GL_n ile gösterilir.

Tanım 2.4.3. (Gauss Pell Sayı Dizisi)

$GP_1 = 1, GP_2 = 2 + i$ ve $n \geq 2$ olmak üzere,

$$GP_n = 2GP_{n-1} + GP_{n-2}$$

yineleme bağıntısı ile elde edilen sayı dizilerine Gauss Pell sayı dizisi denir ve GP_n ile gösterilir.

Tanım 2.4.4. (Gauss Pell-Lucas Sayı Dizisi)

$GQ_1 = 2 + 2i, GQ_2 = 6 + 2i$ ve $n \geq 2$ olmak üzere,

$$GQ_n = 2GQ_{n-1} + GQ_{n-2}$$

yineleme bağıntısı ile elde edilen sayı dizilerine Gauss Pell-Lucas sayı dizisi denir ve GQ_n ile gösterilir.

Tanım 2.4.5. (Gauss Fibonacci Polinomu)

$GF_1(x) = 1, GF_2(x) = x + i$ ve $n \geq 2$,

$$GF_n(x) = xGF_{n-1}(x) + GF_{n-2}(x)$$

yineleme bağıntısı ile elde edilen polinomlara Gauss Fibonacci polinomu denir ve $GF_n(x)$ ile gösterilir.

Tanım 2.4.6. (Gauss Lucas Polinomu)

$GL_1(x) = x + 2i, GL_2(x) = x^2 + 2 + xi$ ve $n \geq 2$,

$$GL_n(x) = xGL_{n-1}(x) + GL_{n-2}(x)$$

yineleme bağıntısı ile elde edilen polinomlara Gauss Lucas polinomu denir ve $GL_n(x)$ ile gösterilir.

Tanım 2.4.7. (Gauss Pell Polinomu)

$GP_1(x) = 1, GP_2(x) = 2x + i$ ve $n \geq 2$,

$$GP_n(x) = 2xGP_{n-1}(x) + GP_{n-2}(x)$$

yineleme bağıntısı ile elde edilen polinomlara Gauss Pell polinomu denir ve $GP_n(x)$ ile gösterilir.

Tanım 2.4.8. (Gauss Pell-Lucas Polinomu)

$GQ_1(x) = 2x + 2i, GQ_2(x) = 4x^2 + 2 + 2xi$ ve $n \geq 2$,

$$GQ_n(x) = 2xGQ_{n-1}(x) + GQ_{n-2}(x)$$

yineleme bağıntısı ile elde edilen polinomlara Gauss Pell-Lucas polinomu denir ve $GQ_n(x)$ ile gösterilir.

3. BİRİNCİ VE İKİNCİ ÇEŞİT GAUSS CHEBYSHEV POLİNOMLARI

Özgün bir çalışmadan oluşan bu bölümde, birinci ve ikinci çeşit Gauss Chebyshev polinomları tanımlanmış ve temel özellikleri ile detaylı olarak incelenmiştir.

3.1. Birinci Çeşit Gauss Chebyshev Polinomları

Bu bölümde birinci çeşit Gauss Chebyshev polinomları tanımlanmış, temel özellikleri (Binet formülleri, üreteç fonksiyonları, kombinatoryal özellikleri vs.) ve bilinen Chebyshev polinomları ile ilişkileri verilmiştir.

Tanım 3.1.1. $GT_0(x) = 1 + xi$, $GT_1(x) = x + i$, $n \geq 1$ için

$$GT_{n+1}(x) = 2xGT_n(x) - GT_{n-1}(x) \quad (3.1)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanan polinoma birinci çeşit Gauss Chebyshev polinomu denir ve $GT_n(x)$ ile gösterilir.

Birinci çeşit Gauss Chebyshev polinomunun ilk beş terimi aşağıda verilmiştir.

$$GT_0(x) = 1 + xi$$

$$GT_1(x) = x + i$$

$$GT_2(x) = 2x^2 - 1 + xi$$

$$GT_3(x) = 4x^3 - 3x + (2x^2 - 1)i$$

$$GT_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 + (4x^3 - 3x)i$$

Birinci çeşit Gauss Chebyshev polinomu ile bilinen birinci çeşit Chebyshev polinomu arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile verilir:

Teorem 3.1.2. $GT_n(x)$ birinci çeşit Gauss Chebyshev polinomu, $T_n(x)$ birinci çeşit Chebyshev polinomu ve $n > 1$ olmak üzere

$$GT_n(x) = T_n(x) + iT_{n-1}(x) \quad (3.2)$$

dir.

İspat. Tümevarım yönteminden ispat yapılacak olursa birinci çeşit Gauss Chebyshev polinomunun tanımından

$$\begin{aligned} GT_2(x) &= 2xGT_1(x) - GT_0(x) \\ &= 2x^2 - 1 + xi \end{aligned}$$

$$= T_2(x) + iT_1(x)$$

olup eşitlik $n=2$ için sağlanır. $n > 2$ olmak üzere eşitlik $n = k$ ya kadar doğru olsun. $n = k + 1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} GT_{k+1}(x) &= 2xGT_k(x) - GT_{k-1}(x) \\ &= 2x(T_k(x) + iT_{k-1}(x)) - (T_{k-1}(x) + iT_{k-2}(x)) \\ &= 2xT_k(x) + 2xiT_{k-1}(x) - T_{k-1}(x) - iT_{k-2}(x) \\ &= 2xT_k(x) - T_{k-1}(x) + i(2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x)) \\ &= T_{k+1}(x) + iT_k(x) \end{aligned}$$

olup buradan ispat tamamlanır.

Yineleme bağıntısına sahip polinomların başlangıç şartları hariç herhangi bir terimi kendinden önceki ardışık terimler yardımı ile elde edilebileceği gibi Binet formülleri yardımı ile de elde edilebilir. Binet formülleri kullanıldığı zaman başka terimlere gerek olmadığı için bazı durumlarda kolaylık sağlar. Bununla birlikte özdeşlikler elde etmek ve bulunan özdeşlikleri ispatlamak için de kullanılır. Birinci çeşit Gauss Chebyshev polinomu için Binet benzeri formül aşağıdaki şekilde elde edilir:

(3.1) denkleminin karakteristik denklemi $t^2 - 2xt + 1 = 0$ dir. O halde çözümler; $\alpha(x), \beta(x) = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$ dir. Dolayısıyla denklemin genel çözümü $GT_n(x) = C(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + D(x - \sqrt{x^2 - 1})^n$ olup başlangıç şartları kullanılarak $C = \frac{1+i\beta(x)}{2}$ ve $D = \frac{1+i\alpha(x)}{2}$ bulunur. Böylece $n \geq 1$ için

$$GT_n(x) = \frac{\alpha^n(x)(1 + i\beta(x))}{2} + \frac{\beta^n(x)(1 + i\alpha(x))}{2}$$

şeklinde elde edilir.

$GT_n(x)$ için üreteç fonksiyonu aşağıdaki teorem ile verilebilir:

Teorem 3.1.3. (Üreteç Fonksiyonu) Birinci çeşit Gauss Chebyshev polinomu $GT_n(x)$ için üreteç fonksiyonu $g(y, x)$ ile aşağıdaki şekilde verilir:

$$g(y, x) = \sum_{0 \leq n < \infty} GT_n(x)y^n = \frac{1 - xy + (x + y - 2x^2y)i}{1 - 2xy + y^2}$$

dir.

İspat. $\{GT_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi için üreteç fonksiyonu kuvvet serileri şeklinde yazıldığında

$$g(y, x) = \sum_{0 \leq n < \infty} GT_n(x)y^n = GT_0(x) + GT_1(x)y + GT_2(x)y^2 + \dots \quad (3.3)$$

olup buradan

$$2xyg(y, x) = 2xGT_0(x)y + 2xGT_1(x)y^2 + 2xGT_2(x)y^3 + \dots \quad (3.4)$$

$$y^2g(y, x) = GT_0(x)y^2 + GT_1(x)y^3 + GT_2(x)y^4 + \dots \quad (3.5)$$

elde edilir.

(3.3), (3.4) ve (3.5) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} & (1 - 2xy + y^2)g(y, x) \\ &= GT_0(x) + (GT_1(x) - 2xGT_0(x))y + (GT_2(x) - 2xGT_1(x) + GT_0(x))y^2 + \dots \\ &= 1 + xi + xy + yi - 2xy - 2x^2yi \\ &= 1 - xy + (x + y - 2x^2y)i \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece

$$g(y, x) = \frac{1 - xy + (x + y - 2x^2y)i}{1 - 2xy + y^2}$$

bulunur.

Fibonacci polinomları başta olmak üzere birçok polinom dizisi için iyi bilinen Cassini, Catalan ve d'Ocagne özdeşlikleri birinci çeşit Gauss Chebyshev polinomları için aşağıdaki teoremler ile verilsin.

Teorem 3.1.4. (Cassini Özdeşliği) $GT_n(x)$ birinci çeşit Gauss Chebyshev polinomu ve $n \geq 1$ için

$$GT_{n+1}(x)GT_{n-1}(x) - GT_n^2(x) = 2xi(x^2 - 1)$$

dir.

İspat. Eşitlik (3.2) 'den

$$\begin{aligned} & GT_{n+1}(x)GT_{n-1}(x) - GT_n^2(x) \\ &= (T_{n+1}(x) + iT_n(x))(T_{n-1}(x) + iT_{n-2}(x)) - (T_n(x) + iT_{n-1}(x))^2 \\ &= T_{n+1}(x)T_{n-1}(x) + iT_{n+1}(x)T_{n-2}(x) + iT_n(x)T_{n-1}(x) - T_n(x)T_{n-2}(x) - T_n^2(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2iT_n(x)T_{n-1}(x) + T_{n-1}^2(x) \\
& = (T_{n+1}(x)T_{n-1}(x) - T_n^2(x)) - (T_n(x)T_{n-2}(x) - T_{n-1}^2(x)) + i(T_{n+1}(x)T_{n-2}(x) \\
& - T_n(x)T_{n-1}(x))
\end{aligned}$$

olup Lemma 2.3.6. (ix) ve Eşitlik (2.1) 'den son eşitlik

$$\begin{aligned}
& (x^2 - 1) - (x^2 - 1) + i((2xT_n(x) - T_{n-1}(x))T_{n-2}(x) - T_n(x)T_{n-1}(x)) \\
& = i(2xT_n(x)T_{n-2}(x) - T_{n-1}(x)(T_{n-2}(x) + T_n(x))) \\
& = i(2xT_n(x)T_{n-2}(x) - 2xT_{n-1}(x)T_{n-1}(x)) \\
& = 2xi(T_n(x)T_{n-2}(x) - T_{n-1}^2(x)) \\
& = 2xi(x^2 - 1)
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 3.1.5. (Catalan Özdeşliği) $T_n(x)$ ve $GT_n(x)$ sırasıyla birinci çeşit Chebyshev polinomu, birinci çeşit Gauss Chebyshev polinomu ve $n \geq m \geq 0$ olmak üzere

$$GT_{n+m}(x)GT_{n-m}(x) - GT_n^2(x) = xi(T_{2m}(x) - 1)$$

dir.

İspat. Binet formüllerinden kolaylıkla ispatlanır.

Teorem 3.1.6. (d'Ocagne Özdeşliği) $U_n(x)$ ve $GT_n(x)$ sırasıyla ikinci çeşit Chebyshev polinomu, birinci çeşit Gauss Chebyshev polinomu ve $m > n \geq 0$ olmak üzere

$$GT_{m+1}(x)GT_n(x) - GT_m(x)GT_{n+1}(x) = 2xi(x^2 - 1)U_{m-n-1}(x)$$

dir.

İspat. Eşitlik (3.2) kullanılarak

$$\begin{aligned}
& GT_{m+1}(x)GT_n(x) - GT_m(x)GT_{n+1}(x) \\
& = (T_{m+1}(x) + iT_m(x))(T_n(x) + iT_{n-1}(x)) - (T_m(x) + iT_{m-1}(x))(T_{n+1}(x) + iT_n(x)) \\
& = T_{m+1}(x)T_n(x) + iT_{m+1}(x)T_{n-1}(x) + iT_m(x)T_n(x) - T_m(x)T_{n+1}(x) - T_m(x)T_{n+1}(x) \\
& \quad - iT_m(x)T_n(x) - iT_{m-1}(x)T_{n+1}(x) + T_{m-1}(x)T_n(x) \\
& = T_n(x)(T_{m+1}(x) + T_{m-1}(x)) - T_m(x)(T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x)) + i(T_{m+1}(x)T_{n-1}(x) \\
& \quad - T_{m-1}(x)T_{n+1}(x))
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Eşitlik (2.1)'den son eşitlik

$$\begin{aligned}
& 2xT_m(x)T_n(x) - 2xT_m(x)T_n(x) + i((2xT_m(x) - T_{m-1}(x))T_{n-1}(x) - T_{m-1}(x)T_{n+1}(x)) \\
&= i(2xT_m(x)T_{n-1}(x) - T_{m-1}(x)T_{n-1}(x) - T_{m-1}(x)T_{n+1}(x)) \\
&= i(2xT_m(x)T_{n-1}(x) - T_{m-1}(x)(T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x))) \\
&= i(2xT_m(x)T_{n-1}(x) - 2xT_{m-1}(x)T_n(x))
\end{aligned}$$

bulunur. Lemma 2.3.7. (ii) son eşitlikte yerine yazılırsa

$$2xi(x^2 - 1)U_{m-n-1}(x)$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Buradan sonraki teoremler ile birinci çeşit Gauss Chebyshev polinomları ile birinci ve ikinci çeşit Chebyshev polinomları arasındaki ilişkiler verilecektir.

Teorem 3.1.7. $m \geq n \geq 0$ için

$$GT_{m+n}(x) + GT_{m-n}(x) = 2T_n(x)GT_m(x)$$

dir.

İspat. Eşitlik (3.2)'den

$$\begin{aligned}
GT_{m+n}(x) + GT_{m-n}(x) &= (T_{m+n}(x) + iT_{m+n-1}(x)) + (T_{m-n}(x) + iT_{m-n-1}(x)) \\
&= T_{m+n}(x) + T_{m-n}(x) + i(T_{m+n-1}(x) + T_{m-n-1}(x))
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Lemma 2.3.6. (iii) son eşitlikten

$$\begin{aligned}
& 2T_m(x)T_n(x) + 2iT_{m-1}(x)T_n(x) \\
&= 2T_n(x)(T_m(x) + iT_{m-1}(x))
\end{aligned}$$

bulunur. Eşitlik (3.2) kullanılırsa

$$2T_n(x)GT_m(x)$$

olup ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.1.8. $m, n \geq 1$ için

$$GT_{m+n}(x) = U_n(x)GT_m(x) - U_{n-1}(x)GT_{m-1}(x)$$

dir.

İspat. Eşitlik (3.2) kullanılarak

$$GT_{m+n}(x) = T_{m+n}(x) + iT_{m+n-1}(x)$$

eşitliği elde edilir. Lemma 2.3.6. (vii)'den son eşitlik

$$\begin{aligned} T_m(x)U_n(x) - T_{m-1}(x)U_{n-1}(x) + iT_{m-1}(x)U_n(x) - iT_{m-2}(x)U_{n-1}(x) \\ = U_n(x)(T_m(x) + iT_{m-1}(x)) - U_{n-1}(x)(T_{m-1}(x) + iT_{m-2}(x)) \\ = U_n(x)GT_m(x) - U_{n-1}(x)GT_{m-1}(x) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.9. $n \geq 1$ için

$$GT_n^2(x) + GT_{n+1}^2(x) = 2x(x^2 - 1)U_{2n-1}(x) + 4xiT_n^2(x)$$

dir.

İspat. Eşitlik (3.2) kullanılarak

$$\begin{aligned} GT_n^2(x) + GT_{n+1}^2(x) &= (T_n(x) + iT_{n-1}(x))^2 + (T_{n+1}(x) + iT_n(x))^2 \\ &= (T_n^2(x) + T_{n+1}^2(x)) - (T_{n-1}^2(x) + T_n^2(x)) + 2iT_n(x)(T_{n-1}(x) + T_{n+1}(x)), \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Lemma 2.3.7. (i)'de sırasıyla $m = n, n = n + 1$ ve $m = n - 1$ alınırsa;

$$\begin{aligned} 1 + xT_{2n+1}(x) - 1 - xT_{2n-1}(x) + 4xiT_n^2(x) \\ = x(T_{2n+1}(x) - T_{2n-1}(x)) + 4xiT_n^2(x) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Lemma 2.3.6. (iv)'den son eşitlik

$$\begin{aligned} 2x(x^2 - 1)U_{2n-1}(x)U_0(x) + 4xiT_n^2(x) \\ = 2x(x^2 - 1)U_{2n-1}(x) + 4xiT_n^2(x) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.10. $n \geq 1$ için

$$GT_{n+1}^2(x) - GT_{n-1}^2(x) = 4x(x^2 - 1)(T_{2n-1}(x) + iU_{2n-2}(x))$$

dir.

İspat. Teorem 3.1.9'dan

$$\begin{aligned} GT_n^2(x) + GT_{n+1}^2(x) &= 2x(x^2 - 1)U_{2n-1}(x) + 4xiT_n^2(x) \\ GT_n^2(x) + GT_{n-1}^2(x) &= 2x(x^2 - 1)U_{2n-3}(x) + 4xiT_{n-1}^2(x) \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. İkinci denklem birinci denklemden çıkarılırsa;

$$\begin{aligned}
& GT_{n+1}^2(x) - GT_{n-1}^2(x) \\
& = 2x(x^2 - 1)(U_{2n-1}(x) - U_{2n-3}(x)) + 4xi(T_n^2(x) - T_{n-1}^2(x))
\end{aligned}$$

elde edilir. Sırasıyla Lemma 2.3.6. (vi) ve (iii)'lerden son eşitlik

$$GT_{n+1}^2(x) - GT_{n-1}^2(x) = 4x(x^2 - 1)T_{2n-1}(x) + 2xi(T_{2n}(x) - T_{2n-2}(x))$$

elde edilir. Lemma 2.3.6. (iv)'den

$$\begin{aligned}
& = 4x(x^2 - 1)T_{2n-1}(x) + 4xi(x^2 - 1)U_{2n-2}(x) \\
& = 4x(x^2 - 1)(T_{2n-1}(x) + iU_{2n-2}(x))
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3.2. İkinci Çeşit Gauss Chebyshev Polinomları

Bu bölümde ikinci çeşit Gauss Chebyshev polinomları tanımlanmış, temel özellikleri (Binet formülleri, üreteç fonksiyonları, kombinatorial özellikleri vs.) ve bilinen Chebyshev polinomları ile ilişkileri verilmiştir.

Tanım 3.2.1. $GU_0(x) = 1$, $GU_1(x) = 2x + i$, $n \geq 1$ için

$$GU_{n+1}(x) = 2xGU_n(x) - GU_{n-1}(x) \quad (3.6)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanan polinomlara ikinci çeşit Gauss Chebyshev polinomu denir ve $GU_n(x)$ ile gösterilir.

İkinci çeşit Gauss Chebyshev polinomunun ilk beş terimi aşağıda verilmiştir.

$$GU_0(x) = 1$$

$$GU_1(x) = 2x + i$$

$$GU_2(x) = 4x^2 - 1 + 2xi$$

$$GU_3(x) = 8x^3 - 4x + (4x^2 - 1)i$$

$$GU_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1 + (8x^3 - 4x)i$$

İkinci çeşit Gauss Chebyshev polinomu ile ikinci çeşit Chebyshev polinomu arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile verilir:

Teorem 3.2.2. $n > 1$ için

$$GU_{n+1}(x) = U_n(x) + iU_{n-1}(x) \quad (3.7)$$

dir.

İspat. Teoremin ispatı tümevarım yöntemi ile gösterilecek olursa $n > 2$ için

$$\begin{aligned}
 GU_2(x) &= 2xGU_1(x) - GU_0(x) \\
 &= 2x(2x + i) - 1 \\
 &= 4x^2 - 1 + 2xi \\
 &= U_2(x) + iU_1(x)
 \end{aligned}$$

olup eşitlik $n = 2$ için sağlanır. $n > 2$ olmak üzere eşitlik $n = k$ ya kadar doğru olsun. $n = k + 1$ için doğru olduğu gösterilsin.

$$\begin{aligned}
 GU_{k+1}(x) &= 2xGU_k(x) - GU_{k-1}(x) \\
 &= 2x(U_k(x) + iU_{k-1}(x)) - (U_{k-1}(x) + iU_{k-2}(x)) \\
 &= 2xU_k(x) + 2xiU_{k-1}(x) - U_{k-1}(x) - iU_{k-2}(x) \\
 &= 2xU_k(x) - U_{k-1}(x) + i(2xU_{k-1}(x) - U_{k-2}(x)) \\
 &= U_{k+1}(x) + iU_k(x)
 \end{aligned}$$

olup buradan ispat tamamlanır.

İkinci çeşit Gauss Chebyshev polinomlar için Binet benzeri formül aşağıdaki şekilde elde edilir:

(3.6) denkleminin karakteristik denklemi $t^2 - 2xt + 1 = 0$ dır. O halde çözümler; $\alpha(x), \beta(x) = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$ dir. Dolayısıyla denklemin genel çözümü $GU_n(x) = C(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + D(x - \sqrt{x^2 - 1})^n$ dir. Başlangıç şartlarını kullanarak $C = \frac{1+i\beta(x)}{2}$ ve $D = \frac{1+i\alpha(x)}{2}$ olur. Böylece $n \geq 1$ için istenen formül

$$GU_n(x) = \frac{\alpha^n(x)(\alpha(x) + i)}{\alpha(x) - \beta(x)} - \frac{\beta^n(x)(\beta(x) + i)}{\alpha(x) - \beta(x)}$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi, $GU_n(x)$ için üreteç fonksiyonunu aşağıdaki şekilde verebiliriz;

Teorem 3.2.3. (Üreteç Fonksiyonu) İkinci çeşit Gauss Chebyshev polinom için $g(y; x)$ ile gösterilen $\{GU_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin üreteç fonksiyonu şu şekildedir:

$$g(y, x) = \sum_{0 \leq n < \infty} GU_n(x)y^n = \frac{1 + yi}{1 - 2xy + y^2}$$

dir.

İspat. $\{GU_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi için üreteç fonksiyonu kuvvet serileri şeklinde yazılabilir.

$$g(y, x) = \sum_{0 \leq n < \infty} GU_n(x)y^n = GU_0(x) + GU_1(x)y + GU_2(x)y^2 + \dots \quad (3.8)$$

olup buradan

$$2xyg(y, x) = 2xGU_0(x)y + 2xGU_1(x)y^2 + 2xGU_2(x)y^3 + \dots \quad (3.9)$$

$$y^2g(y, x) = GU_0(x)y^2 + GU_1(x)y^3 + GU_2(x)y^4 + \dots \quad (3.10)$$

elde edilir.

(3.8), (3.9) ve (3.10) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} & (1 - 2xy + y^2)g(y, x) \\ &= GU_0(x) + (GU_1(x) - 2xGU_0(x))y + (GU_2(x) - 2xGU_1(x) + GU_0(x))y^2 + \dots \\ &= 1 + y(2x + i - 2x) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$g(y, x) = \frac{1 + yi}{1 - 2xy + y^2}$$

olup ispat tamamlanmış olur.

Fibonacci polinomları başta olmak üzere birçok polinom dizisi için iyi bilinen Cassini, Catalan ve d'Ocagne özdeşlikleri ikinci çeşit Gauss Ghebyshev polinomları için sırasıyla aşağıdaki teoremler ile verilmiştir.

Teorem 3.2.4. (Cassini Özdeşliği) $n \geq 1$ için

$$GU_{n+1}(x)GU_{n-1}(x) - GU_n^2(x) = -2xi$$

dir.

İspat. Eşitlik (3.7) 'den

$$\begin{aligned} & GU_{n+1}(x)GU_{n-1}(x) - GU_n^2(x) \\ &= (U_{n+1}(x) + iU_n(x))(U_{n-1}(x) + iU_{n-2}(x)) - (U_n(x) + iU_{n-1}(x))^2 \\ &= U_{n+1}(x)U_{n-1}(x) + iU_{n+1}(x)U_{n-2}(x) + iU_n(x)U_{n-1}(x) - U_n(x)U_{n-2}(x) \\ &\quad - U_n^2(x) - 2iU_n(x)U_{n-1}(x) + U_{n-1}^2(x) \end{aligned}$$

$$= (U_{n+1}(x)U_{n-1}(x) - U_n^2(x)) - (U_n(x)U_{n-2}(x) - U_{n-1}^2(x)) + i(U_{n+1}(x)U_{n-2}(x) - U_n(x)U_{n-1}(x))$$

olup Lemma 2.3.6. (x) ve Eşitlik (2.2) 'den son eşitlik

$$\begin{aligned} & i((2xU_n(x) - U_{n-1}(x))U_{n-2}(x) - U_n(x)U_{n-1}(x)) \\ &= i(2xU_n(x)U_{n-2}(x) - U_{n-1}(x)(U_{n-2}(x) + U_n(x))) \\ &= i(2xU_n(x)U_{n-2}(x) - 2xU_{n-1}(x)U_{n-1}(x)) \\ &= 2xi(U_n(x)U_{n-2}(x) - U_{n-1}^2(x)) \\ &= -2xi \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 3.2.5. (Catalan Özdeşliği) $n \geq m \geq 1$ için

$$GU_{n+m}(x)GU_{n-m}(x) - GU_n^2(x) = -2xiU_{2m-1}(x)$$

dir.

İspat. Binet formüllerinden ispat kolaylıkla yapılabilir.

Teorem 3.2.6. (d'Ocagne Özdeşliği) $m > n \geq 0$ için

$$GU_{m+1}(x)GU_n(x) - GU_m(x)GU_{n+1}(x) = 2xiU_{n-m-1}(x)$$

dir.

İspat. Eşitlik (3.7)'den

$$\begin{aligned} & GU_{m+1}(x)GU_n(x) - GU_m(x)GU_{n+1}(x) \\ &= (U_{m+1}(x) + iU_m(x))(U_n(x) + iU_{n-1}(x)) - (U_m(x) + iU_{m-1}(x))(U_{n+1}(x) + iU_n(x)) \\ &= U_{m+1}(x)U_n(x) + iU_{m+1}(x)U_{n-1}(x) + iU_m(x)U_n(x) - U_m(x)U_{n+1}(x) \\ &\quad - U_m(x)U_{n+1}(x) - iU_m(x)U_n(x) - iU_{m-1}(x)U_{n+1}(x) + U_{m-1}(x)U_n(x) \\ &= U_n(x)(U_{m+1}(x) + U_{m-1}(x)) - U_m(x)(U_{n+1}(x) + U_{n-1}(x)) + i(U_{m+1}(x)U_{n-1}(x) \\ &\quad - U_{m-1}(x)U_{n+1}(x)) \end{aligned}$$

olup (2.2)'den son eşitlik

$$\begin{aligned}
& 2xU_m(x)U_n(x) - 2xU_m(x)U_n(x) + i((2xU_m(x) - U_{m-1}(x))U_{n-1}(x) \\
& \quad - U_{m-1}(x)U_{n+1}(x)) \\
& = i(2xU_m(x)U_{n-1}(x) - U_{m-1}(x)U_{n-1}(x) - U_{m-1}(x)U_{n+1}(x)) \\
& = i(2xU_m(x)U_{n-1}(x) - U_{m-1}(x)(U_{n+1}(x) + U_{n-1}(x))) \\
& = i(2xU_m(x)U_{n-1}(x) - 2xU_{m-1}(x)U_n(x))
\end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 2.3.7. (iii)' den

$$2xiU_{n-m-1}(x)$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Buradan sonraki teoremler ile birinci ve ikinci çeşit Gauss Chebyshev polinomlarının bilinen Chebyshev polinomları ile ilişkileri verilmiştir.

Teorem 3.2.7. $m \geq n \geq 0$ için

$$GU_{m+n}(x) + GU_{m-n}(x) = 2T_n(x)GU_m(x)$$

dir.

İspat. Eşitlik (3.7)'den

$$\begin{aligned}
GU_{m+n}(x) - GU_{m-n}(x) &= (U_{m+n}(x) + iU_{m+n-1}(x)) + (U_{m-n}(x) + iU_{m-n-1}(x)) \\
&= U_{m+n}(x) + U_{m-n}(x) + i(U_{m+n-1}(x) + U_{m-n-1}(x))
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Lemma 2.3.6. (v) ve (3.7)'den son eşitlik

$$\begin{aligned}
& 2U_m(x)T_n(x) + 2iU_{m-1}(x)T_n(x) \\
& = 2T_n(x)(U_m(x) + iU_{m-1}(x)) \\
& = 2T_n(x)GU_m(x)
\end{aligned}$$

olup buradan ispat tamamlanır

Teorem 3.2.8. $m, n \geq 1$ için

$$GU_{m+n}(x) = U_n(x)GU_m(x) - U_{n-1}(x)GU_{m-1}(x)$$

dir.

İspat. Eşitlik (3.7)'den

$$GU_{m+n}(x) = U_{m+n}(x) + iU_{m+n-1}(x)$$

eşitliği elde edilir. Lemma 2.3.6. (viii)'den son eşitlik

$$\begin{aligned} & U_m(x)U_n(x) - U_{m-1}(x)U_{n-1}(x) + iU_{m-1}(x)U_n(x) - iU_{m-2}(x)U_{n-1}(x) \\ &= U_n(x)(U_m(x) + iU_{m-1}(x)) - U_{n-1}(x)(U_{m-1}(x) + iU_{m-2}(x)) \\ &= U_n(x)GU_m(x) - U_{n-1}(x)GU_{m-1}(x) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

3.3. Birinci ve İkinci Çeşit Gauss Chebysev Polinomlarının İlişkileri

Bu kısımda $GT_n(x)$ ve $GU_n(x)$ arasındaki ilişkileri incelenecektir.

Teorem 3.3.1. $n \geq 2$ için

$$GU_n(x) - GU_{n-2}(x) = 2GT_n(x)$$

dir.

İspat. Eşitlik (3.7)'den

$$\begin{aligned} GU_n(x) - GU_{n-2}(x) &= (U_n(x) + iU_{n-1}(x)) - (U_{n-2}(x) + iU_{n-3}(x)) \\ &= U_n(x) - U_{n-2}(x) + i(U_{n-1}(x) - U_{n-3}(x)) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Lemma 2.3.6. (i) ve (3.2)'den son eşitlik

$$\begin{aligned} & 2T_n(x) + 2iT_{n-1}(x) \\ &= 2(T_n(x) + iT_{n-1}(x)) \\ &= 2GT_n(x) \end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.2. $n > 0$ için

$$GU_n(x) - xGU_{n-1}(x) = GT_n(x)$$

dir.

İspat. Eşitlik (3.7)'den

$$\begin{aligned} GU_n(x) - xGU_{n-1}(x) &= (U_n(x) + iU_{n-1}(x)) - x(U_{n-1}(x) + iU_{n-2}(x)) \\ &= U_n(x) - xU_{n-1}(x) + i(U_{n-1}(x) - xU_{n-2}(x)) \end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 2.3.6. (ii) ve (3.2)'den son ifade

$$T_n(x) + iT_{n-1}(x)$$

$$= GT_n(x)$$

olup buradan ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.3. $m > n \geq 1$ için

$$GU_{m+n}(x) - GU_{m-n}(x) = 2U_{n-1}(x)GT_{m+1}(x)$$

dir.

İspat. Eşitlik (3.7)'den

$$\begin{aligned} GU_{m+n}(x) - GU_{m-n}(x) &= (U_{m+n}(x) + iU_{m+n-1}(x)) - (U_{m-n}(x) + iU_{m-n-1}(x)) \\ &= U_{m+n}(x) - U_{m-n}(x) + i(U_{m+n-1}(x) - U_{m-n-1}(x)) \end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 2.3.6. (vi) ve (3.2)'den,

$$\begin{aligned} &2T_{m+1}(x)U_{n-1}(x) + 2iT_m(x)U_{n-1}(x) \\ &= 2U_{n-1}(x)(T_{m+1}(x) + iT_m(x)) \\ &= 2U_{n-1}(x)GT_{m+1}(x) \end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır

Teorem 3.3.4. $m \geq n \geq 1$ için

$$GT_{m+n}(x) - GT_{m-n}(x) = 2(x^2 - 1)U_{n-1}(x)GU_{m-1}(x)$$

dir.

İspat. Lemma 2.3.6. (iv) ve (3.7)'den

$$\begin{aligned} GT_{m+n}(x) - GT_{m-n}(x) &= (T_{m+n}(x) + iT_{m+n-1}(x)) - (T_{m-n}(x) + iT_{m-n-1}(x)) \\ &= T_{m+n}(x) - T_{m-n}(x) + i(T_{m+n-1}(x) - T_{m-n-1}(x)) \\ &= 2(x^2 - 1)U_{m-1}(x)U_{n-1}(x) + 2i(x^2 - 1)U_{m-2}(x)U_{n-1}(x) \\ &= 2(x^2 - 1)U_{n-1}(x)(U_{m-1}(x) + iU_{m-2}(x)) \\ &= 2(x^2 - 1)U_{n-1}(x)GU_{m-1}(x) \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 3.3.5. $n \geq 1$ için

$$GT_n^2(x) - (x^2 - 1)GU_{n-1}^2(x) = 2xi$$

dir.

İspat. (3.2) ve (3.7)'den

$$\begin{aligned}
& GT_n^2(x) - (x^2 - 1)GU_{n-1}^2(x) \\
&= (T_n(x) + iT_{n-1}(x))^2 - (x^2 - 1)(U_{n-1}(x) + iU_{n-2}(x))^2 \\
&= T_n^2(x) + 2iT_n(x)T_{n-1}(x) - T_{n-1}^2(x) - (x^2 - 1)U_{n-1}^2(x) - 2i(x^2 - 1)U_{n-1}(x)U_{n-2}(x) \\
&\quad + (x^2 - 1)U_{n-2}^2(x) \\
&= (T_n^2(x) - (x^2 - 1)U_{n-1}^2(x)) - (T_{n-1}^2(x) - (x^2 - 1)U_{n-2}^2(x)) + 2i(T_n(x)T_{n-1}(x) \\
&\quad - (x^2 - 1)U_{n-1}(x)U_{n-2}(x))
\end{aligned}$$

Lemma 2.3.6. (xi) 'den

$$i(2T_n(x)T_{n-1}(x) - 2(x^2 - 1)U_{n-1}(x)U_{n-2}(x))$$

Lemma 2.3.6. (iii) ve (iv) 'den

$$i(T_{2n-1}(x) + T_1(x) - T_{2n-1}(x) + T_1(x))$$

$T_1(x) = x$ olduğuna göre son eşitlik

$$2xi$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

4. ÜÇÜNCÜ VE DÖRDÜNCÜ ÇEŞİT GAUSS CHEBYSHEV POLİNOMLARI

Özgün çalışmalardan oluşan bu bölümde, üçüncü çeşit ve dördüncü çeşit Gauss Chebyshev polinomları tanımlanmış ve temel özellikleri verilmiştir.

4.1. Üçüncü Çeşit Gauss Chebyshev Polinomları

Bu bölümde üçüncü çeşit Gauss Chebyshev polinomları tanımlanmış, temel özellikleri (Binet formülleri, üreteç fonksiyonları, kombinatorial özellikleri vs.) ve Chebyshev polinomları ile ilişkileri verilmiştir.

Tanım 4.1.1. $GV_0(x) = 1 + i$, $GV_1(x) = 2x - 1 + i$, $n \geq 1$ için

$$GV_{n+1}(x) = 2xGV_n(x) - GV_{n-1}(x) \quad (4.1)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanan polinoma üçüncü çeşit Gauss Chebyshev polinomu denir ve $GV_n(x)$ ile gösterilir.

Üçüncü çeşit Gauss Chebyshev polinomunun ilk beş terimi aşağıda verilmiştir.

$$GV_0(x) = 1 + i$$

$$GV_1(x) = 2x - 1 + i$$

$$GV_2(x) = 4x^2 - 2x - 1 + (2x - 1)i$$

$$GV_3(x) = 8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 + (4x^2 - 2x - 1)i$$

$$GV_4(x) = 16x^4 - 8x^3 - 12x^2 - 4x + 1 + (8x^3 - 4x^2 - 4x + 1)i$$

Teorem 4.1.2. $n > 1$ için

$$GV_n(x) = V_n(x) + iV_{n-1}(x) \quad (4.2)$$

dır.

İspat. Teoremin ispatı matematik induksiyon prensibi ile gösterilsin. $n > 2$ için

$$\begin{aligned} GV_2(x) &= 2xGV_1(x) - GV_0(x) \\ &= 4x^2 - 2x + 2xi - 1 - i \\ &= 4x^2 - 2x - 1 + i(2x - 1) \\ &= V_2(x) + iV_1(x) \end{aligned}$$

olup eşitlik $n=2$ için sağlanır. $n > 2$ olmak üzere eşitlik $n = k$ ya kadar doğru olsun. $n = k + 1$ için doğru olduğunu gösterilsin.

$$\begin{aligned}
GV_{k+1}(x) &= 2xGV_k(x) - GV_{k-1}(x) \\
&= 2x(V_k(x) + iV_{k-1}(x)) - (V_{k-1}(x) + iV_{k-2}(x)) \\
&= 2xV_k(x) + 2xiV_{k-1}(x) - V_{k-1}(x) - iV_{k-2}(x) \\
&= 2xV_k(x) - V_{k-1}(x) + i(2xV_{k-1}(x) - V_{k-2}(x)) \\
&= V_{k+1}(x) + iV_k(x)
\end{aligned}$$

olup böylece ispat tamamlandı.

Teorem 4.1.3. (Üreteç Fonksiyonu) Üçüncü çeşit Gauss Chebyshev polinomları için $g(y; x)$ ile gösterilen $\{GV_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin üreteç fonksiyonu şu şekildedir:

$$g(y, x) = \sum_{n=0}^{\infty} GV_n(x)y^n = \frac{1 - y + (1 + y - 2xy)i}{1 - 2xy + y^2}$$

dir.

İspat. $\{GV_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi için üreteç fonksiyonu kuvvet serileri şeklinde yazılabilir.

$$g(y, x) = \sum_{n=0}^{\infty} GV_n(x)y^n = GV_0(x) + GV_1(x)y + GV_2(x)y^2 + \dots \quad (4.3)$$

$$2xyg(y, x) = 2xGV_0(x)y + 2xGV_1(x)y^2 + 2xGV_2(x)y^3 + \dots \quad (4.4)$$

$$y^2g(y, x) = GV_0(x)y^2 + GV_1(x)y^3 + GV_2(x)y^4 + \dots \quad (4.5)$$

(4.3), (4.4) ve (4.5) den

$$\begin{aligned}
&(1 - 2xy + y^2)g(y, x) \\
&= GV_0(x) + (GV_1(x) - 2xGV_0(x))y + (GV_2(x) - 2xGV_1(x) + GV_0(x))y^2 + \dots \\
&= 1 + i + 2xy - y + yi - 2xy - 2xyi \\
&= 1 - y + (1 + y - 2xy)i
\end{aligned}$$

dir. Buradan

$$g(y, x) = \frac{1 - y + (1 + y - 2xy)i}{1 - 2xy + y^2}$$

olup ispat tamamlanmış olur.

(4.1) denkleminin karakteristik denklemi $t^2 - 2xt + 1 = 0$ dır. O halde çözümleri; $\alpha(x), \beta(x) = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$ olup üçüncü çeşit Gauss Chebyshev polinomlarının Binet benzeri formülü aşağıdaki gibidir.

Teorem 4.1.4. $n \geq 0$ için

$$GV_n(x) = \frac{(\alpha(x) - 1)(\alpha^n(x) + i\beta^n(x))}{\alpha(x) - \beta(x)} - \frac{(\beta(x) - 1)(\beta^n(x) + i\alpha^n(x))}{\alpha(x) - \beta(x)}$$

dir.

Buradan sonraki teoremler ile üçüncü çeşit Gauss Chebyshev polinomları ile bilinen Chebyshev polinomları arasındaki ilişkileri vereceğiz.

Teorem 4.1.5. $n \geq 1$ için

$$GV_n(x) = GU_n(x) - GU_{n-1}(x)$$

dir.

İspat. Eşitlik (4.2)'den

$$GV_n(x) = V_n(x) + iV_{n-1}(x)$$

dir. Lemma 2.3.8. (i) ve (3.7)'den, son eşitlik

$$\begin{aligned} &= U_n(x) - U_{n-1}(x) + i(U_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)) \\ &= U_n(x) + iU_{n-1}(x) - (U_{n-1}(x) + iU_{n-2}(x)) \\ &= GU_n(x) - GU_{n-1}(x) \end{aligned}$$

olup buradan ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.6. $n \geq 1$ için

$$GV_n(x) + GV_{n-1}(x) = 2GT_n(x)$$

dir.

İspat. Eşitlik (4.2)'den

$$\begin{aligned} GV_n(x) + GV_{n-1}(x) &= V_n(x) + iV_{n-1}(x) + V_{n-1}(x) + iV_{n-2}(x) \\ &= V_n(x) + V_{n-1}(x) + i(V_{n-1}(x) + V_{n-2}(x)) \end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 2.3.8. (ii) ve (3.2)'den,

$$\begin{aligned} &= 2T_n(x) + i2T_{n-1}(x) \\ &= 2GT_n(x) \end{aligned}$$

olup ispat tamamlanmış olur.

4.2. Dördüncü Çeşit Gauss Chebyshev Polinomları

Bu bölümde dördüncü çeşit Gauss Chebyshev polinomları tanımlanmış, temel özellikleri (Binet formülleri, üreteç fonksiyonları, kombinatoryal özellikleri vs.) ve Chebyshev polinomları ile ilişkileri verilmiştir.

Tanım 4.2.1. $GW_0(x) = 1 - i$, $GW_1(x) = 2x + 1 + i$, $n \geq 1$ için

$$GW_{n+1}(x) = 2xGW_n(x) - GW_{n-1}(x) \quad (4.6)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanan polinomlara dördüncü çeşit Gauss Chebyshev polinomu denir ve $GW_n(x)$ ile gösterilir.

Dördüncü çeşit Gauss Chebyshev polinomunun ilk beş terimi aşağıda verilmiştir.

$$GW_0(x) = 1 - i$$

$$GW_1(x) = 2x + 1 + i$$

$$GW_2(x) = 4x^2 + 2x - 1 + (2x + 1)i$$

$$GW_3(x) = 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 + (4x^2 + 2x - 1)i$$

$$GW_4(x) = 16x^4 + 8x^3 - 12x^2 - 4x + 1 + (8x^3 + 4x^2 - 4x + 1)i$$

dir.

Teorem 4.2.2. $n > 1$ için

$$GW_n(x) = W_n(x) + iW_{n-1}(x) \quad (4.7)$$

dir.

İspat. Teoremin ispatı matematik induksiyon prensibi ile gösterilsin. $n > 2$ için

$$\begin{aligned} GW_2(x) &= 2xGW_1(x) - GW_0(x) \\ &= 4x^2 + 2x + 2xi - 1 + i \\ &= 4x^2 + 2x - 1 + i(2x + 1) \\ &= W_2(x) + iW_1(x). \end{aligned}$$

Şimdi, $n = k$ ya kadar doğru olsun. $n = k + 1$ için doğruluğu gösterilsin.

$$\begin{aligned}
 GW_{k+1}(x) &= 2xGW_k(x) - GW_{k-1}(x) \\
 &= 2x(W_k(x) + iW_{k-1}(x)) - (W_{k-1}(x) + iW_{k-2}(x)) \\
 &= 2xW_k(x) - W_{k-1}(x) + i(2xW_{k-1}(x) - W_{k-2}(x)) \\
 &= W_{k+1}(x) + iW_k(x)
 \end{aligned}$$

böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.3. (Üreteç Fonksiyonu) Dördüncü çeşit Gauss Chebyshev polinomları için $g(y; x)$ ile gösterilen $\{GW_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin üreteç fonksiyonu şu şekildedir:

$$g(y, x) = \sum_{n=0}^{\infty} GW_n(x)y^n = \frac{1 + y + (y + 2xy - 1)i}{1 - 2xy + y^2}$$

dir.

İspat. $\{GW_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi için üreteç fonksiyonu kuvvet serileri şeklinde yazılabilir.

$$g(y, x) = \sum_{n=0}^{\infty} GW_n(x)y^n = GW_0(x) + GW_1(x)y + GW_2(x)y^2 + \dots \quad (4.8)$$

$$2xyg(y, x) = 2xGW_0(x)y + 2xGW_1(x)y^2 + 2xGW_2(x)y^3 + \dots \quad (4.9)$$

$$y^2g(y, x) = GW_0(x)y^2 + GW_1(x)y^3 + GW_2(x)y^4 + \dots \quad (4.10)$$

(4.8), (4.9) ve (4.10) dan

$$\begin{aligned}
 &(1 - 2xy + y^2)g(y, x) \\
 &= GW_0(x) + (GW_1(x) - 2xGW_0(x))y + (GW_2(x) - 2xGW_1(x) + GW_0(x))y^2 + \dots \\
 &= 1 - i + 2xy + y + yi - 2xy + 2xyi \\
 &= 1 + y + (y + 2xy - 1)i
 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$g(y, x) = \frac{1 + y + (y + 2xy - 1)i}{1 - 2xy + y^2}$$

olup ispat tamamlanmış olur.

(4.6) denkleminin karakteristik denklemi $t^2 - 2xt + 1 = 0$ dir. O halde çözümleri; $\alpha(x), \beta(x) = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$. Dördüncü çeşit Gauss Chebyshev polinomlarının Binet benzeri formülü aşağıdaki gibidir.

Teorem 4.2.4. $n \geq 0$ için

$$GV_n(x) = \frac{(\alpha(x) + 1)(\alpha^n(x) - i\beta^n(x))}{\alpha(x) - \beta(x)} - \frac{(\beta(x) + 1)(\beta^n(x) - i\alpha^n(x))}{\alpha(x) - \beta(x)}$$

dir.

Buradan sonraki teoremler de dördüncü çeşit Gauss Chebyshev polinomları ile bilinen Chebyshev polinomları arasındaki ilişkileri vereceğiz.

Teorem 4.2.5. $n \geq 1$ için

$$GW_n(x) = GU_n(x) + GU_{n-1}(x)$$

dir.

İspat. Eşitlik (4.7)'den

$$GW_n(x) = W_n(x) + iW_{n-1}(x)$$

eşitliğidir. Lemma 2.3.8. (iii) ve (3.7)'den son eşitlik

$$= U_n(x) + U_{n-1}(x) + i(U_{n-1}(x) + U_{n-2}(x))$$

$$= U_n(x) + iU_{n-1}(x) + U_{n-1}(x) + iU_{n-2}(x)$$

$$= GU_n(x) + GU_{n-1}(x)$$

bulunur. Buradan ispat tamamlanmıştır.

Teorem 4.2.6. $n \geq 1$ için

$$GW_n(x) - GW_{n-1}(x) = 2GT_n(x)$$

dir.

İspat. Eşitlik (4.7)'den

$$GW_n(x) - GW_{n-1}(x) = W_n(x) + iW_{n-1}(x) - (W_{n-1}(x) + iW_{n-2}(x))$$

$$= W_n(x) - W_{n-1}(x) + iW_{n-1}(x) - iW_{n-2}(x)$$

elde edilir. Lemma 2.3.8. (iv) ve (3.2)'den

$$= 2T_n(x) + i2T_{n-1}(x)$$

$$= 2GT_n(x)$$

olup böylece ispat tamamlanır.

4.3. Üçüncü ve Dördüncü Çeşit Gauss Chebyshev Polinomlarının İlişkileri

Bu bölümde, üçüncü ve dördüncü çeşit Gauss Chebyshev polinomlarının ilişkileri verilmiştir.

Teorem 4.3.1. $n \geq 1$ için

$$GV_n(x) + GV_{n-1}(x) = GW_n(x) - GW_{n-1}(x)$$

dir.

İspat. Eşitlik (4.2) ve Lemma 2.3.8. (i)'den

$$\begin{aligned} GV_n(x) + GV_{n-1}(x) &= V_n(x) + iV_{n-1}(x) + V_{n-1}(x) + iV_{n-2}(x) \\ &= (U_n(x) - U_{n-1}(x)) + i(U_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)) + (U_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)) + i(U_{n-2}(x) \\ &\quad - U_{n-3}(x)) \\ &= (U_n(x) + U_{n-1}(x)) - (U_{n-1}(x) + U_{n-2}(x)) + i(U_{n-1}(x) + U_{n-2}(x)) - i(U_{n-2}(x) \\ &\quad + U_{n-3}(x)) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Lemma 2.3.8. (iii)'den son eşitlik

$$= W_n(x) - W_{n-1}(x) + iW_{n-1}(x) - iW_{n-2}(x)$$

bulunur. (4.7)'den

$$= GW_n(x) - GW_{n-1}(x)$$

olup ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.2. $n \geq 1$ için

$$GV_n(x) + GW_n(x) = 2GU_n(x)$$

dir.

İspat. (4.2) ve (4.7)'den

$$\begin{aligned} GV_n(x) + GW_n(x) &= V_n(x) + iV_{n-1}(x) + W_n(x) + iW_{n-1}(x) \\ &= V_n(x) + W_n(x) + i(V_{n-1}(x) + W_{n-1}(x)) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Lemma 2.3.8. (vi)'den son eşitlik

$$= 2U_n(x) + i2U_{n-1}(x)$$

$$= 2(U_n(x) + iU_{n-1}(x))$$

bulunur. Ve (3.7)'den son eşitlik

$$= 2GU_n(x)$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

Tablo 4.1. Chebyshev ve Gauss Chebyshev polinomları

	Başlangıç Şartları	Rekürans Bağıntısı
Birinci Çeşit Chebyshev Polinomu	$T_0(x) = 1, T_1(x) = x$	$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$
İkinci Çeşit Chebyshev Polinomu	$U_0(x) = 1, U_1(x) = 2x$	$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)$
Üçüncü Çeşit Chebyshev Polinomu	$V_0(x) = 1, V_1(x) = 2x - 1$	$V_n(x) = 2xV_{n-1}(x) - V_{n-2}(x)$
Dördüncü Çeşit Chebyshev Polinomu	$W_0(x) = 1, W_1(x) = 2x + 1$	$W_n(x) = 2xW_{n-1}(x) - W_{n-2}(x)$
Birinci Çeşit Gauss Chebyshev Polinomu	$GT_0(x) = 1 + xi,$ $GT_1(x) = x + i$	$GT_n(x) =$ $2xGT_{n-1}(x) - GT_{n-2}(x)$
İkinci Çeşit Gauss Chebyshev Polinomu	$GU_0(x) = 1,$ $GU_1(x) = 2x + i$	$GU_n(x) =$ $2xGU_{n-1}(x) - GU_{n-2}(x)$
Üçüncü Çeşit Gauss Chebyshev Polinomu	$GV_0(x) = 1 + i,$ $GV_1(x) = 2x - 1 + i$	$GV_n(x) =$ $2xGV_{n-1}(x) - GV_{n-2}(x)$
Dördüncü Çeşit Gauss Chebyshev Polinomu	$GW_0(x) = 1 - i,$ $GW_1(x) = 2x + 1 + i$	$GW_n(x) =$ $2xGW_{n-1}(x) - GW_{n-2}(x)$

5. GAUSS CHEBYSHEV POLİNOMLARI İLE ÖZEL SAYI DİZİLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİLER

Bu bölümde bilinen bazı eşitlikleri kullanarak birinci ve ikinci çeşit Gauss Chebyshev polinomları ile Fibonacci, Lucas, Pell ve Pell-Lucas sayıları ve polinomları arasındaki ilişkiler verilecektir.

Aşağıdaki teoremden birinci çeşit Gauss Chebyshev polinomu ile Lucas ve Pell-Lucas sayı ve polinom ilişkisi verilmiştir.

Teorem 5.1. $GT_n(x)$ birinci çeşit Gauss Chebyshev ve $L_n(x)$ Lucas polinomu olmak üzere

$$GT_n(x) = \frac{i^n}{2} (L_n(-2ix) + L_{n-1}(-2ix))$$

dir.

İspat. Eşitlik (3.2) ve Lemma 2.3.12 (i) 'den

$$\begin{aligned} GT_n(x) &= T_n(x) + iT_{n-1}(x) \\ &= \frac{i^n}{2} L_n(-2ix) + i \frac{i^{n-1}}{2} L_{n-1}(-2ix) \\ &= \frac{i^n}{2} (L_n(-2ix) + L_{n-1}(-2ix)) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Sonuç 5.2. $GT_n(x)$ birinci çeşit Gauss Chebyshev ve $Q_n(x)$ Pell-Lucas polinomu olmak üzere

$$GT_n(x) = \frac{i^n}{2} (Q_n(-ix) + Q_{n-1}(-ix))$$

dir.

İspat. Teorem 5.1. ve Lemma 2.3.12 (i) 'den ispat açıktır.

Sonuç 5.3.

$$GT_n\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{i^n}{2} L_{n+1}$$

dir.

İspat. Teorem 5.1. 'den ispat açıktır.

Sonuç 5.4.

$$GT_n\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{i^n}{2} Q_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

dir.

İspat. Sonuç 5.2.' den ispat açıktır.

Aşağıdaki teoremden ikinci çeşit Gauss Chebyshev polinomu ile Fibonacci ve Pell sayısı ve polinom ilişkisi verilmiştir.

Teorem 5.5. $GU_n(x)$ ikinci çeşit Gauss Chebyshev ve $F_n(x)$ Fibonacci polinomu olmak üzere

$$GU_n(x) = i^n(F_{n+1}(-2ix) + F_n(-2ix))$$

dir.

İspat. Eşitlik (3.7) ve Lemma 2.3.12 (ii) 'den

$$\begin{aligned} GU_n(x) &= U_n(x) + iU_{n-1}(x) \\ &= i^n F_{n+1}(-2ix) + i^{n-1} F_n(-2ix) \\ &= i^n (F_{n+1}(-2ix) + F_n(-2ix)) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Sonuç 5.6. $GU_n(x)$ ikinci çeşit Gauss Chebyshev ve $P_n(x)$ Pell polinomu olmak üzere

$$GU_n(x) = i^n(P_{n+1}(-ix) + P_n(-ix))$$

dir.

İspat. Teorem 5.5. ve Lemma 2.3.12 (ii)' den ispat açıktır.

Sonuç 5.7.

$$GU_n\left(\frac{i}{2}\right) = i^n F_{n+2}$$

dir.

İspat. Teorem 5.5.' den ispat açıktır.

Sonuç 5.8.

$$GU_n\left(\frac{i}{2}\right) = i^n P_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

dir.

İspat. Sonuç 5.6.' den ispat açıktır.

Şimdi vereceğimiz teorem ile birinci çeşit Gauss Chebyshev polinomunun bazı özel değerlerde Gauss Lucas, Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilişkisi verilmiştir:

Teorem 5. 9.

- i) $GT_n\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}(GL_{2n-1} + L_{2n-2})$
- ii) $GT_n\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{2}(GL_{4n-3} + 2L_{4n-2})$
- iii) $GT_n(\sqrt{5}) = \begin{cases} \frac{1}{2}(L_{3n} + i\sqrt{5}F_{3n-3}), & n \text{ çift} \\ \frac{1}{2}(\sqrt{5}F_{3n} + iL_{3n-3}), & n \text{ tek} \end{cases}$
- iv) $GT_n\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}(L_n + i\sqrt{5}F_{n-1}), & n \text{ çift} \\ \frac{1}{2}(\sqrt{5}F_n + iL_{n-1}), & n \text{ tek} \end{cases}$

dir.

İspat. Yalnızca ii) ispatlanacaktır. Diğerlerinin ispatı benzer şekilde yapılabilir.

ii) Eşitlik (3.2) ve Lemma 2.3.9 (iii) kullanılarak

$$\begin{aligned}
 GT_n\left(\frac{7}{2}\right) &= T_n\left(\frac{7}{2}\right) + iT_{n-1}\left(\frac{7}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{2}(L_{4n} + iL_{4n-4}) \\
 &= \frac{1}{2}(L_{4n-1} + L_{4n-2} + iL_{4n-4}) \\
 &= \frac{1}{2}(L_{4n-2} + L_{4n-3} + L_{4n-2} + iL_{4n-4}) \\
 &= \frac{1}{2}(GL_{4n-3} + 2L_{4n-2})
 \end{aligned}$$

dir.

Şimdi vereceğimiz teorem ile ikinci çeşit Gauss Chebyshev polinomunun bazı özel değerlerde Gauss Fibonacci, Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilişkisi verilmiştir.

Teorem 5. 10.

- i) $GU_n\left(\frac{3}{2}\right) = GF_{2n+1} + F_{2n}$

$$\begin{aligned}
\text{ii)} \quad GU_n\left(\frac{7}{2}\right) &= \frac{1}{3}(F_{4n+4} + iF_{4n}) \\
\text{iii)} \quad GU_n(\sqrt{5}) &= \begin{cases} \frac{1}{4}(L_{3n+3} + i\sqrt{5}F_{3n}), & n \text{ çift} \\ \frac{1}{4}(\sqrt{5}F_{3n+3} + iL_{3n}), & n \text{ tek} \end{cases} \\
\text{iv)} \quad GU_n\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) &= \begin{cases} L_{n+1} + i\sqrt{5}F_n, & n \text{ çift} \\ \sqrt{5}F_{n+1} + iL_n, & n \text{ tek} \end{cases}
\end{aligned}$$

dir.

İspat. Yalnızca i) ispatlanacaktır. Diğerlerinin ispatı benzer şekilde yapılabilir.

i) Eşitlik (3.7) ve Lemma 2.3.9 (vi) kullanılarak

$$\begin{aligned}
GU_n\left(\frac{3}{2}\right) &= U_n\left(\frac{3}{2}\right) + iU_{n-1}\left(\frac{3}{2}\right) \\
&= F_{2n+2} + iF_{2n} \\
&= F_{2n+1} + F_{2n} + iF_{2n} \\
&= GF_{2n+1} + F_{2n}
\end{aligned}$$

dir. Aşağıdaki teoremden birinci ve ikinci çeşit Gauss Chebyshev polinomunun özel bir değerinde Gauss Pell, Pell ve Pell-Lucas sayıları ile ilişkisi verilmiştir.

Teorem 5.11.

$$\begin{aligned}
\text{i)} \quad GT_n(3) &= GQ_{2n-1} + Q_{2n-2} \\
\text{ii)} \quad GU_{n-1}(3) &= \frac{1}{2}(P_{2n} + iP_{2n-2})
\end{aligned}$$

İspat. Yalnızca i) ispatlanacaktır. Diğerinin ispatı benzer şekilde yapılabilir.

i) Eşitlik (3.2) ve Lemma 2.3.10 (i) kullanılarak

$$\begin{aligned}
GT_n(3) &= T_n(3) + iT_{n-1}(3) \\
&= Q_{2n} + iQ_{2n-2} \\
&= Q_{2n-1} + Q_{2n-2} + iQ_{2n-2} \\
&= GQ_{2n-1} + Q_{2n-2}
\end{aligned}$$

dir.

Aşağıdaki teoremden üçüncü çeşit Gauss Chebyshev polinomunun bazı özel değerlerde Gauss Fibonacci, Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilişkisi verilmiştir.

Teorem 5.12. $GV_n(x)$ üçüncü çeşit Gauss Chebyshev polinomu olmak üzere

- i) $GV_n\left(\frac{3}{2}\right) = GF_{2n} + F_{2n-1}$
- ii) $GV_n\left(-\frac{3}{2}\right) = (-1)^n(L_{2n+1} - iL_{2n-1})$
- iii) $GV_n(-1) = (-1)^n(2n + 1 - i(2n - 1))$
- iv) $GV_n(1) = 1 + i$
- v) $GV_n\left(-\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 1 + i, & n \equiv 0(3) \\ -2 + i, & n \equiv 1(3) \\ 1 - 2i, & n \equiv 2(3) \end{cases}$
- vi) $GV_n(0) = \begin{cases} 1 + i, & n \equiv 0(4) \\ -1 + i, & n \equiv 1(4) \\ -(1 + i), & n \equiv 2(4) \\ 1 - i, & n \equiv 3(4) \end{cases}$
- vii) $GV_n\left(-\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 1 + i, & n \equiv 0(6) \\ i, & n \equiv 1(6) \\ -1, & n \equiv 2(6) \\ -(1 + i), & n \equiv 3(6) \\ -i, & n \equiv 4(6) \\ 1, & n \equiv 5(6) \end{cases}$

dir.

İspat. Bu teorem için i) ve v) ispatlanacaktır. Diğerlerinin ispatı benzer şekilde yapılabilir.

- i) Eşitlik (4.2) ve Lemma 2.3.9 (iii) kullanılarak

$$\begin{aligned}
 GV_n\left(\frac{3}{2}\right) &= V_n\left(\frac{3}{2}\right) + iV_{n-1}\left(\frac{3}{2}\right) \\
 &= F_{2n+1} + iF_{2n-1} \\
 &= F_{2n} + F_{2n-1} + iF_{2n-1} \\
 &= GF_{2n} + F_{2n-1}
 \end{aligned}$$

dir.

- v) Eşitlik (4.2) ve Lemma 2.3.11 (i) kullanılarak $n \equiv 0(3)$ için

$$\begin{aligned}
 GV_n\left(-\frac{1}{2}\right) &= V_n\left(-\frac{1}{2}\right) + iV_{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right) \\
 &= 1 + i
 \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde $n \equiv 1(3)$ ve $n \equiv 2(3)$ için sırasıyla

$$GV_n\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 + i$$

$$GV_n\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - 2i$$

olarak bulunur. Sonuç olarak

$$GV_n\left(-\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 1 + i, & n \equiv 0(3) \\ -2 + i, & n \equiv 1(3) \\ 1 - 2i, & n \equiv 2(3) \end{cases}$$

elde edilir.



6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, iyi bilinen dört çeşit Chebyshev polinomlarını kompleks (karmaşık) düzleme genişleterek, Gauss Chebyshev polinomları adı verilen yeni Gauss polinom aileleri tanımlanmıştır. Yeni tanımlanan bu kavramların Binet formülleri, üreteç formülleri, Cassini, Catalan, d'Ocagne gibi temel özellikleri, bilinen Chebyshev polinomları ve birbirleri ile ilişkileri, özel sayı dizileri ve özel sayı dizilerinin polinomları ile ilişkilerine yer verilmiştir. Bu tezin amacı, Gauss polinom ailesine bir yenisini ekleyerek elde edilen özdeşlikler ile bilinen sayı dizi ve polinomları arasındaki ilişkileri gösterebilmektir.

Elde edilmiş olan bu yeni ailenin bilinen farklı özel sayı dizi ve/veya polinomları ile incelenmemiş ilişkileri bulunduğu tahmin edilmektedir. Bu ilişkilerin bulunması literatüre önemli katkılar sağlayacaktır.

7. KAYNAKÇA

- Adegoke, K., Frontczak, R. & Goy, T. (2023). Binomial Fibonacci sums from Chebyshev polynomials, *Journal of Integer Sequences*, 26. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2308.04567>.
- Arslan, H. (2021). Gaussian Pell and Gaussian Pell-Lucas quaternions, *Filomat*, 35 (5), 1609-1617. <http://doi.org/10.2298/FIL2105609A>.
- Aşcı, M. & Gürel, E. (2013). Gaussian Jacobsthal and Gaussian Jacobsthal Lucas polynomials, *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 19 (1), 25-36.
- Benjamin, A. T. & Walton, D. (2009). Counting on Chebyshev polynomials. *Mathematics Magazine*, 82 (2), 117-126. <http://doi.org/10.4169/193009809x468931>.
- Çakmak, M. & Uslu, K. (2019). A generalization of Chebyshev polynomials with well-known kinds and transition relations, *Acta Universitatis Apulensis*, 57, 19-30. <http://doi.org/10.17114/j.aua.2019.57.02>.
- Duzcu, M. (2022). *Gauss Pell kuaternion polinomları üzerine* (Yayın No.778641), [Yüksek Lisans Tezi, Aksaray Üniversitesi]. Ulusal Tez Merkezi.
- Ercan, E., Cetin, M. & Tuğlu, N. (2018). Incomplete q- Chebyshev polynomials. *Filomat*, 32 (10), 3599-3607. <https://doi.org/10.2298/FIL1810599E>.
- Frontczak, R. & Goy, T. (2021). Chebshev-Fibonacci polynomials relations using genarating functions, *Integers*, 21, 100A. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2103.08015>.
- Gürel, E. (2015). *k. mertebeden Gauss Fibonacci ve k. mertebeden Gauss Lucas indirgeme bağıntıları* (Yayın No. 438102), [Doktora Tezi, Pamukkale Üniversitesi]. Ulusal Tez Merkezi.
- Halıcı, S. & Öz, S. (2016). On some Gaussian Pell and Pell-Lucas numbers, *Ordu University Science and Technology Journal*, 6 (1), 8-18.
- Halıcı, S. & Öz, S. (2018). On Gaussian Pell polynomials and their some properties, *Palestine Journal of Mathematics*, 7 (1), 251-256.
- Horadam, A. F. (1961). A generalized Fibonacci sequence, *American Mathematical Monthy*, 68 (5), 455–459. <http://doi.org/10.1080/00029890.1961.11989696>.
- Horadam, A. F. (1963). Complex Fibonacci numbers and Fibonacci quaternions, *American Mathematical Monthy*, 70 (3), 289–291. <http://doi.org/10.2307/2313129>.

- Horadam, A. F. (1971). Pell identities, *The Fibonacci Quarterly*, 9 (3), 245–263.
<https://doi.org/10.1080/00150517.1971.12431004>.
- Horadam, A. F. (1996). Jacobsthal Representantation numbers , *The Fibonacci Quarterly*, 43 (1), 40-54. <http://doi.org/10.1080/00150517.1996.12429096>.
- Karaaslan, N. (2019). *Gauss modified Pell sayıları üzerine* (Yayın No. 583438), [Yüksek Lisans Tezi, Aksaray Üniversitesi]. Ulusal Tez Merkezi.
- Kızılateş, C., Tuğlu, N. & Çekim, B. (2019). On the (p,q) Chebyshev polynomials and related polynomials, *Mathematics*, 7(2), 136. <http://doi.org/10.3390/math7020136>.
- Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas numbers with applications*. John Wiley & Sons.
- Koshy, T. (2014). *Pell and Pell-Lucas number with applications*. Springer New York.
<http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4614-8489-9>.
- Koshy, T. (2019). *Fibonacci and Lucas numbers with applications* (Vol.2) John Wiley & Sons.
- Mason, J.C. & Handscomb, D.C. (2002). *Chebyshev polynomials*, CRC: Champman and Hall. <https://doi.org/10.1201/9781420036114>.
- Özkan, G. (2012). *Gauss Pell sayıları* (Yayın No. 375055), [Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi]. Ulusal Tez Merkezi.
- Özkan, E. & Taştan, M. (2020). On Gauss Fibonacci polynomials, Gauss Lucas polynomials and their applications, *Communications in Algebra*, 48 (3), 952-960.
<http://dx.doi.org/10.1080/00927872.2019.1670193>.
- Stakhov, A. & Rozin, B. (2006). Theory of Binet formulas for Fibonacci and Lucas p-Numbers, *Chaos, Solitons & Fractals*, 27 (5), 1162-1177.
<http://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.04.106>.
- Rivlin, T.J. (1990). *Chebyshev polynomials: From approximation theory to algebro and number theory*, New York: John Wiley and Sons.
<https://doi.org/10.1112/blms/23.3.311>.
- Taş, S. (2019). A new family of k–Gaussian Fibonacci numbers, *BAUN Fen Bilimleri Enstitü Dergisi*, 21 (1), 184-189.
- Taşçı, D. (2021). On The Gaussian Mersenne Numbers, *Journal of Science and Arts*, 4 (57), 1021-1028. <http://doi.org/10.46939/J.Sci.arts-21.4-a13>.

- Toy, D. (2022). *Genelleştirilmiş Gaussian Fibonacci sayılarının ağırlıklı toplamaları ve özellikleri* (Yayın No. 746787), [Yüksek Lisans Tezi, Kocaeli Üniversitesi]. Ulusal Tez Merkezi.
- Turgut, H. (2023). *Chebysev polinomlarının özellikleri üzerine* (Yayın No. 791131), [Yüksek Lisans Tezi, Yozgat Bozok Üniversitesi]. Ulusal Tez Merkezi.
- Yağmur, T. (2023). On Quaternion-Gaussian Fibonacci polynomials, *Miskolc Mathematical Notes*, 24 (1), 505 – 513. <http://dx.doi.org/10.18514/MMN.2023.3754>.
- Yang, J. & Zhang, Z. (2018). Same identities of the generalized Fibonacci and Lucas sequences, *Applied Mathematics and Computations*, 339 (C), 451-458. <http://doi.org/10.1016/j.amc.2018.07.054>.
- Zhang, W.P. (2002). On Chebyshev polynomials and Fibonacci numbers, *Fibonacci Quarterly*, 40. 424-4



**T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**