



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

GAUSS MODIFIED PELL SAYILARI ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nusret KARAASLAN

DANIŞMAN

Dr. Öğr. Üyesi Tülay YAĞMUR

AKSARAY, 2019



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

GAUSS MODIFIED PELL SAYILARI ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nusret KARAASLAN

DANIŞMAN

Dr. Öğr. Üyesi Tülay YAĞMUR

AKSARAY, 2019

Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 172342401 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi, Nusret KARAASLAN tarafından hazırlanan GAUSS MODIFIED PELL SAYILARI ÜZERİNE adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ / ~~OY ÇOKLUĞU~~ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Tülay YAĞMUR
Aksaray Üniversitesi



Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/~~onaylamıyorum~~.

Üye: Doç. Dr. Mustafa BAHŞİ
Aksaray Üniversitesi



Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/~~onaylamıyorum~~.

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Mehmet AKİF İNCE
Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi



Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/~~onaylamıyorum~~.

Tez Savunma Tarihi: 27/06/2019

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Mehmet Ali HINIS
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmamda kullandığım verilerin orijinallliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.



Nusret KARAASLAN

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın yürütülmesinde, değerli bilgilerini ve zamanını benden esirgemeyerek her fırsatta çalışmam ile yakından ilgilenen, eleştirileri ile bana yol gösteren ve gelecekteki meslek hayatımda da bana verdiği değerli bilgilerden faydalanacağımı düşündüğüm, kıymetli hocam Dr. Öğr. Üyesi Tülay YAĞMUR'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışma süresince tüm zorlukları benimle göğüsleyen ve hayatımın her evresinde bana destek olan değerli aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Nusret KARAASLAN
AKSARAY, 2019

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
ÇİZELGELER DİZİNİ	v
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER VE LİTERATÜR ÇALIŞMASI	3
2.1 Rekürans (İndirgeme) Bağlıntıları	3
2.2 Bazı Sayı Dizileri	4
2.3 Bazı Gauss Sayı Dizileri	9
3. GAUSS MODIFIED PELL SAYI DİZİSİ	14
4. GAUSS MODIFIED PELL POLİNOM DİZİSİ	23
5. (s, t) -MODIFIED PELL DİZİSİ VE MATRİS GÖSTERİMİ	32
5.1 (s, t) -Modified Pell Dizisi	32
5.2 (s, t) -Modified Pell Matris Dizisi	36
6. GAUSS (s, t) -MODIFIED PELL DİZİSİ VE MATRİS GÖSTERİMİ	47
6.1 Gauss (s, t) -Modified Pell Dizisi	47
6.2 Gauss (s, t) -Modified Pell Matris Dizisi	53
7. SONUÇ VE ÖNERİLER	63
KAYNAKLAR	64
ÖZGEÇMİŞ	67

YÜKSEK LİSANS TEZİ
GAUSS MODIFIED PELL SAYILARI ÜZERİNE

Nusret KARAASLAN

Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Tülay YAĞMUR

ÖZET

Özel sayı dizileri ve bu dizilerin genelleştirilmeleri birçok yazar tarafından incelenmiştir. Bu tezin amacı Gauss modified Pell sayı dizisini tanımlamak ve birtakım özelliklerini belirlemektir. Ayrıca bu tanımlı kullanarak Gauss modified Pell polinom dizisini ve Gauss (s, t) -modified Pell dizisini tanımlayarak, özelliklerini incelemek amaçlanmaktadır.

Bu tez yedi bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, Fibonacci sayı dizisi başta olmak üzere bazı özel sayı dizilerinin tarihçesinden ve günlük hayattaki kullanım alanlarından bahsedildi. İkinci bölümde, çalışmamızda ihtiyaç duyulan temel tanım ve teoremler ifade edildi. Üçüncü bölümde, Gauss modified Pell dizisi tanımlandı ve bazı kombinatoriyal özellikleri incelendi. Dördüncü bölümde, Gauss modified Pell polinom dizisi tanımlanarak bazı özellikleri ele alındı. Beşinci bölümde, ilk olarak modified Pell dizisinin bir genelleştirilmesi olan (s, t) -modified Pell dizisi tanımlandı. Daha sonra (s, t) -modified Pell dizisinin elemanlarından oluşan (s, t) -modified Pell matris dizisi tanımlandı. Bu dizilere ait bazı kombinatoriyal özellikler incelendi. Altıncı bölümde, Gauss modified Pell dizisinin bir genelleştirilmesi olan Gauss (s, t) -modified Pell dizisi tanımlandı. Sonra Gauss (s, t) -modified Pell dizisinin elemanlarından oluşan Gauss (s, t) -modified Pell matris dizisi tanımlandı. Bu dizilere ait bazı özellikler ele alındı. Son bölümde, tezde elde edilen birtakım sonuçlara ve bazı önerilere yer verildi.

Anahtar Kelimeler: Gauss modified Pell sayı dizisi, Gauss modified Pell polinom dizisi, Gauss (s, t) -modified Pell dizisi, Gauss (s, t) -modified Pell matris dizisi.

Haziran, 2019; 67 sayfa

M.Sc. THESIS

ON THE GAUSSIAN MODIFIED PELL NUMBERS

Nusret KARAASLAN

Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Tülay YAĞMUR

ABSTRACT

Special number sequences and their generalizations have been studied by many authors. The aim of this thesis is to define Gaussian modified Pell number sequence and to determine some properties of this sequence. Also, by using this definition, it is aimed to define Gaussian modified Pell polynomial sequence and Gaussian (s, t) -modified Pell sequence and to examine some properties of these sequences.

This thesis consists of seven chapters. In the first chapter, the history of some special number sequences, especially Fibonacci number sequence, and usage of these number sequences in daily life are mentioned. In the second chapter, some basic concept and definitions needed in the further chapters are given. In the third chapter, the Gaussian modified Pell sequence is defined and some combinatorial properties of this sequence are examined. In the fourth chapter, the Gaussian modified Pell polynomial sequence is defined and some of its properties are discussed. In the fifth chapter, (s, t) -modified Pell sequence which is a generalization of the modified Pell sequence is firstly defined. Then, (s, t) -modified Pell matrix sequence whose components consist of the modified Pell numbers is defined. Some combinatorial properties of these sequences are investigated. In the sixth chapter, Gaussian (s, t) -modified Pell sequence which is a generalization of the Gaussian modified Pell sequence is firstly defined. Then, Gaussian (s, t) -modified Pell matrix sequence whose components consist of the Gaussian modified Pell numbers is defined. Some combinatorial properties of these sequences are discussed. In the last chapter, the main results obtained from the thesis and some proposals are discussed.

Keywords: Gaussian modified Pell number sequence, Gaussian modified Pell polynomial sequence, Gaussian (s, t) -modified Pell sequence, Gaussian (s, t) -modified Pell matrix sequence.

June, 2019; 67 pages

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1. Gq_n dizisinin bazı elemanları.	14
Çizelge 4.1. $Gq_n(x)$ dizisinin bazı elemanları.....	24
Çizelge 5.1. $q_n(s, t)$ dizisinin bazı elemanları.	33
Çizelge 6.1. $Gq_n(s, t)$ dizisinin bazı elemanları.....	48



SİMGELER VE KISALTMALAR

F_n	n . Fibonacci Sayısı
$F_n(s, t)$	n . (s, t) Fibonacci Sayısı
$F_n(x)$	n . Fibonacci Polinomu
GF_n	n . Gauss Fibonacci Sayısı
$GF_n(s, t)$	n . Gauss (s, t) -Fibonacci Sayısı
GL_n	n . Gauss Lucas Sayısı
$GL_n(s, t)$	n . Gauss (s, t) -Lucas Sayısı
GP_n	n . Gauss Pell Sayısı
$GP_n(s, t)$	n . Gauss (s, t) -Pell Sayısı
$GP_n(x)$	n . Gauss Pell Polinomu
GQ_n	n . Gauss Pell-Lucas Sayısı
$GQ_n(s, t)$	n . Gauss (s, t) -Pell-Lucas Sayısı
Gq_n	n . Gauss modified Pell Sayısı
$Gq_n(s, t)$	n . Gauss (s, t) -modified Pell Sayısı
$Gq_n(x)$	n . Gauss modified Pell Polinomu
L_n	n . Lucas Sayısı
$L_n(s, t)$	n . (s, t) -Lucas Sayısı
$L_n(x)$	n . Lucas Polinomu
$MF_n(s, t)$	n . (s, t) -Fibonacci Matrisi
$MGF_n(s, t)$	n . Gauss (s, t) -Fibonacci Matrisi
$MGL_n(s, t)$	n . Gauss (s, t) -Lucas Matrisi
$MGP_n(s, t)$	n . Gauss (s, t) -Pell Matrisi
$MGQ_n(s, t)$	n . Gauss (s, t) -Pell-Lucas Matrisi
$MGq_n(s, t)$	n . Gauss (s, t) -modified Pell Matrisi
$ML_n(s, t)$	n . (s, t) -Lucas Matrisi
$MP_n(s, t)$	n . (s, t) -Pell Matrisi
$MQ_n(s, t)$	n . (s, t) -Pell-Lucas Matrisi
$Mq_n(s, t)$	n . (s, t) -modified Pell Matrisi
P_n	n . Pell Sayısı
$P_n(s, t)$	n . (s, t) -Pell Sayısı
$P_n(x)$	n . Pell Polinomu
Q_n	n . Pell-Lucas Sayısı
$Q_n(s, t)$	n . (s, t) -Pell-Lucas Sayısı
$Q_n(x)$	n . Pell-Lucas Polinomu
q_n	n . modified Pell Sayısı
$q_n(s, t)$	n . (s, t) -modified Pell Sayısı
$q_n(x)$	n . modified Pell Polinomu

1. GİRİŞ

Matematik bir binaya benzetilecek olursa bu binanın temelini sayılar oluşturmaktadır. Matematiğin temelini oluşturmuş bu sayıların tarihi beşeriyetin geçmişi kadar eskidir. İlk çağ insanları rakam ve sayıları kullanma gereksinimi duymuştur. Bu amaçla bir ağaç dalına çentikler yapmışlar, yaşamını sürdürdükleri mağara duvarlarına çizikler çizmişlerdir. Bunların yanı sıra çakıl taşlarını kullanmışlar veya ipe düğüm atmışlardır. Zaman geçtikçe tabiattaki hadiseler gözlenerek yeni sayı sistemleri tanımlanmıştır. Daha sonra birçok bilim dalının ve matematiğin konuları ile tanımlanan sayı dizileri ilişkilendirilerek tanımlanmış olan bu sayı sistemlerinin daha farklı birçok özelliklerinin ortaya çıkarılması sağlanmıştır.

Dizi kavramı, tanım kümesi doğal sayılar olan fonksiyonlardır. Bu kavram daha çok bilgisayar ve matematik alanlarında kullanılmaktadır. Sayı dizileri başta matematik olmak üzere fizik, bilgisayar ve güzel sanatlar gibi birçok bilim dalındaki çağdaş araştırmalarda karşımıza çıkmaktadır. Sayı dizisi kavramı ise tabiattaki birtakım olayların gözlenip matematiksel bir paradigma olarak ifade edilmesiyle ortaya çıkmıştır. Örnek verilecek olursa, akıllara ilk gelen ve birçok bilim dalında karşımıza çıkan Fibonacci sayıları, 12. ve 13. yüzyıllar arasında yaşamış olan İtalyan matematikçi Leonardo Fibonacci tarafından tavşanların üremesi ile alakalı bir problemin üzerine tanımlanmıştır. Bu problem sayesinde literatüre Fibonacci sayıları olarak girecek bir sayı dizisi elde etmiştir. Bu dizi 0 ve 1 sayıları ile başlayacak ve ikinci terim itibari ile önceki iki terimin toplamına eşit olacak şekilde düşünülmüştür. Buna karşılık Fibonacci sayıları tabiattaki birçok doğa olayında görülmektedir: Bazı çiçeklerin yaprak sayısı, taç yaprakların dizilimi, bulutların oluşumu vs.

Birkaç yüzyıl sonra, Kepler ardışık iki Fibonacci sayısı arasındaki oranı inceleyerek literatüre “Altın Oran” olarak geçecek bir kavram geliştirmiştir. Altın Oran, Yunan alfabesinin yirmi birinci harfi olan fi (ϕ) sayısı olarakta bilinir. Altın Oran’ın sayısal değeri 1,618 dir.

Günümüzde Fibonacci sayı dizisi ve bu sayı dizisinin türevleri (Lucas, Pell, Jacobsthal vs.) matematiğin yanı sıra birçok alanda kendilerine uygulama alanları bulmuşlardır. Bunun neticesinde bu sayı dizileri, bunların özellikleri ve genelleştirmeleri üzerine de birçok çalışma yapılmıştır.

Bu çalışmanın amacı Gauss modified Pell sayı dizisi, Gauss modified Pell polinom dizisi ve Gauss (s, t) -modified Pell matris dizisi tanımlarını vererek bunlara ilişkin bazı kombinatorial özellikleri incelemektir.

Bunun için ilk olarak Gauss modified Pell sayılarını veren rekürans bağıntısını tanımladık. Daha sonra, bu sayıların üreteç fonksiyonlarını, toplam formüllerini ve n . Gauss modified Pell sayısını veren Binet formülünü elde ettik.

Daha önce birçok sayı dizisine ait polinom dizileri elde edilmişti. Yine bu çalışmada, Gauss modified Pell polinom dizisini tanımlayarak bu dizinin de birçok kombinatorial özelliklerini inceledik. Burada belirtmeliyiz ki, tanımladığımız bu polinom dizisinin özel hali Gauss modified Pell sayı dizisini vermektedir.

Diğer taraftan, sayı dizilerine ait matris temsilleri de yine birçok yazar tarafından çalışılmıştır. Biz bu çalışmada ilk olarak (s, t) -modified Pell sayı dizisini tanımlayıp bundan faydalanarak Gauss (s, t) -modified Pell sayılarını tanımladık. Üstelik Gauss (s, t) -modified Pell matris dizisini tanımlayarak birtakım özelliklerini inceledik.

Belirtelim ki bu çalışmada verilen Gauss modified Pell sayı dizisi ve Gauss modified Pell polinom dizisi kavramları ile bu dizilere ait birtakım özellikler 2018 de “Aksaray University Journal of Science and Engineering” isimli dergide yayımlanan makale ile literatüre girmiştir.

2. GENEL BİLGİLER VE LİTERATÜR ÇALIŞMASI

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde yararlanılacak olan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

2.1 Rekürans (İndirgeme) Bağlılıları

Tanım 2.1.1 $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ sonsuz bir dizi, $k \in \mathbb{N}$ bir sabit ve $f: \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^k \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Başlangıç değeri $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k-1}$ ve $\forall n \geq k$ için;

$$a_n = f(n, a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, \dots, a_{n-k}) \quad (2.1)$$

fonksiyonuna k . mertebeden indirgeme bağıntısı denir. Dizinin tüm elemanları (2.1) denklemi ve $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k-1}$ değeri ile belirlenir [1].

Tanım 2.1.2 (a_n) sonsuz bir dizi, $k \in \mathbb{N}$ sabit, $f_0, f_1, f_2, \dots, f_k$ $\mathbb{N}$ 'den $\mathbb{R}$ 'ye tanımlı fonksiyonlar ve $f_k(n) \neq 0$ olmak üzere, $\forall n \geq k$ için;

$$a_n = f_1(n)a_{n-1} + f_2(n)a_{n-2} + \dots + f_k(n)a_{n-k} + f_0(n) \quad (2.2)$$

biçimindeki indirgeme bağıntısına k . mertebeden lineer indirgeme bağıntısı denir.

Eğer (2.2)'de ki $f_1, f_2, \dots, f_k$ fonksiyonları $f_i(n) = b_i$; ($1 \leq i \leq k$) biçiminde sabit fonksiyonlar ise

$$a_n = b_1 a_{n-1} + b_2 a_{n-2} + \dots + b_k a_{n-k} + f_0(n) \quad (2.3)$$

indirgeme bağıntısına sabit katsayılı indirgeme bağıntısı denir.

Eğer (2.2)'de ki $\forall n \in \mathbb{N}$ için, $f_0(n) = 0$ ise;

$$a_n = f_1(n)a_{n-1} + f_2(n)a_{n-2} + \dots + f_k(n)a_{n-k} \quad (2.4)$$

indirgeme bağıntısına homojen indirgeme bağıntısı denir [1].

Teorem 2.1.1 $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ indirgeme bağıntısı olsun. Bu durumda indirgeme bağıntısının karakteristik denklemi;

$$x^2 - c_1 x - c_2 = 0 \quad (2.5)$$

ve bu denklemin kökleri α ve β olmak üzere genel çözümü

$$a_n = c\alpha^n + d\beta^n \quad (2.6)$$

dir. Burada α ve β sabit sayılardır [1].

Tanım 2.1.3 $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ bir reel sayı dizisi olsun. Bu takdirde

$$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (2.7)$$

ifadesine $\{a_n\}$ dizisinin üreteç fonksiyonu denir [1].

2.2 Bazı Sayı Dizileri

Bu kısımda, geçmişten günümüze matematikçiler tarafından çalışılmış ve literatürde önemli bir yer tutan, bazıları daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan sabit katsayılı ikinci dereceden rekürans bağıntısına sahip birçok sayı dizisinin tanımları ve bu sayı dizilerinin bazı temel özellikleri verilmiştir. Bu çalışmalardan bazıları için referans olarak [2-11] önerilir. Ayrıca bu sayı dizilerine ait polinom dizileri elde edilmişti. Bu diziler için de [12-16] referans olarak verilebilir. Diğer taraftan, sayı dizilerine ait genelleştirmeler ve matris temsilleri de birçok yazar tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmaların bazıları için ise referans olarak [11,17-24] gösterilebilir.

Tanım 2.2.1 Fibonacci sayıları, başlangıç koşulları $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ olmak üzere, $n \geq 2$ için,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (2.8)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Burada F_n , n . Fibonacci sayısıdır [2,9].

Tanım 2.2.2 Lucas sayıları, başlangıç koşulları $L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ olmak üzere, $n \geq 2$ için,

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \quad (2.9)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Burada L_n , n . Lucas sayısıdır [2,9].

Tanım 2.2.3 Pell sayıları, başlangıç koşulları $P_0 = 0$ ve $P_1 = 1$ olmak üzere, $n \geq 2$ için,

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2} \quad (2.10)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Burada P_n , n . Pell sayısıdır [4].

Tanım 2.2.4 Pell-Lucas sayıları, başlangıç koşulları $Q_0 = 2$ ve $Q_1 = 2$ olmak üzere, $n \geq 2$ için,

$$Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2} \quad (2.11)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Burada Q_n , n . Pell-Lucas sayısıdır [4].

Tanım 2.2.5 Modified Pell sayıları, başlangıç koşulları $q_0 = 1$ ve $q_1 = 1$ olmak üzere, $n \geq 2$ için,

$$q_n = 2q_{n-1} + q_{n-2} \quad (2.12)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Burada q_n , n . modified Pell sayısıdır [5].

Şimdi ise yukarıdaki tanımlarını verdiğimiz sayı dizilerinin Binet formüllerini veren teoremler ispatsız olarak ifade edilmektedir.

Teorem 2.2.1 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ve $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ rekürans bağıntılarının karakteristik denklemi $x^2 - x - 1 = 0$ ve bu denklemin kökleri

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

olmak üzere, n . Fibonacci sayısının Binet formülü

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad (2.13)$$

ve n . Lucas sayısının Binet formülü

$$L_n = \alpha^n + \beta^n \quad (2.14)$$

ile verilir [2,9].

Teorem 2.2.2 $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$, $Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}$ ve $q_n = 2q_{n-1} + q_{n-2}$ rekürans bağıntılarının karakteristik denklemi $x^2 - 2x - 1 = 0$ ve bu denklemin kökleri

$$\alpha = 1 + \sqrt{2}, \quad \beta = 1 - \sqrt{2}$$

olmak üzere, n . Pell sayısının Binet formülü

$$P_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \quad (2.15)$$

n . Pell-Lucas sayısının Binet formülü

$$Q_n = \alpha^n + \beta^n \quad (2.16)$$

ve n . modified Pell sayısının Binet formülü

$$q_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha + \beta} \quad (2.17)$$

ile verilir [11].

Sırada Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas ve modified Pell sayı dizilerinin üreteç fonksiyonları aşağıda ispatsız olarak verilmektedir.

Teorem 2.2.3 Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin üreteç fonksiyonları sırasıyla

$$f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}, \quad (2.18)$$

$$g(x) = \frac{2-x}{1-x-x^2} \quad (2.19)$$

dir.

Teorem 2.2.4 Pell, Pell-Lucas ve modified Pell sayı dizilerinin üreteç fonksiyonları sırasıyla

$$h(x) = \frac{x}{1-2x-x^2}, \quad (2.20)$$

$$m(x) = \frac{2-2x}{1-2x-x^2}, \quad (2.21)$$

$$n(x) = \frac{1-x}{1-2x-x^2} \quad (2.22)$$

dir.

Şimdi yukarıda tanımları verilen sayı dizilerine ilişkin polinom dizilerinin tanımları verilmektedir.

Tanım 2.2.6 Başlangıç koşulları $F_0(x) = 0$ ve $F_1(x) = 1$ olmak üzere, $n \geq 2$ için, n . Fibonacci polinomu $F_n(x)$

$$F_n(x) = xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x) \quad (2.23)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır [12].

Tanım 2.2.7 Başlangıç koşulları $L_0(x) = 2$ ve $L_1(x) = x$ olmak üzere, $n \geq 2$ için, n . Lucas polinomu $L_n(x)$

$$L_n(x) = xL_{n-1}(x) + L_{n-2}(x) \quad (2.24)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır [12].

Tanım 2.2.8 Başlangıç koşulları $P_0(x) = 0$ ve $P_1(x) = 1$ olmak üzere, $n \geq 2$ için, n . Pell polinomu $P_n(x)$

$$P_n(x) = 2xP_{n-1}(x) + P_{n-2}(x) \quad (2.25)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır [14].

Tanım 2.2.9 Başlangıç koşulları $Q_0(x) = 2$ ve $Q_1(x) = 2x$ olmak üzere, $n \geq 2$ için, n . Pell-Lucas polinomu $Q_n(x)$

$$Q_n(x) = 2xQ_{n-1}(x) + Q_{n-2}(x) \quad (2.26)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır [14].

Üstelik, Horadam polinomlarının [15] özel bir hali olarak, başlangıç koşulları $q_0(x) = 1$ ve $q_1(x) = x$ olmak üzere, $n \geq 2$ için, n . modified Pell polinomu $q_n(x)$

$$q_n(x) = 2xq_{n-1}(x) + q_{n-2}(x) \quad (2.27)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır.

Şimdi, ilk olarak (s, t) -Fibonacci ve (s, t) -Lucas, (s, t) -Pell sayı dizilerinin tanımları verilmektedir. Daha sonra ise bu sayı dizilerine ilişkin matris dizilerinin tanımları ifade edilmektedir.

Tanım 2.2.10 (s, t) -Fibonacci sayıları, başlangıç koşulları $F_0(s, t) = 0$ ve $F_1(s, t) = 1$ olmak üzere, $n \geq 2$ için,

$$F_n(s, t) = sF_{n-1}(s, t) + tF_{n-2}(s, t) \quad (2.28)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Burada $F_n(s, t)$, n . (s, t) -Fibonacci sayısıdır [18].

Tanım 2.2.11 (s, t) -Lucas sayıları, başlangıç koşulları $L_0(s, t) = 2$ ve $L_1(s, t) = s$ olmak üzere, $n \geq 2$ için,

$$L_n(s, t) = sL_{n-1}(s, t) + tL_{n-2}(s, t) \quad (2.29)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Burada $L_n(s, t)$, n . (s, t) -Lucas sayısıdır [17].

Tanım 2.2.12 (s, t) -Pell sayıları, $s^2 + t > 0$ olacak şekildeki $s > 0$ ve $t \neq 0$ reel sayıları için, başlangıç koşulları $P_0(s, t) = 0$, $P_1(s, t) = 1$ ve $n \geq 2$ olmak üzere,

$$P_n(s, t) = 2sP_{n-1}(s, t) + tP_{n-2}(s, t) \quad (2.30)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Burada $P_n(s, t)$, n . (s, t) -Pell sayısıdır [20].

Tanım 2.2.13 (s, t) -Pell-Lucas sayıları, $s^2 + t > 0$ olacak şekildeki $s > 0$ ve $t \neq 0$ reel sayıları için, başlangıç koşulları $Q_0(s, t) = 2$, $Q_1(s, t) = 2s$ ve $n \geq 2$ olmak üzere,

$$Q_n(s, t) = 2sQ_{n-1}(s, t) + tQ_{n-2}(s, t) \quad (2.31)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Burada $Q_n(s, t)$, n . (s, t) -Pell-Lucas sayısıdır [20].

Tanım 2.2.14 $s^2 + 4t > 0$ olacak şekildeki $s > 0$ ve $t \neq 0$ tam sayıları için, $n \geq 2$ olmak üzere,

$$MF_0(s, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad MF_1(s, t) = \begin{pmatrix} s & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix}$$

başlangıç koşulları ve

$$MF_n(s, t) = sMF_{n-1}(s, t) + tMF_{n-2}(s, t) \quad (2.32)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{MF_n(s, t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ matris dizisine (s, t) -Fibonacci matris dizisi denir [18].

Tanım 2.2.15 $s^2 + 4t > 0$ olacak şekildeki $s > 0$ ve $t \neq 0$ tam sayıları için, $n \geq 2$ olmak üzere,

$$ML_0(s, t) = \begin{pmatrix} s & 2 \\ 2t & -s \end{pmatrix}, \quad ML_1(s, t) = \begin{pmatrix} s^2 + 2t & s \\ st & 2t \end{pmatrix}$$

başlangıç koşulları ve

$$ML_n(s, t) = sML_{n-1}(s, t) + tML_{n-2}(s, t) \quad (2.33)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{ML_n(s, t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ matris dizisine (s, t) -Lucas matris dizisi denir [17].

Tanım 2.2.16 $s^2 + t > 0$ olacak şekildeki $s > 0$ ve $t \neq 0$ reel sayıları için, $n \geq 2$ olmak üzere,

$$MP_0(s, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad MP_1(s, t) = \begin{pmatrix} 2s & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix}$$

başlangıç koşulları ve

$$MP_n(s, t) = 2sMP_{n-1}(s, t) + tMP_{n-2}(s, t) \quad (2.34)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{MP_n(s, t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ matris dizisine (s, t) -Pell matris dizisi denir [20].

Tanım 2.2.17 $s^2 + t > 0$ olacak şekildeki $s > 0$ ve $t \neq 0$ reel sayıları için, $n \geq 2$ olmak üzere,

$$MQ_0(s, t) = \begin{pmatrix} 2s & 2 \\ 2t & -2s \end{pmatrix}, \quad MQ_1(s, t) = \begin{pmatrix} 4s^2 + 2t & 2s \\ 2st & 2t \end{pmatrix}$$

başlangıç koşulları ve

$$MQ_n(s, t) = 2sMQ_{n-1}(s, t) + tMQ_{n-2}(s, t) \quad (2.35)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{MQ_n(s, t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ matris dizisine (s, t) -Pell-Lucas matris dizisi denir [20].

2.3 Bazı Gauss Sayı Dizileri

Bu kısımda, sayı dizilerinin genelleştirilmesi olan Gauss sayı dizilerinden bahsedilmektedir. Üstelik, bu sayı dizilerine ait birtakım özellikler ifade edilmektedir. Bu diziler için referans olarak [25-35] verilebilir. Ayrıca bu dizilere ait bazı matris temsilleri için [36,37] referans olarak gösterilebilir.

Tanım 2.3.1 Gauss Fibonacci sayıları, başlangıç koşulları $GF_0 = i$ ve $GF_1 = 1$ olmak üzere, $n \geq 2$ için,

$$GF_n = GF_{n-1} + GF_{n-2} \quad (2.36)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Burada GF_n , n . Gauss Fibonacci sayısıdır.

Ayrıca n . Fibonacci sayısı F_n olmak üzere,

$$GF_n = F_n + iF_{n-1} \quad (2.37)$$

olduğu açıktır [30,31].

Tanım 2.3.2 Gauss Lucas sayıları, başlangıç koşulları $GL_0 = 2 - i$ ve $GL_1 = 1 + 2i$ olmak üzere, $n \geq 2$ için,

$$GL_n = GL_{n-1} + GL_{n-2} \quad (2.38)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Burada GL_n , n . Gauss Lucas sayısıdır.

Ayrıca n . Lucas sayısı L_n olmak üzere,

$$GL_n = L_n + iL_{n-1} \quad (2.39)$$

olduğu açıktır [31].

Tanım 2.3.3 Gauss Pell sayıları başlangıç koşulları $GP_0 = i$ ve $GP_1 = 1$ olmak üzere, $n \geq 2$ için,

$$GP_n = 2GP_{n-1} + GP_{n-2} \quad (2.40)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Burada GP_n , n . Gauss Pell sayısıdır.

Ayrıca n . Pell sayısı P_n olmak üzere,

$$GP_n = P_n + iP_{n-1} \quad (2.41)$$

olduğu açıktır [29].

Tanım 2.3.4 Gauss Pell-Lucas sayıları, başlangıç koşulları $GQ_0 = 2 - 2i$ ve $GQ_1 = 2 + 2i$ olmak üzere, $n \geq 2$ için,

$$GQ_n = 2GQ_{n-1} + GQ_{n-2} \quad (2.42)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Burada GQ_n , n . Gauss Pell-Lucas sayısıdır.

Ayrıca n . Pell-Lucas sayısı Q_n olmak üzere,

$$GQ_n = Q_n + iQ_{n-1} \quad (2.43)$$

olduğu açıktır [29].

Şimdi ise yukarıdaki tanımlarını verdiğimiz Gauss sayı dizilerinin Binet formüllerini veren teoremler ispatsız olarak ifade edilmektedir.

Teorem 2.3.1 Gauss Fibonacci sayılarının Binet formülü

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad c = \frac{1 - \beta i}{\alpha - \beta}, \quad d = \frac{-1 + \alpha i}{\alpha - \beta}$$

olmak üzere,

$$GF_n = c\alpha^n + d\beta^n \quad (2.44)$$

ile verilir.

Teorem 2.3.2 Gauss Lucas sayılarının Binet formülü

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},$$

$$c = \frac{(1 - 2\beta) + i(\beta + 2)}{\alpha - \beta}, \quad d = \frac{(2\alpha - 1) - i(\alpha + 2)}{\alpha - \beta}$$

olmak üzere,

$$GL_n = c\alpha^n + d\beta^n \quad (2.45)$$

ile verilir.

Teorem 2.3.3 n . Gauss Pell sayısının Binet formülü

$$GP_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} + i \frac{\alpha\beta^n - \beta\alpha^n}{\alpha - \beta}, \quad (2.46)$$

n . Gauss Pell-Lucas sayısının Binet formülü

$$GQ_n = (\alpha^n + \beta^n) - i(\alpha\beta^n + \beta\alpha^n) \quad (2.47)$$

dir.

Burada $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ ve $\beta = 1 - \sqrt{2}$, $x^2 - 2x - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleridir [29].

Gauss Fibonacci, Lucas, Pell ve Pell-Lucas sayı dizilerinin üreteç fonksiyonları aşağıda ispatsız olarak verilmektedir.

Teorem 2.3.4 Gauss Fibonacci ve Gauss Lucas sayı dizilerinin üreteç fonksiyonları sırasıyla

$$f(x) = \frac{x+(1-x)i}{1-x-x^2}, \quad (2.48)$$

$$g(x) = \frac{(2-i)-(1-3i)x}{1-x-x^2} \quad (2.49)$$

dir.

Teorem 2.3.5 Gauss Pell ve Gauss Pell-Lucas sayı dizilerinin üreteç fonksiyonları sırasıyla

$$f(x) = \frac{x+(1-2x)i}{1-2x-x^2}, \quad (2.50)$$

$$g(x) = \frac{(2-2x)+i(6x-2)}{1-2x-x^2} \quad (2.51)$$

dir [29].

Şimdi, ilk olarak Gauss (s, t) -Fibonacci ve Gauss (s, t) -Lucas, Gauss (s, t) -Pell sayılarının tanımları verilmektedir. Daha sonra ise bu sayı dizilerine ilişkin matris dizilerinin tanımları ifade edilmektedir.

Tanım 2.3.5 (s, t) -Gauss Fibonacci sayıları; $s^2 + 4t > 0$, $s, t \in \mathbb{R}$ ve başlangıç koşulları $GF_0(s, t) = i$ ve $GF_1(s, t) = 1$ olmak üzere, $n \geq 2$ için,

$$GF_n(s, t) = sGF_{n-1}(s, t) + tGF_{n-2}(s, t) \quad (2.52)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Burada $GF_n(s, t)$, n . (s, t) -Gauss Fibonacci sayısıdır [37].

Tanım 2.3.6 (s, t) -Gauss Lucas sayıları; $s^2 + 4t > 0$, $s, t \in \mathbb{R}$ ve başlangıç koşulları $GL_0(s, t) = 2 - is$ ve $GL_1(s, t) = s + 2it$ olmak üzere, $n \geq 2$ için,

$$GL_n(s, t) = sGL_{n-1}(s, t) + tGL_{n-2}(s, t) \quad (2.53)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Burada $GL_n(s, t)$, n . (s, t) -Gauss Lucas sayısıdır [37].

Tanım 2.3.7 $s^2 + 4t > 0$ olacak şekildeki $s > 0$ ve $t \neq 0$ tam sayıları için, $n \geq 2$ olmak üzere,

$$MGF_0(s, t) = \begin{pmatrix} 1 & i \\ it & 1 - is \end{pmatrix}, \quad MGF_1(s, t) = \begin{pmatrix} s + it & 1 \\ t & it \end{pmatrix}$$

başlangıç koşulları ve

$$MGF_n(s, t) = sMGF_{n-1}(s, t) + tMGF_{n-2}(s, t) \quad (2.54)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{MGF_n(s, t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ matris dizisine (s, t) -Gauss Fibonacci matris dizisi denir [37].

Tanım 2.3.8 $s^2 + 4t > 0$ olacak şekildeki $s > 0$ ve $t \neq 0$ tam sayıları için, $n \geq 2$ olmak üzere,

$$MGL_0(s, t) = \begin{pmatrix} s + 2it & 2 - is \\ 2t - ist & 2it + is^2 - s \end{pmatrix},$$

$$MGL_1(s, t) = \begin{pmatrix} s^2 + 2t + ist & s + 2it \\ st + 2it^2 & 2t - ist \end{pmatrix}$$

başlangıç koşulları ve

$$MGL_n(s, t) = sMGL_{n-1}(s, t) + tMGL_{n-2}(s, t) \quad (2.55)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{MGL_n(s, t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ matris dizisine (s, t) -Gauss Lucas matris dizisi denir [37].

Tanım 2.3.9 Gauss (s, t) -Pell sayıları, $s^2 + t > 0$ olacak şekildeki $s > 0$ ve $t \neq 0$ reel sayıları ve başlangıç koşulları $GP_0(s, t) = i$ ve $GP_1(s, t) = 1$ olmak üzere, $n \geq 2$ için,

$$GP_n(s, t) = 2sGP_{n-1}(s, t) + tGP_{n-2}(s, t) \quad (2.56)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Burada $GP_n(s, t)$, n . Gauss (s, t) -Pell sayısıdır [36].

Tanım 2.3.10 Gauss (s, t) -Pell-Lucas sayıları, $s^2 + t > 0$ olacak şekildeki $s > 0$ ve $t \neq 0$ reel sayıları ve başlangıç koşulları $GQ_0(s, t) = 2 - 2is$ ve $GQ_1(s, t) = 2s + 2it$ olmak üzere, $n \geq 2$ için,

$$GQ_n(s, t) = 2sGQ_{n-1}(s, t) + tGQ_{n-2}(s, t) \quad (2.57)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Burada $GQ_n(s, t)$ n . Gauss (s, t) -Pell-Lucas sayısıdır [36].

Tanım 2.3.11 $s^2 + t > 0$ olacak şekildeki $s > 0$ ve $t \neq 0$ tam sayıları için, $n \geq 2$ olmak üzere,

$$MGP_0(s, t) = \begin{pmatrix} 1 & i \\ it & 1 - 2is \end{pmatrix}, \quad MGP_1(s, t) = \begin{pmatrix} 2s + it & 1 \\ t & it \end{pmatrix}$$

başlangıç koşulları ve

$$MGP_n(s, t) = 2sMGP_{n-1}(s, t) + tMGP_{n-2}(s, t) \quad (2.58)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{MGP_n(s, t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ matris dizisine Gauss (s, t) -Pell matris dizisi denir [36].

Tanım 2.3.12 $s^2 + t > 0$ olacak şekildeki $s > 0$ ve $t \neq 0$ tam sayıları için, $n \geq 2$ olmak üzere,

$$MGQ_0(s, t) = \begin{pmatrix} 2s + 2it & 2 - 2is \\ 2t - 2ist & -2s + 4is^2 + 2it \end{pmatrix},$$

$$MGQ_1(s, t) = \begin{pmatrix} 4s^2 + 2t + 2ist & 2s + 2it \\ 2st + 2it^2 & 2t - 2ist \end{pmatrix}$$

başlangıç koşulları ve

$$MGQ_n(s, t) = 2sMGQ_{n-1}(s, t) + tMGQ_{n-2}(s, t) \quad (2.59)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{MGQ_n(s, t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ matris dizisine Gauss (s, t) -Pell-Lucas matris dizisi denir [36].

3. GAUSS MODIFIED PELL SAYI DİZİSİ

Bu bölümde ilk olarak Gauss modified Pell sayı dizisi tanımlanmıştır. Daha sonra bu dizinin üreteç fonksiyonu, Binet formülü ve bazı kısmi toplamaları verilmiştir. Ayrıca bu dizi ile ilişkili olan Catalan, Cassini ve d'Ocagne gibi bazı özdeşlikler elde edilmiştir. Son olarak, bu diziye ait tridiagonal matris tanımlanıp bu matrisin n . Gauss modified Pell sayısı ile olan ilişkisi incelenmiştir.

Aşağıda tanımını vereceğimiz Gauss modified Pell sayı dizisi ve bu sayı dizisine ait birçok özellik “Aksaray University Journal of Science and Engineering” isimli dergide yayımlanan bir makale [32] ile literatüre girmiştir. Ayrıca belirtilmelidir ki benzer konu daha sonra Catarino ve Campos [27] tarafından da çalışılmıştır.

Tanım 3.1 Gauss modified Pell sayı dizisi $\{Gq_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, başlangıç koşulları $Gq_0 = 1 - i$ ve $Gq_1 = 1 + i$ olmak üzere, $n \geq 2$ için,

$$Gq_n = 2Gq_{n-1} + Gq_{n-2} \quad (3.1)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır.

Ayrıca, n . modified Pell sayısı q_n olmak üzere,

$$Gq_n = q_n + iq_{n-1} \quad (3.2)$$

olduğu açıktır [32].

Gq_n dizisinin bazı elemanları aşağıdaki tabloda verilmiştir:

Çizelge 3.1. Gq_n dizisinin bazı elemanları.

n	Gq_n
0	$1 - i$
1	$1 + i$
2	$3 + i$
3	$7 + 3i$
4	$17 + 7i$
$\vdots$	$\vdots$

Şimdi, Gauss modified Pell sayıları için üreteç fonksiyonunu veren teoremi ifade ve ispat edeceğiz.

Teorem 3.1 Gauss modified Pell dizisinin üreteç fonksiyonu

$$G(x) = \frac{(1-x)+i(-1+3x)}{1-2x-x^2} \quad (3.3)$$

şeklindedir [32].

İspat : Gauss modified Pell dizisinin üreteç fonksiyonu $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Gq_n x^n$ olsun.

O halde, bu üreteç fonksiyonu

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Gq_n x^n = Gq_0 + Gq_1 x + Gq_2 x^2 + \dots + Gq_n x^n + \dots \quad (3.4)$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi, (3.4) eşitliğini sırasıyla $2x$ ve x^2 ile çarpalım. Buradan

$$2xG(x) = 2Gq_0 x + 2Gq_1 x^2 + 2Gq_2 x^3 + \dots + 2Gq_{n-1} x^n + \dots \quad (3.5)$$

ve

$$x^2 G(x) = Gq_0 x^2 + Gq_1 x^3 + Gq_2 x^4 + \dots + Gq_{n-2} x^n + \dots \quad (3.6)$$

elde edilir.

(3.5) eşitliği ile (3.6) eşitliğini taraf tarafa toplayıp, elde edilen sonucu (3.4) eşitliğinden çıkarırsak

$$G(x)(1 - 2x - x^2) = Gq_0 + (Gq_1 - 2Gq_0)x + (Gq_2 - 2Gq_1 - Gq_0)x^2 + \dots$$

elde edilir. $Gq_n = 2Gq_{n-1} + Gq_{n-2}$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$G(x)(1 - 2x - x^2) = Gq_0 + (Gq_1 - 2Gq_0)x \quad (3.7)$$

elde edilir. (3.7) eşitliğinde başlangıç koşulları yerine yazılarak gerekli işlemler yapıldığında

$$G(x) = \frac{(1-x)+i(-1+3x)}{1-2x-x^2} \quad (3.8)$$

elde edilir.

Sıradaki teorem n . Gauss modified Pell sayısını veren Binet formülünü vermektedir.

Teorem 3.2 n . Gauss modified Pell sayısının Binet formülü

$$Gq_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha + \beta} - i \left(\frac{\beta \alpha^n + \alpha \beta^n}{\alpha + \beta} \right) \quad (3.9)$$

eşitliği ile verilir. Burada $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ ve $\beta = 1 - \sqrt{2}$, $x^2 - 2x - 1 = 0$ denkleminin kökleridir [32].

İspat : Teorem 2.1.1'den Gauss modified Pell dizisinin genel çözümü

$$Gq_n = c\alpha^n + d\beta^n \quad (3.10)$$

şeklinde yazılabilir. Burada c ve d sabit sayılardır.

Şimdi, (3.10) eşitliği başlangıç koşullarına göre yazıldığında

$$Gq_0 = c + d = 1 - i \quad (3.11)$$

$$Gq_1 = c\alpha + d\beta = 1 + i \quad (3.12)$$

elde edilir. (3.11) ve (3.12) eşitliklerinden c ve d değerleri

$$c = \frac{1-\beta i}{2} \text{ ve } d = \frac{1-\alpha i}{2}$$

şeklinde bulunur. Bulunan c ve d değerleri (3.10) eşitliğinde yerine yazılırsa genel çözüm

$$Gq_n = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\beta}{2}\right)\alpha^n + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\alpha}{2}\right)\beta^n$$

olarak elde edilir. α ve β değerleri için $\alpha + \beta = 2$ olduğundan, elde edilen son eşitlik

$$Gq_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha + \beta} - i\left(\frac{\beta\alpha^n + \alpha\beta^n}{\alpha + \beta}\right) \quad (3.13)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Şimdi, Gauss modified Pell sayı dizisi ile ilişkili olan Catalan özdeşliğini veren teoremi ifade ve ispat edelim.

Teorem 3.3 n ve r iki pozitif tam sayı olsun. Bu takdirde

$$Gq_{n+r}Gq_{n-r} - Gq_n^2 = 2(-1)^{n+1}(1-i)\left[1 + \frac{(-1)^{r-1}(\alpha^r + \beta^r)^2}{4}\right] \quad (3.14)$$

dır [32].

İspat : Teorem 3.2 ile verilen Gauss modified Pell dizisinin Binet formülü göz önüne alınırsa

$$Gq_{n+r}Gq_{n-r} - Gq_n^2 = \left[\frac{\alpha^{n+r} + \beta^{n+r}}{\alpha + \beta} - i\left(\frac{\beta\alpha^{n+r} + \alpha\beta^{n+r}}{\alpha + \beta}\right)\right]$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\frac{\alpha^{n-r} + \beta^{n-r}}{\alpha + \beta} - i \left(\frac{\beta \alpha^{n-r} + \alpha \beta^{n-r}}{\alpha + \beta} \right) \right] \\
& - \left[\frac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha + \beta} - i \left(\frac{\beta \alpha^n + \alpha \beta^n}{\alpha + \beta} \right) \right]^2 \\
& = \left[\frac{-4(-1)^n + 2(-1)^{n-r}(\alpha^{2r} + \beta^{2r})}{(\alpha + \beta)^2} \right] \\
& + i \left[\frac{4(-1)^n - (-1)^{n-r}(\alpha^{2r+1} \beta^{2r+1} + \beta \alpha^{2r} + \alpha \beta^{2r})}{(\alpha + \beta)^2} \right] \\
& = \left[\frac{-4(-1)^n + 2(-1)^{n-r}(\alpha^{2r} + \beta^{2r})}{(\alpha + \beta)^2} \right] + i \left[\frac{4(-1)^n - 2(-1)^{n-r}(\alpha^{2r} + \beta^{2r})}{(\alpha + \beta)^2} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\alpha + \beta = 2$ olduğundan gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
Gq_{n+r}Gq_{n-r} - Gq_n^2 &= (-1)^{n+1}(1-i) + (1-i)(-1)^{n-r} \left[\frac{(\alpha^r + \beta^r)^2}{2} - (-1)^r \right] \\
&= 2(1-i)(-1)^{n+1} \left[1 - (-1)^{-r} \frac{(\alpha^r + \beta^r)^2}{4} \right] \\
&= 2(-1)^{n+1}(1-i) \left[1 + \frac{(-1)^{r-1}(\alpha^r + \beta^r)^2}{4} \right]
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 3.4 $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & -1+3i \end{pmatrix}$ ve Gq_n , n . Gauss modified Pell sayısı olmak üzere

$$Q^n M = \begin{pmatrix} Gq_{n+1} & Gq_n \\ Gq_n & Gq_{n-1} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

dir.

İspat : Teorem n üzerinden tümevarımla ispatlanacaktır. O halde,

$n = 1$ için;

$$\begin{aligned}
Q \cdot M &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & -1+3i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3+i & 1+i \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} Gq_2 & Gq_1 \\ Gq_1 & Gq_0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi ise, $1 \leq n \leq k$ için, teoremin doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$Q^k M = \begin{pmatrix} Gq_{k+1} & Gq_k \\ Gq_k & Gq_{k-1} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

olsun. Son olarak $n = k + 1$ için de teoremin doğru olduğunu gösterelim. (3.16) eşitliğinin her iki tarafı soldan Q matrisi ile çarpılırsa, buradan

$$\begin{aligned} Q^{k+1} M &= Q(Q^k M) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Gq_{k+1} & Gq_k \\ Gq_k & Gq_{k-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2Gq_{k+1} + Gq_k & 2Gq_k + Gq_{k-1} \\ Gq_{k+1} & Gq_k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Gq_{k+2} & Gq_{k+1} \\ Gq_{k+1} & Gq_k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamdır.

Sıradaki teorem Gauss modified Pell sayı dizisi ile ilişkili olan Cassini özdeşliğini vermektedir.

Teorem 3.5 n pozitif bir tam sayı olsun. Bu takdirde

$$Gq_{n+1}Gq_{n-1} - Gq_n^2 = 4(-1)^{n+1}(1 - i) \quad (3.17)$$

dir [32].

İspat : (3.16) eşitliğinde her iki tarafın determinantını alınırsa, yani

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^n \begin{vmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & -1+3i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Gq_{n+1} & Gq_n \\ Gq_n & Gq_{n-1} \end{vmatrix}$$

eşitliği hesaplanırsa ispat tamamdır. O halde

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^n \begin{vmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & -1+3i \end{vmatrix} = 4(-1)^{n+1}(1 - i)$$

ve

$$\begin{vmatrix} Gq_{n+1} & Gq_n \\ Gq_n & Gq_{n-1} \end{vmatrix} = Gq_{n+1}Gq_{n-1} - Gq_n^2$$

elde edilir ki bu ise n pozitif tam sayısı için

$$Gq_{n+1}Gq_{n-1} - Gq_n^2 = 4(-1)^{n+1}(1 - i) \quad (3.18)$$

olmasıdır.

Şimdi Gauss modified Pell sayı dizisi ile ilişkili olan d'Ocagne özdeşliğini veren teoremi ifade ve ispat edelim.

Teorem 3.6 m ve n iki pozitif tam sayı olsun. P_n , n . Pell sayısı olmak üzere,

$$Gq_m Gq_{n+1} - Gq_n Gq_{m+1} = 4(-1)^{n+1}(1-i)P_{m-n} \quad (3.19)$$

dir [32].

İspat : Teorem 3.2 ile verilen Gauss modified Pell dizisinin Binet formülü göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} Gq_m Gq_{n+1} - Gq_n Gq_{m+1} &= \left[\frac{\alpha^m + \beta^m}{\alpha + \beta} - i \left(\frac{\beta \alpha^m + \alpha \beta^m}{\alpha + \beta} \right) \right] \\ &\quad \times \left[\frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}{\alpha + \beta} - i \left(\frac{\beta \alpha^{n+1} + \alpha \beta^{n+1}}{\alpha + \beta} \right) \right] \\ &\quad - \left[\frac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha + \beta} - i \left(\frac{\beta \alpha^n + \alpha \beta^n}{\alpha + \beta} \right) \right] \\ &\quad \times \left[\frac{\alpha^{m+1} + \beta^{m+1}}{\alpha + \beta} - i \left(\frac{\beta \alpha^{m+1} + \alpha \beta^{m+1}}{\alpha + \beta} \right) \right] \\ &= \left[\frac{2(\alpha - \beta)(\alpha^n \beta^m - \alpha^m \beta^n)}{(\alpha + \beta)^2} \right] + i \left[\frac{(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^m \beta^n - \alpha^n \beta^m)}{(\alpha + \beta)^2} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\alpha + \beta = 2$ ve $\alpha - \beta = 2\sqrt{2}$ olduğundan gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} Gq_m Gq_{n+1} - Gq_n Gq_{m+1} &= \sqrt{2}(1-i)[\alpha^n \beta^m - \alpha^m \beta^n] \\ &= \sqrt{2}(1-i)(-1)^{n+1}(\alpha^{m-n} - \beta^{m-n}) \\ &= 4(-1)^{n+1}(1-i)P_{m-n} \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.7 $n \geq 2$ için, Gauss modified Pell dizisinin ardışık terimlerinin toplamı

$$\sum_{k=1}^n Gq_k = \frac{1}{2}(Gq_{n+1} + Gq_n) - 1 \quad (3.20)$$

dir [32].

İspat : (3.1) eşitliği dikkate alınırsa

$$Gq_{n-1} = \frac{1}{2}Gq_n - \frac{1}{2}Gq_{n-2} \quad (3.21)$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi, (3.21) eşitliğinde n yerine sırasıyla $2, 3, 4, \dots, n + 1$ yazılırsa

$$Gq_1 = \frac{1}{2}Gq_2 - \frac{1}{2}Gq_0$$

$$Gq_2 = \frac{1}{2}Gq_3 - \frac{1}{2}Gq_1$$

$$Gq_3 = \frac{1}{2}Gq_4 - \frac{1}{2}Gq_2$$

$\vdots$

$$Gq_n = \frac{1}{2}Gq_{n+1} - \frac{1}{2}Gq_{n-1}$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\sum_{k=1}^n Gq_k = \frac{1}{2}(Gq_n + Gq_{n+1}) - \frac{1}{2}(Gq_0 + Gq_1) \quad (3.22)$$

eşitliği elde edilir. Burada $Gq_0 = 1 - i$ ve $Gq_1 = 1 + i$ başlangıç koşulları yerine yazılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\sum_{k=1}^n Gq_k = \frac{1}{2}(Gq_{n+1} + Gq_n) - 1 \quad (3.23)$$

elde edilir.

Teorem 3.8 $n \geq 1$ için, Gauss modified Pell dizisinin ardışık çift ve tek indisli terimlerinin toplamı sırasıyla

$$i. \sum_{k=1}^n Gq_{2k} = \frac{1}{2}(Gq_{2n+1} - 1 - i), \quad (3.24)$$

$$ii. \sum_{k=1}^n Gq_{2k-1} = \frac{1}{2}(Gq_{2n} - 1 + i) \quad (3.25)$$

dir [32].

İspat :

i. (3.21) eşitliğinde n yerine sırasıyla $3, 5, 7, \dots, 2n + 1$ yazılırsa

$$Gq_2 = \frac{1}{2}Gq_3 - \frac{1}{2}Gq_1$$

$$Gq_4 = \frac{1}{2}Gq_5 - \frac{1}{2}Gq_3$$

$$\begin{aligned}
Gq_6 &= \frac{1}{2}Gq_7 - \frac{1}{2}Gq_5 \\
&\vdots \\
Gq_{2n} &= \frac{1}{2}Gq_{2n+1} - \frac{1}{2}Gq_{2n-1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\sum_{k=1}^n Gq_{2k} = \frac{1}{2}(Gq_{2n+1} - Gq_1) \quad (3.26)$$

sonucuna varılır. $Gq_1 = 1 + i$ başlangıç koşulu elde edilen son eşitlikte yerine yazılırsa

$$\sum_{k=1}^n Gq_{2k} = \frac{1}{2}[Gq_{2n+1} - 1 - i] \quad (3.27)$$

bulunur.

ii. (i) eşitliğinin ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Sıradaki teorem n . Gauss modified Pell sayısının özel bir matris yardımıyla da bulunulabileceğini göstermektedir.

Teorem 3.9 $P_n = \begin{bmatrix} 1+i & 1+i & 0 & \cdots & 0 \\ i & 2 & i & \ddots & \vdots \\ 0 & i & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & i \\ 0 & \cdots & 0 & i & 2 \end{bmatrix}$ $n \times n$ matrisi, Gauss modified Pell

dizisinin tridiagonal matrisi ve $\det P_0 = 1 - i$ olsun. Bu takdirde

$$\det P_n = Gq_n, \quad n \geq 1 \quad (3.28)$$

dir.

İspat : İspatı n üzerinden tümevarım ile yapacağız. O halde,

$n = 1$ ve $n = 2$ için,

$$\det P_1 = 1 + i = Gq_1,$$

$$\det P_2 = 3 + i = Gq_2$$

olup verilen eşitliğin doğru olduğu görülür.

Teoremin $n - 1$ ve $n - 2$ için doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$\det P_{n-1} = Gq_{n-1}, \quad (3.29)$$

$$\det P_{n-2} = Gq_{n-2} \quad (3.30)$$

eşitlikleri doğru olsun. Şimdi ise n için teoremin doğru olduğunu gösterelim.

Determinant özellikleri kullanılarak P_n matrisinin determinanı

$$\det P_n = 2\det P_{n-1} + \det P_{n-2} \quad (3.31)$$

olarak bulunur. Son olarak (3.29) ve (3.30) eşitlikleri dikkate alınarak (3.31) eşitliği düzenlenirse

$$\begin{aligned} \det P_n &= 2Gq_{n-1} + Gq_{n-2} \\ &= Gq_n \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

4. GAUSS MODIFIED PELL POLİNOM DİZİSİ

Bu bölümde, ilk olarak Gauss modified Pell polinom dizisinin tanımı verilmiştir. Daha sonra bu polinom dizisinin karakteristik özellikleri incelenerek bilinen rekürans bağıntısı yardımıyla Binet formülü verilmiştir. Ayrıca seriler yardımıyla üreteç fonksiyonları bulunarak, bu polinom dizisini içeren Catalan, Cassini ve d'Ocagne gibi bazı özdeşlikler elde edilmiştir. Son olarak determinantı Gauss modified Pell polinom dizisini veren $n \times n$ tridiagonal matrisi ifade edilmiştir.

Bu bölümde verilen birçok tanım ve teorem, “Aksaray University Journal of Science and Engineering” isimli dergide yayımlanan bir makale [32] ile literatüre girmiştir.

İlk olarak Gauss Pell polinom dizisinin tanımını vereceğiz. Bu dizi Halıcı ve Öz [34] tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 4.1 Başlangıç koşulları $GP_0(x) = i$ ve $GP_1(x) = 1$ olmak üzere, $n \geq 2$ için, n . Gauss Pell polinomu $GP_n(x)$

$$GP_n(x) = 2xGP_{n-1}(x) + GP_{n-2}(x) \quad (4.1)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır [34].

Şimdi ise, Gauss modified Pell polinom dizisinin tanımını vereceğiz.

Tanım 4.2 Gauss modified Pell polinom dizisi, başlangıç koşulları $Gq_0(x) = 1 - xi$ ve $Gq_1(x) = x + i$ olmak üzere, $n \geq 2$ için,

$$Gq_n(x) = 2xGq_{n-1}(x) + Gq_{n-2}(x) \quad (4.2)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır.

Belirtilmelidir ki, Tanım 4.2’de $x = 1$ alınırsa Gauss modified Pell polinom dizisi üçüncü bölümde verilen klasik Gauss modified Pell sayı dizisine dönüşür.

Ayrıca, n . modified Pell polinomu $q_n(x)$ olmak üzere,

$$Gq_n(x) = q_n(x) + iq_{n-1}(x) \quad (4.3)$$

olduğu açıktır [32].

$Gq_n(x)$ dizisinin bazı elemanları aşağıdaki tabloda verilmiştir:

Çizelge 4.1. $Gq_n(x)$ dizisinin bazı elemanları.

n	$Gq_n(x)$
0	$1 - xi$
1	$x + i$
2	$2x^2 + 1 + xi$
3	$4x^3 + 3x + (2x^2 + 1)i$
4	$8x^4 + 8x^2 + 1 + (4x^3 + 3x)i$
$\vdots$	$\vdots$

Gauss modified Pell polinom dizisinin üreteç fonksiyonunu veren teorem aşağıda ifade ve ispat edilmektedir.

Teorem 4.1 Gauss modified Pell polinom dizisinin üreteç fonksiyonu

$$P(t, x) = \frac{(1-xt)+i(-x+2x^2t+t)}{1-2xt-t^2} \quad (4.4)$$

şeklindedir [32].

İspat : Gauss modified Pell polinom dizisinin üreteç fonksiyonu $P(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} Gq_n(x)t^n$ olsun. Yani, bu dizinin üreteç fonksiyonu

$$P(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} Gq_n(x)t^n = Gq_0(x) + Gq_1(x)t + \dots + Gq_n(x)t^n + \dots \quad (4.5)$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi (4.5) eşitliği sırasıyla $2xt$ ve t^2 ile çarpılırsa, bu takdirde

$$2xtP(t, x) = 2xGq_0(x)t + 2xGq_1(x)t^2 + \dots + 2xGq_{n-1}(x)t^n + \dots \quad (4.6)$$

ve

$$t^2P(t, x) = Gq_0(x)t^2 + Gq_1(x)t^3 + \dots + Gq_{n-2}(x)t^n + \dots \quad (4.7)$$

elde edilir. Buradan, (4.6) eşitliği ile (4.7) eşitliği taraf tarafa toplanıp, elde edilen sonuç (4.5) eşitliğinden çıkarılırsa

$$P(t, x) (1 - 2xt - t^2) = Gq_0(x) + [Gq_1(x) - 2xGq_0(x)]t \quad (4.8)$$

sonucuna ulaşılır. Şimdi, (4.8) eşitliğinde başlangıç koşulları yerine yazılarak gerekli işlemler yapıldığında,

$$P(t, x) = \frac{(1-xt)+i(-x+2x^2t+t)}{1-2xt-t^2} \quad (4.9)$$

elde edilir.

Sıradaki teorem Gauss modified Pell polinomu için Binet formülünü vermektedir.

Teorem 4.2 n . Gauss modified Pell polinomunun Binet formülü

$$Gq_n(x) = x \left[\frac{\alpha^n(x) + \beta^n(x)}{\alpha(x) + \beta(x)} - i \frac{\beta(x)\alpha^n(x) + \alpha(x)\beta^n(x)}{\alpha(x) + \beta(x)} \right] \quad (4.10)$$

ile verilir. Burada $\alpha(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ ve $\beta(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$, $r^2 - 2xr - 1 = 0$ denkleminin kökleridir [32].

İspat : Teorem 2.1.1'den Gauss modified Pell polinom dizisinin rekürans bağıntısının genel çözümü, c ve d sabitler olmak üzere,

$$Gq_n(x) = c\alpha^n(x) + d\beta^n(x) \quad (4.11)$$

dir. Şimdi, (4.11) eşitliği başlangıç koşullarına göre yazıldığında

$$Gq_0(x) = c + d = 1 - xi \quad (4.12)$$

$$Gq_1(x) = c\alpha(x) + d\beta(x) = x + i \quad (4.13)$$

elde edilir. (4.12) ve (4.13) eşitliklerinden c ve d değerleri

$$c = \frac{1}{2} - i \frac{\beta(x)}{2} \text{ ve } d = \frac{1}{2} - i \frac{\alpha(x)}{2}$$

şeklinde bulunur. Bulunan c ve d değerleri (4.11) eşitliğinde yerine yazılırsa genel çözüm

$$Gq_n(x) = \left[\frac{1}{2} - i \frac{\beta(x)}{2} \right] \alpha^n(x) + \left[\frac{1}{2} - i \frac{\alpha(x)}{2} \right] \beta^n(x)$$

olarak elde edilir. α ve β değerleri için $\alpha(x) + \beta(x) = 2x$ olduğundan, elde edilen son eşitlik

$$Gq_n(x) = x \left[\frac{\alpha^n(x) + \beta^n(x)}{\alpha(x) + \beta(x)} - i \frac{\beta(x)\alpha^n(x) + \alpha(x)\beta^n(x)}{\alpha(x) + \beta(x)} \right] \quad (4.14)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Şimdi, Gauss modified Pell polinom dizisi ile ilişkili olan Catalan özdeşliğini ifade ve ispat edelim.

Teorem 4.3 n ve r herhangi iki pozitif tam sayı olsun. Bu takdirde

$$Gq_{n+r}(x)Gq_{n-r}(x) - Gq_n^2(x) = 2(-1)^{n+1}(1 - xi) \times \left[1 + \frac{(-1)^{r-1}(\alpha^r(x) + \beta^r(x))^2}{4} \right] \quad (4.15)$$

dır [32].

İspat : Teorem 4.2 ile verilen Gauss modified Pell polinom dizisinin Binet formülü göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} Gq_{n+r}(x)Gq_{n-r}(x) - Gq_n^2(x) &= \left[x \frac{\alpha^{n+r}(x) + \beta^{n+r}(x)}{\alpha(x) + \beta(x)} - ix \left(\frac{\beta(x)\alpha^{n+r}(x) + \alpha(x)\beta^{n+r}(x)}{\alpha(x) + \beta(x)} \right) \right] \\ &\quad \times \left[x \frac{\alpha^{n-r}(x) + \beta^{n-r}(x)}{\alpha(x) + \beta(x)} - ix \left(\frac{\beta(x)\alpha^{n-r}(x) + \alpha(x)\beta^{n-r}(x)}{\alpha(x) + \beta(x)} \right) \right] \\ &\quad - \left[x \frac{\alpha^n(x) + \beta^n(x)}{\alpha(x) + \beta(x)} - ix \left(\frac{\beta(x)\alpha^n(x) + \alpha(x)\beta^n(x)}{\alpha(x) + \beta(x)} \right) \right]^2 \\ &= x^2 \left[\frac{-4(-1)^n(1-xi) + 2(-1)^{n-r}(\alpha^{2r}(x) + \beta^{2r}(x))(1-xi)}{(\alpha(x) + \beta(x))^2} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\alpha(x) + \beta(x) = 2x$ olduğundan gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} Gq_{n+r}(x)Gq_{n-r}(x) - Gq_n^2(x) &= (-1)^{n+1}(1 - xi) \\ &\quad + \frac{(1-xi)(-1)^{n-r}[2x^2(\alpha^r(x) + \beta^r(x))^2 - 4x^2(-1)^r]}{(\alpha(x) + \beta(x))^2} \\ &= -2(1 - xi)(-1)^n \left[1 - \frac{(-1)^{-r}x^2(\alpha^r(x) + \beta^r(x))^2}{4x^2} \right] \\ &= 2(-1)^{n+1}(1 - xi) \left[1 + \frac{(-1)^{r-1}(\alpha^r(x) + \beta^r(x))^2}{4} \right] \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.4 $Q(x) = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} x + i & 1 - xi \\ 1 - xi & -x + (2x^2 + 1)i \end{pmatrix}$ ve $Gq_n(x)$, n .

Gauss modified Pell polinomu olmak üzere

$$Q^n(x)N = \begin{pmatrix} Gq_{n+1}(x) & Gq_n(x) \\ Gq_n(x) & Gq_{n-1}(x) \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

dir.

İspat : Teorem, n üzerinden tümevarımla ispatlanacaktır. O halde,

$n = 1$ için,

$$\begin{aligned} Q(x).N &= \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+i & 1-xi \\ 1-xi & -x+(2x^2+1)i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x^2+1+xi & x+i \\ x+i & 1-xi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Gq_2(x) & Gq_1(x) \\ Gq_1(x) & Gq_0(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi ise, $1 \leq n \leq k$ için, teoremin doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$Q^k(x)N = \begin{pmatrix} Gq_{k+1}(x) & Gq_k(x) \\ Gq_k(x) & Gq_{k-1}(x) \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

olsun. Son olarak $n = k + 1$ için de teoremin doğru olduğunu gösterelim. (4.17) eşitliğinin her iki tarafı soldan $Q(x)$ matrisi ile çarpılırsa, buradan

$$\begin{aligned} Q^{k+1}(x)N &= Q(x)[Q^k(x)N] \\ &= \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Gq_{k+1}(x) & Gq_k(x) \\ Gq_k(x) & Gq_{k-1}(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2xGq_{k+1}(x) + Gq_k(x) & 2xGq_k(x) + Gq_{k-1}(x) \\ Gq_{k+1}(x) & Gq_k(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Gq_{k+2}(x) & Gq_{k+1}(x) \\ Gq_{k+1}(x) & Gq_k(x) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamdır.

Gauss modified Pell polinom dizisi ile ilişkili olan Cassini özdeşliğini sıradaki teorem ile ifade ve ispat edelim.

Teorem 4.5 n pozitif bir tam sayı olsun. Bu takdirde

$$Gq_{n+1}(x)Gq_{n-1}(x) - Gq_n^2(x) = 2(x^2 + 1)(-1)^{n+1}(1 - xi) \quad (4.18)$$

dir [32].

İspat : (4.16) eşitliğinde her iki tarafın determinantı alınır, yani

$$\begin{vmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^n \begin{vmatrix} x+i & 1-xi \\ 1-xi & -x+(2x^2+1)i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Gq_{n+1}(x) & Gq_n(x) \\ Gq_n(x) & Gq_{n-1}(x) \end{vmatrix}$$

eşitliği hesaplanırsa ispat tamamdır. O halde

$$\begin{vmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^n \begin{vmatrix} x+i & 1-xi \\ 1-xi & -x+(2x^2+1)i \end{vmatrix} = 2(x^2+1)(-1)^{n+1}(1-xi)$$

ve

$$\begin{vmatrix} Gq_{n+1}(x) & Gq_n(x) \\ Gq_n(x) & Gq_{n-1}(x) \end{vmatrix} = Gq_{n+1}(x)Gq_{n-1}(x) - Gq_n^2(x)$$

olup bu ise n pozitif tam sayısı için

$$Gq_{n+1}(x)Gq_{n-1}(x) - Gq_n^2(x) = 2(x^2+1)(-1)^{n+1}(1-xi) \quad (4.19)$$

olmasıdır. Bu ise ispatı tamamlar.

Şimdi, Gauss modified Pell polinom dizisi ile ilişkili olan d'Ocagne özdeşliğini ifade ve ispat edelim.

Teorem 4.6 m ve n iki pozitif tam sayı olsun. $P_n(x)$, n . Pell polinomu olmak üzere,

$$Gq_m(x)Gq_{n+1}(x) - Gq_n(x)Gq_{m+1}(x) = 2(x^2+1)(-1)^{n+1}(1-xi)P_{m-n}(x) \quad (4.20)$$

dir [32].

İspat : Teorem 4.2 ile verilen Gauss modified Pell polinom dizisinin Binet formülü göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} & Gq_m(x)Gq_{n+1}(x) - Gq_n(x)Gq_{m+1}(x) \\ &= x^2 \left[\frac{\alpha^m(x) + \beta^m(x)}{\alpha(x) + \beta(x)} - i \left(\frac{\beta(x)\alpha^m(x) + \alpha(x)\beta^m(x)}{\alpha(x) + \beta(x)} \right) \right] \\ & \quad \times \left[\frac{\alpha^{n+1}(x) + \beta^{n+1}(x)}{\alpha(x) + \beta(x)} - i \left(\frac{\beta(x)\alpha^{n+1}(x) + \alpha(x)\beta^{n+1}(x)}{\alpha(x) + \beta(x)} \right) \right] \\ & \quad - x^2 \left[\frac{\alpha^n(x) + \beta^n(x)}{\alpha(x) + \beta(x)} - i \left(\frac{\beta(x)\alpha^n(x) + \alpha(x)\beta^n(x)}{\alpha(x) + \beta(x)} \right) \right] \\ & \quad \times \left[\frac{\alpha^{m+1}(x) + \beta^{m+1}(x)}{\alpha(x) + \beta(x)} - i \left(\frac{\beta(x)\alpha^{m+1}(x) + \alpha(x)\beta^{m+1}(x)}{\alpha(x) + \beta(x)} \right) \right] \\ &= x^2 \frac{[\alpha^n(x)\beta^m(x) - \alpha^m(x)\beta^n(x)][2(\alpha(x) - \beta(x)) - i(\alpha^2(x) - \beta^2(x))]}{(\alpha(x) + \beta(x))^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\alpha(x) + \beta(x) = 2x$ ve $\alpha(x) - \beta(x) = 2\sqrt{x^2 + 1}$ olduğundan gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} Gq_m(x)Gq_{n+1}(x) - Gq_n(x)Gq_{m+1}(x) \\ = \sqrt{x^2 + 1}[\alpha^n(x)\beta^m(x) - \alpha^m(x)\beta^n(x)](1 - xi) \\ = 2(x^2 + 1)(-1)^{n+1}(1 - xi)P_{m-n}(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.7 $n \geq 2$ için, Gauss modified Pell polinom dizisinin ardışık terimlerinin toplamı

$$\sum_{k=1}^n Gq_k(x) = \frac{1}{2x} [Gq_{n+1}(x) + Gq_n(x) - x - 1 + i(x - 1)] \quad (4.21)$$

dir [32].

İspat : Gauss modified Pell polinom dizisinin rekürans bağıntısından

$$Gq_{n-1}(x) = \frac{1}{2x} Gq_n(x) - \frac{1}{2x} Gq_{n-2}(x) \quad (4.22)$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi, (4.22) eşitliğinde n yerine sırasıyla $2, 3, 4, \dots, n + 1$ yazılırsa

$$\begin{aligned} Gq_1(x) &= \frac{1}{2x} Gq_2(x) - \frac{1}{2x} Gq_0(x) \\ Gq_2(x) &= \frac{1}{2x} Gq_3(x) - \frac{1}{2x} Gq_1(x) \\ Gq_3(x) &= \frac{1}{2x} Gq_4(x) - \frac{1}{2x} Gq_2(x) \\ &\vdots \\ Gq_n(x) &= \frac{1}{2x} Gq_{n+1}(x) - \frac{1}{2x} Gq_{n-1}(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\sum_{k=1}^n Gq_k(x) = \frac{1}{2x} [Gq_n(x) + Gq_{n+1}(x)] - \frac{1}{2x} [Gq_0(x) + Gq_1(x)] \quad (4.23)$$

bulunur. Burada $Gq_0(x) = 1 - xi$ ve $Gq_1(x) = x + i$ başlangıç koşulları yerine yazılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\sum_{k=1}^n Gq_k(x) = \frac{1}{2x} [Gq_{n+1}(x) + Gq_n(x) - x - 1 + i(x - 1)] \quad (4.24)$$

elde edilir.

Teorem 4.8 $n \geq 1$ için, Gauss modified Pell polinom dizisinin ardışık çift ve tek indisli terimlerinin toplamı sırasıyla

$$i. \sum_{k=1}^n Gq_{2k}(x) = \frac{1}{2x} [Gq_{2n+1}(x) - x - i] \quad (4.25)$$

$$ii. \sum_{k=1}^n Gq_{2k-1}(x) = \frac{1}{2x} [Gq_{2n}(x) - 1 + xi] \quad (4.26)$$

dir [32].

İspat :

i. (4.22) eşitliğinde n yerine sırasıyla $3, 5, 7, \dots, 2n + 1$ yazılırsa

$$Gq_2(x) = \frac{1}{2x} Gq_3(x) - \frac{1}{2x} Gq_1(x)$$

$$Gq_4(x) = \frac{1}{2x} Gq_5(x) - \frac{1}{2x} Gq_3(x)$$

$$Gq_6(x) = \frac{1}{2x} Gq_7(x) - \frac{1}{2x} Gq_5(x)$$

$\vdots$

$$Gq_{2n}(x) = \frac{1}{2x} Gq_{2n+1}(x) - \frac{1}{2x} Gq_{2n-1}(x)$$

elde edilir. Elde edilen eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\sum_{k=1}^n Gq_{2k}(x) = \frac{1}{2x} [Gq_{2n+1}(x) - Gq_1(x)] \quad (4.27)$$

bulunur. $Gq_1(x) = x + i$ başlangıç koşulu elde edilen son eşitlikte yerine yazılırsa

$$\sum_{k=1}^n Gq_{2k}(x) = \frac{1}{2x} [Gq_{2n+1}(x) - x - i] \quad (4.28)$$

elde edilir.

ii. (i) eşitliğinin ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Şimdi, sıradaki teorem ile, Gauss modified Pell dizisine ait tridiagonal matris tanımlanarak bu matrisin n . Gauss modified Pell sayısı ile olan ilişkisi verilmektedir.

Teorem 4.9 $P_n(x) = \begin{bmatrix} x+i & x+i & 0 & \cdots & 0 \\ i & 2x & i & \ddots & \vdots \\ 0 & i & 2x & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & i \\ 0 & \cdots & 0 & i & 2x \end{bmatrix}$ $n \times n$ matrisi, Gauss modified

Pell polinom dizisinin tridiagonal matrisi ve $\det P_0(x) = 1 - xi$ olsun. Bu takdirde

$$\det P_n(x) = Gq_n(x), \quad n \geq 1 \quad (4.29)$$

dir.

İspat : İspatı n üzerinden tümevarım ile yapacağız. O halde,

$n = 1$ ve $n = 2$ için,

$$\det P_1(x) = x + i = Gq_1(x),$$

$$\det P_2(x) = (2x^2 + 1) + xi = Gq_2(x)$$

olup verilen eşitliğin doğru olduğu açıktır.

Teoremin $n - 1$ ve $n - 2$ için teoremin doğru olduğunu kabul edelim. Yani,

$$\det P_{n-1}(x) = Gq_{n-1}(x) \quad (4.30)$$

$$\det P_{n-2}(x) = Gq_{n-2}(x) \quad (4.31)$$

eşitlikleri doğru olsun. Şimdi ise n için teoremin doğru olduğunu gösterelim.

Determinant özellikleri kullanılarak $P_n(x)$ matrisinin determinanı

$$\det P_n(x) = 2x \det P_{n-1}(x) + \det P_{n-2}(x) \quad (4.32)$$

olarak bulunur. Son olarak (4.30) ve (4.31) eşitlikleri dikkate alınarak (4.32) eşitliği düzenlenirse

$$\begin{aligned} \det P_n(x) &= 2x Gq_{n-1}(x) + Gq_{n-2}(x) \\ &= Gq_n(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

5. (s, t) -MODIFIED PELL DİZİSİ VE MATRİS GÖSTERİMİ

Bu bölümde, ilk olarak (s, t) -modified Pell dizisinin tanımı verilmiştir. Daha sonra bu dizi yardımıyla (s, t) -modified Pell matris dizisi tanımlanmıştır. Ayrıca, bu dizilerin temel özellikleri incelenerek bu dizilere ait üreteç fonksiyonları, Binet formülleri ve bazı kısmi toplam formülleri elde edilmiştir. Son olarak, (s, t) -modified Pell ve (s, t) -Pell matris dizileri arasında bazı ilişkiler incelenmiştir.

5.1 (s, t) -Modified Pell Dizisi

Bu kısımda, ilk olarak (s, t) -modified Pell dizisi tanımlanmıştır. Daha sonra bu diziye ait üreteç fonksiyonu ve Binet formülü verilmiştir. Ayrıca bu diziye ait bazı kısmi toplamlar elde edilmiştir. Son olarak, (s, t) -modified Pell ve (s, t) -Pell dizileri arasındaki ilişki bir teorem ile ifade ve ispat edilmiştir.

Tanım 5.1.1 $s^2 + t > 0$ olacak şekilde $s > 0$ ve $t \neq 0$ reel sayıları için, $q_0(s, t) = 1$, $q_1(s, t) = s$ ve $n \geq 2$ olmak üzere,

$$q_n(s, t) = 2sq_{n-1}(s, t) + tq_{n-2}(s, t) \quad (5.1)$$

şeklinde tanımlanan $\{q_n(s, t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ sayı dizisine (s, t) -modified Pell sayı dizisi ve bu dizinin elemanlarına ise (s, t) -modified Pell sayıları denir.

Belirtilmelidir ki, Tanım 5.1’de $s = t = 1$ alınırsa (s, t) -modified Pell dizisi, klasik modified Pell sayı dizisine dönüşür.

Diğer yandan, Teorem 2.1.1’den (5.1) ile verilen eşitliğin karakteristik denklemi $x^2 - 2sx - t = 0$ olup, bu denklemin kökleri de $x_1 = s + \sqrt{s^2 + t}$ ve $x_2 = s - \sqrt{s^2 + t}$ olarak elde edilir. Bunun yanı sıra, bu kökler arasında

$$x_1 + x_2 = 2s, \quad x_1 - x_2 = 2\sqrt{s^2 + t}, \quad x_1 \cdot x_2 = -t \quad (5.2)$$

bağıntıları mevcuttur.

$q_n(s, t)$ dizisinin bazı elemanları aşağıdaki tabloda verilmiştir:

Çizelge 5.1. $q_n(s, t)$ dizisinin bazı elemanları.

n	$q_n(s, t)$
0	1
1	s
2	$2s^2 + t$
3	$4s^3 + 3st$
4	$8s^4 + 8s^2t + t^2$
$\vdots$	$\vdots$

Sıradaki teoremdede (s, t) -modified Pell dizisi için üreteç fonksiyonunu ifade ve ispat edeceğiz.

Teorem 5.1.1 (s, t) -modified Pell dizisinin üreteç fonksiyonu

$$M(x) = \frac{1-sx}{1-2sx-tx^2} \quad (5.3)$$

dır.

İspat : (s, t) -modified Pell dizisinin üreteç fonksiyonu $M(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(s, t)x^n$ olsun.

O halde, bu üreteç fonksiyonu

$$M(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(s, t)x^n = q_0(s, t) + q_1(s, t)x + \dots + q_n(s, t)x^n + \dots \quad (5.4)$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi, (5.4) eşitliğini sırasıyla $2sx$ ve tx^2 ile çarpalım. Buradan

$$2sxM(x) = 2sq_0(s, t)x + 2sq_1(s, t)x^2 + \dots + 2sq_{n-1}(s, t)x^n + \dots \quad (5.5)$$

ve

$$tx^2M(x) = tq_0(s, t)x^2 + tq_1(s, t)x^3 + \dots + tq_{n-2}(s, t)x^n + \dots \quad (5.6)$$

elde edilir.

(5.5) eşitliği ile (5.6) eşitliğini taraf tarafa toplayıp, elde edilen sonucu (5.4) eşitliğinden çıkarırsak

$$M(x) (1 - 2sx - tx^2) = q_0(s, t) + [q_1(s, t) - 2sq_0(s, t)]x \quad (5.7)$$

elde edilir. (5.7) eşitliğinde başlangıç koşulları yerine yazılarak gerekli işlemler yapılırsa,

$$M(x) = \frac{1-sx}{1-2sx-tx^2} \quad (5.8)$$

elde edilir.

Sıradaki teorem n . (s, t) -modified Pell sayısını veren Binet formülünü vermektedir.

Teorem 5.1.2 (s, t) -modified Pell dizisine ait Binet formülü

$$q_n(s, t) = s \left(\frac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha + \beta} \right) \quad (5.9)$$

ile verilir. Burada, $\alpha = s + \sqrt{s^2 + t}$ ve $\beta = s - \sqrt{s^2 + t}$, $x^2 - 2sx - t = 0$ denkleminin kökleridir.

İspat : Teorem 2.1.1'den (s, t) -modified Pell dizisinin genel çözümü

$$q_n(s, t) = c\alpha^n + d\beta^n \quad (5.10)$$

şeklinde yazılabilir. Burada c ve d sabit sayılardır. Şimdi, (5.10) eşitliği başlangıç koşullarına göre yazıldığında

$$q_0(s, t) = c + d = 1 \quad (5.11)$$

$$q_1(s, t) = c\alpha + d\beta = s \quad (5.12)$$

elde edilir. (5.11) ve (5.12) eşitliklerinden c ve d değerleri

$$c = d = \frac{1}{2}$$

şeklinde bulunur. Bulunan c ve d değerleri (5.10) eşitliğinde yerine yazılırsa genel çözüm

$$q_n(s, t) = \frac{1}{2}\alpha^n + \frac{1}{2}\beta^n$$

olarak elde edilir. α ve β değerleri için $\alpha + \beta = 2s$ olduğundan, elde edilen son eşitlik

$$q_n(s, t) = s \left(\frac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha + \beta} \right) \quad (5.13)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Şimdi, (s, t) -modified Pell dizisine ait bazı kısmi toplamlar verilecektir.

Teorem 5.1.3 $2s + t \neq 1$ için, (s, t) -modified Pell dizisinin ardışık terimlerinin toplamı

$$\sum_{i=1}^n q_i(s, t) = \frac{1}{2s+t-1} [q_{n+1}(s, t) + tq_n(s, t) - s - t] \quad (5.14)$$

dir.

İspat : (5.1) eşitliği

$$q_{i-1}(s, t) = \frac{1}{2s} q_i(s, t) - \frac{t}{2s} q_{i-2}(s, t) \quad (5.15)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Şimdi, (5.15) eşitliğinde i yerine sırasıyla 2, 3, 4, ..., $n + 1$ yazılırsa

$$q_1(s, t) = \frac{1}{2s} q_2(s, t) - \frac{t}{2s} q_0(s, t)$$

$$q_2(s, t) = \frac{1}{2s} q_3(s, t) - \frac{t}{2s} q_1(s, t)$$

$$q_3(s, t) = \frac{1}{2s} q_4(s, t) - \frac{t}{2s} q_2(s, t)$$

⋮

$$q_n(s, t) = \frac{1}{2s} q_{n+1}(s, t) - \frac{t}{2s} q_{n-1}(s, t)$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n q_i(s, t) &= \frac{1}{2s} \sum_{i=2}^{n+1} q_i(s, t) - \frac{t}{2s} \sum_{i=0}^{n-1} q_i(s, t) \\ &= \frac{1}{2s} \left(\sum_{i=1}^n q_i(s, t) - q_1(s, t) + q_{n+1}(s, t) \right) - \frac{t}{2s} \left(\sum_{i=1}^n q_i(s, t) + q_0(s, t) - q_n(s, t) \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $q_0(s, t) = 1$ ve $q_1(s, t) = s$ başlangıç koşulları yerine yazılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\sum_{i=1}^n q_i(s, t) = \frac{1}{2s+t-1} [q_{n+1}(s, t) + tq_n(s, t) - s - t] \quad (5.16)$$

elde edilir ki bu ise ispatı tamamlar.

Sıradaki teoremdede (s, t) -modified Pell ile (s, t) -Pell dizisi arasındaki ilişki verilmiştir.

Teorem 5.1.4 $n \geq 0$ için,

$$q_n(s, t) = sP_n(s, t) + tP_{n-1}(s, t) \quad (5.17)$$

dir.

İspat : (s, t) -Pell dizisinin Binet formülü kullanılarak

$$\begin{aligned} sP_n(s, t) + tP_{n-1}(s, t) &= s \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right) + t \left(\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \right) \\ &= \frac{s(\alpha^n - \beta^n) - (\beta\alpha^n - \alpha\beta^n)}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{\alpha^n(s - \beta) + \beta^n(\alpha - s)}{\alpha - \beta} \end{aligned}$$

elde edilir. $\alpha + \beta = 2s$ ve $\alpha - \beta = 2\sqrt{s^2 + t}$ olduğundan elde edilen son eşitlik

$$\begin{aligned} sP_n(s, t) + tP_{n-1}(s, t) &= s \left(\frac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha + \beta} \right) \\ &= q_n(s, t) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Bu ise ispatı tamamlar.

5.2 (s, t) -Modified Pell Matris Dizisi

Bu kısımda, ilk olarak (s, t) -modified Pell matris dizisi tanımlanmıştır. Daha sonra bu diziye ait üreteç fonksiyonu ve Binet formülü verilmiştir. Ayrıca bu diziye ait bazı toplam formülleri verilmiştir. Son olarak bu dizinin sağladığı bazı özdeşlikler teoremler yardımı ile ifade ve ispat edilmiştir.

Tanım 5.2.1 $s^2 + t > 0$ olacak şekildeki $s > 0$ ve $t \neq 0$ reel sayıları için,

$$Mq_0(s, t) = \begin{pmatrix} s & 1 \\ t & -s \end{pmatrix}, Mq_1(s, t) = \begin{pmatrix} 2s^2 + t & s \\ st & t \end{pmatrix} \text{ ve } n \geq 2 \text{ olmak üzere,}$$

$$Mq_n(s, t) = 2sMq_{n-1}(s, t) + tMq_{n-2}(s, t) \quad (5.18)$$

şeklinde tanımlanan $\{Mq_n(s, t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ sayı dizisine (s, t) -modified Pell matris dizisi denir.

Bundan sonra, gösterimde kolaylık olması için, $Mq_n(s, t)$ ile gösterilen (s, t) -modified Pell matris dizisinin genel terimi, Mq_n ile gösterilecektir.

Aşağıdaki teorem n . (s, t) -modified Pell matrisi için Binet formülünü ifade etmektedir.

Teorem 5.2.1 α ve β $x^2 - 2sx - t = 0$ karakteristik denkleminin kökleri olmak üzere, $n \geq 0$ için,

$$Mq_n = \left(\frac{Mq_1 - \beta Mq_0}{\alpha - \beta} \right) \alpha^n - \left(\frac{Mq_1 - \alpha Mq_0}{\alpha - \beta} \right) \beta^n \quad (5.19)$$

dir.

İspat : (5.18) denkleminin genel çözümü Teorem 2.1.1'den

$$Mq_n = c\alpha^n + d\beta^n \quad (5.20)$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi (5.20) eşitliğinde başlangıç koşulları dikkate alınırsa

$Mq_0 = c + d$ ve $Mq_1 = c\alpha + d\beta$ elde edilir. Buradan

$$c = \frac{Mq_1 - \beta Mq_0}{\alpha - \beta} \text{ ve } d = -\frac{Mq_1 - \alpha Mq_0}{\alpha - \beta}$$

bulunur. Bulunan c ve d değerleri (5.20) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$Mq_n = \left(\frac{Mq_1 - \beta Mq_0}{\alpha - \beta} \right) \alpha^n - \left(\frac{Mq_1 - \alpha Mq_0}{\alpha - \beta} \right) \beta^n$$

elde edilir.

Aşağıda verilen teorem, (s, t) -modified Pell sayı dizisi ile (s, t) -modified Pell matris dizisi arasındaki bağıntıyı sunmaktadır.

Teorem 5.2.2 $n > 0$ için,

$$Mq_n = \begin{pmatrix} q_{n+1}(s, t) & q_n(s, t) \\ tq_n(s, t) & tq_{n-1}(s, t) \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

dir.

İspat : Teorem n üzerinden tümevarım ile ispatlanacaktır. O halde,

$n = 1$ için,

$$Mq_1 = \begin{pmatrix} q_2(s, t) & q_1(s, t) \\ tq_1(s, t) & tq_0(s, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s^2 + t & s \\ st & t \end{pmatrix}$$

elde edilir ki buradan $n = 1$ için iddia doğrudur.

Şimdi ise, $1 \leq n \leq k$ için, (5.21) bağıntısının doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$Mq_k = \begin{pmatrix} q_{k+1}(s, t) & q_k(s, t) \\ tq_k(s, t) & tq_{k-1}(s, t) \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

doğru olsun. Son olarak, $n = k + 1$ için de bu ifadenin doğru olduğunu gösterelim.

O halde (5.22) ve (5.1) denklemlerini kullanarak (5.18) eşitliği

$$\begin{aligned} Mq_{k+1} &= 2sMq_k + tMq_{k-1} \\ &= 2s \begin{pmatrix} q_{k+1}(s, t) & q_k(s, t) \\ tq_k(s, t) & tq_{k-1}(s, t) \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} q_k(s, t) & q_{k-1}(s, t) \\ tq_{k-1}(s, t) & tq_{k-2}(s, t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2sq_{k+1}(s, t) + tq_k(s, t) & 2sq_k(s, t) + tq_{k-1}(s, t) \\ 2stq_k(s, t) + t^2q_{k-1}(s, t) & 2stq_{k-1}(s, t) + t^2q_{k-2}(s, t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} q_{k+2}(s, t) & q_{k+1}(s, t) \\ tq_{k+1}(s, t) & tq_k(s, t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olarak elde edilir ki bu ise istenen sonuçtur.

Sıradaki teorem (s, t) -modified Pell matris dizisi için üreteç fonksiyonunu vermektedir.

Teorem 5.2.3 (s, t) -modified Pell matris dizisinin üreteç fonksiyonu

$$N(x) = \frac{1}{1-2sx-tx^2} \left[\begin{pmatrix} s & 1 \\ t & -s \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} t & -s \\ -st & 2s^2 + t \end{pmatrix} \right] \quad (5.23)$$

dir.

İspat : (s, t) -modified Pell matris dizisinin üreteç fonksiyonu $N(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Mq_n x^n$ olsun.

O halde, bu üreteç fonksiyonu

$$N(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Mq_n x^n = Mq_0 + Mq_1 x + Mq_2 x^2 + \cdots + Mq_n x^n + \cdots$$

şeklinde yazılabilir.

Üstelik, (5.18) eşitliği ile verilen dizinin rekürans bağıntısı kullanılarak

$$N(x) (1 - 2sx - tx^2) = Mq_0 + [Mq_1 - 2sMq_0]x \quad (5.24)$$

elde edilir. Şimdi (5.24) eşitliğinde başlangıç koşulları yerine yazılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$N(x) = \frac{1}{1-2sx-tx^2} \left[\begin{pmatrix} s & 1 \\ t & -s \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} t & -s \\ -st & 2s^2 + t \end{pmatrix} \right] \quad (5.25)$$

elde edilir.

Aşağıda verilen teoremlerde, (s, t) -modified Pell matris dizisine ait bazı kısmi toplam formülleri elde edilmiştir.

Teorem 5.2.4 $2s + t \neq 1$ için, (s, t) -modified Pell matris dizisinin ardışık terimlerinin toplamı

$$\sum_{i=1}^n Mq_i = \frac{1}{2s+t-1} [Mq_{n+1} + tMq_n - Mq_2 + (2s-1)Mq_1] \quad (5.26)$$

dir.

İspat : (5.18) eşitliği dikkate alınır

$$-tMq_{i-2} = -Mq_i + 2sMq_{i-1} \quad (5.27)$$

şeklinde yazılabilir.

(5.27) eşitliği $i = 3, 4, 5, \dots, n+2$ için yazılırsa

$$-tMq_1 = -Mq_3 + 2sMq_2$$

$$-tMq_2 = -Mq_4 + 2sMq_3$$

$$-tMq_3 = -Mq_5 + 2sMq_4$$

$\vdots$

$$-tMq_n = -Mq_{n+2} + 2sMq_{n+1}$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlikler taraf tarafa toplanır

$$-t \sum_{i=1}^n Mq_i = (2s-1)(Mq_3 + Mq_4 + \dots + Mq_{n+1}) - Mq_{n+2} + 2sMq_2$$

bulunur. Buradan

$$(2s-1)(Mq_1 + Mq_2) - (2s-1)Mq_{n+1} - t \sum_{i=1}^n Mq_i = (2s-1) \sum_{i=1}^n Mq_i - Mq_{n+2} + 2sMq_2$$

şeklinde yazılabilir. Buradan ise,

$$(2s+t-1) \sum_{i=1}^n Mq_i = (2s-1)Mq_1 + 2sMq_2 - Mq_2 - 2sMq_{n+1} + Mq_{n+1} + 2sMq_{n+1} + tMq_n - 2sMq_2$$

olup

$$\sum_{i=1}^n Mq_i = \frac{1}{2s+t-1} [Mq_{n+1} + tMq_n - Mq_2 + (2s-1)Mq_1] \quad (5.28)$$

elde edilir.

Teorem 5.2.5 $s^2 + t > 0$ olacak şekildeki $s > 0$ ve $t \neq 0$ reel sayıları için,

$$\sum_{k=0}^n \frac{Mq_k}{x^k} = \frac{1}{x^2 - 2sx - t} [xMq_1 + (x^2 - 2sx)Mq_0] - \frac{1}{x^n(x^2 - 2sx - t)} (xMq_{n+1} + tMq_n) \quad (5.29)$$

dir.

İspat : Teorem 5.2.1'den,

$$\sum_{k=0}^n \frac{Mq_k}{x^k} = \left(\frac{Mq_1 - \beta Mq_0}{\alpha - \beta} \right) \sum_{k=0}^n \left(\frac{\alpha}{x} \right)^k - \left(\frac{Mq_1 - \alpha Mq_0}{\alpha - \beta} \right) \sum_{k=0}^n \left(\frac{\beta}{x} \right)^k$$

eşitliği yazılır. Sonra, bu eşitlikte geometrik dizi tanımı kullanılarak

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{Mq_k}{x^k} &= \left(\frac{Mq_1 - \beta Mq_0}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{1 - \left(\frac{\alpha}{x} \right)^{n+1}}{1 - \frac{\alpha}{x}} \right) - \left(\frac{Mq_1 - \alpha Mq_0}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{1 - \left(\frac{\beta}{x} \right)^{n+1}}{1 - \frac{\beta}{x}} \right) \\ &= \left(\frac{Mq_1 - \beta Mq_0}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{x^{n+1} - \alpha^{n+1}}{x^{n+1} \left(\frac{x - \alpha}{x} \right)} \right) - \left(\frac{Mq_1 - \alpha Mq_0}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{x^{n+1} - \beta^{n+1}}{x^{n+1} \left(\frac{x - \beta}{x} \right)} \right) \\ &= \frac{1}{x^n} \left[\left(\frac{Mq_1 - \beta Mq_0}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{x^{n+1} - \alpha^{n+1}}{x - \alpha} \right) - \left(\frac{Mq_1 - \alpha Mq_0}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{x^{n+1} - \beta^{n+1}}{x - \beta} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{x^n(x^2 - 2sx - t)} \left\{ \left(\frac{Mq_1 - \beta Mq_0}{\alpha - \beta} \right) (x^{n+1} - \alpha^{n+1})(x - \beta) \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{Mq_1 - \alpha Mq_0}{\alpha - \beta} \right) (x^{n+1} - \beta^{n+1})(x - \alpha) \right\} \\
&= \frac{1}{x^n(x^2 - 2sx - t)} \left\{ \left(\frac{Mq_1 - \beta Mq_0}{\alpha - \beta} \right) (x^{n+2} - \beta x^{n+1} - x\alpha^{n+1} + \alpha^{n+1}\beta) \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{Mq_1 - \alpha Mq_0}{\alpha - \beta} \right) (x^{n+2} - \alpha x^{n+1} - x\beta^{n+1} + \beta^{n+1}\alpha) \right\}
\end{aligned}$$

bulunur. Burada, $\alpha + \beta = 2s$, $\alpha\beta = -t$ ve (s, t) -modified Pell matrisi için Binet formülü kullanılarak son eşitlik düzenlenirse

$$\sum_{k=0}^n \frac{Mq_k}{x^k} = \frac{1}{x^2 - 2sx - t} (x^{n+2}Mq_0 - x^{n+1}(2sMq_0 - Mq_1) - xMq_{n+1} - tMq_n)$$

olup buradan da gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n \frac{Mq_k}{x^k} &= \frac{1}{x^2 - 2sx - t} [xMq_1 + (x^2 - 2sx)Mq_0] \\
&\quad - \frac{1}{x^n(x^2 - 2sx - t)} (xMq_{n+1} + tMq_n)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 5.2.6 $j > m$ için,

$$\sum_{i=0}^n Mq_{mi+j} = \frac{1}{\alpha^m + \beta^m - (-t)^{m-1}} (Mq_{mn+m+j} + (-t)^m Mq_{j-m} - (-t)^m Mq_{mn+j} - Mq_j) \quad (5.30)$$

dir.

İspat : $E = \left(\frac{Mq_1 - \beta Mq_0}{\alpha - \beta} \right)$ ve $F = \left(\frac{Mq_1 - \alpha Mq_0}{\alpha - \beta} \right)$ olmak üzere, Teorem 5.2.1'i kullanarak,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^n Mq_{mi+j} &= \sum_{i=0}^n (E\alpha^{mi+j} - F\beta^{mi+j}) \\
&= E\alpha^j \sum_{i=0}^n \alpha^{mi} - F\beta^j \sum_{i=0}^n \beta^{mi}
\end{aligned}$$

eşitliği yazılır. Geometrik dizi tanımından,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n Mq_{mi+j} &= E\alpha^j \left(\frac{1 - \alpha^{m(n+1)}}{1 - \alpha^m} \right) - F\beta^j \left(\frac{1 - \beta^{m(n+1)}}{1 - \beta^m} \right) \\ &= \frac{(E\alpha^j - E\alpha^{mn+m+j})(1 - \beta^m) - (F\beta^j - F\beta^{mn+m+j})(1 - \alpha^m)}{(1 - \alpha^m)(1 - \beta^m)}\end{aligned}$$

olur. Bu son eşitlikte, $\alpha.\beta = -t$ olduğu da dikkate alınarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\sum_{i=0}^n Mq_{mi+j} = \frac{1}{\alpha^m + \beta^m - (-t)^m - 1} (Gq_{mn+m+j} + (-t)^m Gq_{j-m} - (-t)^m Mq_{mn+j} - Mq_j)$$

elde edilir.

Sıradaki teoremlerde (s, t) -modified Pell matris dizisinin sağladığı birtakım özellikler ve (s, t) -Pell matris dizisi ile olan bazı ilişkiler ifade ve ispat edilmiştir.

Teorem 5.2.7 $n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$i. Mq_n = sMP_n + tMP_{n-1}, \quad (5.31)$$

$$ii. 2Mq_1MP_n = MP_{n+2} + tMP_n \quad (5.32)$$

dır.

İspat :

i. Eşitliğin sağ tarafı dikkate alınarak ve $MP_n = \begin{pmatrix} P_{n+1}(s, t) & P_n(s, t) \\ tP_n(s, t) & tP_{n-1}(s, t) \end{pmatrix}$ [20] eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}sMP_n + tMP_{n-1} &= s \begin{pmatrix} P_{n+1}(s, t) & P_n(s, t) \\ tP_n(s, t) & tP_{n-1}(s, t) \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} P_n(s, t) & P_{n-1}(s, t) \\ tP_{n-1}(s, t) & tP_{n-2}(s, t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} sP_{n+1}(s, t) + tP_n(s, t) & sP_n(s, t) + tP_{n-1}(s, t) \\ t[sP_n(s, t) + tP_{n-1}(s, t)] & t[sP_{n-1}(s, t) + tP_{n-2}(s, t)] \end{pmatrix}\end{aligned}$$

elde edilir. Daha sonra elde edilen bu son eşitlikte Teorem 5.1.4 ve (5.21) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}sMP_n + tMP_{n-1} &= \begin{pmatrix} q_{n+1}(s, t) & q_n(s, t) \\ tq_n(s, t) & tq_{n-1}(s, t) \end{pmatrix} \\ &= Mq_n\end{aligned}$$

bulunur. Buradan ispat tamamlanmış olur.

ii. Eşitliğin sol tarafı dikkate alınarak ve $MP_n = \begin{pmatrix} P_{n+1}(s, t) & P_n(s, t) \\ tP_n(s, t) & tP_{n-1}(s, t) \end{pmatrix}$ [20] eşitliği kullanılırsa

$$2Mq_1MP_n = \begin{pmatrix} 4s^2 + 2t & 2s \\ 2st & 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{n+1}(s, t) & P_n(s, t) \\ tP_n(s, t) & tP_{n-1}(s, t) \end{pmatrix}$$

elde edilir. Gerekli matris işlemleri ile birlikte (s, t) -Pell dizisinin rekürans bağıntısı kullanıldığı takdirde

$$\begin{aligned} 2Mq_1MP_n &= \begin{pmatrix} P_{n+3}(s, t) & P_{n+2}(s, t) \\ tP_{n+2}(s, t) & tP_{n+1}(s, t) \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} P_{n+1}(s, t) & P_n(s, t) \\ tP_n(s, t) & tP_{n-1}(s, t) \end{pmatrix} \\ &= MP_{n+2} + tMP_n \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 5.2.8 $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$i. Mq_m Mq_n = Mq_n Mq_m, \quad (5.33)$$

$$ii. Mq_1 MP_n = MP_n Mq_1 = Mq_{n+1}, \quad (5.34)$$

$$iii. Mq_n MP_1 = MP_1 Mq_n = Mq_{n+1}, \quad (5.35)$$

$$iv. 2Mq_n = MP_{n+1} + tMP_{n-1} \quad (5.36)$$

dır.

İspat : Teorem 5.2.2, Teorem 5.2.7, matris çarpımı, (s, t) -modified Pell ve (s, t) -Pell dizilerinin rekürans bağıntıları kullanılarak kolay bir şekilde gösterilebilir.

Teorem 5.2.9 $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$Mq_{n+1}^m = Mq_1^m MP_{mn} \quad (5.37)$$

dır.

İspat : Teorem m üzerinden tümevarım ile ispatlanacaktır. O halde,

$m = 1$ için, Teorem 5.2.8 (ii) elde edilir ki bu ise $m = 1$ için doğru olmasıdır.

Şimdi ise, $1 \leq m \leq k$ için, teoremin doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$Mq_{n+1}^k = Mq_1^k MP_{kn} \quad (5.38)$$

olsun.

Son olarak, $m = k + 1$ için de bu teoremin doğru olduğunu gösterelim. (5.38) eşitliğinin her iki tarafını sağdan Mq_{n+1} ile çarpalım. Buradan

$$Mq_{n+1}^{k+1} = Mq_1^k MP_{kn} Mq_{n+1}$$

elde edilir. Daha sonra elde edilen bu son eşitlikte Teorem 5.2.8 (ii) kullanılırsa

$$\begin{aligned} Mq_{n+1}^{k+1} &= Mq_1^k MP_{kn} Mq_1 MP_n \\ &= Mq_1^k Mq_1 MP_{kn} MP_n \\ &= Mq_1^{k+1} MP_{kn} MP_n \end{aligned}$$

bulunur. Son olarak bulunan son bağıntıda $MP_m MP_n = MP_n MP_m = MP_{m+n}$ [20] eşitliği dikkate alındığı takdirde

$$Mq_{n+1}^{k+1} = Mq_1^{k+1} MP_{(k+1)n}$$

elde edilir ki bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 5.2.10 $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$i. Mq_m Mq_n = (s^2 + t) MP_{m+n}, \quad (5.39)$$

$$ii. Mq_m Mq_{n+1} = Mq_{m+1} Mq_n \quad (5.40)$$

dır.

İspat :

i. İlk olarak Teorem 5.2.7 (i) kullanılırsa

$$\begin{aligned} Mq_m Mq_n &= (sMP_m + tMP_{m-1})(sMP_n + tMP_{n-1}) \\ &= s^2 MP_m MP_n + stMP_m MP_{n-1} + stMP_{m-1} MP_n + t^2 MP_{m-1} MP_{n-1} \end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen son eşitlikte $MP_m MP_n = MP_n MP_m = MP_{m+n}$ [20] bağıntısı kullanıldığı takdirde

$$\begin{aligned} Mq_m Mq_n &= s^2 MP_{m+n} + 2stMP_{m+n-1} + t^2 MP_{m+n-2} \\ &= s^2 MP_{m+n} + t(2sMP_{m+n-1} + tMP_{m+n-2}) \end{aligned}$$

bulunur. Son olarak (s, t) -Pell matris dizisinin rekürans bağıntısı dikkate alınır

$$\begin{aligned} Mq_m Mq_n &= s^2 MP_{m+n} + tMP_{m+n} \\ &= (s^2 + t) MP_{m+n} \end{aligned}$$

elde edilir ki burada ilk özdeşliğin ispatı tamamlanmış olur.

ii. Bir önceki özdeşlikten,

$$\begin{aligned} Mq_m Mq_{n+1} &= (s^2 + t)MP_{m+n+1} \\ &= (s^2 + t)MP_{m+1+n} \\ &= Mq_{m+1}Mq_n \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 5.2.11 $m + n \geq 4$ olsun. $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$MP_n MP_m = 4sMq_{m+n-2} + t^2 MP_{m+n-4} \quad (5.41)$$

dır.

İspat : Eşitliğin sağ tarafı dikkate alınarak ve Teorem 5.2.7 (i) kullanılırsa

$$\begin{aligned} 4sMq_{m+n-2} + t^2 MP_{m+n-4} &= 4s(sMP_{m+n-2} + tMP_{m+n-3}) + t^2 MP_{m+n-4} \\ &= 4s^2 MP_{m+n-2} + 4stMP_{m+n-3} + t^2 MP_{m+n-4} \\ &= 4s^2 MP_{m+n-2} + 2stMP_{m+n-3} + 2stMP_{m+n-3} + t^2 MP_{m+n-4} \\ &= 2s(2sMP_{m+n-2} + tMP_{m+n-3}) + t(2sMP_{m+n-3} + tMP_{m+n-4}) \end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen son eşitlik, (s, t) -Pell matris dizisinin rekürans bağıntısı dikkate alınarak yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned} 4sMq_{m+n-2} + t^2 MP_{m+n-4} &= 2sMP_{m+n-1} + tMP_{m+n-2} \\ &= MP_{m+n} \end{aligned}$$

bulunur. Son olarak $MP_m MP_n = MP_n MP_m = MP_{m+n}$ [20] bağıntısı kullanılırsa

$$4sMq_{m+n-2} + t^2 MP_{m+n-4} = MP_n MP_m$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 5.2.12 $n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$MP_n Mq_{n+1} = Mq_{2n+1} \quad (5.42)$$

dır.

İspat : Teorem n üzerinden tümevarım ile ispatlanacaktır. O halde,

$n = 1$ için teoremin doğru olduğu kolayca görülebilir.

Şimdi ise, $1 \leq n \leq k$ için teoremin doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$MP_k Mq_{k+1} = Mq_{2k+1} \quad (5.43)$$

olsun. Son olarak, $n = k + 1$ için de bu ifadenin doğru olduğunu gösterelim.

Buradan (5.43) eşitliğini sağdan ve soldan MP_1 ile çarpalım. Buradan

$$MP_1 MP_k Mq_{k+1} MP_1 = MP_1 Mq_{2k+1} MP_1$$

elde edilir. Son olarak bulunan son eşitlikte $MP_m MP_n = MP_n MP_m = MP_{m+n}$ [20] ve Teorem 5.2.8 (iii) kullanılırsa

$$\begin{aligned} MP_{k+1} MP_{k+2} &= Mq_{2k+2} MP_1 \\ &= Mq_{2k+3} \end{aligned}$$

elde edilir ki, bu ise ispatı tamamlar.

6. GAUSS (s, t) -MODIFIED PELL DİZİSİ VE MATRİS GÖSTERİMİ

Bu bölümde, ilk olarak Gauss (s, t) -modified Pell dizisinin tanımı verilmiştir. Daha sonra bu dizi yardımıyla Gauss (s, t) -modified Pell matris dizisi tanımlanmıştır. Üstelik, bu dizilerin temel özellikleri incelenerek bu dizilere ait üreteç fonksiyonları, Binet formülleri ve bazı kısmi toplam formülleri verilmiştir. Son olarak, Gauss (s, t) -modified Pell ve Gauss (s, t) -Pell matris dizileri arasında bazı ilişkiler incelenmiştir.

6.1 Gauss (s, t) -Modified Pell Dizisi

İlk olarak, Gauss (s, t) -modified Pell dizisine ait rekürans bağıntısını vereceğiz.

Tanım 6.1.2 $s^2 + t > 0$ olacak şekildeki $s > 0$ ve $t \neq 0$ reel sayıları için, $Gq_0(s, t) = 1 - is$, $Gq_1(s, t) = s + it$ ve $n \geq 2$ olmak üzere,

$$Gq_n(s, t) = 2sGq_{n-1}(s, t) + tGq_{n-2}(s, t) \quad (6.1)$$

şeklinde tanımlanan $\{Gq_n(s, t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ sayı dizisine Gauss (s, t) -modified Pell sayı dizisi ve bu dizinin elemanlarına da Gauss (s, t) -modified Pell sayıları denir.

Belirtilmelidir ki, Tanım 6.1.2’de $s = t = 1$ alınırsa Gauss (s, t) -modified Pell dizisi, klasik Gauss modified Pell sayı dizisine dönüşür.

Üstelik, Teorem 2.1.1’den (6.1) ile verilen eşitliğin karakteristik denklemi $x^2 - 2sx - t = 0$ olup, bu denklemin kökleri de $x_1 = s + \sqrt{s^2 + t}$ ve $x_2 = s - \sqrt{s^2 + t}$ olarak elde edilir. Bunun yanı sıra bu kökler arasında

$$x_1 + x_2 = 2s, \quad x_1 - x_2 = 2\sqrt{s^2 + t}, \quad x_1 \cdot x_2 = -t \quad (6.2)$$

bağıntıları mevcuttur.

Ayrıca $q_n(s, t)$, n . (s, t) -modified Pell sayısı olmak üzere,

$$Gq_n(s, t) = q_n(s, t) + itq_{n-1}(s, t) \quad (6.3)$$

olduğu açıktır.

$Gq_n(s, t)$ dizisinin bazı elemanları aşağıdaki tabloda verilmiştir:

Çizelge 6.1. $Gq_n(s, t)$ dizisinin bazı elemanları.

n	$Gq_n(s, t)$
0	$1 - is$
1	$s + it$
2	$2s^2 + t + ist$
3	$4s^3 + 3st + it(2s^2 + t)$
4	$8s^4 + 8s^2t + t^2 + ist(4s^2 + 3t)$
$\vdots$	$\vdots$

Sıradaki teoremdede Gauss (s, t) -modified Pell dizisi için üretet fonksiyonunu ifade ve ispat edeceğiz.

Teorem 6.1.2 Gauss (s, t) -modified Pell dizisinin üretet fonksiyonu

$$S(x) = \frac{(1-sx)+i(-s+tx+2s^2x)}{1-2sx-tx^2} \quad (6.4)$$

dır.

İspat : Gauss (s, t) -modified Pell dizisinin üretet fonksiyonu $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Gq_n(s, t)x^n$ olsun.

O halde, bu üretet fonksiyonu

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Gq_n(s, t)x^n = Gq_0(s, t) + Gq_1(s, t)x + \dots + Gq_n(s, t)x^n + \dots \quad (6.5)$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi, (6.5) eşitliğini sırasıyla $2sx$ ve tx^2 ile çarpalım. Buradan

$$2sxS(x) = 2sGq_0(s, t)x + 2sGq_1(s, t)x^2 + \dots + 2sGq_{n-1}(s, t)x^n + \dots \quad (6.6)$$

ve

$$tx^2S(x) = tGq_0(s, t)x^2 + tGq_1(s, t)x^3 + \dots + tGq_{n-2}(s, t)x^n + \dots \quad (6.7)$$

elde edilir.

(6.6) eşitliği ile (6.7) eşitliğini taraf tarafa toplayıp, elde edilen sonucu (6.5) eşitliğinden çıkarırsak

$$S(x) (1 - 2sx - tx^2) = Gq_0(s, t) + [Gq_1(s, t) - 2sGq_0(s, t)]x \quad (6.8)$$

elde edilir. (6.8) eşitliğinde başlangıç koşulları yerine yazılarak gerekli işlemler yapılırsa,

$$S(x) = \frac{(1-sx)+i(-s+tx+2s^2x)}{1-2sx-tx^2} \quad (6.9)$$

elde edilir.

Sıradaki teorem n . Gauss (s, t) -modified Pell sayısını veren Binet formülünü vermektedir.

Teorem 6.1.3 Gauss (s, t) -modified Pell dizisine ait Binet formülü

$$Gq_n(s, t) = s \left(\frac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha + \beta} - i \frac{\beta \alpha^n + \alpha \beta^n}{\alpha + \beta} \right) \quad (6.10)$$

ile verilir. Burada, $\alpha = s + \sqrt{s^2 + t}$ ve $\beta = s - \sqrt{s^2 + t}$, $x^2 - 2sx - t = 0$ denkleminin kökleridir.

İspat : Teorem 2.1.1'den Gauss (s, t) -modified Pell dizisinin genel çözümü

$$Gq_n(s, t) = c\alpha^n + d\beta^n \quad (6.11)$$

şeklinde yazılabilir. Burada c ve d sabit sayılardır. Şimdi, (6.11) eşitliği başlangıç koşullarına göre yazılırsa

$$Gq_0(s, t) = c + d = 1 - is \quad (6.12)$$

$$Gq_1(s, t) = c\alpha + d\beta = s + it \quad (6.13)$$

elde edilir. (6.12) ve (6.13) eşitliklerinden c ve d değerleri

$$c = \frac{1-i\beta}{2} \text{ ve } d = \frac{1-i\alpha}{2}$$

şeklinde bulunur. Bulunan c ve d değerleri (6.11) eşitliğinde yerine yazılırsa genel çözüm

$$Gq_n(s, t) = \left(\frac{1}{2} - i \frac{\beta}{2} \right) \alpha^n + \left(\frac{1}{2} - i \frac{\alpha}{2} \right) \beta^n$$

olarak elde edilir. α ve β değerleri için $\alpha + \beta = 2s$ olduğundan, elde edilen son eşitlik

$$Gq_n(s, t) = s \left(\frac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha + \beta} - i \frac{\beta \alpha^n + \alpha \beta^n}{\alpha + \beta} \right) \quad (6.14)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Şimdi, Gauss (s, t) -modified Pell dizisine ait bazı kısmi toplamlar verilecektir.

Teorem 6.1.4 $2s + t \neq 1$ için, Gauss (s, t) -modified Pell dizisinin ardışık terimlerinin toplamı

$$\sum_{i=1}^n Gq_i(s, t) = \frac{1}{2s+t-1} [Gq_{n+1}(s, t) + tGq_n(s, t) - (s+t) + it(s-1)] \quad (6.15)$$

dir.

İspat : (6.1) eşitliği dikkate alınırsa,

$$Gq_{i-1}(s, t) = \frac{1}{2s} Gq_i(s, t) - \frac{t}{2s} Gq_{i-2}(s, t) \quad (6.16)$$

Şeklinde yeniden yazılabilir. Şimdi, (6.16) eşitliğinde i yerine sırasıyla $2, 3, 4, \dots, n+1$ yazılırsa

$$Gq_1(s, t) = \frac{1}{2s} Gq_2(s, t) - \frac{t}{2s} Gq_0(s, t)$$

$$Gq_2(s, t) = \frac{1}{2s} Gq_3(s, t) - \frac{t}{2s} Gq_1(s, t)$$

$$Gq_3(s, t) = \frac{1}{2s} Gq_4(s, t) - \frac{t}{2s} Gq_2(s, t)$$

$\vdots$

$$Gq_n(s, t) = \frac{1}{2s} Gq_{n+1}(s, t) - \frac{t}{2s} Gq_{n-1}(s, t)$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\sum_{i=1}^n Gq_i(s, t) = \frac{1}{2s} \sum_{i=2}^{n+1} Gq_i(s, t) - \frac{t}{2s} \sum_{i=0}^{n-1} Gq_i(s, t)$$

$$= \frac{1}{2s} \left(\sum_{i=1}^n Gq_i(s, t) - Gq_1(s, t) + Gq_{n+1}(s, t) \right) - \frac{t}{2s} \left(\sum_{i=1}^n Gq_i(s, t) + Gq_0(s, t) - Gq_n(s, t) \right)$$

elde edilir. Burada, $Gq_0(s, t) = 1 - is$ ve $Gq_1(s, t) = s + it$ başlangıç koşulları yerine yazılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\sum_{i=1}^n Gq_i(s, t) = \frac{1}{2s + t - 1} [Gq_{n+1}(s, t) + tGq_n(s, t) - (s + t) + it(s - 1)]$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 6.1.5 Gauss (s, t) -modified Pell dizisinin tek ve çift indisli terimleri toplamı sırasıyla

$$\sum_{i=1}^n Gq_{2i-1}(s, t) = \frac{(1-t)[Gq_{2n+1}(s, t) - s - it] + 2st[Gq_{2n}(s, t) - 1 + is]}{4s^2 - (1-t)^2}, \quad (6.17)$$

$$\sum_{i=1}^n Gq_{2i}(s, t) = \frac{Gq_{2n+2}(s, t) - t^2 Gq_{2n}(s, t) - (2s^2 - t^2 + t) - ist(t+1)}{4s^2 - (1-t)^2} \quad (6.18)$$

dir.

İspat : (6.1) eşitliği dikkate alınarak bu eşitlikte n yerine sırasıyla $1, 3, 5, \dots, 2n - 1$ yazılırsa

$$Gq_1(s, t) = 2sGq_0(s, t) + tGq_{-1}(s, t)$$

$$Gq_3(s, t) = 2sGq_2(s, t) + tGq_1(s, t)$$

$$Gq_5(s, t) = 2sGq_4(s, t) + tGq_3(s, t)$$

$\vdots$

$$Gq_{2n-1}(s, t) = 2sGq_{2n-2}(s, t) + tGq_{2n-3}(s, t)$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\sum_{i=1}^n Gq_{2i-1}(s, t) = \frac{2s \sum_{i=1}^n Gq_{2i}(s, t) - Gq_{2n+1}(s, t) + Gq_1(s, t)}{1-t} \quad (6.19)$$

bulunur.

Benzer şekilde, (6.1) eşitliği dikkate alınarak bu eşitlikte n yerine sırasıyla $2, 4, 6, \dots, 2n$ yazılırsa

$$Gq_2(s, t) = 2sGq_1(s, t) + tGq_0(s, t)$$

$$Gq_4(s, t) = 2sGq_3(s, t) + tGq_2(s, t)$$

$$Gq_6(s, t) = 2sGq_5(s, t) + tGq_4(s, t)$$

$\vdots$

$$Gq_{2n}(s, t) = 2sGq_{2n-1}(s, t) + tGq_{2n-2}(s, t)$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\sum_{i=1}^n Gq_{2i}(s, t) = \frac{2s \sum_{i=1}^n Gq_{2i-1}(s, t) - tGq_{2n}(s, t) + tGq_0(s, t)}{1-t} \quad (6.20)$$

bulunur.

(6.19) ve (6.20) eşitliklerinde başlangıç koşulları yerine yazılarak bu eşitlikler birlikte düşünüldüğü takdirde

$$\sum_{i=1}^n Gq_{2i-1}(s, t) = \frac{(1-t)[Gq_{2n+1}(s, t) - s - it] + 2st[Gq_{2n}(s, t) - 1 + is]}{4s^2 - (1-t)^2}$$

ve

$$\sum_{i=1}^n Gq_{2i}(s, t) = \frac{Gq_{2n+2}(s, t) - t^2 Gq_{2n}(s, t) - (2s^2 - t^2 + t) - ist(t+1)}{4s^2 - (1-t)^2}$$

elde edilir.

Sıradaki teorem ile Gauss (s, t) -modified Pell dizisi ile ilişkili olan Catalan özdeşliğini ifade ve ispat edelim.

Teorem 6.1.6 $n \geq 0$ ve $n \geq r$ olsun. Bu takdirde

$$Gq_{n+r}(s, t)Gq_{n-r}(s, t) - Gq_n^2(s, t) = \frac{(t+1-2is)(-t)^{n-r}(\alpha^r - \beta^r)^2}{4} \quad (6.21)$$

dir.

İspat : $A = 1 - \beta i$ ve $B = 1 - \alpha i$ olsun. O halde (6.1.10) eşitliği göz önüne alınırsa

$$Gq_{n+r}(s, t)Gq_{n-r}(s, t) - Gq_n^2(s, t) \\ = \left(s \frac{A\alpha^{n+r} + B\beta^{n+r}}{\alpha + \beta} \right) \left(s \frac{A\alpha^{n-r} + B\beta^{n-r}}{\alpha + \beta} \right) - \left(s \frac{A\alpha^n + B\beta^n}{\alpha + \beta} \right)^2$$

yazılabilir. Daha sonra yazılan bu son eşitlik gerekli işlemler yapılarak düzenlenirse

$$Gq_{n+r}(s, t)Gq_{n-r}(s, t) - Gq_n^2(s, t) = s^2 \left[\frac{AB\alpha^{n-r}\beta^{n-r}(\alpha^{2r} + \beta^{2r} - 2\alpha^r\beta^r)}{(\alpha + \beta)^2} \right]$$

bulunur. Burada $A.B = t + 1 - 2is$, $\alpha\beta = -t$ ve $\alpha + \beta = 2s$ olduğundan gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$Gq_{n+r}(s, t)Gq_{n-r}(s, t) - Gq_n^2(s, t) = \frac{(t + 1 - 2is)(-t)^{n-r}(\alpha^r - \beta^r)^2}{4}$$

elde edilir.

Teorem 6.1.6'de $r = 1$ alınırsa Gauss (s, t) -modified Pell dizisi için Cassini özdeşliği elde edilir. Bu özdeşlik ise aşağıda sonuç olarak verilmiştir.

Sonuç 6.1.1 n pozitif tam sayısı için,

$$Gq_{n+1}(s, t)Gq_{n-1}(s, t) - Gq_n^2(s, t) = (s^2 + t)(t + 1 - 2is)(-t)^{n-1} \quad (6.22)$$

dir.

6.2 Gauss (s, t) -Modified Pell Matris Dizisi

İlk olarak, Gauss (s, t) -modified Pell matris dizisine ait rekürans bağıntısını vereceğiz.

Tanım 6.2.1 $s^2 + t > 0$ olacak şekildeki $s > 0$ ve $t \neq 0$ reel sayıları için,

$$MGq_0(s, t) = \begin{pmatrix} s + it & 1 - is \\ t - ist & -s + i(2s^2 + t) \end{pmatrix},$$

$$MGq_1(s, t) = \begin{pmatrix} 2s^2 + t + ist & s + it \\ st + it^2 & t - ist \end{pmatrix}$$

ve $n \geq 2$ olmak üzere,

$$MGq_n(s, t) = 2sMGq_{n-1}(s, t) + tMGq_{n-2}(s, t) \quad (6.23)$$

şeklinde tanımlanan $\{MGq_n(s, t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ sayı dizisine Gauss (s, t) -modified Pell matris dizisi denir.

Ayrıca, n . (s, t) -modified Pell matrisi $Mq_n(s, t)$ olmak üzere,

$$MGq_n(s, t) = Mq_n(s, t) + itMq_{n-1}(s, t) \quad (6.24)$$

olduğu açıktır.

Bundan sonra, gösterimde kolaylık olması için $MGq_n(s, t)$ ile gösterilen Gauss (s, t) -modified Pell matris dizisinin genel terimi, MGq_n ve $Mq_n(s, t)$ ile gösterilen (s, t) -modified Pell matris dizisinin genel terimi, Mq_n ile gösterilecektir.

Aşağıdaki teorem n . Gauss (s, t) -modified Pell matrisi için Binet formülünü vermektedir.

Teorem 6.2.1 α ve β (6.2.1) ile verilen eşitliğin karakteristik denkleminin kökleri olmak üzere, $n \geq 0$ için

$$MGq_n = \left(\frac{MGq_1 - \beta MGq_0}{\alpha - \beta} \right) \alpha^n - \left(\frac{MGq_1 - \alpha MGq_0}{\alpha - \beta} \right) \beta^n \quad (6.25)$$

dir.

İspat : (6.23) denkleminin genel çözümü Teorem 2.1.1'den

$$MGq_n = c\alpha^n + d\beta^n \quad (6.26)$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi (6.26) eşitliği başlangıç koşullarına göre yazıldığında, $MGq_0 = c + d$ ve $MGq_1 = c\alpha + d\beta$ elde edilir. Buradan

$$c = \frac{MGq_1 - \beta MGq_0}{\alpha - \beta} \text{ ve } d = -\frac{MGq_1 - \alpha MGq_0}{\alpha - \beta}$$

bulunur. Bulunan c ve d değerleri (6.26) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$MGq_n = \left(\frac{MGq_1 - \beta MGq_0}{\alpha - \beta} \right) \alpha^n - \left(\frac{MGq_1 - \alpha MGq_0}{\alpha - \beta} \right) \beta^n$$

elde edilir.

Aşağıda verilen teorem, Gauss (s, t) -modified Pell sayı dizisi ile Gauss (s, t) -modified Pell matris dizisi arasındaki bağıntıyı sunmaktadır.

Teorem 6.2.2 $n > 0$ için,

$$MGq_n = \begin{pmatrix} Gq_{n+1}(s, t) & Gq_n(s, t) \\ tGq_n(s, t) & tGq_{n-1}(s, t) \end{pmatrix} \quad (6.27)$$

dir.

İspat : Teorem n üzerinden tümevarım ile ispatlanacaktır. O halde,

$n = 1$ için,

$$MGq_1 = \begin{pmatrix} Gq_2(s, t) & Gq_1(s, t) \\ tGq_1(s, t) & tGq_0(s, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s^2 + t + ist & s + it \\ st + it^2 & t - ist \end{pmatrix}$$

elde edilir ki, $n = 1$ için iddia doğrudur.

Şimdi ise, $1 \leq n \leq k$ için, (6.27) bağıntısının doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$MGq_k = \begin{pmatrix} Gq_{k+1}(s, t) & Gq_k(s, t) \\ tGq_k(s, t) & tGq_{k-1}(s, t) \end{pmatrix} \quad (6.28)$$

olsun. Son olarak, $n = k + 1$ için de bu ifadenin doğru olduğunu gösterelim.

Buradan (6.1), (6.23) ve (6.28) denklemlerini kullanarak,

$$\begin{aligned} MGq_{k+1} &= 2sMGq_k + tMGq_{k-1} \\ &= 2s \begin{pmatrix} Gq_{k+1}(s, t) & Gq_k(s, t) \\ tGq_k(s, t) & tGq_{k-1}(s, t) \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} Gq_k(s, t) & Gq_{k-1}(s, t) \\ tGq_{k-1}(s, t) & tGq_{k-2}(s, t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2sGq_{k+1}(s, t) + tGq_k(s, t) & 2sGq_k(s, t) + tGq_{k-1}(s, t) \\ 2stGq_k(s, t) + t^2Gq_{k-1}(s, t) & 2stGq_{k-1}(s, t) + t^2Gq_{k-2}(s, t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Gq_{k+2}(s, t) & Gq_{k+1}(s, t) \\ tGq_{k+1}(s, t) & tGq_k(s, t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ki, bu ispatı tamamlar.

Sıradaki teorem Gauss (s, t) -modified Pell matris dizisi için üreteç fonksiyonunu vermektedir.

Teorem 6.2.3 Gauss (s, t) -modified Pell matris dizisinin üreteç fonksiyonu

$$T(x) = \frac{1}{1-2sx-tx^2} \left[\begin{pmatrix} s + it & 1 - is \\ t - ist & -s + i(2s^2 + t) \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} t - ist & -s + i(2s^2 + t) \\ -st + it(2s^2 + t) & 2s^2 + t - is(4s^2 + 3t) \end{pmatrix} \right] \quad (6.29)$$

dir.

İspat : Gauss (s, t) -modified Pell matris dizisinin üreteç fonksiyonu

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} MGq_n x^n \text{ olsun.}$$

O halde, bu üreteç fonksiyonu

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} MGq_n x^n = MGq_0 + MGq_1 x + MGq_2 x^2 + \cdots + MGq_n x^n + \cdots$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi de (6.23) eşitliği ile verilen bu dizinin rekürans bağıntısı kullanılarak

$$T(x) (1 - 2sx - tx^2) = MGq_0 + [MGq_1 - 2sMGq_0]x \quad (6.30)$$

bulunur. (6.30) eşitliğinde başlangıç koşulları yerine yazılarak gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$T(x) = \frac{1}{1 - 2sx - tx^2} \left[\begin{pmatrix} s + it & 1 - is \\ t - ist & -s + i(2s^2 + t) \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} t - ist & -s + i(2s^2 + t) \\ -st + it(2s^2 + t) & 2s^2 + t - is(4s^2 + 3t) \end{pmatrix} \right]$$

elde edilir.

Aşağıda verilen teoremlerde, Gauss (s, t) -modified Pell matris dizisinin bazı kısmi toplamsal özellikleri incelenmiştir.

Teorem 6.2.4 $2s + t \neq 1$ için, Gauss (s, t) -modified Pell matris dizisinin ardışık terimlerinin toplamı

$$\sum_{i=1}^n MGq_i = \frac{1}{2s+t-1} [MGq_{n+1} + tMGq_n - MGq_2 + (2s-1)MGq_1] \quad (6.31)$$

dir.

İspat : (6.23) eşitliği dikkate alınırsa

$$-tMGq_{i-2} = -MGq_i + 2sMGq_{i-1} \quad (6.32)$$

şeklinde yazılabilir.

(6.32) eşitliği $i = 3, 4, 5, \dots, n+2$ için yazılırsa

$$-tMGq_1 = -MGq_3 + 2sMGq_2$$

$$-tMGq_2 = -MGq_4 + 2sMGq_3$$

$$-tMGq_3 = -MGq_5 + 2sMGq_4$$

$\vdots$

$$-tMGq_n = -MGq_{n+2} + 2sMGq_{n+1}$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$-t \sum_{i=1}^n MGq_i = (2s-1)(MGq_3 + MGq_4 + \dots + MGq_{n+1}) - MGq_{n+2} + 2sMGq_2$$

bulunur. Bulunan son eşitlikte gerekli işlem ve düzenlemeler yapıldığı takdirde

$$\sum_{i=1}^n MGq_i = \frac{1}{2s+t-1} [MGq_{n+1} + tMGq_n - MGq_2 + (2s-1)MGq_1]$$

elde edilir.

Teorem 6.2.5 Gauss (s, t) -modified Pell matris dizisinin tek ve çift indisli terimleri toplamı sırasıyla

$$\sum_{i=1}^n MGq_{2i-1} = \frac{(1-t)(MGq_{2n+1}-MGq_1)+2st(MGq_{2n}-MGq_0)}{4s^2-(1-t)^2}, \quad (6.33)$$

$$\sum_{i=1}^n MGq_{2i} = \frac{MGq_{2n+2}-MGq_2-t^2(MGq_{2n}-MGq_0)}{4s^2-(1-t)^2} \quad (6.34)$$

dir.

İspat : Teorem 6.1.5'in ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 6.2.6 $s^2 + t > 0$ olacak şekildeki $s > 0$ ve $t \neq 0$ reel sayıları için,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{MGq_k}{x^k} &= \frac{1}{x^2 - 2sx - t} [xMGq_1 + (x^2 - 2sx)MGq_0] \\ &\quad - \frac{1}{x^n(x^2 - 2sx - t)} (xMGq_{n+1} + tMGq_n) \end{aligned} \quad (6.35)$$

dir.

İspat : Teorem 6.2.1'den,

$$\sum_{k=0}^n \frac{MGq_k}{x^k} = \left(\frac{MGq_1 - \beta MGq_0}{\alpha - \beta} \right) \sum_{k=0}^n \left(\frac{\alpha}{x} \right)^k - \left(\frac{MGq_1 - \alpha MGq_0}{\alpha - \beta} \right) \sum_{k=0}^n \left(\frac{\beta}{x} \right)^k$$

eşitliği yazılabilir. Daha sonra, bu eşitlikte geometrik dizi tanımını kullanılarak

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{MGq_k}{x^k} &= \left(\frac{MGq_1 - \beta MGq_0}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{1 - \left(\frac{\alpha}{x} \right)^{n+1}}{1 - \frac{\alpha}{x}} \right) \\ &\quad - \left(\frac{MGq_1 - \alpha MGq_0}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{1 - \left(\frac{\beta}{x} \right)^{n+1}}{1 - \frac{\beta}{x}} \right) \\ &= \left(\frac{MGq_1 - \beta MGq_0}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{x^{n+1} - \alpha^{n+1}}{x^{n+1} \left(\frac{x - \alpha}{x} \right)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{MGq_1 - \alpha MGq_0}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{x^{n+1} - \beta^{n+1}}{x^{n+1} \left(\frac{x - \beta}{x} \right)} \right) \\
& = \frac{1}{x^n} \left[\left(\frac{MGq_1 - \beta MGq_0}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{x^{n+1} - \alpha^{n+1}}{x - \alpha} \right) \right. \\
& \quad \left. - \left(\frac{MGq_1 - \alpha MGq_0}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{x^{n+1} - \beta^{n+1}}{x - \beta} \right) \right] \\
& = \frac{1}{x^n(x^2 - 2sx - t)} \left\{ \left(\frac{MGq_1 - \beta MGq_0}{\alpha - \beta} \right) (x^{n+1} - \alpha^{n+1})(x - \beta) \right. \\
& \quad \left. - \left(\frac{MGq_1 - \alpha MGq_0}{\alpha - \beta} \right) (x^{n+1} - \beta^{n+1})(x - \alpha) \right\} \\
& = \frac{1}{x^n(x^2 - 2sx - t)} \left\{ \left(\frac{MGq_1 - \beta MGq_0}{\alpha - \beta} \right) \right. \\
& \quad \times (x^{n+2} - \beta x^{n+1} - x \alpha^{n+1} + \alpha^{n+1} \beta) \\
& \quad \left. - \left(\frac{MGq_1 - \alpha MGq_0}{\alpha - \beta} \right) \right. \\
& \quad \times (x^{n+2} - \alpha x^{n+1} - x \beta^{n+1} + \beta^{n+1} \alpha) \left. \right\}
\end{aligned}$$

bulunur. Burada, $\alpha + \beta = 2s$, $\alpha \cdot \beta = -t$ bağıntıları ve Gauss (s, t) -modified Pell matrisi için Binet formülü kullanılarak son eşitlik düzenlenirse

$$\sum_{k=0}^n \frac{MGq_k}{x^k} = \frac{1}{x^2 - 2sx - t} (x^{n+2} MGq_0 - x^{n+1} (2s MGq_0 - MGq_1) - x MGq_{n+1} - t MGq_n)$$

olup buradan da gerekli düzenlemeler yapılarak,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n \frac{MGq_k}{x^k} &= \frac{1}{x^2 - 2sx - t} [x MGq_1 + (x^2 - 2sx) MGq_0] \\
&\quad - \frac{1}{x^n(x^2 - 2sx - t)} (x MGq_{n+1} + t MGq_n)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 6.2.7 $j > m$ için,

$$\sum_{i=0}^n MGq_{mi+j} = \frac{1}{\alpha^m + \beta^m - (-t)^m - 1} [MGq_{mn+m+j} + (-t)^m MGq_{j-m}]$$

$$-(-t)^m MGq_{mn+j} - MGq_j] \quad (6.36)$$

dir.

İspat : $A = \left(\frac{MGq_1 - \beta MGq_0}{\alpha - \beta} \right)$ ve $B = \left(\frac{MGq_1 - \alpha MGq_0}{\alpha - \beta} \right)$ olmak üzere, Teorem 6.2.1'i kullanarak

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n MGq_{mi+j} &= \sum_{i=0}^n (A\alpha^{mi+j} - B\beta^{mi+j}) \\ &= A\alpha^j \sum_{i=0}^n \alpha^{mi} - B\beta^j \sum_{i=0}^n \beta^{mi} \end{aligned}$$

eşitliği yazılır. Geometrik dizi tanımından,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n MGq_{mi+j} &= A\alpha^j \left(\frac{1 - \alpha^{m(n+1)}}{1 - \alpha^m} \right) - B\beta^j \left(\frac{1 - \beta^{m(n+1)}}{1 - \beta^m} \right) \\ &= \frac{(A\alpha^j - A\alpha^{mn+m+j})(1 - \beta^m) - (B\beta^j - B\beta^{mn+m+j})(1 - \alpha^m)}{(1 - \alpha^m)(1 - \beta^m)} \end{aligned}$$

dır. Bu son eşitlikte, $\alpha, \beta = -t$ olduğu da dikkate alınarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n MGq_{mi+j} &= \frac{1}{\alpha^m + \beta^m - (-t)^m - 1} [MGq_{mn+m+j} + (-t)^m MGq_{j-m} \\ &\quad - (-t)^m MGq_{mn+j} - MGq_j] \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 6.2.8 $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$i. MGq_m MGq_n = MGq_n MGq_m \quad (6.37)$$

$$ii. MGq_m MGq_{n+1} = MGq_{m+1} MGq_n \quad (6.38)$$

dir.

İspat :

i. İlk olarak (6.24) eşitliği dikkate alınırsa

$$MGq_m MGq_n = (Mq_m + itMq_{m-1})(Mq_n + itMq_{n-1})$$

yazılabilir. Daha sonra matris çarpımı kullanılarak

$$MGq_m MGq_n = Mq_m Mq_n + itMq_m Mq_{n-1} + itMq_{m-1} Mq_n - t^2 Mq_{m-1} Mq_{n-1}$$

bulunur.

Teorem 5.2.8 (ii) ve Teorem 5.2.10 (ii) göz önüne alındığı takdirde,

$$\begin{aligned} MGq_m MGq_n &= Mq_n Mq_m + itMq_n Mq_{m-1} + itMq_{n-1} Mq_m - t^2 Mq_{n-1} Mq_{m-1} \\ &= (Mq_n + itMq_{n-1})(Mq_m + itMq_{m-1}) \\ &= MGq_n MGq_m \end{aligned}$$

elde edilir.

ii. İlk olarak (6.24) eşitliği dikkate alınır

$$MGq_m MGq_{n+1} = (Mq_m + itMq_{m-1})(Mq_{n+1} + itMq_n)$$

yazılabilir. Daha sonra matris çarpımı kullanılarak

$$MGq_m MGq_{n+1} = Mq_m Mq_{n+1} + itMq_m Mq_n + itMq_{m-1} Mq_{n+1} - t^2 Mq_{m-1} Mq_n$$

bulunur.

Teorem 5.2.10 (ii) göz önüne alındığı takdirde

$$\begin{aligned} MGq_m MGq_{n+1} &= Mq_{m+1} Mq_n + itMq_{m+1} Mq_{n-1} + itMq_m Mq_n - t^2 Mq_m Mq_{n-1} \\ &= (Mq_{m+1} + itMq_m)(Mq_n + itMq_{n-1}) \\ &= MGq_{m+1} MGq_n \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 6.2.9 $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$i. MGq_n = sMGP_n + tMGP_{n-1} \quad (6.39)$$

$$ii. 2MGq_n = MGP_{n+1} + tMGP_{n-1} \quad (6.40)$$

dir.

İspat :

i. Denklemin sağ tarafı dikkate alınarak $MGP_n = MP_n + itMP_{n-1}$ [36] eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} sMGP_n + tMGP_{n-1} &= s(MP_n + itMP_{n-1}) + t(MP_{n-1} + itMP_{n-2}) \\ &= (sMP_n + tMP_{n-1}) + it(MP_{n-1} + tMP_{n-2}) \end{aligned}$$

yazılır. Daha sonra Teorem 5.2.7 (i) dikkate alınarak,

$$sMGP_n + tMGP_{n-1} = Mq_n + itMq_{n-1}$$

bulunur. Son olarak (6.24) eşitliğinden,

$$sMGP_n + tMGP_{n-1} = MGq_n$$

elde edilir.

ii. Denklemin sağ tarafı dikkate alınarak $MGP_n = MP_n + itMP_{n-1}$ [36] eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} MGP_{n+1} + tMGP_{n-1} &= (MP_{n+1} + itMP_n) + t(MP_{n-1} + itMP_{n-2}) \\ &= (MP_{n+1} + tMP_{n-1}) + it(MP_n + tMP_{n-2}) \end{aligned}$$

yazılır. Daha sonra Teorem 5.2.8 (iv) dikkate alınarak

$$\begin{aligned} MGP_{n+1} + tMGP_{n-1} &= 2Mq_n + 2itMq_{n-1} \\ &= 2(Mq_n + itMq_{n-1}) \end{aligned}$$

bulunur. Son olarak (6.24) eşitliğinden,

$$MGP_{n+1} + tMGP_{n-1} = 2MGq_n$$

elde edilir.

Son olarak, Gauss (s, t) -modified Pell matris dizisi ile ilişkili olan Catalan özdeşliğini aşağıdaki teorem ile ifade ve ispat edeceğiz.

Teorem 6.2.10 $n \geq 0$ ve $n \geq r$ için,

$$MGq_{n-r}MGq_{n+r} = MGq_n^2 \quad (6.41)$$

dir.

İspat : $A = MGq_1 - \beta MGq_0$ ve $B = MGq_1 - \alpha MGq_0$ olmak üzere (6.25) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& MGq_{n-r}MGq_{n+r} - MGq_n^2 \\
&= \left(\frac{A\alpha^{n-r} - B\beta^{n-r}}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{A\alpha^{n+r} - B\beta^{n+r}}{\alpha - \beta} \right) - \left(\frac{A\alpha^n - B\beta^n}{\alpha - \beta} \right)^2 \\
&= \frac{AB\alpha^{n-r}\beta^{n-r}(2\alpha^r\beta^r - \alpha^{2r} - \beta^{2r})}{(\alpha - \beta)^2}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada $A.B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olduğundan,

$$MGq_{n-r}MGq_{n+r} = MGq_n^2$$

bulunur.



7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmanın temelini Gauss modified Pell sayıları oluşturmaktadır. İlk olarak Gauss modified Pell sayı dizisi tanımlanmış ve bu sayı dizisinin bazı kombinatorial özellikleri incelenmiştir. Daha sonra, bu sayı dizisinin geliştirilmesi olarak Gauss modified Pell polinom dizisi ve Gauss (s, t) -modified Pell dizisi tanımlanmıştır. Üstelik, bu iki dizinin birtakım özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, elemanları Gauss (s, t) -modified Pell sayıları olan Gauss (s, t) -modified Pell matris dizisi tanımlanarak bu diziye ait bazı özellikler incelenmiştir.

Tanımlanan her üç diziye ait özellikler araştırılmaya devam edilebilir. Ayrıca, bu dizilerin literatürde mevcut olan aynı karakteristik denkleme sahip diğer sayı dizileriyle olan ilişkileri de incelenebilir.

KAYNAKLAR

1. Yılmaz, M., 2017. Gauss Balans ve Gauss Kobalans sayıları üzerine, Yüksek Lisans Tezi, Pamukkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Denizli.
2. Koshy, T., 2001. Fibonacci and Lucas numbers with applications, First Edition, John Wiley and Sons, New York, USA.
3. Hoggatt, V.E. Jr., 1969. Fibonacci and Lucas numbers, Spiral Edition, Houghton Mifflin Company, Boston, USA.
4. Horadam, A.F., 1971. Pell identities, Fibonacci Quarterly, 9, 3, 245-263.
5. Horadam, A.F., 1994. Applications of modified Pell numbers to representations, Ulam Quarterly, 3, 1, 34-53.
6. Horadam, A.F., 1996. Jacobsthal representation numbers, Fibonacci Quarterly, 34, 40-54.
7. Koshy, T., 2014. Pell and Pell-Lucas numbers with applications, First Edition, Springer, New York, USA.
8. Melham, R., 1999. Sums involving Fibonacci and Pell numbers, Portugaliae Mathematica, 56, 3, 309-318.
9. Vajda, S., 1989. Fibonacci and Lucas numbers, and the golden section, theory and applications, John Wiley and Sons, New York, USA.
10. Yağmur, T., 2019. New approach to Pell and Pell-Lucas sequences, Kyungpook Mathematical Journal, 59, 1, 23-34.
11. Horadam, A.F., 1965. Basic properties of a certain generalized sequence of numbers, Fibonacci Quarterly, 3, 3, 161-176.
12. Hoggatt, V.E. Jr. and Bicknell, M., 1973. Roots of Fibonacci polynomials, The Fibonacci Quarterly, 11, 3, 271-274.
13. Horadam, A.F., 1997. Jacobsthal representation polynomials, Fibonacci Quarterly, 35, 137-148.
14. Horadam, A.F. ve Mahon, J.M., 1985. Pell and Pell-Lucas polynomials, Fibonacci Quarterly, 23, 1, 7-20.
15. Horzum, T. ve Kocer, E. G., 2009. On some properties of Horadam polynomials, International Mathematical Forum, 4, 25, 1243-1252.
16. Yuan, Y. ve Zhang, W., 2002. Some identities involving the Fibonacci polynomials, The Fibonacci Quarterly, 40, 314-318.

17. Cıvcıv, H. ve Türkmen, R., 2008a. Notes on the (s, t) -Lucas and Lucas matrix sequences, *Ars Combinatoria*, 89, 271-285.
18. Cıvcıv, H. ve Türkmen, R., 2008b. On the (s, t) -Fibonacci and Fibonacci matrix sequences, *Ars Combinatoria*, 87, 161-173.
19. Daşdemir, A., 2011. On the Pell, Pell-Lucas and modified Pell numbers by matrix method, *Applied Mathematical Sciences*, 5, 64, 3173-3181.
20. Güleç, H.H. ve Taşkara, N., 2012. On the (s, t) -Pell and (s, t) -Pell-Lucas sequences and their matrix representations, *Applied Mathematics Letters*, 25, 10, 1554-1559.
21. Sylvester, J.R., 1979. Fibonacci properties by matrix methods, *The Mathematical Gazette*, 63, 425, 188-191.
22. Uslu, K. ve Uygun Ş., 2013. The (s, t) -Jacobsthal and (s, t) -Jacobsthal-Lucas matrix sequences, *Ars Combinatoria*, 108, 13-22.
23. Uygun, Ş., 2015. The (s, t) -Jacobsthal and (s, t) -Jacobsthal-Lucas sequences, *Applied Mathematical Sciences*, 9, 70, 3467-3476.
24. Yazlık, Y., 2013. Genelleştirilmiş k-Horadam dizisi ve matris temsilleri, Doktora Tezi, Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.
25. Aşçı, M. ve Gürel, E., 2013a. Gaussian Jacobsthal and Gaussian Jacobsthal Lucas numbers, *Ars Combinatoria*, 111, 53-63.
26. Berzsenyi, G., 1977. Gaussian Fibonacci numbers, *Fibonacci Quarterly*, 15, 3, 233-236.
27. Catarino, P. ve Campos, H., 2018. A note on Gaussian modified Pell numbers, *Journal of Information & Optimization Sciences*, 39, 6, 1363-1371.
28. Good, I.J., 1993. Complex Fibonacci and Lucas numbers, continued fractions, and the square root of the golden ratio, *Fibonacci Quarterly*, 31, 1, 7-20.
29. Halıcı, S. ve Öz, S., 2016. On some Gaussian Pell and Pell-Lucas Numbers, *Ordu University Science and Technology Journal*, 6, 1, 8-18.
30. Horadam, A.F., 1963. Complex Fibonacci numbers and Fibonacci quaternions, *American Mathematics Monthly*, 70, 289-291.
31. Jordan, J.H., 1965. Gaussian Fibonacci and Lucas numbers, *Fibonacci Quarterly*, 3, 315-318.

32. Yağmur, T. ve Karaaslan, N., 2018. Gaussian modified Pell sequence and Gaussian modified Pell polynomial sequence, *Aksaray Journal of Science and Engineering*, 2, 1, 63-72.
33. Aşçı, M. ve Gürel, E., 2013b. Gaussian Jacobsthal and Gaussian Jacobsthal Lucas polynomials, *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 19, 1, 25-36.
34. Halıcı, S. ve Öz, S., 2018. Gaussian Pell polynomials and their some properties, *Palestine Journal of Mathematics* 7, 1, 251-256.
35. Pethe, S. ve Horadam, A.F., 1986. Generalized Gaussian Fibonacci numbers, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 33, 1, 37-48.
36. Karaaslan, N. ve Yağmur, T., 2019. Gaussian (s, t) -Pell and Pell-Lucas sequences and their matrix representations, *BEU Journal of Science*, 8, 1, 46-59.
37. Pektaş, P., 2015. (s, t) -Gauss Fibonacci ve Lucas sayılarının kombinatorial özellikleri üzerine, Yüksek Lisans Tezi, Pamukkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Denizli.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Nusret KARAASLAN
Adres : Dağdibi Ortaokulu, Kalkandere / RİZE
E-posta adresi : nusret5301@gmail.com

EĞİTİM BİLGİLERİ

Lisans : Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi, 2013-2017
Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Anabilim Dalı, 2017-Devam ediyor

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLERİ

1. İlköğretim Matematik Öğretmeni, Dağdibi Ortaokulu, Kalkandere / RİZE, 2019-Devam ediyor.

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER

Ulusal/Uluslararası Hakemli Dergilerde Yayınlanan Makaleler

1. Yağmur, T. ve Karaaslan, N., 2018. Gaussian modified Pell sequence and Gaussian modified Pell polynomial sequence, Aksaray Journal of Science and Engineering, 2, 1, 63-72.
2. Karaaslan, N. ve Yağmur, T., 2019. (s, t) -modified Pell sequence and its matrix representation, Erzincan University Journal of Science and Technology. (kabul edildi)
3. Yağmur, T. ve Karaaslan, N. Gaussian (s, t) -modified Pell sequence and its matrix representation. (hazırlanıyor)

Kongrelerde Sunulan Bildiriler

1. Yağmur, T. ve Karaaslan, N., 2018. Gaussian modified Pell sequence, ICMSA2018, Karaman, 4-6 Ekim, pp.14, (Özet Bildiri / Sözlü Sunum).