



**GEGENBAUER POLİNOMLARI İLE TANIMLANAN
Bİ-ÜNİVALENT FONKSİYONLARIN BELLİ ALT
SINIFLARI İÇİN FEKETE-SZEGÖ PROBLEMİ**

Ayşegül KARAMAN

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Murat ÇAĞLAR

2025

Her hakkı saklıdır.



**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**GEGENBAUER POLİNOMLARI İLE TANIMLANAN Bİ-ÜNİVALENT
FONKSİYONLARIN BELLİ ALT SINIFLARI İÇİN FEKETE-SZEGÖ
PROBLEMİ**

Ayşegül KARAMAN

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Murat ÇAĞLAR

Anabilim Dalı: Matematik

Erzurum

2025

Her hakkı saklıdır

T.C.
ERZURUM TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ ONAY FORMU

**GEGENBAUER POLİNOMLARI İLE TANIMLANAN Bİ-ÜNİVALENT
FONKSİYONLARIN BELLİ ALT SINIFLARI İÇİN FEKETE-SZEGÖ
PROBLEMİ**

Prof. Dr. Murat ÇAĞLAR danışmanlığında, Ayşegül KARAMAN tarafından hazırlanan bu çalışma 31/01/2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Ana Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **Oy birliği ile (3/3)** kabul edilmiştir.

Başkan	: Doç. Dr. İbrahim AKTAŞ	İmza	:
Üye	: Prof. Dr. Murat ÇAĞLAR	İmza	:
Üye	: Doç. Dr. Abdullah ÇAĞMAN	İmza	:

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum

Doç. Dr. Bünyamin ÖZGERİŞ
Enstitü Müdürü

Bu tez çalışması tarafından nolu proje ile desteklenmiştir.

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki tüm bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

31 / 01 /2025

İmzası

Ayşegül KARAMAN

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GEGENBAUER POLİNOMLARI İLE TANIMLANAN Bİ-ÜNİVALENT FONKSİYONLARIN BELLİ ALT SINIFLARI İÇİN FEKETE-SZEGÖ PROBLEMİ

Ayşegül KARAMAN

Erzurum Teknik Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Murat ÇAĞLAR

Bu tezde, Gegenbauer polinomları yardımıyla birim diskte bi-ünivalent fonksiyonların belli alt sınıfları tanımlanarak bu sınıflar için katsayı eşitsizlikleri ve Fekete-Szegö problemleri ele alınmıştır.

2025, 43 sayfa

Anahtar Kelimeler: Analitik fonksiyonlar, Bi-ünivalent fonksiyonlar, Katsayı eşitsizlikleri, Fekete-Szegö eşitsizliği, Gegenbauer polinomları.

ABSTRACT

MS. Thesis

FEKETE-SZEGÖ PROBLEM FOR CERTAIN SUBCLASSES OF BI-UNIVALENT FUNCTIONS DEFINED BY GEGENBAUER POLYNOMIALS

Ayşegül KARAMAN

Erzurum Technical University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Maths

Supervisor: Prof. Dr. Murat ÇAĞLAR

In this thesis, certain new subclasses of bi-univalent functions are defined by Gegenbauer polynomials on the unit disk, and coefficient inequalities and the Fekete-Szegö problem are discussed for these subclasses.

2025, 43 pages

Keywords: Analytic functions, Bi-univalent functions, Coefficient inequalities, Fekete-Szegö inequality, Gegenbauer polynomials.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca değerli bilgilerini benimle paylaşan, yoğun çalışma hayatından zaman ayırarak destek olan, güler yüzlü, samimi, danışman hoca ünvanının hakkını veren kıymetli danışman hocam Prof. Dr. Murat ÇAĞLAR’a en derin saygılarımı ve şükranlarımı sunarım. Çalışmalarım esnasında beni asla yalnız bırakmayan canım babam ve canım annem, kız kardeşlerim, yeğenlerime sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Son olarak çalışmama destek olan değerli arkadaşım Öğr. Gör. Mucahit BUYANKARA’ya teşekkür ederim

Ayşegül KARAMAN

Ocak 2025

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	5
3. MATERYAL ve YÖNTEM	8
3.1. Temel Kavramlar	8
3.2. Analitik ve Ünivalent Fonksiyonlar	9
3.3. Normalize Edilmiş Ünivalent Fonksiyonlar	14
3.4. Bi-Ünivalent Fonksiyonlar	23
3.5. Gegenbauer Polinomu ve Özellikleri	25
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	27
4.1. $G_{\Sigma}(\phi_l^{\lambda})$ Fonksiyon Sınıfı için Katsayı Eşitsizlikleri	27
4.2. $G_{\Sigma}(\phi_l^{\lambda})$ Fonksiyon Sınıfı için Fekete-Szegö Problemi	31
4.3. $K_{\Sigma}(\phi_l^{\lambda})$ Fonksiyon Sınıfı için Katsayı Eşitsizlikleri.	33
4.4. $K_{\Sigma}(\phi_l^{\lambda})$ Fonksiyon Sınıfı için Fekete-Szegö Problemi	36
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	39
KAYNAKLAR	40

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$\mathcal{A}$	$\mathcal{U}$ birim diskinde tanımlı analitik fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{C}$	$\mathcal{A}$ ya ait konveks fonksiyonların sınıfı
$\mathbb{C}$	Kompleks düzlem
$\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$	Genelleştirilmiş kompleks düzlem
Σ	$\mathcal{A}$ ya ait bi-ünivalent fonksiyonların sınıfı
$f \prec g$	f fonksiyonunun g fonksiyonuna subordinasyonu
$f^{(n)}$	f fonksiyonun n . dereceden türevi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}^+$	Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathcal{P}$	Caratheodory sınıfı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathcal{S}$	$\mathcal{A}$ ya ait ünivalent fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}^*$	$\mathcal{A}$ ya ait yıldızlı fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{U}$	$\{z \in \mathbb{C}: z < 1\}$, açık birim disk
$\mathcal{U}(z_0, r)$	z_0 merkezli r yarıçaplı açık disk
$\phi_t^\lambda(x)$	Gegenbauer polinomları
Ω	Schwarz fonksiyonların sınıfı
γ	$\mathbb{C}$ düzleminde bir eğri

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. w_0 Noktasına Göre Yıldızlı Bölge.	17
Şekil 2. Koebe Fonksiyonu	19
Şekil 3. Konveks Bölge	20
Şekil 4. $f < g$ Subordinasyonu.....	21



1. GİRİŞ

Ünivalent fonksiyonlar teorisi, diğer bir adı ile geometrik fonksiyonlar teorisi kompleks analizin önemli bir dalıdır. Bu teori; “Kompleks düzlemin her basit bağlantılı bölgesi konform olarak birim disk üzerine resmedilebilir.” ifadesiyle yani Riemann Dönüşüm Teoremi ile daha da önem kazanmıştır. Koebe’nin (Koebe 1907) 1907’deki $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$ birim diskindeki birebir her $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots$ dönüşümünün resim bölgesinde, $|w| < c$ diski kapsanacak şekilde mutlak bir c sabitinin ve sadece z ye bağlı olan $|f'(z)|$ modülü üzerindeki sınırların varlığını ispatladığı çalışması da bu teorinin gelişmesinde önemli bir rol oynamıştır. Daha sonraki birçok matematikçinin çalışmaları da bu sınırları belirleme üzerinde yoğunlaşmıştır. Böylece ünivalent fonksiyonların sınıfları ile ilgili problemler üzerindeki çalışmalar artmıştır.

Bieberbach (Bieberbach 1916) tarafından ortaya atılan “ $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu için $n = 2, 3, \dots$ olmak üzere $|a_n| \leq n$ eşitsizliği sağlanır” tahmini uzun süre matematikçilerin çalıştığı bir problem olmuştur. Alan teoreminin bir sonucu olarak $|a_2| \leq 2$ eşitsizliğinin doğruluğu ilk olarak Bieberbach tarafından 1916’da ispatlanmıştır. Daha sonra Loewner (Loewner 1917) 1923’te parametrik metod olarak isimlendirdiği kendi buluşuyla $|a_3| \leq 3$ eşitsizliğini, 1955’te Schiffer ve Garabedian, Grunsky eşitsizliklerini kullanarak $|a_4| \leq 4$ eşitsizliğini, 1968’de Pederson $|a_6| \leq 6$ ve 1972’de Pederson ve Schiffer $|a_5| \leq 5$ eşitsizliğini ispat etmiştir. Bu tahminin genelleştirilmiş hali yıllarca matematikçilerin üzerinde çalıştığı bir konu olmuştur. 1985’te nihayet L. De-Branges, Loewner teorisini kullanarak bütün $n = 2, 3, \dots$ için $|a_n| \leq n$ eşitsizliğinin doğrulunu ispatlamıştır.

Bieberbach tahminin ispatlanmasından sonra bu konuyla ilgilenen matematikçiler $\mathcal{S}$ sınıfının değişik alt sınıfları için bir takım katsayı bağıntıları elde etmişlerdir. Bu önemli alt sınıflardan biri de aşağıda ifade edilen bi-ünivalent fonksiyonların sınıfıdır.

Hem tersi hem de kendisi ünivalent olan fonksiyona bi-ünivalent fonksiyon denir. Bi-ünivalent fonksiyonlarla ilgili ilk çalışma Lewin (Lewin 1967) tarafından 1967 yılında yapılmıştır. Bi-ünivalent fonksiyonların sınıfını Σ sembolüyle göstererek bu sınıfa ait fonksiyonlar için ikinci katsayının $|a_2| \leq 1.51$ olduğu Lewin tarafından ispatlanmıştır. 1967 yılında, Brannan ve Clunie (Brannan and Clunie 1980) her $f \in \Sigma$

için $|a_2| \leq \sqrt{2}$ olduğunu ortaya atmıştır. Sonra 1969 da Netanyahu (Netanyahu 1969) her $f \in \Sigma$ için $\max|a_2| = \frac{4}{3}$ ve 1985'te Tan (Tan 1984) $|a_2| \leq 1.485$ olduğunu göstermişlerdir. 1985 yılında Kedzierawski (Kedzierawski 1988), Brannan ve Clunie'nin $|a_2| \leq \sqrt{2}$ konjektürünü bi-yıldızlı fonksiyonlar için ispatlamıştır. 1985 ve 1986 yıllarında Brannan ve Taha (Brannan and Taha 1986) α mertebeden bi-yıldızlı ve bi-konveks fonksiyonlar için a_2 ve a_3 katsayılarının sınırlarıyla ilgili tahminler elde etmişlerdir. Maalesef her $n = 2, 3, \dots$ için $|a_n|$ nin üst sınırı bi-ünivalent fonksiyonlar için henüz bulunamamıştır. Diğer bir problem de bulunan sınırların kesin olmayışıdır. Son zamanlarda bi-ünivalent fonksiyonların çeşitli alt sınıfları için katsayı tahminleri problemi ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır ve bu konu halen güncelliğini korumaktadır.

Deniz (Deniz 2013) ve Kumar ve arkadaşları (Kumar et al. 2013) subordinasyon kullanılarak tanımlanan fonksiyon sınıfları için Brannan ve Taha'nın bulmuş olduğu sonuçları hem genelleştirmiş hem de daha iyi üst sınırlar elde etmişlerdir. Son yıllarda bi-ünivalent fonksiyonların çeşitli alt sınıfları için katsayı tahminleri Srivastava ve arkadaşları (Srivastava et al. 2010), Frasin ve Aouf (Frasin and Aouf 2011), Xu ve arkadaşları (Xu et al. 2012a; Xu et al. 2012b), Srivastava ve arkadaşları (Srivastava et al. 2013), Çağlar ve arkadaşları (Çağlar 2013), Bulut (Bulut 2014), Hamidi ve Jahangiri (Hamidi and Jahangiri 2014) tarafından araştırılmıştır.

Katsayıların bir kombinasyonu olan $|a_3 - \mu a_2^2|$ mutlak değerinin üst sınırını bulma problemi Fekete-Szegö problemi olarak isimlendirilmektedir. Bieberbach (Bieberbach 1916) bu konuda çalışma yapan ilk araştırmacıdır. Bieberbach her ünivalent fonksiyon için $|a_3 - a_2^2| \leq 1$ olduğunu göstermiştir. Fekete ve Szegö (Fekete and Szegö 1933) bu problemi genelleştirerek $0 \leq \mu < 1$ olmak üzere $|a_3 - \mu a_2^2|$ için kesin bir üst sınır elde etmiştir. Sonrasında $0 \leq \mu < 1$ olmak üzere $|a_3 - \mu a_2^2|$ için Keogh ve Merkes (Keogh and Merkes 1969) yıldızlı ve konveks fonksiyonlar için kesin üst sınırlar bulmuşlardır. Son zamanlarda yalınkat fonksiyonların bazı alt sınıfları için bu problem birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Öte yandan bi-ünivalent fonksiyonların bazı alt sınıfları için Fekete-Szegö problemi Zaprawa (Zaprawa 2014) tarafından ele alınmıştır. Bi-ünivalent fonksiyonların alt sınıfları için hem katsayı eşitsizliği bulma hem

de Fekete-Szegö fonksiyoneli için üst sınır elde etme problemi halen aktif olarak çalışılmaktadır.

Ortogonal polinomlar, matematiksel istatistik, mühendislik, matematiksel fizik ve olasılık teorisi gibi birçok açıdan son yıllarda kapsamlı bir şekilde incelenmiştir. Hermite polinomları, Laguerre polinomları ve Jacobi polinomları gibi klasik ortogonal polinomlar, uygulamalarda en yaygın karşılaşılan ortogonal polinomlardır. Jacobi polinomlarının genel alt sınıfı, Gegenbauer polinomlarıdır ve bu sınıf Legendre polinomları ve Chebyshev polinomlarını alt sınıflar olarak içerir. Gegenbauer polinomları, son zamanlarda kompleks analizin bir alt dalı olan geometrik fonksiyonlar alanında büyük önem kazanmıştır. Araştırmacılar, Gegenbauer polinomları yardımıyla birim diskte bi-ünivalent fonksiyonların yeni alt sınıflarını tanımlayarak bu sınıflar için $|a_2|$, $|a_3|$ ve Fekete-Szegö problemi olarak bilinen $|a_3 - \mu a_2^2|$ için üst sınırlar elde etmişlerdir.

Bu tez çalışmasında, literatürde son zamanlarda bu konu ile ilgili yapılan çalışmalardan yola çıkılarak Gegenbauer polinomları yardımıyla bi-ünivalent fonksiyonların iki yeni alt sınıfı

$$\frac{2zf'(z)}{f(z) - f(-z)} < \phi_l^\lambda(z)$$

ve

$$\frac{2\omega g'(\omega)}{g(\omega) - g(-\omega)} < \phi_l^\lambda(\omega)$$

şartları sağlanırsa $f(z)$ fonksiyonu $G_\Sigma(\phi_l^\lambda)$ sınıfına aittir denir.

$$\frac{2[zf'(z)]'}{[f(z) - f(-z)]'} < \phi_l^\lambda(z)$$

ve

$$\frac{2[\omega g'(\omega)]'}{[g(\omega) - g(-\omega)]'} < \phi_l^\lambda(\omega)$$

şartları sağlanırsa $f(z)$ fonksiyonu $K_{\Sigma}(\phi_l^{\lambda})$ sınıfına aittir denir. biçiminde tanımlanarak bu sınıflar için katsayı eşitsizlikleri ve Fekete-Szegö problemi ele alınmıştır.

Bu amaç doğrultusunda;

Literatür bilgisinin verildiği giriş bölümünden sonra ikinci bölümde tezde önemli yere sahip olan çalışmalar hakkında bilgi verilen kaynak özetleri bölümü verilmiştir. Materyal ve yöntem bölümünde, tez boyunca kullanılacak olan temel tanımlara, önemli bazı teorem ve sonuçlara yer verilmiştir. Bi-ünivalent fonksiyonların ve Gegenbauer polinomların tanımlarından ve özelliklerinden bahsedilmiştir. Araştırma bulguları bölümünde, yukarıda tanımlanan $G_{\Sigma}(\phi_l^{\lambda})$ ve $K_{\Sigma}(\phi_l^{\lambda})$ sınıfları için katsayı eşitsizlikleri ve Fekete-Szegö eşitsizliği elde edilmiştir.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Gegenbauer polinomları, son zamanlarda birçok fonksiyon teorisini tarafından ilgiyi üzerine çeken bir sayısal araçtır. Bunun başlıca nedeni, bilim ve mühendislik alanlarında birçok gerçek hayat uygulamasına sahip olmalarıdır. Ayrıca, geometrik fonksiyon teorisi alanındaki uygulamaları da birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir.

A. Amourah ve arkadaşları (Amourah et al. 2021a) Gegenbauer polinomları yardımıyla birim diskte analitik ve bi-ünivalent fonksiyonların

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} < \phi_l^\lambda(z) \quad \text{ve} \quad \frac{wg'(w)}{g(w)} < \phi_l^\lambda(w)$$

$$1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} < \phi_l^\lambda(z) \quad \text{ve} \quad 1 + \frac{wg''(w)}{g'(w)} < \phi_l^\lambda(w)$$

şeklindeki ilişkileri sağlayan iki yeni alt sınıflarını tanımlamışlardır. Bu sınıflar için katsayı sınırları ve Fekete-Szegö eşitsizlikleri elde etmişlerdir.

A. Amourah ve arkadaşları (Amourah et al. 2021b) Gegenbauer polinomları yardımıyla birim diskte analitik ve bi-ünivalent fonksiyonların

$$f'(z) \left(\frac{f(z)}{z} \right)^{\mu-1} < \phi_l^\lambda(z) \quad \text{ve} \quad g'(w) \left(\frac{g(w)}{w} \right)^{\mu-1} < \phi_l^\lambda(w)$$

subordinasyonlarını sağlayan bir alt sınıfını tanımlayarak, bu sınıf için katsayı sınırları ve Fekete-Szegö eşitsizlikleri elde etmişlerdir.

G. Murugusundaramoorthy ve T. Bulboaca (Murugusundaramoorthy and Bulboaca 2022) Gegenbauer polinomları yardımıyla birim diskte analitik ve bi-ünivalent fonksiyonların

$$\frac{f(z)}{(1-v)z + vz f'(z)} < \phi_l^\lambda(z) \quad \text{ve} \quad \frac{g(w)}{(1-v)w + vw g'(w)} < \phi_l^\lambda(w)$$

şartlarını sağlayan alt sınıfını tanımlayarak, bu sınıf için katsayı sınırları ve Fekete-Szegö eşitsizlikleri elde etmişlerdir.

A. Hussen ve A. Zeyani (Hussen and Zeyani 2023) Gegenbauer polinomları yardımıyla birim diskte analitik ve bi-ünivalent fonksiyonların

$$\lambda \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) + (1 - \lambda) \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) < \phi_l^\lambda(z)$$

ve

$$\lambda \left(1 + \frac{wg''(w)}{g'(w)} \right) + (1 - \lambda) \left(\frac{wg'(w)}{g(w)} \right) < \phi_l^\lambda(w)$$

şartlarını sağlayan yeni alt sınıflarını tanımlayarak, bu sınıflar için katsayı sınırları ve Fekete-Szegö eşitsizlikleri elde etmişlerdir.

T. Al-Hawary ve arkadaşları (Al-Hawary et al. 2023) Gegenbauer polinomları yardımıyla birim diskte analitik ve bi-ünivalent fonksiyonların

$$(1 - \sigma)f'(z) + \sigma(f'(z))^\delta \left(\frac{f(z)}{z} \right)^{\mu-1} < \phi_l^\lambda(z)$$

ve

$$(1 - \sigma)g'(w) + \sigma(g'(w))^\delta \left(\frac{g(w)}{w} \right)^{\mu-1} < \phi_l^\lambda(w)$$

subordinasyonlarını sağlayan yeni bir alt sınıfını tanımlamışlardır. Bu sınıf için katsayı sınırları ve Fekete-Szegö eşitsizlikleri elde etmişlerdir.

W. Al-Rawashdeh (Al-Rawashdeh 2024a) Gegenbauer polinomları yardımıyla birim diskte analitik ve bi-ünivalent fonksiyonların

$$\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) \left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^{-1} < \phi_l^\lambda(z)$$

ve

$$\left(1 + \frac{wg''(w)}{g'(w)}\right) \left(\frac{wg'(w)}{g(w)}\right)^{-1} < \phi_l^\lambda(w)$$

subordinasyonlarını sağlayan bir alt sınıfını tanımlayarak, bu sınıf için katsayı sınırları ve Fekete-Szegö eşitsizlikleri elde etmiştir.

W. Al-Rawashdeh (Al-Rawashdeh 2024b) Gegenbauer polinomları yardımıyla birim diskte p -valent konvekse yakın fonksiyonların

$$\frac{(1-\alpha)}{\lambda p} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) + \frac{\alpha}{\lambda} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} - p\right) < \phi_l^\lambda(z)$$

koşulunu sağlayan bir alt sınıfını tanımlayarak, bu sınıf için katsayı sınırları ve Fekete-Szegö eşitsizlikleri elde etmiştir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Temel Kavramlar

Tanım 3.1.1 (ε -komşuluğu): $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere z_0 noktasının ε komşuluğu $\mathcal{D}(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$ ile tanımlanan kümedir. $\mathcal{D}(z_0, \varepsilon)$ kümesine açık disk de denir. $\bar{\mathcal{D}}(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \varepsilon\}$ kümesi ise kapalı disk belirtir (Ponnusamy and Silverman 2006).

Özel durumda, orijin merkezli açık birim disk $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ile gösterilecektir.

Tanım 3.1.2 (İç Nokta): Bir $z \in S$ noktası için $\mathcal{D}(z, \varepsilon) \subset S$ olacak şekilde bir ε sayısı mevcutsa, z noktası S kümesinin bir iç noktasıdır denir (Ponnusamy and Silverman 2006).

Tanım 3.1.3 (Açık Küme): Eğer her $z \in S$ noktası S kümesinin iç noktası ise S kümesine açık küme denir (Ponnusamy and Silverman 2006).

Tanım 3.1.4 (Kapalı Küme): Tümleyenini açık olan $S \subset \mathbb{C}$ kümesine kapalı küme denir (Ponnusamy and Silverman 2006).

Tanım 3.1.5 (Bağlantılı Küme): Eğer $S \subset M \cup N$, $S \cap M \neq \emptyset$, $S \cap N \neq \emptyset$ ve $S \cap M \cap N = \emptyset$ olacak şekilde ayrık ve açık M ve N kümeleri bulunmuyorsa $S \subset \mathbb{C}$ kümesine bağlantılıdır denir. Aksi halde bağlantısız küme denir (Ponnusamy and Silverman 2006).

Örneğin; $\mathbb{C}$ nin kendisi bağlantılıdır.

Tanım 3.1.6 (Bölge): Açık ve bağlantılı olan kümeye bölge denir (Ponnusamy and Silverman 2006).

$\mathbb{C}$ hem açık hem de bağlantılı olduğundan bir bölgedir.

Tanım 3.1.7 (Süreklilik): $S \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f: S \rightarrow \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in S$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $|z - z_0| < \delta$ şartını sağlayan her $z \in S$ için $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(z_0, \varepsilon) > 0$ sayısı varsa $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında süreklidir denir (Ponnusamy and Silverman 2006).

Tanım 3.1.8 (Eğri): $[a, b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli fonksiyonuna $\mathbb{C}$ düzleminde eğri (ya da yol) denir. $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ noktalarına da sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitim noktaları denir (Ponnusamy and Silverman 2006).

Tanım 3.1.9 (Kapalı Eğri): Başlangıç ve bitiş noktası aynı olan eğrilere kapalı eğri denir. γ kapalı eğri ise $\gamma(a) = \gamma(b)$ dir (Ponnusamy and Silverman 2006).

Tanım 3.1.10:

a) Basit Kapalı Eğri: Uç noktaların çakışması hariç, kendini kesmeyen eğrilere basit eğri, hem basit hem de kapalı eğrilere de basit kapalı eğri veya Jordan eğrisi denir (Ponnusamy and Silverman 2006).

b) Düzgün Eğri: γ eğrisi $[a, b]$ kapalı aralığında türevlenebilir olsun. Eğer $[a, b]$ kapalı aralığında γ' türevi sürekli ve sıfırdan farklı ise γ eğrisine düzgün eğri denir (Ponnusamy and Silverman 2006).

3.2. Analitik ve Ünivalent Fonksiyonlar

Bu kısımda analitik ve ünivalent fonksiyon kavramları tanıtılıp bu fonksiyonlarla ilgili bazı tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 3.2.1 (Diferensiyellenebilme): $A \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve z_0, A nın bir iç noktası olsun. Eğer

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

sonlu limiti varsa $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında diferansiyellenebilir (veya türevlenebilir) denir. Bu limit değeri $f'(z_0)$ ile gösterilir ve $z = z_0$ noktasında $f(z)$ fonksiyonunun türevi olarak adlandırılır (Ponnusamy and Silverman 2006).

Tanım 3.2.2 (Analitiklik): $f(z)$ fonksiyonu, z_0 noktası ve bu noktanın uygun bir komşuluğundaki her noktada diferansiyellenebilirse $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analiktir denir. Eğer $f(z)$ fonksiyonu bir $S \subset \mathbb{C}$ kümesinin her noktasında analitikse $f(z)$ ye S kümesinde analitik denir. Tüm düzlemde analitik olan fonksiyonlara tam fonksiyon denir (Ponnusamy and Silverman 2006).

Örneğin; $f(z) = \sin z$ bir tam fonksiyon olup $f(z) = \arg z$ bir tam fonksiyon değildir.

$z = x + iy$ olmak üzere $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ kompleks değişkenli kompleks değerli fonksiyonu analitik ise

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \text{ ve } \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

ile ifade edilen Cauchy-Riemann denklemlerini sağlar.

Teorem 3.2.3 (Liouville Teoremi): Eğer bir $f(z)$ fonksiyonu tam ve sınırlı ise bu fonksiyon sabittir (Ponnusamy and Silverman 2006).

Analitik fonksiyonlar için önemli bir yere sahip olan Cauchy-Türev formülü aşağıdaki gibidir.

Teorem 3.2.4 (Cauchy-Türev Formülü): f , pozitif yönlü basit kapalı γ çevresi içinde ve üzerinde analitik bir fonksiyon ve z_0 bu eğrinin içinde bir nokta olsun. Bu durumda $n = 0, 1, 2 \dots$ için

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

olur (Ponnusamy and Silverman 2006).

Bu teoremin belirtmek istediği en önemli nokta şudur: f , bir bölgede analitik bir fonksiyon ise bu bölgede her mertebeden türevi vardır ve bu türevler de o bölgede analiktir. Bu durumda f analitik fonksiyonu z_0 noktasında

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

şeklinde bir Taylor açılımına sahiptir. Fakat reel değişkenli bir fonksiyonun bir noktada 1. mertebeden türevi varsa bu noktada daha yüksek mertebeden türevi vardır diyemeyiz.

Tanım 3.2.5 (Ayrık Tekil Nokta): $w = f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının bir $\mathcal{U}(z_0, \varepsilon) - \{z_0\}$ delinmiş komşuluğunda analitik fakat z_0 noktasında analitik değilse f fonksiyonu için z_0 noktası bir ayrık tekil noktadır denir (Ponnusamy and Silverman 2006).

Teorem 3.2.6 (Laurent Teoremi): $f(z)$ fonksiyonu $A(R_1; R_2)$ halka bölgesinde analitik ise bu bölgede a_n ve b_n kompleks sayılar olmak üzere

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

olur. Buna $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasının delinmiş bir komşuluğundaki Laurent serisi (açılımı) denir (Ponnusamy and Silverman 2006).

Teorem 3.2.7 (Maksimum Modül Prensibi): $f(z)$, A bölgesinde sabit olmayan analitik bir fonksiyon olsun. Bu durumda $|f(z)|$, A bölgesinde maksimum değer alamaz (Ponnusamy and Silverman 2006).

Sonuç 3.2.8: A sınırlı bir bölge ve sabit olmayan $f(z)$ fonksiyonu da bu bölgenin sınırında sürekli ve içinde analitik olsun. Bu durumda $|f(z)|$ maksimum değerini A bölgesinin sınırında alır.

Teorem 3.2.7'nin önemli bir sonucu olan Schwarz lemması aşağıdaki gibidir.

Lemma 3.2.9 (Schwarz lemması): $f(z)$, $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik ve $f(0) = 0$ olsun. Eğer $\mathcal{U}$ birim diskinde $|f(z)| \leq 1$ ise $|f'(0)| \leq 1$ ve $|f(z)| \leq |z|$ olur. $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(z) = e^{i\theta}z$ fonksiyonu ile eşitlik sağlanır (Duren 1983).

Teorem 3.2.10 (Minimum Prensibi): $f(z)$, $A \subset \mathbb{C}$ bölgesinde sabit olmayan bir fonksiyon ve her $z \in A$ için $f(z) \neq 0$ olsun. Bu durumda $|f(z)|$, A bölgesinde minimum değer alamaz (Duren 1983).

Sonuç 3.2.11: $A \subset \mathbb{C}$ sınırlı bir bölge, $f(z)$ sabit olmayan bir fonksiyon ve her $z \in A$ için $f(z) \neq 0$ olsun. Ayrıca $f(z)$ fonksiyonunun A bölgesinin içinde analitik, sınırında sürekli olduğunu kabul edelim. Bu durumda $|f(z)|$ minimum değerini A bölgesinin sınırında alır.

Tanım 3.2.12 (Ünivalent fonksiyon): $f(z)$, $A \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $z_1, z_2 \in A$ için $z_1 \neq z_2$ olduğunda $f(z_1) \neq f(z_2)$ gerçekleşiyorsa (veya $f(z_1) = f(z_2)$ olması sadece $z_1 = z_2$ olmasını gerektiriyorsa) $f(z)$ fonksiyonuna A bölgesinde ünivalent (yalıncat veya schlicht) fonksiyon denir (Duren 1983).

Örneğin; $f(z) = \bar{z}$ bir ünivalent fonksiyondur.

Eğer $f(z)$, z_0 noktasının bir komşuluğunda ünivalent ise $f(z)$ ye yerel ünivalent fonksiyon denir.

Teorem 3.2.13: Bir $f(z)$ analitik fonksiyonunun z_0 noktasında yerel ünivalent olması için gerekli ve yeterli koşul $f'(z_0) \neq 0$ olmasıdır (Duren 1983).

$f'(z_0) \neq 0$ şartı $f(z)$ fonksiyonunun ünivalentliği için gerek şarttır fakat yeterli değildir. Yani, $f(z)$ fonksiyonu ünivalent ise $f'(z_0) \neq 0$ dır. Tersine her zaman doğru değildir. Bir kümede yerel ünivalent olan analitik fonksiyonların, bu kümede ünivalent olması gerekmez.

Örnek 3.2.14: $f(z) = z^2$ fonksiyonu $A = \{z: 1 < |z| < 2, 0 < \arg z < \frac{3\pi}{2}\}$ bölgesinde yerel ünivalent olmasına rağmen ünivalent değildir. Gerçekten $f(z) = z^2$

fonksiyonu, A bölgesinde analitik ve her $z_0 \in A$ için $f'(z_0) \neq 0$ sağlandığından yerel ünivalenttir. Fakat

$$f\left(\frac{5}{3\sqrt{2}} + i\frac{5}{3\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{5}{3\sqrt{2}} - i\frac{5}{3\sqrt{2}}\right) = i\frac{25}{9}$$

olduğundan $f(z) = z^2$ fonksiyonu A bölgesinde ünivalent değildir.

Eğer $A \subset \mathbb{C}$ bölgesinde f analitik fonksiyonu yerel ünivalent ise, bu durumda $z \in A$ noktasında $f'(z)$ türevi, f nin yerel geometrik davranışını belirler. $|f'(z)|$ ve $\arg f'(z)$ değerleri sırasıyla yerel büyüme (uzunluklar için) ve yerel dönme etkenleridir. Buna ilaveten, $f: A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analitik dönüşümünün Jacobian determinantı $Jf(z) = |f'(z)|^2$ ile verilmektedir. Jacobian determinantının $|f'(z)|^2$ ifadesine eşit olduğu Cauchy-Riemann denklemlerinden kolayca görülür. Böylece Teorem 3.2.12 'den analitik fonksiyonlar için Jacobian determinantının sıfırdan farklı olması, yerel ünivalentlik için gerek ve yeter şarttır.

Tanım 3.2.15 (Konform dönüşüm): Belli bir noktadan geçen iki düzgün eğri arasındaki açının büyüklüğünü ve yönünü koruyan dönüşümlere bu noktada konform dönüşüm denir. Eğer bir $f(z)$ fonksiyonu, bir $A \subset \mathbb{C}$ bölgesinin tüm noktalarında konform ise $f(z)$ bu bölgede konformdur denir (Ponnusamy and Silverman 2006).

Örneğin; $f(z) = z^2$ dönüşümü $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ düzleminde konformdur.

Teorem 3.2.16: $f(z)$ fonksiyonun analitik olduğu her z noktasında $f'(z) \neq 0$ şartı sağlanıyorsa, $f(z)$ konformdur (Ponnusamy and Silverman 2006).

Bundan dolayı bir bölgede analitik ve ünivalent bir fonksiyon konformdur. En önemli konform dönüşümlerden biri Möbius dönüşümüdür. Bu dönüşüm; $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$ ve $T: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ olmak üzere

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \text{ veya } T(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$$

biçiminde tanımlanır. Neden $ad - bc \neq 0$ olmalıdır? Çünkü $z \neq w$ için

$$\begin{aligned} T(z) - T(w) &= \frac{az + b}{cz + d} - \frac{aw + b}{cw + d} \\ &= \frac{(ad - bc)(z - w)}{(cz + d)(cw + d)} \end{aligned}$$

eşitliğinden görülür. Eğer, $ad - bc = 0$ ise $T(z) = T(w)$ olur. Bu da T 'nin sabit olması anlamına gelir. Aynı zamanda $ad - bc \neq 0$ alınması T 'nin bire bir olduğunu gösterir. Sabit fonksiyonun bire bir olmadığı açıktır.

Teorem 3.2.17 (Riemann Dönüşüm Teoremi): Kompleks düzlemin her $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ ($\mathcal{D} \neq \mathbb{C}$) basit bağlantılı bölgesi konform olarak $\mathcal{U}$ birim disk üzerine resmedilir. Ayrıca, $z_0 \in \mathcal{D}$ olmak üzere $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ şartlarını sağlayan ve $\mathcal{D}$ bölgesini $\mathcal{U}$ birim disk üzerine resmeden bir tek konform dönüşüm vardır (Duren 1983).

3.3. Normalize Edilmiş Ünivalent Fonksiyonlar

Analitik olarak, bir ünivalent fonksiyon sıfırdan farklı türeve sahip iken; geometrik olarak da basit eğrileri basit eğrilere dönüştürür. Hem analitik hem de ünivalent fonksiyon ise basit bağlantılı bölgeleri yine basit bağlantılı bölgelere dönüştürür. Riemann dönüşüm teoremine göre, bir keyfi basit bağlantılı bölgede tanımlı f ünivalent fonksiyonunun yerine $\mathcal{U}$ açık birim diskinde tanımlı bir f ünivalent fonksiyonu seçilebilir. Bu fonksiyon için $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ normalizasyon şartları göz önüne alınırsa

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (3.1)$$

biçiminde olur. Burada (3.1) biçiminde tanımlanmış fonksiyona normalize edilmiş analitik fonksiyon denir. Normalize edilmiş analitik fonksiyonların sınıfı $\mathcal{A}$ ile gösterilir ve

$$\mathcal{A} = \left\{ f: \forall z \in \mathcal{U} \text{ için } f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \text{ şeklindeki analitik fonksiyon} \right\}$$

şeklinde yazılır.

Tanım 3.3.1 ($\mathcal{S}$ Sınıfı): $\mathcal{U}$ birim diskinde ünivalent olan $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonların oluşturduğu sınıfa $\mathcal{S}$ sınıfı denir ve

$$\mathcal{S} = \{f \in \mathcal{A}: \forall z \in \mathcal{U} \text{ için } f - \text{ünivalent}\}$$

şeklinde gösterilir (Duren 1983).

$\mathcal{S}$ sınıfına ait bazı fonksiyon örnekleri aşağıda verilmiştir.

- (i) $w = f(z) = \frac{z}{1-z}$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskini $Re(w) > \frac{-1}{2}$ sağ yarı düzlemine resmeder.
- (ii) $f(z) = \frac{z}{1-z^2}$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskini $\mathbb{C} - \left\{(-\infty, \frac{-1}{2}] \cup (\frac{1}{2}, \infty)\right\}$ bölgesi üzerine resmeder.
- (iii) $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ Koebe fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskini $\mathbb{C} - (-\infty, \frac{-1}{4}]$ bölgesi üzerine resmeder.

Teorem 3.3.2: $f \in \mathcal{S}$ olması durumunda aşağıdaki ifadeler doğrudur (Duren 1983):

- (i) Eşlenik alma: $g(z) = \overline{f(\bar{z})} = z + \bar{a}_2 z^2 + \dots$ ise $g \in \mathcal{S}$ dir.
- (ii) Döndürme (Rotasyon): $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$g(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{i(n-1)\theta} z^n \quad (z \in \mathcal{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

- (iii) Genişleme (Dilatasyon): $0 < r < 1$ olmak üzere

$$g(z) = r^{-1} f(rz) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n r^{n-1} z^n \quad (z \in \mathcal{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(iv) Disk otomorfizmi (Koebe veya Bieberbach dönüşümü): $z_0 \in \mathcal{U}$ olmak üzere

$$g(z) = \frac{f\left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}\right) - f(z_0)}{(1-|z_0|^2)f'(z_0)} \quad (z \in \mathcal{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(v) Değer bölgesi dönüşümü: ψ fonksiyonu $f(\mathcal{U})$ da ünivalent ve $\psi(0) = 0, \psi'(0) = 1$ koşulunu gerçekleyen bir fonksiyon ise $f \in \mathcal{S}$ dir.

(vi) Çıkarılmış değer dönüşümü: $w \notin f(\mathcal{U})$ olsun. Bu durumda

$$g(z) = \frac{f(z)}{1 - \frac{f(z)}{w}} \quad (z \in \mathcal{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(vii) n . kök dönüşümü: Eğer $n = 2, 3, \dots$ ise

$$g(z) = \sqrt[n]{f(z^n)} = z + \frac{a_2}{n} z^{n+1} + \frac{1}{2n^2} (2na_3 - (n-1)a_2^2) z^{2n+1} + \dots, \quad (z \in \mathcal{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

Tanım 3.3.3 ($\mathcal{P}$ sınıfı): $\mathcal{U}$ birim diskinde $p(0) = 1, \operatorname{Re} p(z) > 0$ şartlarını sağlayan $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ biçimindeki fonksiyonların oluşturduğu sınıfa Caratheodory sınıfı veya $\mathcal{P}$ sınıfı denir (Duren 1983).

Örneğin; $p(z) = \frac{1+z}{1-z}, z \in \mathcal{U}$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfına ait olup, $\mathcal{U}$ birim diskini sağ yarı düzlem üzerine resmeden bir konform dönüşümdür. Ayrıca $\mathcal{P}$ sınıfına ait bir fonksiyonun ünivalent olması gerekmez. Örneğin; $f(z) = 1 + z^2$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfına ait olmasına rağmen ünivalent değildir.

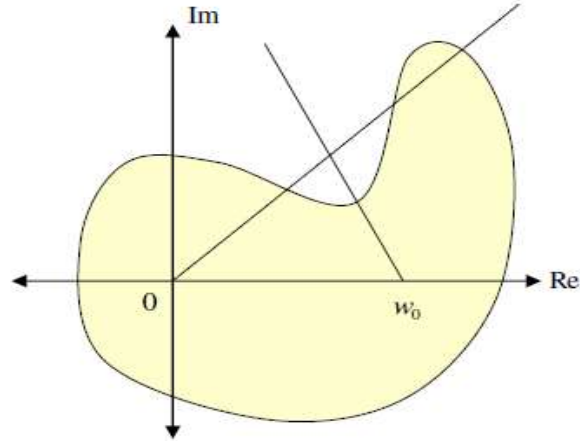
Tanım 3.3.4 (Ω sınıfı): $\mathcal{U}$ birim diskinde $\phi(0) = 0$ ve $|\phi(z)| < 1$ şartlarını sağlayan analitik fonksiyonların oluşturduğu sınıf Schwarz fonksiyonlar sınıfı olarak adlandırılır ve Ω ile gösterilir (Duren 1983).

Bunlara ilaveten, $\mathcal{P}$ sınıfı ile Schwarz fonksiyonları arasındaki önemli bağ aşağıda verilmiştir:

$$p(z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow p(z) = \frac{1 + \phi(z)}{1 - \phi(z)} \quad (\phi(z) \in \Omega)$$

$\mathcal{P}$ ve Ω sınıflarının tanımlarından sonra, $\mathcal{S}$ sınıfının iki önemli alt sınıfını aşağıdaki biçimde verilmiştir.

Tanım 3.3.5 ($\mathcal{S}^*$ sınıfı): $B \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. B kümesindeki sabit bir w_0 noktasını her $w \in B$ noktasına birleştiren doğru parçası tamamen B kümesinde kalıyorsa, B ye w_0 noktasına göre yıldızıl küme (starlike küme) denir. w_0 noktası özel olarak orijin seçilirse, bu kümeye orijine göre yıldızıl küme veya kısaca yıldızıl küme adı verilir. Eğer bir f fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskini w_0 noktasına göre bir yıldızıl kümeye resmediyorsa, f fonksiyonuna w_0 noktasına göre yıldızıl fonksiyon denir. Özel durumda, f fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskini yıldızıl bir kümeye resmediyorsa, f fonksiyonuna yıldızıl fonksiyon denir. $f \in \mathcal{A}$ olması durumunda yıldızıl fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}^*$ ile gösterilir (Duren 1983).



Şekil 1: w_0 Noktasına Göre Yıldızıl Küme

Teorem 3.3.6: $f \in \mathcal{A}$ olsun. Bu durumda

$$f(z) \in \mathcal{S}^* \Leftrightarrow \frac{zf'(z)}{f(z)} \in \mathcal{P}$$

olur. Ayrıca $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{S}^* \Rightarrow |a_n| \leq n$ ($n = 2, 3, \dots$) ifadesi doğrudur (Goodman 1983).

Yıldızlı fonksiyonların sınıfını

$$\mathcal{S}^* = \left\{ f \in \mathcal{A}: \forall z \in U \text{ için } \operatorname{Re} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > 0 \right\}$$

biçiminde gösterebiliriz.

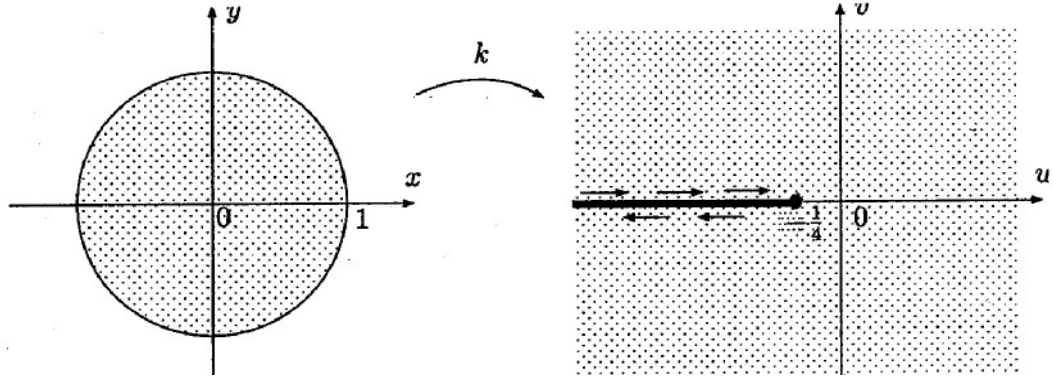
Örneğin; $\mathcal{S}$ sınıfına ait fonksiyonlardan en önemlilerinden birisi $z \in \mathcal{U}$ olmak üzere,

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

şeklinde tanımlanan *Koebe* fonksiyonudur. Bu fonksiyon $k(z) = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 - 1 \right]$ şeklinde de yazılabilir. Ayrıca $k(z)$ fonksiyonu

$$u(z) = \frac{1+z}{1-z}, \quad g(z) = u^2(z), \quad k(z) = \frac{1}{4} [g(z) - 1]$$

biçiminde yazılırsa $\mathcal{U}$ birim diskini $-\infty$ dan $-\frac{1}{4}$ e kadar negatif reel eksenini çıkartılmış kompleks düzlem üzerine konform olarak dönüştürdüğü görülebilir. $k(z)$ dönüşümü ünivalent fonksiyonlar teorisinde çok sayıda problemde önemli rol oynar.



Şekil 2: Koebe Fonksiyonu

Yukarıdaki şekilden $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + \sum_{n=2}^{\infty} n z^n \in \mathcal{S}^*$ olduğu görülebilir.

Ayrıca Teorem 3.3.6 kullanılarak da $z = r e^{i\theta}$ ve $(0 \leq r < 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{z f'(z)}{f(z)} \right) &= \operatorname{Re} \left(\frac{1+z}{1-z} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1+r e^{i\theta}}{1-r e^{i\theta}} \right) \\ &= \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos \theta} \geq \frac{1+r}{1-r} > 0 \end{aligned}$$

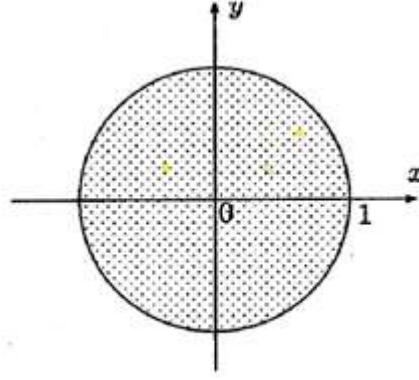
elde edilir. Buradan da $k(z) \in \mathcal{S}^*$ olduğu görülür.

Koebe fonksiyonunun döndürmeleri (rotation), her $z \in \mathcal{U}$ için,

$$k_{\theta}(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\theta} z)^2}$$

biçiminde tanımlanır ve $k_{\theta}(z)$ fonksiyonları $\mathcal{S}$ sınıfına aittir. Bu dönüşüm ile birim diskin görüntüsü $+\infty$ dan $\frac{-e^{-i\theta}}{4}$ ışını hariç kompleks düzlem olur. $\alpha \in (0,2]$ ve $z \in \mathcal{U}$ olmak üzere $f(z) = \frac{1}{2\alpha} \left[\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^{\alpha} - 1 \right]$ fonksiyonu, “*genelleştirilmiş Koebe fonksiyonu*” olarak adlandırılır ve $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

Tanım 3.3.7 ($\mathcal{C}$ sınıfı): $B \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. Her $w_1, w_2 \in B$ için w_1 noktasını w_2 noktasına birleştiren doğru parçası tamamen B içinde kalıyorsa B ye konveks küme denir. Eğer bir f fonksiyonu birim diski, konveks bir kümeye resmediyorsa f fonksiyonuna *konveks fonksiyon* denir. $f \in \mathcal{A}$ olması durumunda konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{C}$ ile gösterilir (Pommerenke 1975; Duren 1983).



Şekil 3: Konveks Küme

Konveks fonksiyonların analitik ifadesi aşağıdaki teoremdedir verilmiştir.

Teorem 3.3.8: $f \in \mathcal{A}$ olsun. O halde

$$f(z) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \in \mathcal{P}$$

olmasıdır. Ayrıca $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{C} \Rightarrow |a_n| \leq 1 \ (n = 2, 3, \dots)$ değerlendirmesi doğrudur (Pommerenke 1975; Goodman 1983).

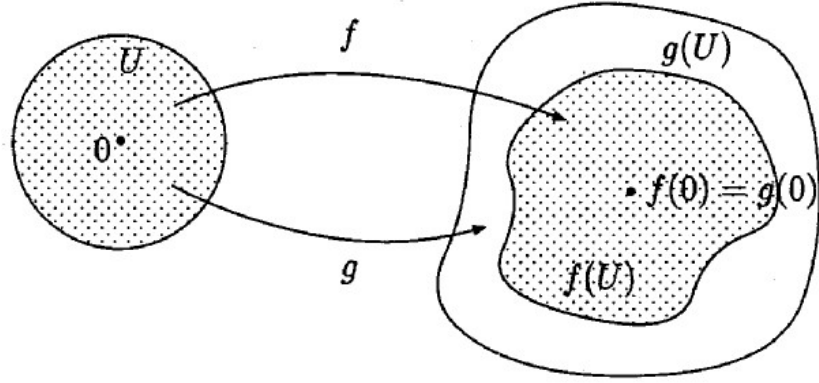
Teorem 3.3.9 (Alexander Teoremi): $f \in \mathcal{A}$ ve $z \in \mathcal{U}$ olmak üzere $g(z) = zf'(z)$ olsun. Bu durumda $f \in \mathcal{C}$ olması için gerek ve yeter şart $g \in \mathcal{S}^*$ olmasıdır (Duren 1983).

Yukarıdaki tanımlardan anlaşıldığı üzere bu sınıflar arasında $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}^* \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ şeklinde bir ilişki vardır.

Tanım 3.3.10: f ve g fonksiyonları $\mathcal{U}$ birim diskinde tanımlı iki analitik fonksiyon olsun. $\mathcal{U}$ birim diskinde $f(z) = g(\omega(z))$ olacak şekilde bir $\omega \in \Omega$ fonksiyonu varsa, f fonksiyonu $\mathcal{U}$ da g fonksiyonuna subordinatedir denir ve $f < g$ ile gösterilir (Duren 1983).

Eğer g ünivalent ise $f < g \Leftrightarrow f(0) = g(0)$ ve $f(\mathcal{U}) \subseteq g(\mathcal{U})$ gerektirmesi doğrudur.

f nin g ye subordinasyonundan anlaşılabak şey aşğıdaki şekilde izah edilmiştir.



Şekil 4: $f < g$ Subordinasyonu

Subordinasyon prensibi (Lindelöf Prensibi): Eğer f fonksiyonu birim diskinde analitik, ünivalent ve g fonksiyonu da $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik bir fonksiyon olmak üzere $g(0) = f(0)$ ve $g(\mathcal{U}) \subset f(\mathcal{U})$ ise, bu durumda $\mathcal{U}_r$ diskinde her $r < 1$ için $|g'(0)| \leq |f'(0)|$ ve $g(\mathcal{U}_r) \subset f(\mathcal{U}_r)$ dir (Duren, 1983).

Özellikle, eğer $f < g$ ise

$$\max_{|z| \leq r} |f(z)| \leq \max_{|z| \leq r} |g(z)| \quad (r \in (0,1))$$

eşitsizliği doğrudur. Ayrıca,

$$p(z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow p(z) < \frac{1+z}{1-z} \text{ ve } \phi(z) \in \Omega \Leftrightarrow \phi(z) < z$$

gerektirmeleri yazılır.

Tanım 3.3.11 (R sınıfı): $\mathcal{A}$ sınıfında

$$\operatorname{Re}(f'(z)) > 0 \quad (z \in \mathcal{U})$$

şartını sağlayan $f(z)$ fonksiyonlarına R sınıfındandır denir (Goodman 1983).

1959 yılında Sakaguchi, birim diskte simetrik noktalara bağlı yıldızlı fonksiyonların sınıfını aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

Tanım 3.3.12: $\mathcal{S}$ sınıfında

$$Re \left\{ \frac{2zf'(z)}{f(z) - f(-z)} \right\} > 0 \quad (z \in \mathcal{U})$$

şartını sağlayan $f(z)$ fonksiyonlarına $\mathcal{S}_S^*$ sınıfındandır denir (Sakaguchi 1959).

2006 yılında Wang ve arkadaşları, birim diskte simetrik noktalara bağlı konveks fonksiyonların sınıfını aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

Tanım 3.3.13: $\mathcal{S}$ sınıfında

$$Re \left\{ \frac{2[zf'(z)]'}{[f(z) - f(-z)]'} \right\} > 0 \quad (z \in \mathcal{U})$$

şartını sağlayan $f(z)$ fonksiyonlarına $\mathcal{C}_S$ sınıfındandır denir (Sakaguchi 1959).

Ünivalentlik kriterlerinden en kolay ifade edilen ve ispatlananlardan biri aşağıdaki Noshiro, Warschawski ve Wolff'un kriteridir:

- f fonksiyonu konveks bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde analitik ve her $z \in D$ için $Re f'(z) > 0$ ise f fonksiyonu D bölgesi üzerinde ünivalenttir.

Tanım 3.3.14: Analitik bir f fonksiyonunun katsayıları yardımıyla tanımlanan $E(a_2, a_3) = |a_3 - a_2^2|$ fonksiyoneline Fekete-Szegö fonksiyoneli denir. Genel olarak Fekete-Szegö fonksiyoneli, μ bir reel ya da kompleks sayı olmak üzere, $E(a_2, a_3; \mu) = |a_3 - \mu a_2^2|$ olarak da bilinmektedir. Bu fonksiyonelin bir üst sınırının bulunması problemi analitik fonksiyonlar teorisinde Fekete-Szegö problemi olarak bilinir (Fekete-Szegö 1933).

Fekete-Szegö problemi ile ilgili aşağıdaki teorem bilinmektedir.

Teorem 3.3.15 (Fekete-Szegö problemi): Her $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu için

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq 1 + 2e^{\frac{-2\mu}{1-\mu}} \quad (0 < \mu < 1)$$

eşitsizliği yazılır. Bu sınır $(0,1)$ aralığındaki her μ değeri için kesindir (Duren 1983).

3.4. Bi-Ünivalent Fonksiyonlar

Tanım 3.4.1: Hem kendisi hem de tersi ünivalent olan fonksiyona bi-ünivalent fonksiyon denir.

Bir f fonksiyonun tersi f^{-1} ile gösterilirse

$$f^{-1}(f(z)) = z$$

yazılır. Diğer taraftan *Koebe-Çeyrek* teoremine göre her $\mathcal{U}$ diskinin $f \in \mathcal{S}$ altında görüntüsünün orijin merkezli $\frac{1}{4}$ yarıçaplı diski ihtiva ettiğini biliyoruz. Böylece her $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu

$$f^{-1}(f(z)) = z, \quad (z \in \mathcal{U})$$

ve

$$f(f^{-1}(w)) = w, \quad (|w| < r_0(f), r_0(f) \geq \frac{1}{4})$$

olacak şekilde f^{-1} tersine sahiptir.

Bu durumda $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{S}$ alınır, $f^{-1}(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n$ olacağı açıktır.

Böylece

$$\begin{aligned}
 f(f^{-1}(w)) &= f^{-1}(w) + a_2[f^{-1}(w)]^2 + a_3[f^{-1}(w)]^3 + \dots \\
 &= w + \sum_{n=2}^{\infty} b_n w^n + a_2 \left[w + \sum_{n=2}^{\infty} b_n w^n \right]^2 + a_3 \left[w + \sum_{n=2}^{\infty} b_n w^n \right]^3 + \dots \\
 &= w + (a_2 + b_2)w^2 + (b_3 + 2a_2b_2 + a_3)w^3 \\
 &\quad + (b_4 + 2a_2b_3 + a_2b_2^2 + 3a_3b_2 + a_4)w^4 + \dots \\
 &= g(w)
 \end{aligned}$$

olur. Buradan w 'nın aynı dereceli kuvvetlerinin katsayıları eşitlenirse a_n ile b_n ler arasında

$$\begin{aligned}
 a_2 + b_2 &= 0 \Rightarrow b_2 = -a_2 \\
 b_3 + 2a_2b_2 + a_3 &= 0 \Rightarrow b_3 = 2a_2^2 - a_3 \\
 b_4 + 2a_2b_3 + a_2b_2^2 + 3a_3b_2 + a_4 &= 0 \Rightarrow b_4 = -5a_2^3 + 5a_2a_3 - a_4
 \end{aligned}$$

şeklinde bağıntılar elde edilir. Böylece

$$g = f^{-1}(w) = w - a_2w^2 + (2a_2^2 - a_3)w^3 - (5a_2^3 - 5a_2a_3 + a_4)w^4 + \dots \quad (3.2)$$

olarak yazılır. Burada $f^{-1}(w) \in \mathcal{A}$ dır.

$\mathcal{S}$ sınıfında bi-ünivalent fonksiyonların oluşturduğu sınıf Σ ile gösterilecektir. Yani

$$\Sigma = \{f \in \mathcal{S}: \forall z \in \mathcal{U} \text{ için } f^{-1}(z) \in \mathcal{S}\}$$

şeklinde yazılır.

Örneğin; $f_1 = \frac{z}{1-z}$, $f_2(z) = -\log(1-z)$, $f_3(z) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ fonksiyonları Σ sınıfına ait olmasına rağmen; $g_1(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$, $g_2(z) = z - \frac{z^2}{2}$, $g_3(z) = \frac{z}{1-z^2}$ fonksiyonları ise Σ sınıfına ait değildirler.

3.5. Gegenbauer Polinomu ve Özellikleri

Klasik ortogonal polinomlar, ortogonal polinomların özel bir sınıfını oluştururlar. Bunlar matematiksel fizikte, kuantum mekaniğinde ve özellikle, yaklaşım teorisi ve nümerik integrasyonda bazı problemlerin çözümüdürler. Gegenbauer polinomları da ortogonal polinomların en önemlilerinden birisidir.

Gegenbauer polinomları (Kim et al. 2012), $P_n^{(u,v)}$ Jacobi polinomları cinsinden $v = u = \lambda - \frac{1}{2}$, $(\lambda > -\frac{1}{2}, \lambda \neq 0)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} B_n^\lambda(l) &= \frac{\Gamma(n+2)\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(n+\lambda+\frac{1}{2})} P_n^{(\lambda+\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}(l) \\ &= \binom{n-1+2\lambda}{n} \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k} (2\lambda+n)_k}{(\lambda+\frac{1}{2})_k} \left(\frac{l-1}{2}\right)^k \end{aligned} \quad (3.3)$$

şeklinde tanımlanır. (3.3) numaralı denklemden, $B_n^\lambda(l)$ nin reel katsayılarla derecesi n olan bir polinom ve $B_n^\lambda(1) = \binom{n-1+2\lambda}{n}$ olduğu sonucu çıkar, ayrıca $B_n^\lambda(l)$ nin baş katsayısı $2^n \binom{n+\lambda-1}{n}$ dir. Jacobi polinomunun tanımına göre, $\lambda > -\frac{1}{2}$ ve $\lambda \neq 0$ olmak üzere $\mu = v = \lambda - \frac{1}{2}$ için

$$B_n^\lambda(-l) = (-1)^n B_n^\lambda(l)$$

dir.

Kim et al. (2012) ve Stein and Weiss (1971) çalışmalarında, Gegenbauer polinomunun üreteç fonksiyonunu

$$\frac{z^{\lambda-\frac{1}{2}}}{(1-2lz+z^2)^{\frac{1}{2}}(1-lz+\sqrt{1-2lz+z^2})^{\lambda-\frac{1}{2}}} = \frac{(\lambda-\frac{1}{2})_n}{(2\lambda)_n} B_n^\lambda(l) t^n \quad (3.4)$$

ile tanımlamıştır ve (3.4) ile tanımlanan eşitlik Jacobi polinomunun üreteç fonksiyonundan elde edilebilir.

(3.4) eşitliğinden

$$\phi_l^\lambda(z) = \frac{1}{(1-2lz+z^2)^\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^\lambda(l) z^n, \quad z \in \Delta, \quad l \in [-1,1], \quad \lambda \in \left(\frac{-1}{2}, +\infty\right) \setminus \{0\} \quad (3.5)$$

elde edilir.

(3.5) eşitliğinde $\lambda = 1$ alınırsa Chebyshev polinomlarının üreteç fonksiyonu ve $\lambda = \frac{1}{2}$ alınırsa Legendre polinomlarının üreteç fonksiyonu elde edilir.

$\phi_l^\lambda(z)$ fonksiyonu için Taylor-Maclaurin seri açılımı aşağıdaki gibidir:

$$\phi_l^\lambda(z) = z + B_1^\lambda(l)z^2 + B_2^\lambda(l)z^3 + B_3^\lambda(l)z^4 + \cdots + B_{n-1}^\lambda(l)z^n + \cdots, \quad (3.6)$$

burada,

$$B_0^\lambda(l) = 1, \quad B_1^\lambda(l) = 2\lambda l, \quad B_2^\lambda(l) = 2\lambda(\lambda + 1)l^2 - \lambda = 2(\lambda)_2 l^2 - \lambda \quad (3.7)$$

ve $(\lambda)_n$ ifadesi

$$(\lambda)_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \lambda(\lambda + 1) \cdots (\lambda + n - 1), & n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

ile tanımlanan Pochhammer sembolüdür.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, aşağıdaki biçimde tanımlamış olduğumuz $G_{\Sigma}(\phi_l^{\lambda})$ ve $K_{\Sigma}(\phi_l^{\lambda})$ sınıfları için elde edilen sonuçlar ispatlarıyla birlikte verilmiştir.

Tanım 4.1: $l \in (0,1]$ ve $l \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$ olmak üzere $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu

$$\frac{2zf'(z)}{f(z)-f(-z)} < \phi_l^{\lambda}(z) \quad (4.1)$$

ve

$$\frac{2\omega g'(\omega)}{g(\omega)-g(-\omega)} < \phi_l^{\lambda}(\omega) \quad (4.2)$$

subordinasyon şartlarını sağlıyorsa $f(z)$ fonksiyonu $G_{\Sigma}(\phi_l^{\lambda})$ sınıfına aittir denir. Burada $z, \omega \in \mathcal{U}$, ϕ_l^{λ} ifadesi (3.5) ve $g = f^{-1}$ ise (3.2) ile verilmiştir.

Tanım 4.2: $l \in (0,1]$ ve $l \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$ olmak üzere $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu

$$\frac{2[zf'(z)]'}{[f(z)-f(-z)]'} < \phi_l^{\lambda}(z) \quad (4.3)$$

ve

$$\frac{2[\omega g'(\omega)]'}{[g(\omega)-g(-\omega)]'} < \phi_l^{\lambda}(\omega) \quad (4.4)$$

subordinasyon şartlarını sağlıyorsa $f(z)$ fonksiyonu $K_{\Sigma}(\phi_l^{\lambda})$ sınıfına aittir denir. Burada $z, \omega \in \mathcal{U}$, ϕ_l^{λ} ifadesi (3.5) ve $g = f^{-1}$ ise (3.2) ile verilmiştir.

4. 1. $G_{\Sigma}(\phi_l^{\lambda})$ Fonksiyon Sınıfı için Katsayı Eşitsizlikleri

Teorem 4.1.1: $f(z) \in G_{\Sigma}(\phi_l^{\lambda})$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \leq \frac{\lambda l \sqrt{2\lambda l}}{\sqrt{|\lambda(1-2l^2)|}} \quad (4.5)$$

ve

$$|a_3| \leq \lambda l(1 + \lambda l) \quad (4.6)$$

dir (Çağlar et al. 2024).

İspat: $f(z) \in G_{\Sigma}(\phi_l^\lambda)$ ve $g = f^{-1}$ olsun. (4.1) ve (4.2) şartlarından $v(0) = 0 = v(0)$ olacak şekilde v, ν analitik fonksiyonları vardır ve her $z, \omega \in \mathcal{U}$ için $|v(z)| < 1, |\nu(\omega)| < 1$ dir. Buradan

$$\frac{2zf'(z)}{f(z)-f(-z)} = \Phi_l^\lambda(v(z)) \quad (4.7)$$

ve

$$\frac{2\omega f'(\omega)}{f(\omega)-f(-\omega)} = \Phi_l^\lambda(\nu(\omega)) \quad (4.8)$$

yazılabilir veya buna denk olarak

$$\frac{2zf'(z)}{f(z)-f(-z)} = 1 + \mathcal{B}_1^\lambda(l)v(z) + \mathcal{B}_2^\lambda(l)v^2(z) + \dots \quad (4.9)$$

ve

$$\frac{2\omega g'(\omega)}{g(\omega)-g(-\omega)} = 1 + \mathcal{B}_1^\lambda(l)\nu(\omega) + \mathcal{B}_2^\lambda(l)\nu^2(\omega) + \dots \quad (4.10)$$

olur. Burada $z, \omega \in \mathcal{U}$ ve $j \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$v(z) = c_1z + c_2z^2 + \dots \quad (4.11)$$

ve

$$\nu(\omega) = d_1\omega + d_2\omega^2 + \dots \quad (4.12)$$

olduğu bilinmektedir. O halde

$$|c_j| \leq 1, |d_j| \leq 1 \quad (4.13)$$

dir.

Eğer (3.1), (3.2), (4.11) ve (4.12) ifadeleri sırasıyla (4.9) ve (4.10) eşitliklerinde yerine yazılırsa

$$1 + 2a_2z + 2a_3z^2 + \dots = 1 + \mathcal{B}_1^\lambda(l)c_1z + [\mathcal{B}_1^\lambda(l)c_2 + \mathcal{B}_2^\lambda(l)c_1^2]z^2 + \dots \quad (4.14)$$

ve

$$1 - 2a_2\omega + (4a_2^2 - 2a_3)\omega^2 + \dots = 1 + \mathcal{B}_1^\lambda(l)d_1\omega + [\mathcal{B}_1^\lambda(l)d_2 + \mathcal{B}_2^\lambda(l)d_1^2]\omega^2 + \dots \quad (4.15)$$

elde edilir. (4.14) ve (4.15) ifadelerindeki denklemlerin katsayıları karşılaştırılırsa

$$2a_2 = \mathcal{B}_1^\lambda(l)c_1, \quad (4.16)$$

$$2a_3 = \mathcal{B}_1^\lambda(l)c_2 + \mathcal{B}_2^\lambda(l)c_1^2 \quad (4.17)$$

ve

$$-2a_2 = \mathcal{B}_1^\lambda(l)d_1, \quad (4.18)$$

$$4a_2^2 - 2a_3 = \mathcal{B}_1^\lambda(l)d_2 + \mathcal{B}_2^\lambda(l)d_1^2 \quad (4.19)$$

elde edilir. (4.16) ve (4.18) denklemlerinden

$$c_1 = -d_1 \quad (4.20)$$

ve

$$a_2^2 = \frac{[\mathcal{B}_1^\lambda(l)]^2(c_1^2 + d_1^2)}{8} \quad (4.21)$$

eşitlikleri yazılır. Ayrıca (4.17) ve (4.19) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$4a_2^2 = \mathcal{B}_1^\lambda(l)(c_2 + d_2) + \mathcal{B}_2^\lambda(l)(c_1^2 + d_1^2) \quad (4.22)$$

elde edilir. (4.21) de $(c_1^2 + d_1^2)$ çekilip (4.22) de yerine yazılırsa

$$a_2^2 = \frac{[\mathcal{B}_1^\lambda(l)]^3(c_2 + d_2)}{4[\mathcal{B}_1^\lambda(l)]^2 - 8\mathcal{B}_2^\lambda(l)} \quad (4.23)$$

bulunur. Bu durumda (4.23) denkleminde her iki tarafın modülü alınıp (4.13) ve (3.7) dikkate alınır

$$|a_2| \leq \frac{\lambda l \sqrt{2\lambda l}}{\sqrt{|\lambda(1 - 2l^2)|}}$$

elde edilir.

(4.17) den (4.19) çıkarılırsa

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{\mathcal{B}_2^\lambda(l)(c_1^2-d_1^2)+\mathcal{B}_1^\lambda(l)(c_2-d_2)}{4} + a_2^2 \\ &= \frac{\mathcal{B}_1^\lambda(l)(c_2-d_2)+\mathcal{B}_2^\lambda(l)(c_1^2-d_1^2)}{4} + \frac{[\mathcal{B}_1^\lambda(l)]^2(c_1^2+d_1^2)}{8} \end{aligned} \quad (4.24)$$

sonucu elde edilir. Son olarak (4.24) eşitliğinde her iki tarafın modülü alınıp (4.13), (4.20) ve (4.21) eşitlikleri kullanılarak

$$|a_3| \leq \lambda l(1 + \lambda l)$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Sonuç 4.1.2: $f(z) \in G_\Sigma(\phi_1^1)$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \leq \sqrt{2}$$

ve

$$|a_3| \leq 2$$

dir.

Sonuç 4.1.3: $f(z) \in G_\Sigma\left(\phi_{\frac{1}{2}}^1\right)$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ve

$$|a_3| \leq \frac{3}{4}$$

dir.

Sonuç 4.1.4: $f(z) \in G_\Sigma\left(\phi_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\right)$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

ve

$$|a_3| \leq \frac{5}{16}$$

dir.

4.2. $G_{\Sigma}(\phi_l^{\lambda})$ Fonksiyon Sınıfı İçin Fekete-Szegö Problemi

Teorem 4.2.1: $f(z) \in G_{\Sigma}(\phi_l^{\lambda})$ olsun. Bu durumda $\mu \in \mathbb{R}$ için

$$h(\mu) = \frac{(1-\mu)\lambda l^2}{4\lambda l^2 - 2(2(\lambda+1)l^2 - 1)}$$

olmak üzere

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \begin{cases} \lambda l, & \text{eğer } |h(\mu)| \leq \frac{1}{4}, \\ 4\lambda l |h(\mu)|, & \text{eğer } |h(\mu)| \geq \frac{1}{4}, \end{cases}$$

olur (Çağlar et al. 2024).

İspat: (4.23) ve (4.24) eşitliğinden

$$\begin{aligned} a_3 - \mu a_2^2 &= \frac{\mathcal{B}_1^{\lambda}(l)(c_2 - d_2)}{4} + (1-\mu)a_2^2 \\ &= \frac{\mathcal{B}_1^{\lambda}(l)(c_2 - d_2)}{4} + \frac{(1-\mu)[\mathcal{B}_1^{\lambda}(l)]^3(c_2 + d_2)}{4[\mathcal{B}_1^{\lambda}(l)]^2 - 8\mathcal{B}_2^{\lambda}(l)} \\ &= \mathcal{B}_1^{\lambda}(l) \left[\frac{c_2}{4} - \frac{d_2}{4} + \frac{(1-\mu)[\mathcal{B}_1^{\lambda}(l)]^2 c_2}{4[\mathcal{B}_1^{\lambda}(l)]^2 - 8\mathcal{B}_2^{\lambda}(l)} + \frac{(1-\mu)[\mathcal{B}_1^{\lambda}(l)]^2 d_2}{4[\mathcal{B}_1^{\lambda}(l)]^2 - 8\mathcal{B}_2^{\lambda}(l)} \right] \\ &= \mathcal{B}_1^{\lambda}(l) \left[\left(h(\mu) + \frac{1}{4} \right) c_2 + \left(h(\mu) - \frac{1}{4} \right) d_2 \right] \end{aligned} \tag{4.25}$$

sonucu elde edilir. Burada

$$h(\mu) = \frac{(1-\mu)[\mathcal{B}_1^{\lambda}(l)]^2}{4[\mathcal{B}_1^{\lambda}(l)]^2 - 8\mathcal{B}_2^{\lambda}(l)} \tag{4.26}$$

dir. (3.7) ifadeleri (4.25) ve (4.26) da dikkate alınırsa

$$h(\mu) = \frac{(1-\mu)\lambda l^2}{4\lambda l^2 - 2(2(\lambda+1)l^2 - 1)}$$

olmak üzere

$$a_3 - \mu a_2^2 = 2\lambda l \left[\left(h(\mu) + \frac{1}{4} \right) c_2 + \left(h(\mu) - \frac{1}{4} \right) d_2 \right]$$

elde edilir. Burada her iki tarafın modülü alınıp (4.13) dikkate alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \begin{cases} \lambda l, & \text{eğer } |h(\mu)| \leq \frac{1}{4}, \\ 4\lambda l |h(\mu)|, & \text{eğer } |h(\mu)| \geq \frac{1}{4}, \end{cases}$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Sonuç 4.2.2: $f \in G_\Sigma(\phi_1^1)$ olsun. Bu durumda $\mu \in \mathbb{R}$ için

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \begin{cases} 1, & \text{eğer } |\mu - 1| \leq \frac{1}{2}, \\ 2|\mu - 1|, & \text{eğer } |\mu - 1| \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

dir.

Sonuç 4.2.3: $f \in G_\Sigma\left(\phi_{\frac{1}{2}}^1\right)$ olsun. Bu durumda $\mu \in \mathbb{R}$ için

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{eğer } |\mu - 1| \leq 1, \\ \left| \frac{1 - \mu}{2} \right|, & \text{eğer } |\mu - 1| \geq 1, \end{cases}$$

dir.

Sonuç 4.2.4: $f \in G_\Sigma\left(\phi_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\right)$ olsun. Bu durumda $\mu \in \mathbb{R}$ için

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{eğer } \left| \frac{1 - \mu}{2} \right| \leq 1, \\ \left| \frac{1 - \mu}{8} \right|, & \text{eğer } \left| \frac{1 - \mu}{2} \right| \geq 1, \end{cases}$$

dir.

4.3. $K_{\Sigma}(\phi_l^{\lambda})$ Fonksiyon Sınıfı için Katsayı Eşitsizlikleri

Teorem 4.3.1: $f(z) \in K_{\Sigma}(\phi_l^{\lambda})$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \leq \frac{\lambda l \sqrt{2\lambda l}}{\sqrt{|\lambda(2-4l^2-\lambda l^2)|}} \quad (4.27)$$

ve

$$|a_3| \leq \frac{\lambda l}{3} + \frac{\lambda^2 l^2}{4} \quad (4.28)$$

dir (Çağlar et al. 2024).

İspat: $f(z) \in G_{\Sigma}(\phi_l^{\lambda})$ ve $g = f^{-1}$ olsun. (4.3) ve (4.4) şartlarından $v(0) = 0 = v(0)$ olacak şekilde v, ν analitik fonksiyonları vardır ve her $z, \omega \in \mathcal{U}$ için $|v(z)| < 1, |\nu(\omega)| < 1$ dir. Buradan

$$\frac{2[zf'(z)]'}{[f(z)-f(-z)]'} = \Phi_l^{\lambda}(v(z)) \quad (4.29)$$

ve

$$\frac{2[\omega g'(\omega)]'}{[g(\omega)-g(-\omega)]'} = \Phi_l^{\lambda}(\nu(\omega)) \quad (4.30)$$

yazılabilir veya buna denk olarak

$$\frac{2[zf'(z)]'}{[f(z)-f(-z)]'} = 1 + \mathcal{B}_1^{\lambda}(l)v(z) + \mathcal{B}_2^{\lambda}(l)v^2(z) + \dots \quad (4.31)$$

ve

$$\frac{2[\omega g'(\omega)]'}{[g(\omega)-g(-\omega)]'} = 1 + \mathcal{B}_1^{\lambda}(l)\nu(\omega) + \mathcal{B}_2^{\lambda}(l)\nu^2(\omega) + \dots \quad (4.32)$$

olur. Burada $z, \omega \in \mathcal{U}$ ve $j \in \mathbb{N}$ olmak üzere $v(z)$ ve $\nu(\omega)$ sırasıyla (4.11) ve (4.12) gibi tanımlanır ve (4.13) şartı sağlanır.

Eğer (3.1), (3.2), (4.11) ve (4.12) ifadeleri sırasıyla (4.31) ve (4.32) eşitliklerinde yerine yazılırsa

$$1 + 4a_2z + 6a_3z^2 + \dots = 1 + \mathcal{B}_1^\lambda(l)c_1z + [\mathcal{B}_1^\lambda(l)c_2 + \mathcal{B}_2^\lambda(l)c_1^2]z^2 + \dots \quad (4.33)$$

ve

$$1 - 4a_2\omega + (12a_2^2 - 6a_3)\omega^2 + \dots = 1 + \mathcal{B}_1^\lambda(l)d_1\omega + [\mathcal{B}_1^\lambda(l)d_2 + \mathcal{B}_2^\lambda(l)d_1^2]\omega^2 + \dots \quad (4.34)$$

elde edilir. elde edilir. (4.33) ve (4.34) ifadelerindeki denklemlerin katsayıları karşılaştırılırsa

$$4a_2 = \mathcal{B}_1^\lambda(l)c_1, \quad (4.35)$$

$$6a_3 = \mathcal{B}_1^\lambda(l)c_2 + \mathcal{B}_2^\lambda(l)c_1^2 \quad (4.36)$$

ve

$$-4a_2 = \mathcal{B}_1^\lambda(l)d_1, \quad (4.37)$$

$$12a_2^2 - 6a_3 = \mathcal{B}_1^\lambda(l)d_2 + \mathcal{B}_2^\lambda(l)d_1^2 \quad (4.38)$$

elde edilir. (4.35) ve (4.37) denklemlerinden

$$c_1 = -d_1 \quad (4.39)$$

ve

$$a_2^2 = \frac{[\mathcal{B}_1^\lambda(l)]^2(c_1^2 + d_1^2)}{32} \quad (4.40)$$

eşitlikleri yazılır. Ayrıca (4.36) ve (4.38) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$12a_2^2 = \mathcal{B}_1^\lambda(l)(c_2 + d_2) + \mathcal{B}_2^\lambda(l)(c_1^2 + d_1^2) \quad (4.41)$$

elde edilir. (4.40) da $(c_1^2 + d_1^2)$ çekilip (4.41) de yerine yazılırsa

$$a_2^2 = \frac{[B_1^\lambda(l)]^3 (c_2 + d_2)}{4(3[B_1^\lambda(l)]^2 - 8B_2^\lambda(l))} \quad (4.42)$$

bulunur. Bu durumda (4.42) denkleminde her iki tarafın modülü alınıp (4.13) ve (3.7) dikkate alınırsa

$$|a_2| \leq \frac{\lambda l \sqrt{2\lambda l}}{\sqrt{|\lambda(2 - 4l^2 - \lambda l^2)|}}$$

elde edilir.

(4.36) dan (4.38) çıkarılırsa

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{B_2^\lambda(l)(c_1^2 - d_1^2) + B_1^\lambda(l)(c_2 - d_2)}{12} + a_2^2 \\ &= \frac{B_1^\lambda(l)(c_2 - d_2) + B_2^\lambda(l)(c_1^2 - d_1^2)}{12} + \frac{[B_1^\lambda(l)]^2 (c_1^2 + d_1^2)}{32} \end{aligned} \quad (4.43)$$

sonucu elde edilir. Son olarak (4.43) eşitliğinde her iki tarafın modülü alınıp (4.13), (4.39) ve (4.40) eşitlikleri kullanılarak

$$|a_3| \leq \frac{\lambda l}{3} + \frac{\lambda^2 l^2}{4}$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Sonuç 4.3.2: $f(z) \in K_\Sigma(\phi_1^1)$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \leq \frac{\sqrt{6}}{3}$$

ve

$$|a_3| \leq \frac{7}{12}$$

dir.

Sonuç 4.3.3: $f(z) \in K_{\Sigma} \left(\phi_{\frac{1}{2}}^1 \right)$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ve

$$|a_3| \leq \frac{11}{48}$$

dir.

Sonuç 4.3.4: $f(z) \in K_{\Sigma} \left(\phi_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right)$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \leq \frac{1}{\sqrt{14}}$$

ve

$$|a_3| \leq \frac{19}{192}$$

dir.

4.4. $K_{\Sigma}(\phi_l^{\lambda})$ Fonksiyon Sınıfı İçin Fekete-Szgeő Problemi

Teorem 4.4.1: $f(z) \in K_{\Sigma}(\phi_l^{\lambda})$ olsun. Bu durumda $\mu \in \mathbb{R}$ için

$$h(\mu) = \frac{(1 - \mu)\lambda l^2}{12\lambda l^2 - 2(2(\lambda + 1)l^2 - 1)}$$

olmak üzere

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \begin{cases} \frac{\lambda l}{3}, & \text{eğer } |h(\mu)| \leq \frac{1}{12}, \\ 4\lambda l |h(\mu)|, & \text{eğer } |h(\mu)| \geq \frac{1}{12}, \end{cases}$$

olur (Çağlar et al. 2024).

İspat: (4.42) ve (4.43) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
 a_3 - \mu a_2^2 &= \frac{\mathcal{B}_1^\lambda(l)(c_2 - d_2)}{12} + (1 - \mu)a_2^2 \\
 &= \frac{\mathcal{B}_1^\lambda(l)(c_2 - d_2)}{12} + \frac{(1 - \mu)[\mathcal{B}_1^\lambda(l)]^3(c_2 + d_2)}{4(3[\mathcal{B}_1^\lambda(l)]^2 - 8\mathcal{B}_2^\lambda(l))} \\
 &= \mathcal{B}_1^\lambda(l) \left[\frac{c_2}{12} - \frac{d_2}{12} + \frac{(1 - \mu)[\mathcal{B}_1^\lambda(l)]^2 c_2}{4(3[\mathcal{B}_1^\lambda(l)]^2 - 8\mathcal{B}_2^\lambda(l))} + \frac{(1 - \mu)[\mathcal{B}_1^\lambda(l)]^2 d_2}{4(3[\mathcal{B}_1^\lambda(l)]^2 - 8\mathcal{B}_2^\lambda(l))} \right] \\
 &= \mathcal{B}_1^\lambda(l) \left[\left(h(\mu) + \frac{1}{12} \right) c_2 + \left(h(\mu) - \frac{1}{12} \right) d_2 \right]
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

sonucu elde edilir. Burada

$$h(\mu) = \frac{(1 - \mu)[\mathcal{B}_1^\lambda(l)]^2}{4(3[\mathcal{B}_1^\lambda(l)]^2 - 8\mathcal{B}_2^\lambda(l))} \tag{4.45}$$

dir. (3.7) ifadeleri (4.44) ve (4.45) da dikkate alınırsa

$$h(\mu) = \frac{(1 - \mu)\lambda l^2}{12\lambda l^2 - 2(2(\lambda + 1)l^2 - 1)}$$

olmak üzere

$$a_3 - \mu a_2^2 = 2\lambda l \left[\left(h(\mu) + \frac{1}{12} \right) c_2 + \left(h(\mu) - \frac{1}{12} \right) d_2 \right]$$

elde edilir. Burada her iki tarafın modülü alınıp (4.13) dikkate alınıp gerekli işlemler yapılırsa

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \begin{cases} \frac{\lambda l}{3}, & \text{eğer } |h(\mu)| \leq \frac{1}{12}, \\ 4\lambda l |h(\mu)|, & \text{eğer } |h(\mu)| \geq \frac{1}{12}, \end{cases}$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Sonuç 4.4.2: $f(z) \in K_{\Sigma}(\phi_1^1)$ olsun. Bu durumda $\mu \in \mathbb{R}$ için

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{eğer } |1 - \mu| \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{2}{3}|1 - \mu|, & \text{eğer } |1 - \mu| \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

dir.

Sonuç 4.4.3: $f(z) \in K_{\Sigma}\left(\phi_{\frac{1}{2}}^1\right)$ olsun. Bu durumda $\mu \in \mathbb{R}$ için

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{eğer } |1 - \mu| \leq 1, \\ \frac{1}{6}|1 - \mu|, & \text{eğer } |1 - \mu| \geq 1, \end{cases}$$

dir.

Sonuç 4.4.4: $f(z) \in K_{\Sigma}\left(\phi_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\right)$ olsun. Bu durumda $\mu \in \mathbb{R}$ için

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \begin{cases} \frac{1}{12}, & \text{eğer } \left|\frac{1 - \mu}{4}\right| \leq \frac{1}{3}, \\ \left|\frac{1 - \mu}{16}\right|, & \text{eğer } \left|\frac{1 - \mu}{4}\right| \geq \frac{1}{3}, \end{cases}$$

dir

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Tez çalışmasında öncelikli olarak bi-ünivalent fonksiyonların tanımı ve seriye açılımı gibi bazı özellikleri verilmiştir. Daha sonra Gegenbauer polinomları yardımı ile bi-ünivalent fonksiyonların yeni $G_{\Sigma}(\phi_l^{\lambda})$ ve $K_{\Sigma}(\phi_l^{\lambda})$ alt sınıfları tanımlanmış ve bu sınıflara ait fonksiyonlar için $|a_2|$ ve $|a_3|$ katsayı eşitsizlikleri elde edilmiştir. Ayrıca, Fekete-Szegö problemi olarak bilinen $|a_3 - \mu a_2^2|$ fonksiyoneli için bir üst sınır bulunmuştur.

Yapılan bu çalışmada parametrelerin özel durumları için $G_{\Sigma}(\phi_l^{\lambda})$ ve $K_{\Sigma}(\phi_l^{\lambda})$ sınıfları için yeni sonuçlar elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

- Al-Hawary, T., Amourah, A., Alsoboh, A. and Alsalhi, O. 2023. A new comprehensive subclass of analytic bi-univalent functions related to Gegenbauer polynomials. *Symmetry*, 15, 576.
- Amourah, A., Alamoush, A. and Al-Kaseasbeh, M. 2021a. Gegenbauer polynomials and bi-univalent functions. *Pales. J. Math.*, 10, 625–632.
- Amourah, A., Frasin, B. A. and Abdeljawad, T. 2021b. Fekete-Szegö inequality for analytic and bi-univalent functions subordinate to Gegenbauer polynomials. *J. Funct. Spaces*, 2021, 5574673, 7 pages.
- Bieberbach, L. 1916. Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys- Math. Kl.* pp. 940-955.
- Brannan, D. A. and Clunie, J. G. (Eds.) 1980. *Aspects of Contemporary Complex Analysis*. (Proceedings of the NATO Advanced Study Institute held at the University of Durham, Durham; July 1–20. Academic Press, New York and London.
- Brannan, D. A. and Taha, T. S. 1986. On some classes of bi-univalent functions. in: S. M. Mazhar, A. Hamoui, N. S. Faour (Eds.), *Math. Anal. and Appl.*, Kuwait; February 18-21, in: *KFAS Proceedings Series*, vol. 3, Pergamon Press, Elsevier Science Limited, Oxford, 1988, pp. 53-60. see also *Studia Univ. Babes-Bolyai Math.* 31(2), 70-77.
- Bulut, S. 2014. Faber polynomial coefficient estimates for a comprehensive subclass of analytic bi-univalent functions. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 352(6), 479-484.
- Çağlar, M., Orhan, H. and Yağmur, N. 2013. Coefficient bounds for new subclasses of bi-univalent functions. *Filomat*, 27(7), 1165-1171.

- Çağlar, M., Buyankara, M. and Karaman, A. 2024. Fekete-Szegö inequalities for Sakaguchi type bi-univalent functions defined by Gegenbauer polynomials. Turkish Journal of Science, 9(2), 126–136.
- Deniz, E. 2013. Certain subclasses of bi-univalent functions satisfying subordinate conditions. J. Class. Anal., 2(1), 49-60.
- Duren P. 1983. Univalent Functions. New York: Springer-Verlag.
- Fekete, M. and Szegö, G. 1933. Eine Bemerkung über ungerade schlichte Funktionen. J. London Math. Soc., 8, 85-89.
- Frasin, B. A. and Aouf, M. K. 2011. New subclasses of bi-univalent functions. Applied Mathematics Letters, 24(9), 1569-1573.
- Goodman, A. W. 1983. Univalent Functions-I. Mariner Publishing Company., s-245, Tampa, Florida.
- Goodman, A. W. 1983. Univalent Functions-II. Mariner Publishing Company., s-311, Tampa, Florida.
- Hamidi, S. G. and Jahangiri, J. M. 2014. Faber polynomial coefficient estimates for analytic bi-close-to-convex functions. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 352, 17-20.
- Hussen, A., Zeyani, A. 2023. Coefficients and Fekete–Szegö functional estimations of bi-univalent subclasses based on Gegenbauer polynomials. Mathematics, 2023, 11, 2852.
- Kedzierawski, A. W. 1988. Some remarks on bi-univalent functions. Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska Sect. A, 39, 77-81.
- Keogh, F. R. and Merkes, E. P. 1969. A coefficient inequality for certain classes of analytic functions. Proc. Amer. Math. Soc., 20, 8-12.
- Kim, D. S., Kim, T. and Rim, S. H. 2012. Some identities involving Gegenbauer polynomials. Adv. Differ. Equ., 2012, 219.

- Koebe, P. 1907. Über die uniformisierung beliebiger analytischer kurven. Nach. Ges. Wiss. Gottingen, 191-210.
- Kumar, S. S., Kumar, V. and Ravichandran, V. 2013. Estimates for the initial coefficients of bi-univalent functions. Tamsui Oxford Journal of Information and Mathematical Sciences, 29(4), 487-504.
- Lewin, M. 1967. On a coefficient problem for bi-univalent functions. Proc. Amer. Math. Soc., 18, 63-68.
- Loewner, C. 1917. Untersuchungen über die Verzerrung bei konformen Abbildungen des Einheitskreises $|z| < 1$, die durch Funktionen mit nicht verschwindender Ableitung geliefert werden. Ber. Verh. Sachs. Ges. Wiss. Leipzig, 69, 89-106.
- Murugusundaramoorthy, G. and Bulboacă, T. 2022. Subclasses of Yamakawa-Type bi-starlike functions associated with Gegenbauer polynomials. Axioms, 11(92), 1-13.
- Netanyahu, E. 1969. The minimal distance of the Image boundary from the origin and the second coefficient of a univalent function in $|z| < 1$. Arch. Rational Mech. Anal., 32, 100-112.
- Pommerenke, C. 1975. Univalent functions. Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen.
- Ponnusamy, S. and Silverman, H. 2006. Complex variables with applications. Birkhäuser. Boston.
- Sakaguchi, K. 1959. On a certain univalent mapping. J. Math. Soc. Japan, 11(1), 72-75.
- Stein, E. M. and Weiss, G. 1971. Introduction to Fourier Analysis in Euclidean Space; Princeton University Press: Princeton, NJ, USA.
- Srivastava, H. M., Bulut, S., Çağlar, M. and Yağmur N. 2013. Coefficient estimates for a general subclass of analytic and bi-univalent functions. Filomat, 27(5), 831-842.
- Srivastava, H. M., Mishra, A. K. and Gochhayat, P. 2010. Certain subclasses of analytic and bi-univalent functions. Appl. Math. Letters, 23(10), 1188-1192.

- Tan D.-L. 1984. Coefficient estimates for bi-univalent functions. *Chinese Ann. Math. Ser. A* 5, 559–568.
- Waleed A. R. 2024a. Coefficient bounds of a class of bi-univalent functions related to Gegenbauer polynomials. *International Journal of Mathematics and Computer Science*, 19(3), 635–642.
- Waleed A. R. 2024b. A class of p -valent close-to-convex functions defined using Gegenbauer polynomials. *Contemporary Mathematics*, Volume 5 Issue 4, 6093.
- Wang, Z. G., Gao, C. Y. and Yuan, S. M. 2006. On certain subclasses of close-to-convex and quasi-convex functions with respect to k -symmetric points. *J. Math. Anal. Appl.*, 322(1), 97-106.
- Xu, Q., Gui, Y. and Srivastava, H. M. 2012a. Coefficient estimates for a certain subclass of analytic and bi-univalent functions. *Appl. Math. Lett.* 25(6), 990-994.
- Xu, Q., Xiao, H. and Srivastava, H. M. 2012b. A certain general subclass of analytic and bi-univalent functions and coefficient estimate problems. *Appl. Math. Comput.*, 218(23), 11461-11465.
- Zaprawa, P. 2014. On the Fekete-Szegö problem for classes of bi-univalent functions. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 21, 169-178.