



T.C.

TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA PROGRAMI

GEÇİŞ ŞARTLARI İÇEREN SINIR DEĞER
PROBLEMLERİ İÇİN SONLU FARKLAR METODU

DOKTORA TEZİ

Semih ÇAVUŞOĞLU

Danışman: Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU

TOKAT- 2023

ETİK SÖZLEŞME

Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, **Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU** danışmanlığında hazırlamış olduğum "**Geçiş Şartları İçeren Sınır Değer Problemleri için Sonlu Farklar Metodu**" adlı Doktora tezinin bilimsel etik değerlere ve kurallara uygun, özgün bir çalışma olduğunu, aksinin tespit edilmesi halinde her türlü yasal yaptırımını kabul edeceğimi beyan ederim.

23/12/2022

Semih ÇAVUŞOĞLU

Semih Çavuşoğlu tarafından hazırlanan "**Geçiş Şartları İçeren Sınır Değer Problemleri için Sonlu Farklar Metodu**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 23/12/2022 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen Jüri tarafından Oy Birliği ile Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Allaberen ASHYRALYEV

İmza:

Üye: Prof.Dr.Oktay MUHTAROĞLU

İmza:

Üye: Prof Dr.Ali YAKAR

İmza:

Üye : Doç.Dr. Kadriye AYDEMİR

İmza:

Üye : Doç. Dr. Serkan DEMİRİZ

İmza:

ONAY

.... / /

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

ÖZET

GEÇİŞ ŞARTLARI İÇEREN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN

Çavuşoğlu, Semih

Doktora, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU

Aralık 2022, xii+99 sayfa

Klasik sonlu fark yönteminin tek aralıklı diferansiyel denklemleri çözmek için tasarlandığını biliyoruz ancak bu yöntemin geçiş şartları da denilen iki aralık arasındaki ilave geçiş şartlarını da içeren iki aralıklı diferansiyel denklemlere nasıl uygulanabileceği açık değildir.

Bu tezde, bu yöntem sadece sınır değer koşullarını sağlayan değil, aynı zamanda ek iletim koşullarını da sağlayan geçiş problemlerine uygulandı. Sonlu Farklar metodunun önerilen modifikasyonunun uygulanabilirliğini ve etkinliğini göstermek için elde edilen sonlu fark çözümleri, gerçek çözümlerle grafiksel olarak karşılaştırıldı ve çözümlere karşılık gelen hataların analizi de tablolarda sunuldu. Elde edilen sonuçlar, bu tezde geliştirilen ve önerilen geliştirilmiş Sonlu Farklar metodunun uygulanabilirliğini, etkinliğini ve güvenilirliğini göstermektedir.

Anahtar Kelimeler: Sonlu Farklar Metodu, Geçiş Şartı, Sınır Değer Problemi, İç Tekil Nokta.

ABSTRACT
FINITE DIFFERENCE METHOD FOR BOUNDARY VALUE PROBLEMS
INVOLVING TRANSITION CONDITIONS

Çavuşoğlu, Semih

Doktoral Thesis, Division of Analysis and Functional Theory

Advisor: Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU

December 2022, xii+99 pages

We know that the classical finite difference method is intended for solving one-interval differential equations, and it is not clear how to apply this technique to two-interval differential equations that satisfy additional conditions of interaction between these two-intervals, the so-called transmission conditions.

In this thesis we have adapted this method to two-interval differential equations satisfying not only boundary value conditions, but also additional transmission conditions. The modified Finite Difference Method was applied to some illustrative two-interval boundary-transmission problems. To demonstrate the applicability and efficiency of the proposed modification of Finite Difference method the obtained finite-difference solutions are compared graphically with the exact solutions, and the corresponding error analysis is also presented in tables. The obtained results show the applicability, efficiency and reliability of the proposed modified Finite Difference Method, developed in this thesis.

Keywords: Finite Difference Method, Transition Condition, Boundary Value Problem, Interior Singular Point.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
ÖNSÖZ	vii
SİMGE ve KISALTMALAR	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ	xi
ÇİZELGELER DİZİNİ	xii
1. GİRİŞ	1
2. LİTERATÜR ÖZETİ	4
3. TEMEL TANIM ve KAVRAMLAR	11
3.1. Katsayılar Matrisi	11
3.2. Simetrik Matris	12
3.3. Pozitif Tanımlı Matris	12
3.4. Regüler Matris	12
3.5. Tridiagonal Matris	12
3.6. M-matris	13
3.7. Matrisin Özdeğerleri	14
3.8. İkinci Mertebeden Adi Türevli Diferansiyel Denklemler	14
3.9. Regüler ve Singüler Diferansiyel Denklemler ve Singüler Nokta	15
3.10. Başlangıç Değer Problemi	15
3.11. Sınır Değer Problemi	16
3.12. Sınır Değer Koşulları	17
3.13. Normlu Uzay/Vektör Normu	18
3.14. Sturm-Liouville Denklemi	19
4. STANDART SONLU FARKLAR METODU	21
4.1. Birinci Türevin Sonlu Fark Yaklaşımı	21
4.2. İkinci Türevin Sonlu Fark Yaklaşımı	23
4.3. İkinci Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler için Sonlu Fark Yöntemi	24
4.4. İkinci Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemlerin Liouville Normal Formu	28
4.5. Metot A: Temel Merkezi Farklar	28
4.6. Metot B: Numerov Yöntemi	29

4.7. Sturm - Liouville Denklemleri için Yakınsama Teorisi	30
5. GEÇİŞ ŞARTLARI İÇEREN SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN SONLU FARKLAR METODU İLE ÇÖZÜMÜ	32
5.1. Geçiş Koşullar İçeren Sınır Değer Problemi	33
6. SONLU FARKLAR YÖNTEMİNİN TUTARLILIK,STABİLİTE, YAKINSAMA ve HATA ANALİZİ	37
6.1. Yerel Kesme Hatası	37
6.2. Global Hata	39
6.3. Kararlılık	40
6.4. Tutarlılık	41
6.5. Yakınsaklık	42
6.6. 2-Normda Kararlılık	46
7. SONLU FARKLAR METODU İÇİN NÜMERİK ÖRNEKLER	51
7.1. Sonlu Farklar Metodunun Uygulamaları	51
8. TARTIŞMA ve SONUÇ	93
KAYNAKLAR	95

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın başlangıcından sonuna kadar bana hep destek olan, konunun seçilmesi, yürütülmesi ve sonuçlandırılması aşamalarında engin bilgi ve tecrübesiyle ihtiyacım olan bütün yardımı yakın ilgiyle yaparak tavsiye ve yönlendirmeleriyle karşılaştığım sorunların çözümünde bana yol gösteren, sonuçların değerlendirmesini titizlikle yaparak çalışmanın bilimsel temeller üzerinde şekillenmesini sağlayan tez danışmanım, değerli hocam Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tez izleme komitesi toplantıları boyunca değerli tavsiyeleri ve yol gösterici katkılarıyla destek olan Prof. Dr. Ali YAKAR ve Doç. Dr. Kadriye AYDEMİR'e, doktora eğitimim boyunca emeği geçen başta Dr. Öğr. üyesi Hayati OLGAR olmak üzere bölüm hocalarıma ve bu süreçte desteklerini esirgemeyip yanımda olan Erbaa Fatih Anadolu Lisesi idarecileri ve öğretmenleri ile özellikle matematik zümresine teşekkür ederim.

En özel teşekkürleri motivasyon kaynağım, sevgili kızlarım Zeynep Sıla, Rana ve Aslı'ma, yol arkadaşım, en büyük destekçim, sevgili eşim Ayşe'ye sunuyorum.

Son olarak, doktora tez dönemimi maddi olarak destekleyen Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumuna (TÜBİTAK, 2211-A Yurt İçi Genel Doktora Burs Programı) teşekkür ederim.

Aralık 2022

SİMGE ve KISALTMALAR

Simgeler Açıklamalar

$C[a, b]$: $[a, b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar uzayı

$C^{(n)}(a, b)$: $[a, b]$ aralığında n . mertebeden sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar uzayı

h : Adım uzunluğu

$\det A$: A matrisinin determinanı

A^T : A matrisinin transpozesi

$x^T A x$: A matrisinin quadratik formu

D_+ : İleri sonlu farklar

D_- : Geri sonlu farklar

D_0 : Merkezi sonlu farklar

x_i : Grid (ızgara) noktası

$\|x\|_p$: p -norm

$\|x\|_1$: 1-norm

$\|x\|_2$: 2-norm ya da Öklidyen norm

$\|x\|_\infty$: Maksimum-norm

$\mathbb{R}^{N \times N}$: Reel değerli $N \times N$ boyutunda kare matrisler uzayı

τ : Yerel kesme hatası

$o(h^p)$: p . mertebeden yerel kesme hatası

E : Global hata

Kısaltmalar Açıklamalar

ADD : Adi Diferansiyel Denklem

MSF : Merkezi Sonlu Fark

MMH : Mutlak maksimum hata

SFM : Sonlu Farklar Metodu

SDP : Sınır Değer Problemi

ŞEKİLLER DİZİNİ

4.1	Birinci mertebeden türevin sonlu fark yaklaşımları	25
5.2	Geçiş şartlarının modellenmesi	32
7.3	(7.1.1)-(7.1.2) sınır değer probleminin $N=8$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü	53
7.4	(7.1.1)-(7.1.2) sınır değer probleminin $N=16$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü	53
7.5	(7.1.1)-(7.1.2) sınır değer probleminin $N=32$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü	54
7.6	(7.1.1)-(7.1.2) sınır değer probleminin $N=64$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü	54
7.7	(7.1.1)-(7.1.7) sınır değer geçiş-probleminin $N=8$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü	57
7.8	(7.1.1)-(7.1.7) sınır değer geçiş-probleminin $N=16$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü	58
7.9	(7.1.1)-(7.1.7) sınır değer geçiş-probleminin $N=32$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü	58
7.10	(7.1.1)-(7.1.7) sınır değer geçiş-probleminin $N=64$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü	59
7.11	(7.1.12)-(7.1.13) sınır değer probleminin $N=8$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü	61
7.12	(7.1.12)-(7.1.13) sınır değer probleminin $N=16$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü	62
7.13	(7.1.12)-(7.1.13) sınır değer probleminin $N=32$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü	62

7.14 (7.1.12)-(7.1.13) sınır değer probleminin $N=64$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü	63
7.15 (7.1.16)-(7.1.18) sınır değer geçiş-probleminin $N=8$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü	65
7.16 (7.1.16)-(7.1.18) sınır değer geçiş-probleminin $N=16$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü	66
7.17 (7.1.16)-(7.1.18) sınır değer geçiş-probleminin $N=32$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü	67
7.18 (7.1.16)-(7.1.18) sınır değer geçiş-probleminin $N=64$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü	67
7.19 (7.1.20)-(7.1.21) sınır değer probleminin $N=8$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü	71
7.20 (7.1.20)-(7.1.21) sınır değer probleminin $N=16$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü	72
7.21 (7.1.20)-(7.1.21) sınır değer probleminin $N=32$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü	72
7.22 (7.1.20)-(7.1.21) sınır değer probleminin $N=64$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü	73
7.23 (7.1.20)-(7.1.28) sınır değer geçiş-probleminin $N=16$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü	76
7.24 (7.1.20)-(7.1.28) sınır değer geçiş-probleminin $N=32$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü	77
7.25 (7.1.20)-(7.1.28) sınır değer geçiş-probleminin $N=64$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü	77
7.26 (7.1.20)-(7.1.28) sınır değer geçiş-probleminin $N=128$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü	78
7.27 (7.1.34), (7.1.35) sınır değer probleminin $N=10$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü	81
7.28 (7.1.34), (7.1.35) sınır değer probleminin $N=50$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü	81

7.29	(7.1.34), (7.1.35) sınır değer probleminin $N=100$ için SFM-özümü ve gerçek çözümü	82
7.30	(7.1.34), (7.1.35) sınır değer probleminin $N=500$ için SFM-özümü ve gerçek çözümü	82
7.31	(7.1.34)-(7.1.36) geçiş probleminin $N=49$ için SFM-özümü ve gerçek çözümü	84
7.32	(7.1.48)-(7.1.49) sınır değer probleminin $N=8$ için SFM-özümü ve gerçek özümü	87
7.33	Problem (7.1.48)-(7.1.49) sınır değer probleminin $N=16$ için SFM-özümü ve gerçek özümü	88
7.34	Problem (7.1.48)-(7.1.49) sınır değer probleminin $N=32$ için SFM-özümü ve gerçek özümü	88
7.35	Problem (7.1.48)-(7.1.49) sınır değer probleminin $N=64$ için SFM-özümü ve gerçek özümü	89
7.36	Problem (7.1.54)-(7.1.56) sınır değer geçiş-probleminin $N=8$ için göre SFM-özümü ve gerçek özümü	91
7.37	Problem (7.1.54)-(7.1.56) sınır değer geçiş-probleminin $N=16$ için göre SFM-özümü ve gerçek özümü	91
7.38	Problem (7.1.54)-(7.1.56) sınır değer geçiş-probleminin $N=32$ için göre SFM-özümü ve gerçek özümü	92
7.39	Problem (7.1.54)-(7.1.56) sınır değer geçiş-probleminin $N=64$ için göre SFM-özümü ve gerçek özümü	92

ÇİZELGELER DİZİNİ

7.1	(7.1.1)-(7.1.2) sınır-değer problemi için MMH tablosu	55
7.2	(7.1.1), (7.1.2), (7.1.7) sınır-değer-geçiş problemi için MMH tablosu .	59
7.3	(7.1.12)-(7.1.13) sınır-değer problemi için MMH tablosu	63
7.4	(7.1.16)-(7.1.18) sınır-değer-geçiş problemi için MMH tablosu	68
7.5	(7.1.20)-(7.1.21) sınır-değer problemi için MMH tablosu	73
7.6	(7.1.20)-(7.1.28) sınır değer-geçiş problemi için MMH tablosu	78
7.7	(7.1.34)-(7.1.36) sınır değer-geçiş problemi için MMH tablosu	85
7.8	(7.1.48)-(7.1.49) sınır-değer problemi için MMH tablosu	89

1. GİRİŞ

Fizik, mühendislik ve doğa bilimlerinin diğer dallarının birçok problemi adi veya kısmi diferansiyel denklemler için sınır değer problemlerine indirgenebilir. Örneğin, klasik mekanik, elektromanyetik teori, kuantum mekaniği ve kuantum fiziğinde sınır değer problemlerine oldukça sık rastlanmaktadır. Doğada gerçekleşen fiziksel olayların incelenmesi, fizik alanında bilimsel gelişmelere yol açmıştır. Bu tür fiziksel süreçlerin doğasını anlamak için başlangıç ve sınır değer problemlerini çözmek gerekir.

Farklı fiziksel durumları modelleyen ikinci mertebeden diferansiyel denklemler, çeşitli sınır koşullarıyla birlikte uygulamalı matematik ve fizikte ortaya çıkar. İkinci mertebeden diferansiyel denklemler için sınır değer problemleri (SDP), Newton'un soğuma yasası, bozunma nüfus artışı, akışkan ve katı mekaniği, malzeme bilimleri, kinetik, termodinamik direnç ve indüktör devreleri, akışkanlar dinamiğinde Navier-Stokes denklemlerini, katı mekaniğinde biharmonik denklemleri, elektromanyetikte Maxwell denklemlerini, potansiyeller için Laplace denklemleri vb. gibi doğa bilimlerindeki birçok problemin matematiksel modeli olarak ortaya çıkmıştır.

Fizik alanındaki bu bilimsel çalışmaların matematik biliminin gelişmesinde çok büyük etkisi olmuştur. Bu nedenle teorik ve uygulamalı matematik açısından diferansiyel denklemler için sınır değer problemlerinin incelenmesi büyük önem taşır. Bununla birlikte, diferansiyel denklemler için bir sınır değer ve/veya başlangıç değerle birlikte verilen bu denklemlerin bu kadar geniş uygulamaları olmasına rağmen, genellikle, gerçek çözümü bulmak çok zor hatta mümkün değildir. Çünkü gerçek çözümleri olan sadece birkaç tür diferansiyel denklem vardır. Ayrıca, gerçek çözümleri analitik yöntemlerle elde edilemeyen veya elde edilmesi çok zor olan veya gerçek çözümleri bulunsa bile kullanımı pratik açıdan uygun olmayan diferansiyel denklemler de vardır. Bu nedenle yaklaşık çözümlerinin bulunması büyük bir önem arz etmektedir. Bu amaçla yaklaşık çözümler elde etmek için günümüze kadar pek çok sayısal analiz yöntemi geliştirilmiştir. Böylece yüzyılın ortalarından sonra, Taylor Seri Açılımı yöntemi, Açık Euler yöntemi, Runge-Kutta yöntemi, Sonlu Elemanlar yöntemi, Diferansiyel Dönüşüm yöntemi, Adomian Ayrıştırma yöntemi vb. gibi çeşitli sayısal

yöntemler, diferansiyel denklemler için başlangıç ve sınır değer problemlerinin yaklaşık çözümleri için geliştirilmiştir. Bu yöntemlerin her birinin uygulanabilirliği, diferansiyel denklem tipleri, gerektirdikleri bilgisayar kapasiteleri ve hassasiyet açısından birbirine göre avantajları ve dezavantajları mevcuttur. Bu yöntemlerden biri de, basit şeması olan ve geniş sınıftaki diferansiyel denklemlere uygulanabilen Sonlu Farklar metodudur. Sayısal uygulamalarda sonlu fark tekniklerinin ortaya çıkışı, 1950'lerin başlarında olmasına rağmen bu yöntemler el ile işlem yapmaya uygun olmadığından dolayı gerekli ilgiyi o yıllarda görmemiştir. Daha sonra gelişen bilgisayar teknolojisiyle birlikte geniş ve yaygın kullanım alanı bulmuştur. Bunun yanında analitik işlemlerin bilgisayar ortamında yapılabilmesi sayısal analiz metodlarında bilgisayar kullanılmasını zorunlu hale getirmektedir. Bu da sayısal analiz ile ilgili metotların gelişimine neden olmuştur. Sonlu Farklar metodunun (SFM) ana fikri, diferansiyel denklemlerde yer alan adi ve kısmi türevleri, yaklaşık sonlu fark ifadeleriyle değiştirerek cebirsel bir denklem sistemine dönüştürmektir. Problemin çözümü, denklem sisteminin ayrık noktalardaki çözümleridir. Genel olarak iki noktaya dayatılan standart sınır koşulları Dirichlet, Neumann ve Robin tipidir. Ancak uygulamalı matematikte ve diferansiyel denklemlerle modellenen fizikte karşılaşılan problemler birkaç standart sınır koşulları ile açıklanamaz. Bu sebeple, verilen sınır koşullarının yalnızca tanım kümesinin uç noktalarını değil, aynı zamanda iç tekil noktasını da içeren yeni türdeki sınır değer problemleri (SDP) incelenmiştir. Bu tür problemlere sınır değer geçiş problemleri veya kısaca geçiş problemleri denir. Klasik SFM, iç tekil noktalarda geçiş koşulları içermeyen problemleri çözmek için tasarlanmıştır. Bilindiği gibi klasik SFM geçiş şartları içeren iki-aralıklı problemlere direkt olarak uygulanamaz. Doğal olarak, geçiş problemlerini çözmek klasik SDP'lerden çok daha zordur.

Bu tez çalışmasında, yalnızca sürekli SDP'leri değil, aynı zamanda bazı iç tekil noktalarında ek geçiş koşullarını içeren problemleri çözmek için klasik SFM'nin yeni bir modifikasyonunu geliştirilerek iki aralıklı sınır değer problemlerine uygulanmıştır. Tez sekiz bölümden oluşmaktadır. Bölüm 1'de tez konusunun bilimsel önemini kısaca açıklamaktadır. 2. Bölümde yöntemin arka planı tartışılmaktadır. Bölüm 3'te bazı gerekli tanımlar ve kavramlar verilmiştir. 4. ve 5. Bölümlerde Sonlu Farklar

Yönteminin tanımları ve temel özellikleri açıklanmıştır. Bölüm 6’da Sonlu Farklar yönteminin tutarlılık, stabilite, yakınsama ve hata analizi anlatılmıştır. Bölüm 7 ’da hem bir aralıklı hem de iki aralıklı sınır değer problemleri Sonlu Farklar Yöntemi kullanılarak çözülmüş ve elde edilen sonuçlar gerçek çözümlerle karşılaştırılmıştır. Bölüm 8’de ise bu tezde elde edilen sonuçlar tartışılmaktadır.



2. LİTERATÜR ÖZETİ

Çeşitli sınır koşullarına sahip ikinci mertebeden diferansiyel denklemler, bilim ve mühendislikte meydana gelen analitik veya sayısal olarak çözülebilen doğrusal ve doğrusal olmayan birçok problemten biridir. Optimal kontrol, giriş sapmaları, ısı akışı ve çeşitli dinamik sistemler dahil olmak üzere birçok mühendislik alanında ikinci mertebeden diferansiyel denklemler için sınır değer problemleriyle karşılaşmaktadır . Böyle sınır değer problemini (SDP) çözmek için sayısal analiz literatüründe birçok yazar çok sayıda yöntem kullanarak hızlı bir şekilde daha yüksek doğruluk elde etmeye çalışmıştır (Ashyralyev ve Sobolevskii, 2004; Ashyralyev ve ark., 2012; Ashyralyev ve Agirseven, 2013; Ashyralyev ve Prenov, 2014; Beroš ve ark., 2021; Pandey, 2018). Çeşitli sayısal teknikler arasında sonlu farklar yöntemi yaygın olarak kullanılmaktadır ancak yüksek doğruluk elde etmek için daha fazla hesaplama gerektirir .

Sonlu farklar yöntemi, diferansiyel denklemlerin sayısal çözümüne uygulanan ilk yaklaşımlardan biridir. Bu yöntem muhtemelen ilk olarak 1768’de Euler tarafından kullanılmıştır. Bu alandaki ilk makale ise Courant ve ark. (1928) çalışmasıdır. Bu çalışmada sonlu farklar aracılığıyla bazı matematiksel fizik problemlerinin çözümü verilmiştir. Laplace denkleminin beş noktalı yaklaşımı aracılığıyla yaklaşık bir çözümünü tanımlamak için Dirichlet ilkesinin ayrık bir analogu kullanılmıştır ve ağ genişliği sıfıra yaklaşırken analitik çözüme yakınsama araştırılmıştır. Karışık başlangıç-sınır değer problemleri için, sonraki dönemde, örneğin, Crank ve Nicolson (1947) tarafından örtük yöntemlerin kullanımı da kurulmuştur. Genel başlangıç değer problemleri ve parabolik problemler için sonlu farklar teorisi, daha sonra, Douglas, Lees, Samarskii, Widlund ve diğerleri tarafından verilen önemli katkılarla birlikte, Lax denklik teoremi ve Kreiss matris lemmalarında stabilite kavramının kullanılması ile 1950’ler ve 1960’larda daha da gelişmiştir. Mühendislik uygulamalarından bağımsız olarak, 1960’ların ortalarında matematik literatüründe, Rayleigh-Ritz prosedürü ve parçalı doğrusal yaklaşım fonksiyonları ile sonlu fark şemalarının inşası ve analizi konu edinilen bir dizi makale ortaya çıktı (Céa, 1964; Dem’yanovich, 1964; Feng, 1965; Friedrichs, 1962; Friedrichs ve Keller, 1966; Oganejan, 1963, 1966). Sonlu fark yöntemleriyle ilgili ayrıntılı bilgilere (Iserles, 2008; LeVeque,

2007; Li ve ark., 2017; Morton ve Mayers, 2005; Strikwerda, 2004; Tamme, 1968) kaynaklarında yer verilmiştir.

Bickley ve ark. (1961) "On finite-difference methods for the numerical solution of boundary-value problems" makalelerinde bir sınıf sınır değer problemlerinin sayısal çözümünü sonlu farklar yöntemini uygulayarak ele incelemişlerdir. Bu çalışmada özellikle, eliptik tipteki kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için fark düzeltme yönteminin uygulanabilirliği ve yakınsaklığı incelenmiştir. Tamme (1968) "Solution of a nonlinear boundary value problem for a second-order ordinary differential equation by the method of finite differences" makalesinde

$$\begin{aligned} [k(x)y']' &= f(x, y, y'), \quad \alpha < x < \beta \\ k(\alpha)y'(\alpha) &= \varphi_1[y(\alpha)], \quad -k(\beta)y'(\beta) = \varphi_2[y(\beta)] \end{aligned}$$

tipindeki sınır değer probleminin yaklaşık çözümleri bulunmuştur.

Daha sonraki yıllarda tekil noktalara sahip sınır değer problemlerinin Sonlu Farklar Yöntemi ile çözümü araştırılmaya başlanmıştır. Bu konularda birçok yazar tarafından makaleler yazılmıştır (Chawla ve Katti, 1982, 1984; Doedel, 1979; Doedel ve Reddien, 1984; Gebeily ve Abu-Zaid, 1998; Jamet, 1970; Kumar, 2002, 2003; Li ve ark., 2017; Roul ve Goura, 2020; Singh, 2008).

Jamet (1970) "On the convergence of finite-difference approximations to one-dimensional singular boundary-value problems" makalesinde orijinde tekilliği olan 2. mertebeden lineer bir adi diferansiyel denklemi ele alınarak, bu tekilliğin doğasına göre, ya iki noktalı sınır değer problemi ya da tek noktalı sınır değer problemi dikkate alınmış ve sonlu fark şemaları ile hata analizi ve monoton yakınsama yapılmıştır.

Yakovlev (1977, 1980) tarihli "Finite Difference Method for solving the first boundary value problem for a second-order ordinary differential equation" ve "Finite-difference method for solving the first boundary-value problem for a second order nonlinear ordinary differential equation with a divergent principal part" makalelerinde ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için sınır değer problemlerini incelemiştir.

Makalesinde verdiği teoremlerle

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

tipindeki ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerinin

$$y(0) = y(1) = 0$$

sınır şartları altında çözülebilirliği ve yakınsaklığı için gerekli şartları ispatlamıştır. Strygina (1978) "Note on the convergence of the finite-difference method for nonlinear boundary-value problems" başlıklı makalesinde, lineer olmayan sınır koşullarına sahip birinci dereceden adi diferansiyel denklemlerin lineer olmayan bir sistemi için bir eşdeğer operatör denklemi oluşturmuştur ve Vainikko'nun yöntemini ve kendi sonuçlarını kullanarak yönteminin yakınsak olduğunu göstermiştir.

Doedel (1979) "Finite difference collocation methods for nonlinear two point boundary value problems" başlıklı makalesinde bir sınıf doğrusal olmayan iki noktalı sınır değer problemlerini çözmek için sonlu fark yöntemini uygulamıştır, ayrıca üniform ağlar üzerinde bir yakınsama analizi vermiştir. Bu analiz, bir HB Kelley teoremine ve yazarın önceki bir makalesine dayanmaktadır. Belirli bir örnek ayrıntılı olarak verilmiş ve bazı sayısal hesaplamaların sonuçları dahil edilmiştir.

Chawla ve Katti (1982) "Finite difference methods and their convergence for a class of singular two point boundary value problems" başlıklı makalesinde bazı tekil iki noktalı sınır değer problemleri için üç noktalı sonlu fark yaklaşımlarının yapısını ve yakınsaklığını

$$(x^\alpha y')' = f(x, y),$$

$$y(0) = A, y(1) = B, 0 < x < 1$$

probleminde tartışmıştır.

Chawla ve Katti (1984) "A Finite-difference Method for a Class of Singular Two-point Boundary-value Problems" makalelerinde tekil iki noktalı sınır değer problemi için

üç noktalı bir sonlu farklar yöntemi uygulamıştır. Bu makalede

$$y'' + \frac{2}{x}y' + f(x, y) = 0$$

tipindeki diferansiyel denkleminde ve $y'(0) = 0$, $y(l) = a$ sınır koşullarından oluşan sınır değer problemi merkezi fark yaklaşımlarıyla incelemiştir.

Doedel ve Reddien (1984) tarihli "Finite difference methods for singular two-point boundary value problems" başlıklı makalelerinde bazı tekil iki noktalı sınır değer problemleri için yüksek mertebeden doğru sonlu fark yöntemleri araştırılmıştır. Bu yöntemler, tahmin edilen çözümün davranışına uyum sağlamak için oluşturulmuştur. Kararlılık ve yakınsama teoremleri sayısal deneylerin sonuçları ile birlikte verilmiştir. Fack ve ark. 1987 tarihli "Some finite difference methods for computing eigenvalues and eigenvectors of special two-point boundary value problems" başlıklı makalelerinde

$$y' + (a - p(x))y = 0, \quad p(x) = p(-x)$$

diferansiyel denklemi için iki noktalı sınır değer problemlerinin özdeğerlerini ve özvektörlerini hesaplamak için doğrudan sayısal entegrasyon yöntemleri tartışılmıştır. Elde edilen sonuçlar önceden türetilen sayısal verilerle ve mevcut kesin değerlerle karşılaştırılmıştır.

Katti ve ark. (1996) tarihli ve "On the convergence of finite difference methods for a class of two-point boundary value problems with periodic boundary conditions" başlıklı makalelerinde,

$$y'' + f(x, y) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = y(1), \quad y'(0) = y'(1)$$

biçiminde sınır değer problemleri için üç noktalı iki parametrelili bir sonlu fark yöntemleri ailesinin (f'nin bir değerlendirmesine dayalı) ayrıntılı bir yakınsama analizi sunulmuştur.

Gebeily ve Abu-Zaid (1998) tarihli "On a finite difference method for singular two-point boundary value problems" başlıklı makalelerinde yazarların amacı,

$$\begin{aligned}\frac{1}{w(x)}(p(x)y')' + q(x)y(x) &= f(x), \quad x \in (0, 1) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} p(x)y'(x) &= 0 \\ y(1) &= 0\end{aligned}$$

tipinde olan ikinci mertebeden iki noktalı sınır değer problemlerinin çözümü için sonlu farklar yöntemi uygulanmıştır ve tek tip normda yöntemin yakınsama oranını elde ederek yakınsama hızının verilerin özelliklerine bağımlılığını göstermiştir.

Kumar (2002), "A three-point finite difference method for a class of singular two-point boundary value problems" makalesinde tekil iki noktalı sınır değer problemlerini çözmek için tek tip ağa dayalı üç noktalı sonlu farklar yöntemini araştırmıştır. Bu çalışmada

$$y'' + xy' + f(xy) = 0, \quad 0 < x \leq 1, \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = a$$

biçimindeki sınır değer problemi için $-\infty < \frac{\partial f}{\partial y} < 4$ koşulu altında mevcut yöntemin $o(h^2)$ yakınsak yaklaşımları sağladığını gösterilmiştir.

Kumar (2003), "A new finite difference method for a class of singular two-point boundary value problems" başlıklı makalesinde

$$\begin{aligned}(x^\alpha y')' &= f(x, y) \\ y(0) = A, \quad y(1) &= B, \quad 0 < \alpha < 1\end{aligned}$$

tekil iki noktalı sınır değer problemi sınıfı için tek tip ağa dayalı yeni bir üç noktalı sonlu fark yöntemi sunmuştur. Ayrıca bu çalışmada üniform ağa dayalı yöntemin $o(h^4)$ yakınsak yaklaşımlar sağladığı gösterilmiştir.

Singh (2008), "On the convergence of second-order finite difference method for weakly regular singular boundary value problems" makalesinde 1985 yılında Chawla

ve Katti tarafından geliştirilen ikinci mertebeden sonlu farklar yöntemi uygulanarak

$$(p(x)y')' = f(x, y), \quad 0 < x \leq 1$$

biçiminde verilen diferansiyel denklemin $p(x) = x^{b_0}$, $0 \leq b_0 < 1$ özel durumunu

$$y(0) = A, \quad y(1) = B$$

veya

$$y(0) = A, \quad \alpha y(1) + \beta y'(1) = \gamma$$

sınır koşulları altında incelemiştir ve genel negatif olmayan $p(x)$ fonksiyonu için ve oldukça genel koşulları sağlayan $f(x, y)$ fonksiyonları için yöntemin ikinci dereceden yakınsaklığı gösterilmiştir.

Son yıllarda geçiş şartları içeren sınır değer problemlerine ilgi daha da artmıştır. Mukhtarov ve Yakubov (2002) "Problems for Ordinary Differential Equations with Transmission Conditions" makalesinde yazarlar ağırlıklı Sobolev uzaylarında diferansiyel operatör denklemi için sınır değer geçiş problemlerinin bazı spektral özelliklerini araştırdılar.

Mukhtarov ve Aydemir (2015), "Eigenfunction expansion for Sturm-Liouville problems with transmission conditions at one interior point" makalesinde sınır koşulları ve iki tamamlayıcı geçiş şartı ile birlikte bir Sturm-Liouville denkleminde oluşan özel tip süreksiz sınır-değer probleminin özfonksiyonlarının tamlık özellikleri incelenmiştir.

Olğar ve Mukhtarov (2017) "Weak eigenfunctions of two-interval Sturm-Liouville problems together with interaction conditions" başlıklı makalelerinde geçiş şartları ile birlikte iki ayrı aralıkta bir Sturm-Liouville denkleminde ve özdeğer parametresine bağlı sınır koşullarından oluşan yeni tip bir sınır-değer probleminin zayıf çözümlerini incelemişler.

Allahverdiev ve Tuna (2019) "Eigenfunction expansion for singular Sturm-Liouville problems with transmission conditions" başlıklı makalelerinde geçiş şartı içeren tekil bir Sturm-Liouville problemi için bir spektral fonksiyonun varlığını göstermişler.

Son yıllarda Sonlu Farklar Metodunun geçiş şartları içeren iki aralıklı sınır-değer problemlerinin yaklaşık çözümlerini bulmak için uygulanması Mukhtarov ve Çavuşoğlu tarafından çalışılmaya başlanmıştır. Mukhtarov ve ark. (2019) "Numerical Solution of One Boundary Value Problem Using Finite Difference Method" başlıklı makalelerinde geçiş şartları içeren sınır değer problemlerinin SFM ile çözümünü çalışmışlar daha sonraki yıllarda ise Çavuşoğlu ve ark. (2021) "Finite difference method for approximate solution of a boundary value problem with interior singular point", Mukhtarov ve ark. (2021) "Development of the Finite Difference Method to solve a new type Sturm-Liouville problems", Cavusoglu ve Mukhtarov (2021) "A new finite difference method for computing approximate solutions of boundary value problems including transition conditions", Cavusoglu ve Mukhtarov (2022) "Modified Finite Difference Method for Solution of Two-interval Boundary Value Problems with Transition Conditions", Cavusoglu ve Mukhtarov (2022) "A New treatment of the finite difference method for 2-Interval Sturm-Liouville problems", Cavusoglu ve Mukhtarov (2022) "Generalized Finite Difference Method for solving two-interval Sturm-Liouville problems with jump conditions" başlıklı makalelerinde iki aralıklı, bir tekil noktaya sahip, geçiş şartları içeren süreksiz sınır değer problemlerinin SFM ile çözümünü araştırmışlardır.

3. MATRİSLERLE İLGİLİ TEMEL TANIM ve KAVRAMLAR

Diferansiyel denklemler sonlu yaklaşımları ile lineer denklem sistemine, yani matris denkleme dönüştürülür. Sonlu fark denklemlerinin yakınsaklık, kararlılık ve stabilite analizlerinde özel matrislerden faydaniılmaktadır.

Tez çalışmamızın bu bölümünde bu matris türlerinden ve çözümünü aradığımız özel sınır değeri problemlerinin tanımlarından kısaca bahsedeceğiz.

3.1. Katsayılar Matrisi

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1N}x_N &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2N}x_N &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3N}x_N &= b_3 \\ &\dots \\ a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + a_{N3}x_3 + \dots + a_{NN}x_N &= b_N \end{aligned}$$

Bu, n tane $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ bilinmeyenli denklem sistemidir. a_{ij} ve b_i öğelerinin gerçekte sayılar olduğu varsayılır. Matrisler, denklem sistemlerini temsil etmek için kullanışlı araçlardır. Böylece, yukarıdaki lineer denklem sistemi şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2N} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}$$

Sonra bu matrisleri sırasıyla A , x ve b ile gösterirsek denklem basitçe $Ax = b$ biçiminde yazılır.

3.2. Simetrik Matris

Eğer bir $A = (a_{i,j})$ matrisi $A^T = A$ şartını sağlıyorsa bu matrise simetrik matris denir. Burada A^T matrisi A 'nın transpoze matrisi diye adlandırılır ve $A^T = (a_{j,i})$ eşitliği ile tanımlanır.

3.3. Pozitif Tanımlı Matris

Her sıfırdan farklı x vektörü için

$$x^T A x > 0$$

şartı sağlanıyorsa A matrisi pozitif tanımlıdır denir. Ayrıca

$$x^T A x = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} x_i x_j$$

ifadesi ise quadratic form olarak adlandırılır (Kincaid ve ark., 2009).

3.4. Regüler Matris

Bir A kare matrisi için $\det A \neq 0$ şartı sağlanıyorsa A matrisi regüler matris olarak adlandırılır. Her regüler matrisin tersi mevcuttur (Kincaid ve ark., 2009).

3.5. Tridiagonal Matris

Uygulamalarda, genellikle katsayı matrisinin özel bir yapıya sahip olduğu denklem sistemleri ortaya çıkar. Bu sistemleri özgü algoritmalar kullanarak çözmek genellikle daha iyidir. Bunun bir örneğini, tridiagonal matrisi tanımlayalım.

Tanım 3.5.1. $A = (a_{ij})$ kare matrisinin, $|i - j| > 1$ 'i sağlayan tüm (i, j) çiftleri için $a_{ij} = 0$ ise bu matrise tridiagonal matris denir.

Böylece, i . satırda sadece $a_{i,i-1}$, $a_{i,i}$ ve $a_{i,i+1}$ 0'dan farklı olabilir (Kincaid ve ark., 2009).

Tridiagonal bir A matrisi açık olarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{N-2,N-2} & a_{N-2,N-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{N-1,N-2} & a_{N-1,N-1} & a_{N-1,N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{N,N-1} & a_{N,N} \end{pmatrix}$$

3.6. M-matris

Tanım 3.6.1. (M-matris) Bir $A = (a_{ij}) \in R^{N \times N}$ matrisi verilsin. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa A 'ya M-matris denir.

- $i \neq j$ için $a_{ij} \leq 0$
- A^{-1} ters matrisi mevcuttur
- $A^{-1} \geq 0$

Lemma 3.6.2. $A = (a_{ij}) \in R^{N \times N}$ matrisi bir M matris olsun. O halde her $i = 1, 2, \dots, N$ için $a_{ii} > 0$ sağlanır.

Teorem 3.6.3. (M-Matris kriteri) $i \neq j$ için $a_{ij} \leq 0$ olan $A = (a_{ij}) \in R^{N \times N}$ kare matrisini alalım. Bu durumda A 'nın M-matris olması için gerek ve yeter koşul $Ae > 0$ olacak biçimde $e > 0$ vektörünün mevcut olmasıdır. Bu durumda,

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{\|e\|_{\infty}}{\min_k (Ae)_k}$$

eşitsizliği sağlanır (Volker, 2021).

3.7. Matrisin Özdeğerleri

$\lambda \in \mathbb{C}$ kompleks sayısı ve $n \times n$ tipinde A matrisi verilsin.

$$Ax = \lambda x, \quad x \in \mathbb{C}^n$$

eşitliğini sağlayan $x \neq \theta$ vektörü mevcut ise o halde λ kompleks sayısına A matrisinin özdeğerleri denir ve bu durumda x 'e, A matrisinin λ özdeğerine uygun özvektörü denir (Ascher ve ark., 1994).

Biliyoruz ki, eğer A kendine-eşlenik (veya Hermityen) bir matris ise, o zaman

- A 'nın özdeğerlerinin tümü gerçektir.
- Farklı özdeğerlere karşılık gelen özvektörleri diktir.
- A 'nın özvektörleri $\mathbb{C}^n$ 'nin bir tabanını oluşturur.

3.8. İkinci Mertebeden Adi Türevli Diferansiyel Denklemler

I reel aralığında tanımlı

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \quad (3.8.1)$$

ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemi ele alalım. Burada $a_0 \neq 0$, a_1 , a_2 ve f , I aralığında sürekli kompleks fonksiyonlardır. Eğer $f = 0$ oluyorsa bu denkleme homojen denklem değilse homojen olmayan denklem denir.

Eğer

$$a_0 \frac{d^2}{dx^2} + a_1 \frac{d}{dx} + a_2$$

ikinci mertebeden diferansiyel operatörünü L ile gösterirsek (3.8.1) denklemi

$$Ly = f$$

formunda yazılabilir.

L operatörü $\varphi, \psi \in C^{(2)}(I)$ ve $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$L(c_1\varphi + c_2\psi) = c_1L\varphi + c_2L\psi$$

şartını sağladığı için (3.8.1) denklemin lineer diferansiyel denklem denir. Aksi belirtilmedikçe, ele aldığımız tüm diferansiyel denklemler ve operatörlerin lineer olduğunu kabul edeceğiz.

Lineer homojen denklemlerin temel bir özelliği, denklemin çözümlerinin herhangi bir lineer birleşiminin de bir çözüm olmasıdır. Buna süperpozisyon ilkesi denir.

Şimdi (3.8.1) denkleminin tüm terimlerini a_0 'a bölersek, $q = \frac{a_1}{a_0}$, $r = \frac{a_2}{a_0}$ ve $g = \frac{f}{a_0}$ olmak üzere

$$y'' + q(x)y' + r(x)y = g(x) \quad (3.8.2)$$

denklemini elde edilir (Al-Gwaiz, 2008).

3.9. Regüler ve Singüler Diferansiyel Denklemler ve Singüler Nokta

Eğer her $x \in I$ için $a_0(x) \neq 0$ oluyorsa (3.8.1) denklemin I aralığında regüler denklem denir. Diğer taraftan en az bir $c \in I$ için $a_0(c) = 0$ oluyorsa (3.8.1) denklemin singüler denklem denir.

Ayrıca burada $c \in I$ noktasına ise denklemin singüler (tekil) noktası denir (Al-Gwaiz, 2008).

3.10. Başlangıç Değer Problemi

Lineer denklemler için varlık ve teklik teoremine göre, eğer q, r ve g fonksiyonlarının tümü I aralığı üzerinde sürekli ise ve $x_0 \in I$ da bir nokta ise, o zaman herhangi iki ξ ve η sayısı için, (3.8.2) denkleminin

$$y(x_0) = \xi, \quad y'(x_0) = \eta \quad (3.10.1)$$

koşullarını sağlayan çözümünü bulma problemine başlangıç-değer problemi denir. (3.8.2) denklemi homojen olsun (yani $g = 0$) ve de bu homojen denklemin $I = [a, b]$ aralığında lineer bağımsız iki çözümü y_1 ve y_2 olsun. Bu iki çözümün lineer birleşimi, yani

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad (3.10.2)$$

ifadesine c_1 ve c_2 keyfi sabitler olduğunda, (3.8.2)'ün genel çözümü denir. $c_1 = c_2 = 0$ olduğunda, homojen denklemin bir çözümü olan $y = 0$ 'ı elde ederiz. Bu çözüme de trivial(aşık) çözüm denir. Eğer (3.10.1) başlangıç değerlerinde $\xi = \eta = 0$ alınırsa teklik teoremine göre trivial çözüm tek çözümdür.

Eğer $y_p(x)$, homojen olmayan (3.8.2) denkleminin herhangi bir özel çözümü ise, o zaman

$$y = y_p(x) + c_1 y_1 + c_2 y_2$$

(3.8.2)'nin genel çözümüdür (Al-Gwaiz, 2008).

3.11. Sınır Değer Problemi

(3.8.2) denkleminin, $I = [a, b]$ aralığının a ve b uç noktalarında

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) + \alpha_3 y(b) + \alpha_4 y'(b) &= \xi, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) + \beta_3 y(a) + \beta_4 y'(a) &= \eta \end{aligned} \quad (3.11.1)$$

biçiminde şartlarını sağlayan çözümlerinin aranması problemine sınır-değer problemi denir. Burada α_i ve β_i , $\sum_{i=1}^4 |\alpha_i| > 0$ ve $\sum_{i=1}^4 |\beta_i| > 0$ koşullarının sağlayan sabitlerdir.

(3.11.1) sınır koşulları $\xi = \eta = 0$ oluyorsa homojen, $\alpha_3 = \alpha_4 = \beta_3 = \beta_4 = 0$ oluyorsa ayrılmış sınır koşulları adını alır.

(3.11.1)'deki katsayıların özel bir seçiminden elde edilen bir diğer önemli homojen koşul çifti,

$$y(a) = y(b), \quad y'(a) = y'(b), \quad (3.11.2)$$

ile verilir. Bu özel sınır koşulu periyodik sınır koşulları olarak adlandırılır (Al-Gwaiz, 2008).

3.12. Sınır Değer Koşulları

Literatürde genel olarak aşağıdaki biçimdeki sınır koşulları daha yaygın olarak araştırılmıştır.

- Dirichlet Sınır Koşulu:

$$y(a) = A$$

$$y(b) = B$$

biçimdeki sınır koşullarına Dirichlet Sınır Koşulları denir.

- Neumann Sınır Koşulu:

$$y'(a) = \alpha$$

$$y'(b) = \beta$$

biçimdeki sınır koşullarına Neumann Sınır Koşulu denir.

- Robin Sınır Koşulu:

$$\chi_1 y(a) + \chi_2 y'(a) = A_\alpha$$

$$\chi_1 y(b) + \chi_2 y'(b) = A_\beta$$

biçimdeki sınır koşullarına Robin Sınır Koşulu denir.

Dirichlet, Neumann ve Robin sırasıyla birinci tip, ikinci tip ve üçüncü tip sınır koşulu olarak da adlandırılır.

- Karışık Sınır Koşulu:

Karışık sınır koşulu, sınırın bazı bölümlerinde Dirichlet sınır koşullarının öngörüldüğü, diğerlerinde Neumann sınır koşullarının mevcut olduğu durumları ifade eder. Buna göre tipik bir karma sınır koşulu

$$y(a) = A$$

$$y'(b) = \beta$$

biçimindedir.

- Cauchy Sınır Koşulu:

Genelde Cauchy sınır koşulları, verilen bir noktada y fonksiyonunun değeri ve y' türevinin değerinin belirlenebildiği ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerde kullanılır:

$$y(a) = A$$

$$y'(a) = \alpha$$

Burada a bir sınır veya başlangıç noktasıdır.

3.13. Normlu Uzay/Vektör Normu

Tanım 3.13.1. V reel ya da karmaşık vektör uzayı, $v, w \in V$ ve α sabit olsun. O zaman bir norm, aşağıdaki özelliklerle $\| \cdot \|$ ile gösterilen V üzerinde tanımlanan gerçek değerli bir fonksiyondur. Her $v, w \in V$ için

(i) $\| v \| > 0$, $v \neq 0$ ise

(ii) $\| \alpha v \| = |\alpha| \| v \|$, $\alpha \in \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$

(iii) $\| v + w \| \leq \| v \| + \| w \|$

koşullarını sağlayan $\| \cdot \|$ fonksiyonuna V uzayı üzerinde bir norm ve $(V, \| \cdot \|)$ ikilisine ise normlu uzay denir.

$\mathbb{R}^n$ veya $\mathbb{C}^n$ -de tanımlı

$$\| x \|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1 \quad (3.13.1)$$

normuna p-norm denir. Özel olarak $p = 1$ için

$$\| x \|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad (3.13.2)$$

normuna 1-norm ve $p = 2$ için

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.13.3)$$

normuna ise Öklidyen veya 2-norm denir. Ayrıca

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad (3.13.4)$$

normuna da maksimum norm denir (Ascher ve ark., 1994).

3.14. Sturm-Liouville Denklemleri

L operatörü

$$Ly := \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y$$

biçiminde olmak üzere, λ parametresine bağımlı

$$Lu + \lambda \rho(x)u = 0, \quad x \in (a, b)$$

diferansiyel denklemden ve

$$\begin{aligned} \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) &= 0, \quad |\alpha_1| + |\alpha_2| > 0 \\ \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) &= 0, \quad |\beta_1| + |\beta_2| > 0 \end{aligned}$$

biçiminde sınır koşullarından oluşan probleme Sturm-Liouville problemi denir. Burada $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ ve β_2 reel sayılardır.

Genelde $p(x)$ fonksiyonu sürekli diferansiyellenebilir, $q(x)$ ve $\rho(x)$ reel değerli sürekli fonksiyonlar olarak kabul edilir, ayrıca $\forall x \in [a, b]$ için $p(x) \neq 0$, $\rho(x) \neq 0$ olduğu da kabul edilir. Bu şartlar sağlandığı durumda verilmiş Sturm-Liouville problemine Regüler Sturm-Liouville problemi denir. Regüler olmayan Sturm-Liouville problemlerine ise Singüler Sturm-Liouville problemi denir. λ parametresi ise

kompleks sayıdır. Bu parametreye spektral parametre veya özdeğer parametresi denir (Al-Gwaiz, 2008).



4. STANDART SONLU FARKLAR METODU

Bu bölümde, Sonlu Farklar Metodu ile ilgili olan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

4.1. Birinci Türevin Sonlu Fark Yaklaşımı

Sonlu farklar yöntemi, aralığı sonlu alt aralıklara bölerek ve iç düğüm noktalarındaki türev ifadelerini uygun farklarla değiştirerek diferansiyel denklemin cebirsel denklemler sistemine dönüştürülmesine dayanır. Bu sonlu bir cebirsel denklem sistemi verir. Yaklaşık çözüm ile gerçek çözüm arasındaki hata, diferansiyel operatörden fark operatörüne gidilerek yapılan hata ile belirlenir. Bu hataya ayırıklaştırma hatası veya kesme hatası denir. Kesme hatası terimi, yaklaşımda bir Taylor serisinin sonlu bir bölümünün kullanıldığı anlamında kullanılır.

Herhangi bir sonlu fark şemasının temelindeki ana kavram, bir $x \in \mathbb{R}$ noktasında diferansiyellenebilir bir y fonksiyonunun türevinin tanımı ile ilgilidir.

$$y'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

olduğu için ve h , 0'a yaklaştığında sağ taraftaki $\frac{y(x+h)-y(x)}{h}$ türev için iyi bir yaklaşım sağladığı görülür. Aslında, bu yaklaşımda yapılan hata h sıfıra yaklaştığında azalır. Eğer y fonksiyonu x 'in komşuluğunda yeterince düzgünse, bu hatayı bir Taylor açılımı kullanarak ölçmek mümkündür.

Teorem 4.1.1. (Taylor Serisi) y fonksiyonunun x civarında ikinci mertebeden sürekli türevlenebilir olduğunu varsayalım. O halde $h \rightarrow 0$ için

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + o(h^2) \quad (4.1.1)$$

asimptotik eşitliği sağlanır.

Burada $o(h^2)$ terimi, yaklaşım hatasının h^2 ile orantılı olduğunu gösterir.

(4.1.1) eşitliği gereği x_0 noktasının yeterince küçük $(x_0, x_0 + h)$ sağ komşuluğu için

öyle bir $C > 0$ sayısı mevcuttur ki, $\forall x \in (x_0, x_0 + h)$ için

$$\left| \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - y'(x) \right| \leq Ch$$

eşitsizliği sağlanır. Benzer şekilde, x noktasında y' nün birinci dereceden geriye doğru fark yaklaşımı şöyle tanımlayabiliriz:

$h > 0$ olmak üzere $h \rightarrow 0$ için

$$y(x-h) = y(x) - hy'(x) + o(h^2)$$

eşitliği gereği x_0 noktasının yeterince küçük $(x_0 - h, x_0)$ sol komşuluğu için öyle bir $C > 0$ sayısı mevcuttur ki, $\forall x \in (x_0 - h, x_0)$ için

$$\left| \frac{y(x-h) - y(x)}{h} - y'(x) \right| \leq Ch$$

eşitsizliği sağlanır.

Yaklaşımın doğruluğunu artırmak için, $x-h$ ve $x+h$ noktalarını hesaba katarak, merkezi fark yaklaşımı adı verilen tutarlı bir yaklaşım da tanımlanabilir. y fonksiyonunun x civarında üçüncü mertebeden sürekli türevlenebilir olduğunu varsayalım. O halde

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \frac{h^3}{6}y'''(\xi^+)$$

$$y(x-h) = y(x) - hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) - \frac{h^3}{6}y'''(\xi^-)$$

eşitlikleri en az bir $\xi^+ \in [x, x+h]$ ve en az bir $\xi^- \in [x-h, x]$ için sağlanır. Bu iki ifadeyi taraf tarafa çıkarırsak

$$\frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} = y'(x) + \frac{h^2}{6}y'''(\xi)$$

eşitliğini elde ederiz. Burada $\xi \in [x-h, x+h]$. Böylece yeteri kadar küçük $h_0 > 0$ ve her $h \in [0, h_0]$ için

$$C = \sup_{s \in [x, x+h_0]} \frac{|y'''(s)|}{6}$$

olmak üzere

$$\left| \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} - y'(x) \right| \leq Ch^2$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise y' için ikinci dereceden hassas bir yaklaşım tanımlar.

Uyarı 4.1.2. Yaklaşımın mertebesi y fonksiyonunun düzgünlüğü ile ilgilidir. Eğer y fonksiyonu ikinci mertebeden türevlenebilir $y \in C^2[x-h, x+h]$ ise, o zaman yaklaşım sadece birinci mertebeden "hassas"tır, $y \in C^3[x-h, x+h]$ olduğunda ise yaklaşım ikinci dereceden "hassas" olur (Frey, 2008).

4.2. İkinci Türevin Sonlu Fark Yaklaşımı

Lemma 4.2.1. y 'nin $[x, x+h_0]$, aralığında dördüncü mertebeden sürekli türevlenebilir bir fonksiyon ($y \in C^4[x, x+h_0]$) olduğunu varsayalım. O halde, her $h \in [0, h_0]$ için öyle bir $C > 0$ sabiti vardır, öyle ki:

$$\left| \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} - y''(x) \right| \leq Ch^2. \quad (4.2.1)$$

eşitsizliği sağlanır. $\frac{y(x+h)-2y(x)+y(x-h)}{h^2}$ diferansiyel oranı, x noktasında y 'nin ikinci türevinin ikinci dereceden bir yaklaşımıdır.

İspat. Sonucu elde etmek için Taylor açılımlarından elde edilen

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \frac{h^3}{6}y'''(x) + \frac{h^4}{24}y^{(4)}(\xi^+)$$

$$y(x-h) = y(x) - hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) - \frac{h^3}{6}y'''(x) + \frac{h^4}{24}y^{(4)}(\xi^-)$$

formüllerinden yararlanılır. Burada $\xi^+ \in [x, x+h]$ ve $\xi^- \in [x-h, x]$ 'dir. Son iki eşitlikten

$$\frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} = y''(x) + \frac{h^2}{12}y^{(4)}(\xi)$$

eşitliği elde edilir. Burada $\xi \in [x-h, x+h]$ 'dir.

Böylece (4.2.1) eşitsizliğinden C sabiti

$$C = \sup_{s \in [x-h_0, x+h_0]} \frac{|y^{(4)}(s)|}{12}$$

biçiminde elde edilmiş oldu. $\square$

Uyarı 4.2.2. Hata tahmini, y fonksiyonunun düzgünlüğüne bağlıdır. Eğer y fonksiyonu üçüncü mertebeden sürekli türevlenebilir ise, o zaman hata yalnızca h düzeyindedir (Frey, 2008).

4.3. İkinci Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler için Sonlu Fark Yöntemi

$[a, b]$ aralığında tanımlı

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad x \in [a, b] \quad (4.3.1)$$

biçiminde ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemden ve $x = a$ ve $x = b$ uç noktalarında verilen

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \quad (4.3.2)$$

sınır koşullarından oluşan sınır değer problemini gözönüne alalım. Burada $p(x)$, $q(x)$ ve $f(x)$ $[a, b]$ üzerinde tanımlı ve sürekli fonksiyonlardır. α, β reel sabitlerdir. Bu problem için tek tip bir ağ üzerinde basit bir fark şeması gösterelim.

(4.3.1), (4.3.2) problemini ayırıklaştırmak için, $[a, b]$ tanım aralığı $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{N-1}, x_N]$ biçiminde N tane eşit aralığa bölünür.

$$[a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_{N-1}, x_N] \quad (4.3.3)$$

biçiminde yazılır. Burada

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b, \quad x_i = a + ih, \quad h = \frac{b-a}{N} \quad (4.3.4)$$

biçiminde ifade edilir. Taylor serisini açılımından,

$$y(x_i + h) = y(x_i) + y'(x_i)h + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \dots$$

y çözümünün x noktasındaki türevleri için

$$D_+y(x) \approx \frac{y(x_i + h) - y(x_i)}{h}$$

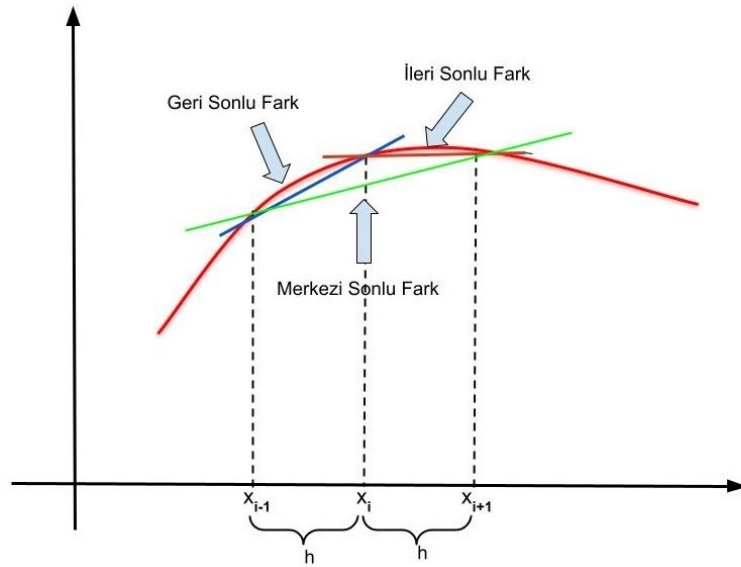
ileri sonlu fark yaklaşımı,

$$D_-y(x) \approx \frac{y(x_i) - y(x_i - h)}{h}$$

geri sonlu fark yaklaşımı ve

$$D_0y(x) \approx \frac{y(x_i + h) - y(x_i - h)}{2h}$$

merkezi sonlu fark (MSF) yaklaşımı gibi farklı sonlu fark yaklaşımlarından yararlanılır (bakınız Şekil.4.1).



Şekil. 4.1: Birinci mertebeden türevin sonlu fark yaklaşımları

(4.3.1), (4.3.2) sınır değer probleminde birinci ve ikinci türev ifadelerinin yerine

$$y'(x) \approx \frac{1}{2} (D_+y(x) + D_-y(x)) = \frac{y(x_i + h) - y(x_i - h)}{2h} \quad (4.3.5)$$

ve

$$y''(x) \approx \frac{1}{h} (D_+ y(x) - D_- y(x)) = \frac{y(x_i + h) - 2y(x_i) + y(x_i - h))}{h^2} \quad (4.3.6)$$

biçiminde sonlu fark yaklaşımlarını yazalım. Tüm $x_0, x_1, \dots, x_N$ grid noktalarında $y(x)$ için sonlu fark çözümünü $y_i = y(x_i)$ ile tanımlayalım ve (4.3.1), (4.3.2) sınır değer probleminde (4.3.5) ve (4.3.6) ifadelerini yerine yazarsak

$$\begin{aligned} \frac{y(x_i + h) - 2y(x_i) + y(x_i - h))}{h^2} + p(x_i) \frac{y(x_i + h) - y(x_i - h))}{2h} + \\ + q(x_i)y(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N - 1 \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

eşitliklerini elde ederiz. $y_i = y(x_i)$ gösteriminden yararlanırsak

$$\begin{aligned} \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p(x_i) \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q(x_i)y_i = f(x_i), \\ i = 1, 2, \dots, N - 1 \end{aligned}$$

yazabiliriz. Böylece $y_0, y_1, y_2, \dots, y_N$ değişkenlerine göre aşağıdaki lineer cebirsel denklem sistemini elde ederiz.

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2}hp_i\right) y_{i-1} + (-2 + h^2q_i) y_i + \left(1 + \frac{1}{2}hp_i\right) y_{i+1} = h^2 f(x_i) \\ i = 1, 2, 3, \dots, N - 1. \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

(4.3.2) sınır şartlarından

$$y_0 = \alpha, \quad y_N = \beta$$

eşitliklerini buluruz.

(4.3.8) sistemindeki her bir denklem x_{i-1} , x_i ve x_{i+1} olmak üzere üç düğüm noktasındaki çözüm değerlerini içerir.

Elde edilen bu lineer cebirsel denklem sistemi

$$AY = B \quad (4.3.9)$$

biçiminde matris formunda yazılabilir. Burada A matrisi

$$A = \begin{pmatrix} -2 + h^2 q_1 & 1 + \frac{1}{2} h p_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 - \frac{1}{2} h p_2 & -2 + h^2 q_2 & 1 + \frac{1}{2} h p_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 + \frac{1}{2} h p_{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 - \frac{1}{2} h p_{N-1} & -2 + h^2 q_{N-1} \end{pmatrix}$$

biçiminde $(N-1) \times (N-1)$ boyutunda tridiagonal matristir. Y ile B vektörleri ise

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{pmatrix}_{(N-1) \times 1} \quad \text{ve} \quad B = \begin{pmatrix} h^2 f(x_1) - \left(1 - \frac{1}{2} h p_1\right) \alpha \\ h^2 f(x_2) \\ h^2 f(x_3) \\ \vdots \\ h^2 f(x_{N-2}) \\ h^2 f(x_{N-1}) - \left(1 - \frac{1}{2} h p_1\right) \beta \end{pmatrix}_{(N-1) \times 1}.$$

biçimdedirler. (4.3.9) cebirsel lineer denklem sistemi tridiagonaldir ve Crout veya Cholesky algoritması ile çözülebilir (Burden ve Faires, 1997).

4.4. İkinci Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemlerin Liouville Normal Formu

İlk olarak, Sturm-Liouville probleminin en basit biçimini, yani

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \quad (4.4.1)$$

denklemini ele alalım. Bu denklem Liouville Normal Formu diye adlandırılır. Bu denklemi $y(a) = y(b) = 0$ sınır koşulları ile alalım.

4.5. Metot A: Temel Merkezi Farklar

Temel yöntemde

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$$

olmak üzere

$$x_i = a + ih \quad \text{ve} \quad h = \frac{b-a}{N}$$

biçimindedir.

Eğer $u_i = u(x_i)$, $q_i = q(x_i)$ ve $u_i'' = u''(x_i)$ gösterimlerinden yararlanırsak

$$-u_i'' \approx \frac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h^2}$$

yaklaşık eşitliğini elde ederiz. Sonlu fark kullanılırsa (4.4.1) denkleminde

$$\frac{-U_{i-1} + 2U_i - U_{i+1}}{h^2} + q_i U_i = \lambda U_i, \quad (i = 1, 2, \dots, N-1) \quad (4.5.1)$$

sonlu fark denklemi elde edilir. Burada kullandığımız U_i , denklemin gerçek çözümü olan u_i 'ye karşılık gelen sonlu fark şemasının çözümüne karşılık gelmektedir. $U_0 = 0$, $U_N = 0$ sınır koşullarının da dahil edilmesi ile (4.5.1) denklemler sistemi

$$KU = \lambda U \quad (4.5.2)$$

matris formunda yazılır. Burada

$$K = \frac{1}{h^2}T + Q \quad (4.5.3)$$

$$U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{N-1} \end{pmatrix} \quad (4.5.4)$$

ve

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ ve } Q = \begin{pmatrix} q_1 & & & & \\ & q_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & q_{N-1} \end{pmatrix} \quad (4.5.5)$$

Böylece (4.4.1)'in özdeğerleri ve özfonksiyonlarına K matrisinin özdeğerleri ve özvektörleri ile yaklaşılır.

Teorem 4.5.1. (4.4.1)'in k . özdeğerini λ_k , K matrisinin k . özdeğerini $\Lambda_k^{(N)}$ ile gösterelim. O halde sadece q fonksiyonuna bağlı öyle bir C sabiti vardır ki

$$|\lambda_k - \Lambda_k^{(N)}| \leq Ck^4h^2, \quad (k = 1, 2, \dots, N-1)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. İspat, Keller yakınsama teoreminden kolayca elde edilir (Pryce, 1993). $\square$

4.6. Metot B: Numerov Yöntemi

Numerov'un (veya Cowell'in) yöntemi, sabit adım boyutlu bir ağ içindir. Bu, (4.4.1) biçimindeki diferansiyel denklemler için geçerli olan, örtük fark düzeltmenin

dördüncü dereceden bir yöntemidir. Bu durumda

$$\begin{aligned} & \frac{-U_{i-1} + 2U_i - U_{i+1}}{h^2} + (q_i - \lambda)U_i = \\ & = \frac{1}{12}[-(q_{i-1} - \lambda)U_{i-1} + 2(q_i - \lambda)U_i - (q_{i+1} - \lambda)U_{i+1}], \\ & i = 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (4.6.1)$$

denklemleri elde edilir. $y(a) = y(b) = 0$ sınır koşullarından $U_0 = U_N = 0$ olarak bulunur. O halde

$$KU = \lambda MU \quad (4.6.2)$$

biçiminde matris-denklemler bulunur. Burada

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{h^2}T + MQ \\ M &= I - \frac{1}{12}T \end{aligned}$$

ve T ve Q , (4.5.5) ile tanımlı matrisleridir. Burada M simetrik pozitif tanımlı olmasıyla birlikte K ve M tridiagonaldır. Sabit k için elde edilen özdeğerler için $o(h^4)$ yaklaşımı elde edilir. Ancak K genellikle simetrik değildir, bu da çözüm sürecini biraz yavaşlatır. Bununla birlikte, T ve M değişmeli ve Q köşegen olduğundan, problem simetrik fakat seyrek olmayan

$$M^{-1}KU = \lambda U \quad (4.6.3)$$

problemine eşdeğerdir ve özdeğerleri bulmak için (4.6.2) sıradan özdeğer probleminde olduğu kadar verimli bir şekilde bundan faydalanılabilir (Pryce, 1993).

4.7. Sturm - Liouville Denklemleri için Yakınsama Teorisi

Sonlu fark yöntemleri, bir Sturm-Liouville problemini

$$KU = \Lambda MU \quad (4.7.1)$$

biçiminde matris özdeğer problemine indirger. Adım aralığı h sıfıra yaklaşırken ($h \rightarrow 0$) ayrık çözümün nasıl gerçek çözüme yakınsadığının analizi, kesme hatalarına dayanır. Aşağıdaki H.B. Keller yakınsama teoremi gereği, eğer kesme hataları küçükse, o zaman K ve M 'nin doğru biçimde olması koşuluyla iyi bir özdeğer yaklaşımına ulaşılabilir (Pryce, 1993).

Teorem 4.7.1. K, M simetrik ve M pozitif tanımlı matrisler olmak üzere, Sturm-Liouville Problemi, (4.7.1) matris özdeğer problemi denklemiyle yakınlaştırılsın. O zaman, u özfonksiyonuna karşılık gelen gerçek problemin her bir λ özdeğeri için, (4.7.1) matris özdeğer problemi mevcuttur ki

$$|\lambda - \Lambda| \leq \frac{\|M^{-1}\|_2 \|r\|_2}{\|u\|_2}$$

eşitsizliğini sağlayacak biçimde Λ özdeğeri mevcuttur. Burada u , u 'nun ağ noktalarındaki $u(x_i)$ değerlerinden oluşan vektör ve r ,

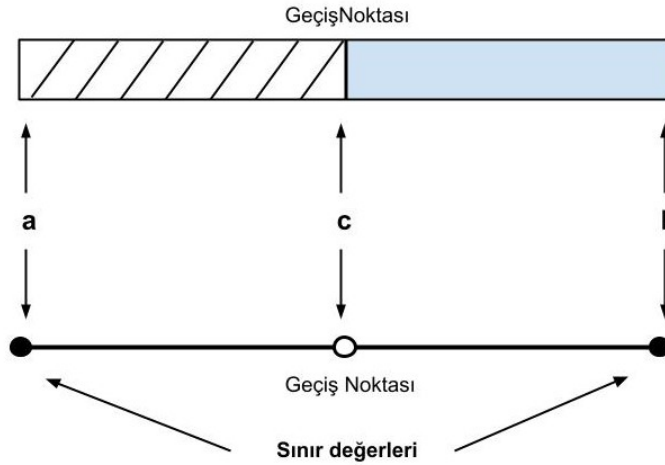
$$r = Ku - \lambda Mu$$

eşitliği ile tanımlı u 'nun kesme hatalarının vektörüdür. Ayrıca $\|r\|_2$ ve $\|u\|_2$ alışılmış Öklid vektör normudur. $\|M^{-1}\|$ ise M^{-1} 'in en büyük öz değerine karşılık gelen matris normudur (Keller, 1965).

5. GEÇİŞ ŞARTLARI İÇEREN SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN SONLU FARKLAR METODU İLE ÇÖZÜMÜ

Geçiş şartları, çözümlerin ve bunların türevlerinin iç noktalarda sol ve sağ sınırlarına dayatılır ve genellikle "geçiş şartları" veya "iletim koşulları" olarak adlandırılır. Bu tür problemler genellikle çeşitli fiziksel transfer problemlerinde ortaya çıkar. Geçiş şartlarına sahip sınır değer problemleri (SDP), modern teknoloji, mühendislik ve fiziğin ihtiyaçları nedeniyle son yıllarda önemli bir araştırma alanı haline gelmiştir. Özellikle ek geçiş şartlarını içeren klasik olmayan sınır değer problemleri, farklı dielektrik özelliklere sahip ferromanyetik ortamlarda, titreşen katlanmış zarlarda, elastik çoklu yapılardaki problemlerde, genel olarak ortamın düzgün olmayan veya süreksiz özellikleri ile ilişkili olan ısı ve kütle transferinde, mekanik sistemlerin titreşimlerinde vb. gibi fizikte karşılaşılan farklı problemlerin modellenmesinde sıklıkla görülür (bakınız Şekil.5.2).

Farklı levhaların birleşim noktası üzerinde temsili geçiş noktası



Şekil. 5.2: Geçiş şartlarının modellenmesi

Sınır-değer-geçiş probleminin çalışmasında karşılaşılan matematiksel problemlerin çoğu, standart sınır değer problem çerçevesi içinde standart tekniklerle çözülemez. Bu konuda kapsamlı literatür olmamasına rağmen, son yıllarda doğa bilimlerinin

çeşitli alanlarında ortaya çıkan yeni tip klasik olmayan diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerinin sonlu farklar yöntemi ile çözülmesine artan bir ilgi vardır.

Bu bölümde içerisinde tekil nokta ve bu nokta etrafında geçiş şartları barındıran iki aralıklı sınır değer problemlerinin sonlu farklar yöntemi ile sayısal çözümlerinin bulunması için geliştirdiğimiz algoritma ile algortimayı içeren yeni tip sonlu farklar yönteminden bahsedeceğiz.

5.1. Geçiş Koşullar İçeren Sınır Değer Problemi

Daha önce standart sonlu farklar yöntemiyle çözümünden bahsettiğimiz (4.3.1) ikinci mertebeden sınır değer problemini ele alalım. Burada (4.3.2) ifadesine sınır değer koşulları denildiği bilinmektedir.

Burada geçiş şartlarının tanımından bahsedeceğiz.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad x \in [a, c) \cup (c, b] \quad (5.1.1)$$

$x = a$ ve $x = b$ uç noktalarında sınır koşulları

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \quad (5.1.2)$$

biçiminde tanımlamıştık. $x = c$ tekil nokta olmak üzere $[a, b]$ tanım aralığının orta noktası v e $x \in [a, c) \cup (c, b]$ olarak tanımlarsak

$$y(c-0) = my(c+0), \quad y'(c-0) = ny'(c+0) \quad (5.1.3)$$

koşullarını geçiş koşulu olarak tanımlıyoruz. Burada $p(x)$, $q(x)$ ve $f(x)$, $[a, c) \cup (c, b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar $p(c \pm 0)$, $q(c \pm 0)$ and $f(c \pm 0)$ sonlu sınır değerleri ve α , β , m, n gerçel sabitlerdir.

$[a, b]$ tanım aralığı $x = c$ tekil noktaya göre $[a, c)$ ve $(c, b]$ biçiminde ayrık iki aralığa ayrılıyor. Burada $[a, c)$, $x = c$ noktasının sol aralığı $(c, b]$ sağ aralığı olarak adlandırılır.

$y(a)$ ve $y(c-0)$ sol aralığın uç noktaları, $y(b)$ ve $y(c+0)$ sağ aralığın uç noktalarıdır.

Sol aralıkta

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N < c,$$

$$x_i = a + ih, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N - 1 \quad (5.1.4)$$

$$h = \frac{c - a}{N}$$

grid noktaları elde edilir.

$y(x_i) = y_i$ olmak üzere, sonlu fark şeması yardımıyla

$$\left(1 - \frac{1}{2}hp_i\right)y_{i-1} + (-2 + h^2q_i)y_i + \left(1 + \frac{1}{2}hp_i\right)y_{i+1} = h^2f(x_i) \quad (5.1.5)$$

$$1 \leq i \leq N - 1, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N - 1.$$

cebirsal denklemleri ile

$$Ay = b_1$$

lineer cebirsal denklem sistemini elde ederiz. Burada A katsayılar matrisi $N \times N$ boyutunda tridiagonal matristir.

Benzer şekilde sağ aralıkta

$$c < x_{N+1} < x_{N+2} < \dots < x_{2N} = b, \quad (5.1.6)$$

$$x_i = c + ih, \quad i = N + 1, N + 2, \dots, 2N, \quad h = \frac{b - c}{N}$$

grid noktaları elde edilir.

$y(x_i) = y_i$ olmak üzere, sonlu fark şeması yardımıyla

$$\left(1 - \frac{1}{2}hp_i\right)y_{i-1} + (-2 + h^2q_i)y_i + \left(1 + \frac{1}{2}hp_i\right)y_{i+1} = h^2f(x_i) \quad (5.1.7)$$

$$N + 1 \leq i \leq 2N.$$

cebirsal denklemleri elde edilir. Böylece

$$By = b_2$$

lineer cebirsel denklem sistemini elde ederiz. Sağ taraf katsayılar matrisi B de $N \times N$ boyutunda tridiagonal matristir.

Şimdi ise $x = c$ singüler noktasındaki geçiş şartlarını inceleyelim.

$$y(c - 0) = my(c + 0) \quad (5.1.8)$$

geçiş koşulu için $x = c$ noktasının sağ ve solunda en yakın değerler alınarak

$$y(x_N) = my(x_{N+1}) \quad (5.1.9)$$

denklemini elde edilir. Ayrıca

$$y'(c - 0) = ny'(c + 0) \quad (5.1.10)$$

geçiş koşulu için birinci mertebeden türev için merkezi sonlu fark formülünü kullanarak

$$\frac{y(x_N) - y(x_{N-2})}{2h} = n \frac{y(x_{N+3}) - y(x_{N+1})}{2h} \quad (5.1.11)$$

ifadesi elde edilir. (5.1.9) ve (5.1.11) ifadelerini düzenleyerek

$$y_N - my_{N+1} = 0 \quad (5.1.12)$$

$$y_{N-2} - y_N - ny_{N+1} + ny_{N+3} = 0$$

olmak üzere

$$Gy = 0$$

biçiminde lineer denklem sistemi elde edilir. Sistemin katsayılar matrisi G , $2 \times N$ boyutunda bir matristir.

Son olarak (5.1.5), (5.1.7) ve (5.1.12) sonlu fark açılımlarından elde edilen A, B, G katsayılar matrisleri ile b_1, b_2 matrisleri uygun şekilde birleştirilerek

$$Ay = b \quad (5.1.13)$$

sistemi elde edilir. Elde edilen lineer denklem sistemi Matlab, Octave, Mathematica gibi matematik araçları yardımıyla çözülebilir.

Uyarı 5.1.1. Standart sonlu farklar yönteminde problemin tanım aralığı N aralığa bölündüğünde elde edilen denklem sisteminin katsayılar matrisi $(N - 1) \times (N - 1)$ boyutunda tridiagonal matris olacağı bilinmektedir. Ancak geliştirdiğimiz standart olmayan sonlu farklar yöntemimizde katsayılar matrisi $N \times N$ boyutunda olup tridiagonal matris değildir.



6. SONLU FARKLAR YÖNTEMİNİN TUTARLILIK, STABİLİTE, YAKINSAMA ve HATA ANALİZİ

Bir sınır değer problemini çözmek için Sonlu Farklar Metodu uygulandığında, sayısal çözümün kesin çözümle karşılaştırılması ve hatanın ne kadar küçük olduğunu bilmek çok önemlidir.

6.1. Yerel Kesme Hatası

Yerel kesme hataları, orijinal diferansiyel denklem ile grid noktalarındaki sonlu fark yaklaşımları arasındaki farkları ifade eder. Yani, yerel kesme hataları, sonlu fark yaklaşımının gerçek çözüme ne kadar iyi yaklaştığını ölçer.

$$y'' = f(x) \quad (6.1.1)$$

ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemini

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \quad (6.1.2)$$

sınır koşulları ile ele alalım. Sınır koşulları iki farklı noktada verildiğinden bu problem iki noktalı sınır değer problemi olarak adlandırılır. Ancak bu basit denklem için sonlu fark yöntemlerini incelemek, tüm bu tür analizlerin temel özelliklerinden bazılarını, özellikle global hatanın yerel kesme hatasıyla ilişkisini ve bu bağlantıyı kurarken kararlılığın kullanımını ortaya çıkaracaktır. $Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_N$ değerlerinden oluşan bir grid fonksiyonunu hesaplamaya çalışacağız. Burada $Y_i, y(x_i)$ çözümüne yaklaşımımızdır. (4.3.6) eşitliği (6.1.1) denkleminde yerine yazılarak

$$\frac{1}{h^2}(Y_{i-1} - 2Y_i + Y_{i+1}) = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (6.1.3)$$

elde edilir. $i = 1, 2, \dots, N-1$ değerleri ve (6.1.2) sınır koşulları (6.1.3) denkleminde yazılarak

$$AY = B \quad (6.1.4)$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Burada $Y = [Y_1, Y_2, \dots, Y_{N-2}, Y_{N-1}]^T$ vektörüdür. İlk önce, gerçek çözüm olan $y(x)$ 'e göre ayrık $Y_1, Y_2, \dots, Y_{N-2}, Y_{N-1}$ değerlerindeki hata ile ne demek istediğimizi açıklığa kavuşturmalıyız. Y_i 'nin $y(x_i)$ 'ye yaklaşması gerektiği için, $Y_i - y(x_i)$ noktasal hataları kullanmak doğaldır.

$\hat{Y}$ vektörü

$$\hat{Y} = \begin{bmatrix} y(x_1) \\ y(x_2) \\ \vdots \\ y(x_{N-1}) \end{bmatrix}$$

gerçek çözüm vektörü olmak üzere

$$E = Y - \hat{Y}$$

hata vektörünün bileşenleri her grid noktasındaki hataları içerir.

Şimdi amacımız, E hata vektörünün, h sıfıra giderken kesme hatasının $o(h^2)$ olduğunu göstererek, bu vektörün büyüklüğü üzerinde bir sınır elde etmektir. Bu vektörün büyüklüğünü ölçmek için

$$\|E\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq N-1} |E_i| = \max_{1 \leq i \leq N-1} |Y_i - y(x_i)|$$

maksimum normunu kullanıyoruz.

Yerel kesme hatasını hesaplamak için, (6.1.3) denkleminde Y sonlu fark çözümü yerine $y(x_i) = y_i$ gerçek çözümünü yazalım. Genel olarak $y(x_i)$ gerçek çözümünü (6.1.3) denklemini tam olarak sağlamayacaktır ve bu tutarsızlık, τ_i ile gösterdiğimiz yerel kesme hatasıdır.

$$\tau_i = \frac{1}{h^2}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) - f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (6.1.5)$$

Tabii ki pratikte $y(x_i)$ gerçek çözümünün ne olduğunu bilmiyoruz. Taylor serisi açılımlarından,

$$\tau_i = \left[y''(x_i) + \frac{1}{12} h^2 y^{(4)}(x_i) + o(h^4) \right] - f(x_i) \quad (6.1.6)$$

elde edilir. (6.1.1) diferansiyel denklemi kullanılarak

$$\tau_i = \frac{1}{12} h^2 y^{(4)}(x_i) + o(h^4) \quad (6.1.7)$$

bulunur. $y^{(4)}(x_i)$ bilinmemesine rağmen h ' dan bağımsız fonksiyondur ve h sıfıra yaklaşırken $\tau_i = o(h^2)$ 'dir. Eğer τ_i 'yi i bileşenlerine sahip vektör olarak tanımlarsak, o zaman

$$\tau = A\hat{Y} - B \quad (6.1.8)$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan

$$A\hat{Y} = B + \tau \quad (6.1.9)$$

olur. Burada $\hat{Y}$ gerçek çözüm vektörüdür (LeVeque, 2007).

6.2. Global Hata

Yerel hata τ ile global hata $E = Y - \hat{Y}$ arasında bir ilişki elde etmek için, (6.1.4) denkleminde (6.1.9) çıkarırsak,

$$AE = -\tau \quad (6.2.1)$$

elde edilir. Denklem sisteminin matris formundan yararlanırsak

$$\frac{1}{h^2} (E_{i-1} - 2E_i + E_{i+1}) = -\tau(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

denklemleri elde edilir. Sınır koşulları ise $U_0 = \alpha$, $U_N = \beta$ olur.

$$E_0 = E_N = 0$$

(6.2.1) sistemini

$$E'' = -\tau(x) , \quad a < x < b$$

sınır değer probleminin

$$E(a) = 0 , \quad E(b) = 0$$

sınır değer koşulları ile ayırıştırılmış hali olarak yorumlayabiliriz.

$\tau(x) \approx \frac{1}{12}h^2y^{(4)}$ olduğundan iki kez integral alarak global hata için

$$E(x) \approx -\frac{1}{12}h^2y'' + \frac{1}{12}h^2(y''(a) + x(y''(a) - y''(b)))$$

yaklaşık değeri bulunur. Bu durumda hata $o(h^2)$ biçimindedir (LeVeque, 2007).

6.3. Kararlılık

Yukarıdaki global hata argümanı tamamen inandırıcı değildir, çünkü fark denklemlerini çözmenin temeldeki diferansiyel denklemlerin çözümüne iyi bir yaklaşım sağladığı varsayımına güveniyoruz. Kanıtlamaya çalıştığımız tam olarak bu varsayım olduğundan, akıl yürütme oldukça döngüseldir. Bunun yerine,

$$A^h E^h = -\tau^h \tag{6.3.1}$$

formunda yeniden yazacağımız (6.2.1) ayrık sistemine doğrudan bakalım. Burada h üst simgesi, h ağ aralığına sahip bir ızgara üzerinde olduğumuzu gösterir. Bu, ızgarayı iyileştirdikçe bu miktarların değiştiğini görürüz. Özellikle, A^h matrisi $h = \frac{b-a}{N}$ olduğu durumda $(N-1) \times (N-1)$ boyutunda matristir. Böylece h sıfıra yaklaşırken matrisin boyutu büyür. Bu matrisin tersi $(A^h)^{-1}$ olsun. (6.3.1) sistemini çözersek

$$E^h = -(A^h)^{-1}\tau^h \tag{6.3.2}$$

eşitliğini elde eder ve normunu alırsak

$$\begin{aligned}\| E^h \| &= \| (A^h)^{-1} \tau^h \| \\ &\leq \| (A^h)^{-1} \| \| \tau^h \|\end{aligned}$$

elde ederiz. $\tau^h = o(h^2)$ olduğunu biliyoruz.

Yeterince küçük tüm h için

$$\| (A^h)^{-1} \| \leq C \quad (6.3.3)$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece

$$\| E^h \| \leq C \| \tau^h \| \quad (6.3.4)$$

elde ederiz ve $\| E^h \|$ en az τ^h kadar hızlı sıfıra gider. Bu, doğrusal sınır değer problemleri için aşağıdaki kararlılık tanımının elde edilmesini sağlar.

Tanım 6.3.1. Doğrusal bir sınır değer problemleri için sonlu farklar yönteminin $A^h U^h = b^h$ biçiminde bir matris denklemleri dizisi verdiğini varsayalım (Burada h , ağ genişliğidir).

Eğer yeterince küçük tüm h için ($h < h_0$ için diyelim) $(A^h)^{-1}$ mevcut ise ve h 'den bağımsız öyle bir C sabiti varsa ki

$$\| (A^h)^{-1} \| \leq C, \text{ tüm } h < h_0 \quad (6.3.5)$$

olsun, o halde yöntem kararlıdır denir (LeVeque, 2007).

6.4. Tutarlılık

Tanım 6.4.1. Eğer bir problemin çözümünde kullanılan sonlu farklar yöntemi

$$h \rightarrow 0 \text{ için } \| \tau^h \| \rightarrow 0 \quad (6.4.1)$$

koşulunu sağlıyorsa diferansiyel denklem sınır koşulları ile tutarlıdır denir.

Bu basitçe, problemin mantıklı bir şekilde ayrıklaştırılmasına sahip olduğumuzu gösterir. Tipik olarak bazı $p > 0$ tamsayıları için $\|\tau^h\| = o(h^p)$ eşittir ve yöntem tutarlıdır (LeVeque, 2007).

6.5. Yakınsaklık

Teorem 6.5.1. (Sınır-Değer Probleminin Çözümünün Varlığı ve Tekliği)

$$\begin{aligned} y'' &= f(x, y, y') \\ c_{11}y(a) + c_{12}y'(a) &= c_{13} \\ c_{21}y(b) + c_{22}y'(b) &= c_{23} \end{aligned} \tag{6.5.1}$$

sınır değer problemi için

1. f ve onun f_x , f_y ve $f_{y'}$ kısmi türevleri $D = [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ bölgesinde süreklidir.
2. D bölgesinde $|f_x| > 0$, $|f_y| \leq M$ ve $f_{y'} \leq M$ sağlanır.
3. $|c_{11}| + |c_{12}| > 0$, $|c_{21}| + |c_{22}| > 0$, $|c_{11}| + |c_{21}| > 0$ ve $c_{11}c_{12} \leq 0 \leq c_{21}c_{22}$

şartları sağlanıyorsa (6.5.1) denkleminin $[a, b]$ aralığında tek çözümü vardır (Kincaid ve ark., 2009).

Tanım 6.5.2. $x_1, x_2, \dots, x_N$ grid noktalarında $\tilde{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ ile sonlu fark çözümünü ve $\tilde{y} = (y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_N))$ ile gerçek çözümü gösterelim .

$$\tilde{E} = (y_1 - y(x_1), y_2 - y(x_2), \dots, y_n - y(x_N)) = \tilde{Y} - \tilde{y} \tag{6.5.2}$$

vektörüne global hata vektörü denir. Genellikle bu hata için kabul edilebilir bir maximum değer bulmak gerekir. Bu değer genelde $\|\tilde{E}\| = \max_{1 \leq i \leq n} |y_i - y(x_i)|$ sonsuz normu veya ($p \geq 1$) olmak üzere

$$\|\tilde{E}\|_p = \left(\sum_{i=1}^N |y_i - y(x_i)|^p (x_{i+1} - x_i) \right)^{\frac{1}{p}}$$

p-norm için hesaplanır. Burada $h_i := \max_{1 \leq i \leq N} (x_{i+1} - x_i)$ biçimde tanımlanmaktadır.

Eğer h sıfıra giderken ($h \rightarrow 0$), $\|\tilde{E}\|_p$ sıfıra yaklaşıyorsa, sonlu farklar metodu yakınsaktır denir. Dahası, eğer $C \geq 0$ iken $\|\tilde{E}\|_p \leq Ch^q, q > 0$ oluyorsa sonlu farklar metodu q . mertebeden kararlıdır denir.

Tanım 6.5.3. Eğer $\lim_{h \rightarrow 0} \|\tilde{E}\| = 0$ sağlanıyorsa sonlu farklar metodu yakınsaktır denir.

Teorem 6.5.4. İkinci mertebeden (4.3.1)- (4.3.2) lineer sınır değer probleminin (4.3.8) sonlu fark çözümü gerçek çözümüne yakınsaktır (Kincaid ve ark., 2009; Yizengaw, 2017).

İspat. Biz şimdi, h sıfıra yaklaşıırken (4.3.1)- (4.3.2) sınır değer probleminin FDM çözümünün gerçek çözüme yakınsaklığını göstereceğiz.

(4.3.5) ve (4.3.6) formüllerinin kullanarak, $\tilde{y} = (y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_N))$ gerçek çözümünün aşağıdaki lineer denklem sistemini sağladığı gösterilebilir.

$$\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} - \frac{h^2}{12}y^{(4)}(\xi_i) + p_i \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} - \frac{h^2}{6}y^{(3)}(\eta_i) + q_i y(x_i) = f(x_i), \quad 1 \leq i \leq N$$

Diğer taraftan

$\tilde{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ sonlu fark çözümü

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i, \quad 1 \leq i \leq N \quad (6.5.3)$$

lineer denklem sistemini sağlar. Bu denklemleri birbirinden çıkararak

$$\frac{E_{i+1} - 2E_i + E_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{E_{i+1} - E_{i-1}}{2h} + q_i E_i = h^2 f_i, \quad 1 \leq i \leq N \quad (6.5.4)$$

denklemini elde ederiz. Burada E_i global hatadır ve $E_i := y(x_i) - y_i$ biçiminde tanımlıdır, $h^2 f_i$ ise $x = x_i$ grid noktalarındaki yerel kesme hatasıdır ve f_i 'ler

$$f_i = \frac{1}{12}y^{(4)}(\xi_i) + \frac{1}{6}y^{(3)}(\eta_i)$$

biçiminde tanımlanır. (6.5.4) denkleminin her iki tarafını h^2 ile çarpar ve ardından ilgili terimleri toplayarak,

$$\left(1 + \frac{h}{2}p_i\right) E_{i-1} + (2 + h^2q_i) E_i - \left(1 - \frac{h}{2}p_i\right) E_{i+1} = h^4 f_i \quad (6.5.5)$$

elde edilir. $\tilde{E}$ hata vektörünün büyüklüğünü tahmin etmede, bazı özel p değeri için $\|\tilde{E}\|_p$, $p \geq 1$ normunu kullanmak gerekir.

Fakat biz, $\|\tilde{E}\|_\infty$ sonsuz normunu kullanacağız çünkü, bu norm grid fonksiyonlarını ölçmek için kullanılır ve kolayca tahmin edilir.

Böylece (6.5.5) denklemini

$$(2 + h^2q_i)E_i = (1 - \frac{h}{2}p_i)E_{i+1} - (1 + \frac{h}{2}p_i)E_{i-1} + h^4f_i$$

biçiminde yazabiliriz. Sonuç olarak

$$|2 + h^2q_i| |E_i| \leq |1 - \frac{h}{2}p_i| |E_{i+1}| + |1 + \frac{h}{2}p_i| |E_{i-1}| + h^4 |f_i|$$

$$\leq |1 - \frac{h}{2}p_i| \|\tilde{E}\|_\infty + |1 + \frac{h}{2}p_i| \|\tilde{E}\|_\infty + h^4 \|\tilde{f}\|_\infty$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\|\tilde{f}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |f_i|$ yararlanılmıştır. Bu eşitsizlikten hemen şu sonuç çıkar:

$$|2 + h^2q_i| \|\tilde{E}\|_\infty \leq \left(|1 - \frac{h}{2}p_i| + |1 + \frac{h}{2}p_i|\right) \|\tilde{E}\|_\infty + h^4 \|\tilde{f}\|_\infty. \quad (6.5.6)$$

$q(x) < 0$ olduğundan, $h > 0$ sayısını yeterince küçük seçersek, tüm $i = 1, 2, \dots, N$ değerleri için

$$|1 - \frac{h}{2}p_i| + |1 + \frac{h}{2}p_i| = 2$$

ve

$$|2 + h^2q_i| = 2 + h^2 |q_i|$$

eşitliklerini buluruz.

Sonuç olarak, yeterince küçük $h > 0$ değeri için (6.5.6) denkleminde

$$\|q_i\| \|\tilde{E}\|_\infty \leq h^2 \|\tilde{f}\|_\infty \quad (6.5.7)$$

elde edilir.

$$C = \frac{\|\tilde{f}\|_\infty}{\inf_{1 \leq i \leq n} \|q_i\|}$$

gösterirsek

$$\|\tilde{E}\|_\infty \leq Ch^2 \quad (6.5.8)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece sonlu fark şeması tutarlıdır, ayrıklaştırma doğrudur ve gerçek çözüme yakınsar.

Sonuç olarak, sonlu farklar metodunun yakınsak ve 2. mertebeden doğru olduğu gösterilmiş oldu. $\square$

Bu ifadenin sonucu olarak şu teoremi verebiliriz.

Teorem 6.5.5. (Sonlu Farklar Yönteminin Temel Teoremi) Bir sonlu fark şeması tutarlı ve kararlı ise yakınsaktır.

İspat. Eğer $h \rightarrow 0$ iken $\|E^h\| \rightarrow 0$ olduğu gösterilirse yöntemin yakınsaklığı ispatlanmış olur.

(6.3.5) ve (6.4.1) ifadelerini kullanarak,

$$\begin{aligned} \|E^h\| &= \|(A^h)^{-1} \tau^h\| \\ &\leq \|(A^h)^{-1}\| \|\tau^h\| \\ &\leq C \|\tau^h\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu ise teoremin ispatını tamamlar. $\square$

Tutarlılık genellikle kontrol edilmesi kolay kısımdır. Kararlılığı doğrulamak zor kısımdır. Az önce tartışılan lineer sınır değer problemi için bile, bu matrisler h sıfıra giderken ($h \rightarrow 0$) büyüdüğü için (6.4.1) koşulunun nasıl kontrol edileceği hiç açık

değildir. Diğer problemler için kararlılığın uygun bir şekilde nasıl tanımlanacağı bile net olmayabilir. Göreceğimiz gibi, farklı problem türleri için birçok farklı kararlılık tanımı vardır (LeVeque, 2007).

6.6. 2-Normda Kararlılık

Bölümün başındaki SDP'ye dönersek, kararlılığı ve dolayısıyla ikinci dereceden kararlılığı nasıl doğrulayabileceğimizi görelim. Kullanılan teknik, hangi normu dikkate almak istediğimize bağlıdır. Burada 2-normunu ele alacağız ve A katsayılar matrisinin özvektörlerini ve özdeğerlerini açıkça hesaplayarak kararlılığı gösterebileceğimizi göreceğiz.

A matrisi simetrik olduğundan A 'nın 2-normu, spektral yarıçapına eşittir.

$$\|A\|_2 = \rho(A) = \max_{1 \leq p \leq m} |\lambda_p|$$

A^{-1} matrisi simetriktir ve A^{-1} 'in özdeğerleri basitçe A 'nın özdeğerlerinin tersidir, yani

$$\|A^{-1}\|_2 = \rho(A^{-1}) = \max_{1 \leq p \leq m} |\lambda_p^{-1}| = \left(\min_{1 \leq p \leq m} |\lambda_p| \right)^{-1}$$

O halde tek yapmamız gereken A katsayılar matrisinin özdeğerlerini hesaplamak ve bunların h sıfıra giderken sınırlı olduklarını göstermektir. Elbette, h değiştikçe, dikkate almamız gereken sonsuz bir A_h matrisleri setimiz var, ancak bu matrislerin yapısı çok basit olduğu için, her A_h 'in özdeğerleri için genel bir ifade elde edebiliriz. Daha karmaşık problemler için bunu yapamayabiliriz, ancak genellikle analizin mümkün olduğu model problemler göz önünde bulundurulur.

Şimdi belirli bir $h = \frac{1}{m+1}$ değerine odaklanacağız ve gösterimi basitleştirmek için üst simge h 'yi bırakacağız. Daha sonra A matrisinin λ özdeğerleri şu şekilde verilir:

$$\lambda_p = \frac{2}{h^2}(\cos(p\pi h) - 1), \quad p = 1, 2, \dots, m. \quad (6.6.1)$$

λ_p özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri, $j = 1, 2, \dots, m$ olmak üzere $u^p = u_j^p$ simgesi ile gösterirsek

$$u_j^p = \sin(p\pi jh) \quad (6.6.2)$$

olduğu görülür. Bu, $Au^p = \lambda_p u^p$ 'i eşitliğinde yerine yazılarak doğrulanabilir. Au^p vektörünün j . bileşeni için

$$\begin{aligned}
(Au^p)_j &= \frac{1}{h^2}(u_{j-1}^p - 2u_j^p + u_{j+1}^p) \\
&= \frac{1}{h^2}(\sin(p\pi(j-1)h) - 2\sin(p\pi jh) + \sin(p\pi(j+1)h)) \\
&= \frac{1}{h^2}(\sin(p\pi jh))\cos(p\pi h) - 2\sin(p\pi jh) + \sin(p\pi jh)\cos(p\pi h) \\
&= \lambda_p u_j^p
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. (6.6.1)'den, A 'nın en küçük özdeğeri için

$$\begin{aligned}
\lambda_1^h &= \frac{2}{h^2}(\cos(\pi h) - 1) \\
&= \frac{2}{h^2}\left(\frac{-1}{2}\pi^2 h^2 + \frac{1}{24}\pi^4 h^4 + o(h^6)\right)
\end{aligned}$$

asimptotik eşitliği elde edilir. Bu açıkça h sıfıra giderken sınırlandırılmıştır ve bu nedenle yöntemin 2-normunda kararlı olduğunu görüyoruz. Ayrıca bundan

$$\|E^h\|_2 \leq \|(A^h)^{-1}\|_2 \|\tau^h\|_2 \approx \frac{1}{\pi^2} \|\tau^h\|_2$$

hatasını elde ederiz. $\tau_j^h \approx \frac{1}{12}h^2 u^{(4)}(x_j)$ olduğunda $\|\tau^h\|_2 \approx \frac{1}{12}h^2 \|u^{(4)}\|_2 = \frac{1}{12}h^2 \|f''\|_2$ olması beklenir. (6.6.2) özvektörünün, karşılık gelen $\frac{d^2}{dx^2}$ diferansiyel operatörünün özfonksiyonu ile yakından ilişkili olduğuna dikkat edelim.

$$u^p(x) = \sin(p\pi x), \quad p = 1, 2, 3, \dots,$$

özfonksiyonları ve $\mu = -p^2\pi^2$ özdeğerleri için

$$\frac{d^2}{dx^2} u^p(x) = \mu_p u^p(x)$$

eşitliği sağlanır. Bu fonksiyonlar aynı zamanda $u^p(0) = u^p(1) = 0$ sınır koşullarını sağlar ve dolayısıyla $\frac{d^2}{dx^2}$ operatörünün $[0, 1]$ aralığında $u(0) = u(1) = 0$ homojen sınır koşullarını sağlayan özfonksiyonlarıdır. Taylor serisinden yararlanırsak $h \rightarrow 0$

için

$$\begin{aligned}\lambda_p &= \frac{1}{h^2} \left(-\frac{1}{2}p^2\pi^2h^2 + \frac{1}{24}p^4\pi^4h^4 + \dots \right) \\ &= -\pi^2h^2 + o(h^2)\end{aligned}$$

asimptotik eşitliğini elde ederiz (LeVeque, 2007).

Şimdi ise verilen bir problemin SFM ile çözülebilirliği, sonlu fark çözümünün varlığı ve tekliği ile ilgili birkaç teorem verelim.

İkinci mertebeden

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (6.6.3)$$

adi diferansiyel denklemini

$$y(0) = y(1) = 0 \quad (6.6.4)$$

sınır değer koşulları ile ele alalım. $F(x, y, p, r)$ fonksiyonunu yeterli mertebeden sürekli türevlenebilir olarak alıyoruz. (6.6.3)-(6.6.4) probleminin sonlu fark denklemleri

$$F\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}\right) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6.6.5)$$

biçiminde elde edilir. Burada $x_i = ih$, $h = \frac{1}{N}$ ve $y_0 = y_N = 0$ 'dır.

Teorem 6.6.1. $0 \leq x \leq 1$, $-\infty < y, p, r < \infty$ olmak üzere

kabul edelim ki

$$F_r(x, y, p, r) \geq m > 0$$

$$|F_p(x, 0, p, 0)| \leq M,$$

$$|F_p(x_i, y_i, p, \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2})| \leq N$$

$$F_u(x, y, p, r) \leq 0.$$

şartları sağlansın. (6.6.5) diferansiyel denklem sistemi $h < \frac{m}{M}$ ve

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{1 \leq i \leq N} |y(x_i) - y_i| = 0 \quad (6.6.6)$$

şartları sağlanırsa çözülebilir. Ancak, eğer $y(x) \in C^k([0, 1])$ ($k = 3, 4$) ise o halde

$$\max_{1 \leq i \leq N} |y(x_i) - y_i| \leq Ch^{k-2}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. İspat için bakınız (Yakovlev, 1977). $\square$

Teorem 6.6.2. Dirichlet sınır koşulları ile verilen $y''(x) = f(x)$ diferansiyel denklemi için merkezi sonlu farklar yöntemi

$$\|E\|_\infty \leq \|E\|_2 \leq Ch^{\frac{3}{2}}$$

ile yakınsaktır.

İspat. Sonlu farklar yönteminden, sonlu farkın katsayılar matrisi $A \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$ tridiagonaldır, dolayısıyla A 'nın özdeğerleri

$$\lambda_j = \frac{-2}{h^2} + \frac{-2}{h^2} \cos\left(\frac{\pi j}{N}\right) = \frac{-2}{h^2} (\cos(\pi j h) - 1).$$

biçimindedir. A^{-1} 'in özdeğerlerinin $\frac{1}{\lambda_j}$ olduğuna ve A^{-1} 'in de simetrik olduğuna dikkat edersek,

$$\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\min |\lambda_j|} = \frac{h^2}{2(1 - \cos(\pi h))} = \frac{h^2}{2(1 - (1 - \frac{(\pi h)^2}{2} + (\pi h)^4/4! + \dots))} < \frac{1}{\pi^2}$$

eşitsizliği elde edilir.

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \sqrt{N-1} \|A^{-1}\|_2$$

eşitsizliğini kullanarak,

$$\|E\|_\infty \leq \|A^{-1}\|_\infty \|T\|_\infty \leq \sqrt{N-1} \|A^{-1}\|_2 \|A^{-1}\|_2 \|T\|_\infty \leq \frac{\sqrt{N-1}}{\pi^2} Ch^2 \leq Ch^{\frac{3}{2}}$$

elde edilir (Li ve ark., 2017). $\square$

Uyarı 6.6.3. Sonlu Farklar metodunda katsayılar matrisinin özvektörleri ve özdeğerleri Sturm-Liouville özdeğer problemi dikkate alınarak elde edilebilir. Kolayca

gösterebiliriz ki

$$y'' - \lambda y = 0, y(0) = y(1) = 0$$

Sturm-Liouville özdeğer probleminin özdeğerleri,

$$\lambda_k = -(k\pi)^2, k = 1, 2, 3, \dots$$

biçimindedir ve bunlara karşılık gelen özfonksiyonlar ise

$$y_k(x) = \sin(k\pi x).$$

biçimindedir (Li ve ark., 2017).

7. SONLU FARKLAR METODUNUN UYGULANMASI

7.1. Sonlu Farklar Metodunun Uygulamaları

Örnek 7.1.1. İlk önce tek-aralıklı

$$xy'' + 2y' - xy = e^x, \quad x \in [1, 3] \quad (7.1.1)$$

$$y(1) = 2, \quad y(3) = -1 \quad (7.1.2)$$

sınır değer problemini ele alalım. Bu problemin gerçek çözümünün

$$y = \frac{e^{x+4}(x-3) - 4e^{x-1} - 6e^{x+1} - e^x(x-1) + 2e^4(e^3 + 2e^2 + 3)}{2(e^4 - 1)x} \quad (7.1.3)$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Problemin $[1, 3]$ aralığındaki grid noktaları

$$x_i = 1 + ih, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

şeklinde yazılır. Buradan $x_0 = 1$, $x_N = 3$ elde edilir. y' ve y'' türevleri

$$y'(x) \approx \frac{1}{2} (D_+ y(x) + D_- y(x)) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \quad (7.1.4)$$

ve

$$y''(x) \approx \frac{1}{h} (D_+ y(x) - D_- y(x)) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \quad (7.1.5)$$

merkezi sonlu farklar formülleri yardımıyla yeniden yazılır. Burada $D_+ y(x)$ ve $D_- y(x)$ sırasıyla $y(x)$ 'in ileri ve geri sonlu farkını gösterir.

$x = x_i$ ve $y_i = y(x_i)$ biçimde gösterilerek, (7.1.4) ve (7.1.5) türev açılımları (7.1.1) probleminde yazılarak problemin

$$(x_i - h)y_{i-1} - (2 + h^2)x_i y_i + (x_i + h)y_{i+1} = h^2 e^{x_i}, \quad (7.1.6)$$
$$i = 1, 2, \dots, N - 1$$

sonlu fark şeması elde edilir. Artık $y_1, y_2, \dots, y_{N-1}$ değişkenlerine göre lineer cebirsel denklem sistemine sahibiz. (7.1.6) cebirsel lineer denklem sistemi

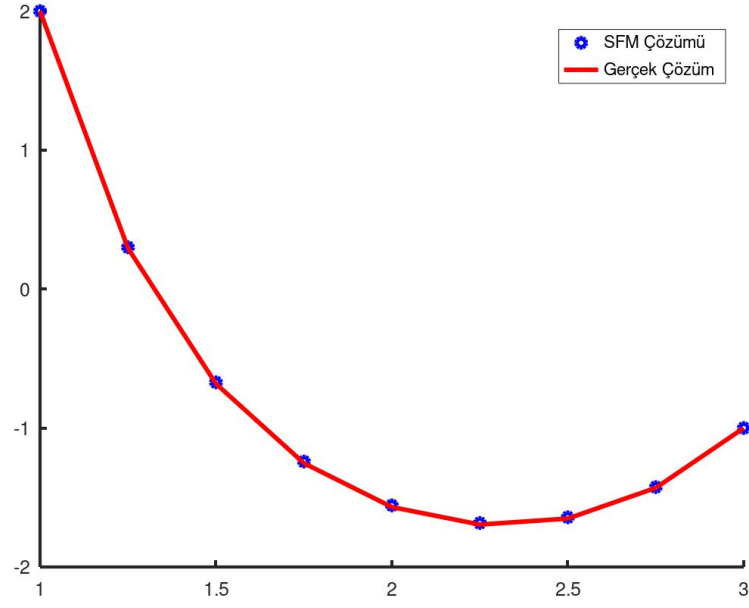
$$Ay = b$$

tridiagonal matris-vektör formunda yazılabilir. Burada $N = 50$ seçersek

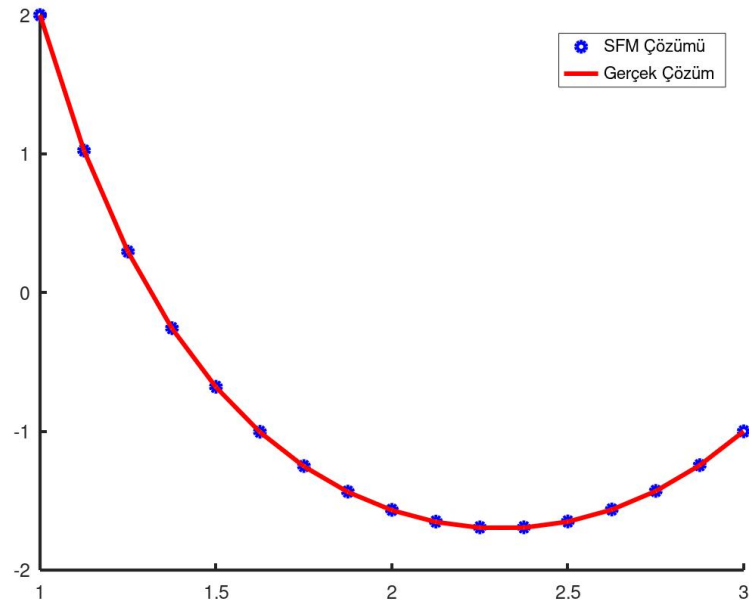
$$A = \begin{pmatrix} -(2+h^2)x_1 & x_1+h & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x_2-h & -(2+h^2)x_2 & x_2+h & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x_3-h & -(2+h^2)x_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -(2+h^2)x_{48} & x_{48}+h \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{49}-h & -(2+h^2)x_{49} \end{pmatrix},$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{48} \\ y_{N-1} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} h^2 e^{x_1} - 2(x_1 - h) \\ h^2 e^{x_2} \\ h^2 e^{x_3} \\ \vdots \\ h^2 e^{x_{48}} \\ h^2 e^{x_{49}} + (x_{49} + h) \end{pmatrix}$$

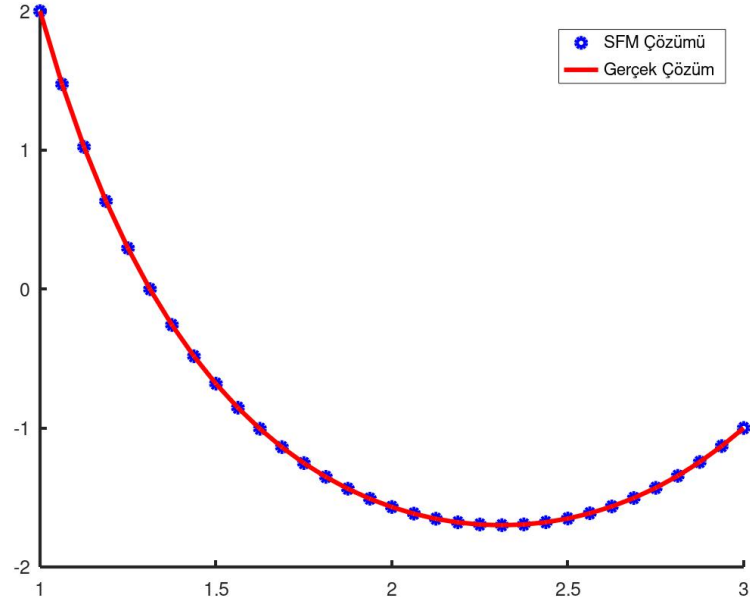
matrisleri elde edilir. Bu sistemin çözümü Matlab/Octave programı yardımıyla elde edilir. (7.1.1)-(7.1.2) sınır değer probleminin sonlu fark çözümleri ile (7.1.3) gerçek çözümü grafiksel olarak karşılaştırılmıştır (bakınız, Şekil.7.3, Şekil.7.4, Şekil. 7.5 ve Şekil.7.6).



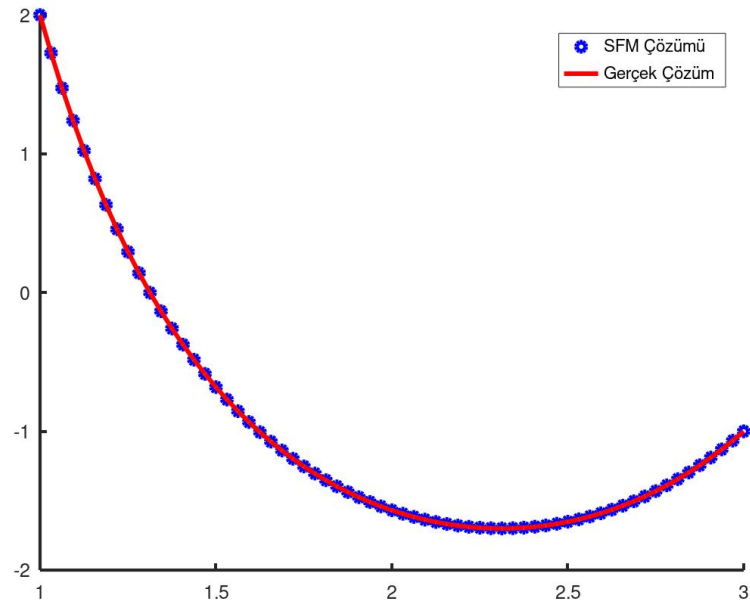
Şekil. 7.3: (7.1.1)-(7.1.2) sınır değer probleminin $N=8$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü



Şekil. 7.4: (7.1.1)-(7.1.2) sınır değer probleminin $N=16$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü



Şekil. 7.5: (7.1.1)-(7.1.2) sınır değer probleminin $N=32$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü



Şekil. 7.6: (7.1.1)-(7.1.2) sınır değer probleminin $N=64$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü

Aşağıdaki MMH çizelgesinde yöntemin yakınsaklık analizi için farklı N değerlerine ait gerçek çözüm ile yaklaşık çözüm arasındaki maksimum mutlak hata hesaplanmış olup, N değeri büyüdükçe MMH'nın sıfıra yaklaştığı görülmektedir. Bu da bize yöntemin gerçek çözüme yaklaştığını yani yakınsak olduğunu göstermektedir.

Çizelge. 7.1: (7.1.1)-(7.1.2) sınır-değer problemi için MMH tablosu

N	h	$\ E \ _{\infty}$	N	h	$\ E \ _{\infty}$
4	$\frac{2}{4}$	0.046856	128	$\frac{2}{128}$	0.000047501
8	$\frac{2}{8}$	0.012013	256	$\frac{2}{256}$	0.000011876
16	$\frac{2}{16}$	0.0030277	512	$\frac{2}{512}$	0.0000029690
32	$\frac{2}{32}$	0.00075960	1024	$\frac{2}{1024}$	0.00000074225
64	$\frac{2}{64}$	0.00018998	2048	$\frac{2}{2048}$	0.00000018556

Örnek 7.1.2. Standart sonlu farklar metoduyla çözdüğümüz

$$xy'' + 2y' - xy = e^x, \quad x \in [1, 3]$$

iki aralıklı sınır değer problemini ele alalım. $x = 1$ ve $x = 3$ sınır değerleri olmak üzere

$$y(1) = 2, \quad y(3) = -1$$

sınır değer problemini $x = 2$ tekil noktası etrafında

$$y(2 - 0) = 3y(2 + 0), \quad 2y'(2 - 0) = y'(2 + 0) \quad (7.1.7)$$

geçiş şartları ile çözelim. Eğer $N = 32$ seçersek ve (7.1.7) geçiş şartlarına uygularsak sırasıyla,

$$y(2 - 0) = 3y(2 + 0) \quad (7.1.8)$$

geçiş şartı için

$$y_{16} - 3y_{17} = 0 \quad (7.1.9)$$

denklemini,

$$2y'(2 - 0) = y'(2 + 0) \quad (7.1.10)$$

geçiş şartını birinci mertebeden türevin merkezi sonlu fark açılımına uygularsak da,

$$2 \frac{(y_{16} - y_{14})}{2h} = \frac{y_{19} - y_{17}}{2h}$$

eşitliğinden

$$2y_{14} - 2y_{16} - y_{17} + y_{19} = 0 \quad (7.1.11)$$

denklemini elde ederiz. Böylece iki denklemlili cebirsel denklem sistemi elde ederiz. Bu sistemin her denkleminin x_{i-1} , x_i ve x_{i+1} adlı üç düğüm noktalarında çözüm değerlerini içerdiğine dikkat edelim. (7.1.6) sistemine (7.1.9) and (7.1.11)

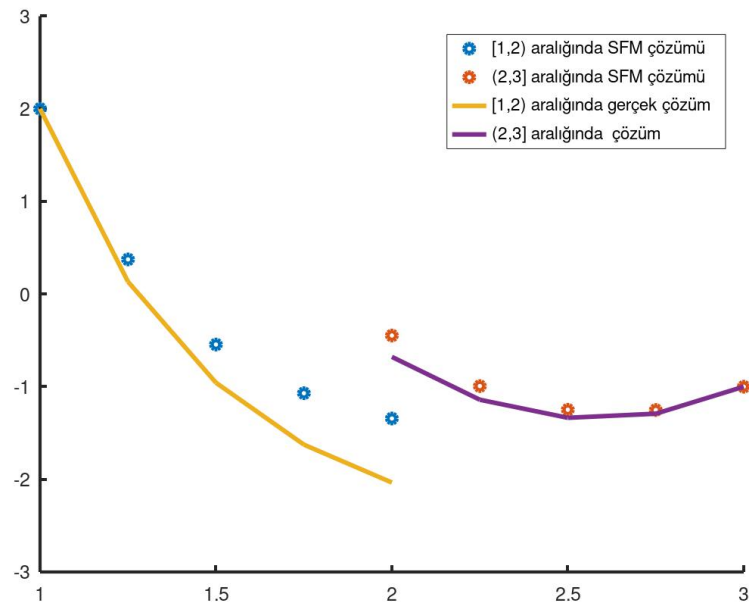
denklemleri eklenerek,

$$\left\{ \begin{array}{l} (2 + (4x_i + 2)h)y_{i-1} + (-4 + 2((2x_i + 1)^2 - 2)h^2)y_i + (2 - (4x_i + 2)h)y_{i+1} = 0, \\ \qquad \qquad \qquad i = 1, 2, \dots, 15 \\ y_{16} - 3y_{17} = 0, \\ \qquad \qquad \qquad 2y_{14} - 2y_{16} - y_{17} + y_{19} = 0, \\ (2 + (4x_i + 2)h)y_{i-1} + (-4 + 2((2x_i + 1)^2 - 2)h^2)y_i + (2 - (4x_i + 2)h)y_{i+1} = 0, \\ \qquad \qquad \qquad i = 18, \dots, 31 \end{array} \right.$$

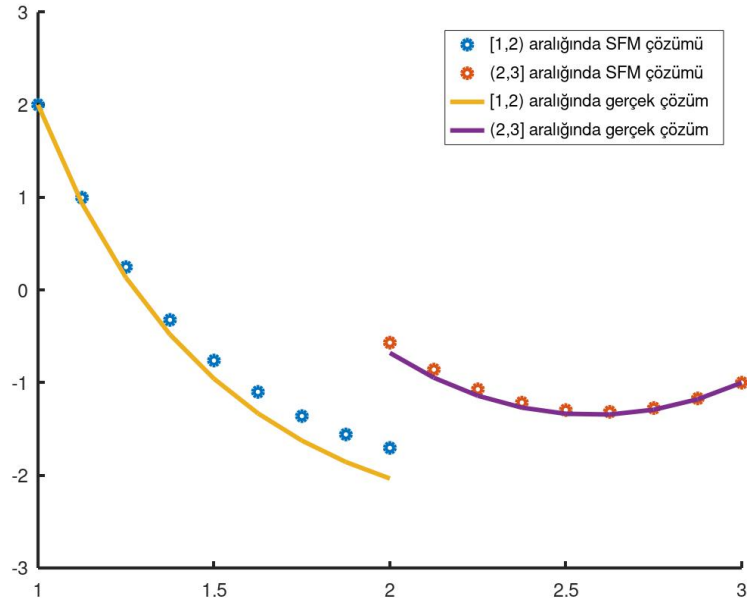
denklem sistemi elde edilir.

$$My = B$$

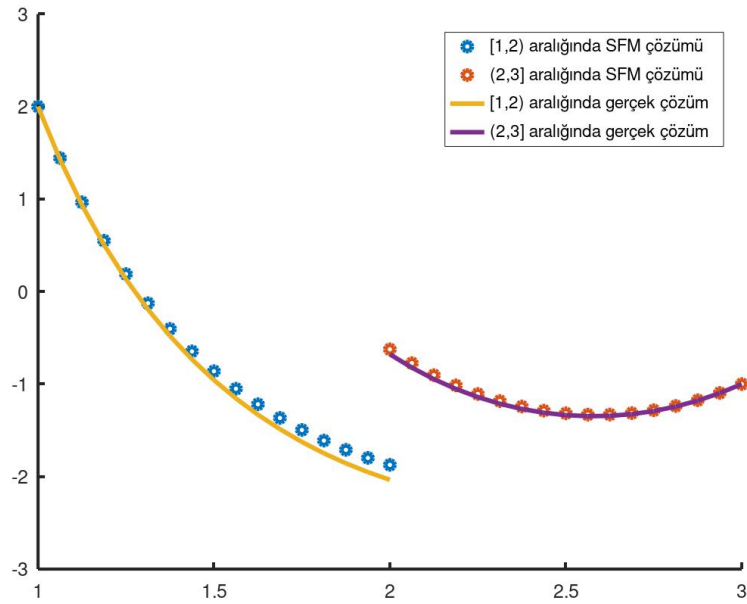
formunda lineer denklem sistemi elde edilir. Burada M matrisi denklem sisteminin katsayılar matrisi olup artık tridiagonal değildir. Şekil.7.7, Şekil.7.8, Şekil.7.9 ve Şekil.7.10 numaralı grafiklerde (7.1.1)-(7.1.2) ve (7.1.7) geçiş probleminin sonlu farklar yöntemi ile elde edilen yaklaşık çözümler ile gerçek çözümler karşılaştırılmıştır.



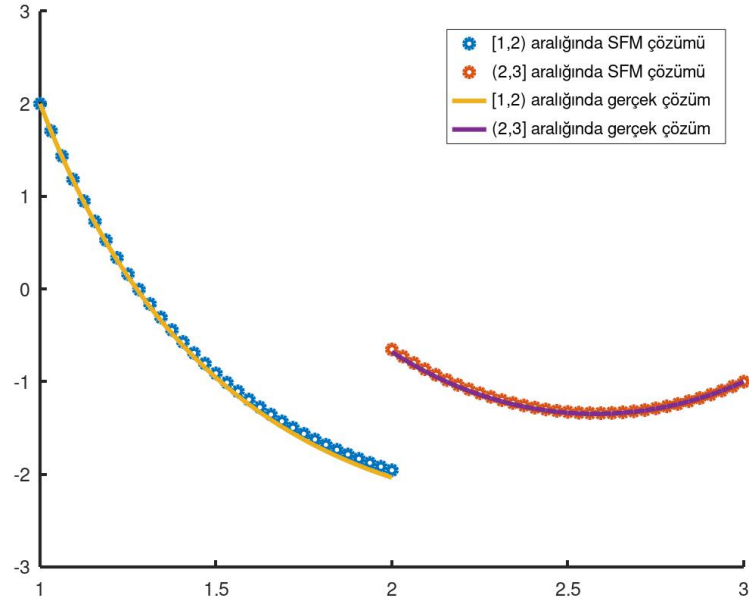
Şekil. 7.7: (7.1.1)-(7.1.7) sınır değer geçiş-probleminin N=8 için SFM-çözümü ve gerçek çözümü



Şekil. 7.8: (7.1.1)-(7.1.7) sınır değer geçiş-probleminin $N=16$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü



Şekil. 7.9: (7.1.1)-(7.1.7) sınır değer geçiş-probleminin $N=32$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü



Şekil. 7.10: (7.1.1)-(7.1.7) sınır değer geçiş-probleminin $N=64$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü

Aşağıdaki MMH çizelgesinde yöntemin yakınsaklık analizi için farklı N değerlerine ait gerçek çözüm ile yaklaşık çözüm arasındaki maksimum mutlak hata hesaplanmış olup, N değeri büyüdükçe MMH'nın sıfıra yaklaştığı görülmektedir. Bu da bize yöntemin gerçek çözüme yaklaştığını yani yakınsak olduğunu göstermektedir.

Çizelge. 7.2: (7.1.1), (7.1.2), (7.1.7) sınır-değer-geçiş problemi için MMH tablosu

N	h	$\ E \ _{\infty}$
8	$\frac{2}{8}$	0.69141
16	$\frac{2}{16}$	0.33075
32	$\frac{2}{32}$	0.16166
64	$\frac{2}{64}$	0.078916

Örnek 7.1.3. İkinci mertebeden

$$y'' - 2(2x + 1)y' + ((2x + 1)^2 - 2)y = 0, \quad x \in [-1, 1], \quad (7.1.12)$$

diferansiyel denkleminde ve $x = -1$ ve $x = 1$ uç noktalarında tanımlanan

$$y(-1) = 0, \quad y(1) = 3, \quad (7.1.13)$$

sınır koşullarından oluşan sınır değer problemini gözönüne alalım. (7.1.12), (7.1.13) denkleminin gerçek çözümünün

$$y = \frac{3}{2}e^{x^2+x-2}(x+1) \quad (7.1.14)$$

olduğunu kolayca gösterebiliriz.

Şimdi ise (7.1.12) denkleminin $[-1, 1]$ aralığında, (7.1.13) sınır koşullarına göre sonlu fark çözümünü bulalım. Basit olması için tek tip kartezyen ızgarasını kullanacağız. $N = 32$ alırsak $h = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$ için

$$x_i = -1 + ih, \quad i = 0, 1, \dots, 32$$

dir. Özellikle $x_0 = -1$, $x_{32} = 1$ olarak aldık.

Merkezi sonlu farklar (MSF) hesabının birinci ve ikinci mertebeden türev ifadeleri

$$y'(x) \approx \frac{1}{2}(D_+y(x) + D_-y(x))$$

ve

$$y''(x) \approx \frac{1}{h}(D_+y(x) - D_-y(x))$$

biçiminde ifade edilir. Burada $D_+y(x)$ ve $D_-y(x)$ $y(x)$ fonksiyonunun sırasıyla ileri sonlu farklar ve geri sonlu farklar ifadeleridir. MSF yöntemini (7.1.12) diferansiyel denkleminde $x = x_i$ tipik grid noktalarında uygularsak ve $y_i = y(x_i)$ yazarsak,

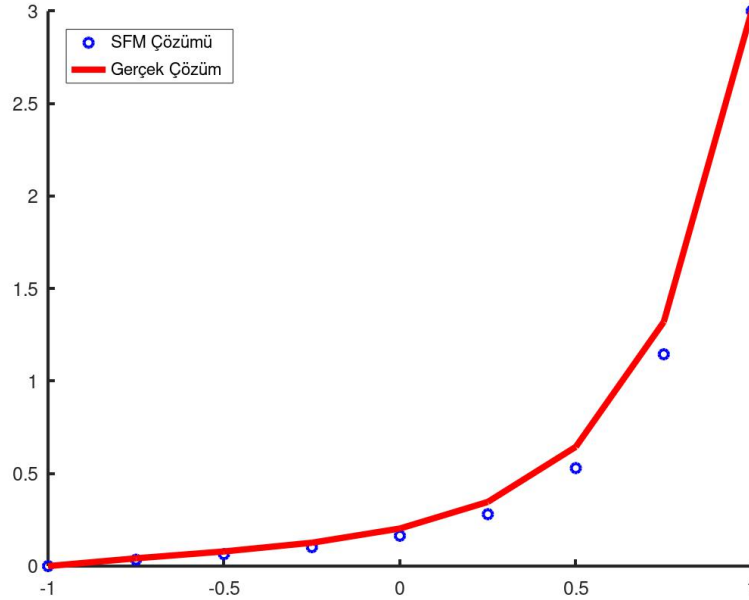
$$(2 + (4x_i + 2)h)y_{i-1} + (-4 + 2((2x_i + 1)^2 - 2)h^2)y_i + (2 - (4x_i + 2)h)y_{i+1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 31 \quad (7.1.15)$$

sonlu fark şemasını elde ederiz. (7.1.13) sınır koşullarından $y_0 = 0$ ve $y_{32} = 3$ değerleri de yazılınca her bir $i = 1, 2, \dots, 31$ noktaları için $y_1, y_2, \dots, y_{31}$ değişkenlerine göre lineer cebirsel denklem sistemine sahip oluruz. Elde edilen (7.1.15) lineer cebirsel denklem sistemi

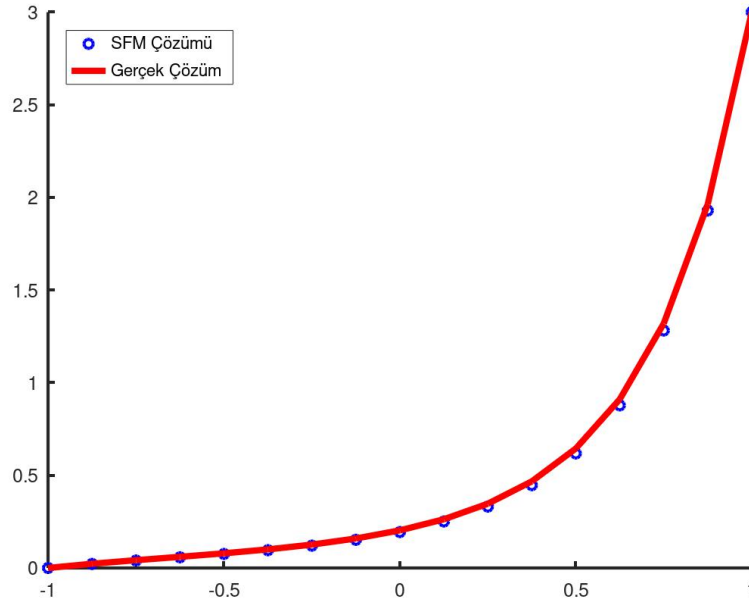
$$My = b$$

biçiminde bir tridiagonal matris-vektör formunda yazılabilir. Bu denklem sistemi MATLAB, Octave ya da Mathematica gibi matematik yazılımları kullanılarak kolayca çözülebilir. Böylece elde ettiğimiz SFM çözümleri ile (7.1.14) gerçek çözümü grafiksel olarak karşılaştırdık (bkz. Şekil.7.11, Şekil.7.12, Şekil.7.13, Şekil.7.14).

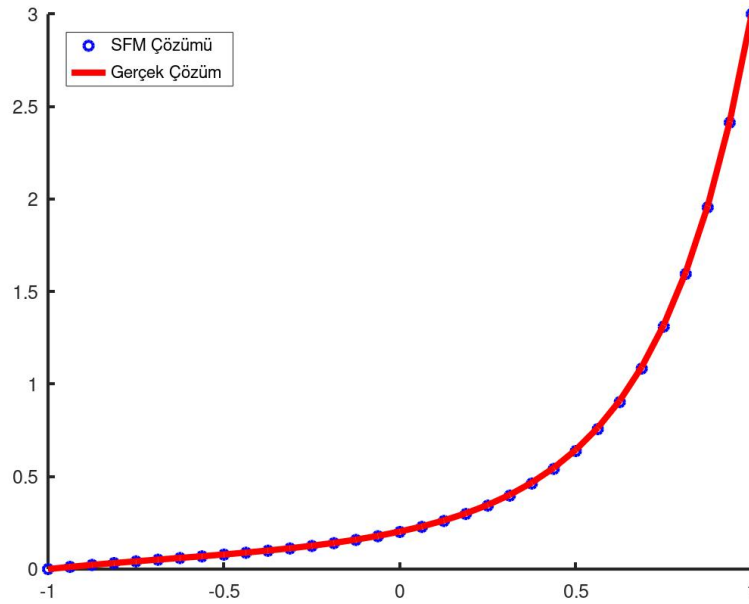
Yöntemin yakınsaklık analizi için SFM çözümleri ile gerçek çözümünün MMH tablosu yapılmıştır (bkz. Tablo. 7.3).



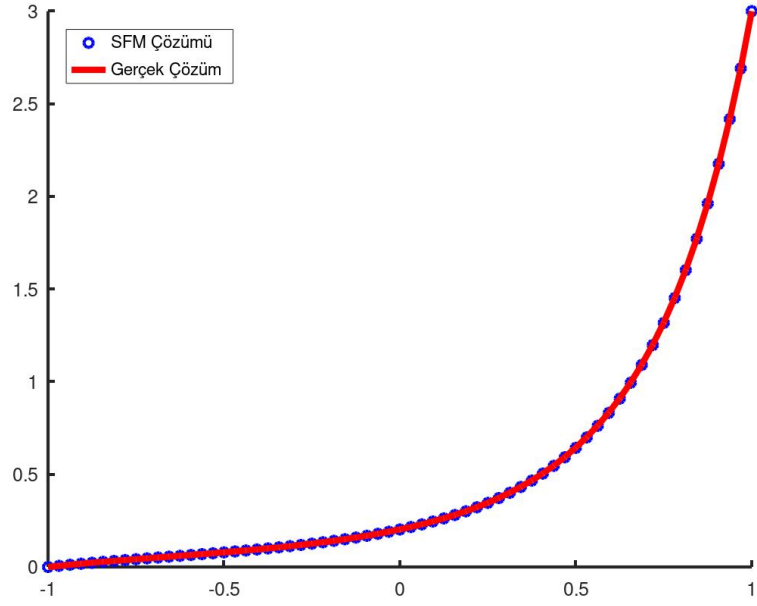
Şekil. 7.11: (7.1.12)-(7.1.13) sınır değer probleminin N=8 için SFM-çözümü ve gerçek çözümü



Şekil. 7.12: (7.1.12)-(7.1.13) sınır değer probleminin $N=16$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü



Şekil. 7.13: (7.1.12)-(7.1.13) sınır değer probleminin $N=32$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü



Şekil. 7.14: (7.1.12)-(7.1.13) sınır değer probleminin $N=64$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü

Aşağıdaki MMH çizelgesinde yöntemin yakınsaklık analizi için N 'in farklı değerlerine karşılık gelen yaklaşık çözüm ile gerçek çözüm arasındaki maksimum mutlak hata hesaplanmış olup, N değeri büyüdükçe MMH'nın sifra yaklaştığı görülmektedir. Bu da bize yöntemin gerçek çözüme yaklaştığını yani yakınsak olduğunu göstermektedir.

Çizelge. 7.3: (7.1.12)-(7.1.13) sınır-değer problemi için MMH tablosu

N	h	$\ E\ _{\infty}$	N	h	$\ E\ _{\infty}$
4	$\frac{2}{4}$	0.64464	128	$\frac{2}{128}$	0.00057676
8	$\frac{2}{8}$	0.17501	256	$\frac{2}{256}$	0.00014415
16	$\frac{2}{16}$	0.038225	512	$\frac{2}{512}$	0.000036035
32	$\frac{2}{32}$	0.0092668	1024	$\frac{2}{1024}$	0.0000090086
64	$\frac{2}{64}$	0.0023117	2048	$\frac{2}{2048}$	0.0000022521

Uyarı 7.1.4. Şekil 7.11, 7.12, 7.13, 7.14)'te (7.1.12), (7.1.13) probleminin gerçek çözümü, sırasıyla $N = 8, 16, 32, 64$ için sayısal SFM çözümleri ile karşılaştırdı. Bu grafik gösterimlerden, N ızgara noktası sayısı arttıkça SFM çözümleri ile gerçek çözüm arasındaki hatanın azaldığı görülebilir.

Örnek 7.1.5. İkinci mertebeden diferansiyel denklemden oluşan

$$y'' - 2(2x + 1)y' + ((2x + 1)^2 - 2)y = 0, \quad x \in [-1, 0) \cup (0, 1] \quad (7.1.16)$$

iki aralıklı SDP'yi ele alalım. Denkleminiz $x = -1$ ve $x = 1$ uç noktalarında

$$y(-1) = 0, \quad y(1) = 3 \quad (7.1.17)$$

sınır koşullarına sahiptir. Şimdi ise

$$y(0-0) = 2y(0+0), \quad y'(0-0) = 3y'(0+0). \quad (7.1.18)$$

(7.1.12)-(7.1.13) sınır değer probleminin (7.1.18) geçiş şartları altında sonlu farklar yöntemiyle çözümüne bakalım.

Çözüm aralığını $N = 64$ seçerek (7.1.18) geçiş şartlarını uygulayalım. y_{32} değeri, $x = 0$ tekil noktasının solunda yer aldığı ve en yakın noktası olduğu için, y_{32} noktasını $y(0-0)$ olarak belirledik. Benzer şekilde y_{33} değeri $x = 0$ in sağında ve en yakın nokta olarak, y_{33} noktasını $y(0+0)$ ile tanımladık.

$$y(0-0) = 2y(0+0)$$

geçiş koşulu için

$$y_{32} - 2y_{33} = 0$$

denklemini,

$$y'(0-0) = 3y'(0+0)$$

geçiş koşulu için ise birinci mertebeden türevin merkezi sonlu fark açılımı (4.3.5) denklemini kullanarak

$$y_{30} - y_{32} - 3y_{33} + 3y_{35} = 0$$

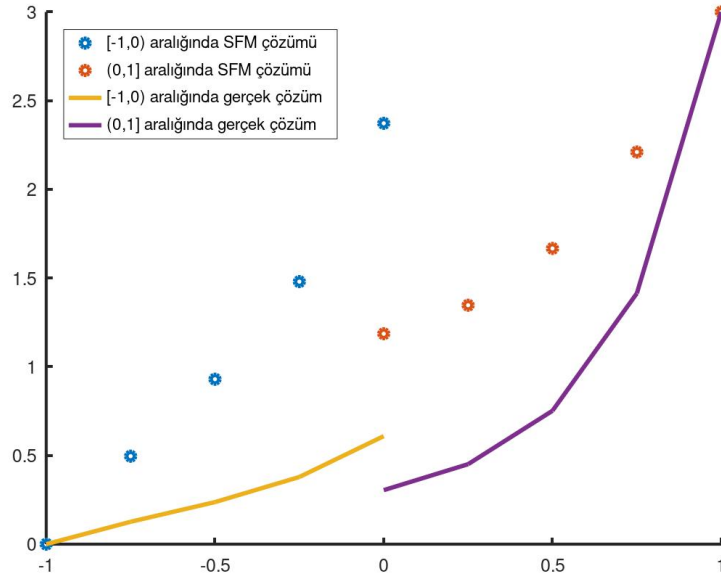
denklemini elde ederiz. Böylece iki denklemlilik

$$\begin{cases} y_{32} - 2y_{30} = 0, \\ y_{30} - y_{32} - 3y_{33} + 3y_{35} = 0 \end{cases} \quad (7.1.19)$$

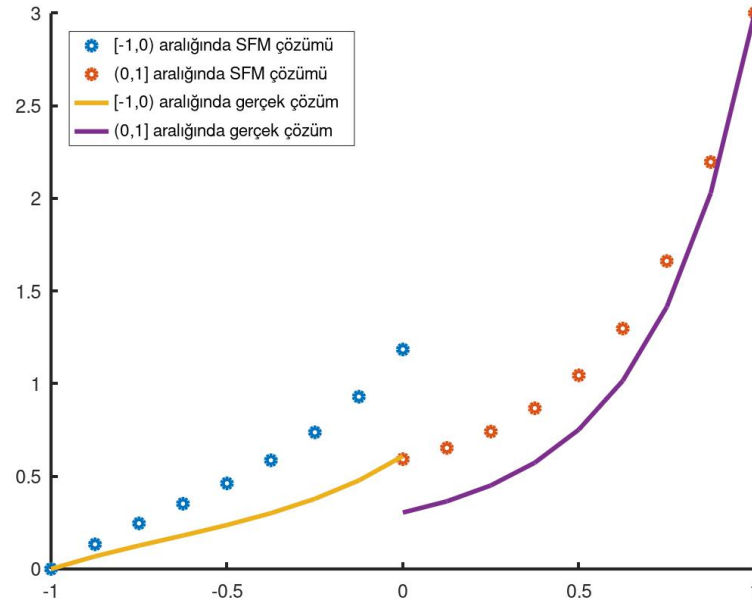
cebirsel denklem sistemi elde ederiz. Bu sistemin her denkleminin x_{i-1} , x_i ve x_{i+1} adlı üç düğüm noktalarında çözüm değerlerini içerdiğine dikkat edelim. (7.1.19) denklemlerini (7.1.15)denklem sistemine eklersek,

$$My = b$$

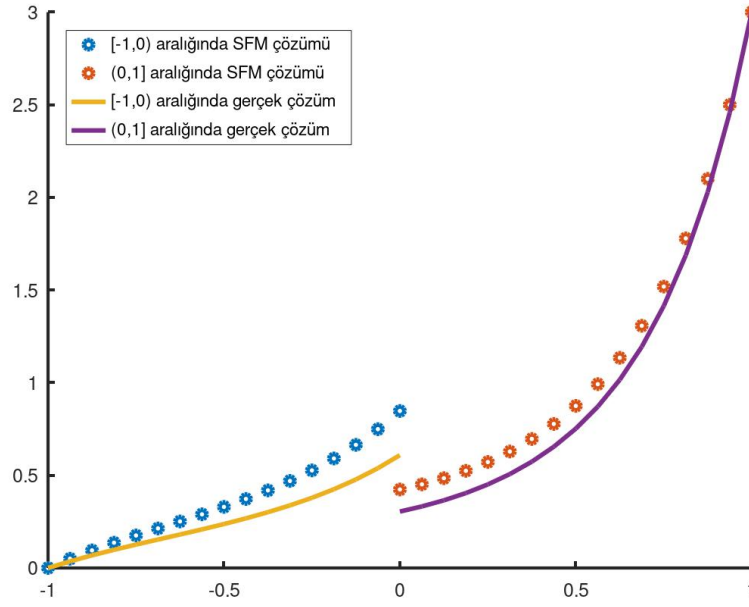
formunda bir lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi MATLAB/Octave ya da Mathematica gibi matematik yazılımları yardımıyla çözülebilir. Şekil.7.15, Şekil.7.16, Şekil.7.17 ve Şekil.7.18’de (7.1.16)-(7.1.18) sınır değer geçiş probleminin sonlu fark çözümleri ile gerçek çözümü grafiksel olarak karşılaştırılmıştır.



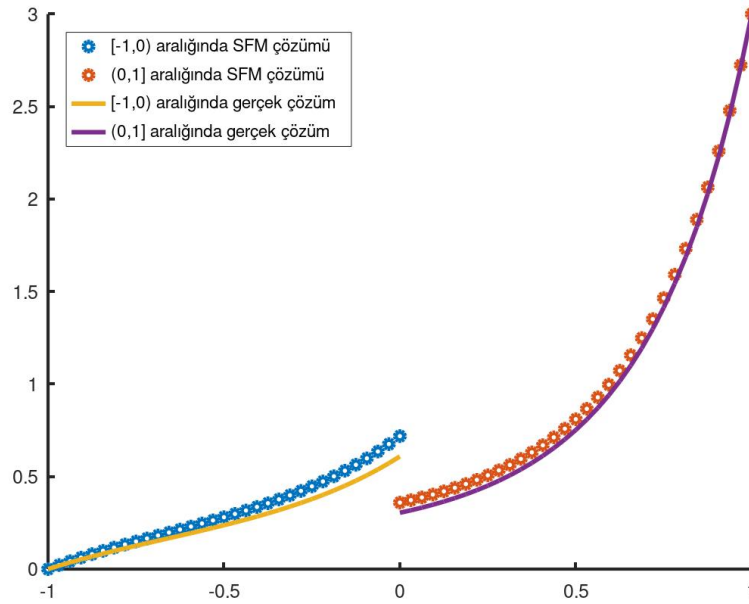
Şekil. 7.15: (7.1.16)-(7.1.18) sınır değer geçiş-probleminin N=8 için SFM-çözümü ve gerçek çözümü



Şekil. 7.16: (7.1.16)-(7.1.18) sınır değer geçiş-probleminin $N=16$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü



Şekil. 7.17: (7.1.16)-(7.1.18) sınır değer geçiş-probleminin $N=32$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü



Şekil. 7.18: (7.1.16)-(7.1.18) sınır değer geçiş-probleminin $N=64$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü

Aşağıdaki MMH çizelgesinde yöntemin yakınsaklık analizi için farklı N değerlerine ait gerçek çözüm ile yaklaşık çözüm arasındaki maksimum mutlak hata hesaplanmış olup, N değeri büyüdükçe MMH'nın sifıra yaklaştığı görülmektedir. Bu da bize yöntemin gerçek çözüme yaklaştığını yani yakınsak olduğunu göstermektedir.

Çizelge. 7.4: (7.1.16)-(7.1.18) sınır-değer-geçiş problemi için MMH tablosu

N	h	$\ E \ _{\infty}$
8	$\frac{2}{8}$	1.7634
16	$\frac{2}{16}$	0.57588
32	$\frac{2}{32}$	0.23828
64	$\frac{2}{64}$	0.10978

Örnek 7.1.6. İki aralıklı SLP'yi göz önünde alalım.

$$y'' + xy' + \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\right)y = 0, \quad x \in [-2, 0) \cup (0, 2] \quad (7.1.20)$$

Sturm-Liouville diferansiyel denklemi $x = -2$ ve $x = 2$ uç noktalarındaki verilmiş

$$y(-2) = 0, \quad y(2) = 3 \quad (7.1.21)$$

sınır koşulları ve $x = 0$ ortak uç noktasındaki

$$y(0-0) = 3y(0+0), \quad y'(0-0) = 2y'(0+0) \quad (7.1.22)$$

geçiş şartlarından oluşan sınır değer geçiş problemi için SFM-nin nasıl uygulanabileceğini gösterelim.

İlk olarak (7.1.20)-(7.1.21) sınır değer probleminin (7.1.22)geçiş şartları olmadan çözümüne bakalım. Kolayca gösterebileceğimiz

$$y = \frac{3}{4}e^{\frac{1-x^2}{4}}(x+2) \quad (7.1.23)$$

fonksiyonu (7.1.20) denkleminin $[-2, 0) \cup (0, 1]$ aralığında ve (7.1.21) sınır koşulları altındaki gerçek çözümüdür. Basit olması için $i = 0, 1, \dots, 49$ noktaları için $h = 0,06$ alarak $x_i = -2 + ih$ tek tip kartezyen ızgarasını kullanacağız. (7.1.21) sınır koşullarına göre $x_0 = -2, x_{50} = 2$ olduğunu biliyoruz.

y' ve y'' fonksiyonları için

$$y'(x) \approx \frac{1}{2} (D_+y(x) + D_-y(x)) \quad (7.1.24)$$

ve

$$y''(x) \approx \frac{1}{h} (D_+y(x) - D_-y(x)) \quad (7.1.25)$$

merkezi sonlu farklar açılımları (7.1.20) denkleminde yerine yazılır. burada $D_+y(x)$ ve $D_-y(x)$ sırasıyla $y(x)$ 'in ileri ve geri sonlu fark formülasyonudur.

MSF ifadesini (7.1.20) diferansiyel denklemine $x = x_i$ tipik bir ızgara noktasında

uygulayarak ve $y_i = y(x_i)$ ile ifade ederek,

$$(4-2hx_i)y_{i-1}+(-8+((x_i)^2+2)h^2)y_i+(4+2hx_i)y_{i+1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 49. \quad (7.1.26)$$

sonlu fark denklemleri elde edilir. Yani $y_1, y_2, \dots, y_{49}$ değişkenlerine göre lineer cebirsel denklem sistemi elde ederiz. Lineer cebirsel denklemler sistemi (7.1.26)

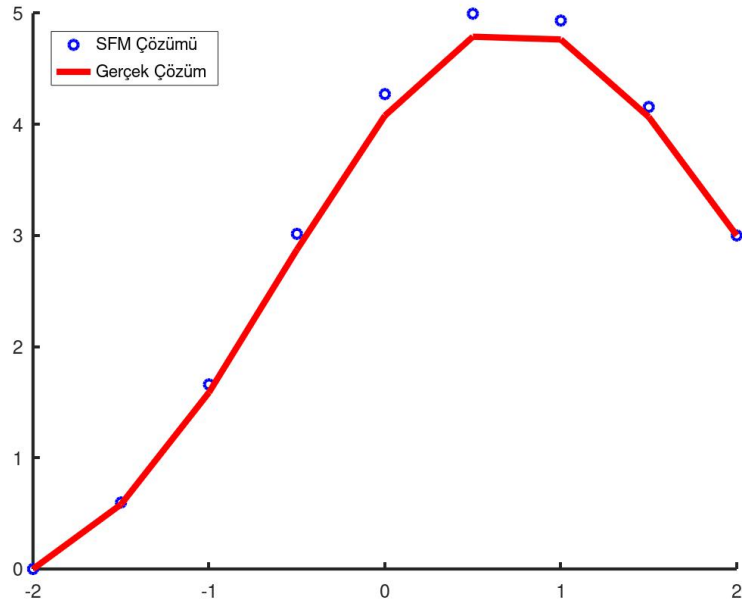
$$Ay = b \quad (7.1.27)$$

tridiagonal matris denklemleri biçiminde ifade edilebilir. Burada A matrisi ve y ile b vektörleri aşağıdaki eşitliklerle tanımlıdır.

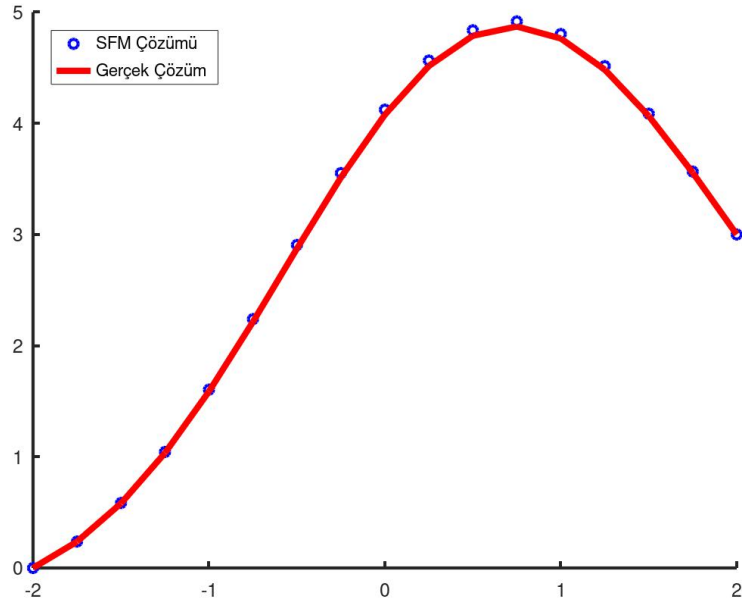
$$A = \begin{pmatrix} -8 + (x_1^2 + 2)h^2 & 4 + 2hx_1 & \cdots & 0 \\ 4 + 2hx_2 & -8 + (x_2^2 + 2)h^2 & \cdots & 0 \\ 0 & 4 + 2hx_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 4 + 2hx_{48} \\ 0 & 0 & \cdots & -8 + (x_{49}^2 + 2)h^2 \end{pmatrix},$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{48} \\ y_{49} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -3(4 + 2hx_{49}) \end{pmatrix}$$

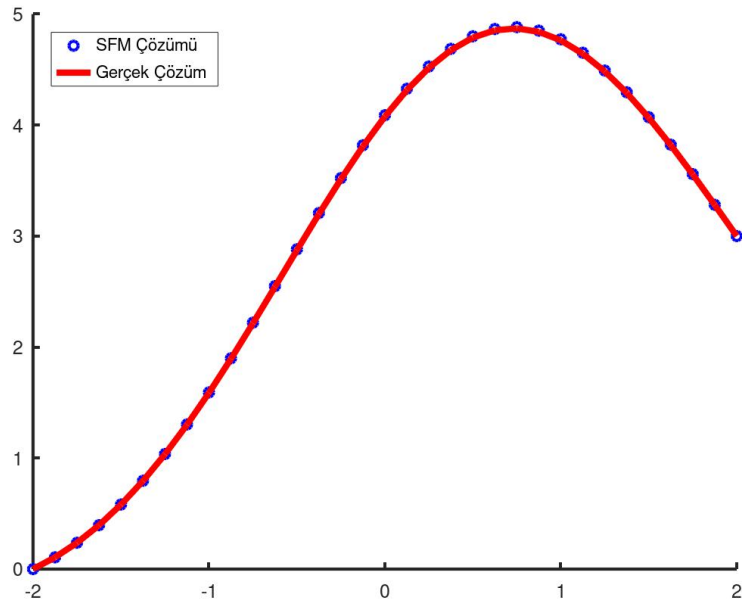
Sistemin çözümü MATLAB-Octave kullanılarak elde edildi. Elde edilen sonlu fark çözümleri (7.1.23) gerçek çözümüne grafiksel olarak karşılaştırıldı (bakınız Şekil.7.19, Şekil.7.20, Şekil.7.21 ve Şekil.7.22).



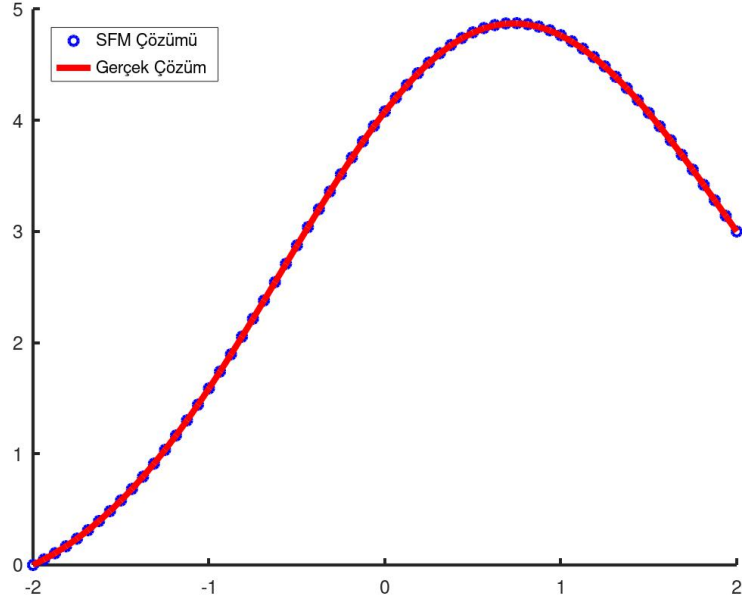
Şekil. 7.19: (7.1.20)-(7.1.21) sınır değer probleminin N=8 için SFM-çözümü ve gerçek çözümü



Şekil. 7.20: (7.1.20)-(7.1.21) sınır değer probleminin $N=16$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü



Şekil. 7.21: (7.1.20)-(7.1.21) sınır değer probleminin $N=32$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü



Şekil. 7.22: (7.1.20)-(7.1.21) sınır değer probleminin $N=64$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü

Aşağıdaki MMH çizelgesinde yöntemin yakınsaklık analizi için farklı N değerlerine ait gerçek çözüm ile yaklaşık çözüm arasındaki maksimum mutlak hata hesaplanmış olup, N değeri büyüdükçe MMH'nın sifıra yaklaştığı görülmektedir.

Çizelge. 7.5: (7.1.20)-(7.1.21) sınır-değer problemi için MMH tablosu

N	h	$\ E \ _{\infty}$	N	h	$\ E \ _{\infty}$
4	$\frac{3}{4}$	0.067625	128	$\frac{3}{128}$	0.000061007
8	$\frac{3}{8}$	0.015996	256	$\frac{3}{256}$	0.000015250
16	$\frac{3}{16}$	0.0039296	512	$\frac{3}{512}$	0.0000038124
32	$\frac{3}{32}$	0.00097613	1024	$\frac{3}{1024}$	0.00000095310
64	$\frac{3}{64}$	0.00024413	2048	$\frac{3}{2048}$	0.00000023827

Uyarı 7.1.7. Şekil.(Şekil.7.19, Şekil.7.20, Şekil.7.21 ve Şekil.7.22)'te gerçek çözüm (7.1.23), sırasıyla $N = 8, 16, 32$ ve 64 için sayısal SFM çözümleri ile karşılaştırıldı. Bu grafik gösterimlerden, N ızgara noktası sayısı arttıkça SFM çözümleri ile kesin çözüm arasındaki hatanın azaldığı görülebilir.

Örnek 7.1.8. Diferansiyel denklemden oluşan aşağıdaki iki aralıklı SLP'yi göz önünde alalım.

$$y'' + xy' + \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\right)y = 0, \quad x \in [-2, 0) \cup (0, 2]$$

diferansiyel denklemi $x = -2$ ve $x = 2$ uç noktalarındaki

$$y(-2) = 0, \quad y(2) = 3$$

sınır koşullarına ve

$$\begin{aligned} y(0-0) &= 3y(0+0) \\ y'(0-0) &= 2y'(0+0) \end{aligned} \tag{7.1.28}$$

geçiş şartlarına sahiptir. İlk olarak (7.1.20)-(7.1.21) denkleminin (7.1.28) geçiş şartları içeren gerçek çözümü

$$y = \begin{cases} \frac{9}{5}e^{\frac{4-x^2}{4}}(x+2), & x \in [-2, 0) \\ \frac{3}{10}e^{\frac{4-x^2}{4}}(3x+4), & x \in (0, 2] \end{cases}$$

biçiminde elde edilmiştir.

Şimdi geçiş probleminin çözümünü araştıracağız. Eğer $N = 32$ seçersek, (7.1.28) geçiş şartlarından

$$y(0-0) = 3y(0+0)$$

şartı için $x = 0$ singüler noktasının sağ ve sol komşuluğunda

$$y_{16} - 3y_{17} = 0 \tag{7.1.29}$$

denklemi ve

$$y'(0-0) = 2y'(0+0)$$

şartı ise

$$\frac{y_{16} - y_{14}}{2h} = 2 \left(\frac{y_{19} - y_{17}}{2h} \right)$$

denklemini elde edilir. Böylece

$$y_{14} - y_{16} - 2y_{17} + 2y_{19} = 0 \quad (7.1.30)$$

fark denklemini elde edilir. Bu sistemin her denkleminin x_{i-1} , x_i ve x_{i+1} adlı üç düğüm noktasındaki çözüm değerlerini içerdiğine dikkat edin. Problemin $[-2, 0)$ aralığı için $i = 1, 2, \dots, 15$ noktalarında

$$(4 - 2hx_i)y_{i-1} + (-8 + ((x_i)^2 + 2)h^2)y_i + (4 + 2hx_i)y_{i+1} = 0 \quad (7.1.31)$$

denklemini, $(0, 2]$ aralığı ve $i = 1, 2, \dots, 15$ noktaları için

$$(4 - 2hx_i)y_{i-1} + (-8 + ((x_i)^2 + 2)h^2)y_i + (4 + 2hx_i)y_{i+1} = 0$$

denklemini ve $x = 0$ singüler noktasının sağ ve sol komşuluğunda ise

$$\begin{cases} y_{16} - 3y_{17} = 0 \\ y_{14} - y_{16} - 2y_{17} + 2y_{19} = 0 \end{cases} \quad (7.1.32)$$

denklemleri elde edilir. Bu sistemin her denkleminin x_{i-1} , x_i ve x_{i+1} .

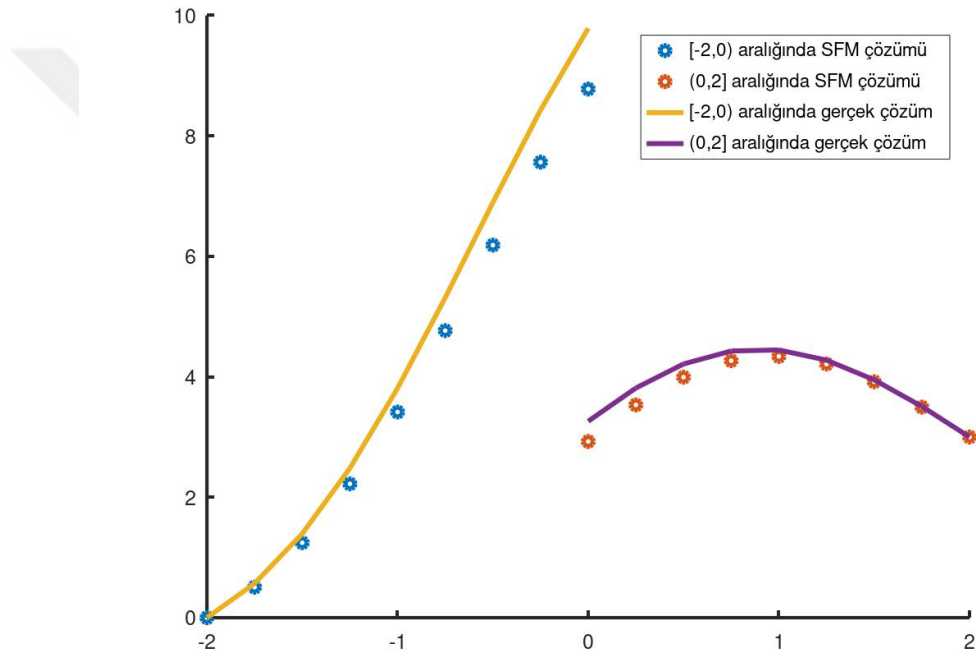
üç düğüm noktasındaki çözüm değerlerini içerdiğine dikkat edin. (7.1.31) denklemlerine (7.1.32) denklemleri ekleyerek $1 \leq i \leq 14$ ve $17 \leq i \leq 31$ için cebirsel denklemlerin

$$\begin{aligned} y_0 &= 0 \\ \left(1 - \frac{1}{2}hp_i\right)y_{i-1} + (-2 + h^2q_i)y_i + \left(1 + \frac{1}{2}hp_i\right)y_{i+1} &= h^2f(x_i), \quad 1 \leq i \leq 14 \\ y_{16} - 3y_{17} &= 0 \\ y_{14} - y_{16} - 2y_{17} + 2y_{19} &= 0 \\ \left(1 - \frac{1}{2}hp_i\right)y_{i-1} + (-2 + h^2q_i)y_i + \left(1 + \frac{1}{2}hp_i\right)y_{i+1} &= h^2f(x_i), \quad 17 \leq i \leq 31 \\ y_{32} &= 3 \end{aligned}$$

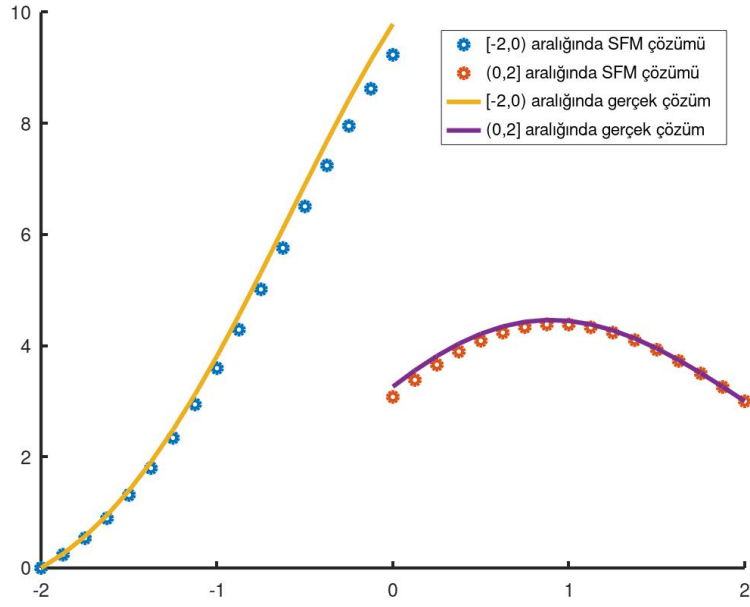
ile birlikte

$$My = B \quad (7.1.33)$$

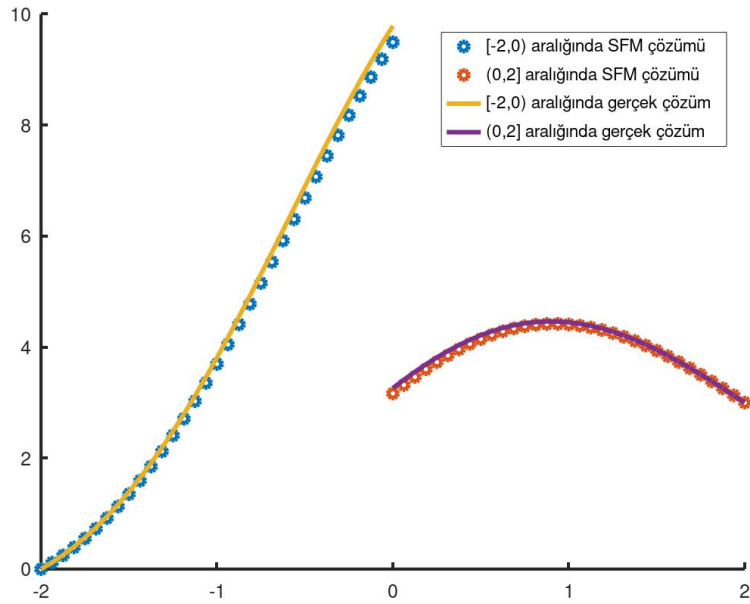
lineer denklem sistemi elde edilir. Burada M elde edilen denklem sisteminin 32×32 boyutunda katsayılar matrisidir ve artık tridiagonal değildir. Lineer cebirsel denklem sistemi matris-vektör formunda yazılıp MATLAB/Octave kullanılarak kolayca çözülebilir. Elde edilen sonuçların grafiksel gösterimi aşağıda Şekil.7.23, Şekil.7.24, Şekil.7.25 ve Şekil.7.26 verilmiştir.



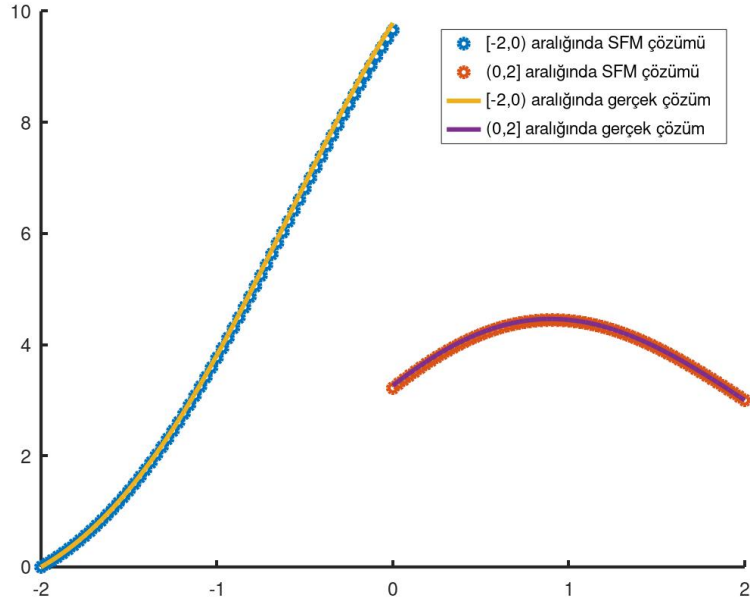
Şekil. 7.23: (7.1.20)-(7.1.28) sınır değer geçiş-probleminin $N=16$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü



Şekil. 7.24: (7.1.20)-(7.1.28) sınır değer geçiş-probleminin $N=32$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü



Şekil. 7.25: (7.1.20)-(7.1.28) sınır değer geçiş-probleminin $N=64$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü



Şekil. 7.26: (7.1.20)-(7.1.28) sınır değer geçiş-probleminin $N=128$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü

Aşağıdaki MMH çizelgesinde yöntemin yakınsaklık analizi için farklı N değerlerine ait gerçek çözüm ile yaklaşık çözüm arasındaki maksimum mutlak hata hesaplanmış olup, N değeri büyüdükçe MMH'nın sıfıra yaklaştığı görülmektedir. Bu da bize yöntemin gerçek çözüme yaklaştığını yani yakınsak olduğunu göstermektedir.

Çizelge. 7.6: (7.1.20)-(7.1.28) sınır değer-geçiş problemi için MMH tablosu

N	h	$\ E \ _{\infty}$	N	h	$\ E \ _{\infty}$
4	$\frac{3}{4}$	2.5858	32	$\frac{3}{32}$	0.55334
8	$\frac{3}{8}$	1.7106	64	$\frac{3}{64}$	0.29347
16	$\frac{3}{16}$	1.0080	128	$\frac{3}{128}$	0.12946143

Örnek 7.1.9.

$$y'' + 2y' + 4e^{4x}y = 0, \quad x \in [-1, 0) \cup (0, 1] \quad (7.1.34)$$

Sturm-Liouville denkleminde $x = -1$ ve $x = 1$ uç noktalarındaki

$$y(-1) = 2, \quad y(1) = 0 \quad (7.1.35)$$

sınır koşullarından ve $x = 0$ geçiş noktasında

$$y(0-0) = 2y(0+0), \quad y'(0-0) = 3y'(0+0) \quad (7.1.36)$$

geçiş şartlarından oluşan problemi gözönüne alalım. Önce (7.1.34)-(7.1.35) problemini (7.1.36) geçiş şartları olmadan ele alıyoruz. Bu halde problemin gerçek çözümü

$$y = \frac{2\sin(e^{2x} - e^2)}{\csc\left(\frac{1-e^4}{e^2}\right)e^{2x+2}} \quad (7.1.37)$$

biçiminde bulunur. Basitlik olması açısından $N = 50$ olmak üzere $h = 0,04$ için $x_i = -1 + ih$, $i = 0, 1, \dots, 50$ tek biçimli Kartezyen ızgarasını kullanacağız. Özel olarak $x_0 = -1$, $x_{50} = 1$ elde edilir.

y' ve y'' türevlerinin merkezi sonlu fark (CFD) yaklaşımı şu şekilde tanımlanır:

$$y'(x) \approx \frac{1}{2} (D_+y(x) + D_-y(x)) \quad (7.1.38)$$

$$y''(x) \approx \frac{1}{h} (D_+y(x) - D_-y(x)). \quad (7.1.39)$$

$D_+y(x)$ ve $D_-y(x)$, $y(x)$ 'nin ileri sonlu farkını ve geri sonlu farkını belirtir.

$x = x_i$ tipik bir grid noktasında (7.1.34) diferansiyel denkleminde MSF uygulayarak ve $y_i = y(x_i)$ 'yi ifade ederek,

$$(1-h)y_{i-1} + (-2+4h^2e^{4x_i})y_i + (1+h)y_{i+1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 49. \quad (7.1.40)$$

sonlu fark denklemleri elde edilir. Yani $y_1, y_2, \dots, y_{49}$ değişkenlerine göre lineer cebirsel denklem sistemi bulunur. (7.1.40) doğrusal cebirsel denklem sistemi tridiagonal matris-vektör formunda yazılabilir.

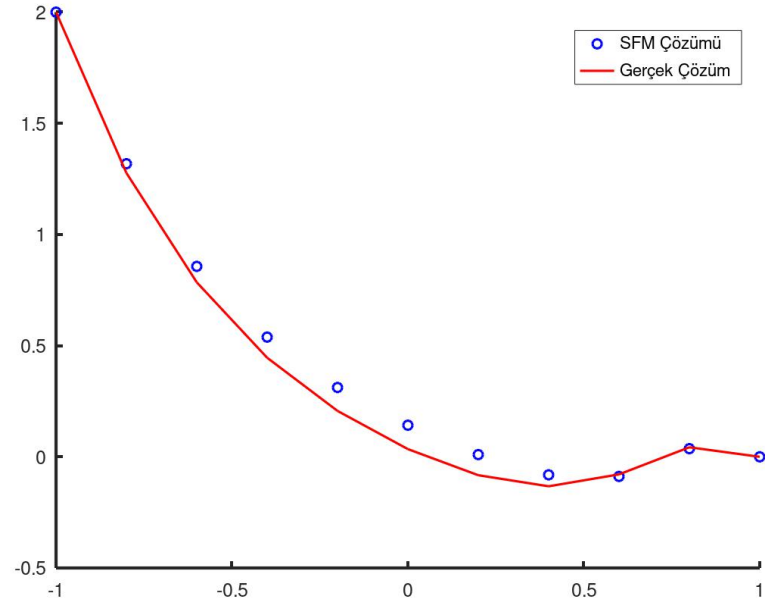
$$Ay = b \quad (7.1.41)$$

Burada

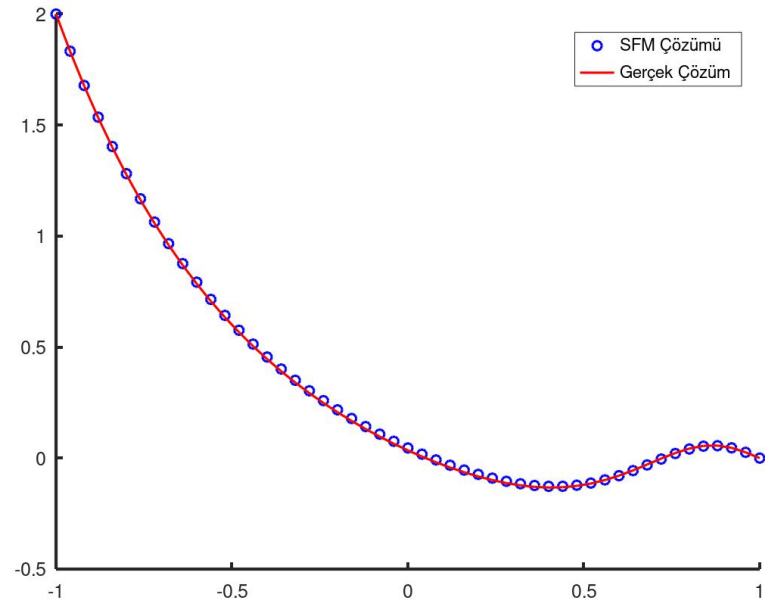
$$A = \begin{pmatrix} -2 + 4h^2 e^{4x_1} & 1 + h & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 - h & -2 + 4h^2 e^{4x_2} & 1 + h & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 - h & -2 + 4h^2 e^{4x_3} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 + 4h^2 e^{4x_{48}} & 1 + h \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 - h & -2 + 4h^2 e^{4x_{49}} \end{pmatrix},$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{47} \\ y_{48} \\ y_{49} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 - h \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

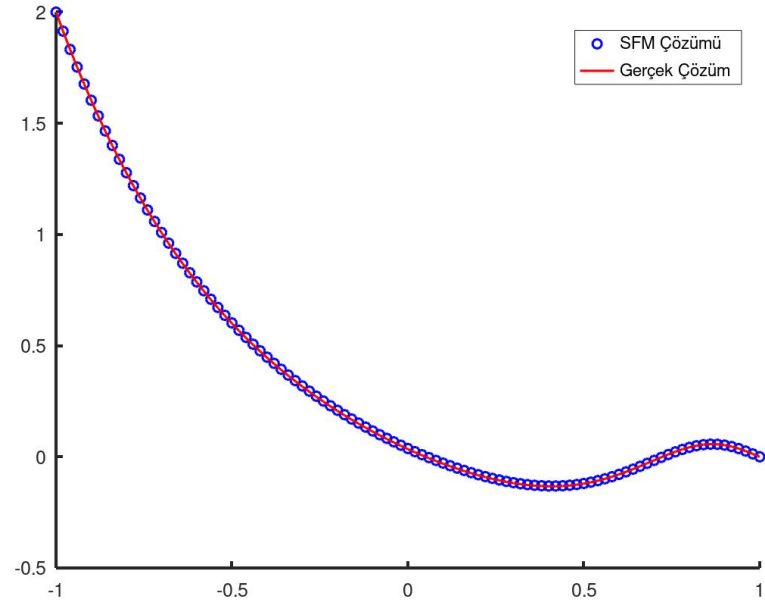
Bu sistemin çözümü MATLAB-Octave kullanılarak bulunabilir. Elde edilen sayısal FDM çözümleri, gerçek çözümle grafiksel olarak karşılaştırılır (bkz. Şekil. 7.19, Şekil.7.20, Şekil.7.21 ve Şekil.7.22).



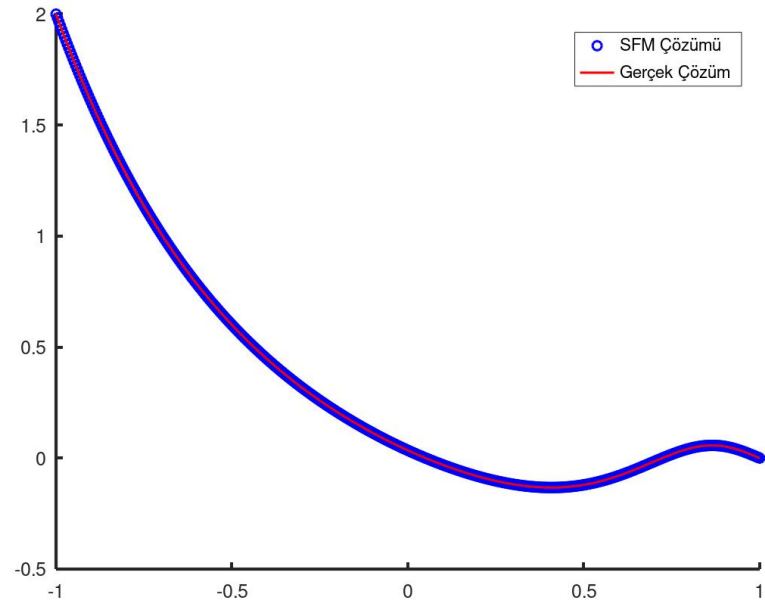
Şekil. 7.27: (7.1.34), (7.1.35) sınır değer probleminin $N=10$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü



Şekil. 7.28: (7.1.34), (7.1.35) sınır değer probleminin $N=50$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü



Şekil. 7.29: (7.1.34), (7.1.35) sınır değer probleminin $N=100$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü



Şekil. 7.30: (7.1.34), (7.1.35) sınır değer probleminin $N=500$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü

Örnek 7.1.10. İki aralıklı SLP'yi ele alalım.

$$y'' + 2y' + 4e^{4x}y = 0, \quad x \in [-1, 0) \cup (0, 1] \quad (7.1.42)$$

iki aralıklı SDP'i $x = -1$ ve $x = 1$ uç noktalarındaki

$$y(-1) = 2, \quad y(1) = 0 \quad (7.1.43)$$

sınır koşullarına ve

$$y(0-0) = 2y(0+0), \quad y'(0-0) = 3y'(0+0) \quad (7.1.44)$$

geçiş şartlarına sahiptir. Şimdi (7.1.42)-(7.1.44) sınır değer geçiş problemini inceleyeceğiz. $N = 49$ seçer ve (7.1.44) geçiş şartlarını (7.1.42)-(7.1.43) denkleminde uygularsak,

$$y_{24} - 2y_{25} = 0 \quad (7.1.45)$$

ve

$$y_{22} - y_{24} - 3y_{25} + 3y_{27} = 0 \quad (7.1.46)$$

biçiminde iki ek cebirsel denklemimiz olur. (7.1.40), (7.1.45), (7.1.46) lineer denklemlerin cebirsel sisteminin çözümü MATLAB/Octave kullanılarak bulunabilir. Elde edilen sonuçların grafik gösterimi aşağıdaki (7.31)de verilmiştir.

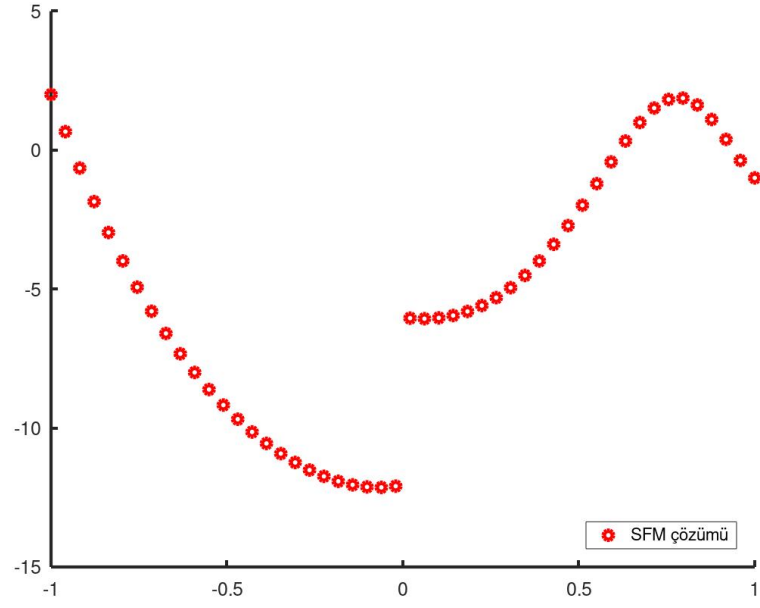
Çizelgedeki değerler yardımıyla adım uzunluğu azaldıkça hatanın azaldığını gösterdik. Şimdi (7.1.34) probleminin yakınlığını inceleyeceğiz. (7.1.38) denkleminde

$$h^2 \|f\|_{\infty} \geq \|E\|_{\infty} \min |qx_i| \quad (7.1.47)$$

elde ederiz. (7.1.47)'den, kesme hatasının maksimum mutlak hatası

$\|E\|_{\infty} \min |qx_i|$ biçimindedir.

$$\|E\|_{\infty} = 0.0027852$$



Şekil. 7.31: (7.1.34)-(7.1.36) geçiş probleminin N=49 için SFM-çözümü ve gerçek çözümü

ve

$$\min |qx_i| = 4e^{4x_{\min}} = 0.00023945$$

olduğu için

$$\|E\|_{\infty} \min |qx_i| = 0.00023946$$

ifadesini elde ederiz. Bu değer maksimum kesme hatasına yakındır.

Çizelge. 7.7: (7.1.34)-(7.1.36) sınır değer-geçiş problemi için MMH tablosu

N	h	$\ E \ _{\infty}$
10	0.2	0.10745
50	0.04	0.011064
100	0.02	0.0027852
500	0.004	0.00011167
1000	0.002	0.000027918

Örnek 7.1.11.

$$y'' - 2(x-1)y' + ((x-1)^2 - 1)y = 0, \quad x \in [-1, 1] \quad (7.1.48)$$

ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemini

$$y(-1) = 0, \quad y(1) = 2 \quad (7.1.49)$$

sınır değer koşulları ile ele alalım. Denklemin gerçek çözümü

$$y = e^{\frac{1}{2}(x-1)^2}(x+1) \quad (7.1.50)$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Problemin $[-1, 1]$ aralığındaki grid noktaları

$$x_i = 1 + ih, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

şeklinde yazılır. Buradan $x_0 = -1, x_N = 1$ elde edilir. y' ve y'' türevleri

$$y'(x) \approx \frac{1}{2} (D_+ y(x) + D_- y(x)) \quad (7.1.51)$$

ve

$$y''(x) \approx \frac{1}{h} (D_+ y(x) - D_- y(x)) \quad (7.1.52)$$

merkezi sonlu farklar formülleri yardımıyla yeniden yazılır. Burada $D_+y(x)$ ve $D_-y(x)$ sırasıyla $y(x)$ 'in ileri ve geri sonlu fark açılımını gösterir.

$x = x_i$ ve $y_i = y(x_i)$ biçimde gösterilir. Burada $N = 32$ seçersek (7.1.51) ve (7.1.52) türev açılımları (7.1.48) probleminde yazılarak

$$\begin{aligned} (2 + 2h(x_i - 1))y_{i-1} + (-4 + 2h^2((x_i - 1)^2 - 1))y_i + \\ + (2 - 2h(x_i - 1))y_{i+1} = 0, \\ i = 1, 2, \dots, 31. \end{aligned} \quad (7.1.53)$$

biçiminde sonlu fark şeması elde edilir. Artık $y_1, y_2, \dots, y_{31}$ değişkenlerine göre lineer cebirsel denklem sistemi elde ederiz. (7.1.53) cebirsel lineer denklem sistemi

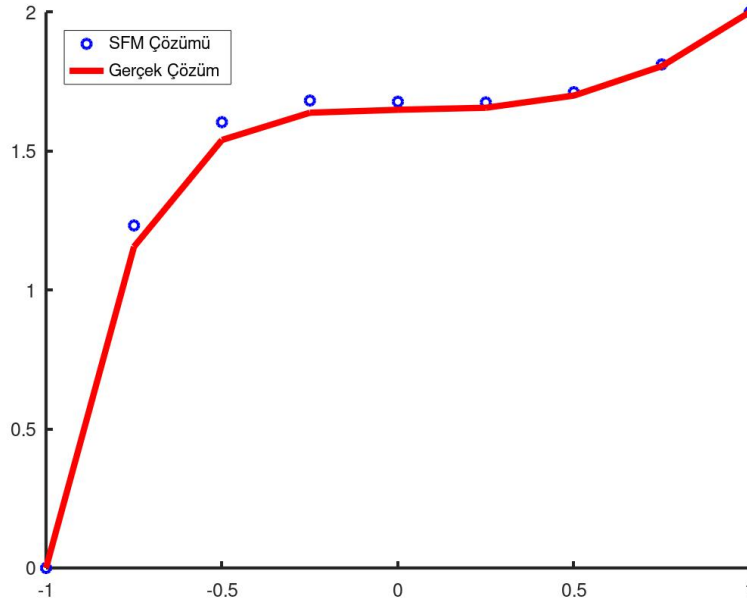
$$Ay = b$$

tridiagonal matris-vektör formunda yazılabilir. Burada

$$A = \begin{pmatrix} -4 + 2h^2((x_1 - 1)^2 - 1) & 2 - 2h(x_1 - 1) & \cdots & 0 & 0 \\ 2 + 2h(x_2 - 1) & -4 + 2h^2((x_2 - 1)^2 - 1) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 - 2h(x_{30} - 1) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 - 2h(x_{31} - 1) \end{pmatrix},$$

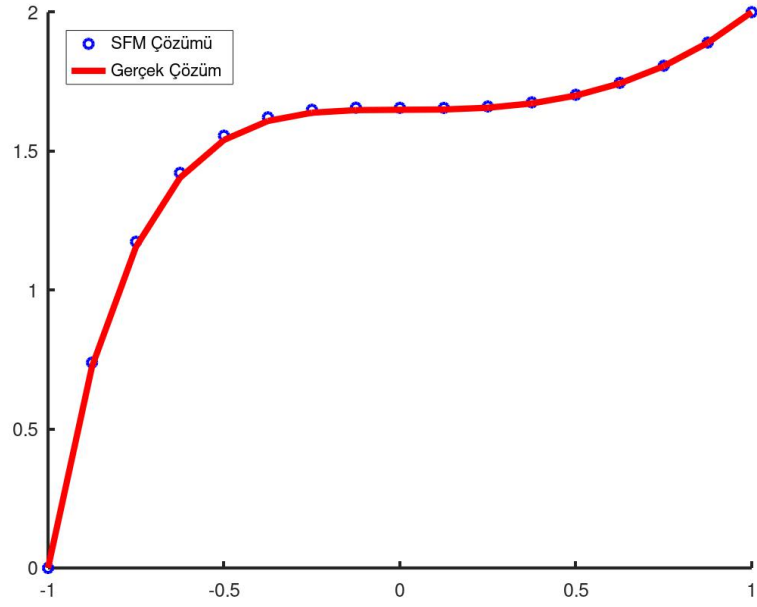
$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{30} \\ y_{31} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 4h(x_{31} - 1) - 4 \end{pmatrix}$$

biçimde elde edilir. Bu sistemin çözümü MATLAB-Octave kullanılarak elde edildi ve elde edilen sayısal SFM çözümleri, gerçek çözüm ile grafiksel olarak karşılaştırıldı (bakınız, Şekil.7.32, Şekil.7.33, Şekil.7.34 ve Şekil.7.35).

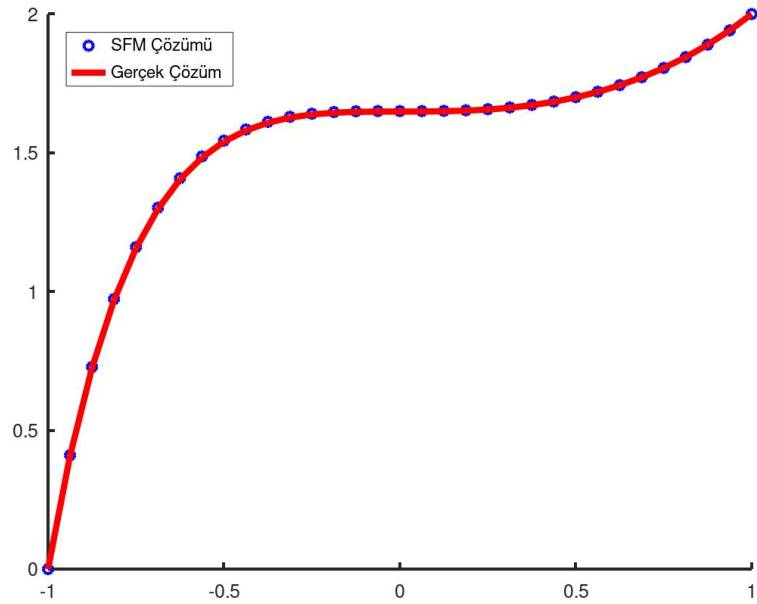


Şekil. 7.32: (7.1.48)-(7.1.49) sınır değer probleminin N=8 için SFM-çözümü ve gerçek çözümü

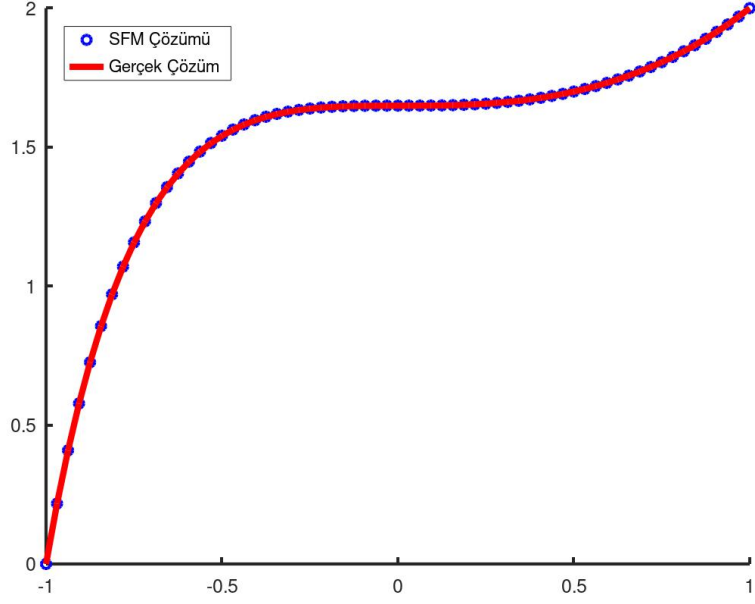
Aşağıdaki MMH çizelgesinde yöntemin yakınsaklık analizi için farklı N değerlerine ait gerçek çözüm ile yaklaşık çözüm arasındaki maksimum mutlak hata hesaplanmış olup, N değeri büyüdükçe MMH'nın sifıra yaklaştığı görülmektedir. Bu da bize yöntemin gerçekte çözüme yaklaştığını yani yakınsak olduğunu göstermektedir.



Şekil. 7.33: Problem (7.1.48)-(7.1.49) sınır değer probleminin $N=16$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü



Şekil. 7.34: Problem (7.1.48)-(7.1.49) sınır değer probleminin $N=32$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü



Şekil. 7.35: Problem (7.1.48)-(7.1.49) sınır değer probleminin $N=64$ için SFM-çözümü ve gerçek çözümü

Çizelge. 7.8: (7.1.48)-(7.1.49) sınır-değer problemi için MMH tablosu

N	h	$\ E \ _{\infty}$	N	h	$\ E \ _{\infty}$
8	$\frac{2}{8}$	0.076421	128	$\frac{2}{128}$	0.00027872
16	$\frac{2}{16}$	0.018014	256	$\frac{2}{256}$	0.000069687
32	$\frac{2}{32}$	0.0044654	512	$\frac{2}{512}$	0.000017421
64	$\frac{2}{64}$	0.0011158	1024	$\frac{2}{1024}$	0.0000043552

Örnek 7.1.12.

$$y'' - 2(x-1)y' + ((x-1)^2 - 1)y = 0, x \in [-1, 1] \quad (7.1.54)$$

ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemini

$$y(-1) = 0, \quad y(1) = 2 \quad (7.1.55)$$

sınır değer koşulları ve

$$y(0-0) = 3y(0+0), \quad y'(0-0) = 2y'(0+0) \quad (7.1.56)$$

geçiş şartları ile inceleyeceğiz. $N = 64$ seçer ve (7.1.56) geçiş şartlarını uygularsak, o zaman iki ek cebirsel denkleminiz olur. y_{32} değeri $x = 0$ 'a en yakın noktada hesaplandığı ve $x = 0$ 'ın solunda kaldığı için, $y_{32} \approx y(0-0)$ ve benzer şekilde y_{33} değeri $x = 0$ 'a en yakın noktada hesaplandığı için ve $x = 0$ 'ın sağında yer aldığı için, $y_{33} \approx y(0+0)$ ile tanımladık. Böylece

$$y_{32} - 3y_{33} = 0 \quad (7.1.57)$$

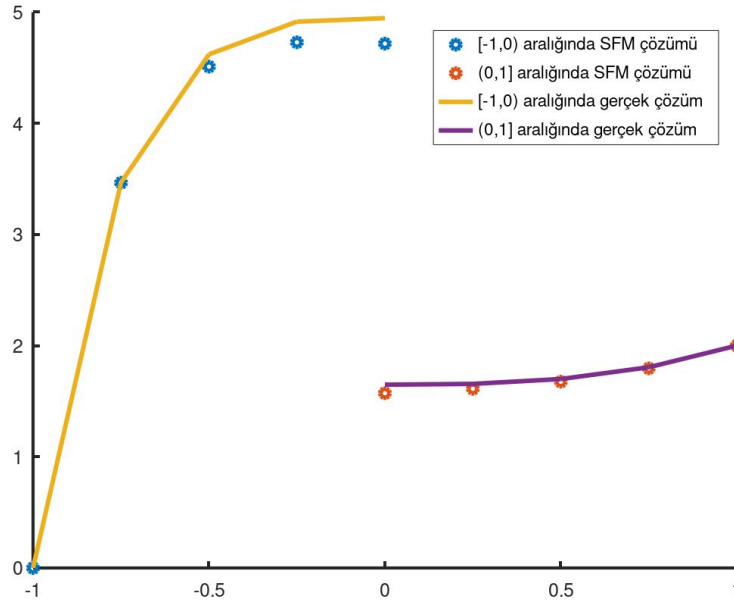
ve

$$y_{30} - y_{32} - 2y_{33} + 2y_{35} = 0 \quad (7.1.58)$$

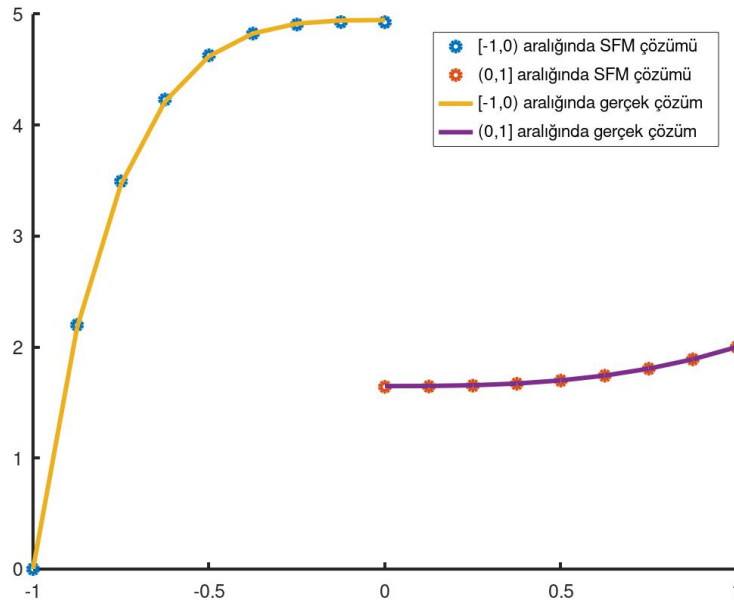
eşitlikleri elde edilir. (7.1.54)-(7.1.55) denklem sistemlerine (7.1.57), (7.1.58) denklemleri eklenerek,

$$MY = B$$

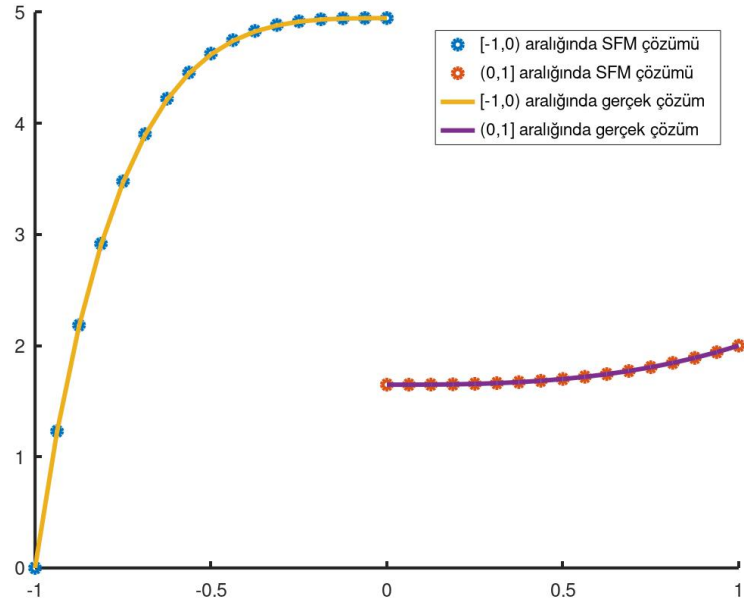
formunda bir lineer denklem sistemi elde edilir. Bu lineer cebirsel denklem sisteminin çözümü Octave kullanılarak elde edildi.



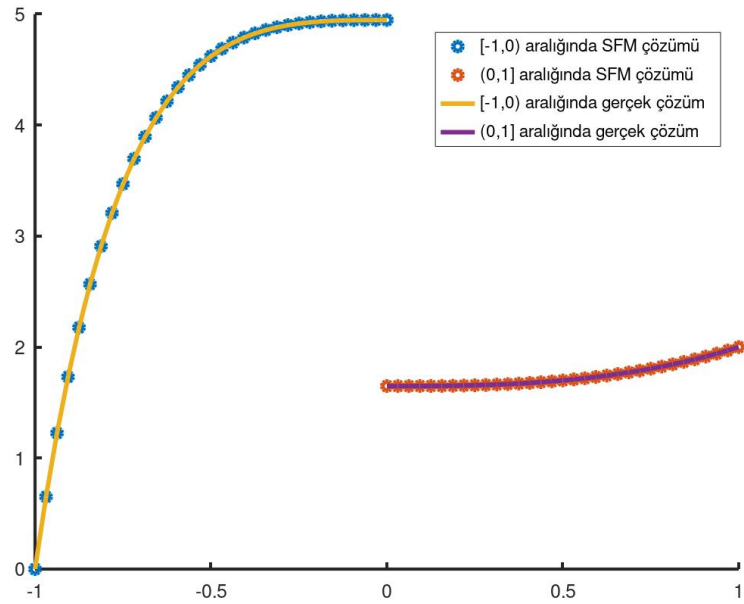
Şekil. 7.36: Problem (7.1.54)-(7.1.56) sınır değer geçiş-probleminin $N=8$ için göre SFM-çözümü ve gerçek çözümü



Şekil. 7.37: Problem (7.1.54)-(7.1.56) sınır değer geçiş-probleminin $N=16$ için göre SFM-çözümü ve gerçek çözümü



Şekil. 7.38: Problem (7.1.54)-(7.1.56) sınır değer geçiş-probleminin $N=32$ için göre SFM-çözümü ve gerçek çözümü



Şekil. 7.39: Problem (7.1.54)-(7.1.56) sınır değer geçiş-probleminin $N=64$ için göre SFM-çözümü ve gerçek çözümü

8. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada; $[a, c) \cup (c, b]$ biçiminde iki aralıkta ve $x = c$ iç tekil noktasında geçiş şartları içeren sınır değer problemlerinin SFM ile elde edilen yaklaşık çözümleri incelenmiştir. Bu çalışmayı standart SFM'den ayıran en önemli farklılık iç tekil noktasında geçiş şartları içermesidir. SFM'nin en temel özelliği, tanım aralığını N tane ayrık aralığa bölüp problemdeki türev ifadelerin yerine sonlu fark açılımlarını yazmaktır. Elde edilen sonlu fark şemasında her bir grid noktası için birer denklem elde edilir. Elde edilen bu denklemler lineer denklem sistemini oluşturur. Burada en karakteristik olan ise elde edilen katsayılar matrisinin özellikleridir. Bu özellikler;

- N ayrık aralık için $(N - 1) \times (N - 1)$ boyutunda kare matris elde edilir.
- Elde edilen katsayılar matrisi tridiagonalıdır.

Bu tezde çalışılan yeni yöntemde ise;

- Problemin sonlu fark yaklaşımında $[a, c)$ ve $(c, b]$ aralıklarında iki farklı başlangıç değer problemi ve c tekil noktası etrafında ise iki denklemlilik geçiş problemi olmak üzere üç farklı denklem sistemi elde edilir.
- Elde edilen denklem sistemlerinden elde edilen genişletilmiş katsayılar matrisi artık $(N - 1) \times (N - 1)$ boyutunda değil $N \times N$ boyutundadır.
- Katsayılar matrisi yeni tip bir matristir.

Ayrıca yöntemimizin özünü oluşturan $y(c-0) = my(c+0)$, $y'(c-0) = ny'(c+0)$ geçiş şartlarında $m = n = 1$ alarak singüler noktası olmayan sınır değer problemlerinin gerçek çözüme yakın yaklaşık çözümleri de bulunabilmektedir.

Bu doktora tez çalışmasında ister elde edilen sonuçlar, ister geliştirilen yöntem, isterse de uygulama alanları açısından Sonlu Farklar yöntemine önemli bir katkı sağlayacağı beklenmektedir. Bu yeni yöntem daha genel şekilde verilmiş sınır-değer problemlerine de uygulanabilir. Örneğin sadece iki aralıklı değil, genel olarak çok-aralıklı problemlere de uygulanabilir. Tezde bulunan sonuçlar bir çok fizik problemine de uygulanabilir. Örneğin farklı fiziksel özelliklere sahip olan maddeler

arasındaki ısı transferi problemi, farklı dielektrik özelliklere sahip ferromanyetik ortamlardaki süreçler vs. çok-aralıklı sınır değer problemleriyle modellenmektedir. Bu tür problemlerin standart SFM ile çözümünün zorlukları karşısında, geliştirdiğimiz algoritma ile çözülebilir.



KAYNAKLAR

- Al-Gwaiz, M. A., 2008. Sturm-Liouville theory and its applications (Vol. 264). Berlin: Springer.
- Ashyralyev, A., Sobolevskii, P. E., 2004. New difference schemes for partial differential equations (Vol. 148). Springer Science Business Media.
- Ashyralyev, C., Dural, A., Sozen, Y., 2012. Finite difference method for the reverse parabolic problem. In Abstract and Applied Analysis (Vol. 2012). Hindawi.
- Ashyralyev, A., Agirseven, D., 2013. On convergence of difference schemes for delay parabolic equations. Computers Mathematics with Applications, 66(7), 1232–1244.
- Ashyralyev, A., Prenov, R., 2014. Finite-difference method for the hyperbolic system of equations with nonlocal boundary conditions. Advances in Difference Equations, 2014(1), 1–24.
- Ashyralyev, A., Abdalmohammed, B., 2020. A numerical algorithm for the involutory hyperbolic problem with the Neumann condition. In Fifth International Conference on Analysis and Applied Mathematics (p. 54).
- Ascher, U. M., Mattheij R. M. M., and Russell R. D., 1994. Numerical solution of boundary value problems for ordinary differential equations. Vol. 13, Siam.
- Allahverdiev, B. P., Tuna, H., 2019. Eigenfunction expansion for singular Sturm-Liouville problems with transmission conditions. Electronic Journal of Differential Equations, 2019(03), pp. 1–10.
- Aydemir K., Mukhtarov O.Sh., 2017. Class of Sturm Liouville Problems with Eigenparameter Dependent Transmission Conditions. Numerical Functional Analysis and Optimization, 38:10, 1260–1275, DOI: 10.1080/01630563.2017.1316995
- Beroš, I., Hlupic, N., Basch, D., 2021. Modification of the finite-difference method for solving a special class of nonlinear two-point boundary value problems. Computer Science, 16(1), 487–502.
- Bickley, W. G., Michaelson, S., Osborne, M. R., 1961. On finite-difference methods for the numerical solution of boundary-value problems. Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences, 262(1309), 219–236.
- Burden, R. L., Faires, J. D., 1997. Numerical Analysis. Brooks, Cole Pub. Co., Pacific Grove, California, 609.
- Céa, J. (1964). Approximation variationnelle des problèmes aux limites. In Annales de l'institut Fourier (Vol. 14, No. 2, pp. 345–444).
- Chawla, M. M., Katti, C. P., 1982. Finite difference methods and their convergence for a class of singular two point boundary value problems. Numerische Mathematik, 39(3), 341–350.
- Chawla, M. M., Katti, C. P., 1984. A finite-difference method for a class of singular two-point boundary-value problems. IMA journal of numerical analysis, 4(4), 457–466.

- Crank, J., Nicolson, P., 1947. A Practical Method for Numerical Evaluation of Solutions of Partial Differential Equations of the Heat-Conduction Type. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 43, 50–67.
- Çavuşoğlu, S., Mukhtarov, O., Olğar, H., 2021. Finite difference method for approximate solution of a boundary value problem with interior singular point. *Konuralp Journal of Mathematics (KJM)*, 9(1), 40–48.
- Çavuşoğlu, S., Mukhtarov O. Sh, 2021. A new finite difference method for computing approximate solutions of boundary value problems including transition conditions. *Bulletin of the Karaganda university Mathematics series*, 102 (2) , 54–61.
- Cavusoglu, S., Mukhtarov, O. S. 2022. A New treatment of the finite difference method for 2-Interval Sturm-Liouville problems. *Journal| MESA*, 13(1), 217–227.
- Dem'yanovich, Y. K., 1964. The mesh method for some problems of mathematical physics. In *Dokl. Akad. Nauk SSSR* (Vol. 159, No. 2, pp. 250–253).
- Doedel, E. J., 1979 . Finite difference collocation methods for nonlinear two-point boundary value problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 16(2), 173–185.
- Doedel, E. J., Reddien, G. W., 1984. Finite difference methods for singular two-point boundary value problems. *SIAM journal on numerical analysis*, 21(2), 300–313.
- El-Gebeily, M. A., Abu-Zaid, I. T., 1998. On a finite difference method for singular two-point boundary value problems. *IMA journal of numerical analysis*, 18(2), 179–190.
- Fack, V., Berghe, G. V., De Meyer, H. E., 1987. Some finite difference methods for computing eigenvalues and eigenvectors of special two-point boundary value problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 20, 211–217.
- Feng, K., (1965). Finite difference schemes based on variational principles. *Appl. Math. Comput.* Math, 2, 238–262.
- Frey, P., 2008. Curso Electivo Y Seminario Avanzado de Matematicas I: Part II: Numerical methods. 1. The finite difference method. <https://www.ljll.math.upmc.fr/frey/ma691.html>; (20.12.2022).
- Friedrichs, K. O., 1962. A finite difference scheme for the Neumann and the Dirichlet problem (No. NYO-9760). New York Univ., New York. Atomic Energy Commission Computing and Applied Mathematics Center.
- Friedrichs, K.O., Keller, H.B., 1966. A finite difference scheme for generalized Neumann problems. *Numerical Solution of Partial Differential Equations*. Academic Press, New York. pp. 1–19.
- Iserles, A., 2008. *A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations* (2nd ed., Cambridge Texts in Applied Mathematics). Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9780511995569
- Jamet, P., 1970. On the convergence of finite-difference approximations to one-dimensional singular boundary-value problems. *Numerische Mathematik*, 14(4), 355–378.

- Katti, C. P., Baboo, S. N., Sivaloganathan, S., 1996. On the convergence of finite difference methods for a class of two-point boundary value problems with periodic boundary conditions. *Applied mathematics and computation*, 75(2-3), 287–302.
- Keller, H. B., 1965. On the accuracy of finite difference approximations to the eigenvalues of differential and integral operators. *Numerische Mathematik*, 7(5), 412-419.
- Kincaid, D., Kincaid, D. R., Cheney, E. W., 2009. *Numerical analysis: mathematics of scientific computing*, (Vol. 2). American Mathematical Soc.
- Kress, R., 1998. *Numerical Analysis: V. 181*. Springer Verlag.
- Kumar, M., 2002. A three-point finite difference method for a class of singular two-point boundary value problems. *Journal of computational and applied mathematics*, 145(1), 89–97.
- Kumar, M., 2003 . A new finite difference method for a class of singular two-point boundary value problems. *Applied Mathematics and Computation*, 143(2-3), 551–557.
- LeVeque, R. J., 2007. *Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Lewy, H., Friedrichs, K., and Courant, R., 1928. Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik. *Mathematische Annalen*, 100, 32–74.
- Li, Z., Qiao, Z., Tang, T., 2017. *Numerical solution of differential equations: introduction to finite difference and finite element methods*. Cambridge University Press.
- Morton, K. W., Mayers, D. F., 2005. *Numerical solution of partial differential equations: an introduction*. Cambridge university press.
- Muhtarov, O., Yakubov, S. 2002 . Problems for ordinary differential equations with transmission conditions. *Applicable Analysis*, 81(5), 1033–1064.
- Mukhtarov, O. S., Aydemir, K., 2015. Eigenfunction expansion for Sturm-Liouville problems with transmission conditions at one interior point. *Acta Mathematica Scientia*, 35(3), 639–649.
- Mukhtarov, O., Çavuşoğlu, S., Olğar, H., 2019. Numerical Solution of One Boundary Value Problem Using Finite Difference Method, *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, 11, 85–89.
- Mukhtarov, O. S., Aydemir, K., 2021. Oscillation properties for non-classical Sturm-Liouville problems with additional transmission conditions. *Mathematical Modelling and Analysis*, 26(3), 432–443.
- Mukhtarov, O. S., Çavuşoğlu, S., Pandey, P. K., 2021. Development of the Finite Difference Method to solve a new type Sturm-Liouville problems. *Tbilisi Mathematical Journal*, 14(3), 141–154.
- Oganesjan, L. A., 1963. Numerical solution of plates. *Solution of Engineering Problems on Computers*, Lensovnarchoz CBTI, Sbronik, Russian, 1663.
- Oganejan, L. A., 1966. Convergence of difference schemes in case of improved approximation of the boundary. *Zhurnal Vychislitel'noi Matematikii Matematicheskoi Fiziki*, 6(6), 1029–1042.

- Olgar, H., Mukhtarov, O. S., 2017. Weak eigenfunctions of two-interval Sturm–Liouville problems together with interaction conditions. *Journal of Mathematical Physics*, 58(4), 042201.
- Olgar, H., Mukhtarov, O., Aydemir, K., 2018. Some properties of eigenvalues and generalized eigenvectors of one boundary-value problem. In *AIP Conference Proceedings*, 1759, No. 1, p. 020060.
- Pandey, P. K., 2018. Finite difference method for numerical solution of two-point boundary value problems with nonuniform mesh and internal boundary condition. *General Letters in Mathematics*, 4(1), 6–12.
- Pryce, J. D., 1993. *Numerical solution of Sturm-Liouville problems*. Oxford University Press.
- Roul, P., Goura, V. P., 2020. Numerical solution of doubly singular boundary value problems by finite difference method , *Computational and Applied Mathematics*, 39(4), 1–25.
- Singh, A. K., 2008. On the convergence of second-order finite difference method for weakly regular singular boundary value problems. *International Journal of Computer Mathematics*, 85(12), 1807–1814.
- Strygina, S. O., 1978 . Note on the convergence of the finite-difference method for nonlinear boundary-value problems. *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 24(2), 628–630.
- Strikwerda, J. C., 2004. *Finite difference schemes and partial differential equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Tamme, E. E., 1968. Solution of a nonlinear boundary value problem for a second order ordinary differential equation by the method of finite differences. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 8(5), 69–86.
- Volker, J., 2021. Discretizations for Scalar Convection-Dominated Problems. Lecture notes. <https://www.wias-berlin.de/people/john/LEHRE/lehrealt.html>; (18.05.2022).
- Yakar, A., Akdogan, Z., 2017. On the fundamental solutions of a discontinuous fractional boundary value problem. *Advances in Difference Equations*, 2017(1), 1–15.
- Yakovlev, M. N. , 1977. Finite-difference method for solving the first boundary-value problem for a second-order ordinary differential equation. *Journal of Soviet Mathematics*, 7(1), 120–122.
- Yakovlev, M. N., 1980. Finite-difference method for solving the first boundary-value problem for a second-order nonlinear ordinary differential equation with a divergent principal part. *Journal of Soviet Mathematics*, 13(2), 195–201.
- Yizengaw, N., 2017. Convergence Analysis of Finite Difference Method for Differential Equation. *J. Phys. Math*, 3(8), 1000240.