

**T.C.
ERZİNCAN BİNALİ YILDIRIM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

GAUSS SAYI DİZİLERİ VE POLİNOMLARI

Merve TAŞTAN

Danışman: Prof. Dr. Engin ÖZKAN

**MATEMATİK
ANABİLİM DALI**

**ERZİNCAN
2021
Her Hakkı Saklıdır.**

ÖZET

Doktora Tezi

GAUSS SAYI DİZİLERİ VE POLİNOMLARI

Merve TAŞTAN

Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Engin ÖZKAN

Bu tezde, Gauss sayı dizilerinin yeni aileleri tanımlanmıştır. Gauss Fibonacci ve Gauss Lucas polinomları tanımlanmıştır ve bilinen ailelerle ilişkileri incelenmiştir. Gauss k – Fibonacci polinomları ile bilinen Gauss Fibonacci polinomları ve Gauss k – Lucas sayıları ve polinomları ile bilinen Lucas sayıları ve polinomları arasındaki ilişki verilmiştir. Gauss k – Jacobsthal sayıları ile bilinen Jacobsthal sayıları ve Gauss k – Jacobsthal-Lucas sayıları ile bilinen Jacobsthal-Lucas sayıları arasındaki ilişki verilmiştir. Ayrıca bu Gauss k – Jacobsthal sayı dizisi ile Gauss k – Jacobsthal-Lucas sayı dizilerinin polinomları tanımlanmıştır. Bu polinomların bazı özellikleri elde edilmiştir. Gauss k – Jacobsthal polinomları ile bilinen Jacobsthal polinomları ve Gauss k – Jacobsthal-Lucas polinomları ile bilinen Jacobsthal-Lucas polinomları arasındaki ilişki verilmiştir. Son olarak, yeni ailenin ve polinomlarının matris temsilleri bulunmuştur.

2021, 70 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Jacobsthal polinomları, Jacobsthal-Lucas polinomları, Jacobsthal sayıları, Jacobsthal-Lucas sayıları

ABSTRACT

PhD Thesis

GAUSSIAN NUMBER SEQUENCES AND THEIR POLYNOMIALS

Merve TAŞTAN

Erzincan Binali Yıldırım University
Institute of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Engin ÖZKAN

In this thesis, new families of Gaussian number sequences are defined. Gauss Fibonacci and Gauss Lucas polynomials have been defined and their relations with known families have been investigated. The relationship between Gauss k -Fibonacci polynomials and known Gaussian Fibonacci polynomials and Gauss k -Lucas numbers and polynomials with known Lucas numbers and polynomials are given. The relationship between the Gauss k -Jacobsthal numbers and the known Jacobsthal numbers and the Gauss k -Jacobsthal-Lucas numbers and the known Jacobsthal-Lucas numbers are given. In addition, this Gauss k -Jacobsthal number sequence and the polynomials of Gauss k -Jacobsthal-Lucas number sequences are defined. Some properties of these polynomials have been obtained. The relationship between the Gauss k -Jacobsthal polynomials and the known Jacobsthal polynomials and the Gauss k -Jacobsthal-Lucas polynomials and the known Jacobsthal-Lucas polynomials are given. Finally, matrix representations of the new family and its polynomials are found.

2021, 70 Pages

Keywords: Jacobsthal polynomials, Jacobsthal-Lucas polynomials, Jacobsthal sequence, Jacobsthal-Lucas sequence

TEŞEKKÜR

Lisansüstü çalışmalarımın her safhasında desteklerini benden esirgemeyen çok değerli danışmanım Sayın Prof. Dr. Engin ÖZKAN' a şükranlarımı sunarım. Tez çalışmam süresince desteğini esirgemeyen aileme ve nişanlım Çağlar TEKİN'e teşekkürü borç bilirim.

Merve TAŞTAN

Temmuz, 2021



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
TABLolar LİSTESİ.....	v
SİMGELER ve KISALTMALAR.....	vi
1.GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	7
2.1. Fibonacci Sayıları	7
2.2. Fibonacci Polinomu	9
2.3. Lucas Sayıları	10
2.4. Lucas Polinomu	12
2.5. Jacobsthal Dizisi	13
2.6. Jacobsthal Polinomu	14
2.7. Jacobsthal-Lucas Sayı Dizisi	15
2.8. Jacobsthal-Lucas Polinomu	16
3. MATERYAL YÖNTEM	17
3.1. Gauss Fibonacci Sayı Dizisi	17
3.2. Gauss Lucas Sayı Dizisi	18
3.3. Gauss Jacobsthal Sayı Dizisi	19
3.4. Gauss Jacobsthal Polinomu	20
3.5. Gauss Jacobsthal-Lucas Sayı Dizisi.....	20
3.6. Gauss Jacobsthal-Lucas Polinomu.....	21
3.7. k -Fibonacci Sayı Dizisinin Yeni Bir Ailesi	22
3.8. k -Lucas Sayı Dizisinin Yeni Bir Ailesi.....	23
3.9. k -Jacobsthal Sayı Dizisinin Yeni Bir Ailesi	26
3.10. k -Jacobsthal Polinomuun Yeni Bir Ailesi	28
3.11. k -Jacobsthal-Lucas Sayı Dizisinin Yeni Bir Ailesi	30
3.12. k -Jacobsthal-Lucas Polinomunun Yeni Bir Ailesi.....	32
3.13. Gauss k -Fibonacci Sayı Dizisinin Yeni Bir Ailesi	34
4. ARAŞTIRMA VE BULGULAR.....	35

4.1. Gauss Fibonacci Polinomu	35
4.2. Gauss Lucas Polinomu.....	37
4.3. Gauss k -Lucas Sayı Dizisinin Yeni bir Ailesi.....	42
4.4. Gauss k -Lucas Polinomunun Yeni bir Ailesi.....	43
4.5. Gauss k -Fibonacci Polinomunun Yeni bir Ailesi.....	45
4.6. Gauss k -Jacobsthal Dizisinin Yeni Bir Ailesi	49
4.7. Gauss k -Jacobsthal Polinomunun Yeni Bir Ailesi	52
4.8. Gauss k -Jacobsthal-Lucas Dizisinin Yeni Bir Ailesi	56
4.9. Gauss k -Jacobsthal-Lucas Polinomunun Yeni Bir Ailesi	60
5. SONUÇ ve ÖNERİLER	64
KAYNAKLAR	65



TABLÖLAR LİSTESİ

Sayfa

Tablo 3.1. k –Jacobsthal Dizisi $(J_n^{(k)})$	26
Tablo 3.2. k –Jacobsthal Polinomu $(J_n^{(k)}(x))$	28
Tablo 3.3. k –Jacobsthal-Lucas Dizisi $(j_n^{(k)})$	30
Tablo 3.4. k –Jacobsthal-Lucas Polinomu $(j_n^{(k)}(x))$	32
Tablo 4.1. Gauss k –Lucas Dizisi $GL_n^{(k)}$	42
Tablo 4.2. Gauss k –Lucas Polinomu $(GL_n^{(k)}(x))$	44
Tablo 4.3. Gauss k –Fibonacci Dizisi $(GF_n^{(k)})$	46
Tablo 4.4. Gauss k –Jacobsthal Dizisi $(GJ_n^{(k)})$	49
Tablo 4.5. Gauss k –Jacobsthal Polinomu $(GJ_n^{(k)}(x))$	53
Tablo 4.6. Gauss k –Jacobsthal-Lucas Dizisi $(Gj_n^{(k)})$	56
Tablo 4.7. Gauss k –Jacobsthal-Lucas Polinomu $(Gj_n^{(k)}(x))$	60

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

$\{F_n\}$	Fibonacci dizisi
F_n	n . Fibonacci sayısı
$\{L_n\}$	Lucas dizisi
L_n	n . Lucas sayısı
$\{U_n\}$	Jacobsthal dizisi
J_n	n . Jacobsthal sayısı
$\{j_n\}$	Jacobsthal-Lucas dizisi
j_n	n . Jacobsthal-Lucas sayısı
$\{U_n(x)\}$	Jacobstal Polinomu
$J_n(x)$	n . Jacobstal Polinomu
$\{j_n(x)\}$	Jacobstal-Lucas Polinomu
$j_n(x)$	n . Jacobstal-Lucas Polinomu
$\{GJ_n\}$	Gauss Jacobsthal dizisi
GJ_n	n . Gauss Jacobsthal sayısı
$\{Gj_n\}$	Gauss Jacobsthal-Lucas dizisi
Gj_n	n . Gauss Jacobsthal-Lucas sayısı
$\{GJ_n(x)\}$	Gauss Jacobstal Polinomu
$GJ_n(x)$	n . Gauss Jacobstal Polinomu
$\{Gj_n(x)\}$	Gauss Jacobstal-Lucas Polinomu
$Gj_n(x)$	n . Gauss Jacobstal-Lucas Polinomu
GF_n	Gauss Fibonacci sayısı
$\{GL_n\}$	Gauss Lucas dizisi
GL_n	n . Gauss Lucas sayısı
$\{GF_n(x)\}$	Gauss Fibonacci Polinomu
$GF_n(x)$	n . Gauss Fibonacci Polinomu

1.GİRİŞ

Sayı dizileri cebir ve sayılar teorisinde çok önemli bir yere sahiptir. Tamsayı dizilerinin önemi vücudumuzdaki organların birbirine oranında, çevremizdeki ağaçlarda, çiçeklerde, hayvanlarda bir uyum içinde karşımıza çıkmasından kaynaklanmaktadır. Ayrıca kuvvet serileri teorisinde, Hilbert serilerinde, üreteç fonksiyonlarında ve bunun gibi birçok alanda kullanılan konularda sayı dizileri yardımıyla ciddi ilerlemeler elde edilmiştir.

Sayılar tarihi de insanlık tarihi kadar çok eskiye dayanır. İlkçağlarda yaşayan insanlar mağara duvarlarına çizgi çizmiş, ağaç dallarına çentik atmış ve böylelikle sayıları kullanmışlardır. İnsanoğlu, zaman içerisinde doğadaki olayları izleyerek yeni sayı sistemleri tanımlanmasını ve geliştirilmesini sağlamıştır. Geliştirilen bu sayı sistemleri matematik ve diğer bilimlerle ilişkilendirilmesi sağlanarak sayı sistemlerinin yeni özellikleri de ortaya çıkarılmıştır. Bu çalışmada üzerinde sıkça çalışılan ve yeni özellikleri ortaya çıkan özel sayı dizileri incelenmiştir.

Sayı dizileri içerisinde en çok bilinen sayı dizisi Fibonacci'dir. İlk terimleri 1,1 olmak üzere, ilk iki terim hariç sonraki her terim kendisinden önceki iki terimin toplanmasıyla bulunur. Fibonacci dizisi 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, ... dir.

Fibonacci' den sonra çok çalışılan sayı dizisi Lucas'dır. İlk terimleri 2,1 olmak üzere, ilk iki terim hariç sonraki her terim kendisinden önceki iki terim toplanmasıyla bulunur. Lucas dizisi 2,1,3, 4, 7, 11, 18, 29, ... dir.

Birçok tam sayı dizisi bu sayı dizilerinin genelleştirilmesiyle tanımlanmıştır. Bunlardan birisi de Jacobsthal dizisidir.

Fibonacci dizisi başta olmak üzere tam sayı dizilerinin matematiğin her alanında uygulaması olduğu gibi Kimya, Biyoloji, Fizik, İktisat, Sosyal Bilimler ve Mühendislik bilimi ile de çalışma alanı bulunmaktadır.

“Matematikçilerin prensi” olarak bilinen Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) tarihteki en önemli matematikçilerden biridir. Cebirden sayılar teorisine, istatistikten kalkülüse,

jeoloji, geometri ve astronomiye kadar matematiğin her alanında önemli çalışmalar yapmıştır.

Gauss 3 yaşındayken babasının işiyle alakalı yaptığı bir hesapta hatasını bulup onu düzeltmiş ve 8 yaşındayken 1'den 1000'e kadar olan doğal sayıları toplamının kolay yolunu bulmuştur. Daha sonra ise üniversitede çalışırken birçok önemli matematikçiye ders vermiştir.

Tam sayı dizileri üzerine yapılan bazı çalışmaları aşağıdaki gibi verebiliriz.

Ivie (1972), genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizileri üzerinde çalışma yaparak Fibonacci Q – matrisinin genel halini vermiştir. Ayrıca, bu matrise ait önemli bazı özellikleri ortaya koymuştur.

Hoggatt ve Bicknell (1973), tam sayı dizilerinin polinomları ve Pascal üçgeni üzerine çalışma yapmış ve çalışmasında, Fibonacci polinomlarının Pascal üçgeni ile olan ilişkisini belirtmişlerdir.

Horadam (1996), Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas dizilerini tanımlamıştır ve bu dizilerin birbirleri ile olan ilişkisini yaptığı çalışmada özdeşlikler ve teoremler ile ispatlamıştır.

Horadam (1996), “Jacobsthal Representation Numbers” isimli çalışmasında Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayı dizilerini tanımlamıştır. Bu dizilerin rekürans bağıntılarını vererek karakteristik denklemlerini oluşturmuş ve bu dizilerin arasındaki ilişkileri veren bağıntıları incelemiştir.

Koshy (1998), çalışmasında Fibonacci sayı dizisinin birçok bağıntısını vermiştir.

Koshy (2001) kitabına, Fibonacci ve Lucas sayı dizileri başta olmak üzere başka tamsayı dizilerinin de yer aldığı teoremleri ve özellikleri koymuştur.

Catalani (2002) çalışmasında, Fibonacci dizisi için Q – matrisini uzatan Tribomatrix isimli matrisi tanımlamıştır.

Özkan vd. (2003) çalışmasında, 3 –basamak Fibonacci dizisi ile alakalı bir çalışma yaparak, bu sayı dizisinin periyodikliğini ve periyot ile Wall sayısı arasındaki ilişkiyi

ortaya koyan 5×10^5 den küçük asal sayılar ile birlikte bilgisayar doğrulamasını vermişlerdir.

Öcal vd. (2005) çalışmasında, Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin genelleştirilmiş halini vermiş ve ortaya koyduğu yeni sayı dizilerinin özelliklerini ve Binet formüllerini göstermişlerdir.

Stakhov ve Rozin (2006), yeni tamsayı dizileri tanımlayarak bu dizilerin özelliklerini göstermişlerdir.

Kılıç vd. (2006) çalışmasında; Pell sayı dizileri üzerine çalışma yapmışlar ve yapılan çalışmalar sonucunda genelleştirmeleri matris ile vermişlerdir.

Falcon ve Plaza (2007); Fibonacci sayı dizisinin bir genelleştirmesini tanımlamış ve bunu yeni bir aile olarak k –Fibonacci sayı dizisi ile isimlendirmiştir. Yeni ailenin özelliklerini ifade etmişlerdir.

Cerrin (2007), “Sums of Squares and products of Jacobsthal Numbers” isimli çalışmasında; tek ve çift terimli Jacobsthal dizilerinin karelerinin toplamını elde etmiştir. Bu toplam benzer tam sayı dizileriyle ilişkilendirilmiştir.

Falcon ve Plaza (2007), “On the Fibonacci k –Numbers” çalışmasında; Fibonacci dizisinin genelleştirilmesi olan k –Fibonacci dizisini tanımlamış ve $\{F_{k,n}\}_{n=0}^{\infty}$ ile gösterilen dizi 4TLE (four triangle longest edge) yöntemi ile açıklamıştır. Bu dizideki birçok özellik elemanter matris ile açıklanmıştır. Ayrıca k –Fibonacci dizisinin tanımı verilerek k ’nın aldığı değerlere göre hangi dizilere yakınsadığı ifade edilmiştir. R ve L şeklinde iki matris tanımlanmış ve bu dizinin özelliklerini tanımladığı matrisler yardımı ile göstermiştir.

Bolat (2008), “ k –Fibonacci ve k –Lucas sayılarının özellikleri ve uygulamaları” isimli tezinde; k –Fibonacci ve k –Lucas dizileri üzerinde durmuştur. Binet formülü ve matristen yararlanarak k –Fibonacci ve k –Lucas dizileri için önemli olan bazı özellikler bulunmuştur. Bu diziler için geren fonksiyonları içinde barındıran özdeşlikler elde etmiştir ve bu sayıların sürekli kesir cinsinden yazılabileceğini belirtmiştir.

Mikkawy ve Sogabe (2010); k –Fibonacci sayı dizisinin bir yeni ailesini tanımlamışlardır.

Falcon (2011), “On the k –Lucas Numbers” isimli çalışmasında 2007 yılında k –Fibonacci dizisi ilgili yaptığı çalışmadan yola çıkarak k –Lucas sayı dizisini tanımlayıp bu dizisinin rekürans bağıntısını vermiş ve bu diziler arasındaki ilişkileri veren teoremleri ispatlamıştır. Bu dizinin toplam formülüne ve geren fonksiyonlarına da yer vermiştir.

Jhala ve Ark. (2013), “On Some Identities for k –Jacobsthal Numbers” makalesinde k –Jacobsthal dizisinin rekürans bağıntısını vermiştir. Karakteristik denklemini verip Binet formülünü bulmuştur ve bu dizinin özelliklerini Binet formülü ile göstermiştir. Son olarak da bu dizisinin geren fonksiyonunu vermiştir.

Gürel, E. (2013) çalışmasında, Gauss Fibonacci ve Gauss Lucas dizisini tanımlamış ve özelliklerini ve bilinen sayı dizileri ile ilişkisini göstermiştir.

Aşçı, M., Gürel, E. (2013) çalışmasında, Gauss Jacobsthal dizisini tanımlamış. Özelliklerini ve bilinen sayı dizileri ile ilişkisini göstermiştir.

Aşçı, M., Gürel, E. (2013) çalışmasında, Gauss Jacobsthal-Lucas dizisini ve polinomunu tanımlamış. Özelliklerini ve bilinen sayı dizileri ile ilişkisini göstermiştir.

Jhala ve Rathore (2014), “Some Properties of k –Jacobsthal-Lucas Sequences” makalesinde; k –Jacobsthal-Lucas dizisinin rekürans bağıntısını tanımlamış karakteristik denklemini ve Binet formülünü vermiştir. Binet formülü yardımı ile k –Jacobsthal ve k –Jacobsthal-Lucas dizileri arasındaki eşitlikleri ispatlamıştır. Ayrıca k –Jacobsthal Lucas dizisi için geren fonksiyonu elde etmiştir.

Falcon (2014), “On the k –Jacobsthal Numbers” isimli makalesinde k –Jacobsthal dizisini

$$J_{k,n+1} = J_{k,n} + kJ_{k,n-1}; n \geq 1$$

şeklinde Jhala vd. farklı bir rekürans bağıntısı ile tanımladı. k – Fibonacci dizisine ait özellikleri bu yeni diziye uyguladı ve bu yeni diziyi Pascal üçgeni ile ilişkilendirdi.

Compos ve Ark. (2014), “On Some Identities of k –Jacobsthal-Lucas Numbers” isimli makalesinde Horadam tarafından tanımlanan Jacobsthal-Lucas dizisini k –Jacobsthal-Lucas dizisine genelleştirmiştir ve bu dizi için Binet formülü, Catalan ve D’ocagne özdeşliği ve geren fonksiyonlarını bulmuştur.

Srisawat ve ark. (2015), “On the k –Jacobsthal Numbers by Matrix Methods” isimli makalesinde k –Jacobsthal S ve W matrislerini tanımlamışlardır. Bu matrisleri yardımıyla k –Jacobsthal sayılarının bazı özelliklerini ve Binet Formüllerini elde etmişlerdir.

Uygun ve Eldoğan (2016(a)), “Properties of k –Jacobsthal and k –Jacobsthal Lucas Sequences” makalesinde k –Jacobsthal dizisini $\{J_{k,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ olarak, k –Jacobsthal-Lucas dizisini $\{C_{k,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ olarak tanımlamıştır. Daha sonra bu dizilerin özelliklerini ve bazı önemli ilişkilerini vermiştir. Geren fonksiyonlarını göstermiştir.

Uygun ve Eldoğan (2016(b)), “ k –Jacobsthal and k –Jacobsthal Lucas Matrix Sequences” isimli makalesinde matris dizilerini tanımlamıştır ve k –Jacobsthal matris dizisini $\{J_{k,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ile göstermiştir.

$n \in \mathbb{N}, k > 0$ olmak üzere;

$$J_{k,n+2} = kJ_{k,n} + 2J_{k,n-1}; J_{k,0} = \begin{pmatrix} k & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Şeklinde, k –Jacobsthal Lucas matris dizisini ise $\{C_{k,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ile tanımlamıştır. $n \in \mathbb{N}, k > 0$ olmak üzere;

$$C_{k,n+2} = CJ_{k,n} + 2C_{k,n-1}; C_{k,0} = \begin{pmatrix} k^2 + 4 & 2k \\ k & 4 \end{pmatrix}$$

dir. Bu iki matris arasındaki ilişkileri veren bazı özdeşliklere yer vermiştir.

Özkan vd. (2017) çalışmalarında, Fibonacci ve Lucas sayı dizisinin yeni bir ailesini tanımlayarak bu sayı dizilerinin yeni birçok özelliğinin yanında bu sayı dizileri ile bilinen Fibonacci ve Lucas sayıları arasındaki mevcut ilişkinin de ispatlanmasını sağlamışlardır.

Özkan vd. (2017) çalışmalarında, k –Lucas sayı dizisinin yeni bir ailesini tanımlayarak bu sayı dizilerinin yeni birçok özelliğinin yanında bu sayı dizileri ile bilinen Lucas sayıları arasındaki mevcut ilişkinin de ispatlanmasını sağlamışlardır.

Yang ve Zang (2018) çalışmasında; iki periyotlu Fibonacci ve Lucas sayılarını tanımlamışlar ve bu sayı dizilerinin özellikleri göstermişlerdir.

Özkan vd. (2018) çalışmasında; 2 –Fibonacci polinomlarını tanımlamışlar ve bu polinomun bilinen Fibonacci ile ilişkisini vermişlerdir.

Yadav, A. K. (2019) çalışmasında, Gauss Jacobsthal polinomunu tanımlamış. Özelliklerini ve bilinen sayı dizileri ile ilişkisini göstermiştir.

Gauss Fibonacci ve Gauss Lucas polinomlarını tanımlamak, bunların bilinen polinom aileleri ile ilişkilerini araştırmak, rekürans ilişkileri ile verilen Gauss k –Fibonacci polinomları, Gauss k –Lucas sayı dizileri ve polinomlarını tanımlamak, Gauss k –Jacobsthal ve Gauss k –Jacobsthal-Lucas sayı dizilerini ve polinomlarını tanımlamak ve tanımlanan bu sayı dizilerinin özelliklerini araştırmak, yapılan çalışmanın temel amacını oluşturmaktadır. Tanımlanacak olan rekürans ilişkileri yeni sayı dizileri olarak bilinen Gauss aileleri arasında bağlantının kurulması ve böylece sayılar teorisi ile matris teorisi arasında bir bağ kurmaktır. Kurulacak ilişkinin sayesinde yeni sayı dizilerinin özellikleri araştırılırken aynı zamanda Gauss sayı dizileri polinomlarının türevlerinin de özellikleri hakkında bilgi edinmiş olunur.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Fibonacci Sayıları

2.1.1. Tanım

Fibonacci sayıları, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olmak üzere

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}, n \geq 0$$

bağıntısıyla verilir.

Örneğin, $n \geq 0$ için bazı Fibonacci sayılarını $\{F_n\}_{n=0}^{\infty} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\}$ şeklinde verebiliriz.

Fibonacci sayı dizisinin karakteristik denklemi

$$x^2 - x - 1 = 0$$

şeklindedir ve kökleri

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ ve } \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

dir.

Buradan, Fibonacci sayı dizisinin genel terimini

$$F_n = A \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + B \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n = A(\alpha)^n + B(\beta)^n$$

olur.

Fibonacci sayı dizisinin Binet formülü

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

dir (Koshy, 2001).

2.1.2. Teorem

$n \geq 1$ için

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$$

dir (Koshy, 2001).

Şimdi, Fibonacci sayıları ile ilgili bazı önemli özdeşlikler verelim.

1. $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\sum_{s=0}^{n-1} F_s^2 = F_n F_{n-1}.$$

2. $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\sum_{s=0}^{n-1} F_s F_{s-1} = \begin{cases} F_{n-1}^2, & n \text{ tek ise} \\ F_{n-1}^2 - 1, & n \text{ çift ise} \end{cases}.$$

3. $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\sum_{s=0}^{n-1} F_{s-1}^2 = F_{n-2} F_{n-1} + 1.$$

4. $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n.$$

5. $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$F_{m+n-2} F_{m+r-1} - F_{m+n-1} F_{m+r-2} = (-1)^{m+r-2} F_{n-r}$$

(Koshy, 2001).

Fibonacci sayılarının elde edilişinde önemli olan Q – matrisini verelim.

Fibonacci matrisi Q ,

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde bir matristir (Koshy, 2001).

2.1.3. Teorem

$n \geq 1$ için

$$Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

dir (Koshy, 2001).

2.1.4. Teorem

$n \geq 1$ olmak üzere Fibonacci dizisi için Cassini özdeşliği;

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

şeklindedir (Koshy, 2001).

2.2. Fibonacci Polinomu

2.2.1. Tanım

$F_0(x) = 0$ ve $F_1(x) = 1$ için Fibonacci Polinomu,

$$F_n(x) = xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x), n \geq 2$$

şeklinde tanımlı bir polinomdur.

Fibonacci polinomunun karakteristik denklemi

$$\lambda^2 - \lambda x - 1 = 0$$

dır ve bu denklemin kökleri,

$$\alpha = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2} \text{ ve } \beta = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

elde edilir. Buradan, Fibonacci polinomunun Binet formülü

$$F_n(x) = \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}$$

şeklinde yazılır (Koshy,2001).

2.2.2. Teorem

$n \geq 1$ olmak üzere Fibonacci dizisi için Cassini özdeşliği

$$F_{n-1}(x)F_{n+1}(x) - F_n^2(x) = (-1)^n$$

şeklindedir (Koshy, 2001).

2.3. Lucas Sayıları

2.3.1. Tanım

Lucas sayıları, $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ için

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, n \geq 2$$

bağıntısıyla tanımlanır ve karakteristik denklemi

$$x^2 - x - 1 = 0$$

dir. Karakteristik denklemin kökleri

$$\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \text{ ve } \beta = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$$

elde edilir.

Binet formülü

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

dir. Negatif indisli Lucas sayıları

$$L_{-n} = (-1)^n L_n$$

bağıntısıyla elde edilir (Koshy, 2001).

Lucas dizisinin bazı özdeşlikleri aşağıda verilmiştir.

1. $n \in \mathbb{Z}^+$ için ardışık Lucas dizisinin toplamı

$$\sum_{i=0}^{n-1} L_i = L_{n+1} - 1.$$

2. $n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$\sum_{i=0}^{n-1} L_i^2 = L_{n-1} L_n + 2$$

dir.

3. $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$L_{n+1}L_m + L_nL_{m-1} = 5F_{m+n}$$

dır (Koshy, 2001).

2.3.2. Teorem

$n \geq 1$ için

$$L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n$$

dır (Koshy, 2001). ■

2.3.3. Teorem

$n \geq 1$ için

$$L_n L_{n+1} = L_{2n+1} + (-1)^n$$

dır (Hoggatt, 1965). ■

2.3.4. Tanım

$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ve $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere,

$$RQ^n = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix}$$

şeklindedir (Özkan, 2017).

2.3.5. Teorem

$n \geq 1$ için,

$$L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = 5(-1)^{n-1}$$

dir (Koshy, 2001).

2.4. Lucas Polinomu

2.4.1. Tanım

$L_0(x) = 0$ ve $L_1(x) = 2$ olmak üzere Lucas Polinomu,

$$L_n(x) = xL_{n-1}(x) + L_{n-2}(x)$$

şeklinde tanımlı bir polinomdur.

Lucas polinomunun karakteristik denklemi

$$\lambda^2 - \lambda x - 1 = 0$$

ve bu denklemin kökleri,

$$\alpha = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2} \text{ ve } \beta = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

elde edilir.

Böylece, Binet formülü

$$L_n(x) = \alpha^n(x) + \beta^n(x)$$

şeklinde yazılır (Koshy, 2001).

2.4.2. Teorem

$n \geq 1$ için,

$$L_{n-1}(x)L_{n+1}(x) - L_n^2(x) = (x^2 + 4)(-1)^{n-1}$$

eşitliği vardır (Koshy, 2001).

2.5. Jacobsthal Dizisi

2.5.1. Tanım

Jacobsthal dizisi, $J_0 = 0, J_1 = 1$ için

$$J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}, n > 1$$

şeklinde tanımlı bir sayı dizisidir.

Jacobsthal dizisi; $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}^\infty = \{0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, \dots\}$ şeklindedir.

Jacobsthal dizisinin Binet formülü

$$J_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

şeklindedir ve burada $\alpha = 2, \beta = -1$ dir.

Jacobsthal dizisinin matrisi

$$F^n = \begin{bmatrix} J_{n+1} & J_n \\ J_n & J_{n-1} \end{bmatrix}$$

$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ dir (Tereszkiewicz, A., Wawreniuk, I, 2015).

2.5.2. Teorem

$n \geq 1$ için,

$$J_{n-1}J_{n+1} - J_n^2 = 2^{n-1}(-1)^{n-1}$$

eşitliği vardır (Koshy, 2001).

2.6. Jacobsthal Polinomu

2.6.1. Tanım

$n \geq 2$, $J_0(x) = 0$ ve $J_1(x) = 1$ olmak üzere

$$J_n(x) = J_{n-1}(x) + 2xJ_{n-2}(x)$$

şeklinde tanımlı bir polinoma Jacobsthal polinomu denir.

Jacobsthal polinomunun Binet formülü

$$J_n(x) = \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}$$

şeklindedir. Burada $\alpha(x) = \frac{1+\sqrt{1+8x}}{2}$ ve $\beta(x) = \frac{1-\sqrt{1+8x}}{2}$ dir.

Jacobsthal polinomunun matris temsili;

$$n \geq 1 \text{ ve } Q = \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ için}$$

$$Q^n P = \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dir (Tereszkiewicz, A., Wawreniuk, I, 2015).

2.6.2. Teorem

$n \geq 1$ için,

$$J_{n-1}(x)J_{n+1}(x) - J_n^2(x) = (2x)^{n-1}(-1)^{n-1}$$

eşitliği vardır (Koshy, 2001).

2.7. Jacobsthal-Lucas Dizisi

2.7.1. Tanım

Jacobsthal-Lucas dizisi, $j_0 = 2$, $j_1 = 1$ için

$$j_n = j_{n-1} + 2j_{n-2}, n > 1$$

şeklinde tanımlı bir sayı dizisidir.

Jacobsthal-Lucas dizisi; $\{j_n\}_{n \in \mathbb{N}}^\infty = \{2, 1, 5, 7, 17, 31, \dots\}$ şeklindedir.

Jacobsthal-Lucas dizisinin Binet formülü

$$j_n = \alpha^n + \beta^n$$

şeklindedir ve burada $\alpha = 2, \beta = -1$ dir.

Jacobsthal-Lucas dizisinin matrisi

$$E^n = \begin{cases} 3^n \begin{bmatrix} j_{n+1} & 2j_n \\ j_n & 2j_{n-1} \end{bmatrix}, & n \text{ çift} \\ 3^n \begin{bmatrix} j_{n+1} & 2j_n \\ j_n & 2j_{n-1} \end{bmatrix}, & n \text{ tek} \end{cases}$$

dir. Burada $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ve $E = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ dir (Tereszkiewicz, A., Wawreniuk, I, 2015).

2.7.2. Teorem

$n \geq 1$ için,

$$j_{n-1}j_{n+1} - j_n^2 = 2^{n-1}3^2(-1)^{n+1}$$

eşitliği vardır (Koshy, 2001).

2.8. Jacobsthal-Lucas Polinomu

2.8.1. Tanım

$j_0(x) = 0$ ve $j_1(x) = 1$ olmak üzere

$$j_n(x) = j_{n-1}(x) + 2xj_{n-2}(x), n \geq 2$$

şeklinde tanımlı polinoma Jacobsthal-Lucas polinomu denir.

Jacobsthal-Lucas polinomunun Binet formülü

$$J_n(x) = \alpha^n(x) + \beta^n(x)$$

şeklindedir ve burada $\alpha(x) = \frac{1+\sqrt{1+8x}}{2}$ ve $\beta(x) = \frac{1-\sqrt{1+8x}}{2}$ dir (Tereszkiewicz, A., Wawreniuk, I, 2015).

Jacobsthal-Lucas polinomunun matris temsili;

$$n \geq 1 \text{ ve } Q = \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } R = \begin{bmatrix} 1+4x & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ için}$$

$$Q^n R = \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1+4x & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

dir (Tereszkiewicz, A., Wawreniuk, I, 2015).

2.8.2. Teorem

$n \geq 1$ için,

$$j_{n-1}(x)j_{n+1}(x) - j_n^2(x) = (2x)^{n-1}3^2(1+8x)(-1)^{n+1}$$

eşitliği vardır (Koshy, 2001).

3. MATERYAL YÖNTEM

Bu bölümde, Gauss Fibonacci, Gauss Lucas sayı dizileri ve Gauss Jacobsthal, Gauss Jacobsthal-Lucas dizileri, k -Fibonacci, k -Lucas, k -Jacobsthal, k -Jacobsthal-Lucas Sayı Dizilerinin yeni bir ailesi ve bu ailelerin polinomları verilmiştir.

1777 – 1855 yıllarında yaşamış olan ve “Matematikçilerin Prensi” olarak anılan Carl Friedrich Gauss en ünlü matematikçilerden biridir. Birçok alanda bilime katkısı olan Gauss, bunun göstergesi olarak kendi ismiyle anılan sayı dizisi ve halkası vardır. Ayrıca, cebirde, sayılar teorisinde, istatistikte kalkülüsde, geometride, jeolojide ve astronomide uygulama alanı bulan keşifler yapmıştır.

Herhangi $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere $a + bi$ biçimindeki sayılar Gauss tamsayıları olarak adlandırılmış ve $\mathbb{Z}[i]$ ile gösterilmiştir. Yani,

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}, i = \sqrt{-1}\}$$

dir.

3.1. Gauss Fibonacci Sayı Dizisi

3.1.1. Tanım

$n \geq 2$ ve $GF_0 = i$ ve $GF_1 = 1$ için

$$GF_n = GF_{n-1} + GF_{n-2}$$

şeklinde tanımlı sayı dizisine Gauss Fibonacci sayı dizisi denir.

Gauss Fibonacci sayı dizisinin birkaç terimini aşağıdaki şekilde verebiliriz:

$$\{GF_n\}_{n=0}^7 = \{i, 1, 1 + i, 2 + i, 3 + 2i, 5 + 3i, 8 + 5i, 13 + 8i\}$$

dir (Gürel, E., 2015).

Gauss Fibonacci dizisinin Binet formülü ise;

$$GF_{n+1} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} + i \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}$$

şeklindedir ve burada $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ dir.

3.1.2 Teorem

$n \geq 1$ olmak üzere

$$GF_{n-1}GF_{n+1} - GF_n^2 = (-1)^n(2 - i)$$

dir (Gürel, E., 2015).

3.2. Gauss Lucas Sayı Dizisi

3.2.1. Tanım

$n \geq 2$ ve $GL_0 = 2 - i$ ve $GL_1(x) = 1 + 2i$ için

$$GL_n = GL_{n-1} + GL_{n-2}$$

şeklinde tanımlı sayı dizisine Gauss Lucas sayı dizisi denir.

Gauss Lucas sayı dizisinin birkaç terimini aşağıdaki şekilde verebiliriz:

$$\{GL_n\}_{n=0}^6 = \{2 - i, 1 + 2i, 3 + i, 4 + 3i, 7 + 4i, 11 + 7i, 18 + 11i\}$$

dir (Gürel, E., 2015).

Gauss Lucas dizisinin Binet formülü ise;

$$GL_{n+1} = \alpha^n + \beta^n + i(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1})$$

olur. Burada $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ dir.

3.2.2. Teorem

$n \geq 1$ için

$$GL_{n-1}GL_{n+1} - GL_n^2 = 5(-1)^{n+1}(2 - i)$$

dir (Gürel, E., 2015).

3.3. Gauss Jacobsthal Sayı Dizisi

3.3.1. Tanım

Gauss Jacobsthal sayı dizisi, $GJ_0 = \frac{i}{2}$, $GJ_1 = 1$ olmak üzere

$$GJ_{n+1} = GJ_n + 2GJ_{n-1}, n \geq 1$$

şeklinde tanımlı bir sayı dizisidir (Aşçı, M., Gürel, E. 2013).

Gauss Jacobsthal dizisinin Binet formülü

$$GJ_{n+1} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} + i \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}$$

$\alpha = 2, \beta = -1$ dir.

Gauss Jacobsthal dizisinin matrisi

$$Q^n P = \begin{bmatrix} GJ_{n+2} & GJ_{n+1} \\ GJ_{n+1} & GJ_n \end{bmatrix}$$

dir. Burada $Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ve $P = \begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & \frac{i}{2} \end{bmatrix}$ dir (Aşçı, M., Gürel, E. 2013).

3.3.2. Teorem

$n \geq 1$ için

$$GJ_{n-1}GJ_{n+1} - GJ_n^2 = 2^{n-2}(-1)^{n+1}(3 - i)$$

dir (Gürel, E., 2015).

3.4. Gauss Jacobsthal Polinomu

3.4.1. Tanım

$n \geq 1$ ve $GJ_0(x) = \frac{i}{2}$ ve $GJ_1(x) = 1$ için

$$GJ_{n+1}(x) = GJ_n(x) + 2xGJ_{n-1}(x)$$

şeklinde tanımlı sayı dizisine Gauss Jacobsthal polinomu denir.

Gauss Jacobsthal sayı dizisinin birkaç terimini aşağıdaki şekilde verebiliriz:

$$\{GJ_n\}_{n=0}^5 = \{\frac{i}{2}, 1 + ix, 1 + 2x + ix, 1 + 4x + (1 + 2x)ix, 1 + 6x + 4x^2 + (1 + 4x)ix\}$$

dir (Yadav, A. K., 2019).

Gauss Jacobsthal polinomunun Binet formülü ise;

$$GJ_{n+1}(x) = \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} + i \frac{\alpha^{n-1}(x) - \beta^{n-1}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}$$

şeklindedir ve burada $\alpha = \frac{1+\sqrt{1+8x}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{1+8x}}{2}$ dir.

3.4.2. Teorem

$n \geq 1$ için

$$GJ_{n-1}(x)GJ_{n+1}(x) - GJ_n^2(x) = (-1)^n 2^{n-2} x^{n-1} (2 + x - i)^{n+1}$$

dir (A. K. Yadav, 2019).

3.5. Gauss Jacobsthal-Lucas Sayı Dizisi

3.5.1. Tanım

Gauss Jacobsthal-Lucas dizisi, $Gj_0 = 2 - \frac{i}{2}$, $Gj_1 = 1 + 2i$ için

$$Gj_{n+1} = Gj_n + 2Gj_{n-1}, n \geq 1$$

şeklinde tanımlı sayı dizisidir (Aşçı, M., Gürel, E., 2013).

Gauss Jacobsthal-Lucas dizisinin Binet formülü

$$Gj_{n+1} = \alpha^n + \beta^n + i(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1})$$

şeklindedir ve burada $\alpha = 2, \beta = -1$ dir.

Gauss Jacobsthal-Lucas dizisinin matrisi

$$Q^n R = \begin{bmatrix} Gj_{n+2} & Gj_{n+1} \\ Gj_{n+1} & Gj_n \end{bmatrix}$$

dir. Burada $Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ve $R = \begin{bmatrix} 5+i & 1+2i \\ 1+2i & 2-\frac{i}{2} \end{bmatrix}$ dir (Aşçı, M., Gürel, E. 2013).

Gauss Jacobsthal-Lucas sayı dizisinin birkaç terimini aşağıdaki şekilde verebiliriz:

$$\{Gj_n\}_{n=0}^6 = \{2 - \frac{i}{2}, 1 + 2i, 5 + i, 7 + 5i, 17 + 7i, 31 + 17i\}$$

dir (M. Aşçı, E. Gürel 2013).

3.5.2. Teorem

$n \geq 1$ olmak üzere

$$Gj_{n-2}Gj_{n+2} - Gj_n^2 = 9(-1)^n(3 - i)$$

dir (Gürel, E., 2015).

3.6. Gauss Jacobsthal-Lucas Polinomu

3.6.1. Tanım

Gauss Jacobsthal-Lucas polinomu, $Gj_0 = 2 - \frac{i}{2}, Gj_1 = 1 + 2ix$ için

$$Gj_{n+1}(x) = Gj_n(x) + 2xGj_{n-1}(x), n \geq 1$$

şeklinde tanımlı polinom dizisidir (Aşçı, M., Gürel, E. 2013).

Gauss Jacobsthal-Lucas polinomunun Binet formülü

$$Gj_{n+1} = \alpha^n(x) + \beta^n(x) + i(\alpha^{n-1}(x) + \beta^{n-1}(x))$$

şeklindedir ve burada $\alpha(x) = \frac{1+\sqrt{1+8x}}{2}$, $\beta(x) = \frac{1-\sqrt{1+8x}}{2}$ dir (Aşçı, M., Gürel, E. 2013).

Gauss Jacobsthal-Lucas polinomunun matrisi

$$Q^n T = \begin{bmatrix} Gj_{n+2}(x) & Gj_{n+1}(x) \\ Gj_{n+1}(x) & Gj_n(x) \end{bmatrix}$$

dir. Burada $Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ve $T = \begin{bmatrix} 1+4x+ix & 1+2xi \\ 1+2xi & 2-\frac{i}{2} \end{bmatrix}$ dir (Aşçı, M., Gürel, E. 2013).

Gauss Jacobsthal-Lucas sayı dizisinin birkaç terimini aşağıdaki şekilde verebiliriz:

$$\{Gj_n\}_{n=0}^4 = \{2 - \frac{i}{2}, 1 + 2ix, 1 + 4x + ix, 1 + 6x + (1 + 4x)ix, 1 + 8x + 8x^2 + (1 + 6x)ix\}$$

dir (Aşçı, M., Gürel, E. 2013).

3.6.2. Teorem

$n \geq 1$ için

$$Gj_{n-2}(x)Gj_{n+2}(x) - Gj_n^2(x) = (-1)^{n-1}2^{n-2}x^{n-1}(2+x-i)(1+8x)$$

dir (A. K. Yadav (2019)).

3.7. k –Fibonacci Dizisi

3.7.1. Tanım

k –Fibonacci dizisi için Binet formülü;

$$F_n^{(k)} := \frac{1}{(\sqrt{5})^k} (\alpha^{m+1} - \beta^{m+1})^{k-r} (\alpha^{m+2} - \beta^{m+2})^r$$

şeklindedir. Burada $n, k, m, r \in N, n = mk + r, k \neq 0, 0 \leq r < k$ ve $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ dir.

$k = 2, 3$ için bazı değerler aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\{F_n^{(2)}\}_{n=0}^{10} = \{1, 1, 1, 2, 4, 6, 9, 15, 25, 40, 64\}$$

$$\{F_n^{(3)}\}_{n=0}^{10} = \{1, 1, 1, 1, 2, 4, 8, 12, 18, 27, 45\}$$

Bilinen Fibonacci sayı dizisi ile k –Fibonacci dizisi ile arasında ilişki

$$F_n^{(k)} = (F_m)^{k-r} (F_{m+1})^r$$

bağıntısı ile verilir (El-Mikkawy, M. ve Sogabe, T., 2010).

3.7.2. Teorem

$k, m \in \{1, 2, 3 \dots\}$ için, bilinen Fibonacci sayı dizisi ile k –Fibonacci dizisi arasında aşağıdaki bağıntılar vardır (El-Mikkawy, M. ve Sogabe, T., 2010).

- i. $\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k-1}{i} F_{mk+i}^{(k)} = (-1)^{k-1} F_m F_{(m-1)(k-1)}^{(k-1)}$,
- ii. $\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} F_{mk+i}^{(k)} = F_m F_{(m+2)(k-1)}^{(k-1)} = F_m (F_{m+2})^{k-1}$,
- iii. $\sum_{i=0}^{k-1} F_{mk+i}^{(k)} = \frac{F_m}{F_{m-1}} [(F_{m+1})^k - (F_m)^k] = \frac{F_m}{F_{m-1}} [F_{(m+1)k}^{(k)} - F_{mk}^{(k)}]$. ■

3.8. k – Lucas Dizisi

3.8.1. Tanım

k –Lucas dizisi için Binet formülü;

$$L_n^{(k)} := \frac{1}{(\sqrt{5})^k} (\alpha^{m+1} + \beta^{m+1})^r (\alpha^m + \beta^m)^{k-r}$$

bağıntısıyla tanımlanır. Burada $n, k, m, r \in N, n = mk + r, k \neq 0, 0 \leq r < k$ ve

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ dir.}$$

$k = 2, 3$ için, bazı değerler aşağıdaki gibidir.

$$\{L_n^{(2)}\}_{n=0}^{10} = \{4, 2, 1, 3, 9, 12, 16, 28, 49, 77, 121\}$$

$$\{L_n^{(3)}\}_{n=0}^{10} = \{8, 4, 2, 1, 3, 9, 27, 36, 48, 64, 112\}$$

k –Lucas dizisi ve bilinen Lucas dizisi arasındaki bağıntı aşağıdaki gibidir.

$$L_n^{(k)} = (L_m)^{k-r} (L_{m+1})^r$$

(Özkan, 2017).

3.8.2. Teorem

k –Lucas dizisi ve bilinen Lucas dizisi arasında aşağıdaki bağıntılar vardır.

- i. $L_{2n+1}^{(2)} = L_n L_{n+1}$,
- ii. $L_{2n}^{(2)} = L_n^2$

(Özkan, 2017).

3.8.3. Teorem

$k \in \{1, 2, \dots\}$ ve k –Lucas sayı dizisi için

$$L_{nk+k-1}^{(k)} + L_{nk+k}^{(k)} = L_{nk+k+1}^{(k)}$$

dir (Özkan, 2017).

İspat.

$$\begin{aligned} L_{nk+k-1}^{(k)} + L_{nk+k}^{(k)} &= [(L_n)^1 (L_{n+1})^{k-1}] + [(L_{n+1})^k] \\ &= (L_{n+1})^{k-1} [L_n + L_{n+1}] \end{aligned}$$

$$= (L_{n+1})^{k-1} L_{n+2}$$

$$= L_{nk+k+1}^{(k)}. \blacksquare$$

3.8.4. Teorem

2 –Fibonacci ve 2 –Lucas sayı dizileri arasında

$$2L_{2n-1}^{(2)} + L_{2n}^{(2)} = 5(F_{2n+1}^{(2)} + F_{2n-1}^{(2)})$$

ilişkisi vardır (Özkan,2017).

İspat.

$$2L_{2n-1}^{(2)} + L_{2n}^{(2)} = 2(L_n)(L_{n-1}) + (L_n)^2$$

$$= L_n(2L_{n-1} + L_n)$$

$$= L_n(L_{n-1} + L_{n+1})$$

$$= L_n 5F_n$$

$$= 5F_{2n}$$

$$= 5(F_n F_{n+1} + F_n F_{n-1})$$

$$= 5(F_{2n+1}^{(2)} + F_{2n-1}^{(2)}). \blacksquare$$

3.8.5. Teorem

2 –Fibonacci ve 2 –Lucas sayı dizileri arasında

$$F_{4n+1}^{(2)} = L_{2n+1}^{(2)} F_{2n}^{(2)}$$

eşitliği vardır (Özkan, 2017).

İspat.

$$F_{4n+1}^{(2)} = F_{2n} F_{2n+1}$$

$$\begin{aligned}
&= F_{2n}[F_n F_{n+1} + F_n F_{n-1}] \\
&= F_{2n} F_n [F_{n+1} + F_{n-1}] \\
&= F_{2n} F_n L_{n+1} \\
&= F_n L_n F_n L_{n+1} \\
&= (F_n)^2 L_n L_{n+1} \\
&= F_{2n}^{(2)} L_{2n+1}^{(2)}. \blacksquare
\end{aligned}$$

3.9. k – Jacobsthal Dizisi

3.9.1. Tanım

k –Jacobsthal dizisinin Binet formülü;

$$J_n^{(k)} := \frac{1}{3^k} (\alpha^m - \beta^m)^{k-r} (\alpha^{m+1} - \beta^{m+1})^r, n = mk + r$$

bağıntısıyla verilir. Burada $n, k, m, r \in \mathbb{N}$, $n = mk + r$, $k \neq 0, 0 \leq r < k$ ve $\alpha = 2$ ve $\beta = -1$ dir. F matrisi $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ şeklinde olmak üzere, k –Jacobsthal sayı dizisinin matris yardımıyla ifadesi

$$J_n^{k-1} F^n = \begin{bmatrix} J_{kn+1}^{(k)} & 2J_{kn}^{(k)} \\ J_{kn}^{(k)} & 2J_{kn-1}^{(k)} \end{bmatrix}$$

ile verilir. k –Jacobsthal dizisinin bazı terimleri Tablo 3.1 de verilmiştir;

Tablo 3.1 $J_n^{(k)}(x)$ dizisi için bazı değerler

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$
$J_0^{(k)}$	0	0	0	0	0	0
$J_1^{(k)}$	1	0	0	0	0	0
$J_2^{(k)}$	1	1	0	0	0	0

k –Jacobsthall sayı dizisinin bilinen Jacobsthal sayı dizisi ile ilişkisi

$$J_n^{(k)} := (J_m)^{k-r} (J_{m+1})^r, n = mk + r \quad (3.1)$$

eşitliği ile verilir. Burada $n, k, m, r \in \mathbb{N}$, $n = mk + r$ ve $k \neq 0$ dır.

Bu eşitlikte $k = 1$, $m = n$ ve $r = 0$ alınırsa $J_n^{(1)} = J_n$ olur.

3.9.2. Teorem

$n, k \geq 2$ olmak üzere

$$J_{kn+t}^{(k)} J_{kn+t-2}^{(k)} - \left(J_{kn+t-1}^{(k)} \right)^2 = \begin{cases} J_n^{2k-2} (-1)^n 2^{n-1}, & t = 1 \\ 0, & t \neq 1 \end{cases}$$

dir.

İspat.

$$\begin{aligned} J_{kn+t}^{(k)} J_{kn+t-2}^{(k)} - \left(J_{kn+t-1}^{(k)} \right)^2 &= (J_n^{k-1} J_{n+t}) (J_n^{k-1} J_{n+t-2}) - (J_n^{k-1} J_{n+t-1})^2 \\ &= (J_n^{k-1})^2 (J_{n+t} J_{n+t-2} - (J_{n+t-1})^2) \\ &= J_n^{2k-2} (J_{n+t} J_{n+t-2} - (J_{n+t-1})^2). \end{aligned}$$

$t = 1$ için;

$$\begin{aligned} &= J_n^{2k-2} (J_{n+1} J_{n-1} - (J_n)^2) \\ &= J_n^{2k-2} (-1)^n 2^{n-1}. \end{aligned}$$

$t \neq 1$, $t = m$, ($m \in \mathbb{N}$) için;

$$\begin{aligned} &= J_n^{2k-2} (J_{n+m} J_{n+m-2} - (J_{n+m-1})^2) \\ &= J_n^{2k-2} (J_{2n+2m-2}^{(2)} - J_{2n+2m-2}^{(2)}) \\ &= 0. \blacksquare \end{aligned}$$

3.10. k – Jacobsthal Polinomu

3.10.1. Tanım

k –Jacobsthal polinomu için Binet formülü;

$$J_n^{(k)}(x) := \left(\frac{\alpha^m(x) - \beta^m(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \right)^{k-r} \left(\frac{\alpha^{m+1}(x) - \beta^{m+1}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \right)^r$$

bağıntısıyla tanımlanır. Burada $n, k, m, r \in N, n = mk + r, k \neq 0, 0 \leq r < k$ ve $\alpha(x) = \frac{1+\sqrt{1+8x}}{2}, \beta(x) = \frac{1-\sqrt{1+8x}}{2}$ dir. k –Jacobsthal polinomunun matris yardımıyla ifadesi

$$J_{n+1}^k(x)Q^nP = \begin{bmatrix} J_{kn+k+1}^{(k)}(x) & J_{kn+k}^{(k)}(x) \\ J_{kn+k}^{(k)}(x) & J_{kn+k-1}^{(k)}(x) \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada $Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ve $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ dir.

k –Jacobsthal polinomunun bazı terimleri Tablo 3.2 de verilmiştir;

Tablo 3.2 $J_n^{(k)}(x)$ polinomu için bazı değerler

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
$J_0^{(k)}(x)$	0	0	0	0
$J_1^{(k)}(x)$	1	0	0	0
$J_2^{(k)}(x)$	1	1	0	0
$J_3^{(k)}(x)$	$1 + 2x$	1	1	0

k –Jacobsthal polinomu ile bilinen Jacobsthal polinomu arasındaki ilişki

$$J_n^{(k)}(x) := (J_m(x))^{k-r} (J_{m+1}(x))^r, n = mk + r \quad (3.2)$$

eşitliği ile verilir. Burada $n, k, m, r \in N, n = mk + r$ ve $k \neq 0$ dir.

Bu eşitlikte $k = 1$, $m = n$ ve $r = 0$ alınırsa $J_n^{(1)}(x) = J_n(x)$.

3.10.2. Teorem

$n, k \geq 2$ için,

$$J_{kn+t}^{(k)}(x)J_{kn+t-2}^{(k)}(x) - \left(J_{kn+t-1}^{(k)}(x)\right)^2 = \begin{cases} J_n^{2k-2}(x)(-1)^n(2x)^{n-1}, & t = 1 \\ 0, & t \neq 1 \end{cases}$$

dır.

İspat.

$$\begin{aligned} J_{kn+t}^{(k)}(x)J_{kn+t-2}^{(k)}(x) - \left(J_{kn+t-1}^{(k)}(x)\right)^2 &= (J_n^{k-1}(x)J_{n+t}(x))(J_n^{k-1}(x)J_{n+t-2}(x)) - (J_n^{k-1}(x)J_{n+t-1}(x))^2 \\ &= (J_n^{k-1}(x))^2(J_{n+t}(x)J_{n+t-2}(x) - (J_{n+t-1}(x))^2) \\ &= J_n^{2k-2}(x)(J_{n+t}(x)J_{n+t-2}(x) - (J_{n+t-1}(x))^2) \end{aligned}$$

$t = 1$ için;

$$\begin{aligned} &= J_n^{2k-2}(x)(J_{n+1}(x)J_{n-1}(x) - (J_n(x))^2) \\ &= J_n^{2k-2}(x)(-1)^n(2x)^{n-1}. \end{aligned}$$

$t \neq 1$, $t = m$, ($m \in \mathbb{N}$) için;

$$\begin{aligned} &= J_n^{2k-2}(x)(J_{n+m}(x)J_{n+m-2}(x) - (J_{n+m-1}(x))^2) \\ &= J_n^{2k-2}(x)(J_{2n+2m-2}^{(2)}(x) - J_{2n+2m-2}^{(2)}(x)) \\ &= 0. \blacksquare \end{aligned}$$

3.11. k – Jacobsthal-Lucas Dizisi

3.11.1. Tanım

k –Jacobsthal-Lucas dizisinin Binet formülü;

$$j_n^{(k)} := (\alpha^m + \beta^m)^{k-r} (\alpha^{m+1} + \beta^{m+1})^r, n = mk + r$$

şeklinde tanımlanır. Burada $n, k, m, r \in \mathbb{N}$, $n = mk + r$, $k \neq 0, 0 \leq r < k$, $\alpha = 2$ ve $\beta = -1$ dir. $E = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ olmak üzere k –Jacobsthal-Lucas sayı dizisinin matris yardımıyla ifadesi

$$j_n^{k-1} E^n = \begin{cases} 3^n \begin{bmatrix} j_{kn+1}^{(k)} & 2j_{kn}^{(k)} \\ j_{kn}^{(k)} & 2j_{kn-1}^{(k)} \end{bmatrix}, & n \text{ çift tamsayı} \\ 3^n \begin{bmatrix} j_{kn+1}^{(k)} & 2j_{kn}^{(k)} \\ j_{kn}^{(k)} & 2j_{kn-1}^{(k)} \end{bmatrix}, & n \text{ tek tamsayı} \end{cases}$$

şeklindedir. k –Jacobsthal-Lucas dizisinin bazı terimleri Tablo 3.3 de verilmiştir;

Table 3.3 $j_n^{(k)}$ dizisi için bazı değerler

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$
$j_0^{(k)}$	2	4	8	16	32	64
$j_1^{(k)}$	1	2	4	8	16	32
$j_2^{(k)}$	5	1	2	4	8	16
$j_3^{(k)}$	7	5	1	2	4	8
$j_4^{(k)}$	17	25	5	1	2	4
$j_5^{(k)}$	31	35	25	5	1	2

k –Jacobsthal-Lucas sayı dizisinin bilinen Jacobsthal-Lucas dizisi ile ilişkisi

$$j_n^{(k)} := (j_m)^{k-r} (j_{m+1})^r, n = mk + r \quad (3.3)$$

eşitliği ile verilebilir. Burada $n, k, m, r \in \mathbb{N}$, $n = mk + r$ ve $k \neq 0$ dir.

3.11.2. Teorem

$n, k \geq 2$ olmak üzere,

$$j_{kn+t}^{(k)} j_{kn+t-2}^{(k)} - \left(j_{kn+t-1}^{(k)} \right)^2 = \begin{cases} j_n^{2k-2} (-1)^{n+1} 3^2 2^{n-1}, & t = 1 \\ 0, & t \neq 1 \end{cases}$$

dir.

İspat.

$$\begin{aligned} j_{kn+t}^{(k)} j_{kn+t-2}^{(k)} - \left(j_{kn+t-1}^{(k)} \right)^2 &= (j_n^{k-1} j) (j_n^{k-1} j_{n+t-2}) - (j_n^{k-1} j_{n+t-1})^2 \\ &= (j_n^{k-1})^2 (j_{n+t} j_{n+t-2} - (j_{n+t-1})^2) \\ &= j_n^{2k-2} ((j_{n+t} j_{n+t-2} - (j_{n+t-1})^2). \end{aligned}$$

$t = 1$ için;

$$\begin{aligned} &= j_n^{2k-2} ((j_{n+1} j_{n-1} - (j_n)^2) \\ &= j_n^{2k-2} (x) (-1)^{n+1} 3^2 2^{n-1}. \end{aligned}$$

$t \neq 1$, $t = m$, ($m \in \mathbb{N}$) için;

$$\begin{aligned} &= j_n^{2k-2} ((j_{n+m} j_{n+m-2} - (j_{n+m-1})^2) \\ &= j_n^{2k-2} (j_{2n+2m-2}^{(2)} - j_{2n+2m-2}^{(2)}) \\ &= 0. \blacksquare \end{aligned}$$

3.12. k – Jacobsthal-Lucas polinomu

3.12.1. Tanım

k –Jacobsthal-Lucas polinomunun Binet formülü;

$$j_n^{(k)}(x) := (\alpha^m(x) + \beta^m(x))^{k-r} (\alpha^{m+1}(x) + \beta^{m+1}(x))^r$$

şeklinde tanımlanır. Burada $n, k, m, r \in \mathbb{N}, n = mk + r, k \neq 0, 0 \leq r < k, \alpha(x) = \frac{1+\sqrt{1+8x}}{2}$ ve $\beta(x) = \frac{1-\sqrt{1+8x}}{2}$ dir. k –Jacobsthal polinomunun matris yardımıyla ifadesi

$$j_{n+1}^k(x) Q^n R = \begin{bmatrix} j_{kn+k+1}^{(k)}(x) & j_{kn+k}^{(k)}(x) \\ j_{kn+k}^{(k)}(x) & j_{kn+k-1}^{(k)}(x) \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada $Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ve $R = \begin{bmatrix} 1+4x & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ dir.

k –Jacobsthal-Lucas polinomunun bazı terimleri Tablo 3.4 de verilmiştir;

Tablo 3.4 $j_n^{(k)}(x)$ polinomu için bazı değerler

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
$j_0^{(k)}(x)$	2	4	8	16
$j_1^{(k)}(x)$	1	2	4	8
$j_2^{(k)}(x)$	$1 + 4x$	1	2	4
$j_3^{(k)}(x)$	$1 + 6x$	$1 + 4x$	1	2
$j_4^{(k)}(x)$	$1 + 8x + 8x^2$	$1 + 8x + 16x^2$	$1 + 4x$	1
$j_5^{(k)}(x)$	$1 + 10x + 20x^2$	$1 + 10x + 24x^2$	$1 + 8x + 16x^2$	$1 + 4x$

k –Jacobsthal-Lucas polinomu ile bilinen Jacobsthal-Lucas polinomu arasındaki ilişki

$$j_n^{(k)}(x) := (j_m(x))^{k-r} (j_{m+1}(x))^r, n = mk + r \quad (3.4)$$

eşitliği ile verilir. Burada $n, k, m, r \in \mathbb{N}$, $n = mk + r$ ve $k \neq 0$ dir.

Bu eşitlikte $k = 1$, $m = n$ ve $r = 0$ alınırsa $j_n^{(1)}(x) = j_n(x)$.

3.12.2. Teorem

$n, k \geq 2$ olmak üzere Cassini özdeşliği:

$$j_{kn+t}^{(k)}(x)j_{kn+t-2}^{(k)}(x) - \left(j_{kn+t-1}^{(k)}(x)\right)^2 = \begin{cases} j_n^{2k-2}(x)(-1)^{n+1}(2x)^{n-1}(1+8x), & t = 1 \\ 0, & t \neq 1 \end{cases}.$$

şeklindedir.

İspat.

$$\begin{aligned} & j_{kn+t}^{(k)}j_{kn+t-2}^{(k)} - \left(j_{kn+t-1}^{(k)}\right)^2 \\ &= (j_n^{k-1}(x)j_{n+t}(x))(j_n^{k-1}(x)j_{n+t-2}(x)) - (j_n^{k-1}(x)j_{n+t-1}(x))^2 \\ &= (j_n^{k-1}(x))^2(j_{n+t}(x)j_{n+t-2}(x) - (j_{n+t-1}(x))^2) \\ &= j_n^{2k-2}(x)((j_{n+t}(x)j_{n+t-2}(x) - (j_{n+t-1}(x))^2). \end{aligned}$$

$t = 1$ için;

$$\begin{aligned} &= j_n^{2k-2}(x)((j_{n+1}(x)j_{n-1}(x) - (j_n(x))^2) \\ &= j_n^{2k-2}(x)(-1)^n(2x)^{n-1}(1+8x). \end{aligned}$$

$t \neq 1$, $t = m$, ($m \in \mathbb{N}$) için;

$$\begin{aligned} &= j_n^{2k-2}(x)((j_{n+m}(x)j_{n+m-2}(x) - (j_{n+m-1}(x))^2) \\ &= j_n^{2k-2}(x)(j_{2n+2m-2}^{(2)}(x) - j_{2n+2m-2}^{(2)}(x)) \\ &= 0. \blacksquare \end{aligned}$$

3.13. Gauss k –Fibonacci Dizisi

3.13.1. Tanım

Gauss k –Fibonacci dizisinin Binet formülü;

$$GF_n^{(k)} := \left[\left(\frac{\sqrt{5}}{5} + \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{10} \right) i \right) \alpha^m + \left(-\frac{\sqrt{5}}{5} + \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{10} \right) i \right) \beta^m \right]^{k-r}$$
$$\left[\left(\frac{\sqrt{5}}{5} + \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{10} \right) i \right) \alpha^{m+1} + \left(-\frac{\sqrt{5}}{5} + \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{10} \right) i \right) \beta^{m+1} \right]^r$$

şeklindedir. Burada $n, k, m, r \in N, n = mk + r, k \neq 0$ dir. Gauss k –Fibonacci dizisinin $k = 2, 3$ için bazı terimleri

$$\{GF_n^{(2)}\} = \{-1, i, 1, i + 1, 2i, 3i + 1, 4i + 3, 7i + 4, \dots\}$$

$$\{GF_n^{(3)}\} = \{-i, -1, i, 1, i + 1, 2i, 2i - 2, 4i - 2, 7i - 1, \dots\} \text{ dir (Taş, S. 2019).}$$

4. ARAŞTIRMA VE BULGULAR

Bu bölümde, Gauss Fibonacci ve Gauss Lucas polinomlarını tanımlayıp, bunların bilinen polinom aileleri ile ilişkileri gösterilecektir. Rekürans ilişkileri ile verilen Gauss k –Fibonacci polinomları, Gauss k –Lucas sayı dizileri ve polinomları, Gauss k –Jacobsthal ve Gauss k –Jacobsthal-Lucas sayı dizilerini ve polinomları tanımlanacak ve tanımlanan bu sayı dizilerinin özellikleri gösterilecektir.

4.1. Gauss Fibonacci ve Gauss Lucas Polinomu

4.1.1 Tanım

Gauss Fibonanacci polinomu $GF_1(x) = 1, GF_2(x) = x + i$ olmak üzere

$$GF_{n+1}(x) = xGF_n(x) + GF_{n-1}(x),$$

şeklinde tanımlı polinom dizisidir.

Gauss Fibonacci polinomunun Binet formülü

$$GF_n(x) = \frac{\alpha^{n-1}(x)(\alpha(x) + i) - \beta^{n-1}(x)(\beta(x) + i)}{\alpha(x) - \beta(x)}$$

şeklindedir. Burada $\alpha(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$ ve $\beta(x) = \frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}$ dir (Özkan, E., Taştan, M., 2020).

Gauss Fibonacci polinomunun matrisi, $n \geq 1$ olmak üzere

$$gf_n(x) = \begin{bmatrix} GF_{n+1}(x) & GF_n(x) \\ GF_n(x) & GF_{n-1}(x) \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada $gf_0(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $gf_1(x) = \begin{bmatrix} x+i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ dir (Özkan, E., Taştan, M., 2020).

4.1.2. Teorem

$n \geq 1$ için,

$$GF_{n+1}^2(x) - GF_{n-1}^2(x) = (x^2 + 2ix)F_{2n-1}(x)$$

eşitliği vardır.

İspat.

$$GF_{n+1}^2(x) = F_{2n}(x)(x + 2i) - GF_n^2(x)$$

$$GF_{n-1}^2(x) = F_{2n-2}(x)(x + 2i) - GF_n^2(x)$$

$$\begin{aligned} GF_{n+1}^2(x) - GF_{n-1}^2(x) &= F_{2n}(x)(x + 2i) - F_{2n-2}(x)(x + 2i) \\ &= (x + 2i)(F_{2n}(x) - F_{2n-2}(x)) \\ &= (x + 2i)x F_{2n-1}(x) \\ &= (x^2 + 2ix)F_{2n-1}(x). \blacksquare \end{aligned}$$

4.1.3. Teorem

$n > 1$ için,

$$GF_{n+1}(x)GF_{n-1}(x) - GF_n^2(x) = (-1)^n(2 - ix)$$

bağıntısı vardır.

İspat. Tümevarım yöntemi ile;

$n = 2$ için;

$$\begin{aligned} GF_3(x)GF_1(x) - GF_2^2(x) &= (x^2 + 1 + ix)(1) - (x + i)^2 \\ &= x^2 + 1 + ix - x^2 - 2ix + 1 \\ &= 2 - ix. \end{aligned}$$

$n = k$ için doğru olsun;

$$GF_{k+1}(x)GF_{k-1}(x) - GF_k^2(x) = (-1)^k(2 - ix).$$

$n = k + 1$ için;

$$\begin{aligned} GF_{k+2}(x)GF_k(x) - GF_{k+1}^2(x) &= GF_{k+2}(x)GF_k(x) - GF_{k+1}(x)GF_{k+1}(x) \\ &= (GF_k(x) + xGF_{k+1}(x))GF_k(x) - (xGF_k(x) + GF_{k-1}(x))GF_{k+1}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (GF_k(x) + x(xGF_k + GF_{k-1}(x))GF_k(x) - xGF_k(x)GF_{k+1}(x) - GF_{k-1}(x)GF_{k+1}(x)) \\
&= (x^2 + 1)GF_k^2(x) + xGF_k(x)(GF_{k-1}(x) - GF_{k+1}(x)) - GF_{k-1}(x)GF_{k+1}(x) \\
&= (x^2 + 1)GF_k^2(x) - x^2GF_k^2(x) - GF_{k-1}(x)GF_{k+1}(x) \\
&= GF_k^2(x) - GF_{k-1}(x)GF_{k+1}(x) \\
&= (-1)(GF_{k+1}(x)GF_{k-1}(x) - GF_k^2(x)) \\
&= (-1)(-1)^k(2 - ix) \\
&= (-1)^{k+1}(2 - ix). \blacksquare
\end{aligned}$$

4.1.4 Tanım

Gauss Lucas polinomu , $GL_1(x) = x + 2i, GL_2(x) = x^2 + 2 + ix$ olmak üzere

$$GL_{n+1}(x) = xGL_n(x) + GL_{n-1}(x), n > 2$$

şeklinde tanımlı bir polinom dizisidir.

Gauss Lucas polinomunun Binet formülü;

$$GL_n(x) = \alpha^{n-1}(x)(\alpha(x) + i) + \beta^{n-1}(x)(\beta(x) + i)$$

şeklindedir. Burada, $\alpha(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$ ve $\beta(x) = \frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}$ dir.

Gauss Lucas polinomunun matrisi, $n \geq 1$ olmak üzere,

$$gl_n(x) = \begin{bmatrix} GL_{n+1}(x) & GL_n(x) \\ GL_n(x) & GL_{n-1}(x) \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada $gl_0(x) = \begin{bmatrix} x + 2i & 2 - ix \\ 2 - ix & 2i + ix^2 - x \end{bmatrix}$ ve $gl_1(x) =$

$\begin{bmatrix} x^2 + 2 + ix & x + 2i \\ x + 2i & 2 - ix \end{bmatrix}$ dir (Özkan, E., Taştan, M., 2020).

4.1.5. Teorem

$n > 2$ için;

$$GF_n(x) = F_n(x) + iF_{n-1}(x)$$

dır (Özkan, E., Taştan, M., 2020).

İspat. Tümevarım yöntemi ile

$n = 3$ için;

$$GF_3(x) = xGF_2(x) + GF_1(x) = x^2 + 1 + ix = F_3(x) + iF_2(x)$$

dir. $n = 3$ için ispat doğrudur.

$n = k$ için doğru olsun.

$$GF_k(x) = F_k(x) + iF_{k-1}(x).$$

$n = k + 1$ için doğruluğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} GF_{k+1}(x) &= F_{k+1}(x) + iF_k(x) \\ &= x(F_k(x) + iF_{k-1}(x)) + (F_{k-1}(x) + iF_{k-2}(x)) \\ &= xF_k(x) + xiF_{k-1}(x) + F_{k-1}(x) + iF_{k-2}(x) \\ &= xF_k(x) + F_{k-1}(x) + i(xF_{k-1}(x) + F_{k-2}(x)) \\ &= F_{k+1}(x) + iF_k(x) \\ &= GF_{k+1}(x). \blacksquare \end{aligned}$$

4.1.6 Teorem

$n > 2$ için;

$$GL_n(x) = L_n(x) + iL_{n-1}(x)$$

dir (Özkan, E., Taştan, M., 2020).

İspat. Tümevarım yöntemi ile

$n = 3$ için;

$$GL_3(x) = xGL_2(x) + GL_1(x) = x^3 + 3x + ix^2 + 2i = L_3(x) + iL_2(x)$$

dir. $n = 3$ için ispat doğrudur.

$n = k$ için doğru olsun.

$$GL_k(x) = L_k(x) + iL_{k-1}(x).$$

$n = k + 1$ için doğruluğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} GL_{k+1}(x) &= xGL_k(x) + GL_{k-1}(x) \\ &= x(L_k(x) + iL_{k-1}(x)) + (L_{k-1}(x) + iL_{k-2}(x)) \\ &= xL_k(x) + xiL_{k-1}(x) + L_{k-1}(x) + iL_{k-2}(x) \\ &= L_{k+1}(x) + iL_k(x) \\ &= GL_{k+1}(x). \blacksquare \end{aligned}$$

4.1.7 Teorem

$n \geq 0$ için;

$$GF_n^2(x) + GF_{n+1}^2(x) = F_{2n}(x)(x + 2i)$$

olur (Özkan, E., Taştan, M., 2020).

İspat.

$$\begin{aligned} GF_n^2(x) + GF_{n+1}^2(x) &= (x + 2i)F_{2n}(x) \\ &= (F_n(x) + iF_{n-1}(x))^2 + (F_{n+1}(x) + iF_n(x))^2 \\ &= F_n^2(x) + 2iF_n(x)F_{n-1}(x) + i^2F_{n-1}^2(x) + F_{n+1}^2(x) + 2iF_{n+1}(x)F_n(x) + i^2F_n^2(x) \\ &= F_{n+1}^2(x) - F_{n-1}^2(x) + 2iF_n(x)(F_{n-1}(x) + F_{n+1}(x)) \\ &= (F_{n+1}(x) - F_{n-1}(x)) \cdot (F_{n+1}(x) + F_{n-1}(x)) + 2iF_n(x)L_n(x) \\ &= xF_n(x)L_n(x) + 2iF_n(x)L_n(x) \\ &= F_n(x)L_n(x)(x + 2i) \\ &= F_{2n}(x)(x + 2i). \blacksquare \end{aligned}$$

4.1.8. Teorem

$n \geq 1$ için;

$$GL_n(x) = GF_{n+1}(x) + GF_{n-1}(x)$$

dir (Özkan, E., Taştan, M., 2020).

İspat:

$$\begin{aligned} GL_n(x) &= L_n(x) + iL_{n-1}(x) \\ &= (F_{n+1}(x) + F_{n-1}(x)) + i(F_n(x) + F_{n-2}(x)) \\ &= F_{n+1}(x) + F_{n-1}(x) + iF_n(x) + iF_{n-2}(x) \\ &= F_{n+1}(x) + iF_n(x) + F_{n-1}(x) + iF_{n-2}(x) \\ &= GF_{n+1}(x) + GF_{n-1}(x). \blacksquare \end{aligned}$$

4.1.9. Teorem

$n \geq 0$ olmak üzere;

$$GL_{n+1}(x) + GL_{n-1}(x) = (x^2 + 4)GF_n(x)$$

eşitliği vardır (Özkan, E., Taştan, M., 2020).

İspat.

$$\begin{aligned} GL_{n+1}(x) + GL_{n-1}(x) &= L_{n+1}(x) + iL_n(x) + L_{n-1}(x) + iL_{n-2}(x) \\ &= (F_{n+2}(x) + F_n(x)) + i(F_{n+1}(x) + F_{n-1}(x)) + (F_n(x) + F_{n-2}(x)) + i(F_{n-1}(x) \\ &\quad + F_{n-3}(x)) \\ &= F_{n+2}(x) + iF_{n+1}(x) + F_n(x) + iF_{n-1}(x) + F_n(x) + iF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x) + iF_{n-3}(x) \\ &= GF_{n+2}(x) + GF_n(x) + GF_n(x) + GF_{n-2}(x) \\ &= (xGF_{n+1}(x) + GF_n(x)) + 2GF_n(x) + GF_{n-2}(x) \\ &= x(xGF_n(x) + GF_{n-1}(x)) + 3GF_n(x) + GF_{n-2}(x) \\ &= x^2GF_n(x) + xGF_{n-1}(x) + GF_{n-2}(x) + 3GF_n(x) \end{aligned}$$

$$= x^2 GF_n(x) + GF_n(x) + 3GF_n(x)$$

$$= (x^2 + 4)GF_n(x). \blacksquare$$

4.1.10. Teorem

$n > 1$ için,

$$GL_{n+1}(x)GL_{n-1}(x) - GL_n^2(x) = (-1)^{n+1}(x^2 + 4)(2 - ix)$$

bağıntısı vardır.

İspat.

$n = 2$ için;

$$GL_3(x)GL_1(x) - GL_2^2(x) = (-1)^{2+1}(x^2 + 4)(2 - ix)$$

$$(x^3 + 3x + ix^2 + 2i)(x + 2i) - (x^2 + 2 + ix)^2 = (-1)(x^2 + 4)(2 - ix).$$

$n = k$ için doğru olsun;

$$GL_{k+1}(x)GL_{k-1}(x) - GL_k^2(x) = (-1)^{k+1}(x^2 + 4)(2 - ix).$$

$n = k + 1$,

$$GL_{k+2}(x)GL_k(x) - GL_{k+1}^2(x) = (-1)^{k+2}(x^2 + 4)(2 - ix)$$

$$GL_{k+2}(x)GL_k(x) - GL_{k+1}^2(x) = GL_{k+2}(x)GL_k(x) - GL_{k+1}(x)GL_{k+1}(x)$$

$$= (GL_k(x) + xGL_{k+1}(x))GL_k(x) - (xGL_k(x) + GL_{k-1}(x))GL_{k+1}(x)$$

$$= (GL_k(x) + x(xGL_k + GL_{k-1}(x))GL_k(x) - xGL_k(x)GL_{k+1}(x)$$

$$- GL_{k-1}(x)GL_{k+1}(x)$$

$$= (x^2 + 1)GL_k^2(x) + xGL_k(x)(GL_{k-1}(x) - GL_{k+1}(x)) - GL_{k-1}(x)GL_{k+1}(x)$$

$$= (x^2 + 1)GL_k^2(x) - x^2GL_k^2(x) - GL_{k-1}(x)GL_{k+1}(x)$$

$$= GL_k^2(x) - GL_{k-1}(x)GL_{k+1}(x)$$

$$= (-1)(GL_{k+1}(x)GL_{k-1}(x) - GL_k^2(x)) = (-1)(-1)^{k+1}(x^2 + 4)(2 - ix)$$

$$= (-1)^{k+2}(x^2 + 4)(2 - ix) \blacksquare.$$

4.2. Gauss k –Lucas Sayı Dizisi

4.2.1. Tanım

Gauss k –Lucas dizisinin Binet formülü;

$$GL_n^{(k)} := ((\alpha^m + \beta^m) + i(\alpha^{m-1} + \beta^{m-1}))^{k-r} ((\alpha^{m+1} + \beta^{m+1}) + i(\alpha^m + \beta^m))^r$$

şeklindedir. Burada $n, k, m, r \in N, n = mk + r, k \neq 0$ ve $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. dir.

Gauss k –Lucas dizisinin matris temsili, $n > 0$ olmak üzere;

$$GL_n^{k-1} gl_n = \begin{bmatrix} GL_{kn+1}^{(k)} & GL_{kn}^{(k)} \\ GL_{kn}^{(k)} & GL_{kn-1}^{(k)} \end{bmatrix}$$

olur. Burada, $gl_n = \begin{bmatrix} GL_{n+1} & GL_n \\ GL_n & GL_{n-1} \end{bmatrix}$.(Özkan, E., Taştan, M. 2021).

Gauss k –Lucas sayı dizisinin bazı terimlerini Tablo 4.1. de verilmiştir;

Tablo 4.1 $GL_n^{(k)}$ dizisi için bazı değerler

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$
$GL_0^{(k)}$	$2 - i$	$3 - 4i$	$2 - 11i$	$-7 - 24i$	$-38 - 41i$	$-117 - 44i$
$GL_1^{(k)}$	$1 + 2i$	$4 + 3i$	$11 + 2i$	$24 - 7i$	$41 - 38i$	$117 + 44i$
$GL_2^{(k)}$	$3 + i$	$-3 + 4i$	$-2 + 11i$	$7 + 24i$	$38 + 41i$	$-44 + 117i$
$GL_3^{(k)}$	$4 + 3i$	$1 + 7i$	$-11 - 2i$	$-24 + 7i$	$-41 + 38i$	$-117 - 44i$

Gauss k –Lucas sayı dizisinin bilinen Gauss Lucas dizisi ile ilişkisi

$$GL_n^{(k)} := (GL_m)^{k-r} (GL_{m+1})^r \quad (4.1)$$

eşitliği ile elde edilir. Burada $n, k, m, r \in N, n = mk + r$ ve $k \neq 0$ dir (Özkan, E., Taştan, M., 2021).

Bu eşitlikte $k = 1$, $m = n$ ve $r = 0$ alınırsa $GL_n^{(1)} = GL_n$ olur.

4.2.2. Teorem

Gauss k –Lucas dizisinin Cassini özdeşliği;

$$GL_{kn+t}^{(k)} GL_{kn+t-2}^{(k)} - \left(GL_{kn+t-1}^{(k)} \right)^2 = \begin{cases} GL_n^{2k-2} (-1)^{n+1} 5(2-i), & t = 1 \\ 0, & t \neq 1 \end{cases}$$

dir (Özkan, E., Taştan, M. 2021).

İspat.

$$\begin{aligned} & GL_{kn+t}^{(k)} GL_{kn+t-2}^{(k)} - \left(GL_{kn+t-1}^{(k)} \right)^2 \\ &= (GL_n^{k-1} GL_{n+t})(GL_n^{k-1} GL_{n+t-2}) - (GL_n^{k-1} GL_{n+t-1})^2 \\ &= (GL_n^{k-1})^2 (GL_{n+t} GL_{n+t-2} - (GL_{n+t-1})^2) \\ &= GL_n^{2k-2} ((GL_{n+t} GL_{n+t-2} - (GL_{n+t-1})^2). \end{aligned}$$

$t = 1$;

$$\begin{aligned} &= GL_n^{2k-2} ((GL_{n+1} GL_{n-1} - (GL_n)^2) \\ &= GL_n^{2k-2} (-1)^{n+1} 5(2-i). \end{aligned}$$

$t \neq 1, t = m$;

$$\begin{aligned} &= GL_n^{2k-2} ((GL_{n+m} GL_{n+m-2} - (GL_{n+m-1})^2) \\ &= GL_n^{2k-2} (GL_{2n+2m-2}^{(2)} - GL_{2n+2m-2}^{(2)}) \\ &= 0. \blacksquare \end{aligned}$$

4.3. Gauss k –Lucas Polinomu

4.3.1. Tanım

Gauss k –Lucas sayı polinomu Binet formülü;

$$GL_n^{(k)}(x) := (\alpha^m(x) + \beta^m(x)) + ix(\alpha^{m-1}(x) + \beta^{m-1}(x))^{k-r}((\alpha^{m+1}(x) + \beta^{m+1}(x)) + ix(\alpha^m(x) + \beta^m(x))^r$$

şeklindedir. Burada $n, k, m, r \in N, n = mk + r, k \neq 0$ ve $\alpha(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$ ve $\beta(x) = \frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}$ dir.

Gauss k –Lucas polinomunun matris temsili, $n > 0$ olmak üzere

$$GL_n^{k-1}(x)gl_n(x) = \begin{bmatrix} GL_{kn+1}^{(k)}(x) & GL_{kn}^{(k)}(x) \\ GL_{kn}^{(k)}(x) & GL_{kn-1}^{(k)}(x) \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada, $gl_n(x) = \begin{bmatrix} GL_{n+1}(x) & GL_n(x) \\ GL_n(x) & GL_{n-1}(x) \end{bmatrix}$ (Özkan, E., Taştan, M. 2021).

Gauss k –Lucas polinomunun bazı terimleri Tablo 4.2 de verilmiştir.

Tablo 4.2 $GL_n^{(k)}(x)$ polinomu için bazı değerler

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
$GL_0^{(k)}(x)$	2	4	8	16
$GL_1^{(k)}(x)$	$x + 2i$	$2x + 4i$	$4x + 8i$	$8x + 16i$
$GL_2^{(k)}(x)$	$x^2 + 2 + ix$	$x^2 - 4 + 4ix$	$2x^2 - 8 + 8ix$	$4x^2 - 16 + 16ix$
$GL_3^{(k)}(x)$	$x^3 + 3x + ix^2 + 2i$	$x^3 + 3ix^2 + 4i$	$x^3 - 12x + 6ix^2 - 8i$	$2x^3 - 24x + 12ix^2 - 16i$

Gauss k –Lucas polinomunun bilinen Gauss Lucas polinomunun ile ilişkisi

$$GL_n^{(k)}(x) := (GL_m(x))^{k-r}(GL_{m+1}(x))^r \quad (4.2)$$

eşitliği ile verilir. Burada $n, k, m, r \in N, n = mk + r$ ve $k \neq 0$ dır (Özkan, E., Taştan, M., 2021).

Bu eşitlikte $k = 1, m = n$ ve $r = 0$ alınırsa $GL_n^{(1)} = GL_n$ olur.

4.3.2. Teorem

Gauss k –Lucas polinomunun Cassini özdeşliği;

$$GL_{kn+t}^{(k)}(x)GL_{kn+t-2}^{(k)}(x) - \left(GL_{kn+t-1}^{(k)}(x)\right)^2 = \begin{cases} GL_n^{2k-2}(x)(-1)^{n+1}(x^2 + 4)(2 - ix), & t = 1 \\ 0, & t \neq 1 \end{cases}$$

dir (Özkan, E., Taştan, M. 2021).

İspat.

$$\begin{aligned} & GL_{kn+t}^{(k)}(x)GL_{kn+t-2}^{(k)}(x) - \left(GL_{kn+t-1}^{(k)}(x)\right)^2 = \\ & = \left(GL_n^{k-1}(x)GL_{n+t}(x)\right)\left(GL_n^{k-1}(x)GL_{n+t-2}(x)\right) - \left(GL_n^{k-1}(x)GL_{n+t-1}(x)\right)^2 \\ & = \left(GL_n^{k-1}(x)\right)^2 \left(GL_{n+t}(x)GL_{n+t-2}(x) - \left(GL_{n+t-1}(x)\right)^2\right) \\ & = GL_n^{2k-2}(x) \left((GL_{n+t}(x)GL_{n+t-2}(x) - \left(GL_{n+t-1}(x)\right)^2)\right) \\ & t = 1; \\ & = GL_n^{2k-2}(x) \left((GL_{n+1}(x)GL_{n-1}(x) - \left(GL_n(x)\right)^2)\right) \\ & = GL_n^{2k-2}(x)(-1)^{n+1}(x^2 + 4)(2 - ix). \end{aligned}$$

$t \neq 1, t = m;$

$$\begin{aligned} & = GL_n^{2k-2}(x) \left((GL_{n+m}(x)GL_{n+m-2}(x) - \left(GL_{n+m-1}(x)\right)^2)\right) \\ & = GL_n^{2k-2}(x) \left(GL_{2n+2m-2}^{(2)}(x) - GL_{2n+2m-2}^{(2)}(x)\right) \\ & = 0. \blacksquare \end{aligned}$$

4.4. Gauss k –Fibonacci Polinomu

4.4.1. Tanım

Gauss k –Fibonacci polinomunun Binet formülü;

$$GF_n^{(k)}(x) := \left[\left(\frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} + ix \frac{\alpha^{n-1}(x) - \beta^{n-1}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \right) \alpha^m(x) \right. \\ \left. + \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} + ix \frac{\alpha^{n-1}(x) - \beta^{n-1}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \right) \beta^m(x) \Big]^{k-r} \\ \left[\left(\frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} + ix \frac{\alpha^{n-1}(x) - \beta^{n-1}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \right) \alpha^{m+1}(x) \right. \\ \left. + \left(\frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} + ix \frac{\alpha^{n-1}(x) - \beta^{n-1}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \right) \beta^{m+1}(x) \right]^r$$

şeklindedir. Burada $n, k, m, r \in N, n = mk + r, k \neq 0, \alpha(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$ ve $\beta(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2}$ dir.

Gauss k –Fibonacci polinomunun matris temsili, $n \geq 0$ olmak üzere;

$$GF_n^{k-1}(x)gf_n(x) = \begin{bmatrix} GF_{kn+k+1}^{(k)}(x) & GF_{kn+k}^{(k)}(x) \\ GF_{kn+k}^{(k)}(x) & GF_{kn+k-1}^{(k)}(x) \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada $gf_n(x) = \begin{bmatrix} GF_{n+1}(x) & GF_n(x) \\ GF_n(x) & GF_{n-1}(x) \end{bmatrix}$ dir (Özkan, E., Taştan, M. 2021).

Gauss k –Fibonacci polinomunun bazı terimleri Tablo 4.3 de verilmiştir;

Tablo 4.3 $GF_n^{(k)}(x)$ polinomu için bazı değerler

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$
$GF_0^{(k)}(x)$	0	0	0	0	0	0
$GF_1^{(k)}(x)$	1	0	0	0	0	0
$GF_2^{(k)}(x)$	$x + i$	1	0	0	0	0
$GF_3^{(k)}(x)$	$x^2 + 1 + ix$	$x + i$	1	0	0	0
$GF_4^{(k)}(x)$	$x^3 + 2x + ix^2 + i$	$x^2 - 1 + 2ix$	$x + i$	1	0	0

Gauss k –Fibonacci polinomunun bilinen Gauss Fibonacci polinomu ile ilişkisi

$$GF_n^{(k)}(x) := (GF_m(x))^{k-r} (GF_{m+1}(x))^r \quad (4.3)$$

eşitliği ile verilir. Burada $n, k, m, r \in \mathbb{N}$, $n = mk + r$ ve $k \neq 0$ dir (Özkan, E., Taştan, M., 2021).

Bu eşitlikte $k = 1$, $m = n$ ve $r = 0$ alınırsa $GF_n^{(1)} = GF_n$ olur.

4.4.2. Teorem

$GF_n^{(2)}(x)$ için;

- i. $GF_{2(n-1)}^{(2)}(x) - GF_n(x)GF_{n-2}(x) = (-1)^{n+1}(2 - ix)$
- ii. $GF_{2n}^{(2)}(x) + GF_{2n+2}^{(2)}(x) = F_{2n}(x)(x + 2i)$

dir (Özkan, E., Taştan, M. 2021).

İspat.

i.

$$GF_{2(n-1)}^{(2)}(x) = GF_{n-1}^2(x).$$

$$GF_{n-1}^2 - GF_n(x)GF_{n-2}(x) = -(GF_n(x)GF_{n-2}(x) - GF_{n-1}^2),$$

$$= -(-1)^n(2 - ix),$$

$$= (-1)^{n+1}(2 - ix). \blacksquare$$

ii.

$$GF_{2n}^{(2)}(x) + GF_{2n+2}^{(2)} = GF_n^2(x) + GF_{n+1}^2(x).$$

$$GF_n^2(x) + GF_{n+1}^2(x) = (F_n(x) + iF_{n-1}(x))^2 + (F_{n+1}(x) + iF_n(x))^2$$

$$= F_n^2(x) + 2iF_n(x)F_{n-1}(x) + i^2F_{n-1}^2(x) + F_{n+1}^2(x) + 2iF_{n+1}(x)F_n(x) + i^2F_n^2(x)$$

$$\begin{aligned}
&= F_{n+1}^2(x) - F_{n-1}^2(x) + 2iF_n(x)(F_{n-1}(x) + F_{n+1}(x)) \\
&= (F_{n+1}(x) - F_{n-1}(x)) \cdot (F_{n+1}(x) + F_{n-1}(x)) + 2iF_n(x)L_n(x) \\
&= xF_n(x)L_n(x) + 2iF_n(x)L_n(x) \\
&= F_n(x)L_n(x)(x + 2i) \\
&= F_{2n}(x)(x + 2i). \blacksquare
\end{aligned}$$

4.4.3. Teorem

Gauss k –Fibonacci polinomunun Cassini özdeşliği;

$$GF_{kn+t}^{(k)}(x)GF_{kn+t-2}^{(k)}(x) - \left(GF_{kn+t-1}^{(k)}(x)\right)^2 = \begin{cases} GF_n^{2k-2}(x)(-1)^n(2 - ix), & t = 1 \\ 0, & t \neq 1 \end{cases}$$

dir (Özkan, E., Taştan, M., 2021).

İspat.

$$\begin{aligned}
&GF_{kn+t}^{(k)}(x)GF_{kn+t-2}^{(k)}(x) - \left(GF_{kn+t-1}^{(k)}(x)\right)^2 \\
&= (GF_n^{k-1}(x)GF_{n+t}(x))(GF_n^{k-1}(x)GF_{n+t-2}(x)) - (GF_n^{k-1}(x)GF_{n+t-1}(x))^2 \\
&= (GF_n^{k-1}(x))^2(GF_{n+t}(x)GF_{n+t-2}(x) - (GF_{n+t-1}(x))^2) \\
&= GF_n^{2k-2}(x)((GF_{n+t}(x)GF_{n+t-2}(x) - (GF_{n+t-1}(x))^2).
\end{aligned}$$

$t = 1$ için;

$$\begin{aligned}
&= GF_n^{2k-2}(x)((GF_{n+1}(x)GF_{n-1}(x) - (GF_n(x))^2) \\
&= GF_n^{2k-2}(x)(-1)^n(2 - ix).
\end{aligned}$$

$t \neq 1, t = m, (m \in \mathbb{N} - \{1\})$ için;

$$\begin{aligned}
&= GF_n^{2k-2}(x)((GF_{n+m}(x)GF_{n+m-2}(x) - (GF_{n+m-1}(x))^2) \\
&= GF_n^{2k-2}(x)(GF_{2n+2m-2}^{(2)}(x) - GF_{2n+2m-2}^{(2)}(x))
\end{aligned}$$

= 0. ■

4.5. Gauss k –Jacobsthal Sayı Dizisi

4.5.1. Tanım

Gauss k –Jacobsthal sayı dizisinin Binet formülü;

$$GJ_n^{(k)} := \left[\left(\frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta} + i \frac{\alpha^{m-1} - \beta^{m-1}}{\alpha - \beta} \right) \right]^{k-r} \left[\left(\frac{\alpha^{m+1} - \beta^{m+1}}{\alpha - \beta} + i \frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta} \right) \right]^r$$

şeklinde tanımlanır. Burada $n, k, m, r \in \mathbb{N}$, $n = mk + r$, $k \neq 0$, $0 \leq r < k$, $\alpha = 2$ ve

$\beta = -1$ dir. $P = \begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & \frac{i}{2} \end{bmatrix}$ olmak üzere, Gauss k –Jacobsthal sayı dizisinin matris yardımıyla ifadesi

$$GJ_n^{k-1} Q^n P = \begin{bmatrix} GJ_{kn+k+1}^{(k)} & GJ_{kn+k}^{(k)} \\ GJ_{kn+k}^{(k)} & GJ_{kn+k-1}^{(k)} \end{bmatrix}$$

şeklinde dir. (Özkan, E., Taştan, M., 2021).

Gauss k –Jacobsthal sayı dizisinin bazı terimleri Tablo 4.4’ de verilmiştir;

Tablo 4.4 $GJ_n^{(k)}$ dizisi için bazı değerler

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$
$GJ_0^{(k)}$	$\frac{i}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{i}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{i}{32}$	$-\frac{1}{64}$
$GJ_1^{(k)}$	1	$\frac{i}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{i}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{i}{32}$
$GJ_2^{(k)}$	$1+i$	1	$\frac{i}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{i}{8}$	$\frac{1}{16}$
$GJ_3^{(k)}$	$3+i$	$1+i$	1	$\frac{i}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{i}{8}$

Gauss k –Jacobsthal sayı dizisinin bilinen Gauss Jacobsthal dizisi ile ilişkisi

$$GJ_n^{(k)} := (GJ_m)^{k-r} (GJ_{m+1})^r \quad (4.4)$$

eşitliği ile verilir. Burada $n, k, m, r \in N$, $n = mk + r$ ve $k \neq 0$ dır (Özkan, E., Taştan, M., 2021).

Bu eşitlikte $k = 1$, $m = n$ ve $r = 0$ alınırsa $GJ_n^{(1)} = GJ_n$ olur.

Gauss k –Jacobsthal dizisi ile Gauss Jacobsthal dizisi arasındaki ilişki aşağıdaki teorem yardımıyla gösterilebilir:

4.5.2. Teorem

$k, m \in N$ ve $k \neq 0$

$$GJ_{(m+1)k}^{(k)} - GJ_{mk}^{(k)} = (GJ_{m+1})^k - (GJ_m)^k, n = mk + r$$

dir (Özkan, E., Taştan, M., 2021).

İspat.

(4.1) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} GJ_{(m+1)k}^{(k)} - GJ_{mk}^{(k)} &= [(GJ_m)^{k-k} (GJ_{m+1})^k] - [(GJ_m)^{k-0} (GJ_{m+1})^0] \\ &= (GJ_{m+1})^k - (GJ_m)^k. \blacksquare \end{aligned}$$

$k = 2, 3, 4$ için Gauss k –Jacobsthal sayı dizisinin bilinen Gauss Jacobsthal dizisi ile ilişkisi;

- i. $GJ_{2n}^{(2)} = GJ_n^2$,
- ii. $GJ_{2n+1}^{(2)} = GJ_{2n}^{(2)} + 2GJ_{2n-1}^{(2)}$,
- iii. $GJ_{3n}^{(3)} = GJ_n^3$,
- iv. $GJ_{3n+1}^{(3)} = GJ_n^2 GJ_{n+1}$,
- v. $GJ_{3n+2}^{(3)} = GJ_n GJ_{n+1}^2$.

- vi. $GJ_{3n+1}^{(3)} = GJ_{3n}^{(3)} + 2GJ_{3n-1}^{(3)}$
- vii. $GJ_{4n}^{(4)} = GJ_n^4$,
- viii. $GJ_{4n+1}^{(4)} = GJ_n^3 GJ_{n+1}$,
- ix. $GJ_{4n+2}^{(4)} = GJ_n^2 GJ_{n+1}^2$,
- x. $GJ_{4n+3}^{(4)} = GJ_n GJ_{n+1}^3$,
- xi. $GJ_{4n+1}^{(4)} = GJ_{4n}^{(4)} + 2GJ_{4n-1}^{(4)}$.

Not: $GJ_{-n}^{(k)}(x) = 0$; $k = 1, 2, \dots$ (Özkan, E., Taştan, M., 2021).

4.5.3. Teorem

$k, n \in \mathbb{N}$ için Gauss k –Jacobsthal dizisinin genelleştirilmiş denklemi

$$GJ_{kn+1}^{(k)} = GJ_{kn}^{(k)} + 2GJ_{kn-1}^{(k)}$$

dir (Özkan, E., Taştan, M., 2021).

İspat.

$$\begin{aligned}
 GJ_{kn}^{(k)} + 2GJ_{kn-1}^{(k)} &= GJ_n^k + 2(GJ_{n-1} GJ_n^{k-1}) \\
 &= GJ_n^{k-1} (GJ_n + 2GJ_{n-1}) \\
 &= GJ_n^{k-1} GJ_{n+1} \\
 &= GJ_{kn+1}^{(k)}. \blacksquare
 \end{aligned}$$

4.5.4. Teorem

$GJ_n^{(k)}$; Gauss k –Jacobsthal sayı dizisi için Cassini özdeşliği;

$$GJ_{kn+t}^{(k)} GJ_{kn+t-2}^{(k)} - \left(GJ_{kn+t-1}^{(k)} \right)^2 = \begin{cases} GJ_n^{2k-2} (-1)^n (3-i) 2^{n-2}, & t = 1 \\ 0, & t \neq 1 \end{cases}$$

dir (Özkan, E., Taştan, M., 2021).

İspat. (4.1) eşitliği kullanılarak;

$$\begin{aligned}
GJ_{kn+t}^{(k)} GJ_{kn+t-2}^{(k)} - \left(GJ_{kn+t-1}^{(k)} \right)^2 &= (GJ_n^{k-1} GJ_{n+t})(GJ_n^{k-1} GJ_{n+t-2}) - (GJ_n^{k-1} GJ_{n+t-1})^2 \\
&= (GJ_n^{k-1})^2 (GJ_{n+t} GJ_{n+t-2} - (GJ_{n+t-1})^2) \\
&= GJ_n^{2k-2} ((GJ_{n+t} GJ_{n+t-2} - (GJ_{n+t-1})^2).
\end{aligned}$$

$t = 1$;

$$\begin{aligned}
&= GJ_n^{2k-2} ((GJ_{n+1} GJ_{n-1} - (GJ_n)^2) \\
&= GJ_n^{2k-2} (-1)^n (3 - i) 2^{n-2}.
\end{aligned}$$

$t \neq 1, t = m, (m \in \mathbb{N})$;

$$\begin{aligned}
&= GJ_n^{2k-2} ((GJ_{n+m} GJ_{n+m-2} - (GJ_{n+m-1})^2) \\
&= GJ_n^{2k-2} (GJ_{2n+2m-2}^{(2)} - GJ_{2n+2m-2}^{(2)}) \\
&= 0. \blacksquare
\end{aligned}$$

4.6. Gauss k – Jacobsthal Polinomu

4.6.1. Tanım

Gauss k – Jacobsthal polinomunun Binet formülü;

$$GJ_n^{(k)} := \left[\frac{\alpha^m(x) - \beta^m(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} + ix \frac{\alpha^{m-1}(x) - \beta^{m-1}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \right]^{k-r} \left[\frac{\alpha^{m+1}(x) - \beta^{m+1}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} + ix \frac{\alpha^m(x) - \beta^m(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \right]^r$$

şeklinde tanımlanır. Burada $n, k, m, r \in \mathbb{N}, n = mk + r, k \neq 0, \alpha(x) = \frac{1+\sqrt{1+8x}}{2}$ ve

$\beta(x) = \frac{1-\sqrt{1+8x}}{2}$ dir. Gauss k – Jacobsthal polinomunun matris yardımıyla ifadesi

$$GJ_{n+1}^{k-1}(x) E^n S = \begin{bmatrix} GJ_{kn+k+1}^{(k)}(x) & GJ_{kn+k}^{(k)}(x) \\ GJ_{kn+k}^{(k)}(x) & GJ_{kn+k-1}^{(k)}(x) \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada E ve S matrisi $E = \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ve $S = \begin{bmatrix} 1+ix & 1 \\ 1 & \frac{i}{2} \end{bmatrix}$ dir (Özkan, E., Taştan, M., 2021).

Gauss k –Jacobsthal polinomunun bilinen Gauss Jacobsthal polinomu ile ilişkisi

$$GJ_n^{(k)}(x) := (GJ_m(x))^{k-r} (GJ_{m+1}(x))^r \quad (4.5)$$

eşitliği ile elde edilir. Burada $n, k, m, r \in N$, $n = mk + r$ ve $k \neq 0$ dır.

Bu eşitlikte $k = 1$, $m = n$ ve $r = 0$ alınırsa $GJ_n^{(1)} = GJ_n$ olur (Özkan, E., Taştan, M., 2021).

Gauss k –Jacobsthal polinomunun bazı terimleri Tablo 4.5 de verilmiştir;

Tablo 4.5 $GJ_n^{(k)}(x)$ polinomu için bazı değerler

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
$GJ_0^{(k)}(x)$	$\frac{i}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{i}{8}$	$\frac{1}{16}$
$GJ_1^{(k)}(x)$	1	$\frac{i}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{i}{8}$
$GJ_2^{(k)}(x)$	$1 + ix$	1	$\frac{i}{2}$	$-\frac{1}{4}$
$GJ_3^{(k)}(x)$	$1 + 2x + ix$	$1 + ix$	1	$\frac{i}{2}$

Gauss k –Jacobsthal polinomu ile Gauss Jacobsthal polinomu arasındaki ilişki aşağıdaki teorem yardımıyla gösterilebilir:

4.6.2. Teorem

$k, m \in N$ ve $k \neq 0$ için,

$$[(GJ_{m+1}(x))^k - (GJ_m(x))^k] = [GJ_{(m+1)k}^{(k)}(x) - GJ_{mk}^{(k)}(x)], n = mk + r$$

dir (Özkan, E., Taştan, M., 2021).

İspat. (4.5) eşitliği yardımıyla;

$$\begin{aligned} GJ_{(m+1)k}^{(k)} - GJ_{mk}^{(k)} &= [(GJ_m)^{k-k}(GJ_{m+1})^k] - [(GJ_m)^{k-0}(GJ_{m+1})^0] \\ &= (GJ_{m+1})^k - (GJ_m)^k. \blacksquare \end{aligned}$$

$k = 2, 3, 4$ için Gauss k –Jacobsthal polinomunun bilinen Gauss Jacobsthal polinomu aşağıdaki bağıntılar vardır;

- i. $GJ_{2n}^{(2)}(x) = GJ_n^2(x),$
- ii. $GJ_{2n+1}^{(2)}(x) = GJ_n(x)GJ_{n+1}(x),$
- iii. $GJ_{2n+1}^{(2)}(x) = GJ_{2n}^{(2)}(x) + 2xGJ_{2n-1}^{(2)}(x),$
- iv. $GJ_{3n}^{(3)}(x) = GJ_n^3(x),$
- v. $GJ_{3n+1}^{(3)}(x) = GJ_n^2(x)GJ_{n+1}(x),$
- vi. $GJ_{3n+2}^{(3)}(x) = GJ_n(x)GJ_{n+1}^2(x),$
- vii. $GJ_{3n+1}^{(3)}(x) = GJ_{3n}^{(3)}(x) + 2xGJ_{3n-1}^{(3)}(x),$
- viii. $GJ_{4n}^{(4)}(x) = GJ_n^4(x),$
- ix. $GJ_{4n+1}^{(4)}(x) = GJ_n^3(x)GJ_{n+1}(x),$
- x. $GJ_{4n+2}^{(4)}(x) = GJ_n^2(x)GJ_{n+1}^2(x),$
- xi. $GJ_{4n+3}^{(4)}(x) = GJ_n(x)GJ_{n+1}^3(x),$
- xii. $GJ_{4n+1}^{(4)}(x) = GJ_{4n}^{(4)}(x) + 2xGJ_{4n-1}^{(4)}(x).$

Not: $GJ_{-n}^{(k)}(x) = 0; k = 1, 2, \dots$ (Özkan, E., Taştan, M., 2021).

4.6.4. Teorem

$k, n \in \mathbb{N}$ için Gauss k –Jacobsthal polinomunun genelleştirilmiş denklemi

$$GJ_{kn+1}^{(k)}(x) = GJ_{kn}^{(k)}(x) + 2xGJ_{kn-1}^{(k)}(x)$$

şeklindedir (Özkan, E., Taştan, M., 2021).

İspat. (4.5) eşitliği kullanılarak;

$$\begin{aligned}
GJ_{kn}^{(k)}(x) + 2GJ_{kn-1}^{(k)}(x) &= GJ_n^k(x) + 2x(GJ_{n-1}(x)GJ_n^{k-1}(x)) \\
&= GJ_n^{k-1}(x)(GJ_n(x) + 2xGJ_{n-1}(x)) \\
&= GJ_n^{k-1}(x)GJ_{n+1}(x) \\
&= GJ_{kn+1}^{(k)}(x). \blacksquare
\end{aligned}$$

4.6.5. Teorem

$GJ_n^{(k)}(x)$; Gauss k –Jacobsthal polinomu için Cassini özdeşliği;

$$GJ_{kn+t}^{(k)}(x)GJ_{kn+t-2}^{(k)}(x) - \left(GJ_{kn+t-1}^{(k)}(x)\right)^2 = \begin{cases} GJ_n^{2k-2}(x)(-1)^n 2^{n-2} x^{n-1} (2+x-i), & t=1 \\ 0, & t \neq 1 \end{cases}$$

şeklindedir (Özkan, E., Taştan, M., 2021).

$$\begin{aligned}
\textbf{İspat. } GJ_{kn+t}^{(k)}(x)GJ_{kn+t-2}^{(k)}(x) - \left(GJ_{kn+t-1}^{(k)}(x)\right)^2 \\
&= \left(GJ_n^{k-1}(x)GJ_{n+t}(x)\right)\left(GJ_n^{k-1}(x)GJ_{n+t-2}(x)\right) - \left(GJ_n^{k-1}(x)GJ_{n+t-1}(x)\right)^2 \\
&= (GJ_n^{k-1}(x))^2 (GJ_{n+t}(x)GJ_{n+t-2}(x) - (GJ_{n+t-1}(x))^2) \\
&= GJ_n^{2k-2}(x)((GJ_{n+t}(x)GJ_{n+t-2}(x) - (GJ_{n+t-1}(x))^2) \\
&t = 1; \\
&= GJ_n^{2k-2}(x)((GJ_{n+1}(x)GJ_{n-1}(x) - (GJ_n(x))^2) \\
&= GJ_n^{2k-2}(x)(-1)^n 2^{n-2} x^{n-1} (2+x-i).
\end{aligned}$$

$t \neq 1, t = m, (m \in \mathbb{N})$;

$$= GJ_n^{2k-2}(x)((GJ_{n+m}(x)GJ_{n+m-2}(x) - (GJ_{n+m-1}(x))^2)$$

$$= GJ_n^{2k-2}(x)(GJ_{2n+2m-2}^{(2)}(x) - GJ_{2n+2m-2}^{(2)}(x))$$

$$= 0. \blacksquare$$

4.7. Gauss k –Jacobsthal-Lucas Sayı Dizisi

4.7.1. Tanım

Gauss k –Jacobsthal-Lucas dizisinin Binet formülü;

$$Gj_n^{(k)} := [(\alpha^m + \beta^m) + i(\alpha^{m-1} + \beta^{m-1})]^{k-r} [(\alpha^{m+1} + \beta^{m+1}) + i(\alpha^m + \beta^m)]^r,$$

şeklinde tanımlanır. Burada $n, k, m, r \in N, n = mk + r, k \neq 0, \alpha = 2$ ve $\beta = -1$ dir.

Gauss k –Jacobsthal-Lucas dizisinin matris yardımıyla ifadesi

$$Gj_n^{k-1} Q^n R = \begin{bmatrix} Gj_{kn+k+1}^{(k)} & Gj_{kn+k}^{(k)} \\ Gj_{kn+k}^{(k)} & Gj_{kn+k-1}^{(k)} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada Q ve R matrisi $Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ve $R = \begin{bmatrix} 5+i & 1+2i \\ 1+2i & 2-\frac{i}{2} \end{bmatrix}$ dir (Özkan, E.,

Taştan, M., 2021).

Gauss k –Jacobsthal-Lucas dizisinin bazı terimleri Tablo 4.6 da verilmiştir;

Tablo 4.6 $Gj_n^{(k)}$ dizisi için bazı değerler

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$
$Gj_0^{(k)}$	$2 - \frac{i}{2}$	$\frac{15}{4} - 2i$	$\frac{13}{2} - \frac{47}{8}i$	$\frac{161}{16} - 15i$	$\frac{101}{8} - \frac{1121}{32}i$	$\frac{495}{64} - \frac{611}{8}i$
$Gj_1^{(k)}$	$1 + 2i$	$3 + \frac{7}{2}i$	$\frac{31}{4} + \frac{11}{2}i$	$\frac{73}{4} + \frac{57}{8}i$	$\frac{641}{16} + \frac{41}{8}i$	$\frac{1323}{16} - \frac{313}{32}i$
$Gj_2^{(k)}$	$5 + i$	$-3 + 4i$	$-4 + \frac{19}{2}i$	$-\frac{13}{4} + 21i$	$4 + \frac{349}{8}i$	$\frac{477}{16} - \frac{341}{4}i$

Gauss k – Jacobsthal-Lucas dizisi ile bilinen Gauss Jacobsthal-Lucas dizisi arasındaki ilişki

$$Gj_n^{(k)} := (Gj_m)^{k-r} (Gj_{m+1})^r, \quad (4.6)$$

eşitliği ile verilir. Burada $n, k, m, r \in N$, $n = mk + r$ ve $k \neq 0$ dır (Özkan, E., Taştan, M., 2021).

Bu eşitlikte $k = 1$, $m = n$ ve $r = 0$ alınırsa $Gj_n^{(1)} = Gj_n(x)$ olur.

4.7.2. Teorem

Gauss k – Jacobsthal-Lucas dizisi ile bilinen Gauss Jacobsthal-Lucas dizisi arasındaki ilişki

$$[(Gj_{m+1})^k - (Gj_m)^k] = [Gj_{(m+1)k}^{(k)} - Gj_{mk}^{(k)}]$$

şeklindedir (Özkan, E., Taştan, M., 2021).

İspat. (4.2) eşitliği yardımıyla;

$$\begin{aligned} Gj_{(m+1)k}^{(k)} - Gj_{mk}^{(k)} &= [(Gj_m)^{k-k} (Gj_{m+1})^k] - [(Gj_m)^{k-0} (Gj_{m+1})^0] \\ &= (Gj_{m+1})^k - (Gj_m)^k. \blacksquare \end{aligned}$$

$k = 2, 3, 4$ ve $n \in N$ için Gauss k – Jacobsthal-Lucas dizisi ile bilinen Gauss Jacobsthal-Lucas dizisi ile ilişkisi;

- i. $Gj_{2n}^{(2)} = Gj_n^2$,
- ii. $Gj_{2n+1}^{(2)} = Gj_n Gj_{n+1}$,
- iii. $Gj_n^{(2)} + Gj_{n+1}^{(2)} + Gj_{n+2}^{(2)} = Gj_{n+3}$,
- iv. $Gj_{2n}^{(2)} = 2^{2n} + 2(-2)^n + 1$,
- v. $Gj_{2n+1}^{(2)} = Gj_{2n}^{(2)} + 2Gj_{2n-1}^{(2)}$
- vi. $Gj_{3n}^{(3)} = Gj_n^3$,

- vii. $Gj_{3n+1}^{(3)} = Gj_n^2 Gj_{n+1},$
- viii. $Gj_{3n+2}^{(3)} = Gj_n Gj_{n+1}^2,$
- ix. $Gj_{3n+1}^{(3)} = Gj_{3n}^{(3)} + 2Gj_{3n-1}^{(3)}$
- x. $Gj_{4n}^{(4)} = Gj_n^4,$
- xi. $Gj_{4n+1}^{(4)} = Gj_n^3 Gj_{n+1},$
- xii. $Gj_{4n+2}^{(4)} = Gj_n^2 Gj_{n+1}^2,$
- xiii. $Gj_{4n+3}^{(4)} = Gj_n Gj_{n+1}^3,$
- xiv. $Gj_{4n+1}^{(4)} = Gj_{4n}^{(4)} + 2Gj_{4n-1}^{(4)}.$

şeklindedir (Özkan, E., Taştan, M., 2021).

4.7.3. Teorem

$k, n \in N$ için Gauss k –Jacobsthal-Lucas dizisinin genelleştirilmiş denklemi

$$Gj_{kn+1}^{(k)} = Gj_{kn}^{(k)} + 2Gj_{kn-1}^{(k)}$$

şeklindedir (Özkan, E., Taştan, M., 2021).

İspat.

(4.6) eşitliğini kullanarak;

$$\begin{aligned}
Gj_{kn}^{(k)} + 2Gj_{kn-1}^{(k)} &= Gj_n^k + 2(Gj_{n-1} Gj_n^{k-1}) \\
&= Gj_n^{k-1} (Gj_n + 2Gj_{n-1}) \\
&= Gj_n^{k-1} Gj_{n+1} \\
&= Gj_{kn+1}^{(k)}. \blacksquare
\end{aligned}$$

4.7.4. Teorem

$Gj_n^{(k)}(x)$; Gauss k –Jacobsthal dizisi için Cassini özdeşliği ($n, k \geq 2$)

$$Gj_{kn+t}^{(k)} Gj_{kn+t-2}^{(k)} - \left(Gj_{kn+t-1}^{(k)} \right)^2 = \begin{cases} Gj_n^{2k-2} (-1)^n 9(3-i), & t = 1 \\ 0, & t \neq 1 \end{cases}$$

dir (Özkan, E., Taştan, M., 2021).

İspat.

$$\begin{aligned} Gj_{kn+t}^{(k)} Gj_{kn+t-2}^{(k)} - \left(Gj_{kn+t-1}^{(k)} \right)^2 &= (Gj_n^{k-1})(Gj_n^{k-1} Gj_{n+t-2}) - (Gj_n^{k-1} Gj_{n+t-1})^2 \\ &= (Gj_n^{k-1})^2 (Gj_{n+t} Gj_{n+t-2} - (Gj_{n+t-1})^2) \\ &= Gj_n^{2k-2} ((Gj_{n+t} Gj_{n+t-2} - (Gj_{n+t-1})^2). \end{aligned}$$

$t = 1$;

$$\begin{aligned} &= Gj_n^{2k-2} ((Gj_{n+1} Gj_{n-1} - (Gj_n)^2) \\ &= Gj_n^{2k-2} (-1)^n 9(3-i). \end{aligned}$$

$t \neq 1, t = m, (m \in \mathbb{N})$;

$$\begin{aligned} &= Gj_n^{2k-2} ((Gj_{n+m} Gj_{n+m-2} - (Gj_{n+m-1})^2) \\ &= Gj_n^{2k-2} (Gj_{2n+2m-2}^{(2)} - Gj_{2n+2m-2}^{(2)}) \\ &= 0. \blacksquare \end{aligned}$$

Tanımlar ve teoremler yardımıyla aşağıdaki genelleştirmeler elde edilir:

$$Gj_{nk+t}^{(k)} = Gj_n^{k-t} Gj_{n+1}^t$$

ve

$$Gj_{nk+t}^{(k)} = Gj_n^{k-t} Gj_{n+1}^t.$$

$t = 0, 1, \dots, k-1$ (Özkan, E., Taştan, M., 2021).

4.8. Gauss k –Jacobsthal-Lucas Polinomu

4.8.1. Tanım

Gauss k –Jacobsthal-Lucas polinomunun Binet formülü;

$$G_j^{(k)} := [(\alpha^m(x) + \beta^m(x)) + ix(\alpha^{m-1}(x) + \beta^{m-1}(x))]^{k-r} [(\alpha^{m+1}(x) + \beta^{m+1}(x)) + ix(\alpha^m(x) + \beta^m(x))]^r$$

şeklinde tanımlanır. Burada $n, k, m, r \in \mathbb{N}, n = mk + r, k \neq 0, \alpha(x) = \frac{1+\sqrt{1+8x}}{2}$ ve $\beta(x) = \frac{1-\sqrt{1+8x}}{2}$. Gauss k –Jacobsthal-Lucas dizisinin matris yardımıyla ifadesi

$$G_j^{k-1}(x)Q^nT = \begin{bmatrix} G_j^{(k)}_{kn+k+1}(x) & G_j^{(k)}_{kn+k}(x) \\ G_j^{(k)}_{kn+k}(x) & G_j^{(k)}_{kn+k-1}(x) \end{bmatrix}.$$

şeklindedir. Burada Q ve T matrisi $Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ve $T = \begin{bmatrix} 1+4x+ix & 1+2xi \\ 1+2xi & 2-\frac{i}{2} \end{bmatrix}$ dir.

(Özkan, E., Taştan, M., 2021).

Gauss k –Jacobsthal-Lucas dizisinin bazı terimleri Tablo 4.7 de verilmiştir;

Tablo 4.7 $G_j^{(k)}(x)$ polinomu için bazı değerler

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
$G_j^{(k)}(x)$	$2 - \frac{i}{2}$	$\frac{15}{4} - 2i$	$\frac{13}{2} - \frac{47}{8}i$	$\frac{161}{16} - 15i$
$G_j^{(k)}(x)$	$1 + 2ix$	$x + 2 + \left(4x - \frac{1}{2}\right)i$	$4x + \frac{15}{4} + \left(\frac{15x}{2} - 2\right)i$	$\frac{13}{2} + \frac{47x}{4} + \left(-\frac{47}{8} + 13x\right)i$
$G_j^{(k)}(x)$	$1 + 4x + ix$	$-4x^2 + 1 + 4ix$	$-8x^2 + 2x + 1 + \left(-\frac{1}{2} + 8x + 2x^2\right)i$	$\frac{15}{4} - 15x^2 + (-2 + 15x + 8x^2)i$

Gauss k –Jacobsthal-Lucas polinomu ile bilinen Gauss Jacobsthal-Lucas polinomu arasındaki ilişki

$$Gj_n^{(k)}(x) := (Gj_m(x))^{k-r} (Gj_{m+1}(x))^r, \quad (4.7)$$

eşitliği ile verilir. Burada $n, k, m, r \in N$, $n = mk + r$ ve $k \neq 0$ dır.

Bu eşitlikte $k = 1$, $m = n$ ve $r = 0$ alınırsa $Gj_n^{(1)}(x) = Gj_n(x)$ (Özkan, E., Taştan, M., 2021).

4.8.2. Teorem

Gauss k – Jacobsthal-Lucas polinomu ile bilinen Gauss Jacobsthal-Lucas polinomu arasındaki ilişki

$$[(Gj_{m+1}(x))^k - (Gj_m(x))^k] = [Gj_{(m+1)k}^{(k)}(x) - Gj_{mk}^{(k)}(x)]$$

şeklindedir (Özkan, E., Taştan, M., 2021).

İspat. (4.7) eşitliği yardımıyla;

$$\begin{aligned} Gj_{(m+1)k}^{(k)}(x) - Gj_{mk}^{(k)}(x) &= [(Gj_m(x))^{k-k} (Gj_{m+1}(x))^k] - [(Gj_m(x))^{k-0} (Gj_{m+1}(x))^0] \\ &= (Gj_{m+1}(x))^k - (Gj_m(x))^k. \blacksquare \end{aligned}$$

$k = 2, 3, 4$ ve $n \in N$ için Gauss k –Jacobsthal-Lucas polinomu ile bilinen Gauss Jacobsthal-Lucas polinomu ile ilişkisi;

- i. $Gj_{2n}^{(2)}(x) = Gj_n^2(x),$
- ii. $Gj_{2n+1}^{(2)}(x) = Gj_n(x)Gj_{n+1}(x),$
- iii. $Gj_{2n+1}^{(2)}(x) = Gj_{2n}^{(2)}(x) + 2xGj_{2n-1}^{(2)}(x)$
- iv. $Gj_{3n}^{(3)}(x) = Gj_n^3(x),$
- v. $Gj_{3n+1}^{(3)}(x) = Gj_n^2(x)Gj_{n+1}(x),$
- vi. $Gj_{3n+2}^{(3)}(x) = Gj_n(x)Gj_{n+1}^2(x),$

- vii. $Gj_{3n+1}^{(3)}(x) = Gj_{3n}^{(3)}(x) + 2xGj_{3n-1}^{(3)}(x)$
- viii. $Gj_{4n}^{(4)}(x) = Gj_n^4(x),$
- ix. $Gj_{4n+1}^{(4)}(x) = Gj_n^3(x)Gj_{n+1}(x),$
- x. $Gj_{4n+2}^{(4)}(x) = Gj_n^2(x)Gj_{n+1}^2(x),$
- xi. $Gj_{4n+3}^{(4)}(x) = Gj_n(x)Gj_{n+1}^3(x),$
- xii. $Gj_{4n+1}^{(4)}(x) = Gj_{4n}^{(4)}(x) + 2xGj_{4n-1}^{(4)}(x).$

şeklindedir (Özkan, E., Taştan, M., 2021).

4.8.3. Teorem

$k, n \in N$ için Gauss k –Jacobsthal-Lucas dizisinin genelleştirilmiş denklemi

$$Gj_{kn+1}^{(k)}(x) = Gj_{kn}^{(k)}(x) + 2xGj_{kn-1}^{(k)}(x)$$

şeklindedir (Özkan, E., Taştan, M., 2021).

İspat.

(4.7) eşitliğini kullanarak;

$$\begin{aligned}
Gj_{kn}^{(k)}(x) + 2xGj_{kn-1}^{(k)}(x) &= Gj_n^k(x) + 2x(Gj_{n-1}(x)Gj_n^{k-1}(x)) \\
&= Gj_n^{k-1}(x)(Gj_n(x) + 2xGj_{n-1}(x)) \\
&= Gj_n^{k-1}(x)Gj_{n+1}(x) \\
&= Gj_{kn+1}^{(k)}(x). \blacksquare
\end{aligned}$$

4.8.4. Teorem

$Gj_n^{(k)}(x)$; Gauss k –Jacobsthal-Lucas polinomu için Cassini özdeşliği ($n, k \geq 2$)

$$Gj_{kn+t}^{(k)}(x)Gj_{kn+t-2}^{(k)}(x) - \left(Gj_{kn+t-1}^{(k)}(x)\right)^2 = \begin{cases} Gj_n^{2k-2}(x)(-1)^{n-1}2^{n-2}x^{n-1}(2+x-i)(1+8x), & t = 1 \\ 0, & t \neq 1 \end{cases}$$

dir (Özkan, E., Taştan, M., 2021).

İspat.

$$\begin{aligned}
& Gj_{kn+t}^{(k)}(x)Gj_{kn+t-2}^{(k)}(x) - \left(Gj_{kn+t-1}^{(k)}(x)\right)^2 \\
&= (Gj_n^{k-1}(x)Gj_{n+t}(x))(Gj_n^{k-1}(x)Gj_{n+t-2}(x)) - (Gj_n^{k-1}(x)Gj_{n+t-1}(x))^2 \\
&= (Gj_n^{k-1}(x))^2(Gj_{n+t}(x)Gj_{n+t-2}(x) - (Gj_{n+t-1}(x))^2) \\
&= Gj_n^{2k-2}(x) \left((Gj_{n+t}(x)Gj_{n+t-2}(x) - (Gj_{n+t-1}(x))^2) \right).
\end{aligned}$$

$t = 1$;

$$\begin{aligned}
&= Gj_n^{2k-2}(x)((Gj_{n+1}(x)Gj_{n-1}(x) - (Gj_n(x))^2) \\
&= Gj_n^{2k-2}(x)(-1)^{n-1}2^{n-2}x^{n-1}(x+2-i)(1+8x).
\end{aligned}$$

$t \neq 1, t = m, (m \in \mathbb{N})$;

$$\begin{aligned}
&= Gj_n^{2k-2}(x)((Gj_{n+m}(x)Gj_{n+m-2}(x) - (Gj_{n+m-1}(x))^2) \\
&= Gj_n^{2k-2}(x)(Gj_{2n+2m-2}^{(2)}(x) - Gj_{2n+2m-2}^{(2)}(x)) \\
&= 0. \blacksquare
\end{aligned}$$

Tanımlar ve teoremler yardımıyla aşağıdaki genelleştirmeler elde edilir:

$$Gj_{nk+t}^{(k)}(x) = Gj_n^{k-t}(x)Gj_{n+1}^t(x)$$

ve

$$Gj_{nk+t}^{(k)}(x) = Gj_n^{k-t}(x)Gj_{n+1}^t(x).$$

$t = 0, 1, \dots, k-1$ (Özkan, E., Taştan, M., 2021).

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmada, Gauss Fibonacci ve Gauss Lucas polinomları, Gauss k –Fibonacci polinomu, Gauss k –Lucas sayı dizisi ve polinomu ve Gauss Jacobsthal ve Gauss Jacobsthal-Lucas dizilerinin ve polinomlarının yeni bir ailesi olarak Gauss k –Jacobsthal ve Gauss k –Jacobsthal-Lucas dizisi ve Gauss k –Jacobsthal ve Gauss k –Jacobsthal-Lucas polinomu tanımlandı. Bu yeni ailelerin Binet formülleri, matris temsilleri ve bilinen ailelerle ilişkileri verildi ve bilinen ailelerin sağladığı teoremlerin yeni aileler için de sağlandığı gösterildi ve ispatları yapıldı.

Öneri olarak Gauss aileleri için tanımlanan bu yeni aileler başka sayı dizilerine uygulanıp onlarında özellikleri incelenebilir.

KAYNAKLAR

- Abd-Elhameed, W. M., and Zeyada, N. A. (2017)., “A generalization of generalized Fibonacci and generalized Pell numbers, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 48(1), 102-107.
- Asci, M., Gurel, E. (2013)., Gaussian Jacobsthal and Gaussian Jacobsthal Lucas Polynomials, *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, , 19(1), 25-36.
- Berzsenyi, G. (1977)., Gaussian Fibonacci numbers, *The Fibonacci Quarterly*,15, 223-236.
- Bolat, C., Köse, H. (2010)., On the Properties of k -Fibonacci Numbers, *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 22(5), 1097-1105.
- Berger, E., Bryant, R., Griffiths, P., (1983), Gauss denklemleri ve izometrik yerleştirmelerin katılığı, *Duke Math. J.* 50(3), 803–892. MR 714831 , <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-83-05039-1>.
- Catalani, M. (2002) “Identities for Tribonacci-related Sequences”, *Cornell University*, *Library*, 1-6.
- Catarino, P. (2018)., “Bicomplex k -Pell quaternions”, *Computational Methods and Function Theory*, 1-12.
- Catarino, P. (2018)., “ k –Pell, k –Pell–Lucas and modified k –Pell sedenions”, *Asian-European Journal of Mathematics*, 1950018.
- Campos, H., Catarino,P., AireS,A.P., Vasco, P., Borgers, A. (2014)., On Some Identities for k -Jacobsthal Lucas Numbers, *Int.Journal of Math. Analysis*, 8(10),489-494.
- Cerin, Z. (2007)., Sums of Squares and Products of Jacobsthal Numbers, *Journal of Integer Sequences*, (10),7.2.5.
- Craven, T., Csordas, G., (1983)., The Gauss-Lucas Theorem And Jensen Polynomials, *transactions of the american mathematical society* 278(I,) July 1983.

- Demir, F. B., Tuncer T., Kocamaz, A. F., (2019)., Lojistik-Gauss Harita Tabanlı Yeni Bir Kaotik Sürü Optimizasyon Yöntemi, *Anatolian Journal of Computer Sciences*, 4(1), 47-53.
- Deveci, Ö., Artun, G. (2019). On the Adjacency-Jacobsthal numbers, *Communications in Algebra*, 47(11), 4520-4532. DOI: 10.1080/00927872.2018.1541464
- Falcón, S., Plaza, A. (2007)., On the Fibonacci k -numbers, *Chaos, Solitons & Fractals*, 32(5), 1615-1624. doi:10.1016/j.chaos.2006.09.022.
- Gould, H. W. (1981)., “A history of the Fibonacci Q -matrix and a higher-dimensional problem”, *Fibonacci Quarterly*, 19(3).
- Harman, C. J. (1981)., Complex Fibonacci Numbers, The Fibonacci Quart., 19(1), 82-86.
- Hoggat, V. E. (1969)., Fibonacci and Lucas Numbers, MA: Houghton Mifflin, Boston,
- Horadam, A.F. (1963)., Complex Fibonacci Numbers and Fibonacci Quaternions, *American Mathematics Monthly*, 70, 289-291.
- Horadam, A.F. (1996)., Jacobsthal Representation Numbers, *The Fibonacci Quarterly*, 215, 141-144.
- Jhala, D. Sisodiya K., Rathore, G.P.S. (2013), On Some Identities for k -Jacobsthal Number, *Int. Journal of math. Analysis*, 7(12), 551-556.
- Jhala, D., Rathore, G.P.S., Sisodiya, K. (2014). Some Properties of k -Jacobsthal Numbers with Arithmetic Indexes, *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, 2 (4), 119-124.
- Jhala, D. and Rathore, G.P.S, 2014, Some Properties of the k -Jacobsthal Lucas Sequence, *International Journal of Science and Engineering Technology, (IJMSET)*, 1(3), 87-92.
- Jordan, J. H., (1965)., Gaussian Fibonacci and Lucas Numbers, *Fibonacci Quart.*, 3315-318.
- Kalman, D., Mena, R. (2003)., The Fibonacci Numbers-Exposed, *Mathematics Magazine*, 76, 167-181.,

- Kayaçelik, D., (2019)., Gauss ve gauss kobalans polinomları üzerine, Yüksek Lisans Tezi Mustafa Yılmaz Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Kılıç, E. (2006), Genelleştirilmiş k -Basamak Pell Sayılarının Karakterizasyonu, Doktora Tezi, *Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*.
- Koshy, T., Fibonacci and Lucas numbers with Applications, **A Wiley-Interscience Publication**, 2001.
- Lee, G-Y., Lee, S-G, (1995)., A Note On Generalized Fibonacci Numbers, **The Fibonacci Quart.**, 33 273-278.
- Mikkawy, M. and Sogabe, T. (2010)., A new family of k -Fibonacci numbers, **Applied Mathematics and Computation**, 215, 4456-4461.
- Mikkawy, M. and Sogabe, T. (2010)., “A New Family of k -Fibonacci Numbers”, **Applied Mathematic and Computation**, 215, 4456-4461.
- Öcal, A.A., Tuglu, N., Altinisik, E., (2005)., On the representation of k -generalized Fibonacci and Lucas numbers, **Applied Mathematics and Computation**. 170(1), 584-596.
- Özkan, E. (2003)., 3-Step Fibonacci Sequences in Nilpotent Groups, **Applied Mathematics and Computation**, 144, 517-527.
- Özkan, E., Altun, İ., Göçer, A. (2017)., On Relationship among A New Family of k -Fibonacci, k -Lucas Numbers, Fibonacci and Lucas Numbers, **Chiang Mai Journal of Science**, 44, 1744-1750.
- Özkan, E., Taştan, M., (2020), On Gauss Fibonacci Polynomials, Gauss Lucas Polynomials and Their Applications, **Communications in Algebra**, 48(3), 952-960.
- Özkan, E., Aydın, H., Dikici, R. (2003)., 3-Step Fibonacci Series Modulo m , **Applied Mathematics and Computation**, 143(1), 165-172. DOI: 10.1016/S0096-3003(02)00360-0

- Özkan, E., Taştan, M., (2021), On Gauss k -Fibonacci Polynomials, *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 9(1), 124-130.
- Özkan E., Taştan M., (2020)., A New Families Of Gauss k -Jacobsthal Numbers And Gauss k -Jacobsthal-Lucas Numbers And Their Polynomials, *Journal of Science and Arts*, 4(53),
- Özkan, E., Aydın, H., Dikici, R. (2003)., 3-Step Fibonacci Series Modulo m , *Applied Mathematics and Computation*, 143(1), 165-172. DOI: 10.1016/S0096-3003(02)00360-0
- Özkan, E., Taştan, M., (2019)., k -Fibonacci Polynomials in The Family of Fibonacci Numbers, *Research & Reviews: Discrete Mathematical Structure*, 6(3),19-22.
- Özkan E., Taştan M. (2021)., On a new family of gauss k -Lucas numbers and their polynomials, *Asian-European Journal of Mathematics*, 13,1-15.
- Özkan E., Taştan M., Aktaş A.(2021)., On the new families of k -Pell numbers and k -Pell-Lucas numbers and their polynomials, *Journal of Contemporary Applied Mathematics*,11(1), 16-30.
- Özkan E., Taştan M., (2020)., Catalan Transform Of The k -Jacobsthal Sequence, *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 8(2), 70-74.
- Özkan E., Taştan M., Güngör O., (2020)., Catalan Transform of The k -Lucas Numbers, *Erzincan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 13, 145-149.
- Özkan E., Taştan M. (2019), k -Fibonacci Polynomials in The Family of Fibonacci Numbers, *Research & Reviews: Discrete Mathematical Structures*, 6(3), 19-22.
- Pethe, S., Horadam, A. F., (1986)., Generalized Gaussian Fibonacci Number, *Bull. Austral. Math. Soc.* 33(1), 37-48.
- Srisawat, S., Sriprad, W., Sthityanak, O., (2015)., On the k -Jacobsthal Numbers by Matrix Methods, *Science and Technology Rmutt Journal*, 5(1), 70-76.

- Stakhov, A. and Rozin, B. (2006) “Theory of Binet formulas for Fibonacci and Lucas p-numbers”, *Chaos, Solitons & Fractals*, 27 (5), 1162–1177.
- Szynal-Liana, A., & Włoch, I. (2016) “The Pell quaternions and the Pell octonions”, *Advances in Applied Clifford Algebras*, 26(1), 435-440.
- Stakhov, A. P., (2006)., Fibonacci Matrices, A Generalization of The Cassini Formula, and A New Coding Theory, *Chaos, Solitons and Fractals*, 30 56-66.
- Stanimirovic, P.S., Nikolov, J., Stanimirovic, I. (2008)., A generalization of Fibonacci and Lucas matrices, *Discrete Applied Mathematics*, 156, 2606–2619.
- Tereszkiewicz, A., Wawreniuk, I. (2015)., Generalized Jacobsthal polynomials and special points for them, *Applied Mathematics and Computation*, 268, 806–814.
DOI:10.1016/j.amc.2015.07.002
- Taştan, M., Özkan, E., (2020)., Catalan Transform of The k -Jacobsthal Sequence, *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 8(2), 70-74.
- Taştan M., Özkan E. (2021)., Catalan Transform of the k -Pell and k -Pell-Lucas Sequence, *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 27(1), 198-207.
- Taş, S., (2019)., A new family of k –Gaussian Fibonacci numbers, *J. BAUN Inst. Sci. Technol.*, 21(1), 184-189.
- Uygun, S., Zorçelik, A. (2018)., Bivariate Jacobsthal And Bivariate Jacobsthal-Lucas Matrix Polynomial Sequences, *J. Math. Comput. Sci.*, 3, 331-344.
<https://doi.org/10.28919/jmcs/3616>
- Uygun, S. ve Eldoğan, H., 2016(a), k -Jacobsthal and k -Jacobsthal Lucas Matrix Polynomial Sequences, *International mathematical Forum*, 11(3), 145-154.
- Uygun, S. ve Eldoğan, H., (2016(b))., Properties of k -Jacobsthal and k -Jacobsthal Lucas Sequences, *Gen.Math.Notes*, 36(1), 34-47.

- Uygun, S., Eldogan, H. (2016)., k -Jacobsthal and k –Jacobsthal Lucas Matrix Sequences, ***International Mathematical Forum***, 11(3), 145 – 154.
- Yazar I., Yavuz, H. S., Çay, M. A. (2009)., Bba Yönteminde Tanıma ve Gauss Fonksiyonları Kullanılarak Yüz Tanıma Verimliliklerinin Karşılaştırılması, ***5. Uluslararası İleri Teknolojiler Sempozyumu (IATS'09), 13-15 Mayıs 2009***, Karabük, Türkiye.
- Yılmaz, N., Taştan, M., Özkan, E., (2021)., A New Family Horadam Numbers, ***Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications***, 10(1) Jan. 2022, 64-70.
- Yılmaz, M., (2017)., Gauss Balans ve Gauss Kobalans Sayıları Üzerine, Yüksek Lisans Tezi Mustafa Yılmaz Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Yuan, Y., Zhang, W. (2002)., Some Identities Involving the Fibonacci Polynomials, ***The Fibonacci Quart.***, 40, 314-318.
- Vajda, S. (1989)., “Fibonacci & Lucas numbers and golden section”, ***Ellis Horwood, Chichester***.
- Włoch, I. (2008)., “On generalized Pell numbers and their graph representations”, ***Commentationes Mathematicae***, 48(2), 169-175.