



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

GAUSS PELL KUATERNİYON POLİNOMLAR ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mevlüt DUZCU

DANIŞMAN

Dr. Öğr. Üyesi Tülay YAĞMUR

AKSARAY, 2022

Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 202342409 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi Mevlüt DUZCU tarafından hazırlanan “**GAUSS PELL KUATERNİYON POLİNOMLAR ÜZERİNE**” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OYBİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Tülay YAĞMUR

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Prof. Dr. Mehmet ATÇEKEN

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Lale CONA

Gümüşhane Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 29 / 12 / 2022

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Mehmet Ali HINIS

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmamda kullandığım verilerin orijinalliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Mevlüt DUZCU

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın yürütülmesi sırasında desteğini esirgemeyerek yol gösteren değerli danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Tülay YAĞMUR'a teşekkür ederim. Ayrıca, yoğun çalışmalarım sırasında sabır gösterdiği ve bana katlandığı için kıymetli eşime, motivasyon desteği ile birlikte maddi ve manevi her zaman yanımda olan çok değerli ağabeyime ve çalışmam sırasında yardımlarını esirgemeyen herkese teşekkür ederim.

Mevlüt DUZCU
AKSARAY, 2022



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR	v
1. GİRİŞ	1
2. ÖN BİLGİLER VE LİTERATÜR ÇALIŞMASI	2
2.1 Kuaterniyonlar	2
2.2 Fibonacci Sayıları ve Bazı Uygulamaları.....	3
2.3 Pell Sayıları ve Bazı Uygulamaları	5
3. GAUSS PELL KUATERNİYON POLİNOMLARI	10
4. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	37
KAYNAKLAR	38
ÖZGEÇMİŞ.....	40

YÜKSEK LİSANS TEZİ
GAUSS PELL KUATERNİYON POLİNOMLAR ÜZERİNE

Mevlüt DUZCU

Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Tülay YAĞMUR

ÖZET

Fibonacci dizisi, sayı dizileri arasında en çok çalışılan tam sayı dizisidir. Diğer yandan Pell sayı dizisi ve bu sayı dizisinin genelleştirilmeleri de pek çok yazar tarafından çalışılmıştır. Bu tezin temel amacı, bileşenleri Gauss Pell polinomları alınarak elde edilen Gauss Pell kuaterniyon polinomlarını tanıtmak ve birtakım özelliklerini incelemektir.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, çalışmamıza konu olan bazı kavramlardan bahsedilmiş ve çalışmamıza ilham veren bazı mevcut çalışmalar verilmiştir. İkinci bölümde, çalışmamıza temel teşkil eden bazı tanım ve teoremler sunulmuştur. Üçüncü bölümde, ilk olarak Gauss Pell kuaterniyon polinomları tanıtılmıştır. Daha sonra Gauss Pell kuaterniyon polinomlarının rekürans bağıntısı, Binet formülü, (adi) üreteç fonksiyonu, üstel üreteç fonksiyonu ve Poisson üreteç fonksiyonunun da aralarında bulunduğu bazı cebirsel özellikleri verilmiştir. Üstelik Gauss Pell kuaterniyon polinomları ile ilişkili birtakım özdeşlikler elde edilmiştir. Son bölümde, tezden elde edilen bazı sonuçlar vurgulanmış ve birtakım öneriler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Pell sayıları, Gauss Pell sayıları, Gauss Pell polinomları, Pell kuaterniyonları, Gauss Pell kuaterniyonları, Gauss Pell kuaterniyon polinomları.

Aralık, 2022; 40 sayfa

M. Sc. THESIS
ON GAUSSIAN PELL QUATERNION POLYNOMIALS

Mevlüt DUZCU

Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Tülay YAĞMUR

ABSTRACT

Among integer sequences, Fibonacci sequence is the most studied integer sequences. On the other hand, Pell number sequence and generalizations of this sequence have been studied by many authors. The main purpose of this thesis is to introduce Gaussian Pell quaternion polynomials with Gaussian Pell polynomial components and to examine some properties of them.

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, some concepts involving our study are mentioned and some current studies that inspired our study are given. In the second chapter, definitions and theorems that form the basis of our study are presented. In the third chapter, at first, Gaussian Pell quaternion polynomials are introduced. Then some algebraic properties including recurrence relation, Binet's formula, (ordinary) generating function, exponential generating function and Poisson generating function of the Gaussian Pell quaternion polynomials are given. Moreover, some identities related to the Gaussian Pell quaternion polynomials are obtained. In the last chapter, some results obtained from the thesis are emphasized and some suggestions are given.

Keywords: Pell numbers, Gaussian Pell numbers, Gaussian Pell polynomials, Pell quaternions, Gaussian Pell quaternions, Gaussian Pell quaternion polynomials.

December, 2022; 40 pages

SİMGELER VE KISALTMALAR

F_n	n . Fibonacci sayısı
$F(x, t)$	Gauss Pell kuaterniyon polinomlarının üstel üreteç fonksiyonu
GP_n	n . Gauss Pell sayısı
$GP_n(x)$	n . Gauss Pell polinomu
$g(x, t)$	Gauss Pell kuaterniyon polinomlarının üreteç fonksiyonu
$G(x, t)$	Gauss Pell kuaterniyon polinomlarının Poisson üreteç fonksiyonu
$MQGP_n(x)$	n . Gauss Pell kuaterniyon polinom matrisi
$N_{QGP_n(x)}$	n . Pell kuaterniyon polinomunun normu
P_n	n . Pell sayısı
$P_n(x)$	n . Pell polinomu
$Q_n(x)$	n . Pell-Lucas polinomu
QF_n	n . Fibonacci kuaterniyonu
QGP_n	n . Gauss Pell kuaterniyonu
$QGP_n(x)$	n . Gauss Pell kuaterniyon polinomu
QP_n	n . Pell kuaterniyonu
S_h	h reel kuaterniyonunun skaler kısmı
$S_{QGP_n(x)}$	n . Gauss Pell kuaterniyon polinomunun skaler kısmı
$\overrightarrow{V_h}$	h reel kuaterniyonunun vektörel kısmı
$\overrightarrow{V_{QGP_n(x)}}$	n . Gauss Pell kuaterniyon polinomunun vektörel kısmı

1. GİRİŞ

Fibonacci sayıları, Pisa'lı Leonardo'nun daha sonra tavşan problemi olarak adlandırılan bir problemi üzerine ortaya çıkmıştır. 0 ve 1 sayıları ile başlayan bu tam sayı dizisi üçüncü terimi itibariyle her bir terimi kendinden önceki iki terimin toplanmasıyla elde edilmektedir.

Daha sonra, ardışık iki Fibonacci sayısının birbirine oranıyla elde edilen "Altın Oran" kavramı Kepler tarafından literatüre kazandırılmıştır. Altın oran ϕ (phi) sayısı ile anılır ve bu oranın sayısal değeri yaklaşık olarak 1,618 dir.

Fibonacci sayı dizisinin başlangıç değerlerinin değiştirilmesiyle Lucas sayı dizisi ortaya konmuş ve Fibonacci sayıları ile Lucas sayıları arasında olağanüstü bir bağlantının var olduğu görülmüştür. Bunların dışında Pell sayı dizisi, Jacobsthal sayı dizisi gibi birçok sayı dizisi ortaya çıkmıştır.

Kuaterniyonlar 1843 yılında William Rowan Hamilton tarafından ortaya atılmış ve kuaterniyon sayıları Hamilton tarafından çalışılmıştır [1]. Kuaterniyonların keşfi ile birlikte bu sayılar konu ile ilgili çok sayıda araştırmacı tarafından incelenmiştir.

Horadam [2], katsayıları Fibonacci sayıları olan Fibonacci kuaterniyonlarını literatüre kazandırmış, sonrasında ise birçok matematikçi Fibonacci kuaterniyonlar üzerine çalışmalar yapmıştır. Bu çalışmalara Iyer [3] ve Halıcı [4] 'nın çalışmaları örnek olarak gösterilebilir. Fibonacci kuaterniyonlarına benzer şekilde, Çimen ve İpek [5], ayrıca eş zamanlı olarak Szynal-Liana ve Wloch [6] tarafından Pell kuaterniyonlar tanımlanmıştır. Arslan [7], yeni bir kuaterniyon dizisi olarak Gauss Pell kuaterniyon dizisini tanımlamıştır.

Bu çalışmada, Arslan [7] tarafından tanımlanan Gauss Pell kuaterniyonlar genelleştirilerek Gauss Pell kuaterniyon polinomlarının dizisi tanımlanacak ve bu dizinin bazı cebirsel özellikleri araştırılacaktır.

2. ÖN BİLGİLER VE LİTERATÜR ÇALIŞMASI

Bu bölümde üçüncü bölümde kullanılacak bazı temel tanım ve teoremlere değinilmiştir.

2.1 Kuaterniyonlar

Kuaterniyonlar, 4-boyutlu hiper-kompleks sayılardır. Değişmeli olmayan bir bölüm cebirinin üyeleri olan kuaterniyonlar ilk olarak 1843 'te W. R. Hamilton tarafından karmaşık sayılar kümesinin bir uzantısı olarak ortaya konulmuştur. Reel kuaterniyonlar kümesi H ile gösterilmektedir ve bu küme

$$H = \left\{ h = h_0 + h_1i + h_2j + h_3k = S_h + \vec{V}_h : h_i \in \mathbb{R}, i = 0,1,2,3 \right\} \quad (2.1)$$

şeklinde ifade edilir ki burada

$$S_h = h_0, \vec{V}_h = h_1i + h_2j + h_3k \text{ ve } \bar{h} = S_h - \vec{V}_h \quad (2.2)$$

olup S_h ve $\vec{V}_h$, sırasıyla h ' nin skaler ve vektörel kısımlarını oluşturmaktadır, $\bar{h}$ ise h ' nin eşleniğidir. Aynı zamanda i, j ve k ise $\mathbb{R}^3$ 'teki standart ortonormal bazdır. Reel kuaterniyonların cebiri aşağıdaki çarpma kurallarını karşılayan bir $\{1, i, j, k\}$ bazına sahip $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde tanımlı dört boyutlu bir vektör uzayıdır. i, j, k baz elemanlarının çarpım kuralları şu şekildedir:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j. \quad (2.3)$$

Diğer yandan,

$$h = h_0 + h_1i + h_2j + h_3k = S_h + \vec{V}_h, \quad (2.4)$$

$$g = g_0 + g_1i + g_2j + g_3k = S_g + \vec{V}_g \quad (2.5)$$

iki reel kuaterniyon olmak üzere, kuaterniyonlarda toplama işlemi

$$\begin{aligned} h + g &= h_0 + g_0 + (h_1 + g_1)i + (h_2 + g_2)j + (h_3 + g_3)k \\ &= S_h + S_g + \vec{V}_h + \vec{V}_g \end{aligned} \quad (2.6)$$

şeklindedir. h ve g kuaterniyonları için kuaterniyonlarda çarpma işlemi ise

$$hg = S_h S_g + S_h \vec{V}_g + \vec{V}_h S_g - \vec{V}_h \vec{V}_g + \vec{V}_h \times \vec{V}_g \quad (2.7)$$

olup

$$\vec{V}_h \vec{V}_g = h_1 g_1 + h_2 g_2 + h_3 g_3, \quad (2.8)$$

$$\vec{V}_h \times \vec{V}_g = (h_2 g_3 - h_3 g_2)i - (h_1 g_3 - h_3 g_1)j + (h_1 g_2 - h_2 g_1)k \quad (2.9)$$

dır. Ayrıca (2.4) reel kuaterniyonunun eşleniği

$$\bar{h} = h_0 - h_1 i - h_2 j - h_3 k = S_h - \vec{V}_h \quad (2.10)$$

olup, normu ise

$$\|h\| = h\bar{h} = h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 \quad (2.11)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Hatırlatma 2.1.1 Kuaterniyonların baz elemanları olan $1, i, j, k$, bazı kaynaklarda sırasıyla e_0, e_1, e_2, e_3 olarak dikkate alınmaktadır. Dolayısıyla

$$e_0 \cong 1, e_1 \cong i, e_2 \cong j, e_3 \cong k \quad (2.12)$$

olup tez çalışması boyunca gereklilik halinde her iki gösterimde kullanılacaktır.

Kuaterniyon teorisi ile ilgili daha detaylı bilgi için Hamilton [1] ve Ward [8]'in çalışmalarına bakılabilir. Üstelik kuaterniyonlar kuantum fiziğinde, matematiğin birçok alanında ve özel görelilik teorisinde kullanım alanı bulmaktadır [9-13].

2.2 Fibonacci Sayıları ve Bazı Uygulamaları

Tanım 2.2.1 Fibonacci sayı dizisi $\{F_n\}$, başlangıç koşulları $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ olmak üzere

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2 \quad (2.13)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Burada F_n , n . Fibonacci sayısıdır [14].

Horadam [2], n . Fibonacci kuaterniyonunu aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

Tanım 2.2.2 i, j, k , (2.3) denklemi ile verilen çarpım kurallarını sağlayan baz elemanları olmak üzere, n . Fibonacci kuaterniyonu

$$QF_n = F_n + F_{n+1}i + F_{n+2}j + F_{n+3}k \quad (2.14)$$

şeklinde tanımlanır. Burada F_n , n . Fibonacci sayısıdır.

n . Fibonacci kuaterniyonu QF_n 'in eşleniği ise

$$\overline{QF_n} = F_n - F_{n+1}i - F_{n+2}j - F_{n+3}k \quad (2.15)$$

şeklindedir.

Fibonacci kuaterniyonlar, Hamilton'dan sonra birçok yazar tarafından çalışılmıştır. Iyer [3]'in çalışması ve Halıcı [4]'nin çalışması örnek olarak gösterilebilir.

Gauss sayıları, ilk olarak 1832 yılında C.F. Gauss [15] tarafından araştırılmış kat sayıları tam sayılar olan kompleks sayılardır. Horadam [2], çalışmasında kompleks Fibonacci sayılarını yani Gauss Fibonacci sayılarını aşağıdaki şekilde tanımlamıştır. Daha sonra 1965 yılında Jordan [16] ve 1977 yılında Berzsenyi [17] Gauss Fibonacci sayıları ile ilgili çalışmalar yapmıştır.

Tanım 2.2.3 n . Gauss Fibonacci sayısı GF_n , $GF_0 = i$ ve $GF_1 = 1$ başlangıç değerleri ile birlikte

$$GF_n = GF_{n-1} + GF_{n-2}, n \geq 2 \quad (2.16)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır.

Gauss Fibonacci sayısı için

$$GF_n = F_n + F_{n-1}i \quad (2.17)$$

özdeşliği sağlanır [16]. Burada F_n , n . Fibonacci sayısıdır.

Halıcı ve Cerda-Morales [18] tarafından bileşenleri Gauss Fibonacci sayıları olacak şekilde yeni bir tür kuaterniyon dizisi aşağıdaki gibi tanımlanmış ve bu dizinin elemanları Gauss Fibonacci kuaterniyon sayıları olarak adlandırılmıştır.

Tanım 2.2.4 Gauss Fibonacci kuaterniyon sayı dizisi $\{GFQ_n\}_{n \geq 0}$,

$$\begin{aligned} GFQ_n &= GF_n + GF_{n+1}i + GF_{n+2}j + GF_{n+3}k \\ &= (GF_n, GF_{n+1}, GF_{n+2}, GF_{n+3}) \end{aligned} \quad (2.18)$$

şeklinde tanımlanır. Bu dizinin başlangıç değerleri

$$GFQ_0 = (i, 1, 1 + i, 2 + i), GFQ_1 = (1, 1 + i, 2 + i, 3 + 2i) \quad (2.19)$$

dir. Burada GF_n , n . Gauss Fibonacci sayısı ve i, j, k ise (2.3) ile verilen baz elemanlarıdır.

Gauss Fibonacci kuaterniyon sayı dizisinin rekürans bağıntısı $n \geq 2$ olmak üzere,

$$GFQ_n = GFQ_{n-1} + GFQ_{n-2} \quad (2.20)$$

şeklinde tanımlanmıştır [18].

2.3 Pell Sayıları ve Bazı Uygulamaları

Tanım 2.3.1 Başlangıç değerleri $P_0 = 0$ ve $P_1 = 1$ için, $\{P_n\}$ Pell sayı dizisinin rekürans bağıntısı

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}, n \geq 2 \quad (2.21)$$

ile tanımlanır [19, 20].

Pell sayı dizisine ait bazı özdeşlikler ise şu şekilde verilmiştir [19, 20]:

$$P_{-n} = (-1)^{n+1}P_n, \quad (2.22)$$

$$P_{n+1}P_{n-1} - P_n^2 = (-1)^n, \quad (2.23)$$

$$P_{2n+1} = P_n^2 + P_{n+1}^2, \quad (2.24)$$

$$P_{2n+1} + P_{2n} = 2P_{n+1}^2 - 2P_n^2 - (-1)^n, \quad (2.25)$$

$$(-1)^nP_aP_b = P_{n+a}P_{n+b} - P_nP_{n+a+b}, \quad (2.26)$$

$$P_{n+r} = P_r P_{n+1} + P_{r-1} P_n, \quad (2.27)$$

$$P_{2n} = P_n(P_{n+1} + P_{n-1}), \quad (2.28)$$

$$P_n^2 + P_{n+3}^2 = 5(P_{n+1}^2 + P_{n+2}^2). \quad (2.29)$$

Tanım 2.3.2 Başlangıç değerleri $Q_0 = 2$ ve $Q_1 = 2$ için, $\{Q_n\}$ Pell-Lucas sayı dizisinin rekürans bağıntısı

$$Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}, n \geq 2 \quad (2.30)$$

ile tanımlanır [20, 21].

$\alpha = 1 + \sqrt{2}$ ve $\beta = 1 - \sqrt{2}$ için, n . Pell sayısını veren formül [19, 20]

$$P_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad (2.31)$$

ve n . Pell-Lucas sayısını veren formül [20,21]

$$Q_n = \alpha^n + \beta^n \quad (2.32)$$

dir.

Pell kuaterniyonlar, eş zamanlı olarak, Çimen ve İpek [5]'in çalışmasında ve Szynal-Liana and Wloch [6]'un çalışmasında aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

Tanım 2.3.3 n . Pell kuaterniyonu QP_n

$$QP_n = P_n + P_{n+1}i + P_{n+2}j + P_{n+3}k \quad (2.33)$$

şeklinde tanımlanır. Burada, P_n , n . Pell sayısı ve i, j, k ise (2.3) denklemi ile verilen çarpım kurallarını sağlayan baz elemanlarıdır.

Pell kuaterniyonlarının rekürans bağıntısı [5]

$$QP_n = 2QP_{n-1} + QP_{n-2}, n \geq 2 \quad (2.34)$$

ve Binet formülü [5]

$$QP_n = \frac{\alpha^n A - \beta^n B}{\alpha - \beta} \quad (2.35)$$

şeklindedir. Burada $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ ve $\beta = 1 - \sqrt{2}$ sayıları $x^2 - 2x - 1 = 0$ denkleminin kökleridir. Ayrıca; e_s , $0 \leq s \leq 3$, (2.12) denklemi ile verilen baz elemanları olmak üzere A ve B ise

$$A = \sum_{s=0}^3 \alpha^s e_s, \quad B = \sum_{s=0}^3 \beta^s e_s \quad (2.36)$$

şeklindedir.

Pell kuaterniyonlarına ait bazı özdeşlikler aşağıda verilmiştir [5]:

$$QP_n + \overline{QP_n} = 2P_n, \quad (2.37)$$

$$QP_n^2 + QP_n \overline{QP_n} = 2P_n QP_n, \quad (2.38)$$

$$QP_n \overline{QP_n} = 6P_{2n+3}, \quad (2.39)$$

$$QP_n - QP_{n+1}i - QP_{n+2}j - QP_{n+3}k = 12q_{n+3}, \quad (2.40)$$

$$QP_{n+1}QP_{n-1} - QP_n^2 = (-1)^n \left[\frac{(\alpha^2 + 2)AB + \beta^2 BA}{(\alpha - \beta)^2} \right]. \quad (2.41)$$

Pell polinomları Horadam ve Mahon [22] tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

Tanım 2.3.4 n . Pell polinomu $P_n(x)$, $P_0(x) = 0$ ve $P_1(x) = 1$ başlangıç değerleri için

$$P_n(x) = 2xP_{n-1}(x) + P_{n-2}(x), \quad n \geq 2 \quad (2.42)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır.

n . Pell polinomunu veren Binet formülü

$$P_n(x) = \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \quad (2.43)$$

olup $\alpha(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ ve $\beta(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$, (2.42) rekürans bağıntısının karakteristik denkleminin kökleridir [22].

Benzer şekilde Pell-Lucas polinomları ise aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Tanım 2.3.5 n . Pell-Lucas polinomu $Q_n(x)$, $Q_0(x) = 2$ ve $Q_1(x) = 2x$ başlangıç değerleri için

$$Q_n(x) = 2xQ_{n-1}(x) + Q_{n-2}(x), n \geq 2 \quad (2.44)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır [22].

n . Pell-Lucas polinomunu veren Binet formülü

$$Q_n(x) = \alpha^n(x) + \beta^n(x) \quad (2.45)$$

olup $\alpha(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ ve $\beta(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$, (2.44) rekürans bağıntısının karakteristik denkleminin kökleridir [22].

Pell ve Pell-Lucas polinomları için aşağıdaki bağıntılar mevcuttur [22]:

$$P_{-n}(x) = (-1)^{n+1}P_n(x), \quad (2.46)$$

$$P_{n-1}(x) + P_{n+1}(x) = Q_n(x), \quad (2.47)$$

$$P_n(x)Q_n(x) = P_{2n}(x), \quad (2.48)$$

$$P_{n+1}^2(x) - P_{n-1}^2(x) = 2xP_{2n}(x), \quad (2.49)$$

$$P_{m+n}(x) = P_m(x)P_{n+1}(x) + P_{m-1}(x)P_n(x). \quad (2.50)$$

Gauss Pell sayıları, Halıcı ve Öz [23] tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmış ve birtakım özellikleri incelenmiştir.

Tanım 2.3.6 n . Gauss Pell sayısı GP_n , $GP_0 = i$ ve $GP_1 = 1$ başlangıç değerleri ile birlikte

$$GP_n = 2GP_{n-1} + GP_{n-2}, n \geq 2 \quad (2.51)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır.

Üstelik Gauss Pell sayıları için

$$GP_n = P_n + iP_{n-1}, \quad (2.52)$$

$$GP_{-n} = (-1)^{n-1}(P_n - iP_{n+1}), \quad (2.53)$$

$$GP_n^2 + GP_{n+1}^2 = 2P_{2n}(1 + 2i) \quad (2.54)$$

özdeşlikleri sağlanır [23]. Burada P_n , n . Pell sayısıdır.

Halıcı ve Öz [24], Gauss Pell sayılarının genelleştirmesi olan Gauss Pell polinomlarını tanımlamış ve bu polinomların bazı özelliklerini incelemişlerdir.

Tanım 2.3.7 $n \geq 2$ için Gauss Pell polinomları $GP_0(x) = i$ ve $GP_1(x) = 1$ başlangıç değerleri ile birlikte

$$GP_n(x) = 2xGP_{n-1}(x) + GP_{n-2}(x) \quad (2.55)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır.

Ayrıca $GP_n(x)$, n . Gauss Pell polinomu ve $P_n(x)$, n . Pell polinomu olmak üzere $GP_n(x)$ ve $P_n(x)$ arasındaki ilişki şu şekilde ifade edilmiştir [24]:

$$GP_n(x) = P_n(x) + iP_{n-1}(x). \quad (2.56)$$

Arslan [7], Gauss Pell kuaterniyonlarını aşağıdaki gibi tanımlamış ve bazı kombinatorial özelliklerini türetmiştir.

Tanım 2.3.8 n . Gauss Pell kuaterniyonu QGP_n

$$QGP_n = GP_n + GP_{n+1}i + GP_{n+2}j + GP_{n+3}k \quad (2.57)$$

şeklindedir. Burada GP_n , n . Gauss Pell sayısı ve i, j, k , (2.3) denklemi ile verilen çarpım kurallarını sağlayan baz elemanlarıdır.

Burada tekrar hatırlatalım ki kuaterniyonik baz elemanlarının farklı kullanımı mevcut olup baz elemanlarının kullanımı (2.12) denkleminde belirtilmiştir.

Diğer yandan, Gauss Pell kuaterniyonlarına ait rekürans bağıntısı

$$QGP_n = 2QGP_{n-1} + QGP_{n-2}, n \geq 2 \quad (2.58)$$

şeklindedir [7].

3. GAUSS PELL KUATERNİYON POLİNOMLARI

Bu bölümde, Gauss Pell kuaterniyon polinomları tanıtılarak bazı cebirsel özellikleri incelenmektedir.

Tanım 3.1 $\{QGP_n(x)\}$, Gauss Pell kuaterniyon polinom dizisi olmak üzere, n . Gauss Pell kuaterniyon polinomu

$$QGP_n(x) = GP_n(x) + GP_{n+1}(x)i + GP_{n+2}(x)j + GP_{n+3}(x)k \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $GP_n(x)$, n . Gauss Pell polinomu ve i, j, k ise (2.3) denklemi ile verilen kuaterniyonik birimlerdir.

n . Gauss Pell kuaterniyon polinomu $QGP_n(x)$ 'in reel ve sanal kısımları sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$S_{QGP_n(x)} = GP_n(x), \quad (3.2)$$

$$\overrightarrow{V_{QGP_n(x)}} = GP_{n+1}(x)i + GP_{n+2}(x)j + GP_{n+3}(x)k. \quad (3.3)$$

$QGP_m(x)$ ve $QGP_n(x)$ iki Gauss Pell kuaterniyon polinomu olmak üzere, Gauss Pell kuaterniyon polinomlarının toplama ve çarpma işlemleri sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} QGP_m(x) + QGP_n(x) &= (GP_m(x) + GP_n(x)) \\ &\quad + (GP_{m+1}(x) + GP_{n+1}(x))i \\ &\quad + (GP_{m+2}(x) + GP_{n+2}(x))j \\ &\quad + (GP_{m+3}(x) + GP_{n+3}(x))k \end{aligned} \quad (3.4)$$

ve

$$\begin{aligned} QGP_m(x)QGP_n(x) &= S_{QGP_m(x)}S_{QGP_n(x)} + S_{QGP_m(x)}\overrightarrow{V_{QGP_n(x)}} + \overrightarrow{V_{QGP_m(x)}}S_{QGP_n(x)} \\ &\quad - \overrightarrow{V_{QGP_m(x)}} \cdot \overrightarrow{V_{QGP_n(x)}} + \overrightarrow{V_{QGP_m(x)}} \times \overrightarrow{V_{QGP_n(x)}} \end{aligned} \quad (3.5)$$

dir. Burada

$$\overrightarrow{V_{QGP_m(x)}} \cdot \overrightarrow{V_{QGP_n(x)}} = GP_{m+1}(x)GP_{n+1}(x) + GP_{m+2}(x)GP_{n+2}(x)$$

$$+GP_{m+3}(x)GP_{n+3}(x) \quad (3.6)$$

ve

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_{QGP_m(x)}} \times \overrightarrow{V_{QGP_n(x)}} = & (GP_{m+2}(x)GP_{n+3}(x) - GP_{m+3}(x)GP_{n+2}(x))i \\ & - (GP_{m+1}(x)GP_{n+3}(x) - GP_{m+3}(x)GP_{n+1}(x))j \\ & + (GP_{m+1}(x)GP_{n+2}(x) - GP_{m+2}(x)GP_{n+1}(x))k \end{aligned} \quad (3.7)$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 3.2 n . Gauss Pell kuaterniyon polinomu $QGP_n(x)$ olmak üzere $QGP_n(x)$ 'in eşleniği $\overline{QGP_n(x)}$ ile gösterilir ve

$$\overline{QGP_n(x)} = GP_n(x) - GP_{n+1}(x)i - GP_{n+2}(x)j - GP_{n+3}(x)k \quad (3.8)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.3 n . Gauss Pell kuaterniyon polinomu $QGP_n(x)$ 'in normu

$$\begin{aligned} N_{QGP_n(x)} &= QGP_n(x)\overline{QGP_n(x)} \\ &= GP_n^2(x) + GP_{n+1}^2(x) + GP_{n+2}^2(x) + GP_{n+3}^2(x) \end{aligned} \quad (3.9)$$

dir.

Teorem 3.1 $N_{QGP_n(x)}$, $QGP_n(x)$ 'in normu olmak üzere

$$N_{QGP_n(x)} = (x+i)(8x^2+4)P_{2n+2}(x) \quad (3.10)$$

dir.

İspat: (2.56) ve (3.9) denklemlerinden

$$\begin{aligned} N_{QGP_n(x)} &= GP_n^2(x) + GP_{n+1}^2(x) + GP_{n+2}^2(x) + GP_{n+3}^2(x) \\ &= (P_n(x) + iP_{n-1}(x))^2 + (P_{n+1}(x) + iP_n(x))^2 \\ &\quad + (P_{n+2}(x) + iP_{n+1}(x))^2 + (P_{n+3}(x) + iP_{n+2}(x))^2 \\ &= P_n^2(x) - P_{n-1}^2(x) + 2iP_n(x)P_{n-1}(x) + P_{n+1}^2(x) - P_n^2(x) \\ &\quad + 2iP_{n+1}(x)P_n(x) + P_{n+2}^2(x) - P_{n+1}^2(x) + 2iP_{n+2}(x)P_{n+1}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +P_{n+3}^2(x) - P_{n+2}^2(x) + 2iP_{n+3}(x)P_{n+2}(x) \\
& = P_{n+3}^2(x) - P_{n-1}^2(x) + 2i[P_n(x)(P_{n-1}(x) + P_{n+1}(x)) \\
& \quad + P_{n+2}(x)(P_{n+1}(x) + P_{n+3}(x))]
\end{aligned} \tag{3.11}$$

elde edilir. Diğer yandan, (2.47) ve (2.48) denklemleri dikkate alınırsa, (3.11) denklemi

$$N_{QGP_n(x)} = P_{n+3}^2(x) - P_{n-1}^2(x) + 2i(P_{2n}(x) + P_{2n+4}(x)) \tag{3.12}$$

şeklinde ifade edilebilir. Ayrıca, Pell polinomunun Binet formülü (2.43) ve

$$(1 + \alpha^4(x)) = (1 + \alpha^2(x))(1 + \alpha^2(x)) - 2\alpha^2(x) = (4x^2 + 2)\alpha^2(x), \tag{3.13}$$

$$(1 + \beta^4(x)) = (4x^2 + 2)\beta^2(x), \tag{3.14}$$

$$(\alpha^4(x) - 1) = \alpha^2(x)(\alpha(x) - \beta(x))(\alpha(x) + \beta(x)), \tag{3.15}$$

$$(\beta^4(x) - 1) = \beta^2(x)(\beta(x) - \alpha(x))(\alpha(x) + \beta(x)) \tag{3.16}$$

eşitlikleri kullanılarak,

$$P_{n+3}^2(x) - P_{n-1}^2(x) = 2x(4x^2 + 2)P_{2n+2}(x) \tag{3.17}$$

ve

$$P_{2n}(x) + P_{2n+4}(x) = (4x^2 + 2)P_{2n+2}(x) \tag{3.18}$$

elde edilir ki bu ifadeler de (3.12) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
N_{QGP_n(x)} &= 2x(4x^2 + 2)P_{2n+2}(x) + 2i(4x^2 + 2)P_{2n+2}(x) \\
&= (x + i)(8x^2 + 4)P_{2n+2}(x)
\end{aligned}$$

olup istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 3.2 n . Gauss Pell kuaterniyon polinomu $QGP_n(x)$ için aşağıdaki ifadeler sağlanır:

$$(i) \quad QGP_n(x) + \overline{QGP_n(x)} = 2GP_n(x), \tag{3.19}$$

$$(ii) \quad QGP_n^2(x) + QGP_n(x) \overline{QGP_n(x)} = 2GP_n(x)QGP_n(x), \tag{3.20}$$

$$(iii) \quad QGP_n(x) - QGP_{n+1}(x)i - QGP_{n+2}(x)j - QGP_{n+3}(x)k$$

$$= (4x^2 + 2)(Q_{n+3}(x) + iQ_{n+2}(x)) \quad (3.21)$$

dır. Burada $GP_n(x)$, n . Gauss Pell polinomu ve $Q_n(x)$, n . Pell-Lucas polinomudur.

İspat:

(i) $QGP_n(x)$ ve $\overline{QGP_n(x)}$ ifadeleri, yani

$$QGP_n(x) = GP_n(x) + GP_{n+1}(x)i + GP_{n+2}(x)j + GP_{n+3}(x)k$$

ve

$$\overline{QGP_n(x)} = GP_n(x) - GP_{n+1}(x)i - GP_{n+2}(x)j - GP_{n+3}(x)k$$

kullanılarak

$$QGP_n(x) + \overline{QGP_n(x)} = 2GP_n(x)$$

kolayca elde edilir.

(ii) (3.1) ve (2.3) denklemlerinden

$$\begin{aligned} QGP_n^2(x) &= (GP_n(x) + GP_{n+1}(x)i + GP_{n+2}(x)j + GP_{n+3}(x)k)^2 \\ &= GP_n^2(x) + GP_n(x)GP_{n+1}(x)i + GP_n(x)GP_{n+2}(x)j \\ &\quad + GP_n(x)GP_{n+3}(x)k + GP_n(x)GP_{n+1}(x)i - GP_{n+1}^2(x) \\ &\quad + GP_{n+1}(x)GP_{n+2}(x)k - GP_{n+1}(x)GP_{n+3}(x)j \\ &\quad + GP_n(x)GP_{n+2}(x)j - GP_{n+1}(x)GP_{n+2}(x)k \\ &\quad - GP_{n+2}^2(x) + GP_{n+2}(x)GP_{n+3}(x)i + GP_n(x)GP_{n+3}(x)k \\ &\quad + GP_{n+1}(x)GP_{n+3}(x)j - GP_{n+2}(x)GP_{n+3}(x)i - GP_{n+3}^2(x) \\ &= GP_n^2(x) - GP_{n+1}^2(x) - GP_{n+2}^2(x) - GP_{n+3}^2(x) \\ &\quad + 2GP_n(x)GP_{n+1}(x)i + 2GP_n(x)GP_{n+2}(x)j \\ &\quad + 2GP_n(x)GP_{n+3}(x)k \\ &= -GP_n^2(x) - GP_{n+1}^2(x) - GP_{n+2}^2(x) - GP_{n+3}^2(x) \\ &\quad + 2GP_n(x)(GP_n(x) + GP_{n+1}(x)i + GP_{n+2}(x)j \\ &\quad + GP_{n+3}(x)k) \\ &= -GP_n^2(x) - GP_{n+1}^2(x) - GP_{n+2}^2(x) - GP_{n+3}^2(x) \\ &\quad + 2GP_n(x)QGP_n(x) \end{aligned} \quad (3.22)$$

elde edilir. (3.9) ve (3.22) denklemleri dikkate alınarak $QGP_n^2(x)$ ve $QGP_n(x) \overline{QGP_n(x)}$ ifadeleri toplanırsa istenilen eşitlik elde edilmiş olur.

(iii) (2.3), (2.47), (2.56) ve (3.1) denklemlerinden

$$\begin{aligned}
& QGP_n(x) - QGP_{n+1}(x)i - QGP_{n+2}(x)j - QGP_{n+3}(x)k \\
&= GP_n(x) + GP_{n+1}(x)i + GP_{n+2}(x)j + GP_{n+3}(x)k \\
&\quad - GP_{n+1}(x)i + GP_{n+2}(x) - GP_{n+3}(x)k + GP_{n+4}(x)j \\
&\quad - GP_{n+2}(x)j + GP_{n+3}(x)k + GP_{n+4}(x) - GP_{n+5}(x)i \\
&\quad - GP_{n+3}(x)k - GP_{n+4}(x)j + GP_{n+5}(x)i + GP_{n+6}(x) \\
&= GP_n(x) + GP_{n+2}(x) + GP_{n+4}(x) + GP_{n+6}(x) \\
&= P_n(x) + P_{n+2}(x) + P_{n+4}(x) + P_{n+6}(x) \\
&\quad + i(P_{n-1}(x) + P_{n+1}(x) + P_{n+3}(x) + P_{n+5}(x)) \\
&= Q_{n+1}(x) + Q_{n+5}(x) + i(Q_n(x) + Q_{n+4}(x)) \tag{3.23}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Ayrıca (2.45), (3.13) ve (3.14) denklemleri dikkate alındığında

$$\begin{aligned}
Q_{n+1}(x) + Q_{n+5}(x) &= \alpha^{n+1}(x) + \beta^{n+1}(x) + \alpha^{n+5}(x) + \beta^{n+5}(x) \\
&= \alpha^{n+1}(x)(1 + \alpha^4(x)) + \beta^{n+1}(x)(1 + \beta^4(x)) \\
&= (4x^2 + 2)(\alpha^{n+3}(x) + \beta^{n+3}(x)) \\
&= (4x^2 + 2)Q_{n+3}(x) \tag{3.24}
\end{aligned}$$

bağıntısı ve benzer şekilde

$$Q_n(x) + Q_{n+4}(x) = (4x^2 + 2)Q_{n+2}(x) \tag{3.25}$$

bağıntısı elde edilir. (3.24) ve (3.25) ifadeleri (3.23) de yerlerine yazılırsa istenilen sonuca ulaşılır.

Teorem 3.3 Gauss Pell kuaterniyon polinom dizisi $\{QGP_n(x)\}$ 'in rekürans bağıntısı

$$QGP_n(x) = 2x QGP_{n-1}(x) + QGP_{n-2}(x), n \geq 2 \tag{3.26}$$

şeklindedir.

İspat: (2.55) ve (3.1) denklemlerinden

$$\begin{aligned}
& 2x QGP_{n-1}(x) + QGP_{n-2}(x) \\
&= 2x (GP_{n-1}(x) + GP_n(x)i + GP_{n+1}(x)j + GP_{n+2}(x)k) \\
&\quad + (GP_{n-2}(x) + GP_{n-1}(x)i + GP_n(x)j + GP_{n+1}(x)k) \\
&= 2xGP_{n-1}(x) + GP_{n-2}(x) + (2xGP_n(x) + GP_{n-1}(x))i \\
&\quad + (2xGP_{n+1}(x) + GP_n(x))j + (2xGP_{n+2}(x) + GP_{n+1}(x))k \\
&= GP_n(x) + GP_{n+1}(x)i + GP_{n+2}(x)j + GP_{n+3}(x)k \\
&= QGP_n(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Gauss Pell polinomları ve (2.3) denklemi kullanılarak Gauss Pell kuaterniyon polinom dizisinin başlangıç değerleri

$$\begin{aligned}
QGP_0(x) &= GP_0(x) + GP_1(x)i + GP_2(x)j + GP_3(x)k \\
&= (i)1 + (1)i + (2x + i)j + (4x^2 + 1 + 2xi)k \\
&= 2i + (4x^2 + 2)k
\end{aligned} \tag{3.27}$$

ve

$$\begin{aligned}
QGP_1(x) &= GP_1(x) + GP_2(x)i + GP_3(x)j + GP_4(x)k \\
&= (1)1 + (2x + i)i + (4x^2 + 1 + 2xi)j + (8x^3 + 4x + 4x^2i + i)k \\
&= 2xi + (8x^3 + 6x)k
\end{aligned} \tag{3.28}$$

olarak belirlenir.

Diğer yandan başlangıç değerleri $QGP_0(x)$ ve $QGP_1(x)$, ayrıca (3.26) denklemi ve (2.3) ile verilen çarpım kuralları dikkate alındığında ispatsız olarak vereceğimiz aşağıdaki sonuca kolayca ulaşılabilir:

Sonuç 3.4

$$(i) QGP_1(x)QGP_0(x) = -(32x^5 + 40x^3 + 16x) + (8x^3 + 8x)j, \tag{3.29}$$

$$(ii) QGP_0(x)QGP_1(x) = -(32x^5 + 40x^3 + 16x) - (8x^3 + 8x)j, \tag{3.30}$$

$$(iii) QGP_1(x)QGP_0(x) + QGP_0(x)QGP_1(x) = -(64x^5 + 80x^3 + 32x), \tag{3.31}$$

$$(iv) QGP_1(x)QGP_0(x) - QGP_0(x)QGP_1(x) = (16x^3 + 16x)j, \tag{3.32}$$

$$(v) QGP_0^2(x) = -16x^4 - 16x^2 - 8, \quad (3.33)$$

$$(vi) QGP_1^2(x) = -64x^6 - 96x^4 - 40x^2, \quad (3.34)$$

$$(vii) QGP_2^2(x) = -256x^8 - 512x^6 - 336x^4 - 80x^2 - 8. \quad (3.35)$$

(3.26) ile verilen rekürans bağıntısının karakteristik denklemi $t^2 - 2xt - 1 = 0$ dir ve bu denklem çözüldüğünde

$$\alpha(x) = x + \sqrt{1+x^2} \text{ ve } \beta(x) = x - \sqrt{1+x^2} \quad (3.36)$$

karakteristik kökleri elde edilir. Bu kökler arasında

$$\alpha(x)\beta(x) = -1, \alpha(x) + \beta(x) = 2x, \alpha(x) - \beta(x) = 2\sqrt{1+x^2} \quad (3.37)$$

bağıntıları mevcuttur.

Teorem 3.5 n . Gauss Pell kuaterniyon polinomunu veren Binet formülü

$$QGP_n(x) = QGP_1(x)P_n(x) + QGP_0(x)P_{n-1}(x) \quad (3.38)$$

dir. Burada $P_n(x)$, n . Pell polinomudur.

İspat: c_1 ve c_2 sabitler olmak üzere, (3.26) rekürans bağıntısının karakteristik denkleminin genel çözümü

$$QGP_n(x) = c_1\alpha^n(x) + c_2\beta^n(x) \quad (3.39)$$

dir. (3.39) denkleminde sırasıyla $n = 0$ ve $n = 1$ alınarak

$$QGP_0(x) = c_1 + c_2 \quad (3.40)$$

ve

$$QGP_1(x) = c_1(x + \sqrt{1+x^2}) + c_2(x - \sqrt{1+x^2}) \quad (3.41)$$

elde edilir. (3.40) ve (3.41) denklemlerinden

$$c_1 = \frac{QGP_1(x) - \beta(x)QGP_0(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \quad (3.42)$$

ve

$$c_2 = \frac{\alpha(x)QGP_0(x) - QGP_1(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \quad (3.43)$$

olarak belirlenir. (3.42) ve (3.43) denklemleri (3.39)'da yerlerine yazılırsa ve (2.43) denklemi dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} QGP_n(x) &= \frac{QGP_1(x) - \beta(x)QGP_0(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \alpha^n(x) \\ &\quad + \frac{\alpha(x)QGP_0(x) - QGP_1(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \beta^n(x) \\ &= \frac{1}{\alpha(x) - \beta(x)} \{QGP_1(x)(\alpha^n(x) - \beta^n(x)) \\ &\quad + QGP_0(x)(\alpha^{n-1}(x) - \beta^{n-1}(x))\} \\ &= QGP_1(x)P_n(x) + QGP_0(x)P_{n-1}(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 3.6 $(m + n)$ inci Gauss Pell polinomu $GP_{m+n}(x)$ için

$$GP_{m+n}(x) = P_m(x)GP_{n+1}(x) + P_{m-1}(x)GP_n(x) \quad (3.44)$$

dir. Burada $P_m(x)$, m . Pell polinomudur.

İspat: (2.50) ve (2.56) denklemlerinden

$$\begin{aligned} GP_{m+n}(x) &= P_{m+n}(x) + iP_{m+n-1}(x) \\ &= P_m(x)P_{n+1}(x) + P_{m-1}(x)P_n(x) + i(P_m(x)P_n(x) + P_{m-1}(x)P_{n-1}(x)) \\ &= P_m(x)(P_{n+1}(x) + iP_n(x)) + P_{m-1}(x)(P_n(x) + iP_{n-1}(x)) \\ &= P_m(x)GP_{n+1}(x) + P_{m-1}(x)GP_n(x) \end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır.

Teorem 3.7 $(m + n)$ inci Gauss Pell kuaterniyon polinomu $QGP_{m+n}(x)$ için

$$QGP_{m+n}(x) = P_m(x)QGP_{n+1}(x) + P_{m-1}(x)QGP_n(x) \quad (3.45)$$

dir. Burada $P_m(x)$, m . Pell polinomudur.

İspat: (3.1) ve (3.44) denklemlerinden

$$\begin{aligned}
QGP_{m+n}(x) &= GP_{m+n}(x) + GP_{m+n+1}(x)i + GP_{m+n+2}(x)j + GP_{m+n+3}(x)k \\
&= P_m(x)GP_{n+1}(x) + P_{m-1}(x)GP_n(x) \\
&\quad + (P_m(x)GP_{n+2}(x) + P_{m-1}(x)GP_{n+1}(x))i \\
&\quad + (P_m(x)GP_{n+3}(x) + P_{m-1}(x)GP_{n+2}(x))j \\
&\quad + (P_m(x)GP_{n+4}(x) + P_{m-1}(x)GP_{n+3}(x))k \\
&= P_m(x)[GP_{n+1}(x) + GP_{n+2}(x)i + GP_{n+3}(x)j + GP_{n+4}(x)k] \\
&\quad + P_{m-1}(x)[GP_n(x) + GP_{n+1}(x)i + GP_{n+2}(x)j + GP_{n+3}(x)k] \\
&= P_m(x)QGP_{n+1}(x) + P_{m-1}(x)QGP_n(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Sonuç 3.8 Teorem 3.7'deki (3.45) dekleminde $m \rightarrow n$ ve $n \rightarrow 0$ alınırsa Teorem 3.5' de (3.38) denklemi ile verilen Binet formülü farklı bir yolla elde edilmiş olur.

Teorem 3.9 n . Gauss Pell kuaterniyon polinomu $QGP_n(x)$ için

$$QGP_{-n}(x) = (-1)^{n+1}[QGP_1(x)P_n(x) - QGP_0(x)P_{n+1}(x)] \quad (3.46)$$

dir. Burada $P_n(x)$, n . Pell polinomudur.

İspat: Gauss Pell kuaterniyon polinomları için geçerli olan Binet formülü (3.38) ve (2.46) denkleminde

$$\begin{aligned}
QGP_{-n}(x) &= QGP_1(x)P_{-n}(x) + QGP_0(x)P_{-n-1}(x) \\
&= QGP_1(x)P_{-n}(x) + QGP_0(x)P_{-(n+1)}(x) \\
&= QGP_1(x)(-1)^{n+1}P_n(x) + QGP_0(x)(-1)^{n+2}P_{n+1}(x) \\
&= (-1)^{n+1}[QGP_1(x)P_n(x) - QGP_0(x)P_{n+1}(x)]
\end{aligned}$$

olup bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.10. Gauss Pell kuaterniyon polinomlar için (adi) üreteç fonksiyonu

$$g(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} QGP_n(x) t^n = \frac{QGP_0(x) + (QGP_1(x) - 2x QGP_0(x))t}{1 - 2xt - t^2} \quad (3.47)$$

şeklindedir.

İspat: $g(x, t)$ fonksiyonu açılırsa

$$\begin{aligned} g(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} QGP_n(x) t^n \\ &= QGP_0(x) + QGP_1(x)t + QGP_2(x)t^2 + \dots + QGP_n(x)t^n + \dots \end{aligned} \quad (3.48)$$

elde edilir. $g(x, t)$ fonksiyonu sırasıyla $-2xt$ ve $-t^2$ ile çarpılırsa

$$-2xt g(x, t) = -2xt QGP_0(x) - 2xt^2 QGP_1(x) - \dots \quad (3.49)$$

ve

$$-t^2 g(x, t) = -t^2 QGP_0(x) - \dots \quad (3.50)$$

elde edilir. (3.48), (3.49) ve (3.50) ifadeleri taraf tarafa toplanılırsa

$$\begin{aligned} g(x, t)(1 - 2xt - t^2) &= QGP_0(x) + QGP_1(x)t - 2xt QGP_0(x) \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} (QGP_n(x) - 2xQGP_{n-1}(x) \\ &\quad - QGP_{n-2}(x))t^n \end{aligned} \quad (3.51)$$

elde edilir. (3.26) bağıntısından $QGP_n(x) - 2xQGP_{n-1}(x) - QGP_{n-2}(x) = 0$ olup bu durum (3.51) denkleminde göz önüne alınırsa

$$g(x, t)(1 - 2xt - t^2) = QGP_0(x) + (QGP_1(x) - 2x QGP_0(x))t$$

olur ki bu ispatı tamamlar.

Teorem 3.11 Gauss Pell kuaterniyon polinomlar için üstel üreteç fonksiyonu

$$\begin{aligned} F(x, t) &= \left(\frac{QGP_1(x) - \beta(x)QGP_0(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \right) e^{\alpha(x)t} \\ &\quad + \left(\frac{\alpha(x)QGP_0(x) - QGP_1(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \right) e^{\beta(x)t} \end{aligned} \quad (3.52)$$

şeklindedir.

İspat: Gauss Pell kuaterniyon polinom dizisinin Binet formülü (3.38) ve Pell polinom dizisinin Binet formülü (2.43) dikkate alınarak

$$\begin{aligned}
QGP_n(x) &= QGP_1(x)P_n(x) + QGP_0(x)P_{n-1}(x) \\
&= QGP_1(x) \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \\
&\quad + QGP_0(x) \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \\
&= \frac{QGP_1(x) - \beta(x)QGP_0(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \alpha^n(x) \\
&\quad + \frac{\alpha(x)QGP_0(x) - QGP_1(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \beta^n(x)
\end{aligned} \tag{3.53}$$

elde edilir. Gauss Pell kuaterniyon polinomunun üstel fonksiyonu

$$F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} QGP_n(x) \frac{t^n}{n!} \tag{3.54}$$

şeklinde olup (3.53) ifadesi (3.54)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
F(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{QGP_1(x) - \beta(x)QGP_0(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \alpha^n(x) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\alpha(x)QGP_0(x) - QGP_1(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \beta^n(x) \right] \frac{t^n}{n!} \\
&= \frac{QGP_1(x) - \beta(x)QGP_0(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha(x)t)^n}{n!} \\
&\quad + \frac{\alpha(x)QGP_0(x) - QGP_1(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta(x)t)^n}{n!} \\
&= \left(\frac{QGP_1(x) - \beta(x)QGP_0(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \right) e^{\alpha(x)t} \\
&\quad + \left(\frac{\alpha(x)QGP_0(x) - QGP_1(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \right) e^{\beta(x)t}
\end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır.

Teorem 3.12 Gauss Pell kuaterniyon polinomlar için Poisson üreteç fonksiyonu

$$G(x, t) = \left(\frac{QGP_1(x) - \beta(x)QGP_0(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \right) e^{t(\alpha(x)-1)} + \left(\frac{\alpha(x)QGP_0(x) - QGP_1(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \right) e^{t(\beta(x)-1)} \quad (3.55)$$

şeklindedir.

İspat: $F(x, t)$, Gauss Pell kuaterniyon polinomlarının üstel üreteç fonksiyonu ve $G(x, t)$, Gauss Pell kuaterniyon polinomlarının Poisson üreteç fonksiyonu olmak üzere, üstel üreteç fonksiyonu ve Poisson üreteç fonksiyonu arasında $F(x, t) = e^{-t} G(x, t)$ bağıntısının var olduğu bilindiğinden ispat aşıkârdır.

Teorem 3.13 Gauss Pell kuaterniyon polinomlarının ardışık toplamaları

$$\sum_{k=0}^n QGP_k(x) = \frac{1}{2x} (QGP_{n+1}(x) + QGP_n(x) - QGP_0(x) - QGP_{-1}(x)) \quad (3.56)$$

şeklinde ifade edilir.

İspat: (3.26) denkleminde $QGP_{k+1}(x) = 2xQGP_k(x) + QGP_{k-1}(x)$ olup $QGP_k(x)$ yalnız bırakılırsa

$$QGP_k(x) = \frac{1}{2x} (QGP_{k+1}(x) - QGP_{k-1}(x)) \quad (3.57)$$

elde edilir. (3.57) denkleminde $k = 0, \dots, n$ 'ye kadar olan değerler alt alta yazılıp taraf tarafa toplanırsa

$$k = 0 \text{ için,} \quad QGP_0(x) = \frac{1}{2x} (QGP_1(x) - QGP_{-1}(x))$$

$$k = 1 \text{ için,} \quad QGP_1(x) = \frac{1}{2x} (QGP_2(x) - QGP_0(x))$$

$$k = 2 \text{ için,} \quad QGP_2(x) = \frac{1}{2x} (QGP_3(x) - QGP_1(x))$$

⋮

$$k = n - 1 \text{ için,} \quad QGP_{n-1}(x) = \frac{1}{2x} (QGP_n(x) - QGP_{n-2}(x))$$

$$k = n \text{ için,} \quad QGP_n(x) = \frac{1}{2x} (QGP_{n+1}(x) - QGP_{n-1}(x))$$

dir. Gerekli cebirsel işlemlerden sonra

$$\sum_{k=0}^n QGP_k(x) = \frac{1}{2x} (QGP_{n+1}(x) + QGP_n(x) - QGP_0(x) - QGP_{-1}(x))$$

toplam formülü elde edilmiş olur ki bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.14 Çift indisli Gauss Pell kuaterniyon polinomlarının ardışık toplamaları

$$\sum_{k=0}^n QGP_{2k}(x) = \frac{1}{2x} (QGP_{2n+1}(x) - QGP_{-1}(x)) \quad (3.58)$$

şeklinde ifade edilir.

İspat: (3.26) denkleminde $QGP_{2k+1}(x) = 2xQGP_{2k}(x) + QGP_{2k-1}(x)$ olup $QGP_{2k}(x)$ yalnız bırakılırsa

$$QGP_{2k}(x) = \frac{1}{2x} (QGP_{2k+1}(x) - QGP_{2k-1}(x)) \quad (3.59)$$

elde edilir. (3.59) denkleminde $k = 0, \dots, n$ 'ye kadar olan değerleri alt alta yazılıp taraf tarafa toplanırsa

$$k = 0 \text{ için,} \quad QGP_0(x) = \frac{1}{2x} (QGP_1(x) - QGP_{-1}(x))$$

$$k = 1 \text{ için,} \quad QGP_2(x) = \frac{1}{2x} (QGP_3(x) - QGP_1(x))$$

$$k = 2 \text{ için,} \quad QGP_4(x) = \frac{1}{2x} (QGP_5(x) - QGP_3(x))$$

⋮

$$k = n - 1 \text{ için,} \quad QGP_{2n-2}(x) = \frac{1}{2x} (QGP_{2n-1}(x) - QGP_{2n-3}(x))$$

$$k = n \text{ için,} \quad QGP_{2n}(x) = \frac{1}{2x} (QGP_{2n+1}(x) - QGP_{2n-1}(x))$$

elde edilir. Gerekli cebirsel işlemlerden sonra

$$\sum_{k=0}^n QGP_{2k}(x) = \frac{1}{2x} (QGP_{2n+1}(x) - QGP_{-1}(x))$$

olup ispat tamamlanır.

Teorem 3.15 Tek indisli Gauss Pell kuaterniyon polinomlarının ardışık toplamaları

$$\sum_{k=0}^n QGP_{2k+1}(x) = \frac{1}{2x} (QGP_{2n+2}(x) - QGP_0(x)) \quad (3.60)$$

şeklinde ifade edilir.

İspat: (3.26) denkleminde $QGP_{2k+2}(x) = 2xQGP_{2k+1}(x) + QGP_{2k}(x)$ olup $QGP_{2k+1}(x)$ yalnız bırakılırsa

$$QGP_{2k+1}(x) = \frac{1}{2x} (QGP_{2k+2}(x) - QGP_{2k}(x)) \quad (3.61)$$

elde edilir. (3.61) denkleminde $k = 0, \dots, n$ 'ye kadar olan değerleri alt alta yazılıp taraf tarafa toplanırsa

$$k = 0 \text{ için, } QGP_1(x) = \frac{1}{2x} (QGP_2(x) - QGP_0(x))$$

$$k = 1 \text{ için, } QGP_3(x) = \frac{1}{2x} (QGP_4(x) - QGP_2(x))$$

$$k = 2 \text{ için, } QGP_5(x) = \frac{1}{2x} (QGP_6(x) - QGP_4(x))$$

$\vdots$

$$k = n - 1 \text{ için, } QGP_{2n-1}(x) = \frac{1}{2x} (QGP_{2n}(x) - QGP_{2n-2}(x))$$

$$k = n \text{ için, } QGP_{2n+1}(x) = \frac{1}{2x} (QGP_{2n+2}(x) - QGP_{2n}(x))$$

elde edilir. Gerekli cebirsel işlemlerden sonra

$$\sum_{k=0}^n QGP_{2k+1}(x) = \frac{1}{2x} (QGP_{2n+2}(x) - QGP_0(x))$$

olur ki bu ise istenen sonuçtur.

Lemma 3.16 $QGP_n(x)$, n . Gauss Pell kuaterniyon polinomu olmak üzere, $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\begin{aligned}
MQGP_n(x) &= \begin{pmatrix} QGP_{n+1}(x) & QGP_n(x) \\ QGP_n(x) & QGP_{n-1}(x) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} QGP_2(x) & QGP_1(x) \\ QGP_1(x) & QGP_0(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \quad (3.62)
\end{aligned}$$

dır.

İspat: İspat n üzerinden tümevarım yöntemiyle yapılacaktır.

$n = 1$ için,

$$MQGP_1(x) = \begin{pmatrix} QGP_2(x) & QGP_1(x) \\ QGP_1(x) & QGP_0(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} QGP_2(x) & QGP_1(x) \\ QGP_1(x) & QGP_0(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^0$$

olup verilen ifade doğrudur. (3.62) ifadesinin n için doğru olduğu kabul edelim.

Şimdi ise verilen ifadenin $n+1$ için doğruluğunu inceleyelim:

$n+1$ için,

$$\begin{aligned}
MQGP_{n+1}(x) &= \begin{pmatrix} QGP_{n+2}(x) & QGP_{n+1}(x) \\ QGP_{n+1}(x) & QGP_n(x) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} QGP_2(x) & QGP_1(x) \\ QGP_1(x) & QGP_0(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^1
\end{aligned}$$

olup n için verilen ifadenin doğru olduğu kabul edildiğinden dolayı

$$MQGP_{n+1}(x) = \begin{pmatrix} QGP_{n+1}(x) & QGP_n(x) \\ QGP_n(x) & QGP_{n-1}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^1$$

dir. Gerekli matris çarpımı işlemleri yapılırsa

$$MQGP_{n+1}(x) = \begin{pmatrix} 2xQGP_{n+1}(x) + QGP_n(x) & QGP_{n+1}(x) \\ 2xQGP_n(x) + QGP_{n-1}(x) & QGP_n(x) \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

elde edilir. (3.26) denklemi (3.63) matrisinde dikkate alınırsa

$$MQGP_{n+1}(x) = \begin{pmatrix} QGP_{n+2}(x) & QGP_{n+1}(x) \\ QGP_{n+1}(x) & QGP_n(x) \end{pmatrix}$$

olup istenen sonuçtur.

Lemma 3.17 $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\begin{pmatrix} QGP_2(x) & QGP_1(x) \\ QGP_1(x) & QGP_0(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} QGP_2(x) & QGP_1(x) \\ QGP_1(x) & QGP_0(x) \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

İspat: Pell polinomlarının matris temsilleri (bkz. Horadam ve Mahon [22]) dikkate alınırsa (3.64) eşitliğinin sol tarafı

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} QGP_2(x) & QGP_1(x) \\ QGP_1(x) & QGP_0(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \\ &= \begin{pmatrix} QGP_2(x) & QGP_1(x) \\ QGP_1(x) & QGP_0(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_n(x) & P_{n-1}(x) \\ P_{n-1}(x) & P_{n-2}(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} QGP_2(x)P_n(x) + QGP_1(x)P_{n-1}(x) & QGP_2(x)P_{n-1}(x) + QGP_1(x)P_{n-2}(x) \\ QGP_1(x)P_n(x) + QGP_0(x)P_{n-1}(x) & QGP_1(x)P_{n-1}(x) + QGP_0(x)P_{n-2}(x) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.65)$$

şeklinde ifade edilebilir. Elde edilen (3.65) matrisinin a_{12} 'nci elemanı, (3.26) denklemi dikkate alındığında

$$\begin{aligned} & QGP_2(x)P_{n-1}(x) + QGP_1(x)P_{n-2}(x) \\ &= [2xQGP_1(x) + QGP_0(x)]P_{n-1}(x) + QGP_1(x)P_{n-2}(x) \\ &= QGP_1(x)P_n(x) + QGP_0(x)P_{n-1}(x) \end{aligned} \quad (3.66)$$

dir. Yine aynı (3.65) matrisinin a_{21} 'inci elemanı, (2.42) denklemi dikkate alındığında

$$\begin{aligned} & QGP_1(x)P_n(x) + QGP_0(x)P_{n-1}(x) \\ &= QGP_1(x)[2xP_{n-1}(x) + P_{n-2}(x)] + QGP_0(x)P_{n-1}(x) \\ &= [2xQGP_1(x) + QGP_0(x)]P_{n-1}(x) + QGP_1(x)P_{n-2}(x) \\ &= QGP_2(x)P_{n-1}(x) + QGP_1(x)P_{n-2}(x) \end{aligned} \quad (3.67)$$

dir. (3.66) ve (3.67) ifadeleri (3.65)'de yerlerine yazılırlarsa

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} QGP_2(x) & QGP_1(x) \\ QGP_1(x) & QGP_0(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \\ &= \begin{pmatrix} QGP_2(x)P_n(x) + QGP_1(x)P_{n-1}(x) & QGP_2(x)P_{n-1}(x) + QGP_1(x)P_{n-2}(x) \\ QGP_1(x)P_n(x) + QGP_0(x)P_{n-1}(x) & QGP_1(x)P_{n-1}(x) + QGP_0(x)P_{n-2}(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} QGP_2(x)P_n(x) + QGP_1(x)P_{n-1}(x) & QGP_1(x)P_n(x) + QGP_0(x)P_{n-1}(x) \\ QGP_2(x)P_{n-1}(x) + QGP_1(x)P_{n-2}(x) & QGP_1(x)P_{n-1}(x) + QGP_0(x)P_{n-2}(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} P_n(x) & P_{n-1}(x) \\ P_{n-1}(x) & P_{n-2}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} QGP_2(x) & QGP_1(x) \\ QGP_1(x) & QGP_0(x) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} QGP_2(x) & QGP_1(x) \\ QGP_1(x) & QGP_0(x) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.18 $QGP_m(x)$ ve $QGP_n(x)$, sırasıyla m . ve n . Gauss Pell kuaterniyon polinomları olmak üzere Gauss Pell kuaterniyon polinomlarını ilgilendiren Honsberger özdeşliği

$$\begin{aligned}
&QGP_n(x)QGP_m(x) + QGP_{n+1}(x)QGP_{m+1}(x) \\
&= QGP_2(x)QGP_{n+m}(x) + QGP_1(x)QGP_{n+m-1}(x)
\end{aligned} \tag{3.68}$$

şeklindedir.

İspat: Lemma 3.16'dan

$$MQGP_n(x) = \begin{pmatrix} QGP_{n+1}(x) & QGP_n(x) \\ QGP_n(x) & QGP_{n-1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} QGP_2(x) & QGP_1(x) \\ QGP_1(x) & QGP_0(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1}$$

ve

$$MQGP_m(x) = \begin{pmatrix} QGP_{m+1}(x) & QGP_m(x) \\ QGP_m(x) & QGP_{m-1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} QGP_2(x) & QGP_1(x) \\ QGP_1(x) & QGP_0(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{m-1}$$

olup Lemma 3.17 dikkate alınarak $MQGP_n(x)$ ile $MQGP_m(x)$ matrisi çarpıldığı taktirde

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} QGP_{n+1}(x) & QGP_n(x) \\ QGP_n(x) & QGP_{n-1}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} QGP_{m+1}(x) & QGP_m(x) \\ QGP_m(x) & QGP_{m-1}(x) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} QGP_2(x) & QGP_1(x) \\ QGP_1(x) & QGP_0(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} QGP_2(x) & QGP_1(x) \\ QGP_1(x) & QGP_0(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{m-1} \\
&= \begin{pmatrix} QGP_2(x) & QGP_1(x) \\ QGP_1(x) & QGP_0(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} QGP_2(x) & QGP_1(x) \\ QGP_1(x) & QGP_0(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+m-2} \\
&= \begin{pmatrix} QGP_2(x) & QGP_1(x) \\ QGP_1(x) & QGP_0(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} QGP_{n+m}(x) & QGP_{n+m-1}(x) \\ QGP_{n+m-1}(x) & QGP_{n+m-2}(x) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} QGP_2(x)QGP_{n+m}(x) + QGP_1(x)QGP_{n+m-1}(x) & QGP_2(x)QGP_{n+m-1}(x) + QGP_1(x)QGP_{n+m-2}(x) \\ QGP_1(x)QGP_{n+m}(x) + QGP_0(x)QGP_{n+m-1}(x) & QGP_1(x)QGP_{n+m-1}(x) + QGP_0(x)QGP_{n+m-2}(x) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.69}$$

elde edilir. Öte yandan

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} QGP_{n+1}(x) & QGP_n(x) \\ QGP_n(x) & QGP_{n-1}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} QGP_{m+1}(x) & QGP_m(x) \\ QGP_m(x) & QGP_{m-1}(x) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} QGP_{n+1}(x)QGP_{m+1}(x) + QGP_n(x)QGP_m(x) & QGP_{n+1}(x)QGP_m(x) + QGP_n(x)QGP_{m-1}(x) \\ QGP_n(x)QGP_{m+1}(x) + QGP_{n-1}(x)QGP_m(x) & QGP_n(x)QGP_m(x) + QGP_{n-1}(x)QGP_{m-1}(x) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.70}$$

dir. Elde edilen (3.69) ve (3.70) matrislerinin matris eşitliğinden a_{11} inci elemanları eşittir. Bu ise bizden istenen sonuçtur.

Teorem 3.19 $QGP_n(x)$, n . Gauss Pell kuaterniyon polinomu olmak üzere, Gauss Pell kuaterniyon polinomlarını ilgilendiren Cassini özdeşliği

$$\begin{aligned}
& QGP_{n+1}(x) QGP_{n-1}(x) - QGP_n^2(x) \\
&= (-1)^{n-1} (QGP_2(x) QGP_0(x) - QGP_1^2(x))
\end{aligned} \tag{3.71}$$

şeklindedir.

İspat: (3.62) ifadesinin her iki tarafının determinantı alınarak istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 3.20 $QGP_n(x)$, n . Gauss Pell kuaterniyon polinomu olmak üzere, Gauss Pell kuaterniyon polinomlarını ilgilendiren Catalan özdeşliği

$$\begin{aligned}
& QGP_{n+k}(x) QGP_{n-k}(x) - QGP_n^2(x) \\
&= (-1)^{n-k} P_k(x) [P_k(x) (QGP_0^2(x) - QGP_1^2(x)) \\
&\quad + P_{k+1}(x) QGP_1(x) QGP_0(x) - P_{k-1}(x) QGP_0(x) QGP_1(x)]
\end{aligned} \tag{3.72}$$

şeklindedir. Burada $P_k(x)$, k . Pell polinomudur.

İspat: (3.72) eşitliğinin ispatı (3.38) ile verilen Binet formülünden faydalanarak yapılacaktır. O halde (3.38) denkleminde

$$\begin{aligned}
& QGP_{n+k}(x) QGP_{n-k}(x) - QGP_n^2(x) \\
&= QGP_1^2(x) [P_{n+k}(x) P_{n-k}(x) - P_n^2(x)] \\
&\quad + QGP_1(x) QGP_0(x) [P_{n+k}(x) P_{n-k-1}(x) - P_n(x) P_{n-1}(x)] \\
&\quad + QGP_0(x) QGP_1(x) [P_{n+k-1}(x) P_{n-k}(x) - P_n(x) P_{n-1}(x)]
\end{aligned}$$

$$+QGP_0^2(x)[P_{n+k-1}(x)P_{n-k-1}(x) - P_{n-1}^2(x)] \quad (3.73)$$

elde edilir. Pell polinomlarının Catalan özdeşliğinden (bkz. Horadam ve Mahon [22])

$$P_{n+k}(x)P_{n-k}(x) - P_n^2(x) = (-1)^{n-k+1}P_k^2(x) \quad (3.74)$$

ve

$$P_{n+k-1}(x)P_{n-k-1}(x) - P_{n-1}^2(x) = (-1)^{n-k}P_k^2(x) \quad (3.75)$$

dir. Üstelik

$$P_{n+h}(x)P_{n+k}(x) - P_n(x)P_{n+h+k}(x) = (-1)^n P_h(x)P_k(x) \quad (3.76)$$

(bkz. Horadam ve Mahon [22]) olup bu ifadede $h \rightarrow -k - 1$ alınarak

$$P_{n+k}(x)P_{n-k-1}(x) - P_n(x)P_{n-1}(x) = (-1)^n P_k(x)P_{-k-1}(x) \quad (3.77)$$

elde edilir. Ayrıca (3.76) eşitliğinde $h \rightarrow k - 1$ ve $k \rightarrow -k$ alınarak

$$P_{n+k-1}(x)P_{n-k}(x) - P_n(x)P_{n-1}(x) = (-1)^n P_{k-1}(x)P_{-k}(x) \quad (3.78)$$

elde edilir. (3.74), (3.75), (3.77) ve (3.78) eşitlikleri (3.73)'de yerlerine yazılırsa ve ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned} & QGP_{n+k}(x)QGP_{n-k}(x) - QGP_n^2(x) \\ &= (-1)^{n-k}P_k^2(x)[QGP_0^2(x) - QGP_1^2(x)] \\ & \quad + QGP_1(x)QGP_0(x)(-1)^n P_k(x)P_{-k-1}(x) \\ & \quad + QGP_0(x)QGP_1(x)(-1)^n P_{k-1}(x)P_{-k}(x) \end{aligned} \quad (3.79)$$

elde edilir. Ayrıca (2.46) denkleminde

$$P_{-k}(x) = (-1)^{k+1}P_k(x) \text{ ve } P_{-k-1}(x) = (-1)^{k+2}P_{k+1}(x) \quad (3.80)$$

olup (3.80) ile verilen ifadeler (3.79)'da yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & QGP_{n+k}(x)QGP_{n-k}(x) - QGP_n^2(x) \\ &= (-1)^{n-k}P_k^2(x)[QGP_0^2(x) - QGP_1^2(x)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (-1)^{n+k} P_k(x) [QGP_1(x) QGP_0(x) P_{k+1}(x) - QGP_0(x) QGP_1(x) P_{k-1}(x)] \\
& = (-1)^{n-k} P_k(x) [P_k(x) (QGP_0^2(x) - QGP_1^2(x)) \\
& \quad + (-1)^{2k} QGP_1(x) QGP_0(x) P_{k+1}(x) - QGP_0(x) QGP_1(x) P_{k-1}(x)] \\
& = (-1)^{n-k} P_k(x) [P_k(x) (QGP_0^2(x) - QGP_1^2(x)) \\
& \quad + P_{k+1}(x) QGP_1(x) QGP_0(x) - P_{k-1}(x) QGP_0(x) QGP_1(x)]
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde ispat tamamdır.

Teorem 3.21 $QGP_n(x)$, n . Gauss Pell kuaterniyon polinomu olmak üzere, Gauss Pell kuaterniyon polinomları ilgilendiren d'Ocagne özdeşliği

$$\begin{aligned}
& QGP_{m+1}(x) QGP_n(x) - QGP_m(x) QGP_{n+1}(x) \\
& = (-1)^n [P_{m-n}(x) (QGP_0^2(x) - QGP_1^2(x)) + QGP_1(x) QGP_0(x) P_{m-n+1}(x) \\
& \quad - QGP_0(x) QGP_1(x) P_{m-n-1}(x)]
\end{aligned} \tag{3.81}$$

şeklinde ifade edilir.

İspat: (3.81) eşitliğinin ispatı (3.38) ile verilen Binet formülünden faydalanarak yapılacaktır. O halde (3.38)'den

$$\begin{aligned}
& QGP_{m+1}(x) QGP_n(x) - QGP_m(x) QGP_{n+1}(x) \\
& = QGP_1^2(x) [P_{m+1}(x) P_n(x) - P_m(x) P_{n+1}(x)] \\
& \quad + QGP_0^2(x) [P_m(x) P_{n-1}(x) - P_{m-1}(x) P_n(x)] \\
& \quad + QGP_1(x) QGP_0(x) [P_{m+1}(x) P_{n-1}(x) - P_m(x) P_n(x)] \\
& \quad + QGP_0(x) QGP_1(x) [P_m(x) P_n(x) - P_{m-1}(x) P_{n+1}(x)]
\end{aligned} \tag{3.82}$$

dir. $m \geq n$ için,

$$P_{m+1}(x) P_n(x) - P_m(x) P_{n+1}(x) = (-1)^{n+1} P_{m-n}(x) \tag{3.83}$$

olarak ifade edilebilir (bkz. Horzum ve Koçer [25]). Ayrıca, (3.83) eşitliğinde n yerine $n - 1$ ve m yerine $m - 1$ alınırsa

$$P_m(x) P_{n-1}(x) - P_{m-1}(x) P_n(x) = (-1)^n P_{m-n}(x), \tag{3.84}$$

(3.83) eşitliğinde n yerine $n - 1$ alınırsa

$$P_{m+1}(x)P_{n-1}(x) - P_m(x)P_n(x) = (-1)^n P_{m-n+1}(x) \quad (3.85)$$

ve (3.83) eşitliğinde m yerine $m - 1$ alınırsa

$$P_m(x)P_n(x) - P_{m-1}(x)P_{n+1}(x) = (-1)^{n+1} P_{m-n-1}(x) \quad (3.86)$$

elde edilir. (3.84), (3.85) ve (3.86) ifadeleri (3.82)'de yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & QGP_{m+1}(x) QGP_n(x) - QGP_m(x) QGP_{n+1}(x) \\ &= QGP_1^2(x)(-1)^{n+1}P_{m-n}(x) + QGP_0^2(x)(-1)^n P_{m-n}(x) \\ &\quad + QGP_1(x)QGP_0(x)(-1)^n P_{m-n+1}(x) \\ &\quad + QGP_0(x)QGP_1(x)(-1)^{n+1} P_{m-n-1}(x) \\ &= (-1)^n [P_{m-n}(x)(QGP_0^2(x) - QGP_1^2(x)) + QGP_1(x)QGP_0(x)P_{m-n+1}(x) \\ &\quad - QGP_0(x)QGP_1(x)P_{m-n-1}(x)] \end{aligned}$$

olur ki bu ise ispatı tamamlar.

Lemma 3.22 $P_n(x)$, n . Pell polinomu ve $\alpha(x)$ ile $\beta(x)$, (2.42) rekürans bağıntısının karakteristik kökleri olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$(i) \alpha^n(x) = \alpha(x)P_n(x) + P_{n-1}(x), \quad (3.87)$$

$$(ii) \beta^n(x) = \beta(x)P_n(x) + P_{n-1}(x). \quad (3.88)$$

İspat:

(i) (2.43) denklemi ile verilen Binet formülünden

$$\begin{aligned} \alpha(x)P_n(x) + P_{n-1}(x) &= \alpha(x) \left(\frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \right) + \left(\frac{\alpha^{n-1}(x) - \beta^{n-1}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \right) \\ &= \frac{\alpha^{n-1}(x)(1 + \alpha^2(x))}{\alpha(x) - \beta(x)} \\ &= \frac{\alpha^{n-1}(x)\alpha(x)(\alpha(x) - \beta(x))}{\alpha(x) - \beta(x)} \\ &= \alpha^n(x) \end{aligned}$$

elde edilir ki bu (3.87) özdeşliğini ispatlar.

(ii) Benzer şekilde ispatlanabilir.

Lemma 3.23 $n \geq 1$ için aşağıda verilen eşitlikler sağlanır:

$$(i) \quad \alpha(x)QGP_n(x) + QGP_{n-1}(x) = \alpha^n(x) \sum_{s=0}^3 (\alpha^s(x) + i\alpha^{s-1}(x)) e_s, \quad (3.89)$$

$$(ii) \quad \beta(x)QGP_n(x) + QGP_{n-1}(x) = \beta^n(x) \sum_{s=0}^3 (\beta^s(x) + i\beta^{s-1}(x)) e_s \quad (3.90)$$

dır. Burada $e_0 \cong 1, e_1 \cong i, e_2 \cong j, e_3 \cong k$ dır.

İspat:

(i) Tanım 3.1 den

$$\begin{aligned} \alpha(x)QGP_n(x) + QGP_{n-1}(x) &= \alpha(x) \sum_{s=0}^3 GP_{n+s}(x)e_s + \sum_{s=0}^3 GP_{n-1+s}(x) e_s \\ &= \sum_{s=0}^3 (\alpha(x)GP_{n+s}(x) + GP_{n-1+s}(x))e_s \end{aligned}$$

elde edilir. (2.56) denkleminde

$$\begin{aligned} \alpha(x)QGP_n(x) + QGP_{n-1}(x) &= \sum_{s=0}^3 [\alpha(x)(P_{n+s}(x) + iP_{n-1+s}(x)) + P_{n-1+s}(x) + iP_{n-2+s}(x)]e_s \\ &= \sum_{s=0}^3 [(\alpha(x)P_{n+s}(x) + P_{n-1+s}(x)) + i(\alpha(x)P_{n-1+s}(x) + P_{n-2+s}(x))]e_s \end{aligned}$$

olup (3.87) denkleminde

$$\alpha(x)QGP_n(x) + QGP_{n-1}(x) = \sum_{s=0}^3 [\alpha^{n+s}(x) + i\alpha^{n+s-1}(x)]e_s$$

elde edilir ki bu ise (3.89) özdeşliğinin ispatıdır.

(ii) Benzer şekilde ispatlanabilir.

Aşağıdaki teorem Gauss Pell kuaterniyon polinomları için elde edilen alternatif Binet formülüdür.

Teorem 3.24 $n \geq 0$ olmak üzere Gauss Pell kuaterniyon polinomları için elde edilen alternatif Binet formülü

$$QGP_n(x) = \frac{\alpha^n(x)T - \beta^n(x)R}{\alpha(x) - \beta(x)} \quad (3.91)$$

dir. Burada

$$T = \sum_{s=0}^3 (\alpha^s(x) + i\alpha^{s-1}(x)) e_s, \quad (3.92)$$

$$R = \sum_{s=0}^3 (\beta^s(x) + i\beta^{s-1}(x)) e_s \quad (3.93)$$

ve $e_0 \cong 1, e_1 \cong i, e_2 \cong j, e_3 \cong k$ dır.

İspat: (3.92) ve (3.93) ifadeleri göz önüne alınarak Lemma 3.23'te verilen (3.89) ve (3.90) denklemleri sırasıyla

$$\alpha(x)QGP_n(x) + QGP_{n-1}(x) = \alpha^n(x)T \quad (3.94)$$

ve

$$\beta(x)QGP_n(x) + QGP_{n-1}(x) = \beta^n(x)R \quad (3.95)$$

şeklinde ifade edilebilir. (3.94) ve (3.95) denklemlerinden

$$\alpha(x)QGP_n(x) - \beta(x)QGP_n(x) = \alpha^n(x)T - \beta^n(x)R \quad (3.96)$$

elde edilip buradan istenilen sonuca ulaşılabilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Lemma 3.25 Aşağıda verilen eşitlikler sağlanır:

$$(i) T = \sum_{s=0}^3 (\alpha^s(x) + i\alpha^{s-1}(x)) e_s = QGP_1(x) - \beta(x)QGP_0(x), \quad (3.97)$$

$$(ii) R = \sum_{s=0}^3 (\beta^s(x) + i\beta^{s-1}(x)) e_s = QGP_1(x) - \alpha(x)QGP_0(x) \quad (3.98)$$

dır. Burada $e_0 \cong 1, e_1 \cong i, e_2 \cong j, e_3 \cong k$ dır.

İspat:

(i) $QGP_0(x) = 2i + (4x^2 + 2)k$ ve $QGP_1(x) = 2xi + (8x^3 + 6x)k$ başlangıç değerleri göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}
QGP_1(x) - \beta(x)QGP_0(x) &= 2xi + (8x^3 + 6x)k - (x - \sqrt{1+x^2})(2i + (4x^2 + 2)k) \\
&= 2xi + (8x^3 + 6x)k - (2xi + (4x^3 + 2x)k \\
&\quad - 2\sqrt{1+x^2}i - 4x^2\sqrt{1+x^2}k - 2\sqrt{1+x^2}k) \\
&= 2\sqrt{1+x^2}i + (8x^3 + 6x - 4x^3 - 2x + 4x^2\sqrt{1+x^2} + 2\sqrt{1+x^2})k \\
&= 2\sqrt{1+x^2}i + (4x^3 + 4x + 4x^2\sqrt{1+x^2} + 2\sqrt{1+x^2})k \quad (3.99)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$4x^3 + 4x + 4x^2\sqrt{1+x^2} + 2\sqrt{1+x^2} = U \quad (3.100)$$

olarak alınırsa (3.36)'da verilen $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ köklerinden faydalanılarak

$$U = (\alpha(x) + \beta(x))^2\alpha(x) + 3\alpha(x) + \beta(x) \quad (3.101)$$

olarak ifade edilebilir. (3.101) ifadesi (3.99) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
QGP_1(x) - \beta(x)QGP_0(x) &= (\alpha(x) - \beta(x))i + [3\alpha(x) + \beta(x) + \alpha^3(x) \\
&\quad + 2\alpha^2(x)\beta(x) + \alpha(x)\beta^2(x)]k \\
&= (\alpha(x) + \alpha^{-1}(x))i + (\alpha(x) + \alpha^3(x))k \quad (3.102)
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu son (3.102) denkleminde bazı cebirsel işlemler yapılarak

$$\begin{aligned}
QGP_1(x) - \beta(x)QGP_0(x) &= (\alpha(x) + \alpha^{-1}(x))i + (\alpha(x) + \alpha^3(x))k \\
&\quad + \alpha^2(x)j - \alpha^2(x)j \\
&= \alpha(x)i + \alpha^2(x)j + \alpha^3(x)k + \alpha^{-1}(x)i \\
&\quad + \alpha(x)k - \alpha^2(x)j \\
&= 1 + \alpha(x)i + \alpha^2(x)j + \alpha^3(x)k + i(\alpha^{-1}(x) \\
&\quad + i + \alpha(x)j + \alpha^2(x)k)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{s=0}^3 (\alpha^s(x) + i\alpha^{s-1}(x)) e_s = T$$

elde edilir. Bu ise (3.97) özdeşliğini ispatlar.

(ii) Benzer işlemleri kullanarak (3.98) özdeşliği kolayca gösterilebilir.

Teorem 3.26 $n \geq 0$ için aşağıdaki toplam formülü sağlanır:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2x)^k QGP_k(x) = QGP_{2n}(x). \quad (3.103)$$

İspat: (3.91) denkleminden

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2x)^k QGP_k(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2x)^k \left(\frac{\alpha^k(x)T - \beta^k(x)R}{\alpha(x) - \beta(x)} \right) \\ &= \frac{T}{\alpha(x) - \beta(x)} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2x\alpha(x))^k \\ &\quad - \frac{R}{\alpha(x) - \beta(x)} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2x\beta(x))^k \\ &= \frac{T}{\alpha(x) - \beta(x)} (1 + 2x\alpha(x))^n \\ &\quad - \frac{R}{\alpha(x) - \beta(x)} (1 + 2x\beta(x))^n \end{aligned} \quad (3.104)$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$1 + 2x\alpha(x) = -\alpha(x)\beta(x) + (\alpha(x) + \beta(x))\alpha(x) = \alpha^2(x) \quad (3.105)$$

ve

$$1 + 2x\beta(x) = -\alpha(x)\beta(x) + (\alpha(x) + \beta(x))\beta(x) = \beta^2(x) \quad (3.106)$$

olup (3.105) ve (3.106) eşitlikleri (3.104)'de yerlerine yazılırsa ve (3.91) denklemi dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2x)^k QGP_k(x) &= \frac{T}{\alpha(x) - \beta(x)} (\alpha^2(x))^n - \frac{R}{\alpha(x) - \beta(x)} (\beta^2(x))^n \\
&= \frac{\alpha^{2n}(x)T - \beta^{2n}(x)R}{\alpha(x) - \beta(x)} \\
&= QGP_{2n}(x)
\end{aligned}$$

olup ispat tamamdır.

Teorem 3.27 $n \geq 0$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} (-QGP_k(x)) = \frac{(\sqrt{1+x^2})^{n-1}}{2} ((-1)^n T - R) \quad (3.107)$$

dır. Burada T , (3.92) denklemi ile ve R ise (3.93) denklemi ile tanımlanır.

İspat: (3.91) denkleminde

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} (-QGP_k(x)) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} \left(\frac{-\alpha^k(x)T + \beta^k(x)R}{\alpha(x) - \beta(x)} \right) \\
&= \frac{T}{\alpha(x) - \beta(x)} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} (-\alpha(x))^k \\
&\quad - \frac{R}{\alpha(x) - \beta(x)} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} (-\beta(x))^k \\
&= \frac{T}{\alpha(x) - \beta(x)} (x - \alpha(x))^n \\
&\quad - \frac{R}{\alpha(x) - \beta(x)} (x - \beta(x))^n \quad (3.108)
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$(x - \alpha(x))^n = (-\sqrt{1+x^2})^n = (-1)^n \left(\frac{\alpha(x) - \beta(x)}{2} \right)^n \quad (3.109)$$

ve

$$(x - \beta(x))^n = (\sqrt{1+x^2})^n = \left(\frac{\alpha(x) - \beta(x)}{2} \right)^n \quad (3.110)$$

olup (3.109) ve (3.110) ifadeleri (3.108) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} (-QGP_k(x)) &= \frac{(\alpha(x) - \beta(x))^{n-1}}{2^n} ((-1)^n T - R) \\ &= \frac{(\sqrt{1+x^2})^{n-1}}{2} ((-1)^n T - R)\end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır.



4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, bileşenleri Gauss Pell polinomları olan yeni bir kuaterniyon dizisi tanımlanarak Gauss Pell kuaterniyon polinomları olarak adlandırılmış ve bu kuaterniyonların bazı cebirsel özellikleri araştırılmıştır. Elde edilen Gauss Pell kuaterniyon polinomları, daha önce Arslan [7] tarafından literatüre kazandırılan Gauss Pell kuaterniyonlarının bir genelleştirmesidir.

Bu çalışmada ilk olarak, Gauss Pell kuaterniyon polinomları tanımlanarak bu kuaterniyon polinomlarının rekürans bağıntısı ve Binet formülü verilmiştir. Ayrıca Pell kuaterniyon polinomları ile olan ilişkisine değinilmiştir. Bu kuaterniyonlar için adi üreteç fonksiyonuna ek olarak üstel ve Poisson üreteç fonksiyonları verilmiş, ayrıca matris temsili ifade edilerek bu matris temsilinin kullanılmasıyla Cassini özdeşliği elde edilmiştir. Üstelik Gauss Pell kuaterniyon polinomlarının Catalan, d'Ocagne ve Honsberger özdeşlikleri, bazı toplam formülleri, negatif indisli terimleri ve binomial temsilleri ifade edilmiştir.

Gauss Pell kuaterniyon polinomlarının binomial dönüşümleri gibi bazı özel dönüşümleri üzerine çalışılabilir. Ayrıca, Gauss Pell-Lucas kuaterniyon polinomları tanımlanabilir ve Gauss Pell kuaterniyon polinomları ile Gauss Pell-Lucas kuaterniyon polinomları arasındaki bağıntılar incelenebilir.

KAYNAKLAR

1. Hamilton, W. R., 1866. Elements of Quaternions, Longmans, Green and Co., London.
2. Horadam, A. F., 1963. Complex Fibonacci Numbers and Fibonacci Quaternions, The American Mathematical Monthly, 70, 3, 289–291.
3. Iyer, M. R., 1969. A Note on Fibonacci Quaternions, The Fibonacci Quarterly, 7, 3, 225–229.
4. Halıcı, S., 2012. On Fibonacci Quaternions, Advances in Applied Clifford Algebras, 22, 2, 321–327.
5. Çimen, C. B. ve İpek, A., 2016. On Pell Quaternions and Pell-Lucas Quaternions, Advances in Applied Clifford Algebras, 26, 1, 39–51.
6. Szynal-Liana, A. ve Wloch, I., 2016. The Pell Quaternions and Octonions, Advances in Applied Clifford Algebras, 26, 1, 435–440.
7. Arslan, H., 2021. Gaussian Pell and Gaussian Pell-Lucas Quaternions, Filomat, 35, 5, 1609–1617.
8. Ward, J. P., 1997. Quaternions and Cayley Numbers: Algebra and Applications, Kluwer Academic Publishers, London.
9. Conway, A. W., 1912. The Quaternionic Form of Relativity, Philosophical Magazine, 24, 208–211.
10. Da Silveira, A., 1985. Isomorphism Between Matrices and Quaternions, Lettere al Nuovo Cimento, 44, 80–82.
11. Conte, E., 2000. Biquaternion Quantum Mechanics, Pitagora Editrice, Via del Legatore, Bologna.
12. Gurlebeck, K. ve Sprössig W., 1998. Quaternionic and Clifford Calculus for Physicists and Engineers, John Wiley and Sons, New York.
13. Chou, J. C. K., 1992. Quaternion Kinematics and Dynamic Differential Equation, IEEE Transaction on Robotics and Automation, 8, 1, 53–64.
14. Koshy, T., 2001. Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, A Wiley-Interscience Publication, New York.
15. Gauss, C. F., 1832. Theoria Residuorum Biquadraticorum. Commentatio Prima, Typis Dieterichchianis.
16. Jordan, J. H., 1965. Gaussian Fibonacci and Lucas Numbers, The Fibonacci Quarterly, 3, 4, 315–318.

17. Berzsenyi, G., 1977. Gaussian Fibonacci Numbers, *The Fibonacci Quarterly*, 15, 3, 233-236.
18. Halıcı, S. ve Cerda-Morales, G., 2021. On Quaternion-Gaussian Fibonacci Numbers and Their Properties, *Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta, Seria Matematica*, 29, 1, 71–82.
19. Horadam, A. F., 1971. Pell Identities, *The Fibonacci Quarterly*, 9, 3, 245–263.
20. Koshy, T., 2014. *Pell and Pell-Lucas Numbers with Applications*, Springer, New York.
21. Bicknell, M., 1975. A Primer on the Pell Sequence and Related Sequences, *The Fibonacci Quarterly*, 13, 4, 345–349.
22. Horadam, A. F. ve Mahon, J. M., 1985. Pell and Pell-Lucas Polynomials, *The Fibonacci Quarterly*, 23, 1, 7–20.
23. Halıcı, S. ve Öz, S., 2016. On Some Gaussian Pell and Pell-Lucas Numbers, *Ordu University Journal of Science and Technology*, 6, 1, 8–18.
24. Halıcı, S. ve Öz, S., 2018. On Gaussian Pell Polynomials and Their Some Properties, *Palestine Journal of Mathematics*, 7, 1, 251–256.
25. Horzum, T. ve Koçer, E. G., 2009. On Some Properties of Horadam Polynomials, *International Mathematical Forum*, 4, 25, 1243–1252.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Mevlüt DUZCU

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lise : Konya Meram Anadolu Lisesi, 1999-2003

Lisans : Pamukkale Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2004-2011

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, 2020-2022

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLERİ

1. Özel Öğretim Kurumları / Uzman Matematik Öğretici, 2011 - 2017
2. Konya Büyükşehir Belediyesi / Trafik Koordinasyon Merkezi, 2017 -

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER

Kongrelerde Sunulan Bildiriler

1. Duzcu, M. ve Yağmur, T., “A Study on Gaussian Pell Quaternion Polynomials”, 9th International Congress on Fundamental and Applied Sciences (ICFAS2022), June 28-30, 2022, İstanbul, Türkiye.