



T.C.

Ardahan Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

İleri Teknolojiler Ana Bilim Dalı

İleri Teknolojiler Bilim Dalı

**GELİŞTİRİLMİŞ ALT DENKLEM METODU İLE LİNEER  
OLMAYAN EVRİM DENKLEMİNİN GEZİCİ DALGA  
ÇÖZÜMLERİNİN OLUŞTURULMASI**

Reyhan ARSLANTÜRK

Doç. Dr. Hülya DURUR

Yüksek Lisans Tezi

Ardahan, 2025

GELİŞTİRİLMİŞ ALT DENKLEM METODU İLE LİNEER OLMAYAN EVRİM  
DENKLEMİNİN GEZİCİ DALGA ÇÖZÜMLERİNİN OLUŞTURULMASI

Reyhan ARSLANTÜRK

Doç. Dr. Hülya DURUR

Ardahan Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü  
İleri Teknolojiler Ana Bilim Dalı  
İleri Teknolojiler Bilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Ardahan, 2025

## KABUL VE ONAY

Reyhan ARSLANTÜRK tarafından hazırlanan “Geliştirilmiş Alt Denklem Metodu ile Lineer Olmayan Evrim Denkleminin Gezici Dalga Çözümlerinin Oluşturulması” başlıklı bu çalışma, 12.09.2025 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

---

Doç. Dr. Asif YOKUŞ (Başkan)

---

Doç. Dr. Hülya DURUR (Danışman)

---

Dr. Öğr. Üyesi Ahmet Yusuf CEVHER

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen ve yukarıda adları yazılı jüri üyeleri tarafından kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mustafa ŞENEL  
Enstitü Müdürü

## YAYIMLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kâğıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma iznini Ardahan Üniversitesine verdiğimi bildiririm. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları bana ait olacaktır.

Tezin kendi orijinal çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanılması zorunlu metinleri yazılı izin alınarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

Yükseköğretim Kurulu tarafından yayınlanan **“Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge”** kapsamında tezim aşağıda belirtilen koşullar haricince YÖK Ulusal Tez Merkezi / Ardahan Üniversitesi Açık Erişim Sisteminde erişime açılır.

- Enstitü / Fakülte yönetim kurulu kararı ile tezimin erişime açılması mezuniyet tarihimden itibaren 2 yıl ertelenmiştir. <sup>(1)</sup>
- Enstitü / Fakülte yönetim kurulunun gerekçeli kararı ile tezimin erişime açılması mezuniyet tarihimden itibaren ..... ay ertelenmiştir. <sup>(2)</sup>
- Tezimle ilgili gizlilik kararı verilmiştir. <sup>(3)</sup>

12/09/2025

**Reyhan ARSLANTÜRK**

*“Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge”*

- (1) Madde 6. 1. Lisansüstü tezle ilgili patent başvurusu yapılması veya patent alma sürecinin devam etmesi durumunda, tez **danışmanının** önerisi ve **enstitü anabilim dalının** uygun görüşü üzerine **enstitü** veya **fakülte yönetim kurulu** iki yıl süre ile tezin erişime açılmasının ertelenmesine karar verebilir.
- (2) Madde 6. 2. Yeni teknik, materyal ve metotların kullanıldığı, henüz makaleye dönüşmemiş veya patent gibi yöntemlerle korunmamış ve internetten paylaşılması durumunda 3. şahıslara veya kurumlara haksız kazanç imkanı oluşturabilecek bilgi ve bulguları içeren tezler hakkında tez **danışmanının** önerisi ve **enstitü anabilim dalının** uygun görüşü üzerine **enstitü** veya **fakülte yönetim kurulunun** gerekçeli kararı ile altı ayı aşmamak üzere tezin erişime açılması engellenebilir.
- (3) Madde 7. 1. Ulusal çıkarları veya güvenliği ilgilendiren, emniyet, istihbarat, savunma ve güvenlik, sağlık vb. konulara ilişkin lisansüstü tezlerle ilgili gizlilik kararı, **tezin yapıldığı kurum** tarafından verilir \*. Kurum ve kuruluşlarla yapılan işbirliği protokolü çerçevesinde hazırlanan lisansüstü tezlere ilişkin gizlilik kararı ise, **ilgili kurum ve kuruluşun önerisi** ile **enstitü** veya **fakültenin** uygun görüşü üzerine **üniversite yönetim kurulu** tarafından verilir. Gizlilik kararı verilen tezler Yükseköğretim Kuruluna bildirilir.

Madde 7.2. Gizlilik kararı verilen tezler gizlilik süresince enstitü veya fakülte tarafından gizlilik kuralları çerçevesinde muhafaza edilir, gizlilik kararının kaldırılması halinde Tez Otomasyon Sistemine yüklenir.

\* **Tez danışmanının** önerisi ve **enstitü anabilim dalının** uygun görüşü üzerine **enstitü** veya **fakülte yönetim kurulu** tarafından karar verilir.

## ETİK BEYAN

Bu çalışmadaki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu, kullandığım verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı, yararlandığım kaynaklara bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu, tezimin kaynak gösterilen durumlar dışında özgün olduğunu, Tez Danışmanının **Doç. Dr. Hülya DURUR** danışmanlığında tarafımdan üretildiğini ve Ardahan Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Tez Yazım Yönergesine göre yazıldığını beyan ederim.

**Reyhan ARSLANTÜRK**

## ÖN SÖZ

Yüksek lisans eğitimim boyunca bilgi birikimi, akademik rehberliği ve anlayışlı, destekleyici tutumuyla bana yol gösteren; yalnızca tez çalışmam sürecinde değil, lisansüstü eğitimimde desteğini esirgemeyen, duruşu ve akademik disipliniyle her zaman örnek aldığım değerli danışman hocam Doç. Dr. Hülya DURUR'a en içten teşekkürlerimi sunarım. Bu sürecin verimli ve öğretici bir şekilde ilerlemesi için gösterdiğiniz emek ve çabalardan dolayı minnettarım. Ayrıca, akademik bilgi ve görüşleriyle tezime katkı sağlayarak çalışmalarımı zenginleştiren değerli hocalarım Doç. Dr. Zakir ÇALDIRAN ve Dr. Öğr. Üyesi Arif Cem TOPUZ'a teşekkürlerimi iletmek isterim. Tez sürecinde gerçekleştirdiğimiz çevrimiçi toplantılarla bilgi ve deneyimlerini benimle paylaşan, kıymetli zamanını ayırarak yol gösterici katkılarda bulunan Doç. Dr. Asif YOKUŞ'a da içten teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca yanımda olan, bana inanç ve cesaret aşılayan sevgili aileme; özellikle kıymetli babam İbrahim ARSLANTÜRK ve değerli annem Zübeyde ARSLANTÜRK'e; her koşulda desteğini esirgemeyen abim Harun ARSLANTÜRK'e ve bu süreçte her zaman yanımda olan sevgili kardeşim İrem ARSLANTÜRK'e en derin minnetlerimi sunarım.

Reyhan ARSLANTÜRK

Ardahan-2025

## ÖZET

ARSLANTÜRK, Reyhan. *Geliştirilmiş Alt Denklem Metodu ile Lineer Olmayan Evrim Denklemine Gezici Dalga Çözümlerinin Oluşturulması*, Yüksek Lisans Tezi, Ardahan, 2025.

Diferansiyel denklemler; fizik, mühendislik ve biyoloji gibi çeşitli disiplinlerde ortaya çıkan problemlerin modellenmesi ve analizi açısından temel bir araçtır. Özellikle lineer olmayan evrim denklemleri, karmaşık yapıları nedeniyle analitik çözümleri zor elde edilen denklemler arasında yer almaktadır. Bu nedenle, söz konusu denklemlerin analitik çözümlerinin çeşitli yöntemlerle araştırılması, hem teorik hem de uygulamalı bilimler açısından büyük önem taşımaktadır.

Bu tez çalışması, diferansiyel denklemlerin çözümüne yönelik yöntemlerin incelenmesini konu almakta olup toplamda beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, lineer olmayan evrim denklemlerine ilişkin temel kavramlara ve bu denklemlerin çözüm yaklaşımlarına dair genel bir çerçeve sunulmuştur. Ayrıca, bazı örnekler üzerinden temel tanımlamalara yer verilmiştir. İkinci bölümde, lineer olmayan dalga çözümlerinin önemli bir sınıfını oluşturan soliton kavramı ele alınmış; solitonların teorik temelleri, fiziksel anlamları ve uygulama alanları hakkında literatüre dayalı bir özet sunulmuştur. Üçüncü bölümde, Sharma Tasso Olver-Burgers tipi diferansiyel denklemlerin tarihçesi ve bu denklemlerin matematiksel önemi üzerinde durulmuştur. Dördüncü bölümde, alt denklem metodu ile geliştirilmiş alt denklem metoduna ilişkin kuramsal açıklamalar yapılmış; bu yöntemlerin çözüm sürecindeki rolü ve uygulanabilirliği detaylı biçimde değerlendirilmiştir. Beşinci bölümde, lineer olmayan Sharma Tasso Olver-Burgers denklemlerine söz konusu metotlar uygulanmış ve gezici dalga çözümleri elde edilmiştir. Bu çözümler Mathematica yazılımı aracılığıyla analiz edilerek 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikler aracılığıyla görselleştirilmiştir. Sonuç bölümünde ise, elde edilen bulgular yorumlanmış; uygulanan metotların avantajları ve sınırlılıkları tartışılmıştır. Ayrıca, metotların lineer olmayan evrim denklemlerinin çözümündeki potansiyeli genel hatlarıyla değerlendirilmiştir.

**Anahtar Sözcükler:** Alt Denklem Metodu, Geliştirilmiş Alt Denklem Metodu, Lineer Olmayan Evrim Denklemi, Sharma Tasso Olver-Burgers Denklemi

## ABSTRACT

ARSLANTÜRK, Reyhan. *Generation of Traveling Wave Solutions of the Nonlinear Evolution Equation with the Improved Sub Equation Method*, Master's Thesis, Ardahan, 2025.

Differential equations are fundamental tools for modeling and analyzing problems arising in various disciplines, including physics, engineering, and biology. Nonlinear evolution equations, in particular, are among those whose analytical solutions are difficult to obtain due to their complex structure. Therefore, investigating analytical solutions of these equations using various methods is of great importance for both theoretical and applied sciences.

This thesis examines methods for solving differential equations and consists of five chapters in total. The first chapter presents a general framework for the fundamental concepts of nonlinear evolution equations and their solution approaches. Fundamental definitions are also provided through examples. The second chapter discusses the concept of solitons, which constitute an important class of nonlinear wave solutions. A literature-based summary of the theoretical foundations, physical meanings, and application areas of solitons is presented. The third chapter focuses on the history of Sharma Tasso Olver-Burgers type differential equations and their mathematical significance. The fourth chapter provides theoretical explanations for the sub equation method and the improved sub equation method, and the role and applicability of these methods in the solution process are evaluated in detail. The fifth chapter applies these methods to the nonlinear Sharma Tasso Olver-Burgers equations, and traveling wave solutions are obtained. These solutions are analyzed using Mathematica software and visualized using 3D, 2D, and contour plots. In the conclusion, the findings are interpreted, and the advantages and limitations of the applied methods are discussed. Furthermore, the potential of the methods in solving nonlinear evolution equations is evaluated in general terms.

**Keywords:** Sub Equation Method, Improved Sub Equation Method, Nonlinear Evolution Equation, Sharma Tasso Olver-Burgers Equation

## İÇİNDEKİLER

|                                                                                    |      |
|------------------------------------------------------------------------------------|------|
| KABUL VE ONAY .....                                                                | i    |
| YAYIMLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI.....                                    | ii   |
| ETİK BEYAN.....                                                                    | iv   |
| ÖN SÖZ.....                                                                        | v    |
| ÖZET.....                                                                          | vi   |
| ABSTRACT .....                                                                     | vii  |
| İÇİNDEKİLER .....                                                                  | viii |
| SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ .....                                               | x    |
| ŞEKİLLER DİZİNİ .....                                                              | xi   |
| GİRİŞ .....                                                                        | 1    |
| 1. BÖLÜM.....                                                                      | 4    |
| TEMEL TANIMLAR VE KAVRAMLAR.....                                                   | 4    |
| 1.1. TÜREV.....                                                                    | 5    |
| 1.2. DİFERANSİYEL DENKLEM.....                                                     | 5    |
| 1.3. ADİ DİFERANSİYEL DENKLEM.....                                                 | 6    |
| 1.4. KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEM.....                                               | 8    |
| 1.5. MERTEBE-DERECE.....                                                           | 10   |
| 1.6. LİNEER VE LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMLER<br>.....                     | 11   |
| 1.7. HOMOJEN VE HOMOJEN OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL<br>DENKLEMLER .....             | 12   |
| 1.8. ÖZEL ÇÖZÜM VE GENEL ÇÖZÜM .....                                               | 14   |
| 1.9. VARLIK-TEKLİK.....                                                            | 15   |
| 1.10. BAŞLANGIÇ DEĞER VE SINIR DEĞER PROBLEMLERİ.....                              | 17   |
| 1.11. İKİNCİ MERTEBEDEN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN<br>SINIFLANDIRILMASI ..... | 18   |
| 1.11.1. Parabolik Denklemler .....                                                 | 19   |
| 1.11.2. Hiperbolik Denklemler .....                                                | 20   |
| 1.11.3. Eliptik Denklemler .....                                                   | 21   |
| 1.12. DENGELEME TERİMİ.....                                                        | 21   |

|                                                                                                     |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.13. RİCCATİ DİFERANSİYEL DENKLEMİ .....                                                           | 22 |
| 2. BÖLÜM.....                                                                                       | 26 |
| SOLİTONLAR VE SOLİTER DALGALAR.....                                                                 | 26 |
| 2.1. SOLİTON KAVRAMININ TARİHÇESİ.....                                                              | 26 |
| 2.2. SOLİTONLARIN KULLANIM ALANLARI .....                                                           | 30 |
| 3. BÖLÜM.....                                                                                       | 32 |
| SHARMA TASSO OLVER-BURGERS DENKLEMİ.....                                                            | 32 |
| 3.1. BURGERS DENKLEMİNİN TARİHÇESİ .....                                                            | 32 |
| 3.2. SHARMA TASSO OLVER DENKLEMİNİN TARİHÇESİ.....                                                  | 33 |
| 3.3. SHARMA TASSO OLVER-BURGERS DENKLEMİ.....                                                       | 34 |
| 4. BÖLÜM.....                                                                                       | 35 |
| ALT DENKLEM VE GELİŞTİRİLMİŞ ALT DENKLEM METODOLOJİSİ.....                                          | 35 |
| 4.1. ALT DENKLEM METODU .....                                                                       | 35 |
| 4.2. GELİŞTİRİLMİŞ ALT DENKLEM METODU .....                                                         | 37 |
| 5. BÖLÜM.....                                                                                       | 38 |
| ÇÖZÜMLER .....                                                                                      | 38 |
| 5.1. SHARMA TASSO OLVER-BURGERS DENKLEMİNE ALT<br>DENKLEM METODUNUN UYGULANMASI .....               | 38 |
| 5.2. SHARMA TASSO OLVER-BURGERS DENKLEMİNE<br>GELİŞTİRİLMİŞ ALT DENKLEM METODUNUN UYGULANMASI ..... | 46 |
| SONUÇ.....                                                                                          | 61 |
| KAYNAKÇA .....                                                                                      | 66 |
| EKLER.....                                                                                          | 74 |
| EK 1. ORJİNALLİK RAPORU FORMU .....                                                                 | 74 |
| EK 2. ETİK KURUL MUAFİYET FORMU .....                                                               | 75 |
| ÖZ GEÇMİŞ.....                                                                                      | 76 |

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

|             |                             |
|-------------|-----------------------------|
| $u(x, t)$   | Bağımlı değişken            |
| $u_t$       | $u$ 'nun zamana göre türevi |
| $u_x$       | $u$ 'nun $x$ 'e göre türevi |
| $c$         | Dalga hızı                  |
| $C$         | Sabit sayı                  |
| $n$         | Dengeleme terimi            |
| $a$         | Maksimum genlik             |
| $g$         | Yer çekimi                  |
| $h$         | Derinlik                    |
| <b>KdV</b>  | Korteweg-de Vries           |
| <b>STO</b>  | Sharma Tasso Olver          |
| <b>STOB</b> | Sharma Tasso Olver-Burgers  |

## ŞEKİLLER DİZİNİ

|                                                                                                                                                                                         |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Şekil 1. Soliter dalga profili .....                                                                                                                                                    | 27 |
| Şekil 2. (5.1.6) çözümündeki $\beta_0 = 0.1$ , $\beta_1 = 0.9$ , $k = 1.5$ , $\mu = -0.01$ sabitleri için (3.3.1) denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri ..... | 40 |
| Şekil 3. (5.1.8) çözümündeki $\beta_0 = 0.1$ , $\beta_1 = 0.9$ , $k = 1.5$ , $\mu = -0.01$ sabitleri için (3.3.1) denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri ..... | 41 |
| Şekil 4. (5.1.10) çözümündeki $\beta_0 = 0.1$ , $\beta_1 = 0.9$ , $k = 1.5$ , $\mu = 0.01$ sabitleri için (3.3.1) denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri ..... | 42 |
| Şekil 5. (5.1.12) çözümündeki $\beta_0 = 0.1$ , $\beta_1 = 0.9$ , $k = 1.5$ , $\mu = 0.01$ sabitleri için (3.3.1) denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri ..... | 43 |
| Şekil 6. (5.1.14) çözümündeki $\beta_0 = 0.1$ , $\beta_1 = 0.9$ , $k = 1.5$ , $r = 1$ sabitleri için (3.3.1) denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri .....      | 43 |
| Şekil 7. (5.1.16) çözümündeki $\beta_0 = 0.1$ , $b = 0.1$ , $k = 0.2$ , $\mu = -0.01$ sabitleri için (3.3.1) denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri .....      | 44 |
| Şekil 8. (5.1.18) çözümündeki $\beta_0 = 0.1$ , $b = 0.1$ , $k = 0.2$ , $\mu = -0.01$ sabitleri için (3.3.1) denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri .....      | 44 |
| Şekil 9. (5.1.20) çözümündeki $\beta_0 = 0.1$ , $b = 0.1$ , $k = 0.2$ , $\mu = 0.01$ sabitleri için (3.3.1) denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri .....       | 45 |
| Şekil 10. (5.1.22) çözümündeki $\beta_0 = 0.1$ , $b = 0.1$ , $k = 0.2$ , $\mu = 0.01$ sabitleri için (3.3.1) denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri .....      | 45 |
| Şekil 11. (5.1.24) çözümündeki $\beta_0 = 0.1$ , $b = 0.1$ , $k = 0.2$ , $r = 1$ sabitleri için (3.3.1) denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri .....           | 46 |
| Şekil 12. (5.2.4) çözümündeki $a = -0.1$ , $b = 0.5$ , $k = -1.5$ , $\mu = -0.01$ sabitleri için (3.3.1) denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri .....          | 48 |
| Şekil 13. (5.2.6) çözümündeki $a = \frac{9}{8}$ , $b = -0.5$ , $k = 0.5$ , $\mu = -0.01$ sabitleri için (3.3.1) denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri .....   | 49 |
| Şekil 14. (5.2.8) çözümündeki $a = 0.1$ , $b = 0.5$ , $k = -1.5$ , $\mu = 0$ , $r = 1$ sabitleri için (3.3.1) denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri .....     | 49 |

|                                                                                                                                                                                         |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Şekil 15. (5.2.10) çözümündeki $a = 0.1$ , $b = 0.5$ , $k = -1.5$ , $\mu = 0.01$ sabitleri için (3.3.1) denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri.....            | 50 |
| Şekil 16. (5.2.12) çözümündeki $a = 0.1$ , $b = 0.5$ , $k = -1.5$ , $\mu = 0.01$ sabitleri için (3.3.1) denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri.....            | 51 |
| Şekil 17. (5.2.14) çözümündeki $a = 1$ , $b = 0.5$ , $k = -1.5$ , $\mu = -0.001$ sabitleri için (3.3.1) denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri.....            | 52 |
| Şekil 18. (5.2.16) çözümündeki $a = 0.1$ , $b = 0.5$ , $k = -1.5$ , $\mu = 0.001$ sabitleri için (3.3.1) denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri .....          | 53 |
| Şekil 19. (5.2.18) çözümündeki $a = \frac{9}{8}$ , $b = -0.01$ , $k = 1.5$ , $\mu = -0.01$ sabitleri için (3.3.1) denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri ..... | 53 |
| Şekil 20. (5.2.20) çözümündeki $a = \frac{9}{8}$ , $b = -0.01$ , $k = 1.5$ , $\mu = -0.01$ sabitleri için (3.3.1) denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri ..... | 54 |
| Şekil 21. (5.2.22) çözümündeki $a = \frac{9}{8}$ , $b = -0.01$ , $k = 1.5$ , $\mu = 0.01$ sabitleri için (3.3.1) denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri.....   | 55 |
| Şekil 22. (5.2.24) çözümündeki $a = \frac{9}{8}$ , $b = -0.01$ , $k = 1.5$ , $\mu = 0.01$ sabitleri için (3.3.1) denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri.....   | 56 |
| Şekil 23. (5.2.26) çözümündeki $a = 0.1$ , $b = 0.5$ , $k = -1.5$ , $\mu = -0.01$ sabitleri için (3.3.1) denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri .....          | 57 |
| Şekil 24. (5.2.28) çözümündeki $a = 0.1$ , $b = 0.5$ , $k = -1.5$ , $\mu = -0.01$ sabitleri için (3.3.1) denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri .....          | 57 |
| Şekil 25. (5.2.30) çözümündeki $a = 0.1$ , $b = 0.5$ , $k = -1.5$ , $\mu = 0.001$ sabitleri için (3.3.1) denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri .....          | 58 |
| Şekil 26. (5.2.32) çözümündeki $a = 0.1$ , $b = 0.5$ , $k = -1.5$ , $\mu = 0.001$ sabitleri için (3.3.1) denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri .....          | 59 |
| Şekil 27. (5.2.34) çözümündeki $a = 0.1$ , $b = 0.5$ , $k = -1.5$ , $\mu = 0$ , $r = 1$ sabitleri için (3.3.1) denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri .....    | 60 |

## GİRİŞ

Bilimsel araştırmalar, tarih boyunca matematik, fizik, biyoloji, optik ve kimya gibi birçok alanda derinlemesine yürütölmüştür. Ancak bu alanların çok boyutlu yapısı, teorik bilgilerin insanlık yararına somut uygulamalara dönuştürölmesini uzun ve zorlu bir süreç haline getirmiştir. Lineer olmayan evrim denklemlerinin keşfi, bilimsel anlayıştaki belirsizlikleri büyük ölçüde gidermiş ve bu denklemler, fiziksel olguların modellenmesinde geniş bir kullanım alanı bulmuştur (Younas vd., 2024). Doğanın lineer olmayan yapısı, birçok bilim insanı tarafından evrenin sırlarını çözmenin anahtarı olarak kabul edilmektedir. Bu nedenle, karmaşık sistemlerin incelenmesi lineer olmayan evrim denklemleri üzerinden yürütölmekte olup birçok fiziksel olgu bu denklemler aracılığıyla matematiksel olarak ifade edilmektedir (Younas vd., 2023). Son yıllarda, lineer olmayan evrim denklemlerinin analizi yoğun ilgi görmüş ve önemli araştırma kaynaklarının odağı haline gelmiştir. Bu denklemler, lineer olmayan fiber optikler, yüksek genlikli dalga hareketleri, akışkan dinamiği, plazma fiziği ve katı hal parçacıklarının hareketleri gibi pek çok bilimsel alandaki deneysel çalışmalarda yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu tür modellerin analitik çözümlerinin elde edilmesi, sistemlerin temel özelliklerini ve gizli dinamiklerini anlamada kritik bir öneme sahiptir. Lineer olmayan evrim denklemleri ile ifade edilen yapılar, çözümleri ve özellikleri incelendikçe sistemlerin davranışları daha net ve kapsamlı bir biçimde anlaşılabilir hale gelmektedir (Ismael vd., 2023).

Lineer olmayan evrim denklemlerinin çözümlerine yönelik araştırmalar, bilim dünyasında önemli bir ivme kazanmış, özellikle Mathematica ve Maple gibi sembolik hesaplama yazılımlarının yaygın kullanımıyla bu süreç hızlanmıştır. Bu yazılımlar, karmaşık cebirsel ve diferansiyel işlemleri otomatik hale getirerek lineer olmayan evrim denklemlerinin analitik çözümlerine daha hızlı ve etkin bir şekilde ulaşılmasını sağlamaktadır. Bu gelişmeler, hem teorik analizler hem de pratik uygulamalar açısından önemli bir ilerleme sağlamıştır (Yomba, 2005). Bu doğrultuda lineer olmayan evrim denklemlerinin analitik çözümlerine ulaşmak amacıyla birçok araştırmacı tarafından çeşitli ileri düzey analitik metotlar geliştirilmiştir. Bu metotlar, genellikle lineer olmayan evrim denklemlerinin uygun dönuşüm teknikleri kullanılarak adi diferansiyel denklemlere dönuştürölmesini gerektirir. Elde edilen analitik çözümlerin doğruluğu ve

etkinliği, bu dönüşümlerde kullanılan parametreler ve katsayılar gibi önemli faktörlere bağlıdır. Bu faktörler aynı zamanda modellerin gerçek dünya uygulamalarındaki performansı açısından kritik bir öneme sahiptir (Murad vd., 2023).

Lineer olmayan evrim denklemlerinin gezici dalga çözümlerinin incelenmesi, lineer olmayan sistemler ve mühendislik süreçlerinin dinamiklerinin iç mekanizmalarının anlaşılmasında önemli bir rol oynamaktadır. Son yıllarda, bu denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek amacıyla birçok metot geliştirilmiş ve literatüre kazandırılmıştır (Roshid vd., 2017). Geliştirilen bu metotlar arasında  $(1/G')$ -açılım metodu (Yokuş vd., 2020), alt denklem metodu (Durur vd., 2020), tanh-coth metodu (Naowarat, 2023), sine-Gordon açılım metodu (Wazwaz, 2005) ve Kudryashov metodu (Akbari, 2017) bulunmaktadır. Bahsi geçen metotların her biri, lineer olmayan evrim denklemlerinin belirli türlerine yönelik çözümler sunmakta olup henüz tüm lineer olmayan evrim denklemlerini kapsayan birleşik bir metot geliştirilmemiştir. Dolayısıyla, literatürde farklı problemlere yönelik çözümler sunmaya devam eden çeşitli metotlar önemini korumaktadır (Wang vd., 2008). Bu bağlamda Sharma Tasso Olver-Burgers (STOB) denklemi, matematiksel ve fiziksel süreçlerin modellenmesinde geniş bir uygulama alanı bulmuş olup bu denklemin çözümleri üzerine yapılan çalışmalar literatürde önemli bir yer tutmaktadır. Örneğin, Zhengwu Miao ve arkadaşları çoklu tek dalga, yumru ve üçgen periyodik dalgalar arasındaki etkileşimleri incelemiştir (Miao vd., 2021). Wang, Tang ve Lou (2004) Burgers ve Sharma Tasso Olver denklemlerinin soliter dalga çözümlerindeki fisyon ve füzyon süreçlerini Hirota'nın doğrudan metodu ve Bäcklund dönüşümü aracılığıyla analiz etmişlerdir.

Bu tez çalışması, lineer olmayan STOB denkleminin analitik çözümlerini elde etmek için alt denklem ve geliştirilmiş alt denklem metotlarının uygulanmasını kapsamaktadır. Çalışmanın asıl amacı bahsi geçen metotlar aracılığıyla çeşitli gezici dalga çözümlerinin elde edilmesinin yanı sıra bu çözümlerin matematiksel ve fiziksel özelliklerinin detaylı bir şekilde incelenmesidir. Tez kapsamında araştırma problemimiz, STOB denkleminin alt denklem ve geliştirilmiş alt denklem metotları ile çözülerek farklı dalga formlarına sistematik olarak ulaşılması ve bu yapıların analitik şekilde incelenmesidir. Araştırmamızın temel soruları “Alt denklem ve geliştirilmiş alt denklem metotlarını kullanarak çözülen STOB denklemi ile hangi tür analitik dalga yapıları elde edilebilir ve bu yapıların fiziksel karşılıkları nelerdir?” şeklindedir. Hipotezimiz şudur:

“Alt denklem ve geliştirilmiş alt denklem metotları, STOB denklemine uygulanarak  $\tanh$ ,  $\coth$ ,  $\tan$ ,  $\cot$  gibi hiperbolik ve trigonometrik fonksiyonlar içeren soliton, periyodik, belirli noktalarda süreksizlik gösteren (tekillik barındıran) bir yapı ve rasyonel çözüm biçimlerini ortaya çıkarmaktadır.” Araştırmada izlenen yöntemsel yaklaşım iki ana aşamadan oluşmaktadır. İlk aşamada, STOB denklemi uygun bağımsız değişken ve dalga dönüşümleri ile çözüm üretimine uygun forma dönüştürülmüş; ardından alt denklem metodu uygulanarak hiperbolik, trigonometrik ve rasyonel fonksiyonlar içeren gezici dalga çözümleri elde edilmiştir. İkinci aşamada ise, çözüm uzayını zenginleştirmek amacıyla geliştirilmiş alt denklem metodu uygulanmış ve bu metotla elde edilen analitik çözümler üç boyutlu, iki boyutlu ve kontur grafiklerle detaylı şekilde analiz edilmiştir. Tez kapsamında elde edilen çözümler, literatürdeki diğer metotlardaki sonuçlarla karşılaştırılmıştır; kullanılan metotların analitik çözüm üretmedeki etkinlikleri değerlendirilmiş ve söz konusu metotlara ilişkin avantajlar ile sınırlılıklar kapsamlı bir biçimde detaylandırılmıştır.

# 1. BÖLÜM

## TEMEL TANIMLAR VE KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez çalışmasında ele alınan temel matematiksel ve fiziksel kavramlar ile bunların dayandığı teorik altyapı ayrıntılı olarak sunulacaktır. Çalışma, özellikle lineer ve lineer olmayan evrim denklemleri çerçevesinde şekillenmekte olup bu tür denklemlerin kavramsal ve yapısal özelliklerinin açık bir şekilde ortaya konması, ilerleyen bölümlerde yapılacak çözüm ve analizlerin anlaşılabilirliği açısından büyük önem taşımaktadır. Tezin odak noktalarından biri olan STOB denklemi, Burgers denkleminin bir genellemesi niteliğinde olup doğrusal olmayan terimler, viskozite etkileri ve dalga çözümleri gibi temel fiziksel süreçleri modellemektedir. Bu bağlamda, STOB denklemi üzerinden elde edilen çözümler yalnızca matematiksel açıdan değil aynı zamanda akışkanlar mekaniği, plazma fiziği ve fiber optik gibi alanlardaki uygulamaları açısından da dikkate değer sonuçlar sunmaktadır. Çalışmada kullanılan çözüm yöntemleri arasında alt denklem ve geliştirilmiş alt denklem metodolojileri öne çıkmaktadır. Bu yöntemler, denklemlerin karmaşık yapısını sistematik biçimde sadeleştirerek analitik çözümlerin elde edilmesine imkân tanımakta, aynı zamanda farklı parametrelerin çözüm üzerindeki etkilerinin ayrıntılı bir şekilde incelenmesine zemin hazırlamaktadır. Elde edilen analitik çözümler, Mathematica yazılımı kullanılarak üç boyutlu, iki boyutlu ve kontur grafiklerle görselleştirilmiş; bu sayede çözüm tiplerinin dalga profilleri, şekilleri ve parametre bağımlılıkları daha somut bir şekilde ortaya konmuştur. Sonuç olarak, bu bölümde lineer ve lineer olmayan evrim denklemlerine dair teorik temel, çalışmada kullanılan yöntemlerin işlevselliği ve elde edilen çözümlerin matematiksel-fiziksel yorumları kapsamlı bir şekilde ele alınmaktadır. Böylece, ilerleyen bölümlerde sunulacak analizlerin bütünsel bağlamı oluşturulmaktadır.

## 1.1. TÜREV

$f(x)$  fonksiyonu,  $[\hat{p}, \hat{q}]$  aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun.  $x \in [\hat{p}, \hat{q}]$  ve  $y = f(x)$  olacak şekilde,  $x = x_0$  noktasındaki türev aşağıdaki limitin değeri olarak tanımlanır:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Bu ifadede, limitin varlığı, fonksiyonun  $x = x_0$  noktasında türevlenebilir olduğunu ifade eder (Dikici, 2022).

İki değişkenli bir fonksiyon olan  $f = f(x, y)$  için bu sonuçlar kolayca genelleştirilebilir.

Fonksiyonun  $x$  'e göre kısmi türevi şu şekilde tanımlanır.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}.$$

Bu tanımda  $y$  sabit tutulur ve türev  $x$  değişkenine göre alınır.

Benzer şekilde, fonksiyonun  $y$  'ye göre kısmi türevini elde etmek için,

$x$  sabit tutulur ve türev  $y$  değişkenine göre alınır.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}.$$

Bu ifade  $y$  'de ki çok küçük bir değişimin  $f$  'nin değerinde nasıl bir değişikliğe yol açtığını gösterir. Yani fonksiyonun  $y$  'ye göre değişim hızı tanımlanır (Isah, 2024).

## 1.2. DİFERANSİYEL DENKLEM

Diferansiyel denklemler, doğal olayların matematiksel olarak modellenmesinde temel bir araçtır. Doğanın işleyişini belirleyen yasaların büyük bir kısmı değişim oranlarını içerir; bu oranlar matematikte türevlerle ifade edildiğinden, ortaya diferansiyel denklemler çıkar. Bu nedenle diferansiyel denklemler, yalnızca fizik ve mühendislikte değil; kimya, biyoloji, astronomi, ekonomi ve sistem bilimleri gibi farklı disiplinlerde de yaygın olarak kullanılmaktadır. Başka bir deyişle, diferansiyel denklemler doğanın dilidir (Krantz, 2020). Fen ve mühendislik bilimlerinde diferansiyel denklemler çok sayıda problemin matematiksel ifadesini oluşturur. Roket ve uydu hareketlerinden elektrik

devrelerine, ısı yayılımından titreşimlere, kimyasal reaksiyonlardan nüfus artışına kadar geniş bir uygulama alanına sahiptir. Her ne kadar bu modeller çeşitli varsayımlar ve basitleştirmeler sonucu gerçeğin idealize edilmiş biçimlerini yansıtsa da, elde edilen diferansiyel denklemler güçlü bir uygulama değerine sahiptir (Ross, 1984). Bu bağlamda mühendislik ve fen bilimlerinde problemlerin çözümü, öncelikle bu problemlerin matematiksel bir dile aktarılmasıyla başlar. Gerçek hayattaki fiziksel bir sistem, matematiksel bir model ile ifade edilir; bu model üzerinde yapılan işlemler sonucunda matematiksel çözüm elde edilir ve son aşamada bu çözüm fiziksel terimlerle yorumlanarak sistemin davranışı anlaşılır. Bu süreç, fiziksel sistemin matematiksel bir modele dönüştürülmesi, bu modelden matematiksel çözümün elde edilmesi ve son aşamada çözümün fiziksel terimlerle yorumlanması adımlarından oluşur; yani modelleme, çözüm ve yorumlama aşamalarını kapsar. (Kreyszig, 2020). Sonuç olarak, diferansiyel denklemler yalnızca karmaşık süreçleri değil, en basit fiziksel olguları da açıklamada etkili modeller sunar. Akışkanların hareketi, elektrik akımı, ısı yayılımı, sismik dalgaların yayılımı ve popülasyon dinamikleri gibi süreçlerin incelenmesi diferansiyel denklemler bilgisi gerektirir. Bir fiziksel süreci tanımlayan diferansiyel denklemler, o sürecin matematiksel modeli olarak kabul edilir ve en basit denklemler dahi önemli fiziksel sonuçlar sağlayabilir (Boyce vd., 2017). Bu bağlamda, diferansiyel denklem temel olarak aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

Bilinmeyen bir fonksiyon ve bu fonksiyonun türevlerini içeren denklemler diferansiyel denklem olarak tanımlanır. Başka bir deyişle, bir veya birden fazla bağımlı değişkenin bir fonksiyonu ile bu fonksiyonun bağımsız değişkenlere göre türevleri arasındaki ilişki *diferansiyel denklem* olarak ifade edilir. Bir denklemde belirli bir değişkene göre türev işlemi uygulanıyorsa, bu değişken *bağımsız değişken* olarak adlandırılır; türevi alınan değişken ise *bağımlı değişken* olarak tanımlanır (Demiray, 2014).

### 1.3. ADİ DİFERANSİYEL DENKLEM

Diferansiyel denklemler, doğada, mühendislikte ve toplumsal süreçlerde gözlemlenen dinamik sistemlerin davranışlarını açıklamak ve öngörmek için kullanılan en temel matematiksel araçlardan biridir. Elektrik devrelerinde akım ve gerilimin değişimi, sarkaçların hareketi, nüfus artışı, bulaşıcı hastalıkların yayılımı, kimyasal ve

nükleer reaksiyonlar gibi çok sayıda olgu bu denklemler aracılığıyla modellenebilmektedir. İçerdiği bağımsız değişken sayısına göre ikiye ayrılan diferansiyel denklemlerden, yalnızca tek bir bağımsız değişken içerenler adi diferansiyel denklemler olarak adlandırılırken, birden fazla bağımsız değişken içerenler kısmi diferansiyel denklemler şeklinde tanımlanır (Rice, 1993). Adi diferansiyel denklemler, sistemlerin değişimini çoğunlukla zamana bağlı olarak ifade eder ve bu yönüyle gerçek yaşam problemlerinin matematiksel olarak modellenmesinde önemli bir rol üstlenir. Lineer yapılarda analitik çözümler klasik yöntemlerle elde edilebilirken, lineer olmayan yapılarda çözüm süreci çok daha karmaşık hâle gelir. Bu nedenle farklı analitik teknikler geliştirilmiş ve lineer olmayan denklemlerin çözümlerinde önemli katkılar sağlamıştır. Analitik çözümlerin yetersiz kaldığı durumlarda ise sayısal yöntemler devreye girerek denklemlerin yaklaşık çözümlerini sunar. Bu çözümlerin güvenilirliği, çözümün varlığı, teklik ve kararlılığı dikkate alınarak değerlendirilir (Li, 2022). Tarihsel açıdan bakıldığında, adi diferansiyel denklemler XVII. yüzyılda Newton ve Leibniz'in çalışmalarıyla temelleri atılmış, Euler, Bernoulli kardeşler, Lagrange ve Laplace gibi matematikçilerin katkılarıyla sistematik bir teoriye dönüşmüştür. Günümüzde ise fizik, mühendislik, biyoloji, kimya, ekonomi ve sosyal bilimler gibi birçok alanda karmaşık süreçlerin modellenmesinde vazgeçilmez bir konuma ulaşmıştır (Borzi, 2020).

Diferansiyel denklem, yalnızca tek bir bağımsız değişkene bağlı bilinmeyen bir fonksiyon veya fonksiyonları içeriyorsa, *adi diferansiyel denklem* olarak adlandırılır (Yıldız, 1998).

Adi diferansiyel sistem genel olarak;

$$f\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(j)}\right) = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^jy}{dx^j}\right) = 0,$$

şeklinde gösterilebilir. Burada;

$x \rightarrow$  Bağımsız değişken

$y \rightarrow$  Bağımlı değişken

$y', y'', \dots, y^{(j)} \rightarrow$  Ardışık türevler olduğu bir gerçektir.

#### 1.4. KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEM

Kısmi diferansiyel denklemler, fiziksel olguları ve mühendislik modellerini tanımlamak için kullanılan temel matematiksel araçlar olup, ilk olarak geometri ve mekanikte karşılaşılan problemlerin incelenmesiyle ortaya çıkmış ve 18. ile 19. yüzyıllarda Clairaut, Lagrange, Monge, Laplace, Fourier ve d'Alembert gibi matematikçilerin katkılarıyla sistematik bir teori haline gelmiştir. Dalga denklemi, ısı denklemi ve Laplace denklemi ikinci mertebeden lineer kısmi diferansiyel denklemlerin temel örnekleri olarak öne çıkmış ve modern matematik ile mühendisliğin vazgeçilmez araçları olmuştur (Myint-U ve Debnath, 2007). Günümüzde bu denklemler; ısı iletimi, dalga yayılımı, akışkanlar mekaniği, kuantum mekaniği, plazma fiziği, popülasyon modelleri ve kimyasal madde yayılımı gibi pek çok sürecin modellenmesinde kullanılmaktadır (Wazwaz, 2009; Ray ve Gupta, 2018). Matematiksel bir problem yorumlanırken en az bir bağımlı değişkenin bir bağımsız değişkene göre değişimi dikkate alınır. Bağımsız değişken sayısı arttıkça çözüm süreci daha karmaşık hale gelir; çünkü çözüm için kullanılan matematiksel yöntemler daha sofistike hale gelir ve çözüm adımları zorlaşır. Ancak bu zorluk, modelin fiziksel gerçekliği daha doğru biçimde yansıtmasına da katkı sağlar. Başka bir ifadeyle, değişken sayısı arttıkça problemin çözümü güçleşmekte fakat aynı zamanda elde edilen sonuçların gerçek dünyadaki olgularla uyumu artmaktadır (Evans, 2010; Boyce vd., 2017). Bu bağlamda, adi diferansiyel denklemler yalnızca tek bir bağımsız değişkene bağlı süreçleri açıklarken, kısmi diferansiyel denklemler birden fazla bağımsız değişken içermeleri sayesinde çok boyutlu ve zamana bağlı süreçlerin daha gerçekçi biçimde modellenmesine imkân tanır. Örneğin ısı iletimi hem mekâna hem de zamana bağlı bir süreç olduğundan yalnızca adi diferansiyel denklemlerle ifade edilemez, bu nedenle kısmi diferansiyel denklemler temel araç konumundadır. Benzer şekilde dalga yayılımı, akışkanlar mekaniği, kuantum mekaniği, plazma fiziği, ekoloji ve kimyada karşılaşılan pek çok karmaşık süreç çok değişkenli yapı nedeniyle ancak kısmi diferansiyel denklemlerle doğru biçimde temsil edilebilmektedir (Myint-U ve Debnath, 2007; Taylor, 2011; Haberman, 2013). Kısmi diferansiyel denklemler, hem doğa bilimlerinde hem de mühendislikte karmaşık problemlerin çözümünde vazgeçilmez bir unsur olarak kabul edilmektedir. Öte yandan, kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü genellikle adi diferansiyel denklemlere göre daha zordur. Bu nedenle pek çok etkili strateji, kısmi diferansiyel denklemlerin bir veya

birden fazla adi diferansiyel denkleme indirgenmesine dayanır (Elma, 2017). Bilgisayar teknolojilerindeki ilerlemeler bu alandaki çalışmaları hızlandırmış; kısmi diferansiyel denklemler fizik, ekoloji ve kimya gibi disiplinlerde merkezi bir modelleme aracı hâline gelmiştir. Özellikle değişken katsayılı denklemlerin analitik çözümleri katsayıların değişkenliği nedeniyle güçleşmekte; bu yüzden yaklaşık yöntemlere başvurulmakta ve ortaya çıkan hata paylarının güvenilir biçimde belirlenmesi bilimsel açıdan kritik önem taşımaktadır. Uygulamada, analitik çözümün mümkün olmadığı durumlarda çeşitli yaklaşık yöntemler kullanılmakta; hem pratik hem de güvenilir sonuçlar verecek yaklaşımların geliştirilmesine ihtiyaç devam etmektedir (Bülbül, 2011).

Birden fazla bağımsız değişkenin yanı sıra bu değişkenlere bağlı fonksiyonlar ve bu fonksiyonların türevlerini içeren denklemler, *kısmi diferansiyel denklemler* olarak tanımlanır (Yıldız, 1998).

Kısmi diferansiyel denklemler, genel olarak;

$$M\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots\right) = 0,$$

şeklinde gösterilebilir.

Burada da yine

$x, y \rightarrow$  Bağımsız Değişkenler

$$z = M(x, y)$$

$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots \rightarrow$  Kısmi türevler

Yukarıdaki tanımlara göre, aşağıdakiler birer diferansiyel denklemdir.

$$u' - e^x u^2 + \sin x + x^2 = 0. \quad (1.4.1)$$

$$e^{u''} + u^2 + xu + \sin x = 0. \quad (1.4.2)$$

$$y''' + 3xy'' + \cos y = 0. \quad (1.4.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - yu = 0. \quad (1.4.4)$$

Bu bağlamda, (1.4.1) denklemi birinci mertebeden, (1.4.2) ve (1.4.4) denklemleri ikinci mertebeden, (1.4.3) denklemi ise üçüncü mertebededir. Ayrıca, (1.4.1), (1.4.2) ve (1.4.3) denklemleri yalnızca bir bağımsız değişken ve bu değişkene göre türevler içerdiğinden, adi diferansiyel denklemler olarak sınıflandırılır. Öte yandan, (1.4.4)

denklemini birden fazla bağımsız değişken içerdiği için kısmi diferansiyel denklem olarak adlandırılır (Hasanov vd., 2002).

### 1.5. MERTEBE-DERECE

Diferansiyel denklemlerin mertebesi ve derecesi, bu denklemlerdeki karmaşıklık düzeyini ve çözüm sürecine ilişkin temel özellikleri ortaya koyar. En yüksek türev, denklemin mertebesini belirleyerek fonksiyonun davranışı ve evrimi hakkında önemli bilgiler sunar. Bu nedenle diferansiyel denklemler, fizik, mühendislik, biyoloji ve ekonomi alanlarında karşılaşılan bilimsel ve mühendislik problemlerinin çözümünde önemli bir araçtır. Diferansiyel denklemlerin mertebesini ve derecesini kavramak, fonksiyonların bağımsız değişkenlerdeki değişimlere nasıl tepki vereceğini öngörmeyi sağlayarak karmaşık sistemlerin ve gerçek dünyadaki olayların daha iyi anlaşılmasına imkân tanır. Bu doğrultuda yapılan araştırmalar, mertebe ve derecenin önemini ve uygulama alanlarını ortaya koyarak, çevremizdeki karmaşık süreçlerin daha kapsamlı biçimde kavranmasına katkı sunmaktadır (Order and Degree of Differential Equations, 2025).

Bir diferansiyel denklemin mertebesi, denklemde yer alan en yüksek türevin değeri olarak tanımlanır.

$$\frac{dy}{dx} = x - 8, \quad (1.5.1)$$

$$dy = \sin(x) dx, \quad (1.5.2)$$

(1.5.1) ve (1.5.2) diferansiyel denklemleri birinci mertebeden,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 7\frac{dy}{dx} = 3x, \quad (1.5.3)$$

$$(y'')^2 + (y')^2 + 6x = y^5, \quad (1.5.4)$$

(1.5.3) ve (1.5.4) diferansiyel denklemleri ikinci mertebededir.

Derece ise türevine göre polinom şeklinde yazılan bir diferansiyel denklemin en yüksek mertebeden türevi bulunduran terimin üssüne bu diferansiyel denklemin derecesi denir.

$$(y')^2 + xy^3 - 7 = 0, \quad (1.5.5)$$

(1.5.5) denklemini ikinci dereceden,

$$(y''')^3 + (y')^4 - 5y + 2x = 0, \quad (1.5.6)$$

(1.5.6) denklemi ise üçüncü derecedendir (Bayram, 2010).

## 1.6. LİNEER VE LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Diferansiyel denklemler, matematiksel modellemede ve bilimsel analizde temel bir araç olup fiziksel sistemlerin dinamiklerini anlamamıza olanak sağlar. Bu bağlamda, denklemler genellikle lineer evrim denklemleri ve lineer olmayan evrim denklemleri olarak sınıflandırılır. Bu iki yapı arasındaki farklılıklar, sistemlerin analiz edilme biçimini, çözüm yöntemlerini ve elde edilen sonuçların yorumlanmasını doğrudan etkiler. Lineer evrim denklemleri daha basit çözüm stratejilerine imkân tanırken, lineer olmayan evrim denklemleri karmaşık davranışlar sergiler ve özel analitik ya da sayısal yöntemler gerektirir. Dolayısıyla bu farkların anlaşılması, hem teorik çalışmalarda hem de uygulamalı bilimlerde doğru çözüm yöntemlerinin seçilmesi açısından kritik bir önem taşır.

$x$  bağımsız değişkenine göre,

$$\sigma_j(x) \frac{d^j y}{dx^j} + \sigma_{j-1}(x) \frac{d^{j-1} y}{dx^{j-1}} + \dots + \sigma_1(x) \frac{dy}{dx} + \sigma_0(x) y = g(x),$$

şeklinde yazılabilen ifadeye *linear diferansiyel denklem* denir (Bayram, 2010).

Örneğin,

$$x dy - y dx = 0, \quad (1.6.1)$$

$$y'' - 3y' + y = 0, \quad (1.6.2)$$

$$x^3 y''' - x^2 y'' + 2xy' + 6y = e^{2x}. \quad (1.6.3)$$

(1.6.1) denklemi birinci mertebeden (1.6.2) denklemi ikinci mertebeden ve (1.6.3) denklemi ise üçüncü mertebeden lineer diferansiyel denklemlerdir.

Lineer diferansiyel denklemlerin iki temel özelliği bulunmaktadır:

1. Bağımlı değişkenin türevleri birinci dereceden olmalı ve  $y$  bağımlı değişkeninin bulunduğu her terimde  $y$ 'nin üssü bir olmalıdır.
  2. Her bir katsayı yalnızca bağımsız değişken olan  $x$ 'in bir fonksiyonu olmalıdır.
- Bu iki özelliği taşımayan diferansiyel denklemler, *linear olmayan diferansiyel denklemler* olarak adlandırılmaktadır (Bayram, 2010).

Örneğin,

$$yy' - 2y' - x = 0, \quad (1.6.4)$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + y^2 = 0, \quad (1.6.5)$$

(1.6.4) denklemi birinci mertebeden, (1.6.5) denklemi ise üçüncü mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemlerdir.

## 1.7. HOMOJEN VE HOMOJEN OLMAYAN KISMI DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Homojen ve homojen olmayan kısmi diferansiyel denklemler, doğa ve mühendislikte karmaşık süreçlerin modellenmesinde önemli bir yere sahiptir. Homojen denklemler, sistemin kendi iç dinamiklerini ortaya koyarken; homojen olmayan denklemler dış etki ve kuvvetlerin sisteme katkısını yansıtır. Bu ayrım, ısı iletimi, dalga yayılımı, dış kuvvetlerin etkisi ya da finansal süreçler gibi farklı alanlardaki problemlerin doğru şekilde analiz edilmesine imkân tanır. Ayrıca, değişkenler arasındaki dengeyi ifade eden homojenlik kavramı, uygun dönüşümlerle zor problemlerin daha basit yapılara indirgenmesini sağlayarak çözümlerin anlaşılabilirliğini artırır. Böylece hem teorik hem de uygulamalı modellerin güvenilirliği güçlenir (Krantz, 2020).

Kısmi diferansiyel denklemler homojen veya homojen olmayan olmak üzere sınıflandırılır. Her terimi bağımlı değişken  $u$  ya da  $u$  'nun türevlerini içeren herhangi bir mertebedeki kısmi diferansiyel denklem, homojen olarak adlandırılır. Eğer denklemde  $u$  veya türevleri dışında başka bir terim (örneğin bağımsız değişkenler ya da sabit bir ifade) yer alıyorsa, bu tür denklemler homojen olmayan olarak sınıflandırılır (Wazwaz, 2009).

Örnek:

$$u_t = 4u_{xx}, \quad (1.7.1)$$

$$u_t = u_{xx} + x, \quad (1.7.2)$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (1.7.3)$$

$$u_x + u_y = u + 4, \quad (1.7.4)$$

(1.7.1) denklemi, tüm terimleri yalnızca  $u$  'nun türevlerini içerdiğinden homojen bir kısmi diferansiyel denklemdir.

(1.7.2) denklemi, bağımsız değişken olan  $x$  terimi yer aldığı için bu denklem homojen olmayan bir kısmi diferansiyel denklemdir.

(1.7.3) denklemi, tüm terimler  $u$  'nun ikinci türevleri olup başka herhangi bir bağımsız değişken veya sabit içermediğinden homojen bir kısmi diferansiyel denklemdir.

(1.7.4) denklemi, sağ tarafta bağımlı değişkenin kendisine ek olarak sabit bir terim (+4) bulunduğu için bu denklem homojen olmayan bir kısmi diferansiyel denklemdir.

Örnek:

$$\frac{dy}{dt} + y = 0, \quad y(0) = 0,$$

birinci mertebeden lineer homojen diferansiyel denkleminin genel çözümü:

$$\frac{dy}{dt} = -y.$$

Değişkenlerine ayırırsak,

$$\frac{1}{y} dy = -dt.$$

Her iki tarafın integralini alırsak,

$$\int \frac{1}{y} dy = \int -1 dt \Rightarrow \ln|y| = -t + C_1.$$

$$|y| = e^{-t+C_1} = e^{C_1} e^{-t}.$$

$$C = \pm e^{C_1}.$$

Olarak yazılırsa:

$$y(t) = Ce^{-t}.$$

Başlangıç koşulunu uygularsak,

$$y(0) = 0.$$

Bu çözüm, dış etkisiz (homojen) bir sistemin zamanla enerji kaybedip tamamen durmasını (örneğin sönümlü titreşimde kütlenin hareketsiz kalması) temsil eder.

$$\frac{dy}{dt} + y = 5, \quad y(0) = 0.$$

Lineer homojen olmayan diferansiyel denklemdir.

Lineer denklem,

$$\frac{dy}{dt} + P(t)y = Q(t),$$

şeklindedir.

Lineer denklemde kullanılan integrasyon faktörü:

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt} = e^{\int 1dt} = e^t.$$

Denklemde her iki taraf  $e^t$  ile çarpılırsa,

$$e^t \cdot \frac{dy}{dt} + e^t y = 5e^t,$$

sol taraf bir çarpımın türevine eşittir:

$$\frac{d}{dt}(y \cdot e^t) = 5e^t.$$

Her tarafın integralini alırsak,

$$\int \frac{d}{dt}(ye^t) dt = \int 5e^t dt.$$

$$ye^t = 5e^t + C.$$

$y$  'yi yalnız bırakırsak,

$$y(t) = 5 + Ce^{-t}.$$

Başlangıç koşulunu uygularsak,

$$y(0) = 5 + Ce^0 = 5 + C = 0 \Rightarrow C = -5.$$

$$y(t) = -5e^{-t} + 5.$$

Bu çözümde,

$y(0) = 0$ , başlangıcında sistem hareketsizdir. Zamanla  $e^{-t} \rightarrow 0$ , olduğu için:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 5.$$

Sistem dış etkidен dolayı (homojen olmayan) kararlı bir duruma ulaşır:

$$y = 5.$$

Bu, örneğin bir elektrik devresine bağlı sabit voltaj kaynağı gibi bir fiziksel sistem olabilir.

## 1.8. ÖZEL ÇÖZÜM VE GENEL ÇÖZÜM

Diferansiyel denklemler, farklı başlangıç koşulları ve sınır değerlerine göre farklı sonuçlar verebilir. Diferansiyel denklemlerin çözümünü anlamada en önemli kavramlardan biri, özel çözüm ve genel çözüm ayrımıdır. Bu iki tür çözüm, özellikle denklemlerin belirli başlangıç veya sınır koşulları ile nasıl ilişkilendirileceğini ve denklemin çözümünün nasıl özelleştirilebileceğini anlamada kritik rol oynar. Bir

diferansiyel denklemin genel çözümü, tüm çözüm ailesini temsil eder ve genellikle bir veya daha fazla serbest parametre içerir. Bu serbest parametreler, başlangıç koşulları veya sınır koşulları verilene kadar belirli bir değere sahip olmayan sabitlerdir. Genel çözüm, denklemin çözümü için kullanılan yöntemlere bağlı olarak, hem lineer hem de lineer olmayan denklemler için belirli bir formda ifade edilebilir. Genel çözüm, denklemin tüm çözüm uzayını kapsar ve herhangi bir özel durumu tanımlamaz. Özel çözüm, belirli başlangıç veya sınır koşulları verildiğinde, genel çözümün belirli bir durumu olarak elde edilir. Başka bir deyişle, genel çözümdeki serbest parametrelerin belirli bir değer almasıyla ortaya çıkan çözümdür. Özel çözüm, denklemin belirli bir fiziksel veya mühendislik problemini modellemek için kullanılır. Bu çözüm, sistemin başlangıç koşullarına veya sınır koşullarına dayanarak daha spesifik ve özgül bir sonuç sağlar.

Belirli bir aralıkta tanımlı  $y = f(x)$  fonksiyonu bu aralıkta bulunan her  $x$  için tanımlı ve  $\hat{k}$ . mertebeye kadar türevlenebilir ise,

$$F(x, \psi(x), \psi'(x), \dots, \psi^{(\hat{k})}(x)) = 0.$$

Bir adi diferansiyel denklemin genel çözümü, denklemin mertebesine bağlı olarak  $\hat{k}$  adet keyfi sabit içerir. Bu sabitlere belirli değerler verilerek elde edilen çözüm özel çözüm olarak adlandırılır. Adi diferansiyel denklemin çözümleri genellikle bir eğriler ailesi ile ifade edilirken kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri ise bir yüzey ailesine karşılık gelir (Bulut, 2019).

## 1.9.VARLIK-TEKLİK

Diferansiyel denklemler teorisinde varlık ve teklik teoremleri, çözümün güvenilirliğini ve geçerliliğini belirleyen temel ilkelere biridir. Varlık, verilen koşullar altında en az bir çözümün bulunduğunu garanti ederken; teklik bu çözümün yalnızca bir tane olduğunu güvence altına alır. Böylece, matematiksel modellerin doğruluğu ve fiziksel süreçlerin sağlıklı biçimde temsil edilebilmesi mümkün olur. Varlık koşulu sağlanmadığında çözüm hiç ortaya çıkmaz; teklik koşulu sağlanmadığında ise birden fazla çözüm bulunur ve hangisinin fiziksel olarak geçerli olduğu belirsiz kalır. Bu nedenle, varlık ve teklik teoremleri hem kuramsal hem de uygulamalı matematikte, modelleme ve problem çözümünde kritik öneme sahiptir (Evans, 2010; Boyce vd., 2017; Zill, 2018).

“İyi tanımlı problem” (well-posed problem) kavramı, matematiksel literatüre ilk kez Fransız matematikçi Jacques Hadamard tarafından kazandırılmıştır. Matematiksel fizikte bir sınır değer probleminin Hadamard anlamında iyi kurulmuş (well-posed) olarak nitelendirilebilmesi için aşağıdaki üç temel koşulu sağlaması gerekmektedir:

1. Çözümün varlığı: Problem için en az bir çözümün mevcut olması gerekmektedir.
2. Çözümün teklik özelliği (eşsizlik): Belirli başlangıç veya sınır koşulları altında yalnızca bir çözümün elde edilmesi beklenir.
3. Çözümün verilere karşı sürekli bağımlılığı (süreklilik): Problemin başlangıç veya sınır verilerinde meydana gelen küçük değişikliklerin, çözüm üzerinde yalnızca sınırlı ve orantılı etkiler oluşturması beklenir.

Söz konusu üç koşul, çoğunlukla problemin fiziksel ya da mekanik kökenine bağlı olarak şekillenir. İlk koşul, modelin matematiksel olarak tutarlı bir biçimde formüle edildiğini gösterirken; ikinci koşul, modelin belirleyici bir yapıya sahip olduğunu ifade eder. Üçüncü koşul ise çözümün kararlılığını belirtir: Problemin girdilerinde meydana gelen küçük değişikliklerin, çözüm üzerinde yalnızca küçük değişikliklere yol açması beklenir. Bu tür kararlılık, matematiksel fizik uygulamalarında oldukça önemlidir; zira gerçek sistemler çoğunlukla yaklaşık verilerle temsil edilir. Dolayısıyla modeldeki küçük belirsizliklerin sonuçlar üzerinde büyük sapmalara yol açmaması, iyi tanımlı bir çözümün temel gerekliliğidir (Zachmanoglou ve Thoe, 1976; Marcks von Würtemberg, 2011; Logan, 2015).

Örnek: Tek boyutlu ısı denklemi şu şekilde tanımlanır:

$$u_t = u_{xxx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

başlangıç koşulu:

$$u(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < 1,$$

ve Dirichlet sınır koşulu:

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0.$$

Bu problem Hadamard anlamında iyi-kurulmuş olup üç temel kriteri sağlamaktadır:

Varlık: Çözüm, Fourier serileri yöntemiyle elde edilebilmektedir. Başlangıç fonksiyonu  $g(x)$  gerekli düzenlilik koşullarını sağladığında, seri yakınsaklığı garanti

edilmekte ve verilen başlangıç-sınır koşulları için bir çözümün varlığı ortaya konmaktadır.

**Teklik:** Maksimum prensip uygulanarak, aynı başlangıç ve sınır koşullarına sahip iki çözümün farkının yine ısı denklemini sağladığı, ancak sınır ve başlangıçta sıfır olduğu görülür. Maksimum prensip gereği bu fark her noktada sıfırdır; dolayısıyla çözüm tektir.

**Sürekli bağımlılık:** Maksimum prensip aynı zamanda çözümün veriye sürekli bağımlılığını da garanti etmektedir. Başlangıç fonksiyonları arasındaki küçük farklar, çözümler arasındaki farklılıklara da aynı ölçüde yansır. Bu durum çözümün başlangıç verilerine sürekli bağımlı olduğunu göstermektedir (Yanovsky, 2005).

Sonuç olarak,  $0 < x < 1$ ,  $t > 0$  bölgesinde tanımlı ısı denkleminin başlangıç-sınır değer problemi; çözümün varlığı, tekliği ve sürekli bağımlılığı açısından Hadamard anlamında iyi-kurulmuş bir problemidir.

#### 1.10. BAŞLANGIÇ DEĞER VE SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Diferansiyel denklemler, fiziksel, biyolojik ve mühendislik sistemlerinin modellenmesinde yaygın olarak kullanılan temel matematiksel araçlardır. Bu denklemlerin çözümleri, genellikle belirli koşullar altında elde edilir ve söz konusu koşullar çözümün biçimini ve karakterini doğrudan belirler. Diferansiyel denklemlerde en sık karşılaşılan iki temel problem türü başlangıç değer problemleri ve sınır değer problemleridir. Bu problem türleri, çözüm yöntemleri açısından farklılık göstermekte olup, elde edilecek çözümün niteliğinin ve geçerliliğinin belirlenmesinde önemli bir rol üstlenir.

Diferansiyel denklemlerde, bilinmeyen fonksiyon ve türevlerinin belirli bir bağımsız değişkenin aynı değerleri için verilen koşullar altında çözülmesi, başlangıç değer problemi olarak adlandırılır. Bu koşullara ise *başlangıç koşulları* denir.

Örnek:

$$y'' + y = e^x, \quad (1.10.1)$$

$$y(0) = 1, y'(0) = 2, \quad (1.10.2)$$

şeklinde verilen denklem bir başlangıç değer problemidir.

Diferansiyel denklemlerde, bilinmeyen fonksiyon ve türevlerinin, bağımsız değişkenlerin farklı değerleri için verilen koşullar altında çözülmesi, *sınır değer problemi* olarak adlandırılır. Bu koşullara ise *sınır koşulları* denir.

Örnek:

$$y'' + 2y = e^x, \quad (1.10.3)$$

$$y(0) = 1, y'(1) = 0, \quad (1.10.4)$$

sınır değer problemidir (Aydın, 2020).

Başlangıç değer problemleri ve sınır değer problemleri, diferansiyel denklemlerin çözümü ile sistemlerin analizinde temel birer kavramdır. Başlangıç değer problemleri, çoğunlukla zamanla değişen dinamik süreçlerin modellenmesinde kullanılırken; sınır değer problemleri ise genellikle statik durumların veya denge koşullarının incelenmesinde tercih edilir. Bu iki problem türü, farklı çözüm stratejileri gerektirmekte olup, uygulanacak yöntemlerin doğru seçimi doğrudan ele alınan sistemin yapısına ve özelliklerine bağlıdır. Dolayısıyla, diferansiyel denklem problemlerinde koşul türünün doğru belirlenmesi ve buna uygun çözüm yöntemlerinin seçilmesi, elde edilecek sonuçların doğruluğu ve geçerliliği açısından kritik öneme sahiptir.

### 1.11. İKİNCİ MERTEBEDEN KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SINIFLANDIRILMASI

İkinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemler, birden fazla bağımsız değişkenin etkisi altında gelişen fiziksel, mühendislik ve doğal süreçlerin modellenmesinde en yaygın kullanılan denklemlerden biridir. Bu tür denklemler; akışkanlar mekaniği, ısı transferi, elastisite teorisi, elektromanyetik dalgalar ve benzeri birçok alanda merkezi bir rol üstlenmektedir. Bağımlı değişkenin birden fazla bağımsız değişkenle ilişkili olduğu bu denklemlerin çözümleri, genellikle daha karmaşık yapılar sergiler ve çözüm süreci hem analitik hem de sayısal açıdan zorluklar barındırır. İkinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin sınıflandırılması, yalnızca çözüm yöntemlerinin belirlenmesi açısından değil, aynı zamanda denklemlerin fiziksel anlamının doğru bir şekilde yorumlanabilmesi için de kritik öneme sahiptir. Bu sınıflama, denklemlerin yapısal özelliklerini ortaya koyarak çözüm sürecinde hangi yaklaşımın uygulanacağına dair yönlendirici olur. Örneğin, hiperbolik tipte denklemler genellikle dalga hareketlerini ve yayılma süreçlerini ifade eder; bu nedenle çözümleri zamanla evrim gösterir ve belirli hızlarda ilerler. Bu özellik, hem analitik çözüm yöntemlerinin hem de sayısal tekniklerin seçiminde belirleyici rol oynar. Ayrıca doğru sınıflandırma, fiziksel modellemenin daha güvenilir ve tutarlı bir şekilde gerçekleştirilmesini sağlar. Yanlış denklem tipinin tercih

edilmesi ise çözümün hatalı olmasına ve özellikle mühendislik uygulamalarında ciddi tasarım hatalarının ortaya çıkmasına yol açabilir.

İki bağımsız değişkenli ikinci mertebeden lineer bir kısmi diferansiyel denklem genel olarak şu biçimde verilir:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = 0.$$

Burada  $A, B, C, D, E, F \in R$  sabit katsayılar  $x$  ve  $y$  bağımsız değişkendir.

İkinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemler, karakteristik yüzeylerinin doğasına ve diskriminant teriminin işaretine bağlı olarak parabolik, hiperbolik ve eliptik denklemler olmak üzere üç temel sınıfta incelenmektedir.

### 1.11.1. Parabolik Denklemler

Bu tür denklemler, zamanla değişen ama mekânsal değişiklikleri daha yavaş olan sistemleri tanımlar. Genellikle ısı transferi, difüzyon gibi süreçlerde karşılaşılan parabolik denklemler örneği verilebilir.

Parabolik denklemler şu koşulu sağlayan denklemlerdir:

$$B^2 - 4AC = 0.$$

Örnek:

$$u_t = ku_{xx}. \quad (1.11.1)$$

Burada  $u(x, t)$  sıcaklığı,  $x$  konumu,  $t$  zamanı,  $k$  ısı iletimini temsil eder.

Bu denklem, ısı yayılımını veya difüzyon sürecini tanımlar. Örneğin, metal çubuğun bir ucu ısıtıldığında, bu ısı çubuğun diğer kısımlarına zamanla yayılır. Bu yayılım parabolik denklemle modellenir.

Örnek:

$$u_t = 4u_{xx}, \quad (1.11.2)$$

$$A = 4, B = C = 0,$$

$$B^2 - 4AC = 0 \Rightarrow \text{Parabolik denklemdir.}$$

Örnek:

$$u_t = u_{xx} - u_x, \quad (1.11.3)$$

$$A = 1, B = C = 0,$$

$$B^2 - 4AC = 0 \Rightarrow \text{Parabolik denklemdir.}$$

### 1.11.2. Hiperbolik Denklemler

Çoğunlukla dalga hareketleri veya yayılma olaylarını tanımlar. Bu denklemler, genellikle hareket halindeki dalgaların yayılmasını modellemek için kullanılır. Örneğin, Dalga denklemi ve Burgers denklemi hiperbolik denklemler arasında yer alır. Bu tür denklemlerde, çözüm genellikle belirli bir hızda yayılır.

Hiperbolik denklemler şu koşulu sağlayan denklemlerdir:

$$B^2 - 4AC > 0.$$

Örnek:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}. \quad (1.11.4)$$

Burada  $u(x, t)$  genliği,  $c$  sabit yayılım (difüzyon) hızını temsil eder.

Bu denklem, dalga yayılımını modellemek için kullanılır. Örneğin bir telin titreşimi (gitar teli gibi), ses dalgaları, su yüzeyindeki dalgalar bu denklemle ifade edilir. Dalgalar ileri ve geri yayılır, bu yüzden denklem çift zaman türevi içerir.

Örnek:

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}. \quad (1.11.5)$$

Burgers denklemi ise lineer olmayan yapısıyla akışkanlarda şok dalgalarının ve yayılma süreçlerinin modellenmesinde temel rol oynar. Konveksiyon terimi ( $uu_x$ ) dalganın taşıyıcı hareketini, difüzyon terimi ( $\nu u_{xx}$ ) ise yayılma ve sönümlenme etkisini ifade eder. Bu nedenle Burgers denklemi, akışkanlar mekaniğinde türbülans, gaz dinamiğinde şok oluşumları ve hatta trafik akışı gibi çeşitli alanlarda kullanılan önemli bir modeldir (Kumar, 2023).

Örnek:

$$u_{tt} = 4u_{xx}, \quad (1.11.6)$$

$$A = 4, B = 0, C = -1.$$

$$B^2 - 4AC = 16 > 0 \Rightarrow \text{Hiperbolik denklemlerdir.}$$

Örnek:

$$u_{tt} = u_{xx} - u_t, \quad (1.11.7)$$

$$A = 1, B = 0, C = -1.$$

$$B^2 - 4AC = 4 > 0 \Rightarrow \text{Hiperbolik denklemlerdir.}$$

### 1.11.3. Eliptik Denklemler

Çoğunlukla denge durumlarına ilişkin problemleri modellemek için kullanılır. Örneğin, statik elektrik alanları veya sabit ısı dağılımı gibi. Laplace denklemi ve Poisson denklemi, eliptik denklemlere örnektir.

Eliptik denklemler şu koşulu sağlayan denklemlerdir:

$$B^2 - 4AC < 0.$$

İki boyutlu Laplace denklemi:  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ .

Laplace denklemi genellikle potansiyel denklem olarak adlandırılır çünkü  $u(x, y)$  bir potansiyel fonksiyonu tanımlar. Bu denklem durağan durum problemlerini ifade eder. Örneğin, belirli bir şekle sahip metal levhada sabit sıcaklık dağılımı, elektrostatik potansiyel dağılımı gibi problemler için uygundur (Wazwaz, 2009).

Örnek:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{1.11.7}$$

$$A = 1, B = 0, C = 1.$$

$$B^2 - 4AC = -4 < 0 \Rightarrow \text{Eliptik denklemdir.}$$

Örnek:

$$u_{xx} + xu_{yy} = 0, \tag{1.11.8}$$

$$B^2 - 4AC = -4x,$$

$$A = 1, B = 0, C = x.$$

Bu denklem,

$x = 0$  için parabolik,

$x < 0$  için hiperbolik,

$x > 0$  için eliptiktir.

### 1.12. DENGELEME TERİMİ

Dengeleme terimi, toplam biçiminde tanımlanan çözüm fonksiyonunun üst sınır mertebesini belirleyen yapısal bir katsayıdır. Bu terim, lineer olmayan bir adi diferansiyel denklemde yer alan en yüksek mertebeden türevli lineer terim ile en yüksek mertebeden türevli lineer olmayan terim arasındaki denklik ilkesine dayanarak belirlenir. Başka bir ifadeyle, çözümün yapısal formu ile denklemin türev mertebeleri arasında bir denge

kurularak, analitik çözümde kullanılacak fonksiyonların derecesi bu ilişki doğrultusunda tayin edilir. Lineer olmayan bir adi diferansiyel denklemde, en yüksek mertebeden lineer terim  $\frac{d^q u}{d\xi^q}$  şeklinde, en yüksek mertebeden lineer olmayan terim ise,  $u^p \cdot \left(\frac{d^r u}{d\xi^r}\right)^s$  biçiminde ifade edilsin. Burada  $p, q, r$  ve  $s$  sabit katsayılarıdır. Toplam çözüm fonksiyonunun üs değeri olarak tanımlanan dengeleme terimi  $n$  olmak üzere, bu terimi belirlemek için aşağıdaki denklik kurulabilir:

$$n + q = np + s(n + r).$$

Söz konusu eşitlik, diferansiyel denklemin en baskın, yani en yüksek mertebeden türev içeren lineer ve lineer olmayan terimleri arasındaki türev dereceleri ile çözüm fonksiyonunun üslerinin denklemlenmesi yoluyla elde edilir. Bu yöntem aracılığıyla, kullanılacak çözüm fonksiyonunun derecesi ve yapısal formu sistematik olarak belirlenmiş olur (Yokuş, 2011).

### 1.13. RİCCATİ DİFERANSİYEL DENKLEMİ

Riccati diferansiyel denklemi, ilk kez İtalyan matematikçi Jacopo Francesco Riccati (1676-1754) tarafından ele alınmış ve 1724 yılında Acta Eruditorum dergisinde yayımlanmıştır. Riccati'nin incelediği ve “Orijinal Riccati Denklemi” olarak bilinen denklem şu şekilde ifade edilir:

$$y' + \hat{a}x^2 = \hat{b}x^{\hat{d}}. \quad (1.13.1)$$

Bu denklemde  $\hat{a}, \hat{b}$  ve  $\hat{d}$  sabitlerdir. Riccati,  $\hat{d}$  değerine bağlı olarak bu denklemin bazı özel çözümlerini sunmuştur.

Günümüzde Riccati diferansiyel denklemi genellikle şu şekilde ifade edilmektedir:

$$y' = \hat{a}(x) + \hat{b}(x)y + \hat{c}(x)y^2. \quad (1.13.2)$$

Bu denklemde  $\hat{a}(x), \hat{b}(x)$  ve  $\hat{c}(x)$  integrallenebilir fonksiyonlardır ve  $\hat{b}(x) \neq 0, \hat{c}(x) \neq 0$  koşulları sağlanır. (1.13.2) denklemi lineer olmayan diferansiyel denklem sınıfına girer.

Eğer  $\hat{a}(x) = 0$  ise, (1.13.2) denklemi Bernoulli diferansiyel denklemine dönüşür. Bu denklem, ilk olarak 1763 yılında Fransız matematikçi Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) tarafından incelenmiştir. Riccati denklemi üzerinde birçok çalışma yapılmış

olmasına rağmen, genel olarak tam bir çözümü elementer fonksiyonlarla ifade edilemez. Ancak, (1.13.2) denkleminin bir özel çözümü bilindiğinde, denklem uygun bir değişken dönüşümüyle birinci dereceden bir lineer diferansiyel denkleme indirgenebilir. Bu yöntemle genel çözüm elde edilebilir.

Bir özel çözümün  $y = y_1$  olduğunu varsayalım. Bu durumda, (1.13.2) denkleminde şu değişken dönüşümü yapılır:

$$y = y_1 + \frac{1}{v}. \quad (1.13.3)$$

Bu dönüşümün türevi şu şekilde yazılır:

$$y' = y_1' - \frac{1}{v^2} v'. \quad (1.13.4)$$

Elde edilen (1.13.3) ve (1.13.4) ifadeleri, (1.13.2) denkleminde yerleştirildiğinde, aşağıdaki lineer diferansiyel denklem elde edilir:

$$v' + (2\hat{c}y_1 + \hat{b})v = -\hat{c}. \quad (1.13.5)$$

Bu denklem, Riccati diferansiyel denkleminin özel bir çözümü bilindiğinde genel çözümün bulunması için kullanılan bir yöntemdir. Bu çalışmada, (1.13.2) denklemini sağlayan bir özel çözümün bilindiği durumda, uygun bir değişken dönüşümü ile denklem lineer hale getirilmiş ve genel çözüm elde edilmiştir (Gülecan, 2019).

Örnek:

$$y' + y^2 + \frac{1}{x}y - \frac{4}{x^2} = 0, \text{ diferansiyel denkleminin bir özel çözümü } y_1 = \frac{2}{x} \text{ olduğuna}$$

göre denklemin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm:

$$y = y_1 + \frac{1}{u} = \frac{2}{x} + \frac{1}{u} \Rightarrow y' = y_1' - \frac{u'}{u^2} = \frac{-2}{x^2} - \frac{u'}{u^2},$$

olur. Denklemden yerine koyalım.

$$-\frac{2}{x^2} - \frac{u'}{u^2} + \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{u}\right)^2 + \frac{1}{x}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{u}\right) - \frac{4}{x^2} = 0,$$

düzenleme yaparsak,

$$u' - \frac{5}{x}u = -1,$$

bulunur.

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int -\frac{5}{x}dx} = e^{-5\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x^5}} = \frac{1}{x^5}.$$

$$u = \frac{1}{\frac{1}{x^5}} \left[ \int x^{-5} (-1) dx + C \right] = x^5 \left( -\frac{x^{-4}}{-4} + C \right) = \frac{x}{4} + Cx^5,$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$y = y_1 + \frac{1}{u},$$

olduğundan,

$$u = \frac{x}{xy - 2},$$

bulunur. Yukarıdaki ifade yerine yazıldığında,

$$u = \frac{x}{xy - 2} = \frac{x}{4} + Cx^5,$$

sonucuna ulaşılır.

Bu tezde kullanılan Riccati diferansiyel denklemi, lineer olmayan evrim denklemlerinin analitik çözümlerinde temel rol üstlenen yardımcı yapılardan biridir. Riccati tipi denklemler, farklı parametre koşullarına göre çeşitli fonksiyonel çözüm aileleri üretmesiyle öne çıkar ve bu yönüyle pek çok analitik yöntemin başarıyla uygulanabilmesine imkân sağlar. Çalışmada kullanılan Riccati denklemi de parametre  $\mu$  'nün işaretine bağlı olarak birbirinden farklı çözümler sunmaktadır.  $\mu < 0$  durumunda hiperbolik fonksiyonlara dayalı çözümler,  $\mu > 0$  için trigonometrik çözümler,  $\mu = 0$  için ise rasyonel çözüm ortaya çıkmaktadır. Böylelikle, aynı denklem üzerinden çok farklı dalga profillerinin elde edilmesi mümkün hâle gelmektedir.

Bu kapsamda kullanılan Riccati denklemi şu şekilde ifade edilmektedir:

$$\varphi'(\xi) = \mu + (\varphi(\xi))^2, \quad \mu \in R. \quad (4.1.5)$$

Riccati denkleminin (4.1.5) bazı özel çözümleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
& -\sqrt{-\mu} \tanh(\sqrt{-\mu}\xi), & \mu < 0, \\
& -\sqrt{-\mu} \coth(\sqrt{-\mu}\xi), & \mu < 0, \\
& \sqrt{\mu} \tan(\sqrt{\mu}\xi), & \mu > 0, \\
& -\sqrt{\mu} \cot(\sqrt{\mu}\xi), & \mu > 0, \\
& -\frac{1}{\xi + r}, & \mu = 0 \quad (r \text{ sabittir}).
\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

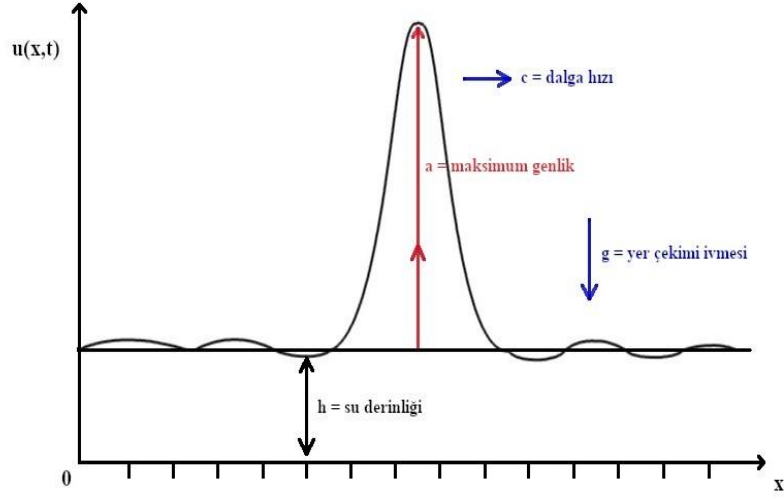
Görüldüğü üzere, Riccati diferansiyel denkleminin bu çözümleri yalnızca matematiksel çeşitlilik sunmakla kalmamakta, aynı zamanda çalışmada elde edilen  $\tanh$ ,  $\coth$ ,  $\tan$ ,  $\cot$  ve rasyonel tipli gezici dalga çözümlerinin doğrudan temelini oluşturmaktadır. Böylelikle Riccati yapısı, tezde kullanılan yöntemlerin işlevselliğini artıran, çözüm çeşitliliğini zenginleştiren ve lineer olmayan evrim denklemlerinin farklı parametre koşulları altında sergilediği davranışları görünür kılan merkezi bir unsur olarak öne çıkmaktadır.

## 2. BÖLÜM

### SOLİTONLAR VE SOLİTER DALGALAR

#### 2.1.SOLİTON KAVRAMININ TARİHÇESİ

İngiliz mühendis John Scott Russell'ın yaklaşık 190 yıl önce yaptığı gözlem, dalga fenomenlerinin anlaşılmasında önemli bir mihenk taşıdır. Russell, Edinburgh kanalında bir mavnanın ani duruşu sonucu, kanal boyunca şekli ve hızı değişmeden ilerleyen belirgin bir su tepesi gözlemlemiştir. Russell'ın bu olayı tanımlarken kullandığı dil, nadir bir doğa olayına tanık olan bir bilim insanının şaşkınlığını yansıtmaktadır. Bu şaşkınlık, dönemin lineer dalga teorisiyle açıklanamazdı. Lineer teoriye göre, sığ bir kanalda yalnızca sonsuz uzunluktaki harmonik dalgalar bozulmadan yayılabilir ve bu dalgaların hızı, dalga boyuna bağlıdır. Harmonik dalgalar, farklı bozulmaları yeniden oluşturabilirken, dispersiyon nedeniyle sinüzoidal olmayan dalga paketleri zamanla dağılır. Russell'ın gözlemlediği yerçekimi dalgaları da bu dispersiyona maruz kalmıştır. Bu sebeple, Russell'ın çağdaşları, Russell dalgasının uzun süre boyunca şekil bozulmadan kalamayacağını düşünmüş ve bu olayı sıradan bir dalganın bir parçası olarak değerlendirmişlerdir (Manevitch ve Smirnov, 2008).



Şekil 1. Soliter dalga profili

Russell, doğal ortamlarda olduğu kadar bahçesindeki özel olarak tasarlanmış küçük su deposu olan laboratuvarında da çok sayıda deney gerçekleştirmiştir. Bu deneyler sonucunda soliter dalgaya ilişkin aşağıdaki temel özellikleri tanımlamıştır:

1. İzole bir soliter dalga sabit hızla ilerler ve formunu korur.
2. Dalga hızının, maksimum genlik, su derinliği ve yerçekimi ivmesi ile ilişkisi aşağıdaki formülle tanımlanır:

$$c^2 = g(h + a).$$

Bu ifade,  $a < h$  koşulu altında geçerlidir.

3. Yeterli büyüklükteki bir soliter dalga zamanla birden fazla küçük soliter dalgaya ayrışır. Bu yeni dalgalar farklı hızlarla ilerlediğinden, başlangıçta birleşik olan yapı yol aldıkça ayrışır.
4. Soliter dalgalar yalnızca pozitif yönlü yükselti biçimindedir; negatif yönlü çöküntü şeklindeki formları gözlemlenmemiştir.

Russell, soliter dalgaların çarpışma sonrası herhangi bir bozulma olmadan yollarına devam ettiğini belirlemiş; bu özellik daha sonra soliton kavramının temellerinden biri olarak değerlendirilmiştir (Filippov, 2010).

$$c^2 = g(h + a).$$

Bu bağıntı, dalganın hızının genliğine bağlı olduğunu ve daha büyük genliğe sahip bir dalganın daha küçük genlikli bir dalgadan daha hızlı hareket ettiğini göstermektedir. Russell'ın çalışması, bu alanda birçok tartışmaya yol açmış ve pek çok bilim insanı, sonuçlarına eleştirel yaklaşmıştır (Yapışkan, 2022). Russell'ın bulguları matematik camiası tarafından yeterince takdir edilmemiştir. 1845 yılında Array, “Tides and Waves” (Gelgitler ve Dalgalar) adlı kitabında, Russell'ın soliter dalgalarının varlığını reddeden bir teori öne sürmüştür (Arora vd., 2022). Russell'ın çalışmalarının doğrulanması ve bilimsel öneminin tam anlamıyla kabul edilmesi ancak 1870'lerde mümkün olmuştur. Bu doğrulamanın değeri, sürece katkı sağlayan bilim insanlarının prestiji ile daha da güçlenmiştir. 1872'de Joseph Boussinesq ve 1876'da Lord Rayleigh, birbirlerinden bağımsız olarak serbest yüzey dalgaları için  $sech^2$  çözümünü elde etmişlerdir. Bununla birlikte, Boussinesq'in 1872 tarihli çalışması yalnızca bu çözümle sınırlı kalmamış, modern analizlerde hâlâ kullanılan pek çok temel kavramı da ortaya koymuştur. Özellikle, üçüncü korunum yasasına ilişkin korunmuş bir büyüklüğü keşfetmiş ve bu büyüklüğü “kararsızlık momenti” olarak adlandırmıştır. Bu gelişmeler, Russell'ın gözlemlerini doğrulamış ve bilim dünyasında kabul görmesini sağlamıştır (Newell, 1983). 1895 yılında Korteweg ve de Vries soliter dalgaların yayılımını tanımlayan bir matematiksel denklem türetmişlerdir. Bu denklem, günümüzde Korteweg-de Vries (KdV) denklemi olarak anılmakta olup, lineer olmayan dalgalar teorisinin en önemli denklemlerinden biri olarak kabul edilmektedir. Soliter dalgaların başarılı bir şekilde teorik olarak modellenmesinin ardından, lineer olmayan dalga araştırmalarına olan ilgi önemli ölçüde artmıştır (Singh ve Senthilnathan, 2024). KdV denklemi, lineer olmayan dalgaların oluşumu ve yayılımını modellemek amacıyla birçok farklı alanda uygulanmıştır. Özellikle, uzun dalga boylu ve küçük genlikli sığ su dalgalarını tanımlamak için geliştirilmiş olan bu denklem, malzeme bilimi ve diğer bilimsel disiplinlerde de kullanılmıştır (Ghany vd., 2020).

KdV denklemi:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0,$$

şeklindedir.

Burada alt indisler kısmi türevleri ifade etmektedir (Gardner vd., 1967). Bu denklemde  $u_t$  terimi dalganın tek yönde yayılımının zamansal evrimini ifade eder. Aynı zamanda denklem iki temel etki arasında bir rekabet ilişkisi içerir. Bunlar, dalganın dikliğini

gösteren ve  $uu_x$  ile ifade edilen lineer olmayan terim ve dalganın yayılımını tanımlayan ve  $u_{xxx}$  ile gösterilen dispersiyon terimidir (Aydemir, 2016). Lineer olmayan terim, dalgayı sınırlama eğilimindeyken, dispersiyon terimi dalgayı yaymaya çalışır. Diğer bir ifadeyle, optik fiberler veya sıg su dalgaları gibi lineer olmayan ortamlarda, dispersiyonun sağladığı genişleme etkisi, lineer olmayan terimin yarattığı daralma etkisiyle dengelenebilir. Bu lineer olmayan ve dispersif terimler arasındaki denge, tek tepe noktasına sahip, soliton adı verilen kararlı dalga yapılarını oluşturur. Solitonların kararlılığı, lineer olmayan ve dispersif etkilerin bu hassas dengesinden kaynaklanır. Bu denklem, sonsuzda monoton azalan ve parçacık özellikleri gösteren soliton dalgalarını karakterize eden çözümler sağlar (Aydemir, 2016).

1955 yılında Fermi, Pasta ve Ulam, lineer olmayan bir boyutlu bir ızgarada enerji dağılımını incelemek amacıyla bir bilgisayar simülasyonu gerçekleştirmiştir. Bu çalışmada, lineer olmayan etkileşimlerin enerjiiyi tüm modlar arasında eşit bir şekilde dağıtacağı varsayılmıştır. Ancak, KdV denklemi üzerinde yapılan sayısal analizler bu varsayımı geçersiz kılmıştır. Enerjinin, sistemde eşit olmayan bir biçimde dağıldığı ve belirli bir süre sonra sistemin başlangıç durumuna geri döndüğü gözlemlenmiştir. Bu fenomen daha sonra literatüre “FPU problemi” olarak geçmiştir (Fermi vd., 1955; Arora vd., 2022). 1965 yılında Norman J. Zabusky ve Martin David Kruskal, FPU problemini yeniden ele alarak KdV denkleminin sayısal çözümlerini incelemişlerdir. Bu çalışma sonucunda, sonlu sayıda gezici dalgalardan oluşan çözümler ortaya konmuştur. Daha da önemlisi, bu dalgaların çarpışma sırasında şekil, boyut ve hızlarını korudukları, yani elastik çarpışma özellikleri sergiledikleri tespit edilmiştir. Protonlar ve elektronlar gibi kararlı parçacıklar özellikleri gösteren bu dalgalar, Zabusky ve Kruskal tarafından *soliton* olarak adlandırılmıştır (Zabusky ve Kruskal, 1965). Solitonların keşfinden yaklaşık iki yüzyıl önce Russell’ın yaptığı gözlemler ve Zabusky ile Kruskal’ın deneysel çalışmalarının üzerinden geçen elli yılın ardından, solitonlar, lineer olmayan sistemler ve diferansiyel denklemler alanında önemli bir araştırma konusu olmaya devam etmektedir (Boyce vd., 2017). Kruskal ve Zabusky’nin çalışması, soliton teorisinin gelişiminde kritik bir dönüm noktası olarak değerlendirilmiştir. Soliton kavramı, soliter dalgaların temel özelliklerini başarılı bir şekilde tanımlamış ve bilim camiasında geniş kabul görmüştür. Bu çalışmanın ardından, soliton teorisi hızla gelişmiş ve uluslararası düzeyde kapsamlı araştırmaların merkezinde yer almıştır (Chao hao, 2013). 1967 yılında ise Gardner ve

arkadaşları ise yukarıda bahsi geçen KdV gibi lineer olmayan evrim denklemlerini analitik olarak çözmek için Ters Saçılma Dönüşümü (Inverse Scattering Transform, IST) metodunu geliştirmişlerdir. Bu metot, integrallenebilir sistemlerde solitonların daha kapsamlı bir şekilde incelenmesine olanak tanımıştır (Singh ve Senthilnathan, 2024).

## 2.2.SOLİTONLARIN KULLANIM ALANLARI

Tarih boyunca dalga fenomeni, bilimsel araştırmaların temel taşlarından biri olmuştur. Müzikte ses frekanslarının keşfiyle başlayıp su kemerlerindeki akışkan hareketlerine kadar geniş bir uygulama alanı bulan dalga çözümleri, fiziksel büyüklüklerin zamana bağlı dinamik değişimlerini modellemekte ve çeşitli disiplinlerde teorik ve pratik araştırmalara katkı sunmaktadır (Kara, 2022). Dalga kavramı, fiziksel olayların farklı açılardan incelenmesine olanak tanıyan geniş kapsamlı bir olgudur. Su yüzeyinde gözlemlenen su dalgaları, aslında su yüzeyinin yeni bir denge durumuna geçiş süreci olarak tanımlanabilir ve bir cisim ya da ortamda meydana gelen herhangi bir sarsıntıya karşılık ortaya çıkan bu olay, dalga olarak ifade edilir (Duran, 2012). Doğadaki dalga hareketlerinde lineer olmama ve yayılım (dispersiyon) olguları, dalgaların dinamiğinde temel bir rol oynamaktadır (Odabaşı, 2015).

Lineer olmayan evrim ve dalga denklemlerinin çözümlenmesinde, genellikle ilk adım olarak gezici dalga çözümlerinin araştırılması tercih edilmektedir (Malfliet, 1996). Bu bağlamda lineer olmayan evrim denklemlerinin dikkat çekici ve özgün tekil dalga çözümleri olan solitonlar, önemli bir araştırma konusu olarak öne çıkmaktadır (Ullah ve Ali, 2024). Aynı zamanda, lineer olmayan problemlerin çözümünde bu denklemlerin analitik çözümlerinin bulunması da büyük bir önem arz etmektedir (Liu vd., 2001). Lineer olmayan evrim denklemleri; fizik, kimya, biyoloji, akışkanlar dinamiği, plazma fiziği ve optik fiberler gibi alanlarda lineer olmayan fiziksel süreçleri modellemek amacıyla yaygın olarak kullanılmaktadır. Doğadaki pek çok fiziksel olgu, bu denklemler aracılığıyla modellenmekte olup bu denklemlerin analitik çözümleri, fiziksel, biyokimyasal ve biyolojik süreçlerin dinamiklerinin anlaşılmasında kritik bir öneme sahiptir. Analitik çözümler, bu sistemlerin daha derinlemesine anlaşılmasına katkıda bulunurken, matematiksel modellerin çeşitli disiplinlerde geniş uygulama alanı bulmasını da mümkün kılmaktadır (Rani vd., 2019). Solitonlar, yapılarını ve genliklerini koruyarak gezici dalga paketleri olarak tanımlanmakta ve bu nedenle lineer olmayan sistemlerin

analizinde önemli bir yere sahiptir (Shakir vd., 2023). Solitonlar, kararlılık özellikleri ve çarpışma dinamikleri ile öne çıkan yapılar olup dispersif ve lineer olmayan etkilerin dengelenmesi sonucu oluşmaktadır (Jiang vd., 2016; Sakkaravarthi vd., 2020). Genlik ve yapılarını koruyarak yayılma yetenekleri sayesinde solitonlar, bir ortamda dağılıma veya kırınımına uğramayan yerelleşmiş ışık darbeleri olarak tanımlanmakta ve telekomünikasyon sektöründe uzun mesafeli bilgi iletiminde kritik bir rol oynamaktadır. Fiber optik hatlarda solitonların kullanımı, yüksek hızlı iletişim sistemlerinin gelişimini desteklemiş ve bu teknolojilerde önemli ilerlemeler sağlamıştır (Rehman vd., 2024). Bununla birlikte, optik solitonlar yalnızca telekomünikasyon alanında değil, ultra hızlı sinyal işleme, yoğun madde fiziği, plazma fiziği, biyofizik, akışkanlar dinamiği ve tıbbi görüntüleme gibi birçok fiziksel sistemde de geniş uygulama yelpazesine sahiptir (Alia vd., 2019; Murad vd., 2023).

### 3. BÖLÜM

#### SHARMA TASSO OLVER-BURGERS DENKLEMİ

##### 3.1.BURGERS DENKLEMİNİN TARİHÇESİ

Burgers denkleminin tarihsel temelleri, ilk olarak 1915 yılında Bateman'ın fiziksel bir bağlamda türettiği çalışmalara dayanmaktadır (Bateman, 1915). Daha sonra, Hollandalı matematikçi Johannes Martinus Burgers bu denklemi konveksiyon ve difüzyonun zıt etkilerinin etkileşimi sonucunda kanalda oluşan türbülanslı akışı modellemek amacıyla geliştirmiş ve bu nedenle literatürde Burgers denklemi olarak yerini almıştır (Burgers, 1948). Navier-Stokes denklemlerinin sadeleştirilmiş bir versiyonu olan Burgers denklemi, basınç gradyanı terimlerinin kaldırılmasıyla birlikte sıkıştırılmaz Navier-Stokes denklemlerine benzerlik gösterir (Gao ve Zou, 2017). Navier-Stokes denklemleri, 19. yüzyılda viskoz akışkanların hareketini modellemek için geliştirilmiş ve akışkan dinamiğinde merkezi bir konuma yerleşmiştir. Ancak bu denklemlerin analitik çözümlerinin zorluğu, matematiksel ve sayısal metotların geliştirilmesine ihtiyaç doğurmuştur (Shyaman vd., 2024). Burgers denklemiyle ilgili olarak, 1949 yılında Lagerstrom ve çalışma arkadaşları bu denklemin lineer ısı denklemi ile dönüştürülebileceğini keşfetmişlerdir. Bu dönüşüm, 1951 yılında Cole tarafından yayımlanmıştır. Aynı dönemde Hopf da bu dönüşümü bağımsız olarak keşfetmiş olup bu nedenle literatürde Cole-Hopf dönüşümü olarak bilinmektedir (Abd-el-Malek ve El-Mansi, 2000). Zamanla, daha karmaşık Burgers denklemleri üzerine de araştırmalar yapılmış ve bu çalışmalar denklemle ilgili teorik çerçeveyi genişletmiştir. Özellikle Curro, Donato ve Povzner (1992), genelleştirilmiş Burgers denklemi üzerine çalışmalar yaparak pertürbasyon metotlarını geliştirmişlerdir. Bu çalışmalar, Burgers denkleminin sadece fiziksel modellemelerde değil, teorik matematikte de önemli bir araç haline geldiğini göstermektedir (Sadek vd., 2024).

Burgers denklemi, lineer olmayan evrim denklemleri sınıfında yer alarak birçok temel fiziksel sürecin modellenmesinde önemli bir rol oynamaktadır (Sinai, 1992). Bu denklem, akışkanlar mekaniğinden türetilmiş bir evrim denklemi olup akışkanlar dinamiği, şok dalgaları teorisi ve çeşitli fiziksel süreçlerin modellenmesinde kritik bir

model olarak kabul edilmektedir. Bu denklem, sayısal ve analitik metotların geliştirilmesine zemin hazırlayan önemli bir araç olmakla birlikte, gaz dinamiği, akustik ve yol trafiği modellemesi gibi çeşitli uygulamalı matematik disiplinlerinde geniş bir kullanım alanı bulmaktadır (Khan, 2014; Sadek vd., 2024). Burgers denklemi, birinci dereceden dalga denklemi ile ısı iletimi denkleminin özelliklerini birleştirerek konveksiyon ve difüzyon arasındaki etkileşimi modellemekte etkili bir metot olarak kullanılmaktadır (Gao ve Zou, 2017).

Burgers hiyerarşisi aşağıdaki formda ifade edilebilir (Kudryashov, 2012).

$$u_t + \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial x} + u \right)^m u = 0, \quad (3.1.1)$$

burada  $\alpha$  denklemin parametresidir.

(3.1.1) denkleminde  $m = 1$  için Burgers denklemi elde edilir.

$$u_t + \alpha (u^2)_x + \alpha u_{xx} = 0.$$

$m = 2$  durumu ise Sharma Tasso Olver denklemi elde edilir.

$$u_t + \alpha (u^3)_x + \frac{3}{2} \alpha (u^2)_{xx} + \alpha u_{xxx} = 0.$$

### 3.2.SHARMA TASSO OLVER DENKLEMİNİN TARİHÇESİ

Sharma Tasso Olver (STO) modeli, Burgers hiyerarşisine ait lineer olmayan bir evrim denklemi olup, plazma fiziği, lineer olmayan optik ve kuantum alan teorisi gibi bilim ve mühendislik alanlarında, soliter dalgaların, özellikle fisyon ve füzyon mekanizmalarının açıklanmasında kullanılmaktadır (Sheikh vd., 2023). Solitonların dinamikleri bağlamında, bir solitonun iki veya daha fazla solitona ayrılması ya da birden fazla solitonun birleşerek tek bir soliton oluşturması mümkündür. Bu iki fenomen, literatürde sırasıyla soliton fisyonu ve soliton füzyonu olarak adlandırılmaktadır (Wang vd., 2004). Sharma ve Tasso, 1977 yılında Olver'in aynı yıl yayımladığı çalışmaya paralel olarak, önemli bir denklem ortaya koymuşlardır. Bu denklem, 1982 yılında literatürde STO denklemi olarak anılmaya başlanmıştır (Khana vd., 2024). STO denklemi KdV türü bir denklem olup lineer olmayan dalgaların evrimi ve etkileşimiyle ilgili birçok fiziksel olguyu modellemek amacıyla kullanılmaktadır. Sonsuz sayıda simetriye sahip olması ve bi-Hamiltonyen yapısı ile STO denklemi, çeşitli bağlamlarda lineer olmayan dalga modellerinin kesin çözümlerini üretmekte geniş bir kullanım alanı sunmaktadır (Zhang,

2016). STO denklemi, manyetik sıvıların termal iletkenliğinin incelenmesinde kritik bir rol oynamaktadır (Liu, 2021).

### 3.3.SHARMA TASSO OLVER-BURGERS DENKLEMİ

STOB denklemi, kökeni klasik Burgers denklemine dayanan ve Sharma, Tasso ve Olver tarafından ortaya konulan genelleştirilmiş Burgers denkleminin birleşiminden türetilmiştir (Hussain vd., 2024). Matematiksel ve fiziksel perspektiflerden yoğun şekilde incelenen bu denklemler, çeşitli karmaşık sistemlerin dinamiklerinin anlaşılmasına büyük katkı sağlamaktadır (Yan ve Lou, 2020). STOB denklemi, geniş çaplı uygulamalara sahip bir modelleme aracı olarak dikkat çekmektedir. Bu denklemin uyarlanabilirliği, lineer olmayan taşınım ve difüzyon süreçleri arasındaki etkileşimleri inceleyebilme kapasitesi ile öne çıkmaktadır. Bu sayede karmaşık dalga modelleri ve şok oluşumlarının kökenine dair önemli bilgiler sunmaktadır. STOB denkleminin çözümleri, sistemin özel koşullarına ve başlangıç şartlarına bağlı olarak gezici dalgalar, solitonlar, şoklar ve seyrekleşme dalgaları gibi farklı davranışlar sergileyebilir. Bu çeşitlilik, STOB denklemini karmaşık fiziksel sistemlerin davranışlarını anlamak ve öngörmek için kritik bir araç haline getirmektedir. Ayrıca bu tür fenomenlerin detaylı incelenmesi, sadece fiziksel sistemlerin davranışlarının daha iyi anlaşılmasına değil, aynı zamanda etkin kontrol stratejilerinin geliştirilmesine de olanak tanımaktadır (Hussain vd., 2024). Yan ve Lou (2020) çalışmalarında, birleşik olmayan bir sistemde STOB denklemini kullanarak yeni moleküler türlerin elde edilmesini hedeflemişlerdir. Bu bağlamda, STOB denklemi, belirli şartlar altında STO denklemi veya Burgers denklemi ile eş değer hale gelebilir. STOB denklemi şu şekilde formüle edilebilir.

$$u_t + a(3u_x^2 + 3u^2u_x + 3uu_{xx} + u_{xxx}) + b(2uu_x + u_{xx}) = 0. \quad (3.3.1)$$

$a=0$  durumunda denklem Burgers denklemi ile özdeşleşirken,  $b=0$  durumunda ise denklem STO denklemini temsil etmektedir.

STOB denklemi, lineer olmayan evrim denklemlerinin önemli bir üyesi olup çeşitli fiziksel fenomenlerin modellenmesinde kullanılmaktadır. Bu denklemin sağladığı esneklik ve geniş uygulama alanı, özellikle karmaşık fiziksel süreçlerin anlaşılması ve öngörülmesi açısından büyük önem taşımaktadır.

## 4. BÖLÜM

### ALT DENKLEM VE GELİŞTİRİLMİŞ ALT DENKLEM METODOLOJİSİ

Diferansiyel denklemlerin, özellikle lineer ve lineer olmayan evrim denklemlerinin çözümünde kullanılan çeşitli yöntemler; çözümün doğruluğu ve hesaplama verimliliği açısından kritik bir öneme sahiptir. Alt denklem metodu ve geliştirilmiş alt denklem metodu, bu metodolojilerin başında gelir ve belirli evrim denklemlerinin analitik çözümlerini elde etmek için yaygın olarak kullanılır. Alt denklem yönteminin temel prensibi, orijinal denklemi daha basit bir yapıya indirmek ve bu alt denklemlerin çözümleri üzerinden orijinal denkleme ulaşmaktır. Bu yaklaşım, denklemlerin çözümüne yönelik analitik bir yol sağlar ve parametreler aracılığıyla çözümün fiziksel anlamının daha derinlemesine keşfedilmesine olanak tanır. Alt denklem ve geliştirilmiş alt denklem metodolojileri, lineer olmayan evrim denklemlerinin çözümünde önemli bir yer tutar. Bu yöntemler, karmaşık sistemlerin analizini daha basit hale getirerek, daha hızlı ve doğru çözümler elde edilmesine imkân tanır. Ayrıca, fiziksel anlam taşıyan analitik çözümler sunarak mühendislik ve bilimsel araştırmalar için güçlü bir araç oluşturur. Bu yöntemlerin geliştirilmesi, daha karmaşık lineer olmayan problemlerin çözümüne katkı sağlamakta ve disiplinler arası uygulamalarda büyük önem taşımaktadır.

#### 4.1.ALT DENKLEM METODU

Alt denklem lineer olmayan evrim denklemlerinin analitik çözümleri için kullanılan etkili bir metottur. Bu metodun uygulanışına ilişkin temel adımlar, lineer olmayan denklemlerin karmaşık yapılarının sistematik sade bir şekilde çözümlenmesini sağlamak amacıyla aşağıda ayrıntılı olarak sunulmuştur.

Lineer olmayan evrim denklemlerinin çözümünde kullanılan alt denklem metodolojisini daha kapsamlı bir şekilde açıklamak gerekirse, bu denklemler aşağıdaki şekilde formüle edilmektedir:

Lineer olmayan evrim denklemi:

$$W(u, u_t, u_x, \dots) = 0, \quad (4.1.1)$$

şekilde ifade edilir.

$$u(x, t) = U = U(\xi), \quad \xi = kx - vt, \quad v \neq 0, \quad (4.1.2)$$

burada  $v$  dalga hızıdır ve  $k$  frekanstır. (4.1.1) denklemini çözmek (4.1.2) için dalga dönüşümü uygulandığında ele alınan denklem aşağıdaki gibi adi diferansiyel denklem formuna indirgenir.

$$P(U, UU', U'', \dots) = 0. \quad (4.1.3)$$

Bu yöntemde denklemin çözüm formu aşağıdaki gibi varsayılır.

$$U(\xi) = \sum_{i=0}^n \beta_i \phi^i(\xi), \quad \beta_n \neq 0, \quad (4.1.4)$$

burada  $\beta_i$ , ( $0 \leq i \leq n$ ) belirlenmesi gereken sabitlerdir ve  $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$  dengeleme terimi, dengeleme prensibine göre (4.1.3) denklemdeki en güçlü lineer olmayan terim ile en yüksek mertebeye sahip terim arasında dengeleme prensibine göre elde edilir.

$\phi(\xi)$  fonksiyonu, Riccati denklemini sağlar ve şu şekilde ifade edilir:

$$\phi'(\xi) = \mu + (\phi(\xi))^2, \quad \mu \in R. \quad (4.1.5)$$

Riccati denkleminin (4.1.5) bazı özel çözümleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} & -\sqrt{-\mu} \tanh(\sqrt{-\mu}\xi), & \mu < 0, \\ & -\sqrt{-\mu} \coth(\sqrt{-\mu}\xi), & \mu < 0, \\ & \sqrt{\mu} \tan(\sqrt{\mu}\xi), & \mu > 0, \\ & -\sqrt{\mu} \cot(\sqrt{\mu}\xi), & \mu > 0, \\ & -\frac{1}{\xi + r}, & \mu = 0 \quad (r \text{ sabittir}). \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

Lineer olmayan cebirsel denklem sistemini şu şekilde elde edilir: (4.1.3) denkleminde, (4.1.4) çözümü yerine yazılır ve (4.1.5) denklemi ise yüksek mertebeye sahip terimlerin mertebesini düşüren bir rol üstlenir. Bazı matematiksel operasyonlar sonrasında  $\phi(\xi)$ 'ye göre yeni sıfır polinom inşa edilir. İnşa edilen bu yapıdaki  $\phi^i(\xi)$  katsayıları sıfıra eşitlenir ve bir denklem sistemi elde edilir. Hazır bir paket programı kullanarak bu denklem sisteminin çözümü elde edilir ve elde edilen veriler (4.1.4) ile kabul edilen çözümde yerlerine yazılır ve (4.1.3) denkleminin çözümüne ulaşılır. Son

olarak (4.1.2) dönüşümü tersine işletilerek (4.1.1) denkleminin gezici dalga çözümü elde edilir.

#### 4.2.GELİŞTİRİLMİŞ ALT DENKLEM METODU

(4.1) bölümünde ele alınan alt denklem metodunun işleyişine benzer şekilde (4.1.1) ile sunulan lineer olmayan evrim denkleminde (4.1.2) ile gösterilen dalga dönüşümü uygulandığında (4.1.3) formunda sunulan adi diferansiyel denklem elde edilebilir.

(4.1.3) denklemin temsili çözümünün aşağıdaki gibi olduğunu varsayalım.

$$U(\xi) = \beta_0 + \sum_{i=1}^n (\beta_i \varphi^i(\xi) + \beta_{-i} \varphi^{-i}(\xi)), \quad (4.2.1)$$

burada  $\beta_n$  katsayılarından en az biri sıfırdan farklıdır.  $\beta_i$ ,  $(0 \leq i \leq n)$  belirlenecek sabitlerdir.

$n \in \{1, 2, 3, \dots\}$  dengeleme terimi, dengeleme prensibine göre (4.1.3) denkleminde elde edilir. (4.2.1) ile sunulan çözüm (4.1.3) denkleminde yerine yazılır ve bazı matematiksel operasyonlardan sonra  $\varphi(\xi)$ 'ye bağlı polinom oluşturulur. Bu polinomun katsayıları sıfıra eşitlenerek cebirsel bir denklem sistemi oluşturulur. Bu denklem sistemi hazır paket programlar yardımıyla çözülerek aranan sabitler hesaplanır. Hesaplama sonucu elde edilen sabitler (4.2.1) denkleminde yerine yazılır ve (4.1.3) denkleminin çözümüne ulaşılır. Son olarak kullanılan (4.1.2) dönüşümü tersine işletilerek (4.1.1) denkleminin gezici dalga çözümü inşa edilmiş olur.

## 5. BÖLÜM

### ÇÖZÜMLER

#### 5.1.SHARMA TASSO OLVER-BURGERS DENKLEMİNE ALT DENKLEM METODUNUN UYGULANMASI

Bu bölümde alt denklem metodu, STOB denklemine uygulandı. (3.3.1) denklemi ile verilen STOB denklemini düşünelim. Açılım metotlarının genel işleyişinde kısmi diferansiyel denklemi adi diferansiyel denkleme dönüştürmek için aşağıdaki denklem kullanılır.

$$u(x,t) = U = U(\xi), \quad \xi = kx - vt, \quad v \neq 0. \quad (5.1.1)$$

Karmaşık sistemlerin davranışını anlamak ve çözmek için kullanılan önemli araçlardan biriside açılım metotlarıdır. Bu açılım metotlarının genel işleyişinde, kısmi diferansiyel denklemler genellikle adi diferansiyel denklemlere dönüştürülerek daha sade bir forma indirgenir. Bu dönüşüm, denklemin çözüm alanının boyutunu azaltarak analitik ya da sayısal çözümleme işlemlerini kolaylaştırır. Örneğin, belirli bir değişkenin veya parametrenin etkilerinin ayrıştırılması, sistemin genel davranışını daha açık ve yönetilebilir bir şekilde açıklayan bir modelin oluşturulmasına olanak tanır. Böylece, karmaşık problemler kolay anlaşılır hale gelir ve çözüm süreci daha hızlanmış olur. Bu yaklaşım, mühendislik, fizik ve matematik gibi birçok alanda yaygın olarak kullanılmaktadır.

Sonuç olarak, bu dalga dönüşüm yöntemi, karmaşık dalga süreçlerinin derinlemesine ve sistematik bir şekilde incelenmesine olanak tanıyarak, teorik ile pratik bilimler arasında önemli bir bağ kurmaktadır.

(3.3.1) denklemine analitik çözüm yönteminin uygulanabilmesi amacıyla (5.1.1) ile verilen dalga dönüşümü esas alınmıştır. Bu kapsamda, bağımsız değişken olarak  $\xi = kx - vt$ , bağımlı değişken olarak ise  $U(\xi) = u(x,t)$  dönüşümü tanımlanmıştır. Yapılan bu dönüşümler sonucunda, zamana ve uzaya bağlı türevler yalnızca  $\xi$  değişkeni cinsinden ifade edilecek biçimde yeniden düzenlenmiştir ve böylece kısmi diferansiyel denklem çözüm üretimine elverişli bir adi diferansiyel denklem formuna indirgenmiştir.

Bu doğrultuda denklemde yer alan türevler,

$$u_t = -vU'(\xi),$$

$$u_x = kU'(\xi),$$

$$u_{xx} = k^2U''(\xi),$$

$$u_{xxx} = k^3U'''(\xi),$$

$$u_x^2 = k^2U'^2(\xi),$$

$$u^2u_x = kU^2(\xi)U'(\xi),$$

$$uu_{xx} = k^2U(\xi)U''(\xi),$$

$$uu_x = kU(\xi)U'(\xi),$$

şeklindedir.

Bu ifadelerin (3.3.1) denkleminde yerine konulmasıyla birlikte, denklemin yapısı önemli ölçüde sadeleştirilmiş ve elde edilen form, seçilen analitik çözüm yöntemlerinin uygulanmasına olanak tanıyacak şekilde uygun hale getirilmiştir.

(5.1.1) ile sunulan dalga dönüşümü denklem (3.3.1)'e uygulanır ve bir kez integral alınırsa aşağıdaki adi diferansiyel denklemi elde edilir.

$$c - vU + bkU^2 + akU^3 + k^2(b + 3U)U' + k^3U'' = 0, \quad (5.1.2)$$

burada  $c$  integral sabitidir.

(5.1.2) denklemindeki  $U''$  ve  $U^3$  terimlerinden dengeleme prensibi gereği  $n=1$  elde edilir. (3.3.1) denkleminin (4.1.4) ile verilen çözüm fonksiyonunda yerine yazılırsa

$$U(\xi) = \beta_0 + \beta_1\varphi(\xi), \quad \beta_1 \neq 0, \quad (5.1.3)$$

yazılabilir. (5.1.3)'te verilen çözüm (5.1.2)'de verilen denklemde dikkate alınarak gerekli türevler alınır ve  $\beta_i, (0 \leq i \leq n)$  polinomunun katsayıları sıfıra eşitlenerek

$$\left. \begin{aligned} (\varphi(\xi))^0: & \quad c - v\beta_0 + bk\beta_0^2 + ak\beta_0^3 + bk^2\mu\beta_1 + 3k^2\mu\beta_0\beta_1 = 0, \\ (\varphi(\xi))^1: & \quad -v\beta_1 + 2k^3\mu\beta_1 + 2bk\beta_0\beta_1 + 3ak\beta_0^2\beta_1 + 3k^2\mu\beta_1^2 = 0, \\ (\varphi(\xi))^2: & \quad bk^2\beta_1 + 3k^2\beta_0\beta_1 + bk\beta_1^2 + 3ak\beta_0\beta_1^2 = 0, \\ (\varphi(\xi))^3: & \quad 2k^3\beta_1 + 3k^2\beta_1^2 + ak\beta_1^3 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.1.4)$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. (5.1.4) ile sunulan denklem sistemlerinin bilgisayar paket programı yardımı ile çözülmesiyle;

**Durum 1:**

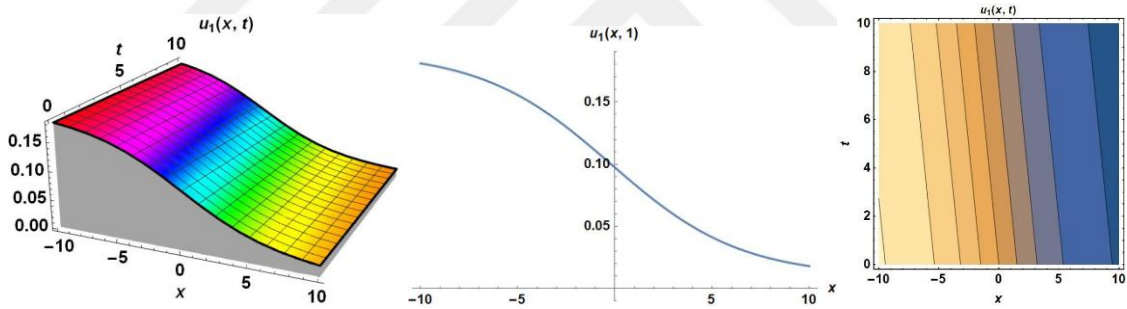
$$c = -\frac{4k^3\beta_0(\beta_0^2 + \mu\beta_1^2)}{\beta_1^2}, \quad v = \frac{k^2(-6k\beta_0^2 + 3\beta_0^2\beta_1 + 2k\mu\beta_1^2 + 3\mu\beta_1^3)}{\beta_1^2}, \quad b = \frac{6k\beta_0}{\beta_1},$$

$$a = \frac{-2k^2 - 3k\beta_1}{\beta_1^2},$$
(5.1.5)

elde edilen çözümler (5.1.3)'te yerine yazılırsa (3.3.1) ile verilen denklemin tam çözümü

$$u_1(x, t) = \beta_0 - \sqrt{-\mu}\beta_1 \tanh \left[ \sqrt{-\mu} \left( kx - \frac{k^2 t (-6k\beta_0^2 + 3\beta_0^2\beta_1 + 2k\mu\beta_1^2 + 3\mu\beta_1^3)}{\beta_1^2} \right) \right],$$
(5.1.6)

elde edilir. Dalga dönüşümü ve açılım yöntemi kullanılarak STOB denkleminin analitik çözümü, denklem (5.1.6) ile ifade edilmiştir. Bu çözümde, sabit parametrelerin seçimi, çözümün genlik, hız ve profil yapısının şekillenmesinde belirleyici rol oynamaktadır. Parametrelerin doğru bir şekilde belirlenmesi, çözümün fiziksel anlamlılığını ve geçerliliğini sağlamak için hayati önem taşır. Aşağıdaki grafik, belirli parametre değerlerine göre sistemin karakteristik davranışını görsel olarak temsil etmekte olup, bu parametrelerin çözüm üzerindeki etkilerini açıkça göstermektedir.



Şekil 2. (5.1.6) çözümündeki  $\beta_0 = 0.1$ ,  $\beta_1 = 0.9$ ,  $k = 1.5$ ,  $\mu = -0.01$  sabitleri için (3.3.1) denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri

Denklem (5.1.6) ile sunulan gezici dalga çözümü, tanh fonksiyonu içerdiğinden kink tipi soliton yapısını temsil etmektedir. Şekil 2 analiz edildiğinde kink soliton özelliğini yansıtan bir seviyeden başka bir seviyeye geçişi gözlemlenebilir.

**Durum 2:**

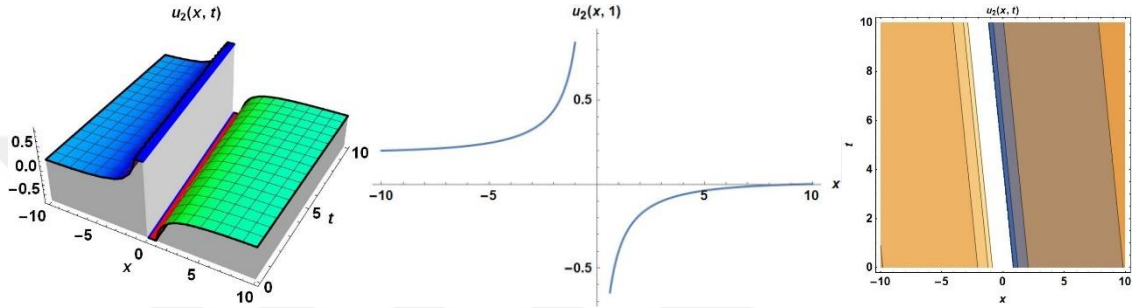
$$c = -\frac{4k^3\beta_0(\beta_0^2 + \mu\beta_1^2)}{\beta_1^2}, \quad v = \frac{k^2(-6k\beta_0^2 + 3\beta_0^2\beta_1 + 2k\mu\beta_1^2 + 3\mu\beta_1^3)}{\beta_1^2}, \quad b = \frac{6k\beta_0}{\beta_1},$$

$$a = \frac{-2k^2 - 3k\beta_1}{\beta_1^2},$$
(5.1.7)

elde edilen çözümler (5.1.3)'te yerine yazılırsa (3.3.1) ile verilen denklemin tam çözümü

$$u_2(x, t) = \beta_0 - \sqrt{-\mu} \coth \left[ \sqrt{-\mu} \left( kx - \frac{k^2 t (-6k\beta_0^2 + 3\beta_0^2\beta_1 + 2k\mu\beta_1^2 + 3\mu\beta_1^3)}{\beta_1^2} \right) \right] \beta_1, \quad (5.1.8)$$

elde edilir. (5.1.8) ile sunulan çözümdeki sabit parametrelerin seçimi, çözümün genlik, hız ve profil yapısının şekillenmesinde belirleyici rol oynamaktadır. Parametrelerin doğru bir şekilde belirlenmesi, çözümün fiziksel anlamlılığını ve geçerliliğini sağlamak için hayati önem taşır. Aşağıdaki grafik, belirli parametre değerlerine göre sistemin karakteristik davranışını görsel olarak temsil etmekte olup, bu parametrelerin çözüm üzerindeki etkilerini açıkça göstermektedir.



Şekil 3. (5.1.8) çözümündeki  $\beta_0 = 0.1$ ,  $\beta_1 = 0.9$ ,  $k = 1.5$ ,  $\mu = -0.01$  sabitleri için (3.3.1) denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri

Denklem (5.1.8) ile sunulan gezici dalga çözümü, tekillik barındıran coth tipinde bir yapı sergilemektedir.

### Durum 3:

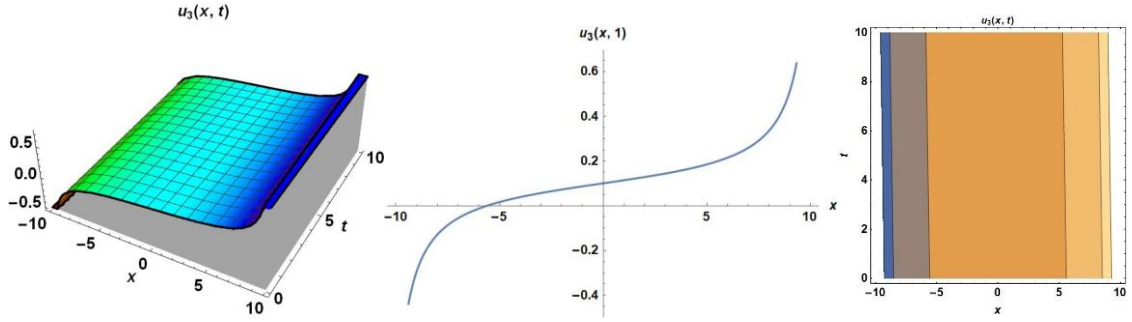
$$c = -\frac{4k^3\beta_0(\beta_0^2 + \mu\beta_1^2)}{\beta_1^2}, \quad v = \frac{k^2(-6k\beta_0^2 + 3\beta_0^2\beta_1 + 2k\mu\beta_1^2 + 3\mu\beta_1^3)}{\beta_1^2}, \quad b = \frac{6k\beta_0}{\beta_1}, \quad (5.1.9)$$

$$a = \frac{-2k^2 - 3k\beta_1}{\beta_1^2},$$

elde edilen çözümler (5.1.3)'te yerine yazılırsa (3.3.1) ile verilen denklemin tam çözümü

$$u_3(x, t) = \beta_0 - \sqrt{\mu}\beta_1 \tan \left[ \frac{k\sqrt{\mu}(3kt\beta_0^2(-2k + \beta_1) + \beta_1^2(-x + 2k^2t\mu + 3kt\mu\beta_1))}{\beta_1^2} \right], \quad (5.1.10)$$

elde edilir. (5.1.10) ile sunulan çözümdeki sabit parametrelerin seçimi, çözümün genlik, periyodik yapı ve tekillik noktalarının konumunun belirlenmesinde kritik rol oynamaktadır. Parametrelerin doğru biçimde belirlenmesi, çözümün fiziksel anlamlılığını ve geçerliliğini sağlamak açısından önemlidir. Aşağıdaki grafik, belirli parametre değerlerine göre sistemin periyodik dalga davranışını görsel olarak temsil etmekte ve bu parametrelerin çözüm üzerindeki etkilerini açıkça göstermektedir.



Şekil 4. (5.1.10) çözümündeki  $\beta_0 = 0.1$ ,  $\beta_1 = 0.9$ ,  $k = 1.5$ ,  $\mu = 0.01$  sabitleri için (3.3.1) denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri

Denklem (5.1.10) ile sunulan gezici dalga çözümü, hem periyodik özellik göstermekte hem de belirli noktalarda tekillik (sonsuzluk) içermektedir.

**Durum 4:**

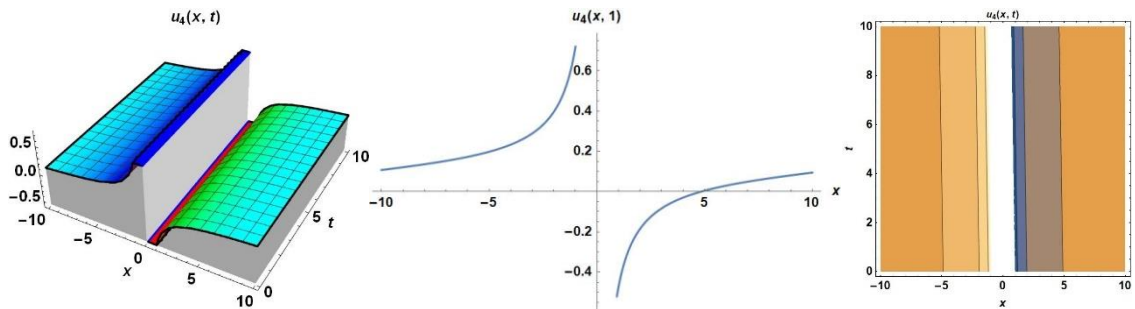
$$c = -\frac{4k^3\beta_0(\beta_0^2 + \mu\beta_1^2)}{\beta_1^2}, \quad v = \frac{k^2(-6k\beta_0^2 + 3\beta_0^2\beta_1 + 2k\mu\beta_1^2 + 3\mu\beta_1^3)}{\beta_1^2}, \quad b = \frac{6k\beta_0}{\beta_1}, \quad (5.1.11)$$

$$a = \frac{-2k^2 - 3k\beta_1}{\beta_1^2},$$

elde edilen çözümler (5.1.3)'te yerine yazılırsa (3.3.1) ile verilen denklemin tam çözümü

$$u_4(x, t) = \beta_0 + \sqrt{\mu} \cot \left[ \frac{k\sqrt{\mu}(3kt\beta_0^2(-2k + \beta_1) + \beta_1^2(-x + 2k^2t\mu + 3kt\mu\beta_1))}{\beta_1^2} \right] \beta_1, \quad (5.1.12)$$

elde edilir. (5.1.12) ile sunulan çözümdeki sabit parametrelerin seçimi, çözümün genlik, periyodik tekrarlar ve tekillik davranışının şekillenmesinde belirleyici rol oynamaktadır. Parametrelerin uygun şekilde seçilmesi, çözümün fiziksel geçerliliği ve tutarlılığı açısından önem taşımaktadır. Aşağıdaki grafik, farklı parametre değerleri altında sistemin karakteristik davranışını görsel olarak ortaya koymakta ve bu değişimlerin çözüm üzerindeki etkilerini açıkça göstermektedir.



Şekil 5. (5.1.12) çözümündeki  $\beta_0 = 0.1$ ,  $\beta_1 = 0.9$ ,  $k = 1.5$ ,  $\mu = 0.01$  sabitleri için (3.3.1) denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri

Denklem (5.1.12) ile sunulan gezici dalga çözümü, periyodik özellikler gösteren ve tekillik içeren yapıya sahip bir dalga formu sergilemektedir.

**Durum 5:**

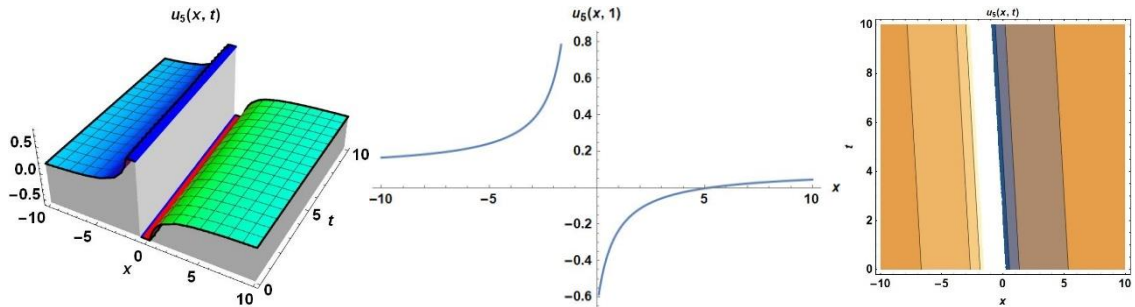
$$\mu = 0, \quad c = -\frac{4k^3\beta_0(\beta_0^2 + \mu\beta_1^2)}{\beta_1^2}, \quad v = \frac{k^2(-6k\beta_0^2 + 3\beta_0^2\beta_1 + 2k\mu\beta_1^2 + 3\mu\beta_1^3)}{\beta_1^2}, \quad (5.1.13)$$

$$b = \frac{6k\beta_0}{\beta_1}, \quad a = \frac{-2k^2 - 3k\beta_1}{\beta_1^2},$$

elde edilen çözümler (5.1.3)'te yerine yazılırsa (3.3.1) ile verilen denklemin tam çözümü

$$u_s(x, t) = \beta_0 - \frac{\beta_1^3}{3k^2t\beta_0^2(2k - \beta_1) + (r + kx)\beta_1^2}, \quad (5.1.14)$$

elde edilir. (5.1.14) ile elde edilen çözümdeki sabit parametrelerin seçimi, dalga formunun genliği, darbe benzeri yoğunlaşmaların konumu ve profilin zamana bağlı değişiminin belirlenmesinde önemli rol oynamaktadır. Parametrelerin doğru bir şekilde belirlenmesi, çözümün fiziksel olarak anlamlı ve uygulanabilir olmasını sağlamaktadır. Aşağıdaki grafik, belirli parametre değerlerine göre çözümün zamana ve mekâna bağlı davranışını görsel olarak temsil etmekte ve bu parametrelerin çözüm üzerindeki etkilerini ayrıntılı biçimde göstermektedir.



Şekil 6. (5.1.14) çözümündeki  $\beta_0 = 0.1$ ,  $\beta_1 = 0.9$ ,  $k = 1.5$ ,  $r = 1$  sabitleri için (3.3.1) denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri

Denklem (5.1.14) ile sunulan gezici dalga çözümü rasyonel yapıya sahip bir dalga formu sergilemektedir.

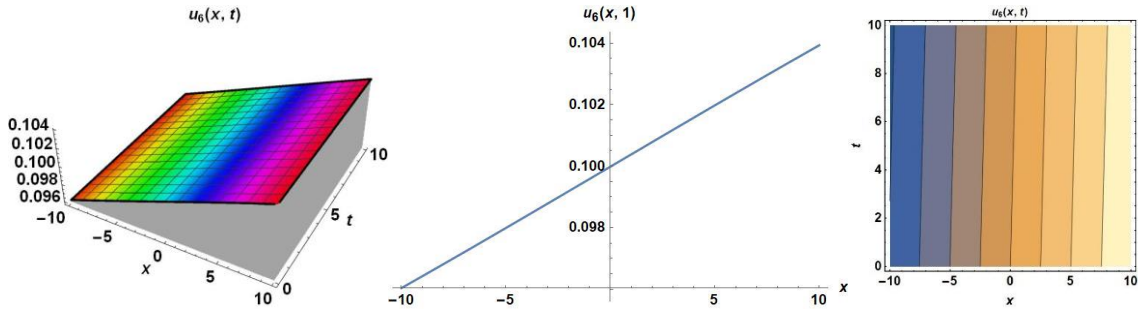
**Durum 6:**

$$\beta_1 = -k, \quad c = k(b + 2\beta_0)(k^2\mu + \beta_0^2), \quad v = -k^3\mu + 2bk\beta_0 + 3k\beta_0^2, \quad a = 1, \quad (5.1.15)$$

elde edilen çözümler (5.1.3)'te yerine yazılırsa (3.3.1) ile verilen denklemin tam çözümü

$$u_6(x, t) = \beta_0 + k\sqrt{-\mu} \tanh\left[\sqrt{-\mu}\left(kx - t(-k^3\mu + 2bk\beta_0 + 3k\beta_0^2)\right)\right], \quad (5.1.16)$$

elde edilir.



Şekil 7. (5.1.16) çözümündeki  $\beta_0 = 0.1$ ,  $b = 0.1$ ,  $k = 0.2$ ,  $\mu = -0.01$  sabitleri için (3.3.1) denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri

Denklem (5.1.16) ile sunulan gezici dalga çözümü, hiperbolik yapıya sahip kink tipi bir soliton dalga formu sergilemektedir.

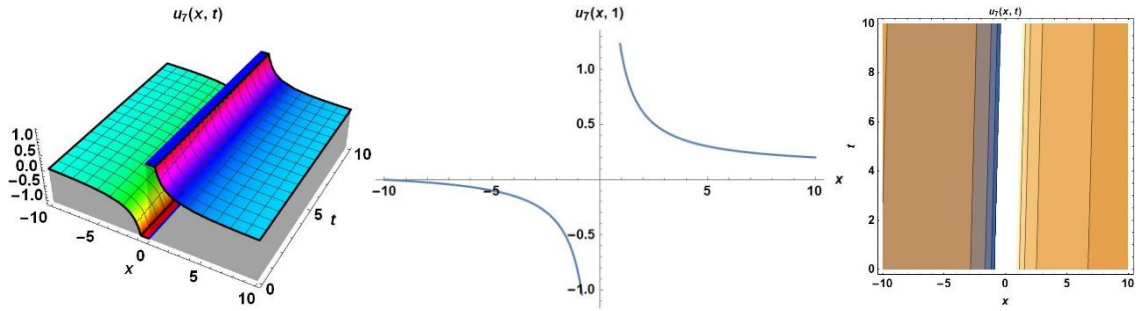
**Durum 7:**

$$\beta_1 = -k, \quad c = k(b + 2\beta_0)(k^2\mu + \beta_0^2), \quad v = -k^3\mu + 2bk\beta_0 + 3k\beta_0^2, \quad a = 1, \quad (5.1.17)$$

elde edilen çözümler (5.1.3)'te yerine yazılırsa (3.3.1) ile verilen denklemin tam çözümü

$$u_7(x, t) = k\sqrt{-\mu} \coth\left[\sqrt{-\mu}\left(kx - t(-k^3\mu + 2bk\beta_0 + 3k\beta_0^2)\right)\right] + \beta_0, \quad (5.1.18)$$

elde edilir.



Şekil 8. (5.1.18) çözümündeki  $\beta_0 = 0.1$ ,  $b = 0.1$ ,  $k = 0.2$ ,  $\mu = -0.01$  sabitleri için (3.3.1) denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri

Denklem (5.1.18) ile sunulan gezici dalga çözümü, hiperbolik formda olup tekillik içermektedir. Bu tekillik asimptotik davranışlarda ve şok dalga yapısında önemlidir.

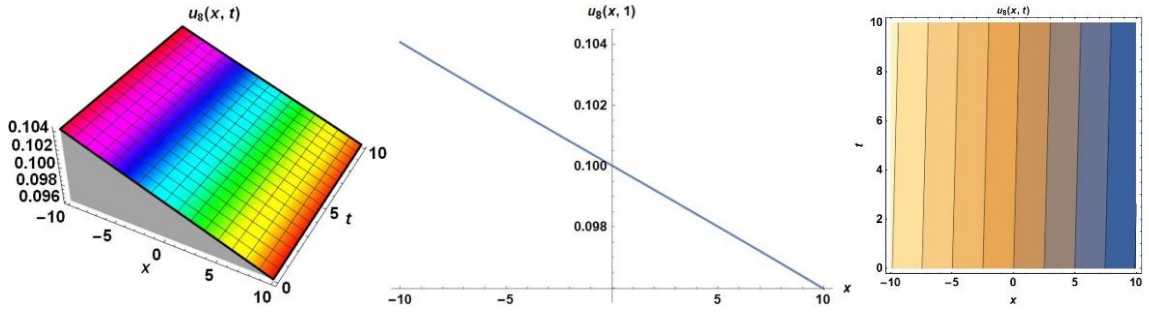
**Durum 8:**

$$\beta_1 = -k, \quad c = k(b + 2\beta_0)(k^2\mu + \beta_0^2), \quad v = -k^3\mu + 2bk\beta_0 + 3k\beta_0^2, \quad a = 1, \quad (5.1.19)$$

elde edilen çözümler (5.1.3)'te yerine yazılırsa (3.3.1) ile verilen denklemin tam çözümü

$$u_8(x, t) = \beta_0 - k\sqrt{\mu} \tan \left[ \sqrt{\mu} \left( kx - t(-k^3\mu + 2bk\beta_0 + 3k\beta_0^2) \right) \right], \quad (5.1.20)$$

elde edilir.



Şekil 9. (5.1.20) çözümündeki  $\beta_0 = 0.1$ ,  $b = 0.1$ ,  $k = 0.2$ ,  $\mu = 0.01$  sabitleri için (3.3.1) denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri

Denklem (5.1.20) ile sunulan gezici dalga çözümü, periyodik ve tekillik taşıyan dalga fonksiyonu içermektedir.

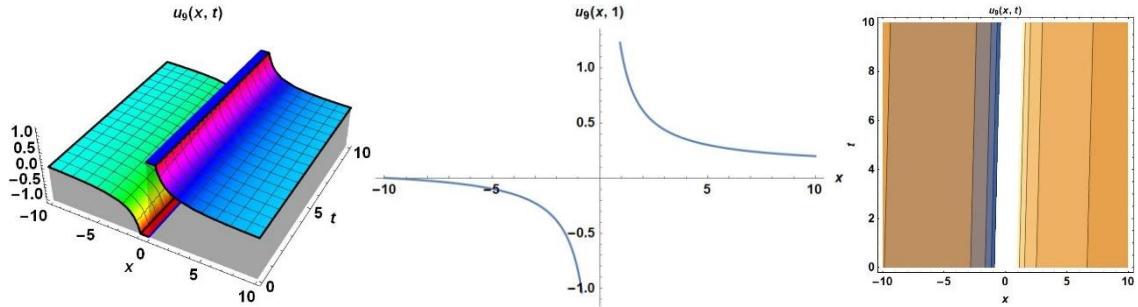
**Durum 9:**

$$\beta_1 = -k, \quad c = k(b + 2\beta_0)(k^2\mu + \beta_0^2), \quad v = -k^3\mu + 2bk\beta_0 + 3k\beta_0^2, \quad a = 1, \quad (5.1.21)$$

elde edilen çözümler (5.1.3)'te yerine yazılırsa (3.3.1) ile verilen denklemin tam çözümü

$$u_9(x, t) = k\sqrt{\mu} \cot \left[ \sqrt{\mu} \left( kx - t(-k^3\mu + 2bk\beta_0 + 3k\beta_0^2) \right) \right] + \beta_0, \quad (5.1.22)$$

elde edilir.



Şekil 10. (5.1.22) çözümündeki  $\beta_0 = 0.1$ ,  $b = 0.1$ ,  $k = 0.2$ ,  $\mu = 0.01$  sabitleri için (3.3.1) denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri

Denklem (5.1.22) ile sunulan gezici dalga çözümü tekilliğe sahip periyodik dalga fonksiyonu içermektedir.

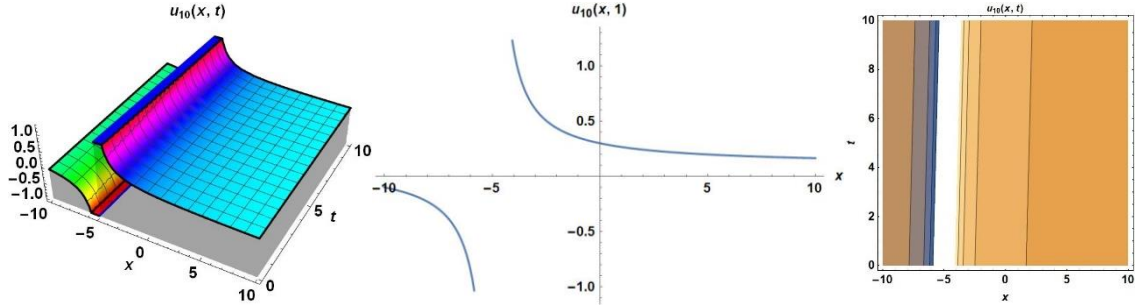
**Durum 10:**

$$\mu = 0, \quad \beta_1 = -k, \quad c = k(b + 2\beta_0)(k^2\mu + \beta_0^2), \quad v = -k^3\mu + 2bk\beta_0 + 3k\beta_0^2, \quad a = 1, \quad (5.1.23)$$

elde edilen çözümler (5.1.3)'te yerine yazılırsa (3.3.1) ile verilen denklemin tam çözümü

$$u_{10}(x, t) = \beta_0 + \frac{k}{r + kx - kt\beta_0(2b + 3\beta_0)}, \quad (5.1.24)$$

elde edilir.



Şekil 11. (5.1.24) çözümündeki  $\beta_0 = 0.1$ ,  $b = 0.1$ ,  $k = 0.2$ ,  $r = 1$  sabitleri için (3.3.1) denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri

Denklem (5.1.24) ile sunulan gezici dalga çözümü, zamana bağlı rasyonel yapıda bir dalga formu sergilemektedir.

## 5.2.SHARMA TASSO OLVER-BURGERS DENKLEMİNE GELİŞTİRİLMİŞ ALT DENKLEM METODUNUN UYGULANMASI

STOB denkleminin geliştirilmiş alt denklem metodu ile çözümünü elde edebilmek için (5.1.1) klasik dalga dönüşümü (3.3.1) denklemine uyguladıktan sonra elde edilen (5.1.2) denkleminin dengeleme terimi  $n = 1$  olduğu açık bir şekilde (5.1) bölümde ifade edilmiştir.  $n = 1$  dengeleme terimi (4.2.1) denkleminde yerine yazıldığında aşağıdaki çözüm elde edilir.

$$U(\xi) = \beta_0 + \beta_1 \varphi(\xi) + \beta_2 \frac{1}{\varphi(\xi)}, \quad (5.2.1)$$

yazılabilir. (5.2.1) ile sunulan çözüm (5.1.2)'de yerine yazılır ve gerekli işlemler yapıldıktan sonra aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$\left. \begin{aligned}
(\varphi(\xi))^0 : & \quad c - v\beta_0 + bk\beta_0^2 + ak\beta_0^3 + bk^2\mu\beta_1 + 3k^2\mu\beta_0\beta_1 - bk^2\beta_2 \\
& \quad - 3k^2\beta_0\beta_2 + 2bk\beta_1\beta_2 + 6ak\beta_0\beta_1\beta_2 = 0, \\
\frac{1}{(\varphi(\xi))^1} : & \quad -v\beta_2 + 2k^3\mu\beta_2 + 2bk\beta_0\beta_2 + 3ak\beta_0^2\beta_2 - 3k^2\beta_2^2 + 3ak\beta_1\beta_2^2 = 0, \\
\frac{1}{(\varphi(\xi))^2} : & \quad -bk^2\mu\beta_2 - 3k^2\mu\beta_0\beta_2 + bk\beta_2^2 + 3ak\beta_0\beta_2^2 = 0, \\
\frac{1}{(\varphi(\xi))^3} : & \quad 2k^3\mu^2\beta_2 - 3k^2\mu\beta_2^2 + ak\beta_2^3 = 0, \\
(\varphi(\xi))^1 : & \quad -v\beta_1 + 2k^3\mu\beta_1 + 2bk\beta_0\beta_1 + 3ak\beta_0^2\beta_1 + 3k^2\mu\beta_1^2 + 3ak\beta_1^2\beta_2 = 0, \\
(\varphi(\xi))^2 : & \quad bk^2\beta_1 + 3k^2\beta_0\beta_1 + bk\beta_1^2 + 3ak\beta_0\beta_1^2 = 0, \\
(\varphi(\xi))^3 : & \quad 2k^3\beta_1 + 3k^2\beta_1^2 + ak\beta_1^3 = 0,
\end{aligned} \right\} \quad (5.2.2)$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. (5.2.2) ile sunulan denklem sistemlerinin bilgisayar paket programı yardımı ile çözülmesiyle;

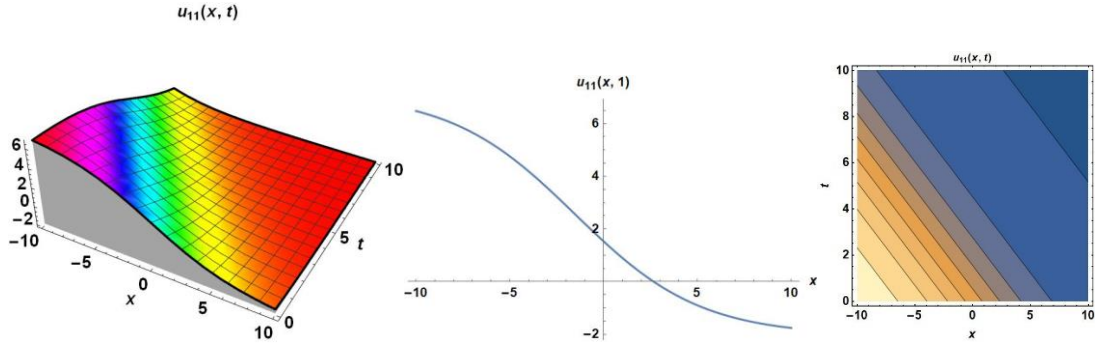
**Durum 1:**

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= \frac{-3b - \sqrt{9b^2 - 8ab^2}}{12a}, \quad \beta_1 = \frac{-\frac{3bk}{a} - \frac{\sqrt{-((-9+8a)b^2)}k}{a}}{2b}, \quad \beta_2 = 0, \\
v &= \frac{-4b^3k - \frac{3b^3k}{a} - \frac{b^2\sqrt{-((-9+8a)b^2)}k}{a} + 48bk^3\mu - \frac{108bk^3\mu}{a} - \frac{36\sqrt{-((-9+8a)b^2)}k^3\mu}{a}}{24b}, \\
c &= \frac{1}{108} \left( \frac{3b^3k}{a} + \frac{b^2\sqrt{-((-9+8a)b^2)}k}{a} + \frac{108bk^3\mu}{a} + \frac{36\sqrt{-((-9+8a)b^2)}k^3\mu}{a} \right),
\end{aligned} \quad (5.2.3)$$

elde edilen çözümler (5.2.1)'de yerine yazılırsa (3.3.1) ile verilen denklemin tam çözümü

$$u_{11}(x,t) = \frac{-3b - \sqrt{9b^2 - 8ab^2}}{12a} - \frac{1}{2b} \left( -\frac{3bk}{a} - \frac{\sqrt{-((-9+8a)b^2)}k}{a} \right) \sqrt{-\mu} \tanh \left[ \sqrt{-\mu} \left( kx - \frac{t \left( -4b^3k - \frac{3b^3k}{a} - \frac{b^2\sqrt{-((-9+8a)b^2)}k}{a} + 48bk^3\mu - \frac{108bk^3\mu}{a} - \frac{36\sqrt{-((-9+8a)b^2)}k^3\mu}{a} \right)}{24b} \right) \right] \quad (5.2.4)$$

elde edilir.



Şekil 12. (5.2.4) çözümündeki  $a = -0.1$ ,  $b = 0.5$ ,  $k = -1.5$ ,  $\mu = -0.01$  sabitleri için (3.3.1) denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri

Denklem (5.2.4) ile sunulan gezici dalga çözümü, hiperbolik yapıya sahip kink tipi bir soliton dalga formu sergilemektedir.

### Durum 2:

$$\beta_0 = \frac{-3b - \sqrt{9b^2 - 8ab^2}}{12a}, \quad \beta_1 = \frac{-\frac{3bk}{a} - \frac{\sqrt{-((-9+8a)b^2)k}}{a}}{2b}, \quad \beta_2 = 0,$$

$$v = \frac{-4b^3k - \frac{3b^3k}{a} - \frac{b^2\sqrt{-((-9+8a)b^2)k}}{a} + 48bk^3\mu - \frac{108bk^3\mu}{a} - \frac{36\sqrt{-((-9+8a)b^2)k^3\mu}}{a}}{24b},$$

$$c = \frac{1}{108} \left( \frac{3b^3k}{a} + \frac{b^2\sqrt{-((-9+8a)b^2)k}}{a} + \frac{108bk^3\mu}{a} + \frac{36\sqrt{-((-9+8a)b^2)k^3\mu}}{a} \right),$$

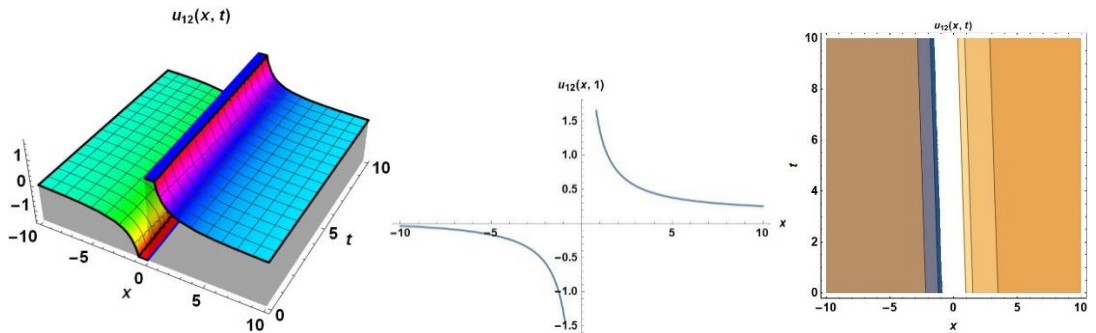
(5.2.5)

elde edilen çözümler (5.2.1)'de yerine yazılırsa (3.3.1) ile verilen denklemin tam çözümü

$$u_{12}(x, t) = \frac{-3b - \sqrt{9b^2 - 8ab^2}}{12a} - \frac{1}{2b} \left( -\frac{3bk}{a} - \frac{\sqrt{-((-9+8a)b^2)k}}{a} \right) \sqrt{-\mu} \coth \left[ \sqrt{-\mu} \left( kx - \frac{t \left( -4b^3k - \frac{3b^3k}{a} - \frac{b^2\sqrt{-((-9+8a)b^2)k}}{a} + 48bk^3\mu - \frac{108bk^3\mu}{a} - \frac{36\sqrt{-((-9+8a)b^2)k^3\mu}}{a} \right)}{24b} \right) \right],$$

(5.2.6)

elde edilir.



Şekil 13. (5.2.6) çözümündeki  $a = \frac{9}{8}$ ,  $b = -0.5$ ,  $k = 0.5$ ,  $\mu = -0.01$  sabitleri için (3.3.1)

denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri

Denklem (5.2.6) ile sunulan gezici dalga çözümü, tekilliğe sahip hiperbolik formda gezici dalga çözümünü temsil eder.

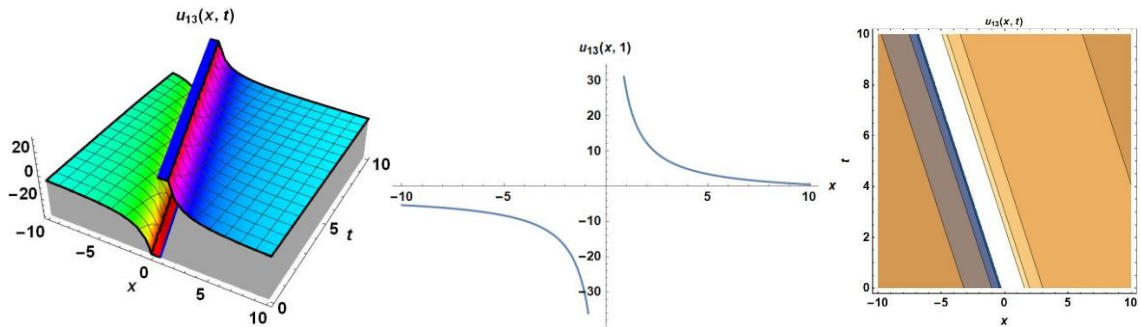
**Durum 3:**

$$\begin{aligned} \mu = 0, \quad \beta_0 &= \frac{-3b - \sqrt{9b^2 - 8ab^2}}{12a}, \quad \beta_1 = \frac{-\frac{3bk}{a} - \frac{\sqrt{-((-9+8a)b^2)k}}{a}}{2b}, \quad \beta_2 = 0, \\ v &= \frac{-4b^3k - \frac{3b^3k}{a} - \frac{b^2\sqrt{-((-9+8a)b^2)k}}{a} + 48bk^3\mu - \frac{108bk^3\mu}{a} - \frac{36\sqrt{-((-9+8a)b^2)k^3\mu}}{a}}{24b}, \\ c &= \frac{1}{108} \left( \frac{3b^3k}{a} + \frac{b^2\sqrt{-((-9+8a)b^2)k}}{a} + \frac{108bk^3\mu}{a} + \frac{36\sqrt{-((-9+8a)b^2)k^3\mu}}{a} \right), \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

elde edilen çözümler (5.2.1)'de yerine yazılırsa (3.3.1) ile verilen denklemin tam çözümü

$$u_{13}(x, t) = \frac{-3b - \sqrt{9b^2 - 8ab^2}}{12a} - \frac{\frac{-\frac{3bk}{a} - \frac{\sqrt{-((-9+8a)b^2)k}}{a}}{2b} \left( r - \frac{\left( -4b^3k - \frac{3b^3k}{a} - \frac{b^2\sqrt{-((-9+8a)b^2)k}}{a} \right) t}{24b} + kx \right)}{2b}, \quad (5.2.8)$$

elde edilir.



Şekil 14. (5.2.8) çözümündeki  $a = 0.1$ ,  $b = 0.5$ ,  $k = -1.5$ ,  $\mu = 0$ ,  $r = 1$  sabitleri için

(3.3.1) denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri

Denklem (5.2.8) ile sunulan gezici dalga çözümü, zamana bağlı rasyonel dalga yapısı sergilemektedir.

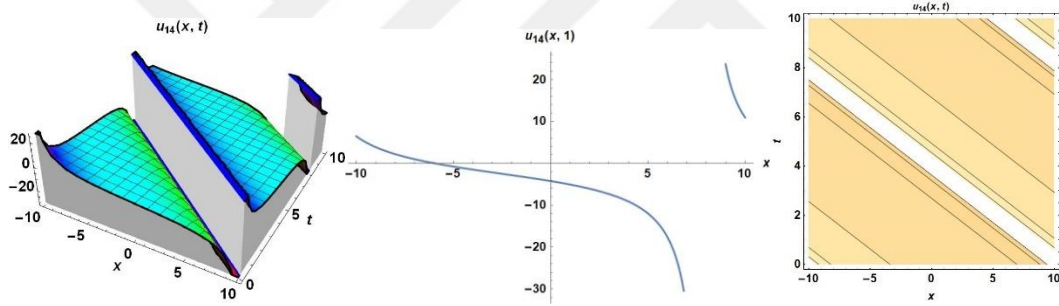
**Durum 4:**

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= \frac{-3b - \sqrt{9b^2 - 8ab^2}}{12a}, \quad \beta_1 = \frac{-\frac{3bk}{a} - \frac{\sqrt{-((-9+8a)b^2)k}}{2b}}{a}, \quad \beta_2 = 0, \\
v &= \frac{-4b^3k - \frac{3b^3k}{a} - \frac{b^2\sqrt{-((-9+8a)b^2)k}}{a} + 48bk^3\mu - \frac{108bk^3\mu}{a} - \frac{36\sqrt{-((-9+8a)b^2)k^3\mu}}{a}}{24b}, \\
c &= \frac{1}{108} \left( \frac{3b^3k}{a} + \frac{b^2\sqrt{-((-9+8a)b^2)k}}{a} + \frac{108bk^3\mu}{a} + \frac{36\sqrt{-((-9+8a)b^2)k^3\mu}}{a} \right),
\end{aligned}
\tag{5.2.9}$$

elde edilen çözümler (5.2.1)'de yerine yazılırsa (3.3.1) ile verilen denklemin tam çözümü

$$u_{14}(x,t) = \frac{-3b - \sqrt{9b^2 - 8ab^2}}{12a} + \frac{1}{2b} \left( -\frac{3bk}{a} - \frac{\sqrt{-((-9+8a)b^2)k}}{a} \right) \sqrt{\mu} \tan \left[ \sqrt{\mu} \left( kx - \frac{t \left( -4b^3k - \frac{3b^3k}{a} - \frac{b^2\sqrt{-((-9+8a)b^2)k}}{a} + 48bk^3\mu - \frac{108bk^3\mu}{a} - \frac{36\sqrt{-((-9+8a)b^2)k^3\mu}}{a} \right)}{24b} \right) \right].
\tag{5.2.10}$$

elde edilir.



Şekil 15. (5.2.10) çözümündeki  $a = 0.1$ ,  $b = 0.5$ ,  $k = -1.5$ ,  $\mu = 0.01$  sabitleri için (3.3.1)

denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri

Denklem (5.2.10) ile sunulan gezici dalga çözümü, periyodik özellik taşıyan bir dalga formu sergilemektedir.

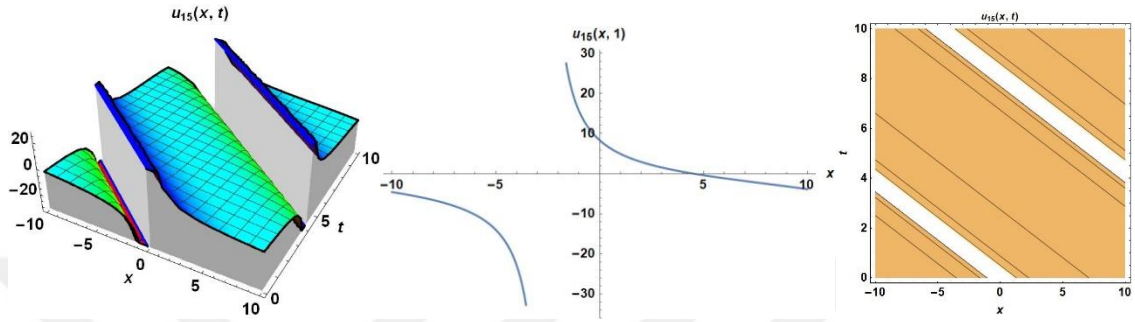
##### Durum 5:

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= \frac{-3b - \sqrt{9b^2 - 8ab^2}}{12a}, \quad \beta_1 = \frac{-\frac{3bk}{a} - \frac{\sqrt{-((-9+8a)b^2)k}}{2b}}{a}, \quad \beta_2 = 0, \\
v &= \frac{-4b^3k - \frac{3b^3k}{a} - \frac{b^2\sqrt{-((-9+8a)b^2)k}}{a} + 48bk^3\mu - \frac{108bk^3\mu}{a} - \frac{36\sqrt{-((-9+8a)b^2)k^3\mu}}{a}}{24b}, \\
c &= \frac{1}{108} \left( \frac{3b^3k}{a} + \frac{b^2\sqrt{-((-9+8a)b^2)k}}{a} + \frac{108bk^3\mu}{a} + \frac{36\sqrt{-((-9+8a)b^2)k^3\mu}}{a} \right),
\end{aligned}
\tag{5.2.11}$$

elde edilen çözümler (5.2.1)'de yerine yazılırsa (3.3.1) ile verilen denklemin tam çözümü

$$u_{15}(x,t) = \frac{-3b - \sqrt{9b^2 - 8ab^2}}{12a} - \frac{1}{2b} \left( -\frac{3bk}{a} - \frac{\sqrt{(-9+8a)b^2}k}{a} \right) \sqrt{\mu} \cot \left[ \sqrt{\mu} \left( kx - \frac{t \left( -4b^3k - \frac{3b^3k}{a} - \frac{b^2\sqrt{(-9+8a)b^2}k}{a} + 48bk^3\mu - \frac{108bk^3\mu}{a} - \frac{36\sqrt{(-9+8a)b^2}k^3\mu}{a} \right)}{24b} \right) \right], \quad (5.2.12)$$

elde edilir.



Şekil 16. (5.2.12) çözümündeki  $a = 0.1$ ,  $b = 0.5$ ,  $k = -1.5$ ,  $\mu = 0.01$  sabitleri için (3.3.1) denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri

Denklem (5.2.12) ile sunulan gezici dalga çözümü, tekilliğe sahip periyodik dalga formunu temsil etmektedir.

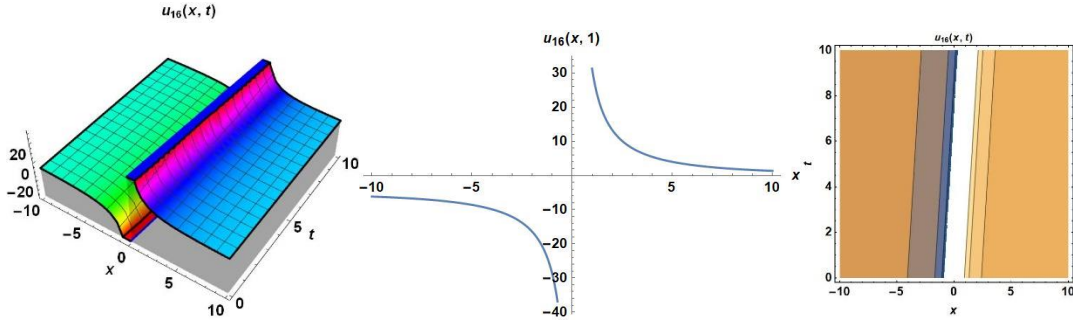
#### Durum 6:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \frac{-3b - \sqrt{9b^2 - 8ab^2}}{12a}, \quad \beta_1 = \frac{-\frac{3bk}{a} - \frac{\sqrt{((-9+8a)b^2)}k}{a}}{2b}, \quad \beta_2 = \frac{\frac{3bk\mu}{a} + \frac{\sqrt{((-9+8a)b^2)}k\mu}{a}}{2b}, \\ v &= \frac{-4b^3k - \frac{3b^3k}{a} - \frac{b^2\sqrt{((-9+8a)b^2)}k}{a} + 192bk^3\mu - \frac{432bk^3\mu}{a} - \frac{144\sqrt{((-9+8a)b^2)}k^3\mu}{a}}{24b}, \\ c &= \frac{1}{108} \left( \frac{3b^3k}{a} + \frac{b^2\sqrt{((-9+8a)b^2)}k}{a} + \frac{432bk^3\mu}{a} + \frac{144\sqrt{((-9+8a)b^2)}k^3\mu}{a} \right), \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

elde edilen çözümler (5.2.1)'de yerine yazılırsa (3.3.1) ile verilen denklemin tam çözümü

$$\begin{aligned} u_{16}(x,t) &= \frac{-3b - \sqrt{9b^2 - 8ab^2}}{12a} - \frac{1}{2b\sqrt{-\mu}} \left( \frac{3bk\mu}{a} + \frac{\sqrt{(-9+8a)b^2}k\mu}{a} \right) \coth \left[ \sqrt{-\mu} \left( kx - \frac{t \left( -4b^3k - \frac{3b^3k}{a} - \frac{b^2\sqrt{(-9+8a)b^2}k}{a} + 192bk^3\mu - \frac{432bk^3\mu}{a} - \frac{144\sqrt{(-9+8a)b^2}k^3\mu}{a} \right)}{24b} \right) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2b} \left( -\frac{3bk}{a} - \frac{\sqrt{(-9+8a)b^2}k}{a} \right) \sqrt{-\mu} \tanh \left[ \sqrt{-\mu} \left( kx - \frac{t \left( -4b^3k - \frac{3b^3k}{a} - \frac{b^2\sqrt{(-9+8a)b^2}k}{a} + 192bk^3\mu - \frac{432bk^3\mu}{a} - \frac{144\sqrt{(-9+8a)b^2}k^3\mu}{a} \right)}{24b} \right) \right], \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

elde edilir.



Şekil 17. (5.2.14) çözümündeki  $a = 1$ ,  $b = 0.5$ ,  $k = -1.5$ ,  $\mu = -0.001$  sabitleri için (3.3.1) denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri

Denklem (5.2.14) ile sunulan gezici dalga çözümü, hiperbolik fonksiyonlarına dayalı olup tekillik içeren karma bir soliton yapısını temsil etmektedir.

**Durum 7:**

$$\beta_0 = \frac{-3b - \sqrt{9b^2 - 8ab^2}}{12a}, \quad \beta_1 = \frac{3bk}{a} - \frac{\sqrt{(-9+8a)b^2}k}{2b}, \quad \beta_2 = \frac{3bk\mu}{a} + \frac{\sqrt{(-9+8a)b^2}k\mu}{2b},$$

$$v = \frac{-4b^3k - \frac{3b^3k}{a} - \frac{b^2\sqrt{(-9+8a)b^2}k}{a} + 192bk^3\mu - \frac{432bk^3\mu}{a} - \frac{144\sqrt{(-9+8a)b^2}k^3\mu}{a}}{24b},$$

$$c = \frac{1}{108} \left( \frac{3b^3k}{a} + \frac{b^2\sqrt{(-9+8a)b^2}k}{a} + \frac{432bk^3\mu}{a} + \frac{144\sqrt{(-9+8a)b^2}k^3\mu}{a} \right),$$

(5.2.15)

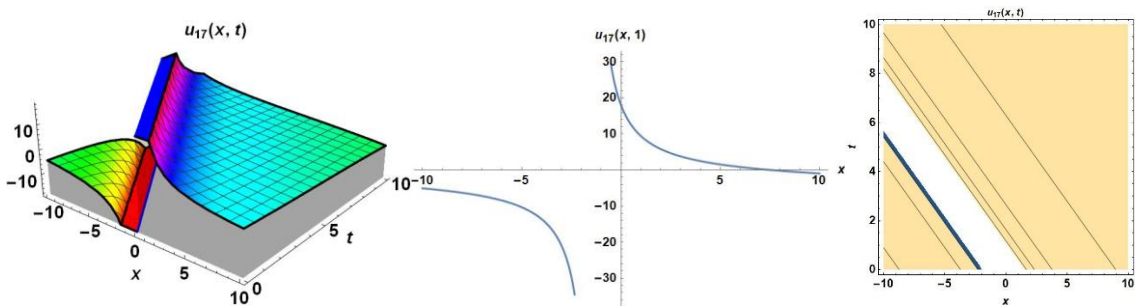
elde edilen çözümler (5.2.1)'de yerine yazılırsa (3.3.1) ile verilen denklemin tam çözümü

$$u_{17}(x, t) = \frac{-3b - \sqrt{9b^2 - 8ab^2}}{12a} + \frac{1}{2b\sqrt{\mu}} \left( \frac{3bk\mu}{a} + \frac{\sqrt{(-9+8a)b^2}k\mu}{a} \right) \cot \left[ \sqrt{\mu} \left( kx - \frac{t \left( -4b^3k - \frac{3b^3k}{a} - \frac{b^2\sqrt{(-9+8a)b^2}k}{a} + 192bk^3\mu - \frac{432bk^3\mu}{a} - \frac{144\sqrt{(-9+8a)b^2}k^3\mu}{a} \right)}{24b} \right) \right] +$$

$$\frac{1}{2b} \left( -\frac{3bk}{a} - \frac{\sqrt{(-9+8a)b^2}k}{a} \right) \sqrt{\mu} \tan \left[ \sqrt{\mu} \left( kx - \frac{t \left( -4b^3k - \frac{3b^3k}{a} - \frac{b^2\sqrt{(-9+8a)b^2}k}{a} + 192bk^3\mu - \frac{432bk^3\mu}{a} - \frac{144\sqrt{(-9+8a)b^2}k^3\mu}{a} \right)}{24b} \right) \right],$$

(5.2.16)

elde edilir.



Şekil 18. (5.2.16) çözümündeki  $a = 0.1$ ,  $b = 0.5$ ,  $k = -1.5$ ,  $\mu = 0.001$  sabitleri için (3.3.1) denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri

Denklem (5.2.16) ile sunulan gezici dalga çözümü, trigonometrik fonksiyonlarına dayalı olup periyodik karakterde ve tekillik barındıran karma dalga yapısını temsil etmektedir.

**Durum 8:**

$$\beta_0 = \frac{-3b - \sqrt{9b^2 - 8ab^2}}{12a}, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = \frac{\frac{3bk\mu}{a} + \sqrt{-((-9+8a)b^2)k\mu}}{2b},$$

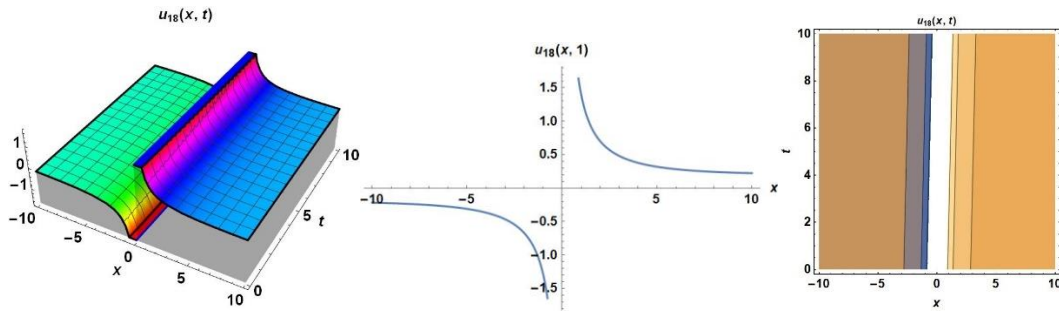
$$v = \frac{-4b^3k - \frac{3b^3k}{a} - \frac{b^2\sqrt{-((-9+8a)b^2)k}}{a} + 48bk^3\mu - \frac{108bk^3\mu}{a} - \frac{36\sqrt{-((-9+8a)b^2)k^3\mu}}{a}}{24b},$$

$$c = \frac{1}{108} \left( \frac{3b^3k}{a} + \frac{b^2\sqrt{-((-9+8a)b^2)k}}{a} + \frac{108bk^3\mu}{a} + \frac{36\sqrt{-((-9+8a)b^2)k^3\mu}}{a} \right),$$
(5.2.17)

elde edilen çözümler (5.2.1)'de yerine yazılırsa (3.3.1) ile verilen denklemin tam çözümü

$$u_{18}(x,t) = \frac{-3b - \sqrt{9b^2 - 8ab^2}}{12a} - \frac{1}{2b\sqrt{-\mu}} \left( \frac{3bk\mu}{a} + \frac{\sqrt{-((-9+8a)b^2)k\mu}}{a} \right) \coth \left[ \sqrt{-\mu} \left( kx - \frac{t \left( -4b^3k - \frac{3b^3k}{a} - \frac{b^2\sqrt{-((-9+8a)b^2)k}}{a} + 48bk^3\mu - \frac{108bk^3\mu}{a} - \frac{36\sqrt{-((-9+8a)b^2)k^3\mu}}{a} \right)}{24b} \right) \right],$$
(5.2.18)

elde edilir.



Şekil 19. (5.2.18) çözümündeki  $a = \frac{9}{8}$ ,  $b = -0.01$ ,  $k = 1.5$ ,  $\mu = -0.01$  sabitleri için

(3.3.1) denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri

Denklem (5.2.18) ile sunulan dalga çözümü, tekillik içeren hiperbolik yapıya sahip bir dalga formu sergilemektedir.

**Durum 9:**

$$\beta_0 = \frac{-3b - \sqrt{9b^2 - 8ab^2}}{12a}, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = \frac{\frac{3bk\mu}{a} + \frac{\sqrt{-((-9+8a)b^2)k\mu}}{a}}{2b},$$

$$v = \frac{-4b^3k - \frac{3b^3k}{a} - \frac{b^2\sqrt{-((-9+8a)b^2)k}}{a} + 48bk^3\mu - \frac{108bk^3\mu}{a} - \frac{36\sqrt{-((-9+8a)b^2)k^3\mu}}{a}}{24b},$$

$$c = \frac{1}{108} \left( \frac{3b^3k}{a} + \frac{b^2\sqrt{-((-9+8a)b^2)k}}{a} + \frac{108bk^3\mu}{a} + \frac{36\sqrt{-((-9+8a)b^2)k^3\mu}}{a} \right),$$

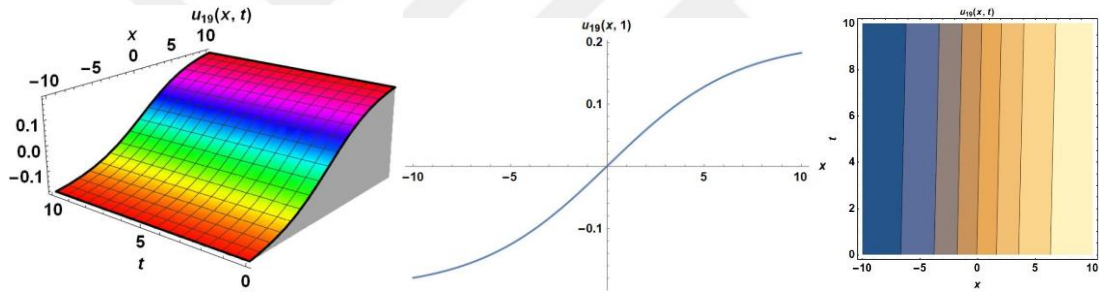
(5.2.19)

elde edilen çözümler (5.2.1)'de yerine yazılırsa (3.3.1) ile verilen denklemin tam çözümü

$$u_{19}(x,t) = \frac{-3b - \sqrt{9b^2 - 8ab^2}}{12a} - \frac{1}{2b\sqrt{-\mu}} \left( \frac{3bk\mu}{a} + \frac{\sqrt{-((-9+8a)b^2)k\mu}}{a} \right) \tanh \left[ \sqrt{-\mu} \left( kx - \frac{t \left( -4b^3k - \frac{3b^3k}{a} - \frac{b^2\sqrt{-((-9+8a)b^2)k}}{a} + 48bk^3\mu - \frac{108bk^3\mu}{a} - \frac{36\sqrt{-((-9+8a)b^2)k^3\mu}}{a} \right)}{24b} \right) \right],$$

(5.2.20)

elde edilir.



Şekil 20. (5.2.20) çözümündeki  $a = \frac{9}{8}$ ,  $b = -0.01$ ,  $k = 1.5$ ,  $\mu = -0.01$  sabitleri için

(3.3.1) denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri

Denklem (5.2.20) ile sunulan gezici dalga çözümü, hiperbolik yapıya sahip kink tipi bir soliton dalga formu sergilemektedir.

**Durum 10:**

$$\beta_0 = \frac{-3b - \sqrt{9b^2 - 8ab^2}}{12a}, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = \frac{\frac{3bk\mu}{a} + \frac{\sqrt{-((-9+8a)b^2)k\mu}}{a}}{2b},$$

$$v = \frac{-4b^3k - \frac{3b^3k}{a} - \frac{b^2\sqrt{-((-9+8a)b^2)k}}{a} + 48bk^3\mu - \frac{108bk^3\mu}{a} - \frac{36\sqrt{-((-9+8a)b^2)k^3\mu}}{a}}{24b},$$

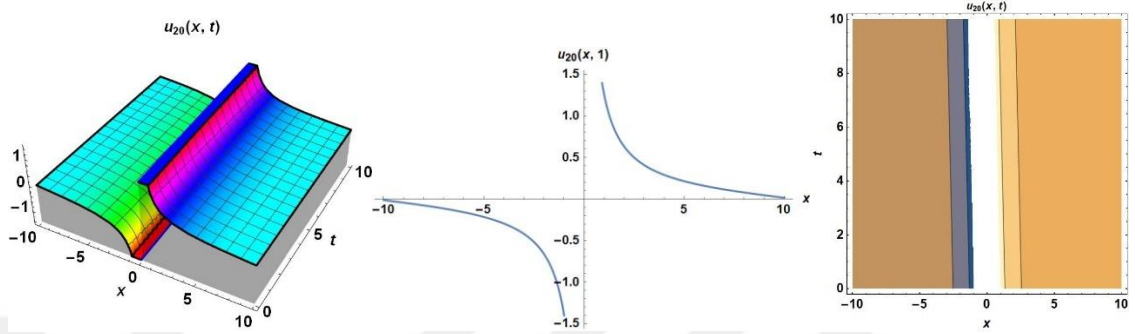
$$c = \frac{1}{108} \left( \frac{3b^3k}{a} + \frac{b^2\sqrt{-((-9+8a)b^2)k}}{a} + \frac{108bk^3\mu}{a} + \frac{36\sqrt{-((-9+8a)b^2)k^3\mu}}{a} \right),$$

(5.2.21)

elde edilen çözümler (5.2.1)'de yerine yazılırsa (3.3.1) ile verilen denklemin tam çözümü

$$u_{20}(x, t) = \frac{-3b - \sqrt{9b^2 - 8ab^2}}{12a} + \frac{1}{2b\sqrt{\mu}} \left( \frac{3bk\mu}{a} + \frac{\sqrt{-(-9+8a)b^2k\mu}}{a} \right) \cot \left[ \sqrt{\mu} \left( kx - \frac{t \left( -4b^3k - \frac{3b^3k}{a} - \frac{b^2\sqrt{-(-9+8a)b^2k}}{a} + 48bk^3\mu - \frac{108bk^3\mu}{a} - \frac{36\sqrt{-(-9+8a)b^2k^3\mu}}{a} \right)}{24b} \right) \right], \quad (5.2.22)$$

elde edilir.



Şekil 21. (5.2.22) çözümündeki  $a = \frac{9}{8}$ ,  $b = -0.01$ ,  $k = 1.5$ ,  $\mu = 0.01$  sabitleri için (3.3.1)

denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri

Denklem (5.2.22) ile sunulan gezici dalgı çözümü, tekiliğe sahip periyodik dalgayı temsil etmektedir.

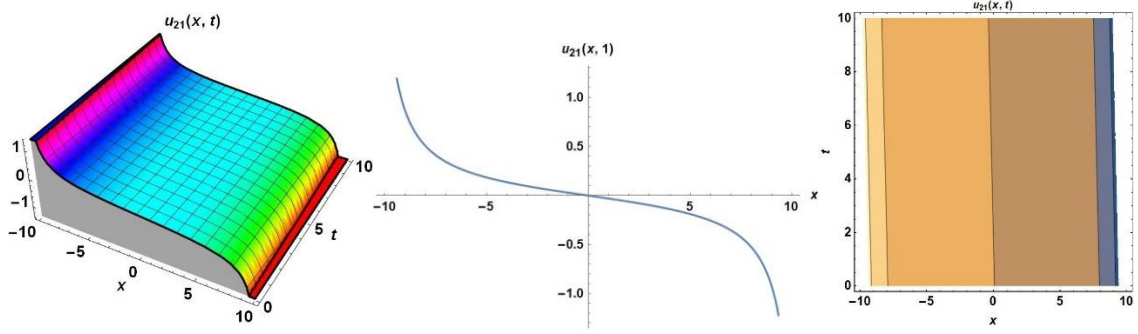
#### Durum 11:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \frac{-3b - \sqrt{9b^2 - 8ab^2}}{12a}, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = \frac{\frac{3bk\mu}{a} + \frac{\sqrt{-((-9+8a)b^2)k\mu}}{a}}{2b}, \\ v &= \frac{-4b^3k - \frac{3b^3k}{a} - \frac{b^2\sqrt{-((-9+8a)b^2)k}}{a} + 48bk^3\mu - \frac{108bk^3\mu}{a} - \frac{36\sqrt{-((-9+8a)b^2)k^3\mu}}{a}}{24b}, \\ c &= \frac{1}{108} \left( \frac{3b^3k}{a} + \frac{b^2\sqrt{-((-9+8a)b^2)k}}{a} + \frac{108bk^3\mu}{a} + \frac{36\sqrt{-((-9+8a)b^2)k^3\mu}}{a} \right), \end{aligned} \quad (5.2.23)$$

elde edilen çözümler (5.2.1)'de yerine yazılırsa (3.3.1) ile verilen denklemin tam çözümü

$$u_{21}(x, t) = \frac{-3b - \sqrt{9b^2 - 8ab^2}}{12a} - \frac{1}{2b\sqrt{\mu}} \left( \frac{3bk\mu}{a} + \frac{\sqrt{-(-9+8a)b^2k\mu}}{a} \right) \tan \left[ \sqrt{\mu} \left( kx - \frac{t \left( -4b^3k - \frac{3b^3k}{a} - \frac{b^2\sqrt{-(-9+8a)b^2k}}{a} + 48bk^3\mu - \frac{108bk^3\mu}{a} - \frac{36\sqrt{-(-9+8a)b^2k^3\mu}}{a} \right)}{24b} \right) \right], \quad (5.2.24)$$

elde edilir.



Şekil 22. (5.2.24) çözümündeki  $a = \frac{9}{8}$ ,  $b = -0.01$ ,  $k = 1.5$ ,  $\mu = 0.01$  sabitleri için (3.3.1)

denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri

Denklem (5.2.24) ile sunulan gezici dalga çözümü, tekiliğe sahip periyodik dalgayı temsil etmektedir.

**Durum 12:**

$$\beta_0 = \frac{-3b + \sqrt{9b^2 - 8ab^2}}{12a}, \quad \beta_1 = \frac{-\frac{3bk}{a} + \frac{\sqrt{-((-9+8a)b^2)k}}{a}}{2b}, \quad \beta_2 = 0,$$

$$v = \frac{-4b^3k - \frac{3b^3k}{a} + \frac{b^2\sqrt{-((-9+8a)b^2)k}}{a} + 48bk^3\mu - \frac{108bk^3\mu}{a} + \frac{36\sqrt{-((-9+8a)b^2)k^3\mu}}{a}}{24b},$$

$$c = \frac{1}{108} \left( \frac{3b^3k}{a} - \frac{b^2\sqrt{-((-9+8a)b^2)k}}{a} + \frac{108bk^3\mu}{a} - \frac{36\sqrt{-((-9+8a)b^2)k^3\mu}}{a} \right),$$

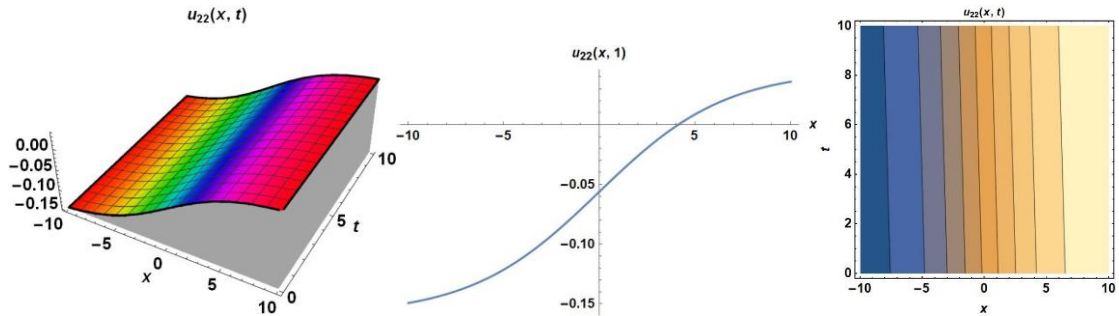
(5.2.25)

elde edilen çözümler (5.2.1)'de yerine yazılırsa (3.3.1) ile verilen denklemin tam çözümü

$$u_{22}(x, t) = \frac{-3b + \sqrt{9b^2 - 8ab^2}}{12a} - \frac{1}{2b} \left( \frac{-\frac{3bk}{a} + \frac{\sqrt{-((-9+8a)b^2)k}}{a}}{a} \right) \sqrt{-\mu} \tanh \left[ \sqrt{-\mu} \left( kx - \frac{t \left( -4b^3k - \frac{3b^3k}{a} + \frac{b^2\sqrt{-((-9+8a)b^2)k}}{a} + 48bk^3\mu - \frac{108bk^3\mu}{a} + \frac{36\sqrt{-((-9+8a)b^2)k^3\mu}}{a} \right)}{24b} \right) \right],$$

(5.2.26)

elde edilir.



Şekil 23. (5.2.26) çözümündeki  $a = 0.1$ ,  $b = 0.5$ ,  $k = -1.5$ ,  $\mu = -0.01$  sabitleri için (3.3.1) denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri

Denklem (5.2.26) ile sunulan gezici dalga çözümü, hiperbolik yapıya sahip kink tipi bir soliton dalga formu sergilemektedir.

**Durum 13:**

$$\beta_0 = \frac{-3b + \sqrt{9b^2 - 8ab^2}}{12a}, \quad \beta_1 = \frac{-\frac{3bk}{a} + \frac{\sqrt{-((-9+8a)b^2)k}}{a}}{2b}, \quad \beta_2 = 0,$$

$$v = \frac{-4b^3k - \frac{3b^3k}{a} + \frac{b^2\sqrt{-((-9+8a)b^2)k}}{a} + 48bk^3\mu - \frac{108bk^3\mu}{a} + \frac{36\sqrt{-((-9+8a)b^2)k^3\mu}}{a}}{24b},$$

$$c = \frac{1}{108} \left( \frac{3b^3k}{a} - \frac{b^2\sqrt{-((-9+8a)b^2)k}}{a} + \frac{108bk^3\mu}{a} - \frac{36\sqrt{-((-9+8a)b^2)k^3\mu}}{a} \right),$$

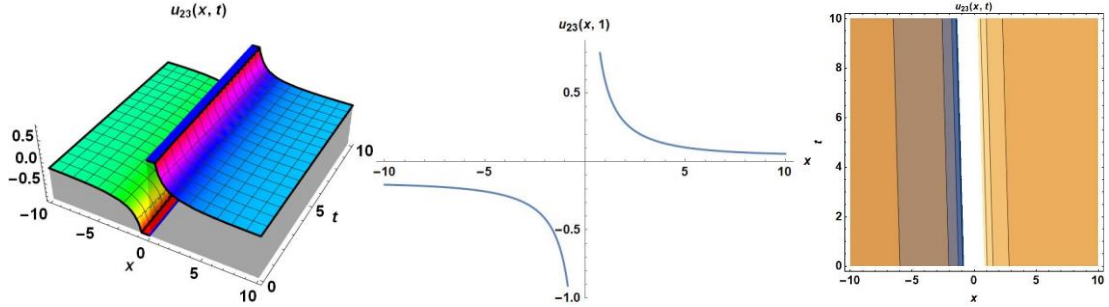
(5.2.27)

elde edilen çözümler (5.2.1)'de yerine yazılırsa (3.3.1) ile verilen denklemin tam çözümü

$$u_{23}(x,t) = \frac{-3b + \sqrt{9b^2 - 8ab^2}}{12a} - \frac{1}{2b} \left( \frac{-\frac{3bk}{a} + \frac{\sqrt{-((-9+8a)b^2)k}}{a}}{a} \right) \sqrt{-\mu} \coth \left[ \sqrt{-\mu} \left( kx - \frac{t \left( -4b^3k - \frac{3b^3k}{a} + \frac{b^2\sqrt{-((-9+8a)b^2)k}}{a} + 48bk^3\mu - \frac{108bk^3\mu}{a} + \frac{36\sqrt{-((-9+8a)b^2)k^3\mu}}{a} \right)}{24b} \right) \right],$$

(5.2.28)

elde edilir.



Şekil 24. (5.2.28) çözümündeki  $a = 0.1$ ,  $b = 0.5$ ,  $k = -1.5$ ,  $\mu = -0.01$  sabitleri için (3.3.1) denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri

Denklem (5.2.28) ile sunulan gezici dalga çözümü, tekillik içeren hiperbolik yapıya sahip bir dalga formu sergilemektedir.

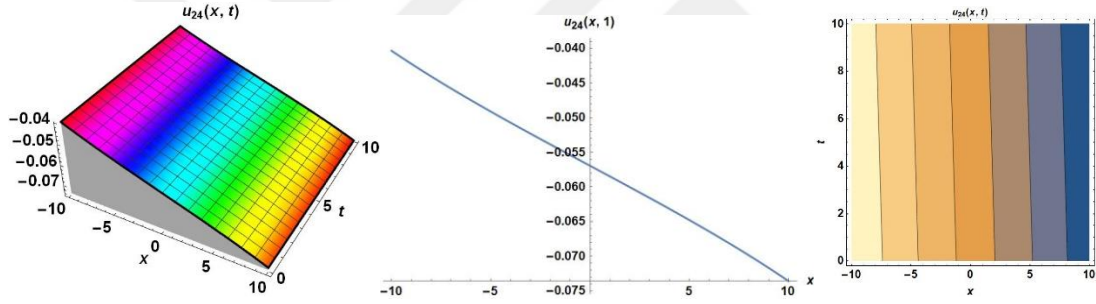
**Durum 14:**

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= \frac{-3b + \sqrt{9b^2 - 8ab^2}}{12a}, \quad \beta_1 = \frac{-\frac{3bk}{a} + \frac{\sqrt{-((-9+8a)b^2)k}}{a}}{2b}, \quad \beta_2 = 0, \\
v &= \frac{-4b^3k - \frac{3b^3k}{a} + \frac{b^2\sqrt{-((-9+8a)b^2)k}}{a} + 48bk^3\mu - \frac{108bk^3\mu}{a} + \frac{36\sqrt{-((-9+8a)b^2)k^3\mu}}{a}}{24b}, \\
c &= \frac{1}{108} \left( \frac{3b^3k}{a} - \frac{b^2\sqrt{-((-9+8a)b^2)k}}{a} + \frac{108bk^3\mu}{a} - \frac{36\sqrt{-((-9+8a)b^2)k^3\mu}}{a} \right),
\end{aligned} \tag{5.2.29}$$

elde edilen çözümler (5.2.1)'de yerine yazılırsa (3.3.1) ile verilen denklemin tam çözümü

$$u_{24}(x, t) = \frac{-3b + \sqrt{9b^2 - 8ab^2}}{12a} + \frac{1}{2b} \left( -\frac{3bk}{a} + \frac{\sqrt{-((-9+8a)b^2)k}}{a} \right) \sqrt{\mu} \tan \left[ \sqrt{\mu} \left( kx - \frac{t \left( -4b^3k - \frac{3b^3k}{a} + \frac{b^2\sqrt{-((-9+8a)b^2)k}}{a} + 48bk^3\mu - \frac{108bk^3\mu}{a} + \frac{36\sqrt{-((-9+8a)b^2)k^3\mu}}{a} \right)}{24b} \right) \right], \tag{5.2.30}$$

elde edilir.



Şekil 25. (5.2.30) çözümündeki  $a = 0.1$ ,  $b = 0.5$ ,  $k = -1.5$ ,  $\mu = 0.001$  sabitleri için (3.3.1) denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri

Denklem (5.2.30) ile sunulan gezici dalga çözümü, periyodik dalgayı temsil etmektedir.

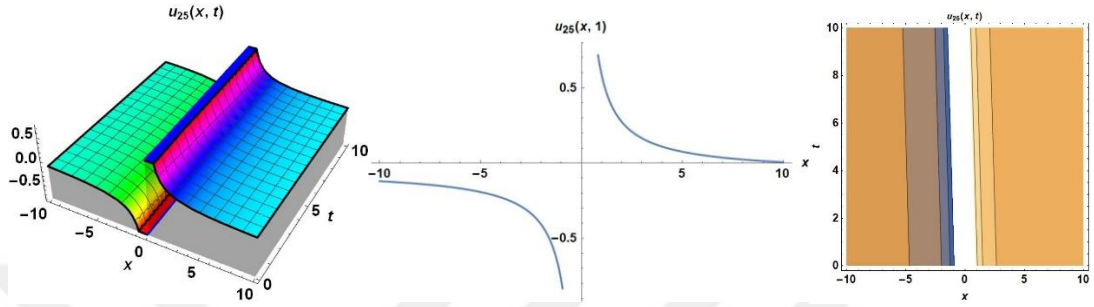
#### Durum 15:

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= \frac{-3b + \sqrt{9b^2 - 8ab^2}}{12a}, \quad \beta_1 = \frac{-\frac{3bk}{a} + \frac{\sqrt{-((-9+8a)b^2)k}}{a}}{2b}, \quad \beta_2 = 0, \\
v &= \frac{-4b^3k - \frac{3b^3k}{a} + \frac{b^2\sqrt{-((-9+8a)b^2)k}}{a} + 48bk^3\mu - \frac{108bk^3\mu}{a} + \frac{36\sqrt{-((-9+8a)b^2)k^3\mu}}{a}}{24b}, \\
c &= \frac{1}{108} \left( \frac{3b^3k}{a} - \frac{b^2\sqrt{-((-9+8a)b^2)k}}{a} + \frac{108bk^3\mu}{a} - \frac{36\sqrt{-((-9+8a)b^2)k^3\mu}}{a} \right),
\end{aligned} \tag{5.2.31}$$

elde edilen çözümler (5.2.1)'de yerine yazılırsa (3.3.1) ile verilen denklemin tam çözümü

$$u_{25}(x, t) = \frac{-3b + \sqrt{9b^2 - 8ab^2}}{12a} - \frac{1}{2b} \left( -\frac{3bk}{a} + \frac{\sqrt{-(-9+8a)b^2}k}{a} \right) \sqrt{\mu} \cot \left[ \sqrt{\mu} \left( kx - \frac{t \left( -4b^3k - \frac{3b^3k}{a} + \frac{b^2\sqrt{-(-9+8a)b^2}k}{a} + 48bk^3\mu - \frac{108bk^3\mu}{a} + \frac{36\sqrt{-(-9+8a)b^2}k^3\mu}{a} \right)}{24b} \right) \right] \quad (5.2.32)$$

elde edilir.



Şekil 26. (5.2.32) çözümündeki  $a = 0.1$ ,  $b = 0.5$ ,  $k = -1.5$ ,  $\mu = 0.001$  sabitleri için (3.3.1) denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri

Denklem (5.2.32) ile sunulan gezici dalga çözümü, periyodik ve tekillik içeren dalgayı temsil etmektedir.

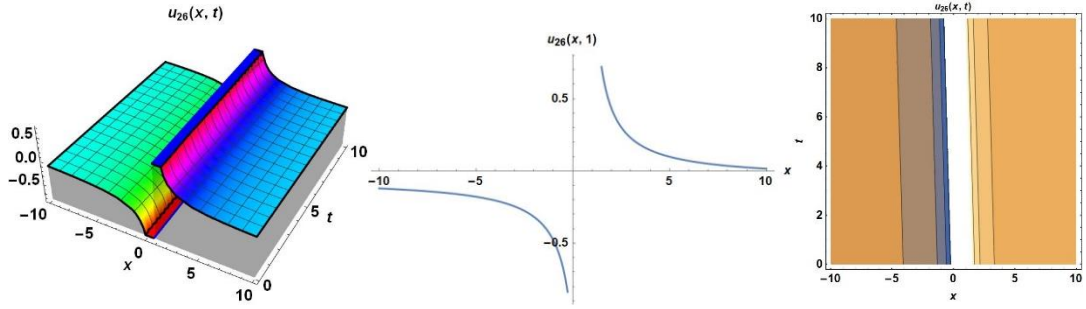
**Durum 16:**

$$\begin{aligned} \mu = 0, \quad \beta_0 &= \frac{-3b + \sqrt{9b^2 - 8ab^2}}{12a}, \quad \beta_1 = \frac{-\frac{3bk}{a} + \frac{\sqrt{-(-9+8a)b^2}k}{a}}{2b}, \quad \beta_2 = 0, \\ v &= \frac{-4b^3k - \frac{3b^3k}{a} + \frac{b^2\sqrt{-(-9+8a)b^2}k}{a} + 48bk^3\mu - \frac{108bk^3\mu}{a} + \frac{36\sqrt{-(-9+8a)b^2}k^3\mu}{a}}{24b}, \\ c &= \frac{1}{108} \left( \frac{3b^3k}{a} - \frac{b^2\sqrt{-(-9+8a)b^2}k}{a} + \frac{108bk^3\mu}{a} - \frac{36\sqrt{-(-9+8a)b^2}k^3\mu}{a} \right), \end{aligned} \quad (5.2.33)$$

elde edilen çözümler (5.2.1)'de yerine yazılırsa (3.3.1) ile verilen denklemin tam çözümü

$$u_{26}(x, t) = \frac{-3b + \sqrt{9b^2 - 8ab^2}}{12a} - \frac{\frac{-\frac{3bk}{a} + \frac{\sqrt{-(-9+8a)b^2}k}{a}}{2b}}{\left( r - \frac{\left( -4b^3k - \frac{3b^3k}{a} + \frac{b^2\sqrt{-(-9+8a)b^2}k}{a} \right) t}{24b} + kx \right)} \quad (5.2.34)$$

elde edilir.



Şekil 27. (5.2.34) çözümündeki  $a = 0.1$ ,  $b = 0.5$ ,  $k = -1.5$ ,  $\mu = 0$ ,  $r = 1$  sabitleri için (3.3.1) denkleminin sırasıyla 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri

Denklem (5.2.34) ile sunulan gezici dalga çözümü, zamana bağlı olarak konum değiştiren ve rasyonel fonksiyon yapısıyla tanımlanan darbe benzeri bir dalga formu sergilemektedir.

## SONUÇ

Fiziksel, kimyasal ve biyolojik süreçlerin modellenmesinde diferansiyel denklemler temel bir araçtır. Özellikle lineer olmayan evrim denklemleri, karmaşık sistemlerin dinamiklerini anlamada kritik bir rol oynamaktadır. Bu tür denklemlerin analitik çözümleri, sistemin kararlılığı, dalga davranışları ve etkileşim biçimleri hakkında derinlemesine bilgi sunmaktadır. Son yıllarda, uygulamalı matematik alanında araştırmacılar, lineer olmayan evrim denklemlerinin gezici dalga çözümlerine odaklanarak akışkanlar mekaniği, plazma fiziği ve optik gibi alanlardaki karmaşık süreçlerin modellenmesine önemli katkılar sağlamışlardır. Bu noktada kullanılan yöntemlerin büyük bölümü, en yüksek mertebeden lineer terim ile lineer olmayan terimin karşılaştırılmasına dayanan “dengeleme yaklaşımı” üzerine kuruludur ve özellikle lineer olmayan problemlerin çözümünde etkili olmaktadır. Bu nedenle, gerçek yaşamdan alınan problemlerin incelenmesinde güçlü çözüm yöntemlerine dayalı doğru matematiksel modeller geliştirilmesi, hem teorik hem de uygulamalı bilimlerde vazgeçilmezdir.

Literatürde STOB denklemi üzerine yapılan çeşitli çalışmalarda farklı analitik yöntemler kullanılarak zengin çözüm yapıları elde edilmiştir. Yan ve Lou (2020), hız rezonansı mekanizmasına dayalı olarak kink soliton molekülleri, yarı periyodik kink yapılar ve Breather soliton molekülleri gibi birleşik çözümler elde etmiş ve bu yapıların fisyon ve füzyon davranışlarını incelemişlerdir. Yu ve arkadaşları (2022), Lie simetri indirgeme ve tutarlı tanh genişletme yöntemiyle soliton-knoidal etkileşimleri, çoklu rezonans yapılar ve hiperbolik-periyodik kombinasyonlar elde etmişlerdir. Yang (2022),  $(G'/G)$ -açılım yöntemiyle hiperbolik ve üstel fonksiyonlara dayalı gezici dalga çözümleri sunmuş, sayısal doğrulamalarla desteklemiştir. Gomez ve Hernandez (2017) ise geliştirilmiş tanh-coth ve üstel fonksiyon yöntemleriyle zamana bağlı hiperbolik çözümler elde ederken; Or-Roshid ve Rashidi (2017), doğrudan rasyonel üstel şemayla çoklu soliton etkileşimlerini modellemiş, Wang ve arkadaşları (2004) ise Hirota ve Bäcklund dönüşümleriyle elde ettikleri soliton çözümlerinin fisyon ve füzyon süreçlerini analiz etmişlerdir. Miao ve arkadaşları (2024) Cole-Hopf dönüşümü ve belirli başlangıç çözümlerini kullanarak lump, periyodik-soliter, yarı periyodik kink ve breather tipi dalga yapıları elde etmişlerdir. Elde edilen sonuçlar, literatürde raporlanan çalışmalarla karşılaştırıldığında hem benzerlikler hem de farklılıklar ortaya koymaktadır. Yan ve Lou

(2020) ile Wang vd. (2004)'ün fisyon-füzyon ve çoklu soliton etkileşimlerine odaklanan çalışmaları, burada elde edilen çözümlerin etkileşim öncesi temel profillerini tamamlayıcı niteliktedir. Yu vd. (2022) ve Yang (2022)'in hiperbolik-periyodik çözümleri ile bu çalışmadaki bulgular örtüşmekte, ancak parametre-çözüm ilişkilerinin sistematik biçimde ortaya konması yönüyle ayrılmaktadır. Miao vd. (2024)'ün lump ve yarı periyodik çözümleri ise burada doğrudan yer almamakla birlikte, aynı denklemin farklı çözüm ailelerini temsil etmektedir. Dolayısıyla, ulaşılan sonuçlar literatürdeki etkileşimli yapıları tamamlayan ve STOB denkleminin temel dalga çözümlerini sistematik biçimde sunan özgün bir katkı sağlamaktadır.

Bu tezde, diferansiyel denklemlerin özellikle lineer olmayan evrim denklemleri bağlamındaki analitik çözüm yöntemleri incelenmiş; bu kapsamda alt denklem ve geliştirilmiş alt denklem metotları uygulanarak STOB denklemi için gezici dalga çözümleri elde edilmiştir. Metotlar kapsamında  $\tanh$ ,  $\coth$ ,  $\tan$  ve  $\cot$  gibi hiperbolik ve trigonometrik fonksiyonlara dayalı kink, şok ve periyodik dalga yapıları ile rasyonel (kesirli) yapıya sahip darbe tipi çözümler başarıyla oluşturulmuştur. Elde edilen çözümler, sadece sembolik ifadeler olmaktan öte, fonksiyonel özellikleri ve grafiksel analizleriyle incelenmiş, “tekil”, “geçişli”, “periyodik” ve “karma yapı” gibi sınıflandırmalar yapılabilir. Aynı parametre setiyle alt denklemdeki işaret değişimi veya fonksiyon tipi seçimi, çok sayıda farklı çözüm ortaya koymuştur. Bu da yöntemin tek bir çözüm yerine, çeşitli ve parametrik çözümler üretebildiğini göstermektedir. Grafik analizleri ise çözümlerin yapısının alt denklem fonksiyonuna bağlı olduğunu ortaya koymuş, böylece çözümler görsel olarak da farklı kategorilere ayrılabilmiştir. Geliştirilmiş alt denklem metodu ile elde edilen çözümler ise özellikle periyodik ve tekil içeren dalga yapıları üretmiş; bu sayede rezonans bozulmaları, ani sıçramalar ve patlama gibi fiziksel olayların modellenmesine katkı sağlayabilir. Bu metotla elde edilen çözümler, benzer yapıya sahip olmakla birlikte farklı katsayılarla bağlı olarak çeşitlenmektedir. Ayrıca yapılan analizler sonucunda  $\cot$  ve  $\tan$  fonksiyonlarının pozitif ve negatif işaretli formlarının benzer çözüm profilleri oluşturduğu gözlemlenmiştir. Grafiksel değerlendirmeler  $\pm \cot$  ve  $\pm \tan$  içeren çözümlerin şekil olarak örtüştüğü ve aynı fiziksel yorumu taşıdığı sonucuna ulaşılmıştır. Bu benzerlik ilgili trigonometrik fonksiyonların periyodik ve simetrik karakterlerinden kaynaklanmaktadır. Oluşturulan 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikler, çözüm uzayının zamana ve mekâna bağlı

değişimini açık biçimde göstermiş ve matematiksel yapıların fiziksel yorumlarla bütünleşmesine olanak tanımıştır. Sonuç olarak, bu çalışma STOB denkleminin çözüm yelpazesini genişletmiş, fonksiyon çeşitliliği ve fiziksel anlam bakımından önemli katkılar sağlamıştır. Alt denklem metodu ve geliştirilmiş alt denklem metodu ile elde edilen çözümler, lineer olmayan dalga denklemleri alanında hem teorik hem de uygulamalı çalışmalara önemli destek sunmaktadır.

### Matematiksel ve Fiziksel Analizi

Elde edilen çözüm:

$$u_1(x, t) = \beta_0 - \sqrt{-\mu}\beta_1 \tanh \left[ \sqrt{-\mu} \left( kx - \frac{k^2 t (-6k\beta_0^2 + 3\beta_0^2\beta_1 + 2k\mu\beta_1^2 + 3\mu\beta_1^3)}{\beta_1^2} \right) \right],$$

şeklindedir. Bu çözüm, hiperbolik tanjant fonksiyonuna dayalı, sürekli ve tanımsızlık içermeyen klasik bir kink (tek geçişli) dalga yapısı sunar. Dalganın yapısı, uzay ve zaman değişkenlerinin lineer birleşimi olan bir faz ifadesiyle ilerleyen bir gezici dalgayı temsil eder. Çözümün genliğini belirleyen katsayı  $\sqrt{-\mu}\beta_1$  olup, burada  $\mu < 0$  ve  $\beta_1 > 0$  koşulları sağlandığında genlik reel ve pozitif bir değer alır. Bu katsayının büyümesi, dalganın tepe-dip yüksekliği ile geçiş eğimini artırır ve daha keskin bir profil oluşturur. Tanh fonksiyonunun asimptotik sınır davranışı gereği,  $x \rightarrow \pm\infty$  limitlerinde çözüm sırasıyla  $\beta_0 \pm \sqrt{-\mu}\beta_1$  değerlerine yaklaşır. Böylece çözüm, iki kararlı düzey arasında düzgün, süreksiz olmayan ve yönlü bir geçiş sunarak tipik bir geçiş (kink) dalgası karakteri sergiler. Fonksiyonda yer alan tüm terimler analitik biçimde tanımlı olup çözüm her  $x$  ve  $t$  için sürekli ve türevlenebilir niteliktedir. Ayrıca tanh fonksiyonu içindeki açık faz yapısı sayesinde dalga, sabit bir faz yönünde uzay-zamanda yer değiştiren, kararlı bir yapı sunar. Çözümdeki faz teriminde zaman katsayısı sistem parametrelerine bağlı olduğundan, dalganın yayılım yönü ve hızı fiziksel ortamın koşullarına göre değişebilir. Elde edilen bu yapı, uygun parametreler seçildiğinde sayısal olarak kolayca görselleştirilebilir ve sistemin zamana bağlı dinamikleri grafiksel olarak analiz edilebilir. Bu özellikleriyle elde edilen çözüm; faz geçişleri, yoğunluk ve sıcaklık dağılımları, sınır tabaka hareketleri ve kimyasal reaksiyon cepheleri gibi fiziksel süreçlerin modellenmesinde kullanılabilecek, lineer olmayan ancak süreklilik içeren güçlü bir dalga çözümüdür. Sonuç olarak, bu yapı STOB denkleminin analitik geçiş çözümlerinden biri

olarak, sistemin zamana ve mekâna bağlı kararlı değişimlerini doğru ve etkili şekilde temsil edebildiğini göstermektedir.

### Matematiksel ve Fiziksel Analizi

Elde edilen çözüm:

$$u_8(x, t) = \beta_0 - k\sqrt{\mu} \tan \left[ \sqrt{\mu} \left( kx - t \left( -k^3 \mu + 2bk\beta_0 + 3k\beta_0^2 \right) \right) \right],$$

şeklinde verilmiştir. Çözüm yapısında yer alan tan fonksiyonu, periyodik ve tekillik içeren yapısıyla dikkat çeker. Fonksiyonun tanımsız olduğu noktalar, tan fonksiyonunun  $\frac{\pi}{2} + n\pi$  olduğu değerlerdir. Bu da çözümün hem zamana hem mekana bağlı olarak periyodik şekilde tekillik (uç değer) gösterdiği anlamına gelir. Özellikle  $x = x_0$  ve  $t = t_0$  gibi belirli noktalarda çözüm sınırsız büyüklüklere ulaşabilir. Bu durumda matematiksel olarak tanımsızlık, fiziksel olarak ise ani enerji patlaması, rezonans sıçraması, titreşimsel bozulma gibi olgulara karşılık gelmektedir.

Genliği belirleyen ifade  $k\sqrt{\mu}$  şeklindedir. Burada  $k$  dalga sayısını  $\mu$  ise sistemin lineer olmayanlığı veya ortam özelliğini belirleyen parametreyi temsil eder. Bu katsayıların artması, çözümün genliğinin yükselmesine neden olur; bu da fiziksel olarak dalganın daha yüksek şiddette salınım yapması, daha keskin geçişler sergilemesi anlamına gelir. Tan fonksiyonunun periyodik yapısı gereği, çözüm belirli uzaysal ve zamansal aralıklarla kendini tekrarlar. Bu da çözümün periyodik ama süreksiz bir yapı olduğunu gösterir. Uç değerlerde, yani  $x \rightarrow \pm\infty$  durumlarında çözüm sınırlı kalmaz; tan fonksiyonu nedeniyle periyodik olarak tekrar eden ve düzenli şekilde tanımsızlık içeren bir davranış sergiler. Bu yapı, fiziksel sistemlerde özellikle optik alanlarda rezonans oluşumu, akustik dalga çökmesi, reaktif akışkanlardaki salınım bozulmaları gibi süreçlerin modellenmesinde kullanılabilir.

Dalga hareketini belirleyen faz değişkeni:

$$\xi = \sqrt{\mu} (kx - vt),$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada  $v$  dalganın zamana bağlı hızını ifade etmektedir.

Çözümde kullanılan tan fonksiyonun periyodu:

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}k},$$

olarak belirlenmektedir.

Dalganın hareket yönü:

$v < 0$ , ise sola doğru

$v > 0$ , ise sağa doğru hareket eder.

Bu durum kapsamında elde edilen bu çözüm, zamana bağlı, periyodik, yüksek enerjili ve süreksizlik içeren bir gezici dalga profili sunmakta; bu yönüyle klasik tanh/kink yapılarından farklı olarak ani sıçrama ve rezonans odaklı fiziksel süreçleri temsil etme kapasitesi taşımaktadır. Bu çözüm türü, alt denklem metodunun sunduğu zengin dalga yapılarından biri olarak, STOB denkleminin fiziksel modelleme gücünü bir kez daha ortaya koymaktadır.

Genel olarak, bu tezde lineer olmayan evrim denklemlerinin gezici dalga çözümlerine yönelik alt denklem ve geliştirilmiş alt denklem yöntemleri incelenmiş, STOB denklemi üzerinde uygulanarak farklı formlarda gezici dalga çözümleri başarıyla elde edilmiştir. Elde edilen çözümler yalnızca tutarlı matematiksel biçimler sunmakla kalmamış, aynı zamanda fiziksel açıdan anlamlı dalga yapıları ortaya koymuştur. Matematiksel analiz kapsamında çözümlerin varlığı ve geçerliliği, yöntemsel adımlar aracılığıyla sistematik biçimde analiz edilmiş; fiziksel incelemelerde dalga profillerinin zamana bağlı evrimi ile genlik ve hız özellikleri değerlendirilmiştir. Üç boyutlu, iki boyutlu ve kontur görselleri, çözümlerin soliton benzeri yapısını açık biçimde göstermiştir. Bulgular, kullanılan yöntemlerin hem kuramsal analiz hem de uygulamalı modelleme açısından etkili bir araç olduğunu ortaya koymaktadır. Ayrıca bu tez, diferansiyel denklemlerin analitik çözüm yöntemlerine katkı sunarken fiziksel sistemlerin davranışlarının daha doğru anlaşılmasına imkân vermektedir.

Gelecek çalışmalar kapsamında bu yöntemlerin, benzer nitelikteki lineer olmayan evrim denklemlerine uygulanması mümkündür. Bu sayede kink, şok, periyodik ve darbe çözümlerinin etkileşim koşulları daha ayrıntılı olarak incelenebilir. Ayrıca elde edilen çözümler, farklı fiziksel alanlardaki uygun parametrelerle ilişkilendirilerek daha somut ve anlamlı yorumlar yapılabilir.

## KAYNAKÇA

- Abd-el-Malek, M. B., & El-Mansi, S. M. (2000). Group Theoretic Methods Applied to Burgers' Equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1-12.
- Akbari, M. (2017). Application of Kudryashov method for the Ito equations. *Applications and Applied Mathematics: An International Journal*, 12(1), 9.
- Alia, I., Rizvi, S. T., Abbas, S. O., & Zhou, Q. (2019). Optical Solitons for Modulated Compressional Dispersive Alfven and Heisenberg Ferromagnetic Spin Chains. *Physics*.
- Arora, G., Rani, R., & Emadifar, H. (2022). Soliton: A dispersion-less solution with existence and its types. *Heliyon* 8, 8(12).
- Aydemir, T. (2016). *Tanh-yöntemi ile  $(G'/G)$ -açılım yönteminin karşılaştırılması ve birleştirilmiş yöntemin geliştirilmesi*. Doktora Tezi, Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimler Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Sakarya, Türkiye.
- Aydın, G. (2020).  *$(1/G')$ -Açılım metodu ile bazı lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri*. Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı. Elazığ: Fırat Üniversitesi.
- Aydın, Z. (2024). *Kudryashov metodunun farklı türleriyle bazı lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin tam çözümleri*. Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı, Eskişehir, Türkiye.
- Bateman, H. (1915). Some Recent Researches on the Motion of Fluids. *Monthly Weather Review*, 163-170.
- Bayram, M. (2010). *Diferansiyel Denklemler*. İstanbul: Birsen Yayınevi.
- Borzi, A. (2020). A Comprehensive Approach. *Modelling with Ordinary Differential Equations*. içinde New York.
- Boyce, W. E., DiPrima, R. C., & Meade, D. B. (2017). *Elementary differential equations and boundary value problems*. John Wiley & Sons.
- Bulut, S. (2019). *Bazı lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin hareket eden dalga çözümlerinin bulunması*. Yüksek Lisans, Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, Elazığ, Türkiye.

- Burgers, J. M. (1948). A Mathematical Model Illustrating the Theory of Turbulence. *Technical University, Delft, Holland*, 171-199.
- Bülbül, B. (2011). *İkinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin Taylor polinom çözümleri*. Muğla Üviversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı. Muğla: Muğla Üniversitesi.
- Chaohao, G. (2013). *Soliton theory and its applications*. The People's Republic of China: Springer Science & Business Media. doi: 10.1007/978-3-662-03102-5
- Demiray, Ş. T. (2014). *Lineer ve lineer olmayan kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemleri*. Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Elazığ, Türkiye.
- Dikici, M. K. (2022). *Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin yürüyen dalga çözümlerinin incelenmesi*. Yüksek Lisans Tezi, Ordu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Ordu, Türkiye.
- Duran, S. (2012). *Bazı lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin özel dönüşümler yardımıyla dalga çözümleri ve bu çözümlerin analizleri*. Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, Elazığ, Türkiye.
- Durur, H., Kurt, A., & Taşbozan, O. (2020). New travelling wave solutions for KdV6 equation using sub equation method. *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences*, 5(1), 455-460. doi:10.2478/amns.2020.1.00043
- Elma, B. (2017). *Lineer olmayan evrim denklemlerinin yarı analitik çözümleri üzerine*. Yüksek Lisans, Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, İzmir, Türkiye.
- Evans, L. C. (2010). *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society.
- Fermi, E., Pasta, J., & Ulam, S. (1955). Studies of Nonlinear Problems. *Los Alamos Scientific Laboratory of the University of California*.
- Filippov, A. T. (2010). *The Versatile Soliton*. Springer New York Dordrecht Heidelberg London : Springer Science+Business Media.
- Gao, Q., & Zou, M. (2017). An analytical solution for two and three dimensional nonlinear Burgers' equation. *Applied Mathematical Modelling*, 45, 255-270. doi:10.1016/j.apm.2016.12.018.
- Gardner, C. S., Greene, J. M., Kruskal, M. D., & Miura, R. M. (1967). Method for Solving the Korteweg-De Vries Equation. *Physical Review Letters*.

- Ghany, H. A., Hyder, A.-A., & Zakarya, M. (2020). Exact Solutions of Stochastic Fractional Korteweg De–Vries Equation with Conformable Derivatives. *Chinese Physics B*. doi: 10.1088/1674-1056/ab75c9
- Gomez, S., & Hernandez, J. (2017). Traveling Wave Solutions for Burgers-Sharma-Tasso-Olver Equation with Variable Coefficients: The Improved tanh-coth Method vs. Exp. Function Method. *International Journal of Mathematical Analysis*, 11(17), 825 - 831.
- Gülecan, T. (2019). *Lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümüne farklı bir yaklaşım*. Yüksek Lisans, Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Sakarya,Türkiye.
- Haberman, R. (2013). *Applied partial differential equations with Fourier series and boundary value problems*. Pearson.
- Hasanov, E., Uzgören, G., & Büyükaksoy, A. (2002). *Diferansiyel Denklemler Teorisi*. İstanbul: Papatya Yayıncılık.
- Hussain, E., Mutlib, A., Li, Z., E.Ragab, A., Shah, S. A., Az-Zo'bi, E. A., & Raees, N. (2024). Theoretical examination of solitary waves for Sharma–Tasso–Olver Burgers equation by stability and sensitivity analysis. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 75(3), 96. doi:10.1007/s00033-024-02225-8
- Isah, M. A. (2024). *Studies on mathematical models of seismic wave*. Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı, Elazığ, Türkiye.
- Ismael, H. F., Younas, U., Sulaiman, T. A., Nasreen, N., & Ali, N. A. (2023). Non classical interaction aspects to a nonlinear physical model. *Results in Physics*, 49, 106520. doi:10.1016/j.rinp.2023.106520
- Jiang, Y., Tian, B., Sun, K., & Liu, L.-C. (2016). Mixed-type solitons and soliton interaction for the  $(2+1)$ -dimensional two-component long wave–short wave resonance interaction equations in a two-layer fluid through the Bell polynomials. *Applied Mathematics Letters*, 53, 69-79.
- Kara, S. (2022, Haziran). *Lineer olmayan oluşum denklemlerinin dalga çözümleri ve analizleri*. Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı, Eskişehir, Türkiye.

- Khan, M. (2014). A Novel Solution Technique for Two Dimensional Burger's Equation. *Alexandria Engineering Journal*, 53(2), 485–490.
- Khana, K., Koppelaar, H., Akbar, M. A., & Mohyud-Din, S. T. (2024). Analysis of travelling wave solutions of double dispersive Sharma-Tasso-Olver equation. *Journal of Ocean Engineering and Science*, 9(5), 461-474.
- Krantz, S. G. (2020). *Differential Equations: A Modern Approach with Wavelets*. Boca Raton, Florida (ABD): Chapman & Hall/CRC.
- Kreyszig, E. (2020). *Advanced Engineering Mathematics*. John Wiley & Sons.
- Kudryashov, N. A. (2012). Special polynomials associated with the Burgers hierarchy. *Applied Mathematics and Computation*, 218(15), 7972–7976.
- Kumar, N. K. (2023). A Review On Burgers' Equations and It's Applications. *Journal of Institute of Science and Technology*, 49-52.
- Li, H. (2022). *Numerical Methods Using Java: For Data Science, Analysis, and Engineering*. New York: Apress.
- Liu, J.-J. (2021). Sharma-Tasso-Olver equation involving a new time fractal derivative. *Thermal Science*, 25(3), 2101-2107. doi:10.2298/TSCI200322094L
- Liu, S., Fu, Z., Liu, S., & Zhao, Q. (2001). Jacobi elliptic function expansion method and periodic wave solutions of nonlinear wave equations. *Physics Letters A*, 289(1-2), 69–74.
- Logan, J. D. (2015). *Applied Partial Differential Equations*. Springer.
- Malfliet, W. (1996). The tanh method: I. Exact solutions of nonlinear evolution and wave equations. *Physica Scripta*, 54(6), 563.
- Manevitch, L., & Smirnov, V. (2008). *Solitons in Macromolecular Systems*. Nova Biomedical Books (s. 9-10). içinde New York: Nova Science Publishers.
- Marcks von Württemberg, I. (2011). Ill-posed problems and their applications to climate research. *Examensarbete i matematik*, 15 hp. Uppsala University.
- Miao, Z., Hu, X., & Chen, Y. (2021). Interaction phenomenon to (1+1)-dimensional Sharma-Tasso-Olver-Burgers equation. *Applied Mathematics Letters*, 112, 106722.
- Murad, M. A., Ismael, H. F., Sulaiman, T. A., Shah, N. A., & Chung, J. D. (2023). Higher-order time-fractional Sasa–Satsuma equation: Various optical soliton solutions in optical fiber. *Results in Physics*, 55, 107162.

- Myint-U, T., & Debnath, L. (2007). *Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. Boston: Birkhäuser.
- Naowarat, S. S. (2023). Periodic, singular and dark solitons of a generalized geophysical KdV equation by using the tanh-coth method. *Symmetry*, 15(1), 135.
- Newell, A. O. (1983). John Scott Russell's Discovery. *The History of the Soliton*. içinde University of Arizona: Asme.
- Odabaşı, M. (2015). *Dalga dönüşümü altında indirgenebilen lineer olmayan bazı fiziksel denklemlerin yarı analitik çözümleri üzerine*. Doktora Tezi, Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, İzmir, Türkiye.
- Order and Degree of Differential Equations*. (2025, July 23). GeeksforGeeks: <https://www.geeksforgeeks.org/maths/order-and-degree-of-differential-equations/> adresinden alındı
- Or-Roshid, H., & Rashidi, M. (2017). Multi-soliton fusion phenomenon of Burgers equation and fission, fusion phenomenon of Sharma–Tasso–Olver equation. *Journal of Ocean Engineering and Science*, 120-126.
- Rani, A., Khan, N., Ayub, K., Khan, M. Y., Mahmood-Ul-Hassan, Q., Ahmed, B., & Ashraf, M. (2019). Solitary wave solution of nonlinear PDEs arising in mathematical physics. *Open Physics*, 17(1), 381–389. doi:10.1515/phys-2019-0043
- Ray, D. S., & Gupta, D. A. (2018). *Wavelet Methods for Solving Partial Differential Equations and Fractional Differential Equations*. New York: Dr. Arun Kumar Gupta.
- Rehman, S. U., Ahmad, J., Nisar, K. S., & Abdel-Aty, A.-H. (2024). Stability Analysis, Lump and Exact Solutions to Sharma–Tasso–Olver–Burgers Equation. *Optical and Quantum Electronics*. doi:10.1007/s11082-024-06733-9
- Rice, J. R. (1993). *Ordinary Differential Equations*. Elsevier – Handbook of Numerical Analysis.
- Roshid, H.-O. R., Roshid, M. M., Rahman, N., & Pervin, M. R. (2017). New solitary wave in shallow water, plasma and ion acoustic plasma via the GZK-BBM equation and the RLW equation. *Propulsion and Power Research*, 6(1), 49-57.
- Ross, S. L. (1984). *Differential equations (3rd ed.)*. John Wiley & Sons.

- Sadek, S., Chadli, L. s., Moujahid, A., Elomari, M., & Melliani, S. (2024). Generalized Solution of Burgers Equation. *Filomat*, 38(2), 589-597.
- Sakkaravarthi, K., Mareeswaran, R. B., & Kanna, T. (2020). Engineering optical rogue waves and breathers in a coupled nonlinear Schrödinger system with four-wave mixing effect. *Physica Scripta*, 95(9), 095202.
- Shakir, A. P., Sulaiman, T. A., Ismael, H. F., Shah, N. A., & Eldin, S. M. (2023). Multiple fusion solutions and other waves behavior to the Broer-Kaup-Kupershmidt system. *Alexandria Engineering Journal*, 74, 559–567.
- Sheikh, M. A., Taher, M. A., Hossain, M. M., Akter, S., & Roshid, H.-O.-R. (2023). Variable coefficient exact solution of Sharma–Tasso–Olver model by enhanced modified simple equation method. *Partial Differential Equations in Applied Mathematics*, 7, 100527. doi:10.1016/j.padiff.2023.100527
- Shyaman, V. P., Sreelakshmi, A., & Awasthi, A. (2024). An Implicit Tailored Finite Point Method for the Burgers' Equation:Leveraging the Cole-Hopf Transformation. *Physica Scripta*.
- Sinai, Y. G. (1992). Statistics of Shocks in Solutions of Inviscid Burgers Equation. *Communications in Mathematical Physics*, 148(3), 601-621.
- Singh, P., & Senthilnathan, K. (2024). Evolution of a solitary wave: optical soliton, soliton molecule and soliton crystal. *Discover Applied Sciences*, 6(9), 464. doi:10.1007/s42452-024-06152-1
- Taylor, M. E. (2011). *Partial Differential Equations*. London: Springer.
- Ullah, M. S., & Ali, M. Z. (2024). Bifurcation Analysis and New Waveforms to the Fractional KFG Equation. *Partial Differential Equations in Applied Mathematics*.
- Wang, M., Li, X., & Zhang, J. (2008). The (G'/G)-expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics. *Physics Letters A*, 372(4), 417–423.
- Wang, S., Tang, X.-y., & Lou, S.-Y. (2004). Soliton fission and fusion: Burgers equation and Sharma-Tasso-Olver equation. *Chaos, Solitons & Fractals*, 21(1), 231-239.
- Wazwaz, A.-M. (2005). The tanh method: Exact solutions of the sine-Gordon and the sinh-Gordon equations. *Applied Mathematics and Computation*, 167(2), 1196–1210.

- Wazwaz, A.-M. (2009). *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory*. London New York: Springer.
- Yan, Z., & Lou, S. (2020). Soliton molecules in sharma–tasso–olver–burgers equation. *Applied Mathematics Letters*, 104, 106271. doi:10.1016/j.aml.2020.106271
- Yang, S. (2022). Traveling Wave Solution for Sharma–Tasso–Olver–Burgers (STOB) Equation by the  $(G'/G)$ -Expansion Method. *Scholars Journal of Physics, Mathematics and Statistics*.
- Yanovsky, I. (2005). *Partial Differential Equations: Graduate Level Problems and Solutions*. Los Angeles: University of California.
- Yapışkan, B. (2022). Hirota Method And Soliton Solutions. *Middle East Journal of Science*, 157-172. doi:10.51477/mejs.1029348
- Yıldız, İ. (1998). *Adi Diferansiyel Denklemler*. Erzurum: Aktif Yayınevi.
- Yokuş, A. (2011). *Bazı özel lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümlerinin elde edilmesi ve bu çözümlerin karşılaştırılması*. Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Elazığ, Türkiye.
- Yokuş, A., Durur, H., & Ahmad, H. (2020). Hyperbolic type solutions for the couple Boiti-Leon-Pempinelli system. *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics*, 35(2), 523-531. doi:10.22190/FUMI2002523Y
- Yomba, E. (2005). The modified extended Fan's sub-equation method and its application to  $(2+1)$ -dimensional dispersive long wave equation. *Chaos, Solitons & Fractals*, 26(3), 785–794.
- Younas, U., Sulaiman, T. A., Ismael, H. F., Ren, J., & Yusuf, A. (2024). The study of nonlinear dispersive wave propagation pattern to Sharma-Tasso-Olver–Burgers equation. *International Journal of Modern Physics B*, 38(08). doi:10.1142/S0217979224501121
- Younas, U., Sulaiman, T., Ismael, H. F., Shah, N. A., & Eldin, S. M. (2023). On the lump interaction phenomena to the conformable fractional  $(2+1)$ -dimensional KdV equation. *Results in Physics*, 52, 106863. doi:10.1016/j.rinp.2023.106863
- Yu, J., Ren, B., & Wang, W.-L. (2022). Symmetry Reductions, Cte Method and Interaction Solutions for Sharma-Tasso-Olver-Burgers Equation. *Symmetry*, 14(8), 1690.

- Zabusky, N. J., & Kruskal, M. D. (1965). Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Physical Review Letters*, 15(6), 240.
- Zachmanoglou, E. C., & Thoe, D. W. (1976). *Introduction to partial differential equations with applications*. New York: Williams & Wilkins.
- Zhang, Y. (2016). Lie symmetry analysis and exact solutions of the Sharma-Tasso-Olever Equation. *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, 46(2).
- Zill, D. G. (2018). *A First Course in Differential Equations with Modeling Applications (11th ed.)*. Boston, Massachusetts: Cengage Learning.



## EKLER

### EK 1. ORJİNALLİK RAPORU FORMU



### ARDAHAN ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU

#### ARDAHAN ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ İLERİ TEKNOLOJİLER ANA BİLİM DALI BAŞKANLIĞINA

Tarih: 22/09/2025

Tez Başlığı: Geliştirilmiş Alt Denklem Metodu ile Lineer Olmayan Evrim Denkleminin Gezici Dalga Çözümlerinin Oluşturulması  
Yukarıda başlığı gösterilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş c) Ana bölümler ve d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam 90 sayfalık kısmına ilişkin, 22/09/2025 tarihinde tez danışmanım tarafından Turnitin adlı intihal tespit programından aşağıda işaretlenmiş filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 8'dir.

Uygulanan filtrelemeler:

- 1- ☒ Kabul/Onay ve Bildirim sayfaları hariç
- 2- ☒ Kaynakça hariç
- 3- ☒ Alıntılar dahil
- 4- ☒ 5 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Ardahan Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nde belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

22/09/2025

|                 |                                                                                    |
|-----------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| Adı Soyadı:     | Reyhan Arslantürk                                                                  |
| Öğrenci No:     | 22408700011                                                                        |
| Ana Bilim Dalı: | İleri Teknolojiler Ana Bilim Dalı                                                  |
| Programı:       | İleri Teknolojiler                                                                 |
| Statüsü:        | <input checked="" type="checkbox"/> Yüksek Lisans <input type="checkbox"/> Doktora |

### DANIŞMAN GÖRÜŞÜ VE ONAYI

Doç. Dr. Hülya DURUR

**Detaylı Bilgi:** <https://www.ardahan.edu.tr/birim.aspx?id=1002003>

**Telefon:** 0-4782117522

**Faks:** 0-4782117523

**E-posta:** [sbe@ardahan.edu.tr](mailto:sbe@ardahan.edu.tr)

**EK 2. ETİK KURUL MUAFİYET FORMU**

**ARDAHAN ÜNİVERSİTESİ**  
**LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**  
**TEZ ÇALIŞMASI ETİK KOMİSYON MUAFİYETİ FORMU**

**ARDAHAN ÜNİVERSİTESİ**  
**LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**  
**İLERİ TEKNOLOJİLER ANA BİLİM DALI BAŞKANLIĞINA**

Tarih: 12/09/2025

Tez Başlığı: Geliştirilmiş Alt Denklem Metodu ile Lineer Olmayan Evrim Denkleminin Gezici Dalga Çözümlerinin Oluşturulması

Yukarıda başlığı gösterilen tez çalışmam:

1. İnsan ve hayvan üzerinde deney niteliği taşımamaktadır,
2. Biyolojik materyal (kan, idrar vb. biyolojik sıvılar ve numuneler) kullanılmasını gerektirmemektedir.
3. Beden bütünlüğüne müdahale içermemektedir.
4. Gözlemsel ve betimsel araştırma (anket, mülakat, ölçek/skala çalışmaları, dosya taramaları, veri kaynakları taraması, sistem-model geliştirme çalışmaları) niteliğinde değildir.

Tez çalışmamın yürütülebilmesi için herhangi bir Etik Kurul/Komisyon'dan izin alınmasına gerek olmadığını; aksi durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

12/09/2025

Adı Soyadı: Reyhan Arslantürk  
 Öğrenci No: 22408700011  
 Ana Bilim Dalı: İleri Teknolojiler Ana Bilim Dalı  
 Programı: İleri Teknolojiler  
 Statüsü: ☒ Yüksek Lisans ☐ Doktora

**DANIŞMAN GÖRÜŞÜ VE ONAYI**

Doç. Dr. Hülya DURUR

Detaylı Bilgi: <https://www.ardahan.edu.tr/birim.aspx?id=1002003>

Telefon: 0-4782117522

Faks: 0-4782117523

E-posta: [sbe@ardahan.edu.tr](mailto:sbe@ardahan.edu.tr)

## ÖZ GEÇMİŞ

### Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Reyhan Arslantürk  
Doğum Yeri ve Tarihi :

### Eğitim Durumu

Lisans Öğrenimi : Kafkas Üniversitesi Eğitim Fakültesi  
Yüksek Lisans Öğrenimi : Ardahan Üniversitesi  
Bildiği Yabancı Diller : İngilizce  
Bilimsel Faaliyetleri :

Durur, H., Aydın, A., & Arslantürk, R. (2023). Investigation of Hyperbolic Type Solutions of the Fitzhugh-Nagumo Model in Neuroscience. *İleri Teknolojilerde Çalışmalar Dergisi*, 1(1), 11-16

Durur, H., Arslantürk, R., & Aydın, A. (2024). Mathematical analysis of electric signal transmission in semi-conductor materials. *Modern Physics Letters B*, 38(17), 2450132.

Durur, H., & Arslantürk, R. (2025). The construction of traveling wave solutions of the Sharma–Tasso–Olver–Burgers equation using the sub-equation method. *Modern Physics Letters B*, 2550239.

### İş Deneyimi

Stajlar : -  
Projeler : -  
Çalıştığı Kurumlar : -

### İletişim

E-Posta Adresi :

### Tarih

Jüri Tarihi :12/09/2025