

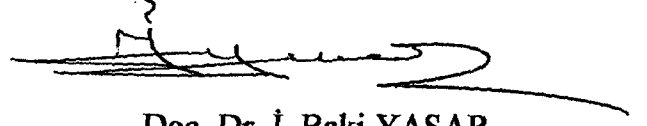
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GEGENBAUER POLİNOMLARININ SIFIR YERLERİ
VE WRONSKIAN OPERATÖR METODU

DOKTORA TEZİ
(MATEMATİK)

Sedat ÇEVİKEL
(Ocak - 1997)

Bu tezin Doktora tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

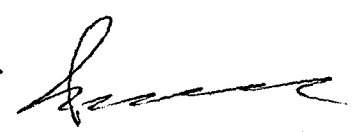
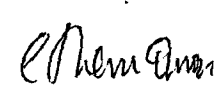
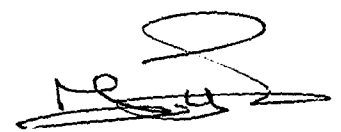


Doç. Dr. İ. Baki YAŞAR

Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jürisi

- Başkan : Prof. Dr. Bedri SÜER 
- Üye : Prof. Dr. Cevat KART 
- Üye : Prof. Dr. Muhsin MERT 
- Üye : Prof. Dr. İbrahim İthem ANAR 
- Üye : Doç. Dr. İrfan Baki YAŞAR 

Bu Tez Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına Uygundur.



**GEGENBAUER POLİNOMLARININ
SIFIR YERLERİ VE WRONSKIAN OPERATÖR METODU
(Doktora Tezi)**

Sedat ÇEVİKEL

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Ocak 1997**

ÖZ

Bu çalışmada, diferensiyel denklemlerin çözümleri olan kompleks değişkenli ortogonal polinomların sıfırları incelendi. Bu polinomlara karşılık gelen holomorfik ve meromorfik $f(z)$ fonksiyonlarının Mittag-Leffler açılımı kullanılarak polinomların sıfırları ile bunların $Wf(z) = f(z).f''(z) - [f'(z)]^2$ şeklinde tanımlanan Wronskian polinomlarının sıfırları araştırıldı. $f(z)$ nin I. ci çeşit Chebyshev polinomu ve $0 < \lambda \leq 1$ mertebeli Gegenbauer polinomu olduğu durumlarda, sıfır yerleri ve bu sıfırların bulunduğu bölgeler ayrıntılı olarak araştırıldı.

Bilim Kodu : 403.06.01

Anahtar Kelimeler : Polinomların sıfırları, Mittag-Leffler açılımı, Wronskian polinomu

Sayfa Adedi : 86

Tez Yöneticisi : Doç. Dr. İ. Baki YAŞAR

ZEROS OF GEGENBAUER POLINOMIALS AND WRONSKIAN OPERATOR METHOD

(Ph. D. Thesis)

Sedat ÇEVİKEL

GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
January 1997

ABSTRACT

In this thesis, the zeros of the orthogonal polynomials with complex variable which appear in the solutions of the differential equations were studied. The zeros of the holomorphic and meromorphic functions $f(z)$ and the Wronskian polynomials defined as $Wf(z) = f(z).f''(z) - [f'(z)]^2$ which correspond to these polynomials were examined by using their Mittag-Leffler expansions. In addition, the zeros and the regions of these zeros of the cases where $f(z)$ is a “Chebyshev polynomial of first kind” and a “Gegenbauer polynomial of the order of $0 < \lambda \leq 1$ ” were discussed with some detail.

Science Code : 403.06.01

Key Words : Zeros of polynomials, Mittag-Leffler expansion,
Wronskian polynomial.

Sayfa Adedi : 86

Tez Yöneticisi : Assoc. Prof. Dr. İ. Baki YAŞAR

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmam süresince yardımlarını esirgemeyen, çalışmamın her aşamasında yol gösteren ve tavsiyelerde bulunan Sayın Hocam Doç. Dr. İ. Baki YAŞAR'a tecrübelerinden ve önerilerinden yararlandığım G.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Sayın Hocalarıma teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.



SEMBOLLER LİSTESİ

<u>Sembol</u>	<u>Anlam</u>
C^∞	: Sonsuz kez sürekli türevlenebilir fonksiyonlar uzayı
C^k	: k yıncı basamaktan sürekli türevlenebilir fonksiyonlar uzayı
∇	: $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ Gradyent türev operatörü
$\Delta = \nabla^2$	: $\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \right)$ Laplasiyen türev operatörü.
∂D	: D bölgesinin sınırı.
$\text{Rez}(f, z_1)$	: $f(z)$ nin $z_1 \in \mathbb{C}$ deki rezidüsü
$\mathcal{U}$	: Düzgün sürekli fonksiyonların cümlesi
$R(\mathcal{U})$	: $\mathcal{U}$ daki rasyonel fonksiyonların cümlesi
$H(\mathcal{U})$	: $\mathcal{U}$ daki Holomorfik fonksiyonların cümlesi
$M(\mathcal{U})$	: $\mathcal{U}$ daki Meromorfik fonksiyonların cümlesi
$\mathcal{C} = \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$	: X metrik uzayındaki sınırlı sürekli karmaşık fonksiyonlar cümlesi
$\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{U}, \mathbb{C}_\infty)$	: $M(\mathcal{U})$ kompakt cümlesindeki topoloji
D_ε	: ε yarıçaplı disk. ($\varepsilon > 0$)

$Z(F(z))$: $F(z)$ meromorfik fonksiyonunun türevlerinin sıfırlarının cümlesi

$D = \frac{d}{dx}$: Adi türev operatörü

$B(O,R)$: O merkezli ve R yarıçaplı açık yuvar



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZ.....	I
ABSTRACT	II
TEŞEKKÜR	III
SEMBOLLERİN LİSTESİ.....	IV
GİRİŞ.....	1

BÖLÜM 1

TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

1.1. Küresel Fonksiyonlar.....	3
1.2. Ortogonalite.....	8
1.3. Holomorfik ve Meromorfik Fonksiyonlar	12
1.4. Sıfır Yerleri ve Kutup Yerleri Arasındaki İlişki	16
1.5. Mittag-Leffler Metodu.....	20

BÖLÜM 2

RASYONEL YAKLAŞIMLARIN VE POLİNOMLARIN SIFIR DAĞILIMLARI, W-OPERATÖRÜ

2.1. Rasyonel Yaklaşımların Sıfırları	30
2.2. Polinomların Sıfır Yerleri, W-Operatörü.....	45
2.3. Kesilmiş Kısmi Kesirlerin Açılımındaki İnceleme.....	51

BÖLÜM 3

BAZI ÖZEL POLİNOMLARIN VE WRONSKIAN'LERİNİN SIFIRLARI

3.1. Chebyshev Polinomları ve $W T_n(x)$ in Sıfırları 62

3.2. Gegenbauer Polinomları ve Sıfırları..... 67

BÖLÜM 4

SONUÇLAR VE TARTIŞMA..... 79

KAYNAKLAR..... 83

ÖZGEÇMİŞ..... 86



GİRİŞ

Bu tez çalışmasında, diferensiyel denklemlerin çözümlerinde ortaya konan kompleks değişkenli polinomların sıfır yerleri incelenerek çözümlere bazı kısıtlamalar getirilmiştir. Bunun için M. ABRAMOWITZ and I.A. STEGUN [1], K. DILCHER and K.B. STOLARSKY [2,3] ve M. MARDEN [4] den büyük ölçüde yararlanılmıştır.

Temel tanım ve teoremlerin yer aldığı Bölüm 1’de, $\nabla^2 u = \Delta u = 0$ Laplace denkleminin çözüm fonksiyonlarına yansıyan polinomların özelliklerine, kompleks değişkenli $f(z)$ fonksiyonları için Mittag-Leffler yöntemi kullanılarak meromorfik ve holomorfik yapılara yer verilmiştir. Bu yöntem ile kısmi terimlerden oluşan polinomların yakınsaklıkları incelenmiştir [5,6,7].

Bölüm 2, $[-n, n]$ aralığında singülerliği içeren $f(z) = \pi \cdot \operatorname{cosec} \pi z$ nin Mittag-Leffler açılımındaki rasyonel terimlerin toplamı olan $f_n(z)$ nin sıfırlarının dağılımlarının ve bir $f(z)$ polinomunun sıfırları ile W -operatörünün $f(z)$ üzerine etkisinden sonra oluşan

$$W f(z) = f(z) \cdot f''(z) - [f'(z)]^2 \quad (z \in \mathbb{C})$$

polinomunun sıfırlarının incelenmesini oluşturmaktadır.

Buna yakın çalışmalardan, e^z nin kısmi toplamalarının sıfırlarına ait çalışmalar SZEGÖ [8] tarafından yapılmış ve daha geniş olarak A. EDREI, E.B. SAFF and R.S. VARGA [9] tarafından incelenmiştir. Bunlar dışında,

exponansiyel polinomların yaklaşım sınıfındaki sıfır dağılımlarına ait çalışmalar yapılmıştır [10], [11] ve [12].

Fakat, “Mittag-Leffler açılımlar” kısıtlamasının sıfırları hakkında fazla araştırma yoktur. Dolayısıyla 2. Bölümün ilk kısmı, böyle bir incelemeye ayrılmıştır. İkinci kısımda $z = x + iy \in \mathbb{C}$ olmak üzere $f(z)$ polinomu ve $Wf(z)$ polinomunun sıfır dağılımları üzerine yaklaşımları ve bazı kısıtlamalara yer verilmiştir.

W operatörünün, I inci çeşit Chebyshev polinomuna ve $0 < \lambda \leq 1$ mertebeli Gegenbauer (Ultraküresel) polinomlara uygulanarak sıfırlarının dağılımlarının incelenmesi bölüm 3’ün kapsamındadır.

Bölüm 4’de ise sonuç ve tartışmanın yer aldığı ve W nın, benzer yapılar gösteren diğer polinomlara uygulanabilirliği yorumlarına yer verilmiştir.

BÖLÜM 1

TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

1.1. Küresel Fonksiyonlar

Uygulamalı bilimlerde çok karşılaşılan Laplace denkleminin, küresel bölgeler için değişken ayrışım metodu ile belirlenen çözüm fonksiyonları, küresel fonksiyonlar olarak isimlendirilir.

$$\nabla^2 u = 0$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (1.1)$$

denkleminin $u(r, \theta, \varphi) = R(r) \cdot Y(\theta, \varphi)$ şeklindeki çözümü araştırıldığında

$$\nabla_{\theta, \varphi}^2 Y + \lambda Y = 0 \quad (1.2)$$

nindeki $Y(\theta, \varphi)$ fonksiyonu küre yüzeyi üzerinde sınırlı olabilir. Özellikle,

$$Y(\theta, \varphi + 2\pi) = Y(\theta, \varphi)$$

$$|Y(\theta, \varphi)| < \infty, \quad |Y(\pi, \varphi)| < \infty \quad (1.3)$$

bağıntısını tamamlar.

(1,2) denkleminin Lineer sürekli sınırlı çözüm fonksiyonları, küresel fonksiyonlardır. Buradaki $Y(\theta, \varphi)$ fonksiyonunun $Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta) \Phi(\varphi)$ ayrışımındaki $\Phi(\varphi)$ çözümü, $\Phi' + \mu\Phi = 0$ denklemi için ($\mu = m^2$, $m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere) mevcut olup, lineer bağımsız çözümler $\cos m\varphi$ ve $\sin m\varphi$ fonksiyonlarıdır.

$\Theta(\theta)$ fonksiyonu,

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left(\lambda - \frac{\mu}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0 \quad \text{denkleminde } \theta \in [0, \pi] \text{ için}$$

tanımlıdır.

$$t = \cos \theta \quad \text{için} \quad X(t) \Big|_{t=\cos \theta} = X(\cos \theta) = \Theta(\theta) \quad \text{tanımlanarak} \quad X(t)$$

fonksiyonu için assosiye Legendre fonksiyonlu

$$\frac{d}{dt} \left[(1-t^2) \frac{dX}{dt} \right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-t^2} \right) X = 0 \quad (-1 < t < 1) \quad (1.4)$$

denklemi oluşur ki bu sadece $\lambda = n(n+1)$ için sınırlı çözüme sahiptir. $m \leq n$ olduğunda

$$X(t) \Big|_{t=\cos \theta} = P_n^{(m)}(t) \Big|_{t=\cos \theta} = P_n^{(m)}(\cos \theta) = \Theta(\theta)$$

dır.

Buna göre $\cos k\varphi$ ve $\sin k\varphi$ fonksiyonlarını kapsayan küresel fonksiyonlar sistemi yazılır. $k = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
 m = 0 \text{ için } Y_n^{(0)} &= P_n(\cos\theta) \\
 m = 1 \text{ için } Y_n^{(-1)}(\theta, \varphi) &= P_n^{(1)}(\cos\theta) \cdot \cos\varphi \\
 Y_n^{(1)}(\theta, \varphi) &= P_n^{(1)}(\cos\theta) \cdot \sin\varphi \\
 &\vdots \\
 m = k \text{ için } Y_n^{(-k)}(\theta, \varphi) &= P_n^{(k)}(\cos\theta) \cdot \cos k\varphi \\
 Y_n^{(k)}(\theta, \varphi) &= P_n^{(k)}(\cos\theta) \cdot \sin k\varphi
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

sistemi elde edilir. Burada $Y_n^{(m)}$ küresel fonksiyonlar $(2n+1)$ tane olup Lineer kombinasyonları A olmak üzere (1.5) sistemi

$$Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^n (A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \sin m\varphi) \cdot P_n^{(m)}(\cos\theta) \tag{1.6}$$

şeklindedir. Bu durumda,

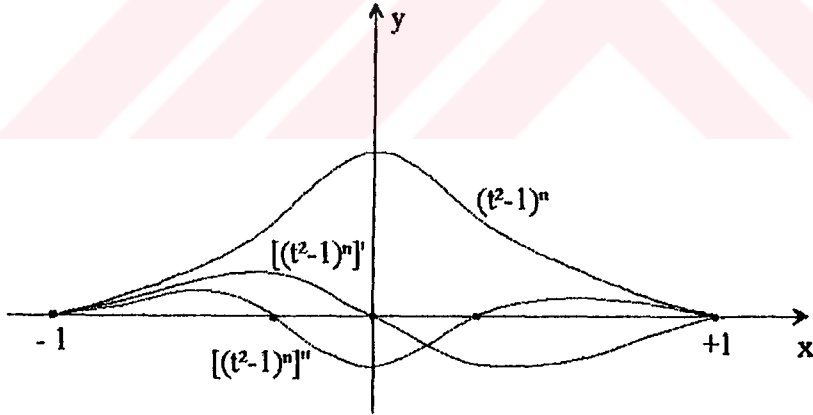
$$Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=-n}^n C_{nm} Y_n^{(m)}(\cos\theta)$$

küresel fonksiyondur, öyle ki $C_{nm} = \begin{cases} A_{nm} & , m \leq 0 \\ B_{nm} & , m > 0 \end{cases}$ olmak üzere.

$Y_n^{(0)} = P_n(\cos\theta)$ Legendre fonksiyonları (φ 'ye bağılı değil) olup bunlara **Zonal Fonksiyonlar** denir.

Teorem 1.1.1. $P_n(x)$ Legendre polinomu $(-1,1)$ aralığında içinde n tane sifira, k yinci basanmaktan $\frac{d^k}{dx^k} P_n(x)$ 'türevi de $(n-k)$ tane ($k \leq n$) sifira sahiptir.

İspat: $(t^2-1)^n$ fonksiyonu, $(-1,1)$ aralığının uç noktalarında, $\frac{d}{dt}(t^2-1)^n$ fonksiyonu uç noktalar ve orjin noktasında sifir değerini alır. $\frac{d^2}{dt^2}(t^2-1)^n$ için aralığın içinde en az iki sifir yeri vardır (Şekil 1.1).



Şekil 1.1

Dolayısıyla $\frac{d^k}{dx^k} P_n(x)$ fonksiyonu $(-1, 1)$ aralığının iç kısmında $(n-k)$ tane sifira sahiptir.

Bu teoremin sonucu olarak $P_n(t)$ nin $(-1,1)$ deki n sıfır yeri olması nedeniyle küre yüzeyi (uç noktalar dahil) $n + 1$ tane enine bölgelere ayrılabilirdiğini görebiliriz. Bu bölgeler içinde $P_n(t)$ ler aynı işarete sahiptirler.

Şimdi kürenin üzerinde

$$Y_n^{(\pm k)} = \sin^k \theta \cdot \left[\frac{d^k}{dt^k} P_n(t) \right]_{t=\cos \theta} \cdot \begin{cases} \sin k\varphi \\ \cos k\varphi \end{cases} \quad (1.7)$$

fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyon ile bütün küre yüzeyi ızgaralara bölünür ki, bunlara **Tessoral Fonksiyonlar** denir. $Y^{(\pm k)}$ fonksiyonu sabit işaretlidir. (1.1) in,

$u(r, \theta, \varphi) = R(r) \cdot Y(\theta, \varphi)$ çözümü $R(r) = r^\alpha$ dan $\alpha = n$ ve $\alpha = -(n+1)$ değerlerine karşılık

$$u(r, \theta, \varphi) = r^n \cdot Y_n^{(k)}(\theta, \varphi) \quad (1.5')$$

$$u(r, \theta, \varphi) = r^{-(n+1)} \cdot Y_n^{(k)}(\theta, \varphi) \quad (1.5'')$$

şeklini alır.

Burada (1.5') çözüm fonksiyonu n yinci dereceden homogen harmonik polinom olarak da adlandırılırlar.

1.2. Ortogonallik

Y_1 ve Y_2 , (1.1) denklemini sağlayan iki küresel fonksiyon olsunlar.

$$\Delta_{\theta,\varphi} = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \quad (1.8)$$

operatörü için $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ olmak üzere (küre yüzeyi Σ ile gösterilerek)

$$\iint_{\Sigma} Y_2 \Delta_{\theta,\varphi} Y_1 d\Omega = \iint_{\Sigma} \left\{ \frac{\partial Y_1}{\partial\theta} \frac{\partial Y_2}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial Y_1}{\partial\varphi} \frac{\partial Y_2}{\partial\varphi} \right\} d\Omega \quad (1.9)$$

dir. Küre yüzeyinde,

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial\theta} \vec{i}_{\theta} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial u}{\partial\varphi} \vec{i}_{\varphi}$$

ve

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{\sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta \cdot A_{\theta}) + \frac{\partial A_{\varphi}}{\partial\varphi} \right]$$

olduğundan

$$\Delta_{\theta,\varphi} u = \nabla_{\theta,\varphi}^2 u = \text{div} (\text{grad } u) \quad (1.10)$$

dir.

Bu durumda (1.9) ifadesi,

$$\iint_{\Sigma} Y_2 \Delta_{\theta,\varphi} Y_1 d\Omega = \iint_{\Sigma} \text{grad} Y_1 \cdot \text{grad} Y_2 d\Omega \quad (1.11)$$

şeklini alır. Buradan,

$$\iint_{\Sigma} \{Y_2 \Delta_{\theta,\varphi} Y_1 - Y_1 \Delta_{\theta,\varphi} Y_2\} d\Omega = 0 \quad (1.12)$$

elde edilir ki bu $\Delta_{\theta,\varphi}$ operatörü için Green formülüdür. λ_1, λ_2 farklı değerleri için

$$I = (\lambda_2 - \lambda_1) \iint_{\Sigma} Y_1 Y_2 d\Omega = 0$$

ise

$$\iint_{\Sigma} Y_1 Y_2 d\Omega = 0$$

dir. Yani,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Y_1(\theta, \varphi) \cdot Y_2(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = 0$$

dir. O halde Y_1 ve Y_2 fonksiyonları ortogonaldirler.

$\lambda = n(n+1)$ için n yinci mertebeden $2n+1$ küresel fonksiyon sistemi mevcut olduğu bilinmektedir [5].

$Y_n^{(k_1)}(\theta, \varphi)$ ve $Y_n^{(k_2)}(\theta, \varphi)$ iki küresel fonksiyon olmak üzere

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Sigma} Y_n^{(k_1)} \cdot Y_n^{(k_2)} d\Omega &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Y_n^{(k_1)} \cdot Y_n^{(k_2)} \sin \theta d\theta d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} \cos k_1 \varphi \cos k_2 \varphi d\varphi \cdot \int_0^{\pi} P_n^{(k_1)}(\cos \theta) \cdot P_n^{(k_2)}(\cos \theta) \sin \theta d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \cos k_1 \varphi \cdot \cos k_2 \varphi d\varphi \cdot \int_{-1}^1 P_n^{(k_1)}(t) P_n^{(k_2)}(t) dt \\
 &= \begin{cases} 0 & , \quad k_1 \neq k_2 \\ \frac{2\pi}{2n+1} \cdot \frac{(n+k)!}{(n-k)!} & , \quad k_1 = k_2 = k \neq 0 \\ 2\pi \cdot \frac{2}{2n+1} & , \quad k_1 = k_2 = 0 \end{cases} \quad (1.13)
 \end{aligned}$$

dir. (1.5) deki küresel fonksiyonların ortogonal sisteminin $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ bölgesindeki normu,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} [Y_n^{(k)}(\theta, \varphi)]^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{2}{2n+1} \pi \cdot \varepsilon_k \frac{(n+k)!}{(n-k)!} \quad (1.14)$$

şeklindedir (Burada $\varepsilon_0 = 2$, $k > 0$ için $\varepsilon_k = 1$).

Küresel fonksiyonlar serisinde, genişletilmiş $f(\theta, \varphi)$ indis fonksiyonunu düşünelim.

$$\begin{aligned} f(\theta, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \sin m\varphi) \cdot P_n^{(m)}(\cos \theta) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (1.15)$$

dir. Burada $N_{nm} = \frac{2\pi}{2n+1} \epsilon_m \frac{(n+m)!}{(n-m)!}$, $\epsilon_m = \begin{cases} 2, & m=0 \\ 0, & m>0 \end{cases}$

olmak üzere A_{nm} ve B_{nm} Fourier katsayıları olup

$$\begin{aligned} A_{nm} &= \frac{1}{N_{nm}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) \cdot P_n^{(m)}(\cos \theta) \cdot \cos m\varphi \cdot \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \\ B_{nm} &= \frac{1}{N_{nm}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) \cdot P_n^{(m)}(\cos \theta) \cdot \sin m\varphi \cdot \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \end{aligned} \quad (1.16)$$

şeklindedirler.

Laplace denkleminin genel çözümü,

$$\begin{aligned} u(r, \theta, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cdot Y_n(\theta, \varphi) \\ u(r, \theta, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \cdot Y_n(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (1.17)$$

formunda ise, o taktirde bu çözümler, sırasıyla iç sınır değer problemi ve dış sınır değer problemi için çözümlerdir.

Yarıçapı a olan küre üzerine $U|_{\Sigma} = f(\theta, \varphi)$ sınır koşulu verilirse

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \varphi) \quad (1.18)$$

olur.

(1.5) deki küresel fonksiyonlar sistemi tamdır. $f(\theta, \varphi) \in C^2$ olup, küresel fonksiyonların sonlu serisiyle aynı değere yakınsayabilir.

Küresel fonksiyonların oluşturduğu denklemin, $\lambda \neq n(n+1)$ için sınırlı çözümleri yoktur. $\lambda = n(n+1)$ için n yinci mertebeden küresel fonksiyonlar sistemi (1.5) ile belirlidir.

1.3. Holomorfik ve Meromorfik Fonksiyonlar

Bir $f(z)$, ($z \in \mathbb{C}$) kompleks değişkenli fonksiyonun bu yapılarla karşılık gelmesi, $f(z)$ nin analitik olmasıyla ilgilidir. Bu tür fonksiyonlar, uygulamalı bilimlerde önemli bir yer tutarlar.

$f(z)$ nin türevinin bir z_0 noktasında ve z_0 ın bir komşuluğunda da mevcut olması, fonksiyonun z_0 da analitik olmasını, dolayısıyla bir D bölgesinin her noktasında analitik olan $f(z)$ nin, bölgenin tamamında da analitik olduğunu verir.

Tanım 1.3.1. Bir D bölgesinin her noktasında türevi mevcut olan $f(z)$ fonksiyonu bu bölgede **Holomorfik Fonksiyonu** ya da **Analitik Fonksiyon** adını alır.

$$w(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

fonksiyonunun $z_0 = x_0 + i y_0$ noktasında

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

Cauchy-Riemann şartlarını sağlaması durumunda $w(z)$ nin D bölgesinde holomorf olmasını verir.

$f(z)$ nin bağımsız değişkeninin, verilmiş bir noktaya yaklaşması durumunda sonsuz değerini alan fonksiyonlarla karşılaşılır ki bu durumda, $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{C}_\infty$ genişletilmiş düzlem ele alınır.

Sonlu kompleks düzlemin her noktasında analitik olan fonksiyon tam fonksiyondur. Örneğin bir polinomun, bölgenin her yerinde türevinin bulunması, polinomu tam fonksiyon kılar. Eğer $f(z)$, bir $z_0 \in \mathbb{C}$ de analitik olmayıp z_0 in her komşuluğunda analitik ise, z_0 , $f(z)$ nin singüler noktasıdır.

Tanım 1.3.2. Bir D bölgesinde kutuptan başka singüler noktası olmayan $f(z)$ fonksiyonuna **Meromorf Fonksiyon** denir. Yani singüler noktaları kutuplardan oluşan fonksiyonlardır.

$f(z)$ nin ayırık singüler noktası z_0 ise z_0 merkezli bir $0 < |z - z_0| < R$ bölgesinde,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m} + \dots$$

şeklinde yazılabilen Laurent serisi yazılabilir. Esas kısmı en az bir yada sonlu sayıda terim içerirse $b_k \neq 0$ ($k = 1, 2, \dots, m$) ve $b_j = 0$ ($j = m+1, m+2, \dots$) olacak şekilde $m > 0$ sayısı vardır ki o zaman $f(z)$ nin Laurent serisi

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m}$$

olur. Bu durumda z_0 , $f(z)$ nin m yinci mertebeden kutup noktasıdır.

Tanım 1.3.3. $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ fonksiyonunu

ele alalım. Kompleks düzlemin bir D bölgesindeki holomorf olan $f(z)$

fonksiyonunun $z_1 \in D$ civarındaki $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_1)}{n!} (z - z_1)^n$ Taylor

açılımında,

$$f(z_1) = 0, \quad f'(z_1) = f''(z_1) = \dots = 0 \quad \text{ve} \quad f^{(p)}(z_1) \neq 0 \quad \text{ise}$$

$f(z) = (z - z_1)^p \cdot f_1(z)$ olur ki z_1 'e $f(z)$ nin **p-katlı sıfır yeri** denir.

Teorem 1.3.4. Sınırlı bir D bölgesinde $f(z)$ holomorf ise $f(z)$ nin D deki sıfır yerleri sonlu sayıdadır.

İspat: D bölgesinde holomorfik olan $f(z)$ nin, bu bölgede sonsuz sayıda sıfır yerinin olduğunu kabul edelim. Bu taktirde Bolzano-Weierstrass teoremi gereğince bunların en az bir yığılma noktası vardır ki sıfır yerleri ayrık noktalar olmayacaktır. Bu bir çelişkidir (Çünkü sıfır yerleri ayrık noktalardır).

Ancak ∂D üzerinde sıfır yerlerinin bir singüler noktada yığılma göstereceğine de dikkat edilmelidir.

Teorem 1.3.5. z_1 , $f(z)$ nin p katlı sıfır yeri ise, bu durumda z_1 , $f'(z)$ nin $(p-1)$ katlı sıfırıdır.

Tanım 1.3.6. $f(z)$ meromorfik fonksiyon ve $\frac{1}{f(z)}$ nin bir sıfır yeri z_1 ise, z_1 in bir yöresinde $\frac{1}{f(z)}$ holomorfdur ve $\frac{1}{f(z)} = (z-z_1)^p \phi(z)$ yazılır.

Bu durumda z_1 noktasına, $f(z)$ nin p -katlı kutup yeri denir. Bunlarda ayrık noktalar olup sınırlı bir bölgede sonlu sayıdadırlar (Buradaki $\phi(z)$ fonksiyonu da holomorftur).

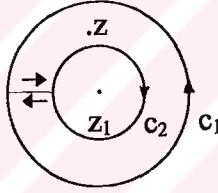
Teorem 1.3.7. z_1 , $f(z)$ nin p -katlı bir kutbu ise, bu durumda z_1 , $f'(z)$ nin $p+1$ katlı kutbudur.

1.4. Sıfır Yerleri ve Kutup Yerleri Arasındaki İlişki

Kompleks düzlemdeki z_1 merkezli C_1 ve C_2 çemberlerinin oluşturduğu halka üzerinde $f(z)$ holomorf olsun. $z \in \mathbb{C}$ noktasından geçmeyen bir çizgi ile gösterilen söz konusu halkanın sınırı $\partial C_1 \cup \partial C_2 = \partial C$ olsun (Şekil 1.2). Bu durumda,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_1)^{n+1}} dz$$

dir.



Şekil 1.2

z_1 , $f(z)$ nin ayrık singüler noktası olmak üzere bu noktanın yöresindeki $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_1)^n$ Laurent açılımındaki negatif kuvvetlere sahip terimlerin ilkinin a katsayısı $\text{Re } z(f, z_1)$ ile belirli olup, bu $f(z)$ nin z_1 deki rezidüsüdür.

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz.$$

z_1 basit kutup ise $f(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_1} + a_0 + a_1(z-z_1) + a_2(z-z_1)^2 + \dots$ olmak üzere,

$$a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_1} (z-z_1) \cdot f(z)$$

dir.

$P(z)$ ve $Q(z)$ holomorfik fonksiyonlar olmak üzere $f(z) = P(z) / Q(z)$ olması durumunda ($z_1, Q(z)$ in basit sıfırı ise)

$$\lim_{z \rightarrow z_1} \frac{(z-z_1) \cdot P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z_1)}{Q'(z_1)} = \text{Rez}(f, z_1)$$

dir. Eğer z_1 , k -katlı bir kutup ise $f(z)$ nin bu noktadaki rezidüsü

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-z_1)^k} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z-z_1)} + a_0 + a_1(z-z_1) + \dots$$

yazılabileceğinden $g(z) = (z-z_1)^k \cdot f(z)$ nin Taylor açılımındaki $(z-z_1)^{k-1}$ in katsayısı $f(z)$ nin z_1 deki rezidüsü olur ki

$$a_{-1} = \frac{g^{(k-1)}(z)}{(k-1)!}$$

$$\text{Rez}(f, z_1) = \frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{d^{(k-1)}}{dz^{k-1}} \left[(z-z_1)^k f(z) \right]_{z=z_1}$$

dir.

Teorem 1.4.1. $f(z)$, D bölgesinde analitik fonksiyon ve C eğrisi, üzerinde singüler nokta bulundurmeyen Jordan eğrisi olsun. C nin içinde kalan sonlu sayıdaki $z_1, z_2, \dots, z_n$ singüler noktalarındaki rezidüler toplamı

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \text{Re } z(f, z_k)$$

dır.

Bu teorem ve tanımlar yardımıyla sıfırlar ve kutupların sayısı arasındaki ilişki Teorem 1.4.2 ile verilebilir.

Teorem 1.4.2. $f(z)$, D bölgesinde meromorf fonksiyon ve Γ , üzerinde sıfır ve kutup noktası bulundurmeyen D içinde kapalı bir eğri olsun. Bu durumda $f(z)$ nin Γ içindeki sıfırlarının ve kutuplarının sayısı sırasıyla S ve K olmak üzere

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = S - K$$

dır.

İspat: Eğer z_i , $f(z)$ nin α_i katlı bir sıfırı ise z_i noktası $\frac{f'(z)}{f(z)}$ nin tek katlı ve rezidüsü α_i olan kutbudur.

$f(z) = (z - z_i)^{\alpha_i} \cdot f_i(z)$ ve logaritmik türev gereğince

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\alpha_i}{z - z_i} + \frac{f'_i(z)}{f_i(z)}$$

dir. Burada $f'_i(z) / f_i(z)$, z_i yöresinde holomorftur.

Benzer tarzda z_j , $f(z)$ nin β_j -katlı bir kutbu ise o zaman $f'(z) / f(z)$ nin basit ve rezidüsü $-\beta_j$ olan bir kutbu olur. Çünkü

$$f(z) = \frac{f_j(z)}{(z - z_j)^{\beta_j}}$$

olduğundan

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{\beta_j}{z - z_j} + \frac{f'_j(z)}{f_j(z)}$$

dir. Bu durumda

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum \alpha_i - \sum \beta_j = S - K$$

dır.

Sonuç 1.4.2. Eğer $f(z)$, D bölgesinde holomorfik ise kutuplarının sayısı sıfırdır. Yani,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = S$$

olur ki bu da Γ nın iç bölgesindeki sıfırların sayısını verir.

1.5. Mittag - Leffler Metodu

Bu kesimde, önceden belirlenmiş kutuplarla bir meromorfik fonksiyonu oluşturabilmek için Mittag - Leffler yöntemi ele alınacaktır.

Bir holomorfik fonksiyon, ayrık singüleritelerinin çoğu kutuplarda ise, bu taktirde söz konusu fonksiyon meromorfiktir.

Eğer z_0 , $f(z)$ nin m yinci bir kutbu ise, z_0 ın bir komşuluğundaki z için $f(z)$ fonksiyonu

$$f(z) = P(z) + g(z)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$P(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} \quad (1.19)$$

ifadesi $f(z)$ nin z_0 daki esas kısmını oluşturup, $g(z)$ fonksiyonu da z_0 da holomorftir.

Genel olarak $z_1, z_2, \dots, z_n$ ler meromorfik $f(z)$ nin kutupları ise $j = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere z_j için $f(z)$ nin esas kısmı olan P_j ve g holomorftik olduğuunda

$$f(z) = \sum_{j=1}^n P_j(z) + g(z) \quad (1.20)$$

yazılabilir.

Kompleks sayıların (z_j) dizisi ve $P(z)$ tipi fonksiyonların (P_j) dizisini düşünelim.

$z_1, z_2, \dots, z_n$ kutupları ve $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ esas kısımlarıyla meromorfik $f(z)$ fonksiyonu bulunabilir. Sonlu z_j ve p_j ler için problem açıktır. Buradan

$f(z) = \sum_{j=1}^n P_j(z)$ fonksiyonu istenilen özellikte olacaktır.

Önceden belirlenmiş esas kısımlar ve birçok sonsuz kutuplar ile daha da genişletilmiş bir inceleme yapılırsa meromorfik fonksiyon elde etmek mümkündür.

$f(z) = P(z) / Q(z)$ rasyonel fonksiyonu, $P(z)$ nin sıfır yerleri hariç, kutuplarda holomorfiktir. Aynı zamanda rasyonel fonksiyon meromorfik özelliği taşır.

$f(z) = \cotan \pi z$ fonksiyonu meromorfik fonksiyon örneği olarak verilebilir.

$f(z)$ rasyonel fonksiyonu için sıfırlar ve kutuplar $\frac{1}{f(z)}$ nin de sıfır ve kutup yerleri sayılırlar.

Şimdi, topolojik yapısından söz edelim. (X, d) bir metrik uzay olsun. $\mathcal{U} \subset X$ olacak şekilde $\mathcal{U}$ açık cümlesi, düzgün sürekli fonksiyonların cümlesi olsun. $\mathcal{U}$ daki rasyonel fonksiyonların cümlesi $R(\mathcal{U})$, meromorf fonksiyonların cümlesi $M(\mathcal{U})$ olmak üzere

$$H(\mathcal{U}) \subset R(\mathcal{U}) \subset M(\mathcal{U}) \quad (1.21)$$

bağıntısı vardır. $(H(\mathcal{U}), \mathcal{U}$ daki holomorfik fonksiyonlar cümlesidir).

Eğer z_0 , $f(z)$ nin bir kutbu ise f , $\mathcal{C}_\infty$ uzayında değerler alır ve $f(z) = \infty$ dır. Böylece $M(\mathcal{U})$, $\mathcal{C}_\infty$ da $\mathcal{U}$ üzerinde meromorfik fonksiyonlar cümlesi olur.

$M(\mathcal{U})$ daki (f_j) dizisinin yaklaşımlarının incelenebilmesi için $M(\mathcal{U})$ üzerinde bir topoloji tanımlanmalıdır. Holomorfik fonksiyonların $H(\mathcal{U})$

topolojisinden $M(\mathcal{U})$ daki (f_j) dizisinin f ye düzgün yakınsadığı söylenebilir. Bu, $\mathcal{C}_\infty$ uzayının kompakt bir cümlesinde yapılabilir. Dolayısıyla $\mathcal{C}_\infty$ da uygun bir topolojinin tanımlanmasına gereksinim vardır.

$\mathbb{N} \subset \mathcal{C}_\infty$ cümlesi, $z \in \mathcal{C}$ noktasının komşuluğunu içerir.

i) $z \neq \infty$ ise $\mathcal{C}$ metriğinde, z nin komşuluğunu içeren cümle $\mathbb{N} \cap \mathcal{C}$

dir.

ii) $z = \infty$ için $\mathcal{C}_\infty - \mathbb{N}$, $\mathcal{C}$ 'de kompaktır. Metrik topolojide $\mathcal{C}$ ye yaklaşım kısıtlansa da yine metrik topoloji tanımlanabilir.

$\mathcal{U}$ üzerinde $f(z)$, z_0 hariç süreklidir ve $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ dır. Burada $\mathcal{C}_\infty$

daki topoloji ile $f(z)$, $\mathcal{U}$ üzerinde $\mathcal{C}_\infty$ uzayına göre süreklidir. Özellikle $\mathcal{U}$ daki f meromorfik fonksiyon $\mathcal{C}_\infty$ topolojisiyle $\mathcal{U}$ üzerinde süreklidir.

$\mathcal{C} = \mathcal{C}(X, \mathcal{C})$ cümlesi, X metrik uzayındaki kompleks değerli sürekli fonksiyonların cümlesi olarak tanımlansın. Bu durumda $\mathcal{U}$ metrik uzayı üzerindeki sürekli fonksiyonların cümlesi $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{U}, \mathcal{C}_\infty)$ olarak $\mathcal{C}_\infty$ kompleks uzayına genişletilebilir. Dolayısıyla kompakt cümlelerde düzgün yaklaşımların topolojisini verir.

$\mathcal{C}(\mathcal{U}, \mathbb{C}_\infty)$, $M(\mathcal{U})$ kompakt cümlesinde bir topoloji olsun. Böylece $M(\mathcal{U})$ da f ye yakınsayan (f_j) dizisi varsa $M(\mathcal{U})$ da yalnız ve yalnız her $K \subset \mathcal{U}$ kompakt cümlesi üzerinde (f_j) dizisi f ye yakınsar.

Kompleks sayıların bir dizisi (z_j) , rasyonel fonksiyonların dizisi (p_j) olsun.

$f \equiv \infty$ olmadıkça f meromorfik fonksiyonun kutuplarının cümlesi bu limit noktasına sahip değildir.

$$\lim |z_j| = \infty \text{ ya da } \lim \left(\frac{1}{|z_j|} \right) = 0 \text{ dır } (z_j \neq 0 \text{ ve } \forall j \text{ için}).$$

Bu nedenle bütün $R > 0$ için $|z_j| < R$ olacak şekilde birçok z_j vardır. Genelliği bozmaksızın $\forall z_j \neq 0$ alınabilir. Çünkü bazı $z_j = 0$ olursa $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ esas kısımları ile $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ kutuplarıyla $f_1(z)$ meromorfik fonksiyonu bulunduktan sonra $z_0 = 0$ ve P_0 fonksiyonu için

$$f(z) = P_0(z) + f_1(z) \tag{1.22}$$

alınabilir.

Teorem 1.5.1. (Mittag-Leffler Teoremi) $\lim(1/|z_j|) = 0$ şartını sağlayan kompleks sayıların dizisi (z_j) olsun. $\forall j$ için rasyonel P_j fonksiyonu

$$P_j(z) = \frac{a_{-m(j)}^j}{(z-z_j)^{m(j)}} + \frac{a_{-m(j)+1}^j}{(z-z_j)^{m(j)-1}} + \dots + \frac{a_{-1}^j}{(z-z_j)} \quad (1.23)$$

olsun. h_j ($j = 1, 2, \dots$) polinomları için $P_1, P_2, \dots$ esas kısımları ve $z_1, z_2, \dots$ singularitelerinde meromorf fonksiyonu tanımlayan

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} (P_j(z) - h_j(z)) \quad (1.24)$$

polinomu vardır.

İspat: $\forall j$ için P_j rasyonel fonksiyonunun bir kutbu $z_j \neq 0$ dadır. Bu nedenle $B(0, |z_j|)$ üzerinde P_j holomorftir. $B(0, |z_j|)$ üzerinde Taylor açılımı mevcut olan g_j polinomu

$$g_j(z) = c_0^j + c_1^j z + c_2^j z^2 + \dots$$

olsun. $z \in B(0, |z_j|/2)$ için

$$\left| \sum_{n=n(j)+1}^{\infty} c_n^j z^n \right| < 1/2^j$$

ve

$$h_j(z) = c_0^j + c_1^j z + c_2^j z^2 + \dots + c_{n(j)}^j z^{n(j)}$$

olsun. Bu takdirde,

$$|P_j(z) - h_j(z)| < 1/2^j \quad (\forall \quad j > m \text{ için}) \text{ olacak şekilde } B(0, R)$$

üzerinde

$$\sum_{j=m+1}^{\infty} (P_j(z) - h_j(z))$$

yakınsaktır ve $B(0, R)$ üzerinde holomorfiktir. Fakat, $\sum_{j=1}^m (P_j(z) - h_j(z))$, $B(0, R)$ üzerinde meromorfiktir. Bu sonlu toplam $P_1, P_2, \dots, P_m$ esas kısımlar ile $z_1, z_2, \dots, z_m$ de kutuplara sahiptir. Bu durumda, $\sum_{j=1}^{\infty} (P_j(z) - h_j(z))$ sonsuz toplamı $B(0, R)$ içinde yalnızca $z_1, z_2, \dots, z_m$ kutup noktalarına sahiptir.

Eğer $f_m = \sum_{j=1}^m (P_j - h_j)$ ise, meromorfik fonksiyonların (f_m) dizisi,

kompakt cümle üzerinde $f = \sum_{j=1}^{\infty} (P_j - h_j)$ ye düzgün olarak yakınsar. Bu da

ispatı tamamlar.

Sonuç 1.5.2. $\lim (1/|z_j|) = 0$ olmak üzere (z_j) dizisi ve (P_j) rasyonel fonksiyonlar dizisi verilsin. Her $g(z)$ tam fonksiyonu ve ortaya çıkan (h_j) polinomlar dizisi için

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} (P_j - h_j) + g \quad (1.25)$$

fonksiyonu meromorfiktir.

Örnek 1.5.3. Mittag-Leffler teoreminin bir örneği olarak $j \in \mathbb{Z}$ deki basit kutuplar ile bulunan meromorfik fonksiyon problemini ve j deki $P_j(z) = 1/(z-j)$ esas kısmını ele alalım.

Her $R > 0$ için $|z| \leq R$ ile tamsayı olmayan z için $\sum_{j=-\infty}^{\infty} P_j(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} 1/(z-j)$ serisi, düzgün yakınsak değildir. Buna rağmen büyük j ler ($j \neq 0$) için

$$\left| \frac{1}{z-j} + \frac{1}{j} \right| = \left| \frac{z}{(z-j)j} \right| = \frac{1}{j^2} \frac{|z|}{\left| \left(\frac{z}{j} \right) - 1 \right|} \leq \frac{|z|}{j^2}$$

dir. Bu durumda, $|z| \leq R$ için $\sum_{j \neq 0} \left(\frac{1}{(z-j)} + \frac{1}{j} \right)$ serisi $R > 0$ için düzgün yakınsaktır. Mittag-Leffler teoremi gereğince her $j \in \mathbb{Z}$ ($j \neq 0$) için $h_j(z) = 1/j$ seçimi yapılır.

$j \neq 0$ tamsayısı için $1/(z-j)$ esas kısımlarda gördüğümüz

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} + \sum_{j \neq 0} \left(\frac{1}{(z-j)} + \frac{1}{j} \right) &= \frac{1}{z} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-j} + \frac{1}{j} + \frac{1}{z+j} - \frac{1}{j} \right) \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{2z}{z^2 - j^2} \right) \end{aligned}$$

fonksiyonu meromorfiktir.

O takdirde,

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z-j} + \frac{1}{j} \right) = \frac{-1}{(z-j)^2}$$

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z} + \sum_{j \neq 0} \left(\frac{1}{z-j} + \frac{1}{j} \right) \right) = - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-j)^2} = - \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$$

olur. Buradan

$$\frac{d}{dz} (\pi \cotan \pi z) = \frac{-\pi^2}{\sin^2 \pi z} \text{ den dolayı}$$

$$\frac{d}{dz} (\pi \cotan \pi z) = - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-j)^2}$$

$$= \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z} + \sum_{j \neq 0} \left(\frac{1}{z-j} + \frac{1}{j} \right) \right) = \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - j^2} \right)$$

olur ki

$$\pi \cotan \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - j^2} + c$$

dir. Bazı c sabiti için değişim - z den z ye olup, $c = 0$ alınabilir. Bu durumda

$$\pi \cotan \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - j^2}$$

elde edilir.

BÖLÜM 2

RASYONEL YAKLAŞIMLARIN VE POLİNOMLARIN SIFIR DAĞILIMLARI

2.1. Rasyonel Yaklaşımların Sıfırları

Burada, $[-n, n]$ aralığında singülerliği içeren $f(z) = \pi \operatorname{cosec} \pi z$ nin Mittag-Leffler açılımındaki rasyonel terimlerin toplamı olan $f_n(z)$ nin sıfır dağılımları incelenmiştir.

$n = 1, 2, 3, \dots$ için $A_n(z)$, kompakt alt kümelerde $A(z)$ analitik fonksiyonuna düzgün yakınsayan, rasyonel yaklaşımların serisi olsun. $A_n(z)$ nin sıfırları, ya $A(z)$ nin sıfırlarına ya da singüler noktalarına yönelmelidir (Hurwitz's Teoremi [4]). Fakat bu bize, sıfırların reel kısımlarının veya argümentlerinin nasıl dağıldığını göstermez.

Buna yakın olarak yapılan incelemelerde e^z nin kısmi toplamlarının sıfırları ele alınmıştır [8], [11].

Ancak Mittag-Leffler Açılımları kısıtlamasının sıfırları hakkında araştırma yok denecek kadar azdır. Burada, cosec açılımı için böyle bir yapıya yer verilecektir. Söz konusu açılım,

$$f(z) = \pi \operatorname{cosec} \pi z = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(z - m)} \quad (2.1)$$

şeklindedir.

Teorem 2.1.1. $f_n(z) = \sum_{m=-n}^n \frac{(-1)^m}{(z-m)}$ (2.2)

nin sıfırları, herbir

$$-n+2k \leq \operatorname{Re}(z) \leq -n+2k+2, \quad 0 \leq k \leq n-1 \quad (2.3)$$

şeritinde n li çifti oluştururlar. Kosekant fonksiyonunda hiç sıfır olmadığından (2.3) dik şeritinde, $f_n(z)$ nin sıfırları $n \rightarrow \infty$ iken bir sonsuzluk oluşturur.

Burada, öncelikle $f_n(z)$ için $z = -n+2k+iy$, $0 \leq k \leq n-1$ (2.4) olmak üzere reel eksen ve dikey çizgi üzerinde çalışılmıştır. Teoremin ispatı için aşağıdaki yardımcı teoremlerden yararlanılacaktır.

Lemma 2.1.2. Eğer $x \in \mathbb{R}$ ise, (2.2) de belirtilen $f_n(x)$ in hiçbir sıfırı yoktur. Ayrıca,

$$x > n \text{ ya da } -n+2k < x < -n+2k+1 \quad (0 \leq k \leq n-1) \quad (2.5)$$

ise, $(-1)^n f_n(x) > 0$ ve

$$x < -n \text{ ya da } -n+2k+1 < x < -n+2k+2 \quad (0 \leq k \leq n-1) \quad (2.6)$$

ise $(-1)^n f_n(x) < 0$ geçerlidir.

Lemma 2.1.3. k ve n tam sayıları için $0 \leq k \leq n$ olmak üzere

$$(-1)^n \operatorname{Im} f_n(-n+2k+iy) < 0 \quad (y > 0) \quad (2.7)$$

dir.

Lemma 2.1.2 ve Lemma 2.1.3. ün ispatları [2] de verilmiştir.

Teorem 2.1.1. in ispatı: İspat için $y > 0$ olduğunu düşünmek yeterlidir. Lemma 2.1.3. den

$$\operatorname{Im} f_n(x+iy) = \sum_{m=-n}^n \frac{(-1)^{m-1} y}{(x+m)^2 + y^2} \quad \text{dir.}$$

$(-1)^n \operatorname{Im} f_n(x+iy)$, pozitif terimlerden çok negatif terimlere sahiptir. Böylece S kompakt cümlesinde herhangi bir x için

$$(-1)^n \operatorname{Im} f_n(x+iy) < 0 \quad (y > y_0(S) \text{ için}) \quad (2.8)$$

dir.

$0 \leq k \leq n-1$ ve y_0 yeterince büyük seçerek, dikdörtgeni

$R : -n+2k < x < -n+2k+2 \quad (0 < y < y_0)$ olarak kabul edelim. (2.8) ve

Lemma 2.1.3 ile $y > 0$ durumunda ∂R de $(-1)^n \operatorname{Im}(z) < 0$ dir. Bu durumda,

$(-n+2k, -n+2k+1)$ üzerinde $(-1)^n \operatorname{Im}(z) > 0$ ve

$(-n+2k+1, -n+2k+2)$ üzerinde $(-1)^n \text{Im}(z) < 0$ dir.

$\varepsilon > 0$ sayısı için, ε yarıçaplı disk D_ε olmak üzere $R_\varepsilon = R \setminus D_\varepsilon$ bölgesini alalım. (D_ε , $-n+2k$, $-n+2k+1$ ve $-n+2k+2$ civarındadır).

z nin başlangıcı $z_0 = (-n+2k) + \varepsilon e^{i\frac{\pi}{2}}$ olsun. ∂R sınırında saat ibresi yönünün tersi yönünde hareket ettiğimizi düşünürsek R nin iç kısmında

$$w = w(z) = (-1)^n f_n(z)$$

nın reel bir sıfırı vardır. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 2.1.4. k belli bir tam sayı olsun. Eğer n sayısı yeterince büyük ve $n \equiv k+1 \pmod{2}$ ise, Bu durumda

$$\frac{2}{\pi} \log n - \frac{1}{\pi} \log \log n + \frac{1}{2} < |y| < \frac{2}{\pi} \log n - \frac{1}{\pi} \log \log n + 1$$

$$\text{ve } k \geq 1 \text{ ise } k \left(1 - \frac{2}{\log n}\right) < x < k$$

$$k \leq -1 \text{ ise } k < x < k \left(1 + \frac{2}{\log n}\right)$$

$$k = 0 \text{ ise } x = 0$$

olmak üzere $f_n(x+iy)$, bir sıfıra sahiptir (herbir dikdörtgende).

İspata geçmeden önce aşağıdaki Lemma'ları verelim.

Lemma 2.1.5. $z = x + iy$ olmak üzere

$$a) \quad (-1)^n \operatorname{Re} f_n(z) = \operatorname{Re}\{(-1)^n \pi / \sin \pi z\} - (x / n^2)(1 + \delta(n))$$

$$b) \quad (-1)^n \operatorname{Im} f_n(z) = \operatorname{Im}\{(-1)^n \pi / \sin \pi z\} - (y / n^2)(1 + \varepsilon(n))$$

dır. Öyle ki burada $n \rightarrow \infty$ iken $\delta(n) \rightarrow 0$ ve $\varepsilon(n) \rightarrow 0$ dır.

Lemma 2.1.6. Belli bir $k \in \mathbb{Z}$ için $k - \frac{1}{4} \leq x \leq k + \frac{1}{4}$ olsun. Bu durumda $n = k + 1 \pmod{2}$ olmak üzere

$$a) \quad y \geq \left(\frac{2}{\pi}\right) \log n - \left(\frac{1}{\pi}\right) \log \log n + 1 \text{ ise } (-1)^n \operatorname{Im} f_n(x + iy) < 0 ,$$

$$b) \quad y = \left(\frac{2}{\pi}\right) \log n - \left(\frac{1}{\pi}\right) \log \log n + \frac{1}{2} \text{ ise } (-1)^n \operatorname{Im} f_n(x + iy) > 0$$

dır.

Lemma 2.1.7. $k \geq 1$ olacak şekilde belli bir k tamsayı ve

$$\frac{1}{\pi} \log \left(\frac{n^2}{\log n} \right) + \frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{\pi} \log \left(\frac{n^2}{\log n} \right) + 1 \text{ olsun.}$$

Burada n yeterince büyük ve $n \equiv k + 1 \pmod{2}$ seçimi ile

$$\text{a) } x = k \quad \text{ise, } (-1)^n \operatorname{Re} f_n(x + iy) < 0$$

$$\text{b) } x = k \left(1 - \frac{2}{\log n}\right) \quad \text{ise, } (-1)^n \operatorname{Re} f_n(x + iy) > 0$$

Teorem 2.1.4 ün ispatı:

$\sin \pi(x + iy) = \sin \pi x \cdot \cosh \pi y + i \cos \pi x \cdot \sinh \pi y$ olduğundan

$$\operatorname{Re} \frac{\pi}{\sin \pi z} = \pi \cdot \frac{\sin \pi x \cdot \cosh \pi y}{\sin^2 \pi x + \sinh^2 \pi y}$$

ve (2.9)

$$\operatorname{Im} \frac{\pi}{\sin \pi z} = -\pi \cdot \frac{\cos \pi x \cdot \sinh \pi y}{\sin^2 \pi x + \sinh^2 \pi y}$$

olup,

$$x = 0 \quad \text{ise} \quad \operatorname{Re} f_n(z) = 0$$

dır.

Şimdi $k \geq 1$ durumunu irdeleyelim. ($k \leq -1$ durumu simetrik olarak ispatı takip edecektir). Lemma 2.1.6 ve Lemma 2.1.7 den yararlanarak tanımlanan dikdörtgenin A, B, C ve D köşe noktaları

$$\begin{aligned}
A &:= k + i \left(\frac{1}{\pi} \log \left(\frac{n^2}{\log n} \right) + \frac{1}{2} \right) \\
B &:= k + i \left(\frac{1}{\pi} \log \left(\frac{n^2}{\log n} \right) + 1 \right) \\
C &:= k \left(1 - \frac{2}{\log n} \right) + i \left(\frac{1}{\pi} \log \left(\frac{n^2}{\log n} \right) + 1 \right) \\
D &:= k \left(1 - \frac{2}{\log n} \right) + i \left(\frac{1}{\pi} \log \left(\frac{n^2}{\log n} \right) + \frac{1}{2} \right)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

şeklindedirler. Bu durumda

$$\overline{AB} \text{ üzerinde } (-1)^n \operatorname{Re} f_n(z) < 0, \quad \overline{CD} \text{ üzerinde } (-1)^n \operatorname{Re} f_n(z) > 0$$

$$\overline{BC} \text{ üzerinde } (-1)^n \operatorname{Im} f_n(z) < 0, \quad \overline{DA} \text{ üzerinde } (-1)^n \operatorname{Im} f_n(z) > 0$$

olarak belirlidir. Fakat z , ABCD dikdörtgenin sınırında hareket ettiğinde $(-1)^n f_n(z)$ nin argümenti 2π ye artar. Dolayısıyla dikdörtgenin iç kısmında kesin bir sıfır yeri vardır.

Teorem 2.1.8. $n \geq 2$ için $f_n(z)$ nin sıfırları,

$$|\operatorname{Re} z| < n, \quad |\operatorname{Im} z| < \frac{2}{\pi} \log n + \frac{7}{10}$$

ile verilen dikdörtgenin içinde yer alır. Eğer n yeterince büyükse, (örneğin $n = 19.400$) bu durumda ikinci eşitsizlik

$$|\operatorname{Im} z| < \frac{2}{\pi} \log n$$

ile değiştirilebilir..

İspat için önce aşağıdaki yardımcı teoreme değinelim. Dolayısıyla $f_n(z)$ nin sıfırlarının sınırları belirlenmelidir.

Lemma 2.1.9. $f_n(x+iy)$ in sıfırları, $(x \mp n)^2 + y^2 < 4n^2$ ile belirlenen iki diskin D_n kesişimindedirler. Burada D_n ,

$$R = \{z = x + iy \mid -n < x < n, \quad -\sqrt{3} \cdot n < y < \sqrt{3} \cdot n\} \text{ dikdörtgeninin içindedir.}$$

İspat: Lemma 2.1.2. gereği

$$(-1)^n \cdot f_n(z) = \sum_{m=0}^{n-1} \left(\frac{1}{z-n+2m} - \frac{1}{z-n+2m+1} \right) + \frac{1}{x+n} \quad (2.11)$$

yazılabilir. Burada $f_n(z)$ nin sıfırları reel ve imajiner eksene göre simetrikler.

$\{\operatorname{Re}(z) \geq 0, \operatorname{Im}(z) < 0\}$ çeyrek dairesinde inceleme yapalım.

$0 < v < \pi/2$ için $\arg(z+n) = -v$ ve $\arg(z-n) = -v - \alpha$ bağıntısına bağlı olarak

$$0 < \alpha < \pi \text{ için } -v - \alpha \leq \arg(z-n+j) \leq -v \quad (j = 0, 1, 2, \dots, 2n) \text{ dir.}$$

Buradan, $\arg(z+n)^{-1} = v$ olduğundan

$$2v \leq \arg \left[(z - n + 2m) (z - n + 2m + 1) \right]^{-1} < 2v + 2\alpha$$

dır.

(2.11) in terimlerinin bir çizgisi üzerinde orjine doğru yer alması için $2v + 2\alpha \leq v + \pi$ eşitsizliğine gereksinim vardır. Yani, $2\alpha + v \leq \pi$ dir. Eşitlik varsa $-n$, n ve z noktaları, sırasıyla α ve v açıları ile ikizkenar üçgenini oluştururlar. Özellikle z , $-n$ den $2n$ uzaklığına sahiptir. Örneğin z , $(x+n)^2 + y^2 = 4n^2$ çemberi üzerindedir. Eğer eşitlik yoksa, yani $2\alpha + v < \pi$ ise o zaman z , sözkonusu çemberin dışında yer alır. Lemma, simetrik olarak doğrudur.

Teorem 2.1.8. in İspatı: Lemma 2.1.5 den

$$a_k(z) := \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2+k-1} - \frac{2}{z+k} + \frac{1}{z+k+1} \right) \text{ olup,}$$

$$(-1)^n f_n(z) = \frac{(-1)^n \pi}{\sin \pi z} + \frac{1/2}{z-n-1} + \frac{1/2}{z+n+1} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{n+2k}(z) - a_{n+2k}(-z)) \quad (2.12)$$

dir.

Burada $\frac{1/2}{z-n-1} + \frac{1/2}{z+n-1} = \frac{z}{z^2 - (n+1)^2}$ olduğundan

$$\operatorname{Re} \left(\frac{z}{z^2 - (n+1)^2} \right) = \frac{-x[(n+1)^2 - x^2 - y^2]}{[(n+1)^2 - x^2 - y^2]^2 + 4y^2(n+1)^2} \quad (2.13)$$

ve

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z}{z^2 - (n+1)^2}\right) = \frac{-y[(n+1)^2 + x^2 + y^2]}{[(n+1)^2 - x^2 - y^2]^2 + 4y^2(n+1)^2} \quad (2.14)$$

dır.

(2.13) nin sağındaki terimi göz önüne alalım

$$f_y(x) := \frac{(n+1)^2 + x^2 + y^2}{[(n+1)^2 - x^2 - y^2]^2 + 4y^2(n+1)^2} \quad (2.15)$$

olarak tanımlansın. Türev alınırsa,

$$\frac{d}{dx} f_y(x) = \frac{2x \left\{ 4(n+1)^2 [y^2 + (n+1)^2] - [x^2 + y^2 + (n+1)^2]^2 \right\}}{\left\{ [(n+1)^2 - x^2 - y^2]^2 + 4y^2(n+1)^2 \right\}^2} \quad (2.16)$$

elde edilir.

$N = n+1$, $A = 4N^2(y^2 + N^2) - (x^2 + y^2 + N^2)^2$ olsun. Lemma 2.1.9 ile $z \in D_n \subset D_N$ olmak üzere $x^2 < 5N^2 - y^2 - 2N\sqrt{4N^2 - y^2}$ seçimi yapılabilir. Bu durumda $A > 8N^2(y^2 + 3N\sqrt{4N^2 - y^2} - 6N^2)$ dir. $0 < y^2 < 3N^2$ olduğundan parantez içi pozitif ve $A > 0$ dir. Dolayısıyla $f_y(x)$ in $x=0$ da minimum olduğunu verir. O taktirde (2.14) ifadesi

$$\operatorname{Im} \left(\frac{z}{z^2 - (n+1)^2} \right) \leq \frac{-y}{(n+1)^2 + y^2} \quad (2.17)$$

olur. Ayrıca Lemma 2.1.6 dan $x = \operatorname{Re}(z)$ için

$$\operatorname{Im} \left(\frac{(-1)^n \pi}{\sin \pi z} \right) \leq 2\pi \frac{1}{1 - e^{-2\pi y}} e^{-\pi y} \quad (2.18)$$

(2.12) deki sonsuz toplamın kısım için $m := n + 2k$ denilirse

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} a_m(z) = & -y \left[3(m+x)^2 - y^2 - 1 \right] / \left\{ (m+x)^2 \cdot \left[(m+x)^2 - 1 \right]^2 + \right. \\ & \left. + y^2 \left[3(m+x)^4 + 1 \right] + y^4 \left[3(m+x)^2 + z \right] + y^6 \right\} \end{aligned}$$

dır. $0 \leq x \leq n$ ve $m \geq n+2$ olduğunda $\operatorname{Im} a_m(z) \leq 0$ dir. $3(m-x)^2 \geq y^2 + 1$ olması halinde $\operatorname{Im} a_m(-z) \geq 0$ dir. O zaman

$$\operatorname{Im} (a_m(z) - a_m(-z)) \leq 0$$

olur. (2.17), (2.18) ve (2.12) den

$$\frac{y}{(n+1)^2 + y^2} > 2\pi \cdot \frac{1}{1 - e^{-2\pi y}} e^{-\pi y} \quad (2.19)$$

olduğundan $\operatorname{Im} f_n(z) < 0$ dir.

Sonuç olarak, $n \geq 3$ için $y \geq \frac{2}{\pi} \log 3n$ ve $n \geq 19.400$ için $y \geq \frac{2}{\pi} \log n$

koşullarında teoremin ispatı sayısal olarak gerçekleşir [2].

$$\text{Daha önceki } 3(m-x)^2 \geq y^2 + 1 \quad (2.20)$$

ifadesi ele alalım. Buna göre,

$$\text{Im } a_m(-z) \geq \frac{y \cdot [3(m-x)^2 - y^2 - 1]}{y^6} \geq -y^{-3} \quad (2.21)$$

dir. (2.21) için $m \geq n+2$ olması halinde yapılan yanlışlık $y/\sqrt{3}$ den daha küçüktür. Böylece

$$\text{Im } \sum_{k=1}^{\infty} (a_{n+2k}(z) - a_{n+2k}(-z)) \leq \frac{1}{\sqrt{3}} y^2 \quad (2.22)$$

dir. Eğer (2.20) yanlış ise

$$\begin{aligned} x^2 &> \left(m - \sqrt{\frac{y^2 + 1}{3}} \right)^2 \geq \left[n+2 - \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot (y+1) \right]^2 \\ &> \left(n+1 - \frac{3}{4} y \right)^2 \geq (n+1)^2 - \frac{3}{2} (n+1) y \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu durumda, $f_y(x)$, $0 \leq x \leq n+1$ için büyütülebilir. (2.15) den

$$\begin{aligned}
f_y(x) &> f_y\left(\sqrt{(n+1)^2 - \frac{3}{2}(n+1)y}\right) \\
&= \frac{1}{4y^2} \frac{2(n+1)^2 - \frac{3}{2}(n+1)y + y^2}{\frac{25}{16}(n+1)^2 - \frac{3}{4}(n+1)y + \frac{1}{4}y^2} \\
&\geq \frac{1}{4y^2}
\end{aligned}$$

olur ki (2.14) kullanılırsa

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z}{z^2 - (n+1)^2}\right) \leq -\frac{1}{4y} \quad (2.23)$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$m \geq n+2$ ve $x < n$, $3(m-x)^2 < y^2 + 1$ den $y > \sqrt{11}$ olur. (2.23), (2.22), (2.18) ve (2.12) den gereği, $\operatorname{Im} f_n(z) < 0$ dir.

Yani $y > 11$ için

$$\frac{1}{4y} > \frac{1}{\sqrt{3}y^2} + 2\pi \frac{e^{-\pi y}}{1 - e^{-2\pi y}} \quad (2.24)$$

durumunda $\operatorname{Im} f_n(z) < 0$ dir.

Sonuç 2.1.10. Teorem 2.1.4 ü genişletmek mümkündür. Lemma 2.1.6 ve Lemma 2.1.7 ye bakarak, $k\left(1 - \frac{2}{\log n}\right) \leq x \leq k$ olduğu göz önüne alınırsa

$$y = \frac{2}{\pi} \log n - \frac{1}{\pi} \log \log n + c$$

olur. n yeterince büyük seçilirse $c = \left(\frac{2}{\pi}\right) \log \pi \cong 0.7288$ alınabilir. Böylece y , Teorem 2.1.4 deki sıfır yerlerin imajiner kısımları $n \rightarrow \infty$ iken

$$|y| - \left(\frac{2}{\pi} \log \log n - \frac{1}{\pi} \log \log n + \frac{2}{\pi} \log \pi \right) \rightarrow 0$$

olur.

Bu taktirde, Lemma 2.1.7 değiştirilerek $\operatorname{Re}(z) = k$ çizgisinden, sıfırların uzaklıkları daha iyi saptanabilir.

Sonuç 2.1.11. Teorem 2.1.8 aşağıdaki gibi kesinleştirilebilir. $n \geq 2$ için $f_n(z)$ nın sıfırları $y = (2/\pi) \cdot \log n + (7/10)$, $x = n$ ve $y = \frac{4}{3}(n + 2 - x)$ doğrularıyla sınırlanmıştır. Bu da sıfırların imajiner kısımları $x = \pm n$ doğrularına yakındır demektir.

Sonuç 2.1.12. $f_n(z)$ için $f_n^{(k)}(z) = (k!) \cdot \sum_{m=-n}^n \frac{(-1)^{m+k}}{(z-m)^{k+1}}$ dir.

$(-1)^{n+k} f_n^{(k)}(z)$, ($k = 2, 4, 6, \dots$ için) ve $(-1)^n f_n(z)$ yerine konulursa Lemma 2.1.2 dikkate alınırsa benzer ispat yapılabilir. Böylece $f_n^{(k)}(z)$ ($k = 1, 3, \dots$);

$-n+j < x < -n+j+1$, $(0 \leq j \leq 2n-1)$ aralıklarının herbirinde reel bir sıfıra sahiptir.

Örneğin $f'_n(z)$, n tane çift kompleks sıfıra sahiptir. (2.3) nin her şeritinde bir çift olduğunu kabul edelim. $k \geq 2$ için $f_n^{(k)}(z)$ nin kompleks sıfırları daha az yayılma gösterir.

$Z(F)$, $F(z)$ meromorfik fonksiyonun türevlerinin sıfırlarının cümlesi olsun. Eğer z_0 , $F(z)$ nin en yakın iki kutup noktasına eşit uzaklıkta ise o zaman z_0 , $Z(F(z))$ nin bir yığılma noktası olur.

$F(z) = f_n(z)$ için $Z(F)$ nin yığılma noktalarının cümlesi $\text{Re}(z) = -n + k + \frac{1}{3}$, $0 \leq k \leq 2n-1$ ile tanımlanan $2n$ dikey çizgisini belirtir.

Sonuç 2.1.13. $f(z)$; $a_1, a_2, \dots, a_n$ reel basit sıfırlara sahip olsun. Buna göre

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{f(z) \cdot f''(z) - (f'(z))^2}{f(z) \cdot f'(z)} = \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)} \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{z - b_j} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{z - a_j} \end{aligned} \quad (2.25)$$

ifadesini gözönüne alalım. Burada b_j , $f'(z)$ nin sıfırlarıdır. Ayrıca,

$$F(z), \quad f_n(z) = \sum_{m=-n}^n \frac{(-1)^m}{z - m} \text{ fonksiyonuna benzerdir.}$$

$f(z) = (z-n)(z-n+1) \dots (z+n)$ olmak üzere

$$-\frac{1}{(f(z))^2} \cdot [f(z) \cdot f''(z) - (f'(z))^2] = \frac{(f'(z))^2}{(f(z))^2} - \frac{f''(z)}{f(z)}$$

$$= \sum_{m=-n}^n \frac{1}{(z-m)^2} \quad (2.26)$$

yazılabilir. Burada bu ifade

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-m)^2} = \pi^2 \csc^2(\pi z) \quad (2.27)$$

nın kesilmiş Mittag-Leffler açılımıdır.

$F(z)$ nin payında yer alan $f(z) \cdot f''(z) - (f'(z))^2$ yapısı, polinomların sıfırlarının dağılımlarının incelendiği kesimde kullanılacaktır.

2.2. Polinomların Sıfır Yerleri, W-Operatörü

Geometrik polinomların önemli bir kısmı, $f(z)$ polinomlarını veren $Df(z) = f'(z)$ nin sıfır yerlerinin belirtilmesiyle ilişkilidir.

$Df(z) = f(z) \frac{d}{dz} \log f(z)$ olup, D diferensiyel operatörüne benzer

şekilde

$$W f(z) := f^2(z) \frac{d^2}{dz^2} \log f(z) \quad (2.28)$$

ile tanımlanan operatörü gözönüne alalım.

$$W f(z) = f(z) \cdot f''(z) - [f'(z)]^2 = \begin{vmatrix} f(z) & f'(z) \\ f'(z) & f''(z) \end{vmatrix} \quad (2.29)$$

olduğundan W-operörü ile bir $f(z)$ polinomunun Wronskian'ı adı verilen $W f(z)$ nin (2.29) ifadesini belirler.

Daha önce yapılan bu alandaki çalışmaların çoğu, L lineer operatörü kullanılarak $L f(z)$ ve $f(z)$ nin sıfır yerleriyle ilgili problemleri kapsamaktadır [4].

Lineer olmayan bu tür operatörler, cebirsel diferensiyel denklemlerle uğraşan uzmanların ilgisini çekmektedir. Bu kesim, lineer olmayan W-operatörü yardımıyla $P(z)$ polinomunun sıfırları ile $WP(z)$ nin sıfırları arasındaki ilişkilerin ortaya konmasına ayrılmıştır.

W operatörünün özelliklerini verelim.

Lemma 2.2.1. $g(z)$ ve $h(z)$ kompleks değişkenli polinomlar olsunlar.

Buna göre

$$a) \quad W(gh) = g^2 W h(z) + h^2 W g(z)$$

$$b) W(g^n) = n \cdot g^{2n-2} \cdot Wg(z)$$

$$c) W(z-a) = -1$$

geçerlidir. Bunun ispatı, W-operatörünün tanımından kolayca görülebilir.

Lemma 2.2.2. Eğer $f(z) = (z-\alpha_1)^{m_1} \cdot (z-\alpha_2)^{m_2} \dots (z-\alpha_k)^{m_k}$,
 $m_j \in \mathbb{N}$ ise, bu durumda

$$Wf(z) = -[f(z)]^2 \left\{ m_1 \cdot (z-\alpha_1)^{-2} + m_2 \cdot (z-\alpha_2)^{-2} + \dots + m_k \cdot (z-\alpha_k)^{-2} \right\}$$

dir.

Burada α , $f(z)$ nin katlı sıfırı olduğundan $Wf(z)$ nin de katlı sıfır yerleri olduğu sonucuna varılır.

Önerme 2.2.2'. Eğer $f(z)$ nin tüm sıfırları kompleks düzlemde düz bir hat üzerinde ise, $Wf(z)$ nin basit sıfırları haricindeki sıfırlarının hiçbiri bu hat üzerinde bulunamazlar.

İspat: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ larla birlikte z , aynı doğrusal yapı üzerinde bulunsun. O zaman $\theta \in [0, 2\pi)$ olduğu yerde

$$z - \alpha_j = e^{i\theta} \beta_j, \beta_j \in \mathbb{R}, \beta_j \neq 0 \text{ dir ki}$$

$$g(z) = \sum_{j=1}^k m_j \cdot (z - \alpha_j)^{-2} = e^{-2i\theta} \sum_{j=1}^n m_j \cdot \beta_j^{-2} = B \cdot e^{-2i\theta}, (B > 0) \text{ dir.}$$

$f(z)$ yalnızca basit sıfırlara sahipse, $W f(z)$ nin reel sıfırları yoktur.

Teorem 2.2.3. Eğer $f(z)$ nin bütün sıfırları reel ve $[-1,1]$ aralığı içinde kalıyorsa, bu durumda $W f(z)$ nin sıfırları birim çember üzerinde ya da içindedir.

İspat: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ler $f(z)$ nin sıfırları olsunlar. $\alpha_0 = -1, \alpha_{n+1} = 1$ ve $\theta_j = \arg(z - \alpha_j)$ $j = 0, 1, \dots, n+1$ olsun.

$f(z)$, reel katsayılarla sahip olduğundan $\theta_0 < \theta_{n+1}$ olmak üzere incelemeyi üst yarı düzleme kısıtlayabiliriz. $|z| > 1$ olsun. Bu taktirde, birim çemberin z merkezi orjin dışındadır. Dolayısıyla $\theta_{n+1} - \theta_0 < \pi/2$ dir.

$$\theta_0 \leq \theta_j \leq \theta_{n+1} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \text{ olsun.}$$

$$\arg(z - \alpha_j)^{-2} = -2\theta_j$$

$$-2\theta_{n+1} \leq \arg(z - \alpha_j)^{-2} \leq -2\theta_0 \quad \text{ve} \quad |2\theta_{n+1} - 2\theta_0| < \pi$$

olduğundan, bütün $m_j(z - \alpha_j)^{-2}$ kompleks sayıları orjinden geçen bir hat üzerine düşer. O halde

$$\sum_{j=1}^k m_j(z - \alpha_j)^{-2} \neq 0 \text{ dır. Bu da ispatı tamamlar.}$$

Uyarı: $m, n \in \mathbb{N}$ için $f_{m,n}(z) = (z-1)^m(z+1)^n$ olsun. teorem 2.2.3 den

$$W f_{m,n}(z) = -(z-1)^{2m-2} \cdot (z+1)^{2n-2} [m(z+1)^2 + n(z-1)^2]$$

dir. $W f_{m,n}(z)$ nin basit olmayan sıfırları, köşeli parantezin sıfırlarıdır. Yani,

$$z^2 + 2\left(\frac{m-n}{m+n}\right)z + 1 = 0 \text{ için } z_0 = \frac{n-m \mp 2i \cdot \sqrt{mn}}{m+n}$$

dir. $|z_0| = 1$ olduğundan $m = n$ için $z_0 = \mp i$ dir. Bu nedenle reel kısmı rasyonel olan bütün noktalar $W f_{m,n}(z)$ nin sıfırlarıdır ($m, n \in \mathbb{Z}^+$ için). Bu da Teorem 2.2.3. ü çok güçlü kılar.

Teorem 2.2.4. Eğer $f(z)$ nin sıfırları birim çember üzerinde ya da içinde ise, bu durumda $W f(z)$ nin sıfırları da orjin merkezli $r = \sqrt{2}$ yarıçaplı çemberin içinde ya da üzerindedir.

Bu teoremin ispatı [3] de verilmiştir. Bu teoreme göre $W f(z)$ nin bir sıfırı, $z = \sqrt{2}$ nin keyfi bir kapalı komşuluğuna düşer. n yeterince büyük alınırsa $f(z)$ nin sıfırlarının modülü 1 dir.

$f(z)$ nin sadece reel basit sıfırlara sahip olması halinde, $W f(z)$ nin sıfırları reel eksene çok yakın olmayabilir. $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ler $f(z)$ nin sıfırları ve z belirli iken eğer $\theta < \frac{\pi}{2}$ ise $W f(z) \neq 0$ dir.

Lemma 2.2.5. $f(z)$ nin yalnız reel sıfırları olsun. Bu durumda birbirine yakın sıfırları arasındaki mesafeyi çap kabul eden çemberler $Wf(z)$ nin sıfırlarını içermez.

İspat: $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n$ olmak üzere α_j ler $f(z)$ nin sıfırları olsunlar. Çok katlılık ve $\theta_j = \arg(z - z_j)$ olması dikkate alınarak üst yarı düzlemdeki z leri gözönüne alalım. O zaman

$0 < \theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_j \leq \theta_{j+1} \leq \dots \leq \theta_n < \pi$ dir. Eğer $\theta_j = \theta_{j+1}$ ise $\alpha_j = \alpha_{j+1}$ dir. $Wf(z)$ nin α_j basit sıfırı vardır.

$\theta_j < \theta_{j+1}$ olduğunu ve z nin C_j çemberi içine düştüğünü kabul edelim. C_j çemberi, $|\alpha_j - \alpha_{j+1}|$ yi çap kabul eder. O zaman

$$\theta_j + (\pi - \theta_{j+1}) < \frac{\pi}{2} \text{ dir. Böylece } \theta_{j+1} - \theta_j > \frac{\pi}{2} \text{ olur.}$$

$\alpha_j, \alpha_{j+1}, z$ lerden oluşan üçgen z noktasında geniş açıya sahip olduğundan

$$\phi_i = \arg((z - z_j)^{-2}) = -2\theta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

olsun. Bu durumda

$$-2\pi < \phi_n \leq \dots \leq \phi_{j+1} < \phi_j \leq \phi_{j-1} \leq \dots \leq \phi_1 < 0$$

ve

$\theta_j - \theta_{j+1} > \pi$ nin anlamı, bütün $(z - \alpha_j)^{-2}$ ler orjinden geçen düz bir hattın kenarına düştüğünü verir.

Böylece Lemma 2.2.2. ile $Wf(z) \neq 0$ dır.

2.3. Kesilmiş Kısmi Kesirlerin Açılımındaki İnceleme

Burada $f(z)$ nin sıfırlarının düzgünce dizilmesi halinde $Wf(z)$ nin sıfırları incelenmiştir. Lemma 2.2.2. den esinlenerek

$$g_n(z) := \sum_{k=-n}^n \frac{1}{(z-k)^2} \quad (n=1,2,\dots) \quad (2.30)$$

nın

$$\left(\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-k)^2} \quad (2.31)$$

Mittag-Leffler genişlemesi ele alınacaktır. Yani, kesim 2.1 deki $\pi / \sin \pi z$ nin, Mittag-Leffler genişlemesindeki sıfır dağılımlarının kontrol edildiği metod kullanılacaktır. Dolayısıyla kesim 2.1 deki $f_n(z)$ ye ait Teorem ve Lemmalar $g_n(z)$ ye yansıtılacaktır.

Lemma 2.3.1. $g_n(z) = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{(z-k)^2} \quad (n=1,2,\dots)$ olsun. Bu

durumda,

$$a) \operatorname{Re} g_n(z) = \operatorname{Re}(\pi^2 / \sin^2 \pi z) - (2/n)(1 + \delta(n))$$

$$b) \operatorname{Im} g_n(z) = \operatorname{Im}(\pi^2 / \sin^2 \pi z) - (4xy/n^3)(1 + \epsilon(n))$$

(Burada $n \rightarrow \infty$ iken $\delta(n) \rightarrow 0$ ve $\epsilon(n) \rightarrow 0$) dır.

Lemma 2.3.2. k belirli bir tamsayı ve $k + \frac{1}{3} \leq x \leq k + \frac{2}{3}$ olsun. Bu durumda yeterince büyük n için

$$a) \text{Eğer } y \geq (1/2\pi)(\log n + 3) \text{ ise, } \operatorname{Re} g_n(z) < 0$$

$$b) \text{Eğer } y = (1/2\pi)(\log n + 2) \text{ ise, } \operatorname{Re} g_n(z) > 0 \text{ dir.}$$

Lemma 2.3.4. $(2 + \log n)/2\pi \leq y \leq (3 + \log n)/2\pi$ olsun. Yeterince büyük n ve $k = 0, 1, \dots$ için

$$a) x = k + \frac{1}{2} \quad \text{ise,} \quad \operatorname{Im} g_n(z) < 0$$

$$b) x = k + \frac{1}{2} + (k+1) \log n / 18n^2 \quad \text{ise,} \quad \operatorname{Im} g_n(z) > 0$$

geçerlidir.

Teorem 2.3.5. k belirlenmiş bir tamsayı olsun. Eğer n , k dan yeterince büyük ise bu durumda $g_n(x+iy)$ fonksiyonu,

$$(1/2\pi)(2+\log n) < |y| < (1/2\pi)(3+\log n)$$

ve $k \geq 0$ ise, $k + \frac{1}{2} < x < k + \frac{1}{2} + \frac{(k+1)\log n}{18n^2}$

$$k \leq -1 \text{ ise, } k + \frac{1}{2} + \frac{k \cdot \log n}{18n^2} < x < k + \frac{1}{2}$$

ile belirtilen bölgelerin herbirinde bir ve yalnız bir sıfıra sahiptir.

İspat: $g_n(z)$ nin payı çift fonksiyon olduğundan, sıfır yerleri reel ve imajiner eksene göre simetriktirler. Bu nedenle $k \geq 0$ ve $y > 0$ durumu gözönüne alınmalıdır. O zaman köşe noktaları,

$$A = k + \frac{1}{2} + \frac{(k+1)\log n}{18n^2} + i\left(\frac{1}{2\pi}\right)(2+\log n)$$

$$B = k + \frac{1}{2} + \frac{(k+1)\log n}{18n^2} + i\left(\frac{1}{2\pi}\right)(3+\log n)$$

$$C = k + \frac{1}{2} + i\left(\frac{1}{2\pi}\right)(3+\log n)$$

$$D = k + \frac{1}{2} + i\left(\frac{1}{2\pi}\right)(2+\log n)$$

ile tanımlanan dikdörtgen için

$$\overline{AB} \text{ üzerinde } \operatorname{Im} g_n(z) > 0, \overline{BC} \text{ üzerinde } \operatorname{Re} g_n(z) < 0$$

$$\overline{CD} \text{ üzerinde } \operatorname{Im} g_n(z) < 0, \overline{DA} \text{ üzerinde } \operatorname{Re} g_n(z) > 0$$

dır. Sınır üzerinde z hareket ederken $g_n(z)$ nin argümenti 2π ye artar. Söz konusu dikdörtgen içinde bir sıfır yeri kesin olarak mevcuttur. Daha önce verilen Lemma 2.3.2 deki $k + \frac{1}{3} \leq x \leq k + \frac{2}{3}$ aralığı yerine $k + \frac{1}{2} \leq x \leq k + \frac{1}{2} \frac{(k+1) \log n}{18n^2}$ aralığına kısıtlanırsa A ve B nin imajiner kısımları $\log(2\pi^2 n)$ ye yaklaşır. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 2.3.6. $g_n(x + iy)$ nin sıfırları,

$$|x| < n, \quad |y| < \frac{1}{2\pi}(4 + \log n) \quad \text{ile tanımlanan bölge içindedir.}$$

İspat: Teorem 2.2.3. den $|z| \leq n$ kısıtlamasını gözönüne alalım. Eğer, $y \geq y_n = (\log 50n) / (2\pi)$ ise $\operatorname{Re} g_n(z) < 0$ olduğunu göstermek gerekir.

(3.30) ve (3.31) den

$$g_n(z) = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} - \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{(z-k)^2} + \frac{1}{(z+k)^2} \right) \quad (2.32)$$

dır.

$$\frac{1}{(z-k)^2} = \frac{(x-k)^2 - y^2 - i2y(x-k)}{[(x-k)^2 + y^2]^2} \text{ olduğundan}$$

$$\operatorname{Re} g_n(z) = \operatorname{Re} \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} - \sum_{k=n+1}^{\infty} \left\{ \frac{(k-x)^2 - y^2}{[(k-x)^2 + y^2]^2} + \frac{(k+x)^2 - y^2}{[(k+x)^2 + y^2]^2} \right\} \quad (2.33)$$

dir. (2.33) deki toplama

$$S = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left\{ \frac{(k-x)^2 - y^2}{[(k-x)^2 + y^2]^2} + \frac{(k+x)^2 - y^2}{[(k+x)^2 + y^2]^2} \right\}$$

diyelim. Belli x ve y ler için

$$f(t) = \frac{(t-x)^2 - y^2}{[(t-x)^2 + y^2]^2} \quad (2.34)$$

fonksiyonu $x \leq t \leq x + y\sqrt{3}$ için artmakta ve $x + y\sqrt{3} \leq t$ için azalmaktadır.

Aynı zamanda $g(t) = f(-t)$ ile tanımlanan fonksiyon $-x \leq t \leq -x + y\sqrt{3}$ için artmakta $-x + y\sqrt{3} \leq t$ için azalmaktadır. Böylece,

$$S = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) + \sum_{k=n+1}^{\infty} g(k) \geq \int_n^a f(t)dt + \int_{a+1}^{\infty} f(t)dt + \int_n^b g(t)dt + \int_{b+1}^{\infty} g(t)dt$$

dir.

Burada $a = x + y\sqrt{3}$ ve $b = -x + y\sqrt{3}$ dir. Buradan

$$\left. \begin{aligned} \int_a^{a+1} f(t) dt &\leq f(x + y\sqrt{3}) = \frac{1}{8y^2} \\ \int_b^{b+1} g(t) dt &\leq g(-x + y\sqrt{3}) = \frac{1}{8y^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

olur o zaman,

$$S \geq \int_n^\infty [f(t) + g(t)] dt - \frac{1}{4y^2} = \frac{n-x}{(n-x)^2 + y^2} + \frac{n+x}{(n+x)^2 + y^2} - \frac{1}{4y^2}$$

dir.

$$\frac{n-x}{(n-x)^2 + y^2} + \frac{n+x}{(n+x)^2 + y^2} = \frac{2n}{(n^2 - x^2 + y^2) + 4x^2y^2 / (n^2 - x^2 + y^2)} \geq \frac{n}{2xy}$$

olur ki $z = n^2 - x^2 + y^2$, $z = 2xy$ için minumum yapılabilir. Böylece,

$$S \geq \frac{n}{2xy} - \frac{1}{4y^2} \quad (2.36)$$

dir. $|z| \leq n$ kısıtlaması için

$$\frac{n}{2xy} \geq \frac{n}{2y\sqrt{n^2 - y^2}} \geq \frac{1}{n} \quad (2.37)$$

Bu $y = \frac{n}{\sqrt{2}}$ için doğrudur. (2.36) ve (2.37) den $y \geq \frac{\sqrt{5n}}{2}$ için

$$S \geq \frac{4}{5n} \quad (2.38)$$

bulunur.

Böylece, $b+1 \leq n$ (2.35) terimi S için integral tahmini, $x \leq n$ ile

$$S \geq \frac{n}{2xy} - \frac{1}{8y^2} \geq \frac{1}{2y} - \frac{1}{8y^2}$$

dir.

$$h(y) = \frac{1}{2y} - \frac{1}{8y^2} \text{ olsun. } h(y), 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \text{ için artar, } \frac{1}{2} \leq y \text{ için azalır.}$$

Şimdi ispatın devamı için aşağıdaki kısıtlamadan yararlanalım.

$f(z)$, α_j reel sıfırlarına sahip bir polinom olsun.

$$(-1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n \leq 1) . d = \min\{\alpha_{j+1} - \alpha_j \mid j = 1, 2, \dots, n-1\} \text{ olsun.}$$

Bu durumda $|\operatorname{Im} z| < \frac{\sqrt{3}d}{4}$ şeriti $W f(z)$ nin bir sıfırını taşımaz.

Buna göre, $\frac{\sqrt{3}}{4} < y$ için $h(y) \cong 0.488$ dir. Ayrıca $y \leq \frac{\sqrt{5n}}{2}$ kısıtlaması

ile

$$S \geq \frac{1}{\sqrt{5n}} - \frac{1}{10n} \geq \frac{4}{5n} \quad (n \geq 5 \text{ için})$$

dir. $\frac{\sqrt{3}}{4} \leq y \leq n$ aralığındaki y ler için (2.38) sağlanır.

Diğer yandan,

$$\operatorname{Re} \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \pi^2 \frac{\sin^2(\pi x) + \sinh^2(\pi y)(2 \sin^2(\pi x) - 1)}{[\sin^2(\pi x) + \sinh^2(\pi y)]^2}$$

ve $y \geq y_n$ olmak üzere bütün x ler için

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} &\leq \pi^2 \frac{1 + \sinh^2(\pi y)}{\sinh^4(\pi y)} = 4\pi^2 \frac{(1 + e^{-2\pi y})^2}{(1 - e^{-2\pi y})^4} \cdot e^{-2\pi y} \\ &\leq 4\pi^2 \frac{\left(1 + \frac{1}{50n}\right)^2}{\left(1 - \frac{1}{50n}\right)^4} \cdot e^{-2\pi y} \end{aligned}$$

dir.

$$n \geq 10 \text{ için } \operatorname{Re} \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} < 40e^{-2\pi y} \quad (2.39)$$

dır. $40e^{-2\pi y} \leq \frac{4}{5n}$ olduğundan $y \geq \frac{1}{2\pi} \log 50n$ olur. $n \geq 10$ için $\log 50 < 4$ dir.

Teoremin ispatıdır.

Sonuç 2.3.7. $-n \leq k \leq n$ iken $2n + 1$ dereceli ve sıfırları $\frac{k}{n}$ olan polinom $f(z)$ olsun. Bu taktirde $n \geq 1$ için $W f(z)$ nin sıfırları,

$$|y| \leq \frac{1}{2\pi n} (4 + \log n)$$

şeriti içerisinde bulunur.

Burada $x \in I$ için $P(x) > 0$ şeklindeki polinomların sıfır yerlerinin reel eksene olan uzaklıkları ele alınmıştır. Dolayısıyla $[-1,1]$ aralığında düzgün dizilmiş, yalnızca reel sıfırlara sahip polinomlara değinilmiştir.

Bu incelemeyi belli klasik ortogonal polinomlar gibi diğer polinom sınıflarına aktarmak mümkündür. Bu nedenle Chebyshev ve Gegenbauer polinomlarına uygulanması Bölüm 3 de verilmiştir.

BÖLÜM 3

BAZI ÖZEL POLİNOMLARIN VE WRONSKIAN'LERİNİN SIFIRLARI

Özel fonksiyonların incelenmesinde eşitsizliklerin iki ilgili sınıfı dikkate alınır. Bunlar

$$[P'(x)]^2 - P(x) \cdot P''(x) \geq 0 \quad (-\infty < x < \infty) \quad (3.1)$$

Laguerre eşitsizliği olup, bütün $P(x)$ polinomlarının reel sıfırlarını elde etmek için kullanılır. Diğer de,

$$[P_n(x)]^2 - P_{n-1}(x) \cdot P_{n+1}(x) \geq 0, \quad x \in I \quad (3.2)$$

eşitsizliğidir. Bu da uygun I aralıklarında klasik ortogonal polinomların değişik $\{P_n(x)\}$ dizilerinin ortaya konmasında önemli rol oynar [15], [20].

(3.1) eşitsizliği kullanımı, kesim 2.2 de, özellikle sıfırların, gerçek eksenden uzaklıkları ve dağılımlarının incelenmesinde verilmişti. Öyleki $P(z)$ nin reel sıfırlara sahip bir polinom olması, (3.1) in birinci tarafındaki gösteriminin sıfırları, bu aşamada

$$|\operatorname{Im}(z)| < \frac{1}{2\pi}(4 + \log n)$$

eşitsizliğini sağlayan reel sıfırlarının $[-1, 1]$ aralığındaki dağılımı ele alınmıştı.

Sıfırların biraz bozulması durumunda da benzer sonuçlar elde edilmişti.

Bu kesimde ise bazı özel fonksiyonların sıfırlarına değinilecektir. Söz konusu $P(z)$ nin, $0 < \lambda \leq 1$ mertebeli **Gegenbauer polinomu** ve birinci tip **Chebyshev polinomu** olduğu durumlar incelenecektir.

Burada kullanılacak temel yapı, kesim 2.2 de verilen $Wf(z)$ ile Lemma 2.2.1, lemma 2.2.2 ve Teorem 2.2.3 dir.

$$Wf(z) = [f(z)]^2 \frac{d^2}{dz^2} \log f(z)$$

yapısı kullanılarak $m_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2, \dots, k$ olmak üzere $f(z)$ polinomu için

$$Wf(z) = -[f(z)]^2 \cdot \sum_{i=1}^k m_i \cdot (z - \alpha_i)^{-2}$$

olduğu teorem 2.2.3 ile verilmişti. $f(z)$ nin reel sıfırlarının $[-1, 1]$ aralığında yer alması, $Wf(z)$ nin sıfırlarının birim çember üzerinde ya da içinde yer aldığını biliyoruz.

Şimdi bunları, özel polinomlara uygulayalım.

3.1. Chebyshev polinomları ve $W T_n(z)$ nin Sıfır Yerleri

n yinci dereceden birinci çeşit Chebyshev polinomu

$$T_n(x) = \cos(n \cdot \cos^{-1} x) = x^n - \binom{n}{2} x^{n-2} (1-x^2) + \binom{n}{4} x^{n-4} (1-x^2)^2 \dots$$

şeklinde tanımlıdır.

$z = \cos \theta$ olmak üzere $T_n(z) = \cos n\theta$ nin sıfırları

$$\alpha_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

olup α_k 'lar -1 ve 1 uç noktalarına doğru toplanarak dağılım gösterirler. Aynı zamanda $W T_n(z)$ nin sıfırlarının reel eksene çok yakın olduğu görülebilir.

Teorem 3.1.1. $n \geq 2$ için $W T_n(z)$ nin sıfırları,

$$A_n = \left(\frac{1}{n}\right) \cdot \left(\log n - \frac{1}{2} \log \log n + 1\right)$$

$$B_n = (1 + A_n)^{1/2}$$

olmak üzere $\frac{y^2}{A_n^2} + \frac{x^2}{B_n^2} = 1$ elipsi içinde bulunur.

İspat: $z = x + iy = \cos\theta$ için $WT_n(z)$ yi oluşturalım.

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) \quad (3.1)$$

$$T'_n(\cos\theta) = n \cdot \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}$$

$$T''_n(\cos\theta) = -n^2 \cdot \frac{\cos(n\theta)}{\sin\theta} + n \cdot \frac{\cos\theta \sin(n\theta)}{\sin^3\theta}$$

olduğundan

$$WT_n(\cos\theta) = \frac{n \cos\theta}{2 \cdot \sin^3\theta} \left[\sin(2n\theta) - 2n \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \right] \quad (3.2)$$

(3.2) deki $\left[\sin(2n\theta) - 2n \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \right]$ terimini inceleyelim.

$\theta = \alpha + i\beta$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\sin\theta = \sin\alpha \cdot \cosh\beta + i \cdot \cos\alpha \cdot \sinh\beta \quad (3.3)$$

$$\cos\theta = \cos\alpha \cdot \cosh\beta - i \cdot \sin\alpha \cdot \sinh\beta \quad (3.4)$$

$\bar{z} = \cos\bar{\theta}$ olduğunda $\beta > 0$ iken

$$|\tan\theta|^2 = \frac{\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + \sinh^2\alpha \cdot \cosh^2\beta}{(\cos^2\alpha + \sinh^2\beta)^2} \leq \frac{\sinh^2\beta \cdot \cosh^2\beta}{\sinh^4\beta}$$

Bu takdirde

$$|\tan \theta| \leq \coth \beta \quad (3.5)$$

Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} |\sin(2n\theta)|^2 &= \sin^2(2n\alpha) \cdot \cosh^2(2n\beta) + \cos^2(2n\alpha) \cdot \sinh^2(2n\beta) \\ &\geq (\sin^2(2n\alpha) + \cos^2(2n\alpha) \cdot \sinh^2(2n\beta)) \\ |\sin(2n\theta)| &\geq \sinh(2n\beta) \end{aligned} \quad (3.6)$$

$WT_n(z) \neq 0$ olabilmesi için

$$\sinh(2n\beta) > 2n \coth \beta \quad (3.7)$$

olmalıdır. Yani

$$(e^{2n\beta} - e^{-2n\beta})(e^\beta - e^{-\beta}) > 4n(e^\beta + e^{-\beta}) \quad (3.8)$$

$$\beta_0 = \frac{1}{n} \left(\log n - \frac{1}{2} \log \log n + \frac{9}{10} \right) \text{ alarak } (e^\beta - e^{-\beta}) \geq 2\beta \text{ yı kullanırsak } \beta = \beta_0$$

olmak üzere

$$(1 - u^{-2}) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\log \log n}{\log n} + \frac{9/10}{\log n} \right) \geq \frac{2}{e^{9/5}} (u^{1/2n} + u^{-1/2n})$$

yazılabilir (Burada $u = e^{2n\beta} = e^{9/5} \cdot \frac{n^2}{\log n}$, $n \geq 3$ için kabul edilmiştir).

O halde

$$\beta \geq \frac{1}{2} \left(\log n - \frac{1}{2} \log \log n + \frac{9}{10} \right) \quad (3.9)$$

dir.

$\beta \geq 0$ için $\sinh \beta$ ve $\cosh \beta$ nın Mac-Laurin açılımları yazılırsa,

$$\begin{aligned} \sinh \beta &= \beta \cdot \left[1 + \frac{1}{3!} \beta^2 \cdot \left(1 + \frac{3!}{5!} \beta^2 + \frac{3!}{7!} \beta^4 + \dots \right) \right] \\ &\leq \beta \cdot \left[1 + \frac{1}{6} \beta^2 \cdot \cosh \beta \right] \end{aligned}$$

$z = \cos \theta$ olduğundan $|z|^2 = \cosh^2 \beta - \sin^2 \alpha$ dır. Lemma 2.2.4. nedeniyle $|z| \leq 1$ sınırlamasından $\cosh \beta < \sqrt{2}$ alınabilir.

$$\sinh \beta \leq \beta \left(1 + \frac{1}{6} \beta^2 \sqrt{2} \right) \leq \beta \left(1 + \frac{1}{4} \beta^2 \right)$$

dir.

$$\sinh \beta \geq \frac{1}{n} \left(\log n - \frac{1}{2} \log \log n + 1 \right) \quad (3.10)$$

olduğu, $b = \log n - (\log \log n) / 2 + \frac{9}{10}$ iken

$$\frac{1}{n} \cdot b \cdot \left(1 + \frac{1}{4n^2} b^2\right) \leq \frac{1}{n} \left(b + \frac{1}{10}\right)$$

ile ispatlanır. Ancak bu $n \geq 6$ için $\frac{b^3}{n^2} < \frac{2}{5}$ ifadesi için sağlanır.

Sonuç olarak $\forall \beta > 0$ için

$$\frac{y^2}{\sinh^2 \beta} + \frac{x^2}{\cosh^2 \beta} = 1 \quad (3.11)$$

elipsi tanımlanmış olur.

Burada her nokta $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ olacak şekilde söz konusu elips üzerinde yer alır. (3.11) elipsinin dışında yer alan z noktası için (3.10) korunur.

O zaman $n \geq 6$ için (3.9) ve (3.10) dan $WT_n(z) \neq 0$ dır. İspat tamamlanmış olur.

Yapılan bu inceleme $U_n(z) = \sin[(n+1)\theta] / \sin\theta$ şeklinde tanımlanan 2. çeşit Chebyshev polinomu için de yapılabilir. (3.2) ile verilen $WT_n(z) = 0$ olması

$$z \cdot T'_{2n}(z) = 4n^2$$

yi vereceğinden $U_n(z) = \sin[(n+1)\theta] / \sin\theta$ ($z = \cos\theta$) için

$$z \cdot U_{2n-1}(z) = 2n \text{ eşitliğini verir.}$$

Sonuç 3.1.2. $n \geq 2$ için $WT_n(z)$ nin sıfırları,

$$|y| < \frac{1}{n} \left(\log n - \frac{1}{2} \log \log n + 1 \right) \text{ şeritinde bulunur.}$$

Teorem 3.1.1 ve sonuç 3.1.2; $n = 20$ için $WT_n(z)$ nin sıfırları yaklaşımlarını, uç noktalarda $\pm 0.9849 \pm i (0.01293)$ ve imajiner eksendeki iki sıfırı $\pm i (0.1568)$ olarak bulunabilir.

3.2. Gegenbauer Polinomları ve Sıfırları

n yinci dereceden $f(z)$ polinomunun sıfırları, $T_n(z)$ polinomunun sıfırlarına yakın ise $Wf(z)$ nin sıfırlarını $WT_n(z)$ nin sıfırlarına yakın kabul etmek uygundur.

Bu kesimde $f(z)$ nin Gegenbauer polinomu olması ele alınacaktır.

Legendre, Laguerre, Hermit ve Chebyshev gibi bazı özel polinomlar için ortaya konan sonuçların genelleştirilmesiyle Gegenbauer polinomları gibi yeni polinomlar tanımlamak mümkündür [13], [14].

Tanım 3.2.1. Legendre polinomunun $(1 - 2zt + t^2)^{-\lambda}$ üreten fonksiyonunda t^n nin genişletme katsayısı olarak bilinen $C_n^\lambda(z)$ polinomsal fonksiyonuna, n yinci dereceden ve λ yinci mertebeden **Gegenbauer Polinomu** denir.

$$|t| < 1, |z| \leq 1 \text{ ve } \lambda > -\frac{1}{2} \text{ olmak üzere}$$

$$(1 - 2zt + t^2)^{-\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\lambda}(z) \cdot t^n \quad (3.12)$$

dir.

$C_n^{\lambda}(z)$, genişletilmiş kuvvet serisi olup,

$$C_n^{\lambda}(z) = \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^m \frac{\Gamma(\lambda + n - m)}{\Gamma(\lambda) \cdot m! \cdot (n - 2m)!} (2z)^{n-2m} \quad (3.13)$$

Bu polinomların ortogonalite özelliğinden dolayı,

$$\int_{-1}^1 (1 - z^2)^{\lambda - \frac{1}{2}} \cdot C_n^{\lambda}(z) \cdot C_m^{\lambda}(z) dz = 2^{1-2\lambda} \cdot \pi \cdot \frac{\Gamma(n + 2\lambda)}{(n + \lambda) \cdot \Gamma^2(\lambda) \cdot \Gamma(n + 1)} \cdot \delta_{nm} \quad (3.14)$$

dir. İndirgeme bağıntıları olarak

$$a) \quad (n + 2) C_{n+1}^{\lambda}(z) = 2(\lambda + n + 1) z \cdot C_{n+1}^{\lambda}(z) - (2\lambda + n) \cdot C_n^{\lambda}(z)$$

$$b) \quad n \cdot C_n^{\lambda}(z) = 2\lambda \cdot (z \cdot C_n^{\lambda+1}(z) - C_{n-2}^{\lambda+1}(z))$$

$$c) \quad (n + 2\lambda) C_n^{\lambda}(z) = 2\lambda \cdot (C_n^{\lambda+1}(z) - z \cdot C_{n-1}^{\lambda+1}(z))$$

$$d) \quad n \cdot C_n^{\lambda}(z) = (n - 1 + 2\lambda) z C_{n-1}^{\lambda} - 2\lambda (1 - z^2) C_{n-2}^{\lambda-1}(z)$$

$$e) \quad \frac{d}{dz} C_n^{\lambda}(z) = 2\lambda \cdot C_{n+1}^{\lambda+1}(z) \quad (3.15)$$

yazılabilir [14].

Şimdi, $C_n^\lambda(z)$ ve $WC_n^\lambda(z)$ nin sıfırları için önce şu yardımcı teoremleri verelim.

Lemma 3.2.2.

$$-1 \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_n \leq 1 \quad , \quad z = x + iy$$

ve

$$d_i = \max_{1 \leq k \leq n} \left| \beta_k - \cos \frac{(2k-1)}{2n} \cdot \pi \right|$$

olsun. Bu takdirde

$$F_n(z) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(z - \beta_k)^2} \neq 0 \quad (3.16)$$

olmak üzere

$$\sqrt{2} \cdot \sinh \beta \cdot \sinh(2n\beta) > 4n + 8 \frac{2 + \frac{d}{|y|}}{\left(1 - \frac{d}{|y|}\right)^2} \cdot \frac{d}{(\sinh \beta)^3} \cosh^2(n\beta) \quad (3.17)$$

dir. (Burada $z = \cos(\alpha + i\beta) = \cos \alpha \cosh \beta - i \sin \alpha \cdot \sinh \beta = x + iy$).

İspat: $F_n(z)$ yi $\alpha_k = \cos \frac{(2k-1)}{2n} \pi$ olmak üzere $f_n(z) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(z - \alpha_k)^2}$

şeklinde tanımlanan polinom ile karşılaştıralım. Lemma 2.2.2, (3.1) ve (3.2) den

$$f_n(z) = \frac{n \cdot \cos \theta}{2 \sin^3 \theta \cdot \cos^2 n\theta} \left[2n \frac{\sin \theta}{\cos \theta} - \sin(2n\theta) \right] \quad (3.18)$$

yazılabilir.

$$R_n(z) = F_n(z) - f_n(z)$$

olsun. (3.18) den

$$F_n(z) = \frac{n \cdot \cos \theta}{2 \sin^3 \theta \cdot \cos^2 n\theta} \left[\frac{2}{\cos \theta} \left(n \cdot \sin \theta + \frac{1}{n} \sin^3 \theta \cdot \cos^2(n\theta) R_n(z) \right) - \sin(2n\theta) \right] \quad (3.19)$$

dir.

Şimdi (3.19) daki köşeli parantezin sıfırdan farklı olduğunu gösterelim. Bunun için

$$|\sin(2n\theta)| > \left| \frac{2}{\cos \theta} \left(n \sin \theta + \frac{1}{n} \sin^3 \theta \cdot \cos^2(n\theta) \cdot R_n(z) \right) \right| \quad (3.20)$$

nın doğruluğunu araştırmalıyız. (3.6) dan

$$|\sin(2n\theta)| \geq \sinh(2n\beta)$$

dır.

$$\begin{aligned} |\cos\theta|^2 &= \cos^2 \alpha \cdot \cosh^2 \beta + \sin^2 \alpha \cdot \sinh^2 \beta \\ &= \sinh^2 \beta + \cos^2 \alpha \geq \sinh^2 \beta \end{aligned}$$

olduğundan

$$|1 / \cos\theta| \leq |1 / \sinh \beta| \quad (3.21)$$

dır.

(3.19) dan (3.20) ve (3.21) genişletilirse

$$\sinh(2n\beta) > \frac{2}{\beta} \left[n \cdot |\sin\theta| + \frac{1}{n} |\sin\theta|^3 \cdot |\cos(n\theta)|^2 |R_n(z)| \right] \quad (3.22)$$

olur. $R_n(z)$ yi

$$R_n(z) = \sum_{k=1}^n (\beta_k - \alpha_k) \frac{2z - \alpha_k - \beta_k}{(z - \beta_k)^2 (z - \alpha_k)^2} \quad (3.23)$$

şeklinde yazabiliriz.

Sıfır yerlerinin reel eksene simetrikliğinden $y > 0$ olarak alabiliriz.

$$|\beta_k - \alpha_k| \leq d, \quad |z - \alpha_k| = |x - \alpha_k + iy| \geq y$$

$$|2z - \alpha_k - \beta_k| \leq 2|z - \alpha_k| + |\beta_k - \alpha_k| \leq |z - \alpha_k| \cdot \left(2 + \frac{d}{y}\right),$$

$$|z - \beta_k| = |(z - \alpha_k) - (\beta_k - \alpha_k)| \geq |z - \alpha_k| - d \geq |z - \alpha_k| \cdot \left(1 - \frac{d}{y}\right)$$

dir. Bu durumda, $D_1 = \frac{2 + \frac{d}{y}}{\left(1 - \frac{d}{y}\right)^2}$, $d = \max_{1 \leq k \leq n} \{\beta_k - \alpha_k\}$ olmak üzere

$$|R_n(z)| \leq d \cdot D_1 \cdot \sum_{k=1}^n |z - \alpha_k|^{-3} \leq n \cdot d \cdot D_1 \cdot |y|^{-3} \quad (3.24)$$

yazılabilir. $|z| = |\cos \theta| \leq 1$ ve $|\sin \alpha| \geq |\sinh \beta|$ olduğunda $\cos^2 \alpha \cdot \cosh^2 \beta + \sin^2 \alpha \cdot \sinh^2 \beta \leq 1$ dir. $0 \leq \alpha \leq \pi$, $\beta \geq 0$ olması $y = -\sin \alpha \cdot \sinh \beta < 0$ ifadesini verir ki yani $\sin \alpha \geq 0$, $\sinh \beta \geq 0$. O halde

$$\sin \alpha \geq \sinh \beta \quad (3.25)$$

dır. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
 |\sin \theta|^2 &= \sin^2 \alpha \cdot \cosh^2 \beta + \cos^2 \alpha \cdot \sinh^2 \beta \\
 &= \sin^2 \alpha + \sinh^2 \beta
 \end{aligned}$$

$\sin \alpha$ arttıkça, $\frac{(\sin^2 \alpha + \sinh^2 \beta)^{3/2}}{\sin^3 \alpha \cdot \sinh^3 \beta}$ ($\beta \neq 0$) ifadesi artar.

$$\frac{|\sin \theta|^3}{|y|^3} = \frac{(\sin^2 \alpha + \sinh^2 \beta)^{3/2}}{\sin^3 \alpha \cdot \sinh^3 \beta} \leq \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sinh^3 \beta} \quad (3.26)$$

dir.

$$|\cos n\theta|^2 = \cosh^2 n\beta - \sin^2 n\alpha \leq \cosh^2 n\beta \quad (3.27)$$

ile (3.3), (3.25) den

$$|\sin n\theta| = (\sin^2 \alpha + \sinh^2 \beta)^{1/2} \leq (2 \sin^2 \alpha)^{1/2} \leq \sqrt{2} \quad (3.28)$$

dir.

Sonuç olarak, (3.24), (3.26), (3.28) den ayrıca (3.22) in kabulü ile

$$\sinh(2n\beta) > \frac{2}{\beta} \left[\sqrt{2} \cdot n + 2\sqrt{2} d \cdot D \cdot \cosh^2(n\beta) \cdot (\sinh \beta)^{-3} \right]$$

dir. Dolayısıyla (3.17) nin doğruluğu ispat edilmiş olur.

Teorem 3.2.3. $f(z)$, $\beta_k = \cos \left[\frac{(2k-1)\pi}{2n} + \epsilon_k \right]$ sıfırlarına sahip n yinci

dereceden bir polinom olsun. (Burada $c \leq 1.6$ olmak üzere $|\beta_k| \leq 1$, $|\epsilon_k| \leq c/n$, $k = 1, 2, \dots, n$) dir. Bu durumda $n \geq 0$ için $W f(z)$ nin sıfırları,

$$A_n = \max \left\{ \left(15 \frac{c}{n} \right)^{1/4}, \sqrt{\frac{1}{n}} \right\},$$

$$B_n = (1 + A_n^2)^{1/2}$$

olmak üzere $\frac{y^2}{A_n^2} + \frac{x^2}{B_n^2} = 1$ elipsi içinde bulunur.

İspat: $y < 0$ yarı düzlemi ve $\sinh \beta \geq 0$ olması gözönüne alınarak $W f(z)$ nin sıfırlarının olmadığını göstereceğiz.

$$\sinh \beta \geq \max \left\{ \left(15 \frac{c}{n} \right)^{1/4}, \sqrt{\frac{1}{n}} \right\} \quad (3.29)$$

olmalıdır. Bu ifadedeki terimleri tahmin edelim. (3.4) ve (3.25) ile

$$|y| = \sin \alpha \cdot \sinh \beta \geq \sin^2 \beta \quad (3.30)$$

elde edilir. Teorem 2.2.3 ile $|z| \leq 1$ konumuna dikkat edecek olursak $d \leq \frac{c}{n}$

($c \leq 1.6$) ve $n \geq 20$ olmak üzere

$$\frac{d}{|y|} \leq \frac{c}{n} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{15c}} \leq \frac{2}{5\sqrt{30}}$$

bulunur. $\gamma > \frac{1}{250}$ için

$$D = \frac{29}{12}(1 - \gamma) \quad (3.31)$$

dir.

(3.29) yardımıyla ($\beta \geq 0$ için $\frac{\beta}{\sinh \beta}$ nın da azaldığını düşünürsek)

$$\beta \geq \frac{1}{\sinh(1)} \sinh \beta \geq \frac{1}{\sinh(1)} \cdot \sqrt{1/n} \quad (3.32)$$

olur. $e^{2n\beta} \leq e^{-2\sqrt{n}} / \sinh(1) < \frac{1}{2000}$ dir.

Bu durumda, $\delta = (2.5) \cdot 10^{-7}$ olmak üzere

$$\sinh(2n\beta) = \frac{1}{2}(1 - e^{-4n\beta}) \cdot e^{2n\beta} \geq \frac{1}{2}(1 - \delta) e^{2n\beta} \quad (3.33)$$

dir. $\epsilon < (1.1) 10^{-7}$ kabulü ile

$$\cosh^2(n\beta) = \frac{1}{4}(1 + e^{-2n\beta})^2 \cdot e^{2n\beta} \leq \frac{1}{4}(1 + \epsilon) e^{2n\beta} \quad (3.34)$$

dir. (3.32) tekrar ele alınırsa

$$e^{2n\beta} \cdot \sinh \beta \geq n \cdot e^{2\sqrt{n}/\sinh(1)} \cdot (n)^{-3/2} \geq n \cdot e^{2/\sqrt{20}/\sinh(1)} (20)^{-3/2} \\ > \frac{45}{2} n$$

olduğunda

$$\sinh^4 \beta \geq 15 \frac{(1+\varepsilon)(1-\gamma)}{1-45 \cdot \left(\frac{\delta}{29}\right)} \cdot d$$

ye eşit olan (3.17) hipotezi elde edilir. İspat tamamlanır.

Lemma 3.2.2 ve Teorem 3.2.3 ispatlarındaki n 'nin daha uygun seçimi Teorem 3.2.3 deki "15" sabitesini genişletebilir. Yani $c = 1.6$ olması şartı değişebilir. A_n deki $\sqrt{1/n}$, c üzerinde daha küçük bir sınırlama ile daha sağlıklı nümerik sıfat kazanabilir.

Sonuç 3.2.4. $0 < \lambda \leq 1$ ve $n \geq 20$ için $W C_n^\lambda$ nin sıfırları,

$$A_n = \left(\frac{15\pi}{2n}\right)^{1/4}, \quad B_n = \sqrt{1 + A_n^2} \quad \text{olmak üzere}$$

$$\frac{y^2}{A_n^2} + \frac{x^2}{B_n^2} = 1 \quad (z = x + iy) \quad \text{elipsi içindedir.}$$

İspat: Teorem 3.2.3 deki c sabitesini belirleyelim. $C_n^\lambda(z)$ nin β_k sıfırı

$$\cos\left(\frac{k+\lambda-1}{n+\lambda}\pi\right) \leq \beta_k \leq \cos\left(\frac{k\pi}{n+\lambda}\right), \quad (k=1, \dots, n \text{ için})$$

aralığındadır [1].

$$\begin{aligned} \hat{d}_k &= \left| \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) - \cos\left(\frac{k+\lambda-1}{n+\lambda}\pi\right) \right| \\ &= 2 \left| \sin\left[\frac{2k-1}{2n} + \frac{k+\lambda-1}{n+\lambda} \cdot \sin\left(\frac{k+\lambda-1}{n+\lambda} - \frac{2k-1}{2n}\right)\right] \right| \\ &\leq 2 \cdot \left| \sin\left[\frac{\pi}{2} \cdot \frac{2n\lambda - 2k\lambda - n + \lambda}{2n(n+\lambda)}\right] \right| \end{aligned}$$

dır. Bu durumda

$$-n \leq -n + \lambda \leq 2n\lambda - 2k\lambda - n + \lambda \leq n(2\lambda - 1) - \lambda \leq n$$

olduğundan

$$\hat{d}_k \leq 2 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{2} \cdot \frac{n}{2n(n+\lambda)}\right] \leq 2 \sin \frac{\pi}{4n} < \frac{\pi}{2n}$$

yazılabilir. Benzer tarzda

$$\hat{d}_k = \left| \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) - \cos\left(\frac{k\pi}{n+\lambda}\right) \right| < \frac{\pi}{2n}$$

elde edilebilir. Böylece c sabitesinin seçimi $c = \frac{\pi}{2}$ şeklinde yapılabilir. (Ayrıca

$c = \frac{\pi}{2} < 1.6$ dır) Sonuç olarak her $n \geq 1$ için

$$\left(\frac{15\pi}{2n}\right)^{1/4} > \sqrt{1/n}$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

Bu sonuç, özellikle $U_n(z)$ ikinci çeşit Chebyshev polinomunu ve $P_n(z)$ Legendre polinomunu içerir. Çünkü,

$$C_n^1(z) = U_n(z) \quad \text{ve} \quad C_n^{1/2}(z) = P_n(z)$$

dir.

BÖLÜM 4

SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada, diferensiyel denklemlerin çözümlerine karşılık gelen polinomların ve W -operatörü ile meydana gelen $Wf(z)$ polinomlarının sıfır yerleri incelenerek $f(z)$ ile $Wf(z)$ arasındaki ilişkiler ortaya kondu.

Bazı kısıtlamalar getirilerek, sıfır yerlerinin bölgeleri saptandı.

Singülerliği içeren $f(z)$ nin Mittag-Leffler açılımındaki rasyonel terimlerin toplamı olan $f_n(z)$ nin sıfır dağılımları ve $f(z)$ ile $Wf(z)$ için aşağıdaki sonuçlar elde edildi.

a) $f(z)$ nin iki ardışık sıfırı arasındaki minimum uzaklık d ise $Wf(z)$ nin sıfırları için İmajiner kısmının mutlak değeri $\frac{\sqrt{3}}{4}d$ den küçük değildir.

b) $f(z)$ nin sıfırları $z_j = -1 + (j/n)$ ($j = 0, 1, \dots, 2n$) olarak tanımlı ise o zaman $Wf(z)$ nin sıfırlarının imajiner kısımları $n \rightarrow \infty$ iken asimtotik olarak $\mp \log n / (2n\pi)$ dir. Bu sonuç $\pi^2 / \sin^2 \pi z$ nin seriye açılımının bir yerden sonra kesilmiş olduğunu verir.

c) Eğer $f(z)$ nin sıfırları reel eksenden çok uzak değilse $Wf(z)$ nin sıfırları da reel eksene yakındır.

d) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ reel basit sıfırlara sahip bir $f(z)$ polinomu için

$$F(z) = \frac{f(z) f''(z) - [f'(z)]^2}{f(z) f'(z)}$$

şeklinde tanımlı meromorfik fonksiyonu

$$f_n(z) = \sum_{m=-n}^n \frac{1}{(z-m)^2}$$

ile tanımlanan fonksiyona uyarlandı. Sonuçta, $z = x + iy$, x in sözkonusu kısıtlama aralığı için $n \rightarrow \infty$ iken

$$|y| \sim \left(\frac{1}{2\pi} \right) \log n$$

sınırlamasına sahip, $g_n(z)$ nin sıfırlarına değinildi.

Gegenbaur polinomları için asimtotik yaklaşım

$$C_n^\lambda(\cos\theta) = 2^{1-\lambda} \cdot \frac{\Gamma(n+\lambda)}{n! \cdot \Gamma(\lambda)} \cdot \frac{\cos\left[(n+\lambda)\theta - \lambda \frac{\pi}{2}\right]}{\sin^\lambda \theta} + O(n^{\lambda-2}) \quad (3.35)$$

şeklindedir. Öyle ki $\forall \lambda \neq 0, -1, -2, \dots$ ve $0 < \theta < \pi$ için geçerlidir [21].

$\lambda = \frac{1}{2}$ için özel olarak Legendre polinomunun yaklaşım formülü elde edilir.

$$P_n(\cos\theta) \cong \left(\frac{2}{\pi n}\right)^{1/2} \cdot \frac{\cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right]}{(\sin\theta)^{1/2}} \quad (3.36)$$

dir.

Ayrıca λ yıncı mertebeden Chebyshev polinomu için

$$T_n^\lambda(\cos\theta) = \frac{\cos\left[(n + \lambda)\theta - \pi \frac{\lambda}{2}\right]}{\sin^\lambda \theta} \quad (3.37)$$

şeklinde tanımlıdır.

İkinci çeşit Chebyshev polinomu

$$U_n(\cos\theta) = \frac{\sin[(n+1)\theta]}{\cos\theta} = T_n^1(z) \quad (3.38)$$

olup $WT_n^\lambda(z)$ ve $WU_n(z)$ lerin sıfırları ayrı bir çalışma konusu olarak ele alınabilir.

Dolayısıyla I bir reel aralık olmak üzere $x \in I$ için $P(x) > 0$ tipi eşitsizlik ele alınarak $z \in \mathbb{C}$ için $P(z)$ nin sıfırlarının reel eksene olan uzaklığı araştırılmış oldu. Yani reel sıfırlara sahip polinomları ele almış olduk.

Klasik ortogonal polinomlar gibi diğer polinom sıfırları ile böyle bir çalışma içine girmek mümkün olabilir. Neticede reel olmayan sıfır yerlerine sahip polinomların Wronskianleri üzerinde araştırma yapmak ilginç olabilir.

Özel olarak klasik ortogonal polinomlar sınıfındaki Chebyshev ve Gegenbauer polinomlarına uygulanarak, diğer polinomlar üzerinde de çalışabilirliği olgusu kazandırıldı. Örneğin $C_n^\lambda(z)$ ve $WC_n^\lambda(z)$ nin etüdü $C_n^{1/2}(z) = P_n(z)$ Legendre polinomlarına ve $C_n^1(z) = U_n(z)$ ikinci çeşit Chebyshev polinomlarına da yansıdığı söylenebilir.

Sonuçta, $f(z)$ ye karşılık gelen $Wf(z)$ nin ya da $Wf(z)$ ye karşılık gelen $f(z)$ lerin bu yapılarının araştırılması, sınır değer problemlerinin koşullarının belirlenmesine ışık tutacağından, çalışmaların bu yönde devamı açısından, önemini daha da artıracaktır.

KAYNAKLAR

- [1] ABRAMOWITZ, M. And STEGUN, I.A., Handbook of Mathematical Functions, National Bureau of Standards. Washington, 1970.
- [2] DILCHER, K. and STOLARSKY, K.B., "Zeros of Certain Rational Approximations to The Cosecant", J. Math. Anal. Appl. 143, p. (405-431), 1987.
- [3] DILCHER, K. and STOLARSKY, K.B., "Zeros of the Wronskian of a Polynomial". J. Math. Anal. Appl. 162, p. (430-451), 1991.
- [4] MARDEN, M., Geometry of Polynomials, 2 nd ed., American Mathematical Society, Providence, 1966.
- [5] TIKHONOV, A.N. And SAMARSKII, A.A., Equations of Mathematical Physics, Peragomon Press, London, 1963.
- [6] AHLFORS, L.V., Complex Analysis, 2 nd ed., Mc. Graw Hill, New York, 1966.
- [7] DESHPANDE, J.V., Complex Analysis, Bombay, 1986.
- [8] SZEGÖ, G., "Über eine Eigenschaft der Exponentialreihe", Berlin Math. Ges. 23, 50-64, Sitzungsber, 1924.

- [9] SAFF, E.B. and VARGA, R.S., "The behavoir of the Pade table for the exponantial, in Approximation Theory," Vol II. pp (195-213), Academic Press, New York 1976.
- [10] EDREI, A., SAFF, E.B. and VARGA, R.S., "Zeros of sections of Power Series". Lecture Notes in Math Vol. 1002 Springer Verlag, Berlin/Heidelberg/New York/Tokyo, 1983.
- [11] IVERSON, K.E., "The zeros of the partial sums of e^z ," Math. Tables Aids Comput. 7, (165-168), 1953.
- [12] ARFKEN, G., Mathematical Methods for Physicist, 2 nd ed, New York, 1970.
- [13] NIKIFOROV, A.F., and UVAROV, V.B., Special Functions of Mathematical Physics, Birkhäuser Verlag Basel, London, 1988.
- [14] BELL, W.W., Special Functions for Scientists and Engineers. D. Van Nostrand Company Ltd. London, 1968.
- [15] KARLIN, S., and SZEGÖ, G., On certain determinats whose elements are orthogonal polynomials. J. Anal. Math. 8, (1-157), 1961.
- [16] LAGUERRE, E., Oeuvres, Vol 1. 2 nd ed. Chelsea New York 1972.
- [17] HILDEBRAND, F.B., Advanced Calculus for Applications, 2 nd ed., New Jersey, 1976.

- [18] TITCHMARSH, E.C., The Theory of Functions, 2 end Ed., New York, 1939.
- [19] CHURCHILL, R.V. and BROWN, J.W., Complex Variables and Applications, 4 th ed. Mc Graw Hill Book Company, New York, 1984.
- [20] PATRICK, M.L., Some inequalities concerning jacobi polynomials, SIAM J. Math. Anal. 2, (213-220), 1971.
- [21] SZEGÖ, G. Orthogonal Polynomials, 4 th ed., American Mathematical Society, Providence 1975.
- 

ÖZGEÇMİŞ

Bu çalışmayı yapan Sedat ÇEVİKEL, 1957 yılında Zonguldak'ta doğdu. İlk ve orta öğrenimini Zonguldak'ta tamamladıktan sonra Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 1980 de mezun oldu. Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisansını 1988 yılında tamamladı. Zonguldak Karaelmas Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Öğretim Görevlisi olarak halen görevini sürdürmektedir.

