

T.C.
ERZİNCAN BİNALİ YILDIRIM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

GELİŞTİRİLMİŞ ALTERNATİF ORTOGONAL ÇATIYA GÖRE
BAZI ÖZEL EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONLARI

Gökhan MUMCU

Danışman: Prof. Dr. Sezai KIZILTUĞ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

ERZİNCAN
2023
Her Hakkı Saklıdır.

ÖZET

Doktora Tezi

GELİŞTİRİLMİŞ ALTERNATİF ORTOGONAL ÇATIYA GÖRE BAZI ÖZEL EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONLARI

Gökhan MUMCU

Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Sezai KIZILTUĞ
İkinci Danışman: Doç. Dr. Ali ÇAKMAK

Bu tez çalışmasında, geliştirilmiş alternatif ortogonal çatı tanımlanmıştır. Bu çatıya göre bazı özel eğriler ile regle yüzey incelenmiştir. Tez beş ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, eğri ve yüzey teorisinin diferansiyel geometrideki öneminden ve kullanım alanlarından bahsedilmiştir. İkinci bölümde, literatür araştırmasına yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, tezde kullanılacak temel tanım ve teoremler verilmiştir. Dördüncü bölümde, ilk olarak modifiye ortogonal çatı incelenmiştir. İkinci olarak, alternatif hareketli çatı ve teoremleri ele alınmıştır. Üçüncü olarak, C -partner eğriler ve bu eğrilerin bazı özel eğriler ile arasındaki ilişkileri tanıtılmıştır. Beşinci bölümde ise, eğrinin alternatif eğriliğinin sıfır olduğu noktalarda eğriyi karakterize eden $\{N^*, C^*, W^*\}$ geliştirilmiş alternatif ortogonal çatı tanımlanmıştır. Bu çatıya göre N^* -slant helis ve C^* -slant helis tanımları verilmiştir. Buradan geliştirilmiş alternatif ortogonal çatıya göre C^* -partner eğrileri tanımlanıp bazı özel eğriler ile ilişkileri incelenmiştir. Beşinci bölümün son kısmında, geliştirilmiş alternatif ortogonal çatıya göre regle yüzey incelenmiş ve regle yüzeyin açılabilir olma şartlarına bakılmıştır.

2023, 94 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Geliştirilmiş alternatif ortogonal çatı, C^* -partner eğriler, C^* -slant helis, N^* -slant helis.

ABSTRACT

PhD Thesis

CHARACTERIZATIONS OF SOME SPECIAL CURVES ACCORDING TO THE MODIFIED ADAPTED ORTHOGONAL FRAME

Gökhan MUMCU

Erzincan Binali Yildirim University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Sezai KIZILTUĞ
Second Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ali ÇAKMAK

In this thesis, the modified adapted orthogonal frame is defined. Some special curves and ruled surfaces are examined according to this frame. There are five main sections in the thesis. The first section discussed significance and use of the curve and surface theory in differential geometry. The literature review is given in the second section. Some basic definitions and theorems that are used in this thesis are given in the third section. The modified orthogonal frame is initially analyzed in the fourth section. Additionally, alternative moving frame and their theorems are addressed. Thirdly, C -partner curves and their relationships with some special curves are introduced. The fifth section introduced a newly constructed modified alternative orthogonal frame $\{N^*, C^*, W^*\}$ that characterizes curves based on where their alternative curvature points are zero. N^* -slant helix and C^* -slant helix definitions are provided with respect to this frame. C^* -partner curves are defined, and then their relationships with some special curves are investigated based on the modified alternative orthogonal frame. In the last part of the fifth section, the ruled surface has been examined according to the modified adapted orthogonal frame, and the conditions of the developable ruled surface are discussed.

2023, 94 Pages

Keywords: Modified adapted orthogonal frame, C^* -partner curves, C^* -slant helices, N^* -slant helices.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca yardımlarıyla, yönlendirmeleriyle, destek, bilgi ve deneyimleriyle yol gösteren desteğini her zaman hissettiğim, varlığından onur duyduğum kıymetli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Sezai KIZILTUĞ’a teşekkürü bir borç bilirim.

İkinci tez danışmanım ayrıca tez izleme komitesinde yer alan destek ve yönlendirmeleriyle her zaman yanımda olan kıymetli hocam Sayın Doç. Dr. Ali ÇAKMAK’a ve tez izleme komitesinde yer alan komite üyesi hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Funda AKAR’a teşekkür ederim.

Çalışmalarım boyunca farklı bakış açıları kazandıran ve çalışma yöntemleri öğreten, bilimsel katkılarıyla beni aydınlatan, ilgi ve yardımlarını asla esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Tülay ERİŞİR’e saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ailem olmalarından şeref duyduğum sabır ve destekleriyle beni yalnız bırakmayan en büyük destekçilerim başta eşim Elif MUMCU’ya, kardeşlerim Merve ve Güven ÇINAR’a, annem ve babam Filiz ve Orhan MUMCU’ya en içten teşekkürlerimi sunarım.

Gökhan MUMCU

Haziran, 2023

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİLLER LİSTESİ	v
1. GİRİŞ.....	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	4
3. KURAMSAL TEMELLER.....	7
3.1. Afın Uzayı.....	7
3.2. Öklid Uzayı	9
3.3. Eğriler Teorisi	10
3.4. Yüzey Teorisi	19
4. MATERYAL ve YÖNTEM.....	21
4.1. Yöntem	21
5. ARAŞTIRMA BULGULARI	35
5.1. Geliştirilmiş Alternatif Ortogonal Çatı, N^* -Slant Helis ve C^* -Slant Helis.....	35
5.2. Geliştirilmiş Alternatif Ortogonal Çatıya Göre C^* -Partner Eğrileri	42
5.3. Geliştirilmiş Alternatif Ortogonal Çatıya Göre Regle Yüzeyler.....	68
5.4. Özel Şartlar Altında Geliştirilmiş Alternatif Ortogonal Çatıya Göre Regle Yüzeylerin Karakterizasyonları.....	76
6. SONUÇ ve ÖNERİLER.....	88
KAYNAKLAR	90

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1.1. 3-boyutlu Öklid uzayında eğri üzerinde çatı hareketi.....	2
Şekil 1.2. Nükleer soğutma kuleleri.....	3
Şekil 1.3. Regle yüzey oluşturan katenerler.....	3
Şekil 1.4. Walt Disney konser salonu, Los Angeles, Birleşik Devletler.....	3
Şekil 3.1. 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet 3-ayaklısı	13
Şekil 3.2. $-2\pi < s < 2\pi$ aralığı için β dairesel helis eğrisi	16
Şekil 3.3. $-\pi < t < \pi$ aralığı için Φ slant helis eğrisi	17
Şekil 4.1. Eğri üzerinde $\{N, C, W\}$ alternatif hareketli çatı	25
Şekil 5.1. N^* ve N_1^* ile W^* ve W_1^* arasındaki ϱ açısı	47
Şekil 5.2. ω dairesel helisi (kırmızı) ve ψ^* , C^* -partner eğrisi (mavi).....	64
Şekil 5.3. ω dairesel helisi (kırmızı) ve ψ^{**} , C^* -partner eğrisi (mavi)	65
Şekil 5.4. ω slant helis eğrisi (kırmızı) ve ψ^* , C^* -partner eğrisi (mavi).....	67
Şekil 5.5. ω slant helisi (kırmızı) ve ψ^{**} , C^* -partner eğrisi (mavi)	68
Şekil 5.6. γ dairesel helisi ve $\phi(v, t)$ regle yüzeyi	72
Şekil 5.7. γ dairesel helisi ve $\phi(v, t)$ regle yüzeyi	74
Şekil 5.8. γ eğrisi ve $\phi(v, t)$ regle yüzeyi	76
Şekil 5.9. γ dairesel helisi ve doğrultman vektörü N^* olması halinde $\phi(v, t)$ regle yüzeyi	82
Şekil 5.10. γ dairesel helisi ve doğrultman vektörü C^* olması halinde $\phi(v, t)$ regle yüzeyi	83
Şekil 5.11. γ dairesel helisi ve doğrultman vektörü W^* olması halinde $\phi(v, t)$ regle yüzeyi	84
Şekil 5.12. γ dairesel helisi ve doğrultman vektörü $Sp\{N^*, C^*\}$ olması halinde $\phi(v, t)$ regle yüzeyi	85
Şekil 5.13. γ dairesel helisi ve doğrultman vektörü $Sp\{N^*, W^*\}$ olması halinde $\phi(v, t)$ regle yüzeyi	86
Şekil 5.14. γ dairesel helisi ve doğrultman vektörü $Sp\{C^*, W^*\}$ olması halinde $\phi(v, t)$ regle yüzeyi	87

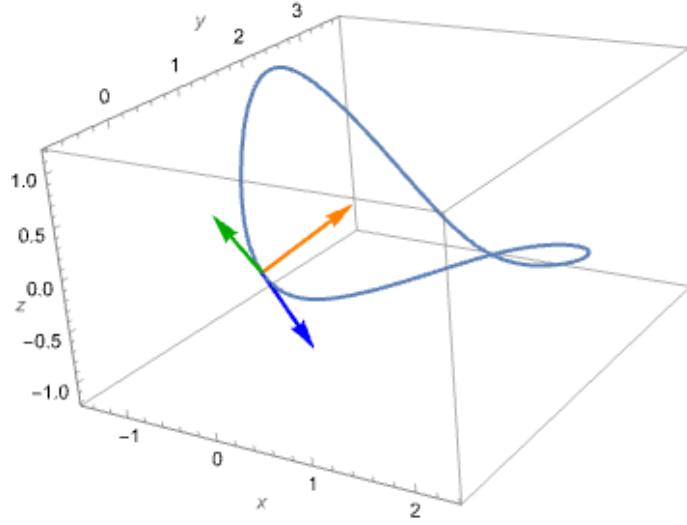
SİMGELER

Simgeler

$\langle , \rangle$	Öklid uzayında iç çarpım
$\ \quad \ $	Norm
$\times$	Vektörel çarpım
A	Afin uzay
B	Eğrinin binormal vektörü
D	Darboux vektörü
$\mathbb{E}^n$	n -Boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{E}^3$	3-Boyutlu Öklid uzayı
$\{f, g\}$	Alternatif hareketli çatıya göre eğrilikler
κ	Eğrinin birinci eğriliği
N	Eğrinin asli normal vektörü
$\{N, C, W\}$	Alternatif hareketli çatı
$\{N^*, C^*, W^*\}$	Geliştirilmiş alternatif ortogonal çatı
P_x	Rege yüzeyin drali
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
T	Eğrinin teğet vektörü
$\{T, N, B\}$	Frenet çatı
$\{t, n, b\}$	Modifiye ortogonal çatı
τ	Eğrinin burulması
V	Vektör uzayı

1. GİRİŞ

Diferansiyel geometri, geometri problemlerini lineer cebir, diferansiyel analiz, integral analiz ve topolojiyi kullanarak ele alan daha çok 18. yüzyıldan itibaren gelişme gösteren matematiğin bir dalıdır. Diferansiyel geometri ile eğrilerin ve yüzeylerin incelenmesinden elde edilen sonuçlar yardımıyla fizik problemleri çözülmüş, bilgisayar grafikleri oluşturulmuş ve bu sonuçlar animasyon, bilgisayar destekli tasarım gibi alanlarda kullanılmıştır. Diferansiyel geometrinin en çok araştırılan alanlarından biri de farklı boyut ve uzaylarda incelenen eğri teorisidir. Matematikte eğriler denilince ilk düşünülen kavram hareketli bir noktanın bıraktığı iz olarak düşünülebilir yani uzayda hareket eden bir noktanın aldığı farklı durumların geometrik konumu bir eğridir. Bu harekette, eğrinin parametre aralığı hareket boyunca geçen süreyi temsil eder. Ayrıca eğrinin parametresi de eğriyi karakterize etmede önemli bir yere sahiptir. Eğrinin eğrilikleri ise eğriyi karakterize eden diğer etkenlerdendir. Eğriler teorisinde bir eğrinin Serret-Frenet denklemlerinin oluşturulması ve eğrinin eğriliklerinin hesaplanması eğriyi karakterize etmek için kullanılır. Örneğin, 3-boyutlu Öklid uzayında eğrinin eğriliği κ ve eğrinin burulması τ yardımıyla eğrinin düzlemsel olup olmadığı, eğrinin şekli ve büyüklüğü hakkındaki bilgilere sahip olunabilir. Öte yandan, Frenet vektörleri arasındaki ilişkiler yardımıyla iki eğri arasında eğri çiftleri oluşturulabilir. Bertrand, Mannheim ve İnvolut-Evolüt eğri çiftleri bu ilişkilerden doğmuştur. Bunlara ek olarak bir eğrinin karakterizasyonu için önemli etkenlerden biri de çatı hareketleridir. Eğri üzerinde çatılar, başlarda Öklid çatısında olduğu gibi bulunduğu uzayda isimlendirilse de bir uzayda birden fazla çatı olduğu görülünce farklı isimler de almıştır. Çatı vektörleri, belirli açılarla döndürülerek yeni çatılar elde edilmiştir. Örneğin Bishop, Darboux, Sabban vb. gibi çatılar eğrinin hareketini karakterize etmek için kullanılan farklı yaklaşımlardır. Bu çatılar sayesinde Frenet çatısının tanımlanamadığı durumlarda alternatif bir çözüm yolu bulunmuştur. Bu gibi çatılarla elde edilen eğriler ile eğri ilişkileri bilgisayar destekli geometrik tasarımlar (CAD), bilgisayar destekli üretimler (CAM), robotik hareketler, mekanik gibi alanlarda önemli yere sahip olmuş ve problemin çözümüne katkı sağlamıştır.



Şekil 1.1. 3-boyutlu Öklid uzayında eğri üzerinde çatı hareketi

Diferansiyel geometrinin incelediği diğer bir konu ise yüzeylerdir. Bir uzayda ele alınan eğri üzerindeki bir doğrultmanın hareketiyle oluşan yüzeyler, yüzey konusu içerisinde önemli bir rol oynar. En önemli yüzeylerden biri olan regle yüzey ise -diğer adıyla çizgili yüzey- bir M yüzeyinin her noktasında, M yüzeyi üzerine tamamen yerleşen bir düz çizgi bulunan yüzeylerdir. En iyi bilinen regle yüzeyler silindir, koni, çift kanatlı hiperboloid ve helisoiddir. Regle yüzeylerin denklemi ilk kez Monge (1850) tarafından elde edilmiştir. Regle yüzeyler uzayda dayanak eğrisi veya taban eğrisi de denilen bir eğri üzerinde düz bir çizginin sürekli devinimi ile elde edilen yüzeylerdir. Açılabilir yüzeyler ise gerilmeden ve yırtılmadan düzleme serilebilir yüzeylerdir. Regle yüzeylerin özel bir hali olan açılabilir regle yüzeyler ise düzleme izometrik olarak eşlenebilir bu yüzden sadece açılabilir regle yüzeyler izometrik olarak düzleme dönüştürülebilir. Açılabilir regle yüzeyin bu önemli özelliğinden dolayı metal temelli endüstrilerde, otomobil, gemi ürünlerinin üretiminde, uzay kinematiğinde, hareket edebilen tüm cisimlerin hareket analizinde, katı cisimlerin simülasyonu ile üç boyutlu dijital kopyalarının oluşturulmasında ve nesne tanıma sistemlerinde bilgisayarlı görü uygulamaları için kritik öneme sahiptir. Bu sebeple, makine mühendisleri, bilgisayar bilimciler, bilgisayar destekli yazılımcılar vb. alanlardaki bilim adamları bu yüzeyleri incelemişlerdir. Regle yüzeylerden ilham alan başka bir alan da mimari tasarımlardır. Regle yüzeylerin mimari alandaki kullanımı gösteren bazı önemli eserler aşağıda verilmiştir.



Şekil 1.2. Nükleer soğutma kuleleri



Şekil 1.3. Regle yüzey oluşturan katenerler



Şekil 1.4. Walt Disney konser salonu, Los Angeles, Birleşik Devletler

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Regüler eğrinin karakterizasyonları eğri teorisinde en önemli çalışma alanlarından biridir. Bu karakterizasyonlardan biri olan eğrinin eğrilik ve burulması problemin çözümünde büyük rol oynamaktadır. Eğrilik ve burulma kullanılarak bazı özel eğrilerin tanımları yapılabilir veya eğrinin şekli ve büyüklüğü gibi bazı karakteristik özelliklerine ulaşılabilir (Burke, 1960; Struik, 1961; Özdamar ve Hacısalihoğlu, 1975; Barros, 1997; Kula vd., 2010; Farouki vd., 2014; Izumiya ve Takeuchi, 2008; Monterde, 2008; Kızıltuğ vd., 2017; Ateş vd., 2018; Deshmukh vd., 2018). Bu özel eğrilerden bir tanesi de 1806 yılında Lancet tarafından verilen helis tanımıdır. Lancet (1806), helislerin klasik tanımını “eğrinin birim teğet vektör alanı, sabit bir u vektörü ile sabit açı yapıyorsa bu eğriye helis denir”. şeklinde tanımlamıştır. Bu tanımdan hareketle dik dairesel silindir üzerine çizilen helisler ele alınmış ve bunlara dairesel helis adı verilmiştir (Kaya vd., 2010). Bu tür helislerin en önemli özelliği eğrilik ve burulmasının ayrı ayrı sabit olmasıdır. Daha sonra eğrilik ve burulmanın ayrı ayrı sabit olmadığı, genel helisler adı verilen, yani eğrilik ve burulma oranının sabit olduğu eğriler bulunmuş ve bu teoremin ispatı 1845 yılında Venant tarafından ispatlanmıştır (Saint-Venant, 1845; Struik, 1961).

Öte yandan helis eğrilerine ek olarak Izumiya ve Takeuchi (2002) bir eğrinin asal normal vektör alanı ile sabit bir vektör arasındaki açının eğrinin her noktasında sabit olduğu slant helis eğrilerini tanımlamışlardır. Ayrıca eğrinin slant helis olabilmesi için gerekli ve yeterli koşulu elde etmişlerdir (Izumiya ve Takeuchi, 2002). Daha sonra slant helislerle ilgili çalışmalar hız kazanmış ve bu konu üzerine birçok çalışma yapılmıştır (Ali ve Turgut, 2010; Şenol, vd., 2012). Yine, Ali ve Lopez (2011) Lorentz uzayında slant helisleri incelemişlerdir ve Minkowski uzayında slant helisin binormal göstergesi üzerinde eğrinin teğet göstergesini araştırmışlardır. Öte yandan, Kula ve Yaylı (2005) slant helislerin teğet ve binormal göstergelerini incelemişler ve bu küresel göstergelerin küresel helis olduğunu göstermişlerdir. Daha sonra Önder vd. (2008) $\mathbb{E}^4$ te B^2 -slant helisleri ve bu eğrilerin özelliklerini tanımlamışlardır. Ayrıca Yaylı ve Zıplar (2011) $\mathbb{E}^n$ uzayında slant helisler ile küresel helisler arasındaki ilişkiyi incelemişlerdir. Daha sonra Gök vd. (2012) $\mathbb{E}^n$ uzayında V_n -slant helisleri tanımlamışlardır. Kızıltuğ vd. (2013) Tip 2 Bishop çatısını kullanarak slant helislerin karakterizasyonunu elde etmişlerdir. Lucas ve

Ortega (2018) S^3 küresindeki helis yüzeyleri ile slant helisler arasındaki ilişkiyi araştırmışlardır.

Diğer taraftan Sasai (1984), önemli bir çalışma alanı bulan modifiye ortogonal çatıyı tanımlamıştır. Bu çatı ile bir eğrinin eğriliğinin sıfır olması halinde Frenet çatısını modifiye ederek eğriyi karakterize edebilen yeni bir çatı tanımlamıştır. Bu çatı yardımıyla 3-boyutlu Öklid uzayda küresel eğriler karakterize edilmiştir (Bükcü ve Karacan, 2016). Ardından, $\mathbb{E}^3$ te modifiye ortogonal çatıya göre helisler ve Bertrand eğri çiftleri verilmiştir (Lone vd., 2019). Tüp yüzeyler modifiye ortogonal çatıya göre incelenmiş ve tüp yüzeyinin temel formları, ortalama eğrilikleri ve Gauss eğrilikleri hesaplanmıştır (Akyiğit, 2021). Yine Öklid uzayda birim hızlı ve eğriliği sıfır olmayan eğriler modifiye ortogonal çatıya göre incelenmiştir (Gür ve Bektaş, 2022). Salkowski eğrilerinin eğrilik ve burulması ile parametrik denklemi modifiye ortogonal çatıya göre verilmiş ve diğer eğrilerle ilişkileri incelenmiştir (Gür, 2022). Daha sonra 3-boyutlu Galile uzayında modifiye ortogonal çatı tanımlanmış çatının türev formülleri elde edilmiş ve bu çatıya göre tüp yüzeyin karakterizasyonu verilmiştir (Kızıltuğ, 2022).

Uzunoglu vd. (2016) $\{N, C, N \times C = W\}$ olarak gösterdikleri, Öklid uzayda Frenet çatısına alternatif olarak yeni bir alternatif hareketli çatı tanımlamışlar ve C -slant helisin bu çatıya göre karakterizasyonunu elde etmişlerdir. Kaya ve Önder (2017), $\{N, C, W\}$ alternatif çatısına göre C -partner eğriler isimli yeni tip eğri çiftleri tanımlayıp bu eğri çiftini karakterize eden bazı uygulamalar vermişlerdir. Ayrıca bu çalışmada C -partner eğrilerin helis ve slant helis gibi bazı özel eğriler ile arasındaki ilişkileri incelemişlerdir (Kaya ve Önder, 2017). Ardından doğrusal olarak polarize edilmiş bir ışık dalgasının optik fiberdeki davranışı, alternatif hareketli çatı yardımıyla araştırılmıştır (Ceyhan vd., 2020). Alternatif hareketli çatıya göre yeni tip özel eğri çiftleri tanımlanmış ve bu eğri çiftinin karakterizasyonu alternatif hareketli çatının eğriliklerine göre elde edilmiştir (Yılmaz ve Has, 2020). 3-boyutlu Öklid uzayda adjoint eğriler alternatif hareketli çatı kullanılarak tanımlanmış ve Frenet vektörleri ile alternatif hareketli çatı vektörleri arasındaki ilişkilerden elde edilen sonuçlar verilmiştir (Çakmak ve Şahin, 2022). Daha sonra kesirli analizin özelliklerinden yararlanılarak kesirli alternatif hareketli çatı oluşturulmuş ve bu çatı üzerinde fiber optik boyunca lineer polarize ışık dalgaları karakterize edilmiştir (Yılmaz ve Has, 2022).

1850 yılında ilk defa J. Bertrand, Bertrand eğrisi olarak adlandırılan eğrinin asli normal vektörünün başka bir eğrinin asli normal vektörü ile lineer bağımlı olduğu Bertrand eğri kavramını keşfetmiştir. Bu iki eğriyi Bertrand eğri çifti olarak isimlendirmiştir (Bertrand, 1850). Bertrand eğri çiftleri, eğrilik ve torsiyonları arasındaki bir lineer ilişkiyi sağladığından dolayı bu eğriler bazı durumlarda tek boyutlu lineer Weingarten yüzeyler formunda görülmüştür.

Diferansiyel geometride yüzeyler teorisi de geniş ve önemli bir yere sahiptir. Uygulama alanı olarak ise yüzeyler günümüzde mimarlık, mühendislik, bilgisayar destekli tasarım ve modelleme gibi birçok alanda yaygın olarak kullanılmaktadır. İlk olarak yüzey kavramı 18. yüzyılda Monge tarafından açıklanmıştır ve 19. yüzyıldan itibaren de önemli bir çalışma alanı olmuştur. Daha sonraki yıllarda Guggenheimer (1963) ve Hoschek (1971) klasik geometrideki farklı bakış açıları ile regle yüzeylerini incelemişlerdir. Regle yüzeyler uzayda dayanak eğrisi veya taban eğrisi de denilen bir eğri üzerinde düz bir çizginin sürekli hareketi ile elde edilen yüzeylerdir. Düz çizgiler, doğrultman ve teğet yüzeylere dayanır. Diferansiyel geometride regle yüzeyler üzerine birçok çalışmalar yapılmış olsa da günümüzde de ilgi çeken konulardan birisi olmaya devam etmektedir (Izumiya ve Takeuchi, 2004; Taş ve İlarslan, 2019; Aslan vd., 2021; Karaca, 2022; Doğan Yazıcı vd., 2023; Yüksel ve Saltık, 2023). Eğrilerde olduğu gibi regle yüzeyler de birçok farklı çatı ve uzayda incelenmiştir. Örneğin, Galile uzayında regle yüzey Darboux çatısına göre tanımlanmış ve Frenet vektörleri arasındaki ilişkiler verilmiştir (Ekici ve Dede, 2011). Yine 3-boyutlu Minkowski uzayda regle yüzey Darboux çatısına göre incelenmiş ve dağılma parametresi elde edilmiştir (Kızıltuğ ve Çakmak, 2013).

Konuya diğer alanlar üzerinden bakılırsa, helislerin hem doğa hem de bilimde etkileyici bir yeri vardır. Fraktal geometri, DNA ve protein'in yapısındaki moleküllerin düzenlenmesi ve elektrik, mekanik, fizik ve inşaat mühendisliğindeki uygulamaları bazı örneklerdir. Ayrıca regle yüzeyler basit bir yapıya sahip olduğu için mimarlık, mühendislik, mekanik, kinematik ve bilgisayar destekli tasarım, vb. gibi birçok alanda kullanılmasıyla daha da önem kazanmaktadır (Bottema, 1979; Ge ve Ravani, 1994; Tsay ve Her, 2001; Gond vd., 2005; Flöry ve Pottmann, 2010; Mamieva, 2019; Paskaleva, 2023, Wang vd., 2023).

3. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde, tez boyunca kullanılacak olan bazı genel tanım ve kavramlara yer verilecektir.

3.1. Afin Uzayı

Bu bölümde önce vektör uzay tanımı verilip daha sonra ise Afin uzaylara ait genel tanımlardan bazılarına yer verilecektir.

Tanım 3.1.1. Boş olmayan bir cümle W ve F de bir cisim olsun. W üzerinde toplama ve skalerle çarpma işlemleri sırasıyla

$$+: W \times W \rightarrow W, \quad +(m, n) = m + n$$

ve

$$.: F \times W \rightarrow W, \quad .(\gamma, n) = \gamma \cdot n$$

şeklinde tanımlansın. $\forall x, y, z \in W$ ve $\forall \gamma, \nu \in F$ için

- i) $(x + y) + z = x + (y + z)$,
- ii) $x + y = y + x$,
- iii) $x + 0 = x$ olacak şekilde W cümlesinin sıfır elemanı vardır,
- iv) Her bir $x \in W$ elemanı için $x + (-x) = 0$ eşitliğini sağlayan bir $-x \in W$ elemanı vardır,
- v) $\gamma \cdot (x + y) = \gamma \cdot x + \gamma \cdot y$,
- vi) $(\gamma + \nu) \cdot x = \gamma \cdot x + \nu \cdot x$,
- vii) $\gamma \cdot (\nu x) = (\gamma \nu) \cdot x$,
- viii) $1 \cdot x = x$ olacak şekilde $1 \in F$ vardır

şartları sağlanıyorsa W cümlesine F cisimi üzerinde bir *vektör uzayı* denir. W cümlesinin elemanlarına vektörler ve F cisminin elemanlarına da skalerler denir (Şahin, 2012).

Tanım 3.1.2. Boş olmayan bir cümle A ve bir F cisimi üzerinde bir vektör uzayı W olsun. Aşağıdaki önermeleri sağlayan

$$f: A \times A \rightarrow W$$

$$(M, N) \rightarrow f(M, N) = \overrightarrow{MN}$$

fonksiyonu mevcut ise A ya W vektör uzayı ile birleşmiş bir *afin uzay* denir.

- i) $\forall M, N, K \in A$ için $f(M, N) + f(N, K) = f(M, K)$,
- ii) Bir $M \in A$ ve $\forall \alpha \in W$ için $f(M, N) = \alpha$ olacak şekilde bir tek $N \in A$ noktası vardır (Hacısalıhoğlu, 1998).

Örnek 3.1.1. Her bir vektör uzayı kendisi ile birleşen bir afin uzay oluşturur.

Tanım 3.1.3. Bir W vektör uzayı ile birleşen afin uzaylardan biri A olsun. $P_0, P_1, \dots, P_n \in A$ noktaları için $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ vektörlerinin sistemi W 'nin bir bazı ise

$$\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$$

nokta $(n + 1)$ -lisine A afin uzayının bir *afin çatısı* denir. Burada P_0 noktasına çatının başlangıç noktası denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 3.1.4. Bir T cismi üzerinde W_1 ve W_2 gibi iki vektör uzayı tanımlansın. Bu vektör uzayları ile birleştirilmiş afin uzaylar A_1 ve A_2 olmak üzere

$$f: A_1 \rightarrow A_2$$

dönüşümü göz önüne alınsın. Herhangi bir $Q \in A_1$ noktası için

$$\varphi_Q: W_1 \rightarrow W_2$$

dönüşümünü $\alpha \in W_1$ vektörü için $\alpha = \overrightarrow{MN}$ olacak şekilde afin aksiyomuna göre bir tek $N \in A_1$ noktası olduğuna göre

$$\varphi_Q(\alpha) = \overrightarrow{f(M)f(N)}$$

dir. Bu durumda φ_Q dönüşümü lineer ise f dönüşümüne *afin dönüşüm* denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

3.2. Öklid Uzayı

Bu bölümde $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayına ait genel tanım ve teoremlerden bazılarına yer verilecektir.

Tanım 3.2.1. Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı W olsun. W da iç çarpım işlemi olarak

$$\langle , \rangle : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Öklid iç çarpımı tanımlanırsa A afin uzayına *Öklid uzayı* denir (Hacısalıhoğlu, 1998).

Örnek 3.2.1. 3-boyutlu reel vektör uzayı $\mathbb{R}^3$ ile birleştirilmiş $\mathbb{E}^3$ afin uzayı göz önüne alınsın. Öklid iç çarpımı

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i \cdot y_i$$

$$x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3)$$

biçiminde tanımlanır. Böylece $\mathbb{E}^3$ uzayı 3-boyutlu Öklid uzayı adını alır ve $\mathbb{E}^3$ ile gösterilir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 3.2.2. $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında W uzayı bir reel iç çarpım uzayı ve W ile birleşen sıralı bir $P_0, P_1, \dots, P_n \in A$ nokta $(n + 1)$ -lisi için eğer

$$\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$$

vektör sistemi W nun bir ortonormal bazı ise $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ çatısına *dik çatı* (Öklid Çatısı) denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 3.2.3. $\mathbb{E}^n$ de $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ dik çatısı verilsin. $P \in \mathbb{E}^n$ için

$$\overrightarrow{P_0P} = \sum_{i=1}^n x_i \overrightarrow{P_0P_i}$$

yazılır. Bu durumda

$$\begin{aligned} x_i &: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ P &\rightarrow x_i(P) = x_i \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ fonksiyonlarının cümlesine *Öklid koordinat sistemi* denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 3.2.4. n -boyutlu $\mathbb{R}^n$ uzayında $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ için

$$\|\alpha\| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona α nın *normu* denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 3.2.5. 3-boyutlu $\mathbb{R}^3$ uzayında $\forall x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ için x ile y nin gerdiği düzleme dik olan ve

$$x \times y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2y_3 - y_2x_3, x_3y_1 - y_3x_1, x_1y_2 - y_1x_2)$$

şeklinde tanımlanan $x \times y$ vektörüne x ile y nin *vektörel çarpımı* denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

3.3. Eğriler Teorisi

Bu bölümde eğriler teorisinin genel tanımları verilecektir. Ayrıca Frenet çatısı, helis, slant helis, eğri çiftleri tanımlarından bahsedilecektir.

Tanım 3.3.1. $I \subseteq \mathbb{R}, I = (a, b)$ bir açık alt aralık olmak üzere

$$\begin{aligned} \alpha &: I \rightarrow \mathbb{E}^n \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t)) \end{aligned}$$

diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\alpha(I) \subset \mathbb{E}^n$ alt kümesine $\mathbb{E}^n$ de *diferansiyellenebilir bir eğri* (veya *parametrik bir eğri*) denir (Yüce, 2019).

Tanım 3.3.2. $\mathbb{E}^n$ de M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ fonksiyonunun Öklidyen koordinat fonksiyonları $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ olmak üzere

$$\alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}, \frac{d\alpha_2}{dt}, \dots, \frac{d\alpha_n}{dt} \right)$$

dır. $(\alpha(t), \alpha'(t)) \in T_{\mathbb{E}^n}(\alpha(t))$ tanjant vektörüne, M eğrisinin $t \in I$ parametre değerine karşılık gelen $\alpha(t)$ noktasındaki (I, α) koordinat komşuluğuna göre *hız vektörü* denir (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 3.3.3. $\mathbb{E}^n$ de M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. Eğer $\forall s \in I$ için

$$\|\alpha'(s)\| = 1$$

ise M eğrisi (I, α) ya göre *birim hızlı eğridir* denir. Bu durumda, eğrinin $s \in I$ parametresine *yay parametresi* adı verilir (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 3.3.4. $\mathbb{E}^n$ de M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. $a, b \in I$ olmak üzere M eğrisinin $\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ noktaları arasındaki eğri boyunca uzaklığına karşılık gelen

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt, \quad t \in I$$

reel sayısına a dan b ye *yay uzunluğu* denir (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 3.3.5. Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı ($\forall t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$) olan bir α eğrisine *regüler eğri* denir (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 3.3.6. $\mathbb{E}^n$ de M eğrisi (I, β) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. $\psi = (\beta', \beta'', \dots, \beta^{(r)})$ sistemi lineer bağımsız olsun. Bu durumda $k > r$ olacak şekilde $\forall \beta^{(k)}$ için $\beta^{(k)} \in S_p\{\psi\}$ olmak üzere, ψ den elde edilen

$$\{W_1, W_2, \dots, W_r\}$$

ortonormal sistemine, M eğrisinin *Frenet r -ayaklı alanı* ve $\forall s \in M$ noktası için

$$\{W_1(s), W_2(s), \dots, W_r(s)\}$$

cümlesine ise eğrinin s noktasındaki *Frenet r -ayaklısı* denir. $1 \leq i \leq r$ olmak üzere her bir W_i vektörüne *Frenet vektörü* denir (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 3.3.7. M eğrisi (I, β) koordinat komşuluğu ile verilsin. s yay parametresi olmak üzere, $s \in I$ ya karşılık gelen $\beta(s)$ noktasındaki Frenet r -ayaklısı $\{W_1(s), W_2(s), \dots, W_r(s)\}$ olsun. Buna göre $1 \leq i \leq r$ için

$$\begin{aligned} k_i: I &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\rightarrow k_i(s) = \langle W'_i(s), W_{i+1}(s) \rangle \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin i -yinci eğrilik fonksiyonu ve $s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına da M eğrisinin $\beta(s)$ noktasındaki i -yinci eğriliği denir (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 3.3.8. $\beta: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi s yay parametrelili bir eğri olmak üzere, $\forall s \in I$ için eğrinin teğet vektör alanı

$$T(s) = \beta'(s)$$

eğrinin asli normal vektör alanı ve binormal vektör alanı sırasıyla

$$N(s) = \frac{\beta''(s)}{\|\beta''(s)\|}, \quad B(s) = T(s) \times N(s)$$

olmak üzere $\{T, N, B\}$ sistemine *Frenet 3-ayaklısı* denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Teorem 3.3.1. $\beta_i: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq 3$ koordinat fonksiyonları olmak üzere s yay parametresi ile verilen

$$\begin{aligned} \beta: I &\subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3 \\ s &\rightarrow \beta(s) = (\beta_1(s), \beta_2(s), \beta_3(s)) \end{aligned}$$

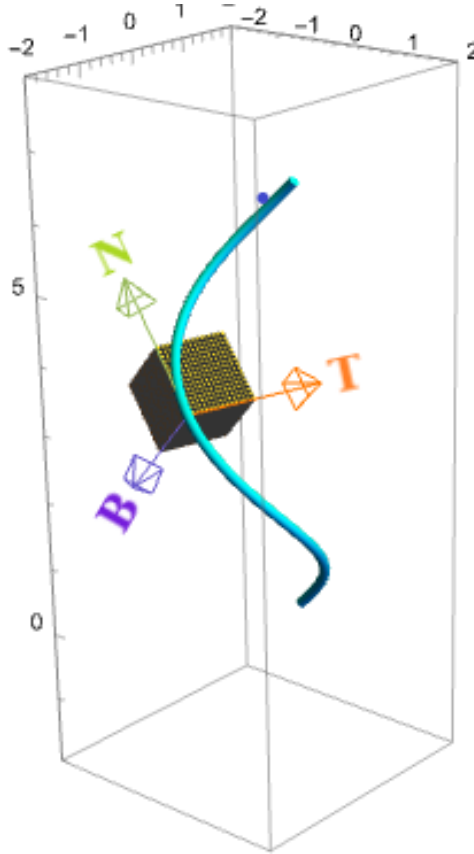
eğrisinin $\beta(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{T, N, B\}$ olsun. Bu durumda

$$T'(s) = k_1(s)N(s),$$

$$N'(s) = -k_1(s)T(s) + k_2(s)B(s),$$

$$B'(s) = -k_2(s)N(s)$$

denklemlerine *Frenet formülleri* denir (Hacısalıhoğlu, 1998).



Şekil 3.1. 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet 3-ayaklısı

Tanım 3.3.9. s yay parametresi ile verilen $\beta : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi için $\beta''(s) \neq 0$ olmak üzere $B'(s) = -\tau(s)N(s)$ eşitliği ile tanımlanan $\tau(s)$ sayısına $\beta(s)$ eğrisinin s noktasındaki *burulması* denir (Hacısalıhoğlu, 1998).

Teorem 3.3.2. $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında s yay parametrelili $\beta : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi verilsin. $\beta(s)$ eğrisinin $\forall s \in I$ noktasındaki burulması $\tau(s) = 0$ ise $\beta(s)$ eğrisi *düzlemsel eğridir* (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 3.3.10. $\beta : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi için $\beta''(s) \neq 0$ ise $\beta(s)$ eğrisine *Frenet eğrisi* veya *uzay eğrisi* denir (Kühnel, 2006).

Tanım 3.3.11. $\mathbb{E}^3$ uzayında $\beta : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisinin Frenet 3- ayaklısı $\{T, N, B\}$ olmak üzere

- i) $\{T(s), N(s)\}$ kümesinin gerdiği düzleme $\alpha(s)$ noktasında eğrinin oskulator düzlemi,
- ii) $\{T(s), B(s)\}$ kümesinin gerdiği düzleme $\alpha(s)$ noktasında eğrinin rektifiyan düzlemi,
- iii) $\{N(s), B(s)\}$ kümesinin gerdiği düzleme $\alpha(s)$ noktasında eğrinin normal düzlemi denir (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 3.3.12. $\beta : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğrisi verilsin. Eğrinin $\{T, N, B\}$ Frenet 3- ayaklısının her s anında, bir eksen etrafında, ani bir helis hareketi yaptığı kabul edilir. Bu eksene eğrinin $\beta(s)$ noktasındaki Darboux (ani dönme) eksenini denir. Bu eksenin yön ve doğrultusunu veren vektör

$$D = \tau T + \kappa B$$

olup β eğrinin $\beta(s)$ noktasındaki *Darboux vektörü* adını alır (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 3.3.13. $M \subset \mathbb{E}^3$ eğrisi, (I, β) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere T eğrisinin birim teğet vektör alanı ve u da herhangi bir birim vektör olsun. Eğer T , u ile sabit θ açısı yaparsa M eğrisine *sabit eğimli eğri (helis)* denir (Yüce, 2019).

Teorem 3.3.3. β regüler bir eğri olsun. β eğrisinin genel helis olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{\tau}{\kappa} = \text{sabit}$$

olmasıdır (Do Carmo 1976, Izumiya ve Takeuchi, 2004).

Örnek 3.3.1. $\beta : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$, $\beta(s) = \left(\frac{4}{5} \cos s, \frac{4}{5} \sin s, -\frac{3}{5}s\right)$ eğrisi olsun. β eğrisinin Frenet vektör alanlarını, eğrilik ve burulma fonksiyonlarını bulalım. Bu eğrinin hız vektörü

$$\beta'(s) = \left(-\frac{4}{5} \sin s, \frac{4}{5} \cos s, -\frac{3}{5} \right)$$

olarak bulunur. $\|\beta'(s)\| = 1$ olduğundan β birim hızlı bir eğridir. Teğet vektörü $T(s) = \beta'(s)$ eşitliği ile tanımlı olduğundan teğet vektörü

$$T(s) = \left(-\frac{4}{5} \sin s, \frac{4}{5} \cos s, -\frac{3}{5} \right)$$

olur. Böylece s yay parametresine göre türevi alınır

$$T'(s) = \left(-\frac{4}{5} \cos s, -\frac{4}{5} \sin s, 0 \right)$$

olduğundan birinci eğrilik tanımından

$$\kappa(s) = \|T'(s)\| = \frac{4\sqrt{2}}{5}$$

şeklinde bulunur. Eğrinin birim normali ise

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, 0 \right)$$

olarak elde edilir. $B(s) = T(s) \times N(s)$ denklemi göz önüne alınırsa $B(s)$ binormal vektörü

$$B(s) = \left(-\frac{3}{5\sqrt{2}} \sin s, \frac{3}{5\sqrt{2}} \cos s, \frac{4}{5\sqrt{2}} \right)$$

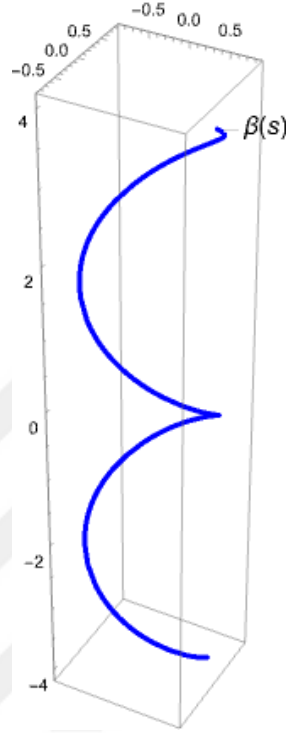
biçiminde olur. Buradan

$$B'(s) = \left(-\frac{3}{5\sqrt{2}} \cos s, -\frac{3}{5\sqrt{2}} \sin s, 0 \right)$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca eğrinin burulması

$$\tau(s) = -\langle B'(s), N(s) \rangle = -\frac{3}{10}$$

biçimindedir. Böylece verilen eğrinin eğrilik ve burulması ayrı ayrı sabitler olduğundan β eğrisi bir dairesel helistir. Bu dairesel helisin grafiği $-2\pi < s < 2\pi$ aralığı için aşağıdaki gibi elde edilir.



Şekil 3.2. $-2\pi < s < 2\pi$ aralığı için β dairesel helis eğrisi

Tanım 3.3.14. $\beta : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ regüler eğrisinin birim normal vektörü $N(s)$ sabit birim vektör u ile sabit bir açı yaparsa bu β eğrisine *slant helis* denir. $\forall s \in I$ için aşağıdaki denklem sağlanır.

$$\langle N(s), u \rangle = \cos \theta$$

(Do Carmo 1976, Izumiya ve Takeuchi 2004).

Teorem 3.3.4. $\beta(s)$ regüler bir eğri olsun. $\beta(s)$ eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' = \text{sabit}$$

olmasıdır (Do Carmo 1976, Izumiya ve Takeuchi 2004).

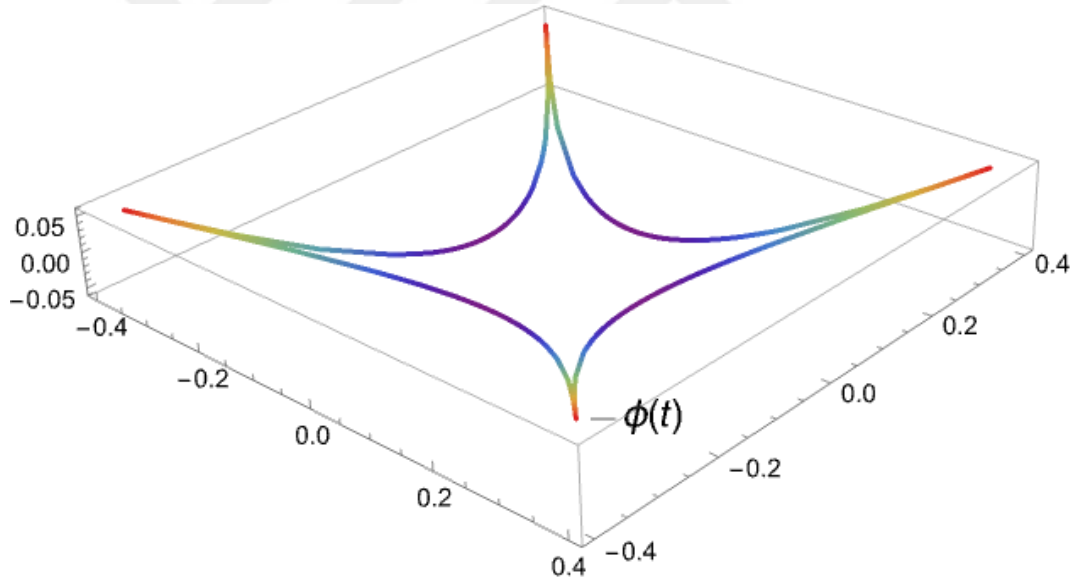
Örnek 3.3.2. 3-boyutlu Öklid uzayında

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_1(t) = \frac{1}{6} \left[\frac{1}{5} \cos 5t + \cos 3t - 2 \cos t \right], \\ \Phi_2(t) = \frac{1}{6} \left[\frac{1}{5} \sin 5t + \sin 3t - 2 \sin t \right], \\ \Phi_3(t) = -\frac{1}{18} \cos 4t \end{array} \right\}$$

olarak $\Phi(t) = \{\Phi_1(t), \Phi_2(t), \Phi_3(t)\}$ slant helis eğrisi verilsin. Φ slant helisinin eğriliği ve burulması

$$\kappa = 1 \text{ ve } \tau = \frac{3t}{(1-9t^2)^{\frac{1}{2}}}$$

dir. Burada $-\pi < t < \pi$ aralığı için Φ slant helisinin grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 3.3. $-\pi < t < \pi$ aralığı için Φ slant helis eğrisi

Tanım 3.3.15. $M \subset \mathbb{E}^3$, (I, β) koordinat komşuluğu ile; $M^* \subset \mathbb{E}^3$ ise (I, γ) koordinat komşuluğu ile verilmiş iki eğri olsun. $M, M^* \subset \mathbb{E}^3$ eğrilerinin Frenet 3 ayaklıları sırasıyla, $\{T, N, B\}$ ve $\{T^*, N^*, B^*\}$ olsun. Eğer $\langle T(s), T^*(s) \rangle = 0$ ise γ eğrisine β eğrisinin *involütü* ve β eğrisine de γ eğrisinin *evolütü* denir. (M, M^*) eğri çiftine de *involüt-evolüt eğri çifti* denir (Yüce, 2019).

Teorem 3.3.5. $\beta : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğrisi ile aynı aralıkta tanımlı $\beta^* : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğrisi verilsin. Eğer β^* , β nın involütü ise $\forall s \in I$ için

$$d(\beta(s), \beta^*(s)) = \|c - s\| \quad (c = \text{sabit})$$

dir (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 3.3.16. $M, M^* \subset \mathbb{E}^3$ eğrileri sırasıyla, (I, β) , (I, γ) koordinat komşulukları ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\beta(s) \in M$ ve $\gamma(s) \in M^*$ noktalarında M ve M^* eğrileri $\{T, N, B\}$ ve $\{T^*, N^*, B^*\}$ Frenet 3-ayaklıları ile verildiğinde $\forall s \in I$ için, $\{N, N^*\}$ lineer bağımlı ise (M, M^*) eğri çiftine bir *Bertrand eğri çifti* denir (Yüce, 2019).

Teorem 3.3.6. $\beta : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğrisi ile aynı aralıkta tanımlı $\beta^* : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğrisi verilsin. (β, β^*) eğri ikilisi bir Bertrand çifti ise $\forall s \in I$ için

$$d(\beta(s), \beta^*(s)) = c \quad (c = \text{sabit})$$

dir (Hacısalıhoğlu, 1998).

Teorem 3.3.7. $\mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında aynı aralıkta tanımlı iki eğri β ve β^* olsun. β eğrisinin eğrilikleri κ, τ ise (β, β^*) eğri ikilisinin bir Bertrand eğri çifti olması için gerek ve yeter şart

$$\delta\kappa + \psi\tau = 1$$

olmasıdır (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 3.3.17. $M, M^* \subset \mathbb{E}^3$ eğrileri sırasıyla, (I, β) , (I, γ) koordinat komşulukları ile verilsin. $s \in I$ 'ya karşılık gelen $\beta(s) \in M$ ve $\gamma(s) \in M^*$ noktalarında M ve M^* eğrileri $\{T, N, B\}$ ve $\{T^*, N^*, B^*\}$ Frenet 3-ayaklıları ile verildiğinde β eğrisinin $\beta(s)$ noktasındaki asli normali ile γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki binormal vektörleri lineer bağımlı ise β eğrisine bir Mannheim eğrisi, γ eğrisine β nın Mannheim partner eğrisi ve (β, γ) eğri çiftine ise *Mannheim eğri çifti* denir (Liu ve Wang, 2008).

Teorem 3.3.8. $\mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında s parametrelili $\beta : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi verilsin. β eğrisinin eğrilikleri κ, τ olmak üzere β eğrisinin Mannheim eğrisi olması için gerek ve yeter şart

$$\kappa = \psi(\kappa^2 + \tau^2)$$

olmasıdır. Burada ψ sıfırdan farklı sabittir (Liu ve Wang, 2008).

Önerme 3.3.1. $\mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında s parametrelili $\beta : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi Mannheim eğrisi olmak üzere $\beta^* : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi β eğrisinin s^* yay uzunluğuna göre parametrelendirilmiş bir Mannheim eğri çifti olsun. Eğer β eğrisi bir helis ise β^* eğrisi bir doğrudur (Liu ve Wang, 2008).

3.4. Yüzey Teorisi

Bu bölümde genel yüzey ve regle yüzeyin tanımları verilecektir.

Tanım 3.4.1. ϕ , $\mathbb{E}^3$ uzayında bir alt küme olsun. $\forall P \in \phi$ noktasının $\mathbb{E}^3$ uzayındaki V komşuluğu verilsin. Eğer $\gamma : U \rightarrow V \cap \phi$ dönüşümü bir diffeomorfizm ise ϕ kümesine $\mathbb{E}^3$ uzayında bir *yüzey* adı verilir (Yüce, 2019).

Tanım 3.4.2. $\phi \subset \mathbb{E}^3$ yüzeyi verilsin. Her $P \in \phi$ noktasında $\mathbb{E}^3$ ün ϕ yüzeyinde kalan bir doğrusu var ise ϕ ye bir *regle yüzey* denir. $P \in \phi$ noktasından geçen ve ϕ de kalan doğruya ise ϕ nin bir *doğrultmanı* denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Böylece $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında ϕ regle yüzeyinin parametrik denklemini elde etmek için doğrultmanları kesen ve yüzey üzerinde bulunan diferansiyellenebilir bir eğri

$$\begin{aligned} \beta : I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{E}^3 \\ s &\rightarrow \beta(s) \end{aligned}$$

şeklinde verilebilir. Bu eğriye regle yüzeyin dayanak eğrisi denir. Böylece ϕ regle yüzeyi

$$\begin{aligned} \phi : I \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{E}^3 \\ (s, v) &\rightarrow \phi(s, v) = \beta(s) + vX(s) \end{aligned}$$

dönüşümü ile belirlenir. Burada $X(s) = (x_1, x_2, x_3)$ doğrultman vektörüdür.

Tanım 3.4.3. Bir $\phi(s, v)$ regle yüzeyinde komşu iki doğrultmanın ortak dikmesinin esas doğrultman üzerindeki ayağına *boğaz* (merkez veya striksiyon) noktası denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 3.4.4. Bir $\phi(s, v)$ regle yüzeyinin ana doğrusu dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yerine regle yüzeyin *boğaz* (striksiyon) çizgisi (eğrisi) adı verilir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Teorem 3.4.1. $\phi(s, v) = \beta(s) + vX(s)$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisinin yer vektörü için

$$c(s) = \beta(s) - \frac{\langle \beta_s, X_s \rangle}{\langle X_s, X_s \rangle} X(s)$$

yazılabilir. Eğer $\|X_s\| = 0$ ise striksiyon eğrisi yoktur. Bu durumda regle yüzeye *tanjant yüzey* denir (Yüce, 2019).

Tanım 3.4.5. Regle yüzeyler için striksiyon eğrisi dayanak eğrisi olarak alınabilir yani $\langle X_s, T \rangle = 0$ alınması yeterlidir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 3.4.6. ϕ regle yüzeyinin komşu iki doğrultmanı arasındaki en kısa uzaklığının bu iki komşu doğrultman arasındaki açıya oranına regle yüzeyin *dağılma parametresi* (drali) denir. P_X ile gösterilir (Yüce, 2019).

Teorem 3.4.2. $\phi(s, v) = \beta(s) + vX(s)$ regle yüzeyinin drali

$$P_X = \frac{\det(\beta_s, X, X_s)}{\|X_s\|^2}$$

ile bulunur (Yüce, 2019).

Tanım 3.4.7. Bir regle yüzeyin ana doğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye açılabilir yüzey denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Teorem 3.4.3. Bir $\phi(s, v)$ regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter koşul regle yüzeyin dağılma parametresinin sıfır olmasıdır (Hacısalıhoğlu, 2000).

4. MATERYAL ve YÖNTEM

4.1. Yöntem

Öklid uzayında Serret-Frenet formülleri, eğri üzerinde hareket eden bir parçacığın kinematik özelliklerini, diferansiyellenebilir bir eğri boyunca her noktada tanımlar. Daha özele indirgenirse 3-boyutlu Öklid uzayında teğet, asli normal ve binormal vektörlerinin türevleri bu hareketi tanımlar denilebilir. Eğrinin eğrilik ve burulmasının yani κ ve τ eğriliklerinin sıfır olduğu noktalarda asli normal ve binormal vektörleri genelde tanımlanamaz. Dolayısıyla eğri analitik olsa bile diferansiyellenebilir bir eğri olamaz. Bu durum ise bir uzay eğrisinin eğriliklerinin sıfır olduğu noktalarda Frenet çatısının tanımlanamamasına ya da o noktalarda belirsizliğine neden olur. Bu nedenle teğet, asli normal ve binormal vektörleri ayrık sıfır noktalarına sahip olduklarından ve eğrilikler sıfır noktalarında tanımlanamadığından Frenet çatısı bu noktalarda bir eğriyi incelemede yetersiz kalmaktadır. Bu soruna çözüm için Sasai (1984), Frenet vektörlerinin κ eğriliği ile çarpılması sonucunda yeni çatının elemanlarını elde ederek Frenet çatısını modifiye etmiştir. Ayrıca Frenet çatısına karşılık gelen türev formüllerini de elde etmiştir (Sasai, 1984). Daha sonra bu çatı birçok çalışmaya yol göstermiştir. Örneğin, Lone vd. (2019) modifiye ortogonal çatıya göre Öklid uzayında bazı özel eğrileri ve bu eğriler arasındaki ilişkileri araştırmışlardır. Daha sonra 3-boyutlu Galile uzayında modifiye ortogonal çatı tanımlanmış, modifiye ortogonal çatının türev formülleri elde edilmiş ve bu çatıya göre tüp yüzeyin karakterizasyonu verilmiştir (Kızıltuğ vd., 2022).

Öncelikle Sasai'nin 1984 yılında tanımladığı modifiye ortogonal çatı ile ilgili bazı tanım ve teoremler incelenecektir.

$\beta_i = \beta_i(s), (i = 1,2,3), \mathbb{E}^3$ te s yay uzunluğu parametresi ile singüler olmayan (yani $\sum_{i=1}^3 \left(\frac{d\beta_i}{ds}\right)^2 \neq 0$) bir eğri olsun. Dolayısıyla $I \subset \mathbb{R}$ açık aralığında $s \in I$ yay uzunluğu parametresi olmak üzere β eğrisi aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\beta = \beta(s) = (\beta_1(s), \beta_2(s), \beta_3(s)).$$

β eğrisinin birinci eğriliği $\kappa \neq 0$ olduğu varsayılarak aşağıdaki gibi $\{t, n, b\}$ dik çatısı tanımlansın.

$$\mathbf{t} = \frac{d\beta}{ds}, \quad \mathbf{n} = \frac{d\mathbf{t}}{ds}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}. \quad (4.1)$$

Burada $\mathbf{t} \times \mathbf{n}$, $\mathbf{t}$ ve $\mathbf{n}$ vektörlerinin vektörel çarpımlarıdır. Bu son bağıntılar ile modifiye ortogonal çatı vektörleri $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ ve klasik Frenet çatı vektörleri $\{T, N, B\}$ arasındaki ilişkiler $\kappa \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{cases} \mathbf{t} = T \\ \mathbf{n} = \kappa N \\ \mathbf{b} = \kappa B \end{cases} \quad (4.2)$$

olur. Böylece $\kappa(s_0) = 0$ olduğunda $\mathbf{n}$ ve $\mathbf{b}$ vektörlerinin uzunlukları s parametresi cinsinden analitik olarak değişir. Buradan (4.1) ve (4.2) denklemleri yardımıyla modifiye ortogonal çatının türev formülleri için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1.1. $\beta: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisinin modifiye ortogonal çatı elemanları $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ olmak üzere türev formüllerinin matris formu aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\kappa^2 & \frac{\kappa'}{\kappa} & \tau \\ 0 & -\tau & \frac{\kappa'}{\kappa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Buradaki türevler, s yay uzunluğuna göre türevlerdir. Ayrıca β eğrisinin torsiyonu

$$\tau = \frac{\det(\beta', \beta'', \beta''')}{\kappa^2}$$

şeklinde bulunur (Bükçü ve Karacan, 2016).

İspat. $\mathbf{t}', \mathbf{n}', \mathbf{b}'$ vektörleri $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ modifiye ortogonal çatı cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{cases} \mathbf{t}' = a_{11}\mathbf{t} + a_{12}\mathbf{n} + a_{13}\mathbf{b} \\ \mathbf{n}' = a_{21}\mathbf{t} + a_{22}\mathbf{n} + a_{23}\mathbf{b} \\ \mathbf{b}' = a_{31}\mathbf{t} + a_{32}\mathbf{n} + a_{33}\mathbf{b} \end{cases}$$

$\mathbf{t}', \mathbf{n}', \mathbf{b}'$ modifiye ortogonal çatı vektörlerinin türevleri sırasıyla $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ elemanları ile iç çarpımı alınırsa a_{ij} katsayıları

$$\langle \mathbf{t}', \mathbf{t} \rangle = a_{11} \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + a_{12} \langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle + a_{13} \langle \mathbf{b}, \mathbf{t} \rangle$$

olduğundan $a_{11} = 0$ olarak elde edilir.

$$\langle \mathbf{t}', \mathbf{n} \rangle = a_{11} \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle + a_{12} \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle + a_{13} \langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle$$

denkleminde ise $a_{12} = 1$ olarak bulunur. Ayrıca

$$\langle \mathbf{t}', \mathbf{b} \rangle = a_{11} \langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle + a_{12} \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle + a_{13} \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle$$

denklemi göz önüne alınırsa $a_{13} = 0$ olarak bulunur. Ek olarak,

$$\langle \mathbf{n}', \mathbf{t} \rangle = a_{21} \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + a_{22} \langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle + a_{23} \langle \mathbf{b}, \mathbf{t} \rangle$$

eşitliğinden $a_{21} = -\kappa^2$,

$$\langle \mathbf{n}', \mathbf{n} \rangle = a_{21} \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle + a_{22} \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle + a_{23} \langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle$$

denkleminde $a_{22} = \frac{\kappa'}{\kappa}$,

$$\langle \mathbf{n}', \mathbf{b} \rangle = a_{21} \langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle + a_{22} \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle + a_{23} \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle$$

olduğundan $a_{23} = \tau$,

$$\langle \mathbf{b}', \mathbf{t} \rangle = a_{31} \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + a_{32} \langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle + a_{33} \langle \mathbf{b}, \mathbf{t} \rangle$$

eşitliğinden $a_{31} = 0$,

$$\langle \mathbf{b}', \mathbf{n} \rangle = a_{31} \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle + a_{32} \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle + a_{33} \langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle$$

eşitliğinden $a_{32} = -\tau$ ve son olarak

$$\langle \mathbf{b}', \mathbf{b} \rangle = a_{31} \langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle + a_{32} \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle + a_{33} \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle$$

denkleminde $a_{33} = \frac{\kappa'}{\kappa}$ olarak elde edilir. Bu katsayılar türev formüllerinde yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Buradan (4.2) eşitlikleri ve (4.3) matris formu $\kappa = 1$ iken klasik durumdaki Serret-Frenet formüllerine denk gelir. Ayrıca, Frenet eşitliklerinden $\kappa^2 = 0$ olduğu herhangi bir noktanın τ 'nin çıkarılabilir bir singüler noktası olduğu bilinmektedir.

$\{t, n, b\}$ modifiye ortogonal çatı aşağıdaki denklemleri sağlar.

$$\langle t, t \rangle = 1, \langle n, n \rangle = \langle b, b \rangle = \kappa^2, \quad (4.4)$$

$$\langle t, n \rangle = \langle t, b \rangle = \langle n, b \rangle = 0.$$

Burada $\langle , \rangle$ 3-boyutlu Öklid uzayındaki iç çarpımdır. Ayrıca (4.3) ve (4.4) denklemlerindeki $\kappa^2(s)$ ve $\tau(s)$, s yay parametresi ile analitiktir (Sasai, 1984).

Görüldüğü üzere Sasai (1984) bir eğrinin birinci eğriliğinin sıfır olduğu noktalarda tanımlanamayan Frenet çatısını modifiye ederek yeni bir çatı tanımlamıştır. Diğer taraftan Uzunoğlu vd. 2016 yılında yayımladıkları çalışmada bir eğrinin teğet ve binormal vektörlerini normal vektör etrafında θ kadar döndürerek Frenet çatısına farklı bir bakış getirerek yeni bir alternatif hareketli çatı tanımladılar (Uzunoğlu vd., 2016). Bu alternatif hareketli çatıya göre eğrinin normal vektörü ile Frenet çatısına göre normal vektörü eğri boyunca aynı iken teğet ve binormal vektörleri normal vektör etrafında θ kadar döndürülerek C ve W vektör alanları elde edilmiştir. Yeni tanımlanan bu $\{N, C, W\}$ çatısı eğrinin alternatif hareketli çatısı olarak adlandırılır. Bu kısımda alternatif hareketli çatı tanımı verilecek ve bu çatıya göre bazı teoremler incelenecektir.

3-boyutlu Öklid uzayında $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$, s yay parametrelili birim hızlı regüler eğri olsun ($\|\beta'(s)\| = 1$). Eğer β eğrisi sıfırdan farklı bir eğriliğe sahipse Frenet eğrisi olarak adlandırılır ($\beta''(s) \neq 0$). Ayrıca, β regüler bir birim hızlı eğrisinin Frenet çatı elemanları $\{T, N, B\}$ olmak üzere Frenet türev formülleri

$$T' = \kappa N, \quad N' = -\kappa T + \tau B, \quad B' = -\tau N$$

şeklindedir. Burada $\kappa = \|\alpha''\| = \langle T', N \rangle$ ve $\tau = \langle N', B \rangle$ sırasıyla β eğrisinin eğriliği ve burulmasıdır. Frenet çatısına alternatif olarak Uzunoğlu vd. (2016) tanımladığı alternatif hareketli çatı tanımı aşağıdaki gibidir.

Tanım 4.1.1. $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğri olsun. $\beta(s)$ eğrisi boyunca, N asli normal vektör alanı, $C = \frac{N'}{\|N'\|}$ ve $W = \frac{\tau T + \kappa B}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}$, $\beta(s)$ eğrisinin birim Darboux vektörü olmak üzere $\{N, C, N \times C = W\}$ kümesine β eğrisi boyunca alternatif hareketli çatı denir. Bu alternatif hareketli çatının türev formülleri

$$\begin{bmatrix} N' \\ C' \\ W' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & f & 0 \\ -f & 0 & g \\ 0 & -g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ C \\ W \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

olmak üzere

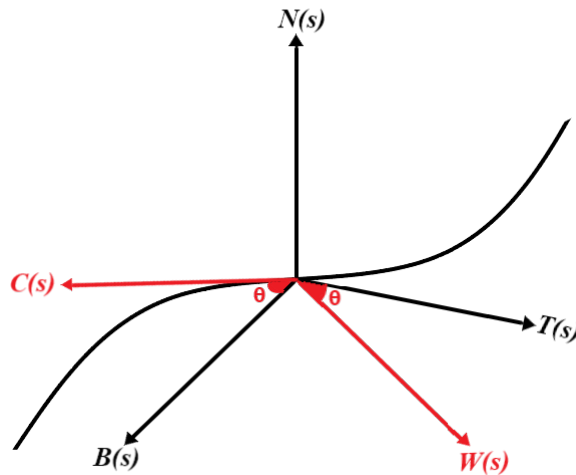
$$f = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} = \kappa \sqrt{1 + H^2}, \quad g = \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + \tau^2} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'$$

şeklindedir. κ, τ sırasıyla β eğrisinin eğriliği ve burulması ve $H = \frac{\tau}{\kappa}$ ise β eğrisinin harmonik eğriliğidir (Uzunoğlu vd., 2016). Ayrıca $\{N, C, W\}$ alternatif hareketli çatı ile $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı arasındaki ilişki

$$T = \frac{-\kappa C + \tau W}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}, \quad B = \frac{\tau C + \kappa W}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}$$

gibidir. Burada N vektör alanı ortaktır (Kaya ve Önder, 2017).

$\{N, C, W\}$ alternatif hareketli çatı, eğrinin teğet vektörü T ve eğrinin binormal vektörü B belirli bir θ açısı ile asli normali N etrafında döndürülerek elde edilir.



Şekil 4.1. Eğri üzerinde $\{N, C, W\}$ alternatif hareketli çatı

Ayrıca, Uzunoğlu vd. (2016) $\{N, C, W\}$ alternatif hareketli çatıya göre slant helis ve C -slant helis karakterizasyonlarını aşağıdaki gibi vermiştir.

Tanım 4.1.2. $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$, $\mathbb{E}^3$ uzayında bir birim hızlı eğri olsun. $\{N, C, W\}$, β eğrisinin alternatif hareketli çatısı olsun. Bu durumda, β eğrisinin C vektör alanı sabit bir v doğrultusu ile sabit δ ($\delta \neq \frac{\pi}{2}$) açısı yapıyorsa β eğrisine C -slant helis denir. Yani her $s \in I$ için

$$\langle C, v \rangle = \cos \delta, \quad (\delta = \text{sabit} \neq \frac{\pi}{2}) \quad (4.6)$$

ise β eğrisine C -slant helis denir (Uzunoğlu vd., 2016).

Tanım 4.1.3. $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında bir birim hızlı eğri olsun. $\{N, C, W, f, g\}$, β eğrisinin alternatif hareketli çatı elemanları olsun. Böylece β eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{g}{f} = \text{sabit} \quad (4.7)$$

olmasıdır (Uzunoğlu vd., 2016).

Teorem 4.1.2. $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$, $\mathbb{E}^3$ uzayında bir birim hızlı eğri olsun. $\{N, C, W\}$, β eğrisinin alternatif hareketli çatısı olsun. β , C -slant helisinin v eksenini

$$v = \left\{ \frac{g(f^2 + g^2)}{f^2 \left(\frac{g}{f}\right)'} N + C + \frac{f^2 + g^2}{f \left(\frac{g}{f}\right)'} W \right\} \cos \delta$$

dır. Burada δ sabit açı, $f = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$, $g = \sigma f$ ve $\sigma = \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'$ dir (Uzunoğlu vd., 2016).

İspat. β eğrisi C -slant helis olsun. Bu durumda

$$\langle C, v \rangle = \cos \delta$$

dır. Son eşitliğin diferansiyeli s parametresine göre alınır ve alternatif hareketli çatı elemanları yerine yazılırsa

$$-f\langle N, v \rangle + g\langle W, v \rangle = 0 \quad (4.8)$$

olur. Tekrar (4.8) denkleminin diferansiyeli alınır, (4.5) yerine yazılır ve düzenlenirse son iki denklemden

$$\langle N, v \rangle = \frac{g(f^2 + g^2)}{f^2 \left(\frac{g}{f}\right)'} \cos \delta,$$

$$\langle W, v \rangle = \frac{f^2 + g^2}{f \left(\frac{g}{f}\right)'} \cos \delta$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.1. $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$, $\mathbb{E}^3$ uzayında bir birim hızlı eğri olsun. $\{N, C, W, f, g\}$, β eğrisinin alternatif hareketli çatı elemanları olsun. f, g alternatif hareketli çatının eğrilikleri olmak üzere β eğrisinin C -slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{f^2}{(f^2 + g^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{g}{f}\right)' = \text{sabit} \quad (4.9)$$

olmasıdır (Uzunoğlu vd., 2016).

İspat. C -slant helis tanımından v doğrultusunun birim ve sabit bir doğrultu olduğu bilinmektedir. Teorem 4.1.2'deki v doğrultu denkleminde (4.9) denklemini elde edilir. Tersine (4.9) eşitliği doğru olsun.

$$v = \left\{ \frac{g(f^2 + g^2)}{f^2 \left(\frac{g}{f}\right)'} N + C + \frac{f^2 + g^2}{f \left(\frac{g}{f}\right)'} W \right\} \cos \delta$$

olmak üzere buradan her iki tarafın C vektörü ile soldan iç çarpımı alınırsa $\langle C, v \rangle = \cos \delta$ olduğu elde edilir. Son eşitliğin diferansiyeli alınıp (4.5) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$-f\langle N, v \rangle + g\langle W, v \rangle = -\sin \delta \cdot \delta',$$

$$\langle N, v \rangle = \frac{g(f^2+g^2)}{f^2(\frac{g}{f})'} \cos \delta \text{ ve } \langle W, v \rangle = \frac{f^2+g^2}{f(\frac{g}{f})'} \cos \delta \text{ denklemlerinden } -\sin \delta \cdot \delta' = 0 \text{ olduğu}$$

görölür. Böylece δ sabit bir fonksiyondur. Yani β eğrisi C -slant helistir.

Tanım 4.1.4. 3-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$ te $\{N, C, W\}$ alternatif hareketli çatısına göre Darboux vektörü

$$D = \frac{\sigma N + W}{\sqrt{1 + \sigma^2}}$$

ile tanımlanır. Burada $\sigma = \frac{g}{f}$ dır. Ayrıca $D \times N = N'$, $D \times C = C'$ ve $D \times W = W'$ dir (Uzunoğlu vd., 2016).

Alternatif hareketli çatı diferansiyel geometride eğriyi incelemede farklı bir bakış kazandırmış böylece bir çok tez ve makaleye çalışma konusu olmuştur. Bu çalışmalardan biri de C -partner eğriler olarak tanımlanan yeni tip eğri çiftleridir (Kaya ve Önder, 2017). Bu çalışmada C -partner eğrileri, $\{N, C, W\}$ alternatif hareketli çatısına göre verilmiştir. C -partner eğrilerin rektifiyan düzlemlerinin ortak bir doğru boyunca sabit bir açı ile kesiştiği elde edilmiştir. Şimdi C -partner eğrilerin alternatif hareketli çatıya göre tanımı verilecek ve bu eğri çiftinin bazı teoremleri incelenecektir.

Tanım 4.1.5. $\alpha = \alpha(s)$ ve $\alpha_1 = \alpha_1(s_1)$; s ve s_1 parametreleriyle birlikte iki regüler eğri olsun. (α) ve (α_1) eğrilerinin Frenet çatıları sırasıyla $\{T, N, B\}$, $\{T_1, N_1, B_1\}$ ve Frenet eğrilik, burulmaları sırasıyla $\{\kappa, \tau\}$ ve $\{\kappa_1, \tau_1\}$ olsun. Bu eğrilerin alternatif hareketli çatı elemanları ve eğrilikleri sırasıyla $\{N, C, W, f, g\}$ ve $\{N_1, C_1, W_1, f_1, g_1\}$ olsun. Bu durumda eğer C ve C_1 vektör alanları çakışık ise yani $C = C_1$ ise (α) ve (α_1) eğrilerine C -partner eğrileri denir (Kaya ve Önder, 2017).

Tanım 4.1.5'ten α_1 eğrisinin parametrik gösterimi aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\alpha_1(s) = \alpha(s) + R(s)C(s).$$

Burada, $R = R(s)$ (α) ve (α_1) eğrileri arasındaki uzaklık fonksiyonudur. C ve C_1 vektör alanları çakışık yani $C = C_1$ olduğundan (α) ve (α_1) eğrilerinin alternatif hareketli çatı elemanları arasındaki ilişki

$$\begin{cases} N_1 = \cos \theta N - \sin \theta W, \\ W_1 = \sin \theta N + \cos \theta W \end{cases}$$

ya da

$$\begin{cases} N = \cos \theta N_1 + \sin \theta W_1, \\ W = -\sin \theta N_1 + \cos \theta W_1 \end{cases}$$

şeklindedir. Burada $\theta = \theta(s)$ açısı N, N_1 ve W, W_1 arasındaki açıdır. Ayrıca θ açısı eğrilerin karşılıklı noktalarındaki rektifiyan düzlemlerinin arasındaki açıdır.

Teorem 4.1.3. (α) ve (α_1) C -partner eğriler olsun. Eğrilerin karşılıklı noktalarında, rektifiyan düzlemleri arasındaki $\theta = \theta(s)$ açısı sabittir (Kaya ve Önder, 2017).

İspat. (α) ve (α_1) C -partner eğrileri olsun. Tanım 4.1.5'ten

$$W_1 = \sin \theta N + \cos \theta W$$

şeklindedir. Son denklemin s parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{dW_1}{ds} = \frac{dW_1}{ds_1} \frac{ds_1}{ds} = \frac{d\theta}{ds} \cos \theta N + \sin \theta \frac{dN}{ds} - \frac{d\theta}{ds} \sin \theta W + \cos \theta \frac{dW}{ds}$$

elde edilir. (4.5) türev formülleri son denklemde yazılırsa

$$-g_1 C_1 \frac{ds_1}{ds} = \theta' \cos \theta N + (f \sin \theta - g \cos \theta) C - \theta' \sin \theta W$$

denklemi elde edilir. $C = C_1$ olduğundan

$$\begin{cases} \theta' \cos \theta = 0, \\ \theta' \sin \theta = 0 \end{cases}$$

dolayısıyla $\theta' = 0$ yani $\theta = \text{sabit}$ olduğu elde edilir.

Bu teoremin ispatı, C -partner eğrilerin bir diğer geometrik tanımını vermektedir. C -partner eğriler, bu eğrilerin rektifiyan düzlemlerinin bir doğru boyunca karşılık gelen noktalarında sabit bir açı ile kesiştiği eğriler olarak tanımlanabilir. Buradan, $R = R(s)$ sabit fonksiyonunun bazı karakterizasyonları verilebilir.

Teorem 4.1.4. (α) ve (α_1) C -partner eğriler olsun. Bu eğri çifti arasındaki R uzaklığının sabit olması için gerek ve yeter şart $\cos \theta (\bar{\tau}f' - \bar{\tau}'f) + \sin \theta (\bar{\tau}g' - \bar{\tau}'g) = 0$ ya da

$$\frac{\left(\frac{\bar{\tau}}{f}\right)' f^2}{\left(\frac{\bar{\tau}}{g}\right)' g^2} = \text{sabit}$$

olmasıdır. Burada $\bar{\kappa} = \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}$ ve $\bar{\tau} = \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}$ 'dir (Kaya ve Önder, 2017).

İspat. (α) ve (α_1) C -partner eğriler olsun. C -partner eğri tanımından

$$\alpha_1(s) = \alpha(s) + R(s)C(s)$$

yazılabilir. Son denklemin s parametresine göre türevi alınırsa

$$T_1 \frac{ds_1}{ds} = T - RfN + R'C + RgW$$

bulunur. $C = C_1$ ve $\theta = \text{sabit}$ ve $T_1 = -\bar{\kappa}C_1 + \bar{\tau}W_1$, $T = -\bar{\kappa}C + \bar{\tau}W$ ve

$$\begin{cases} N = \cos \theta N_1 + \sin \theta W_1, \\ W = -\sin \theta N_1 + \cos \theta W_1 \end{cases}$$

denklemlerinden gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\begin{cases} -\bar{\kappa}_1 \frac{ds_1}{ds} = -\bar{\kappa} + R', \\ Rf \cos \theta + Rg \sin \theta + \bar{\tau} \sin \theta = 0, \\ \bar{\tau}_1 \frac{ds_1}{ds} = \bar{\tau} \cos \theta - Rf \sin \theta + Rg \cos \theta \end{cases} \quad (4.10)$$

elde edilir. Dolayısıyla son denklem sisteminin ikinci denkleminde

$$R = \frac{-\bar{\tau} \sin \theta}{f \cos \theta + g \sin \theta}$$

bulunur. Son denklemin s parametresine göre türevi alınarak

$$R' = \frac{\sin \theta \cos \theta (-f\bar{\tau}' + f'\bar{\tau}) + \sin^2 \theta (-g\bar{\tau}' + g'\bar{\tau})}{(f \cos \theta + g \sin \theta)^2}$$

elde edilir. Böylece $R' = 0$ olması için gerek ve yeter şart

$$\cos \theta (-f\bar{\tau}' + f'\bar{\tau}) + \sin \theta (-g\bar{\tau}' + g'\bar{\tau}) = 0$$

olmasıdır. Buradan

$$-\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\tan \theta = \frac{-f\bar{\tau}' + f'\bar{\tau}}{-g\bar{\tau}' + g'\bar{\tau}} = \text{sabit}$$

şeklindedir. Son denklem düzenlenirse

$$-\tan \theta = \frac{\left(\frac{\bar{\tau}}{f}\right)' f^2}{\left(\frac{\bar{\tau}}{g}\right)' g^2}$$

olur.

Teorem 4.1.5. (α) ve (α_1) C -partner eğriler olsun. O halde, (α, α_1) eğri çifti arasındaki R uzaklığı

$$R = \frac{g_1 \bar{\tau} - g \bar{\tau}_1}{f f_1 - g g_1}$$

dır (Kaya ve Önder, 2017).

İspat. (α) ve (α_1) C -partner eğriler olsun. Teorem 4.1.4'teki (4.10) denklem sisteminden

$$R = \frac{-\bar{\tau} \sin \theta}{f \cos \theta + g \sin \theta}$$

ya da düzenlenerek

$$Rf \cos \theta + Rg \sin \theta + \bar{\tau} \sin \theta = 0$$

elde edilir. Son denklemde Rf ve Rg ayrı ayrı yalnız bırakılırsa

$$Rf = -\frac{\sin \theta (\bar{\tau} + Rg)}{\cos \theta}$$

ve

$$Rg = \frac{-Rf \cos \theta - \bar{\tau} \sin \theta}{\sin \theta}$$

olarak bulunur. Son denklemler (4.10) denklem sisteminde yerine yazılırsa sırasıyla

$$\bar{\tau}_1 \frac{ds_1}{ds} \cos \theta = \bar{\tau} + Rg \quad (4.11)$$

ve

$$\bar{\tau}_1 \frac{ds_1}{ds} \sin \theta = -Rf \quad (4.12)$$

denklemleri elde edilir. Teorem 4.1.4'ten

$$\alpha_1(s) = \alpha(s) + R(s)C(s)$$

olduğu bilinmektedir. Son denklemde R uzaklığı aşağıdaki gibi düşünülürse

$$\alpha_1(s) = \alpha(s) - R(s)C(s)$$

şeklinde elde edilir. Benzer işlemlerle aşağıdaki denklemler bulunur.

$$\bar{\tau} \frac{ds_1}{ds} \cos \theta = \bar{\tau}_1 - Rg_1 \quad (4.13)$$

ve

$$\bar{\tau} \frac{ds_1}{ds} \sin \theta = -Rf_1. \quad (4.14)$$

(4.11) ve (4.12) denklemleri taraf tarafa çarpılırsa

$$\bar{\tau}\bar{\tau}_1 \cos^2 \theta = -R\bar{\tau}g_1 - R^2 g g_1 + \bar{\tau}\bar{\tau}_1 + R\bar{\tau}_1 g$$

bulunur. Benzer şekilde (4.13) ve (4.14) denklemleri taraf tarafa çarpılırsa

$$\bar{\tau}\bar{\tau}_1 \sin^2 \theta = R^2 f f_1$$

şeklinde elde edilir. Elde edilen son iki denklem taraf tarafa toplanır ve R yalnız bırakılırsa

$$R = \frac{\bar{\tau}g_1 - \bar{\tau}_1 g}{f f_1 - g g_1}$$

bulunur. Böylece ispat biter.

Helisler ile Bertrand eğrileri arasında güçlü bir ilişki vardır. Bu nedenle Bertrand eğrileri ile ilişkili birçok uygulama verilebilir. Örneğin; bir küresel α eğrisinin çember olması için gerek ve yeter şart bu eğri ile ilişkili Bertrand eğrisinin dairesel helis olmasıdır. Ayrıca Bertrand eğrileri bir genel helis üzerine inşa edilebileceği gibi C -partner eğrileri ile de helis, slant helisler arasında da bazı ilişkiler verilebilir.

Teorem 4.1.6. (α) ve (α_1) C -partner eğriler olsun. O halde α eğrisinin bir slant helis olması için gerek ve yeter şart α_1 eğrisinin bir slant helis olmasıdır (Kaya ve Önder, 2017).

İspat.

$$\begin{cases} N_1 = \cos \theta N - \sin \theta W, \\ W_1 = \sin \theta N + \cos \theta W \end{cases}$$

ve $N'_1 = f_1 C_1$ olduğundan

$$\langle N'_1, C_1 \rangle = f_1$$

olduğu elde edilir. Ayrıca $N_1 = \cos \theta N - \sin \theta W$ denkleminin s_1 parametresine göre türevi alınır

$$\left\langle \frac{dN_1}{ds_1}, C_1 \right\rangle = \frac{ds}{ds_1} (\cos \theta f + \sin \theta g) = f_1$$

bulunur. $W_1 = \sin \theta N + \cos \theta W$ denkleminin s_1 parametresine göre türevi alınır ve $W'_1 = -g_1 C_1$ olduğu kullanılırsa

$$\left\langle \frac{dW_1}{ds_1}, C_1 \right\rangle = \frac{ds}{ds_1} (\sin \theta f - \cos \theta g) = -g_1$$

bulunur. Böylece

$$\frac{g_1}{f_1} = \frac{-\sin \theta f + \cos \theta g}{\cos \theta f + \sin \theta g}$$

elde edilir. Buradan (α) slant helis olsun. Bu durumda $\frac{g}{f} = c = \text{sabit}$ olur ki bu durumda $\frac{g_1}{f_1} = \text{sabit}$ olduğu elde edilir. Tersine (α_1) slant helis olsun. Bu durumda $\frac{g_1}{f_1} = d = \text{sabit}$ olur ki bu durumda $\frac{g}{f} = \text{sabit}$ olduğu elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.2. (α) ve (α_1) C -partner eğriler olsun. Eğer α eğrisi bir helis ise α_1 eğrisi bir slant helistir. Ayrıca α_1 eğrisi bir helis ise α eğrisi de bir slant helistir (Kaya ve Önder, 2017).

İspat. (α) bir helis olsun. Bu durumda $\frac{\tau}{\kappa} = c = \text{sabit} \Rightarrow \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = 0$ 'dır. Alternatif hareketli çatının eğrilikleri $f = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$ ve $g = \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + \tau^2} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'$ olduğundan $g = 0$ bulunur. Teorem 4.1.6'dan

$$\frac{g_1}{f_1} = \frac{-\sin \theta f + \cos \theta g}{\cos \theta f + \sin \theta g} = -\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\tan \theta = \text{sabit}$$

olur yani (α_1) slant helistir. Tersine (α_1) bir helis olsun. Bu durumda $\frac{\tau_1}{\kappa_1} = c = \text{sabit}$ olduğundan $g_1 = \frac{\kappa_1^2}{\kappa_1^2 + \tau_1^2} \left(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)' = 0$ olur. O halde

$$\frac{g}{f} = \frac{\sin \theta f_1 + \cos \theta g_1}{\cos \theta f_1 - \sin \theta g_1} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta = \text{sabit}$$

olur yani (α) slant helistir. Böylece ispat tamamlanır.

5. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölüm tezin orijinal bölümünü oluşturmaktadır ve dört alt başlığa ayrılmıştır. İlk olarak 3-boyutlu Öklid uzayında geliştirilmiş alternatif ortogonal çatı tanımı verilmiş ve bir eğrinin geliştirilmiş alternatif ortogonal çatıya göre slant helis olma şartları incelenmiştir. İkinci olarak geliştirilmiş alternatif ortogonal çatıya göre C^* -partner eğrileri tanımlanarak bu eğrilerin karakterizasyonları elde edilmiş ve bazı özel eğrilerle olan ilişkileri incelenmiştir. Üçüncü kısımda geliştirilmiş alternatif ortogonal çatı yardımıyla elde edilen regle yüzey tanımlanmıştır. Dördüncü kısımda ise bu regle yüzeyin açılabilirlik durumları bazı özel şartlar için ayrı ayrı incelenmiş ve regle yüzeyin bazı karakterizasyonları elde edilmiştir.

5.1. Geliştirilmiş Alternatif Ortogonal Çatı, N^* -Slant Helis ve C^* -Slant Helis

Bu bölümde, ilk olarak 3-boyutlu Öklid uzayında geliştirilmiş alternatif ortogonal çatı tanımlanmıştır. Daha sonra ise geliştirilmiş alternatif ortogonal çatıya göre N^* -slant helis ve C^* -slant helis tanımları verilmiştir. Son olarak, geliştirilmiş alternatif ortogonal çatı kullanılarak bu özel eğrilerin bazı karakterizasyonları elde edilmiştir.

Regüler bir eğrinin birinci eğriliğinin sıfır ($\kappa = 0$) olduğu noktalarda Frenet çatısı tanımlanamamaktadır. Bu durumda bu eğri için Frenet çatısından farklı çatılar tanımlamak mümkündür. Dolayısıyla Frenet çatısı genişletilerek yeni bir çatı tanımlanabilir. Frenet çatısındaki benzer durum $\{N, C, W\}$ alternatif hareketli çatı için de söz konusudur. $\{N, C, W\}$ alternatif hareketli çatının eğriliğinin sıfır ($f(s) = \|N'(s)\| = 0$) olduğu noktalarda $C = \frac{N'}{f} = \frac{N'}{\|N'\|}$ olduğundan C vektör alanı tanımlanamaz. Böylece alternatif hareketli çatı oluşturulamaz. Bir eğrinin bu tür noktalarındaki sorunun çözümü için modifiye ortogonal çatıdaki yöntem düşünülerek "geliştirilmiş alternatif ortogonal çatı" tanımlanması bu noktalarda da çatı hareketinin karakterizasyonu açısından oldukça önemlidir. Şimdi, geliştirilmiş alternatif ortogonal çatı tanımı verilecektir.

Tanım 5.1.1. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$, s yay parametrelili birim hızlı bir eğri olsun. 3-boyutlu Öklid uzayında α eğrisinin geliştirilmiş alternatif ortogonal çatı vektörleri $\{N^*, C^*, W^*\}$ ve alternatif hareketli çatı vektörleri $\{N, C, W\}$ arasındaki ilişki

$$\begin{aligned} N^* &= \kappa N, \\ C^* &= fC, \\ W^* &= fW \end{aligned} \quad (5.1)$$

şeklindedir. Burada $f(s_0) = 0$ olduğu noktalarda $C^*(s_0) = W^*(s_0) = 0$ dır (Kızıltuğ vd., 2023).

Buradan, 3-boyutlu Öklid uzayında geliştirilmiş alternatif ortogonal çatının türev formülleri için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.1.1. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$, s yay parametrelili birim hızlı bir eğri olsun. Burada $\{N^*, C^*, W^*\}$ geliştirilmiş alternatif ortogonal çatının türev formülleri

$$\begin{bmatrix} N^{*'} \\ C^{*'} \\ W^{*'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\kappa'}{\kappa} & \kappa & 0 \\ -\frac{f^2}{\kappa} & \frac{f'}{f} & g \\ 0 & -g & \frac{f'}{f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^* \\ C^* \\ W^* \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

şeklindedir. Burada $f = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$, $g = \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + \tau^2} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'$ dır (Kızıltuğ vd., 2023).

İspat. α , s yay parametrelili birim hızlı bir eğri olsun. Alternatif hareketli çatının normal vektörünün türevi

$$N' = fC$$

dir. Burada (5.1) eşitlikleri yardımıyla

$$\left(\frac{N^*}{\kappa} \right)' = C^*$$

elde edilir ve son denklem düzenlenirse

$$\frac{N^{*'}\kappa - N^*\kappa'}{\kappa^2} = C^*$$

bulunur. Dolayısıyla geliştirilmiş alternatif ortogonal çatının normal vektörünün türevi

$$N^{*'} = \frac{\kappa'}{\kappa} N^* + \kappa C^*$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde C vektörünün türev formülü (4.5) türev formüllerinden

$$C' = -fN + gW$$

dir. Burada (5.1) eşitlikleri yerlerine yazılarak

$$\left(\frac{C^*}{f}\right)' = -f \frac{N^*}{\kappa} + g \frac{W^*}{f}$$

elde edilir. Son denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$C^{*'} = \frac{-f^2}{\kappa} N^* + \frac{f'}{f} C^* + gW^*$$

şeklinde geliştirilmiş alternatif ortogonal çatının C^* vektörünün türevi elde edilir. Son olarak (4.5) türev formüllerinden

$$W' = -gC$$

olduğu biliniyor. Burada (5.1) eşitlikleri yerlerine yazılarak

$$\left(\frac{W^*}{f}\right)' = -g \frac{C^*}{f}$$

denklemini elde edilir. Son denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa geliştirilmiş alternatif ortogonal çatının Darboux vektörünün türevi

$$W^{*'} = -gC^* + \frac{f'}{f} W^*$$

biçiminde bulunur. Elde edilen denklemler düzenlenerek geliştirilmiş alternatif ortogonal çatının türev formülleri matris formunda yazılırsa

$$\begin{bmatrix} N^{*'} \\ C^{*'} \\ W^{*'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\kappa'}{\kappa} & \kappa & 0 \\ -\frac{f^2}{\kappa} & \frac{f'}{f} & g \\ 0 & -g & \frac{f'}{f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^* \\ C^* \\ W^* \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Ayrıca, $\{N^*, C^*, W^*\}$ geliştirilmiş alternatif ortogonal çatı vektörleri aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

$$\langle N^*, N^* \rangle = \kappa^2, \quad \langle C^*, C^* \rangle = f^2, \quad \langle W^*, W^* \rangle = f^2$$

ve

$$\langle N^*, C^* \rangle = 0, \quad \langle N^*, W^* \rangle = 0, \quad \langle C^*, W^* \rangle = 0.$$

Burada eğrinin alternatif hareketli çatıya göre eğrilikleri $f = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$ dir. Ayrıca κ ve τ sırasıyla (α) nın Frenet çatısına göre eğriliği ve burulmasıdır.

Teorem 5.1.2. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$, s yay parametrelili birim hızlı bir eğri olsun. Eğrinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ ve geliştirilmiş alternatif ortogonal çatısı $\{N^*, C^*, W^*\}$ olmak üzere geliştirilmiş alternatif ortogonal çatının vektörleri ile Frenet çatısının vektörleri arasındaki ilişki

$$\begin{aligned} N^* &= \kappa N, \\ C^* &= -\kappa T + \tau B, \\ W^* &= \tau T + \kappa B \end{aligned} \tag{5.3}$$

şeklindedir (Kızıltuğ vd., 2023).

İspat. α birim hızlı bir eğri olsun. (5.1) eşitliklerinden $N^* = \kappa N$ dir. Tanım 4.1.1 ve (5.1) eşitliklerinden W^* ve C^* vektörleri

$$W^* = fW = f \left(\frac{1}{f} (\tau T + \kappa B) \right) = \tau T + \kappa B$$

ve

$$C^* = fC = f\left(\frac{1}{f}(-\kappa T + \tau B)\right) = -\kappa T + \tau B$$

olarak bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 5.1.1. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı bir eğri olsun. Eğrinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ ve geliştirilmiş alternatif ortogonal çatısı $\{N^*, C^*, W^*\}$ olmak üzere Frenet çatısının vektörleri ile geliştirilmiş alternatif ortogonal çatı vektörleri arasındaki ilişki

$$T = \frac{-\kappa C^* + \tau W^*}{\kappa^2 + \tau^2}, \quad N = \frac{N^*}{\kappa}, \quad B = \frac{\tau C^* + \kappa W^*}{\kappa^2 + \tau^2}$$

şeklindedir (Kızıltuğ vd., 2023).

İspat. α birim hızlı eğri olsun. Bu durumda (5.3) eşitliklerinin son iki denklemi taraf tarafa çözümlerse

$$B = \frac{1}{f^2}(\kappa W^* + \tau C^*)$$

ve

$$T = -\frac{1}{f^2}(\kappa C^* - \tau W^*)$$

olarak bulunur. Bu denklemler gerekli düzenlemeler yapılarak $f = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$ olduğundan $\{N^*, C^*, W^*\}$ geliştirilmiş alternatif ortogonal çatı ile $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı arasındaki ilişki

$$T = \frac{-\kappa C^* + \tau W^*}{\kappa^2 + \tau^2}, \quad N = \frac{N^*}{\kappa}, \quad B = \frac{\tau C^* + \kappa W^*}{\kappa^2 + \tau^2}$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi, $\{N^*, C^*, W^*\}$ geliştirilmiş alternatif ortogonal çatıya göre N^* -slant helis ve C^* -slant helis eğrilerinin karakterizasyonu ile ilgili teoremler verilebilir.

Tanım 5.1.2. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$, $\mathbb{E}^3$ uzayında s yay parametrelili bir birim hızlı eğri olsun. $\{N^*, C^*, W^*\}$, α eğrisinin geliştirilmiş alternatif ortogonal çatısı olsun. Bu durumda, α eğrisinin N^* vektörü sabit bir X doğrultusu ile sabit ζ ($\zeta \neq \frac{\pi}{2}$) açısı yapıyorsa α eğrisine N^* -slant helis denir. Yani her $s \in I$ için

$$\langle N^*, X \rangle = \kappa \cos \zeta \quad (5.4)$$

ise α eğrisine N^* -slant helis denir (Kızıltuğ vd., 2023).

Teorem 5.1.3. (α) , $\mathbb{E}^3$ te $\{N^*, C^*, W^*, f, g\}$ geliştirilmiş alternatif ortogonal çatı elemanlarına sahip birim hızlı bir eğri olsun. (α) birim hızlı eğrisi geliştirilmiş alternatif ortogonal çatıya göre N^* -slant helis ise N^* -slant helisin eksenini X ile geliştirilmiş alternatif ortogonal çatı elemanları arasındaki ilişki

$$X = \kappa \cos \zeta N^* + \frac{f^2}{g} \cos \zeta W^*$$

şeklindedir. Burada, κ , (α) nın Frenet eğriliği, $f = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$ olmak üzere ζ , N^* ve X vektör alanları arasındaki açıdır (Kızıltuğ vd., 2023).

İspat. (α) , $\mathbb{E}^3$ te $\{N^*, C^*, W^*\}$ geliştirilmiş alternatif ortogonal çatıya göre N^* -slant helis olsun. Bu durumda, Tanım 5.1.2'deki (5.4) denkleminin s parametresine göre diferansiyeli alınır ve (5.2) türev formülleri yerine yazılırsa

$$\langle C^*, X \rangle = 0 \quad (5.5)$$

denklemini elde edilir. Böylece X birim sabit vektörü

$$X = \kappa \cos \zeta N^* + \lambda W^* \quad (5.6)$$

şeklinde yazılabilir. Burada λ diferansiyellenebilir bir fonksiyondur. Eğer (5.5) denkleminin türev alma işlemi tekrar uygulanırsa

$$-\frac{f^2}{\kappa} \langle N^*, X \rangle + \frac{f'}{f} \langle C^*, X \rangle + g \langle W^*, X \rangle = 0$$

bulunur. Ayrıca (5.4) ve (5.5) denklemleri son denklemde yerine yazılır ve bu denklem düzenlenirse

$$\langle W^*, X \rangle = \frac{f^2}{g} \cos \zeta \quad (5.7)$$

eşitliği elde edilir. Son olarak (5.6) ve (5.7) denklemleri göz önüne alındığında N^* -slant helisin eksenini

$$X = \kappa \cos \zeta N^* + \frac{f^2}{g} \cos \zeta W^*$$

olacak şekilde bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Tanım 5.1.3. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$, $\mathbb{E}^3$ uzayında s yay parametrelili bir birim hızlı eğri olsun. $\{N^*, C^*, W^*\}$, α eğrisinin geliştirilmiş alternatif ortogonal çatısı olsun. Bu durumda, α eğrisinin C^* vektörü sabit bir Y doğrultusu ile sabit η ($\eta \neq \frac{\pi}{2}$) açısı yapıyorsa α eğrisine C^* -slant helis denir. Yani her $s \in I$ için

$$\langle C^*, X \rangle = \kappa \cos \eta \quad (5.8)$$

ise α eğrisine C^* -slant helis denir (Kızıltuğ vd., 2023).

Teorem 5.1.4. (α) , $\mathbb{E}^3$ te $\{N^*, C^*, W^*, f, g\}$ geliştirilmiş alternatif ortogonal çatı elemanlarına sahip bir birim hızlı eğri olsun. (α) eğrisi C^* -slant helis ise C^* -slant helisin eksenini Y , geliştirilmiş alternatif ortogonal çatı elemanları cinsinden

$$Y = \mu \cos \eta N^* + f \cos \eta C^* + \delta \cos \eta W^*$$

şeklinde karakterize edilir. Burada $f = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$ olmak üzere η , C^* ve Y vektör alanları arasındaki açıdır. Ayrıca $\mu = \frac{g\kappa(f^2+g^2)}{g'f-f'g}$ ve $\delta = \frac{f^2(f^2+g^2)}{g'f-f'g}$, dır (Kızıltuğ vd., 2023).

İspat. (α) eğrisi $\{N^*, C^*, W^*\}$ geliştirilmiş alternatif ortogonal çatıya göre C^* -slant helis olduğunu düşünüldüğünde Tanım 5.1.3'ten

$$\langle C^*, Y \rangle = f \cos \eta$$

dir. Burada η , C^* ve Y vektör alanları arasındaki sabit açıdır. Şimdi (5.8) denkleminin s yay uzunluğu parametresine göre ardışık türevleri alınır

$$-\frac{f^2}{\kappa} \langle N^*, Y \rangle + \frac{f'}{f} \langle C^*, Y \rangle + g \langle W^*, Y \rangle = f' \cos \eta,$$

$$-\frac{2ff'}{\kappa^2} \langle N^*, Y \rangle - (f^2 + g^2) \langle C^*, Y \rangle + \left(g' + \frac{gf'}{f} \right) \langle W^*, Y \rangle = 0$$

bulunur. Bu denklemler düzenlenerek sırasıyla,

$$\langle N^*, Y \rangle = \frac{g\kappa(f^2 + g^2)}{g'f - f'g} \cos \eta,$$

$$\langle W^*, Y \rangle = \frac{f^2(f^2 + g^2)}{g'f - f'g} \cos \eta$$

denklemleri elde edilir. Sonuç olarak, $\mu = \frac{g\kappa(f^2+g^2)}{g'f-f'g}$ ve $\delta = \frac{f^2(f^2+g^2)}{g'f-f'g}$ olarak yazılırsa C^* -slant helisin eksenine olan Y vektör alanı

$$Y = \mu \cos \eta N^* + f \cos \eta C^* + \delta \cos \eta W^*$$

biçiminde yazılabilir. Böylece ispat tamamlanır.

5.2. Geliştirilmiş Alternatif Ortogonal Çatıya Göre C^* -Partner Eğrileri

Bu bölümde $\{N^*, C^*, W^*\}$ geliştirilmiş alternatif ortogonal çatıya göre C^* -partner eğrileri tanımlanacaktır. Ayrıca bu yeni eğri çifti ile ilgili bazı tanım, teorem ve sonuçlar verilecektir.

$\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$, $\beta: J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$; sırasıyla $s \in I$ ve $s_1 \in J$ yay parametrelili iki farklı birim hızlı eğri olsun. Ayrıca (α) ve (β) eğrilerinin Frenet vektörleri ve eğrilikleri sırasıyla $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ ve $\{T_1, N_1, B_1, \kappa_1, \tau_1\}$ olarak verilsin. Bu durumda aşağıdaki tanım ve teoremler verilebilir.

Tanım 5.2.1. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ ve $\beta: J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ iki regüler eğri olsun. (α) ve (β) eğrilerinin geliştirilmiş alternatif ortogonal çatı elemanları ve eğrilikleri sırasıyla $\{N^*, C^*, W^*, f, g\}$ ve $\{N_1^*, C_1^*, W_1^*, f_1, g_1\}$ olsun. Bu durumda eğer C^* ve C_1^* vektör alanları eğrilerin karşılıklı çakışmayan noktalarında lineer bağımlı ise (α) ve (β) eğri çiftine C^* -partner eğrileri denir (Kızıltuğ vd., 2023).

Teorem 5.2.1. (α) ve (β) , $\mathbb{E}^3$ te C^* -partner eğrileri olsun. Bu durumda, (α) ve (β) C^* -partner eğrilerinin karşılıklı çakışmayan noktaları arasındaki uzaklık sabit değildir (Kızıltuğ vd., 2023).

İspat. (α) ve (β) eğrileri $\mathbb{E}^3$ 'te C^* -partner eğrileri olsun. $\{N^*, C^*, W^*\}$ ve $\{N_1^*, C_1^*, W_1^*\}$ sırasıyla bu eğrilerin geliştirilmiş alternatif ortogonal çatı vektörleri olarak verilsin. Bu durumda C^* -partner eğrilerinin karşılıklı çakışmayan noktaları arasındaki ilişki aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\beta(s) = \alpha(s) + D(s)C^*(s) \quad (5.9)$$

Burada $D = D(s)$ uzaklık fonksiyonu ve $s \in I$, (α) eğrisinin yay parametresidir. Eğer (5.9) denkleminin $s \in I$ parametresine göre türevi alınırsa bu türev

$$\frac{d\beta}{ds} = \frac{d\alpha}{ds} + \frac{dD}{ds}C^* + D\frac{dC^*}{ds}$$

şeklinde elde edilir. Bu denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{d\beta}{ds_1} \frac{ds_1}{ds} = T + \frac{dD}{ds}C^* + D\frac{dC^*}{ds} \quad (5.10)$$

olarak bulunur. (5.10) denklemi düzenlenirse

$$T_1 \frac{ds_1}{ds} = T + D'C^* + D(C^*)'$$

denklemi elde edilir. Burada T ve T_1 , (α) , (β) C^* -partner eğrilerinin teğet vektörleri ve s_1 , (β) eğrisinin yay parametresidir. (5.2) matrisindeki geliştirilmiş alternatif ortogonal çatının türev formülleri kullanılırsa

$$T_1 \frac{ds_1}{ds} = T + D' C^* + D \left(-\frac{f^2}{\kappa} N^* + \frac{f'}{f} C^* + g W^* \right)$$

olur. Ek olarak, son denklem düzenlenirse

$$T_1 \frac{ds_1}{ds} = T + \left(D' + \frac{Df'}{f} \right) C^* - \frac{Df^2}{\kappa} N^* + DgW^* \quad (5.11)$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$T_1 = \frac{1}{f_1^2} (\tau_1 W_1^* - \kappa_1 C_1^*),$$

$$T = \frac{1}{f^2} (\tau W^* - \kappa C^*)$$

olduğundan (5.11) denkleminde yukarıdaki eşitlikler yazılırsa

$$\frac{1}{f_1^2} (\tau_1 W_1^* - \kappa_1 C_1^*) \frac{ds_1}{ds} = \frac{1}{f^2} (\tau W^* - \kappa C^*) + \left(D' + \frac{Df'}{f} \right) C^* - \frac{Df^2}{\kappa} N^* + DgW^*$$

bulunur. Son denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned} & -\frac{\kappa_1}{f_1^2} \frac{ds_1}{ds} C_1^* + \frac{\tau_1}{f_1^2} \frac{ds_1}{ds} W_1^* \\ & = -\frac{Df^2}{\kappa} N^* + \left(-\frac{\kappa}{f^2} + D' + \frac{Df'}{f} \right) C^* + \left(\frac{\tau}{f^2} + Dg \right) W^* \end{aligned} \quad (5.12)$$

şeklinde elde edilir. Burada $\{\kappa, \tau\}$ ve $\{\kappa_1, \tau_1\}$, C^* -partner eğrilerinin Frenet eğrilikleridir.

Diğer taraftan $\{C^*, C_1^*\}$ vektör alanlarının lineer bağımlı olduğu düşünülürse

$$C^* = C_1^*$$

olduğundan

$$\langle C^*, C^* \rangle = f^2 = \langle C^*, C_1^* \rangle = \langle C_1^*, C_1^* \rangle = f_1^2$$

eşitliği bulunur. Son eşitliklerden ise

$$f^2 = f_1^2$$

denklemini elde edilir. Dolayısıyla (5.12) denkleminin her iki tarafı da C^* vektörü ile iç çarpım yapılırsa

$$-\frac{\kappa_1}{f_1^2} \frac{ds_1}{ds} = -\frac{\kappa}{f^2} + D' + \frac{Df'}{f}$$

ve

$$-\frac{\kappa_1}{f_1^2} \frac{ds_1}{ds} = \frac{-\kappa + D'f^2 + Dff'}{f^2}$$

eşitlikleri elde edilir. Ayrıca, $f^2 = f_1^2$ olduğundan

$$-\kappa_1 \frac{ds_1}{ds} = -\kappa + D'f^2 + Dff'$$

denklemini elde edilir. Son eşitlik düzenlenirse

$$\frac{\kappa - \kappa_1 \frac{ds_1}{ds}}{f^2} = \frac{D'f + Df'}{f}$$

olarak bulunur. Böylece

$$\frac{\kappa - \kappa_1 \frac{ds_1}{ds}}{f} = (Df)' \quad (5.13)$$

denklemini elde edilir. Sonuç olarak (5.13) denkleminin uzaklık fonksiyonunun sabit olmadığı görülür.

Özel olarak

$$\kappa - \kappa_1 \frac{ds_1}{ds} = 0$$

alındığı takdirde

$$\kappa = \kappa_1 \frac{ds_1}{ds}$$

eşitliği elde edilir. Bu durumda

$$(Df)' = 0$$

eşitliği bulunur. Dolayısıyla $Df = c = \text{sabit}$ olur. Bu durumda

$$D = \frac{c}{f}, (c = \text{sabit})$$

denklemini elde edilir. $f \neq \text{sabit}$ olmak üzere D uzaklığının yine sabit olmadığı görülür. Böylece ispat biter.

Eğer, (α) ve (β) C^* -partner eğrilerinin sırasıyla, C^* ve C_1^* vektör alanları $C^* = C_1^*$ denklemini sağlarsa bu durumda C^* -partner eğrilerinin f ve f_1 alternatif hareketli çatısının eğrilikleri $f^2 = f_1^2$ denklemini sağlar.

Ayrıca $\kappa > 0$, $f > 0$ ve $\langle N^*, N^* \rangle = \kappa^2$, $\langle C^*, C^* \rangle = f^2$, $\langle W^*, W^* \rangle = f^2$ olduğundan $\{N^*, C^*, W^*\}$ vektörlerinin boyları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\|N^*\| = \sqrt{\langle N^*, N^* \rangle} = \sqrt{\kappa^2} = |\kappa| = \kappa,$$

$$\|C^*\| = \sqrt{\langle C^*, C^* \rangle} = \sqrt{f^2} = f,$$

$$\|W^*\| = \sqrt{\langle W^*, W^* \rangle} = \sqrt{f^2} = f.$$

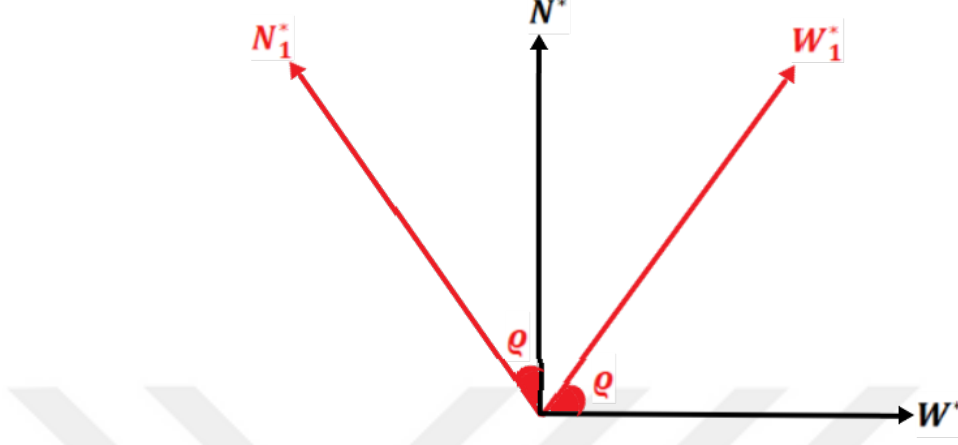
O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.2.2. (α) ve (β) , E^3 te C^* -partner eğrileri olsun. (α) ve (β) eğrilerinin geliştirilmiş alternatif ortogonal çatıları sırasıyla $\{N^*, C^*, W^*\}$ ve $\{N_1^*, C_1^*, W_1^*\}$ ve N^* , N_1^* arasındaki açı ise ϱ olsun. $\{N^*, C^*, W^*\}$ ve $\{N_1^*, C_1^*, W_1^*\}$ geliştirilmiş alternatif ortogonal çatıları arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} N^* \\ C^* \\ W^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\kappa}{\kappa_1} \cos \varrho & 0 & \frac{\kappa}{f_1} \sin \varrho \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{f}{\kappa_1} \sin \varrho & 0 & \cos \varrho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1^* \\ C_1^* \\ W_1^* \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

şeklindedir. Burada (α) ve (β) eğrilerinin Frenet eğrileri κ , κ_1 ve alternatif hareketli çatıya göre eğrilikleri sırasıyla f , f_1 dir (Kızıltuğ vd., 2023).

İspat. (α) ve (β) C^* -partner eğrileri olduğundan $C^* = C_1^*$ olur. Ayrıca N^* ve N_1^* ile W^* ve W_1^* arasındaki açı ϱ olsun.



Şekil 5.1. N^* ve N_1^* ile W^* ve W_1^* arasındaki ϱ açısı

Bu durumda

$$\cos \varrho = \frac{\langle W^*, W_1^* \rangle}{\|W^*\| \|W_1^*\|} = \frac{\langle W^*, W_1^* \rangle}{f f_1}$$

eşitliği yazılır buradan W^* ve W_1^* vektörlerinin iç çarpımı

$$\langle W^*, W_1^* \rangle = f f_1 \cos \varrho$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla

$$\cos \varrho = \frac{\langle N^*, N_1^* \rangle}{\|N^*\| \|N_1^*\|} = \frac{\langle W^*, W_1^* \rangle}{\kappa \kappa_1}$$

olduğundan N^* ile N_1^* vektörlerinin iç çarpımı

$$\langle N^*, N_1^* \rangle = \kappa \kappa_1 \cos \varrho$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde

$$\cos(90 - \varrho) = \sin \varrho = \frac{\langle W_1^*, N^* \rangle}{\|W_1^*\| \|N^*\|} = \frac{\langle W^*, W_1^* \rangle}{\kappa f_1}$$

olduğundan buradan

$$\langle N^*, W_1^* \rangle = \kappa f_1 \sin \varrho$$

eşitliği bulunur. O halde,

$$\cos(90 + \varrho) = -\sin \varrho = \frac{\langle W^*, N_1^* \rangle}{\|W^*\| \|N_1^*\|} = \frac{\langle W^*, N_1^* \rangle}{\kappa_1 f}$$

denkleminde yararlanılarak

$$\langle W^*, N_1^* \rangle = -\kappa_1 f \sin \varrho$$

sonucuna ulaşılır.

Şimdi N^* vektörü $N^* = aN_1^* + bW_1^*$ olarak alınsın. Bu durumda bu denklemin her iki tarafın N_1^* ile iç çarpımı alınırsa

$$\langle N^*, N_1^* \rangle = a\langle N_1^*, N_1^* \rangle + b\langle W_1^*, N_1^* \rangle$$

olur. $\langle N^*, N_1^* \rangle = \kappa \kappa_1 \cos \varrho$ ve $\langle W_1^*, N_1^* \rangle = 0$ olduğu göz önüne alınır ve

$$\kappa \kappa_1 \cos \varrho = a \kappa_1^2$$

denklemini düzenlenirse

$$a = \frac{\kappa}{\kappa_1} \cos \varrho$$

olduğu elde edilir. Benzer şekilde $N^* = aN_1^* + bW_1^*$ eşitliğinin W_1^* ile iç çarpımı alınırsa

$$\langle N^*, W_1^* \rangle = a\langle N_1^*, W_1^* \rangle + b\langle W_1^*, W_1^* \rangle$$

olur. Burada $\langle N^*, W_1^* \rangle = \kappa f_1 \sin \varrho$, $\langle N_1^*, W_1^* \rangle = 0$ ve $\langle W_1^*, W_1^* \rangle = f_1^2$ olduğundan bir önceki denklemde yerine yazılırsa

$$\kappa f_1 \sin \varrho = b f_1^2$$

ifadesi elde edilir. Dolayısıyla

$$b = \frac{\kappa}{f_1} \sin \varrho$$

bulunur. Şimdi W^* vektörü $W^* = cN_1^* + dW_1^*$ olarak göz önüne alınsın. Bu denklemin N_1^* ile iç çarpımı yapılırsa

$$\langle W^*, N_1^* \rangle = c\langle N_1^*, N_1^* \rangle + d\langle W_1^*, N_1^* \rangle$$

olur. Burada $\langle W^*, N_1^* \rangle = -\kappa_1 f \sin \varrho$, $\langle N_1^*, N_1^* \rangle = \kappa_1^2$ ve $\langle W_1^*, N_1^* \rangle = 0$ olduğu göz önüne alınır

$$-\kappa_1 f \sin \varrho = c\kappa_1^2$$

şeklinde yazılabilir. O halde c ,

$$c = -\frac{f}{\kappa_1} \sin \varrho$$

olarak bulunur. Benzer şekilde $W^* = cN_1^* + dW_1^*$ denkleminin her iki tarafı W_1^* ile iç çarpımı yapılırsa

$$\langle W^*, W_1^* \rangle = c\langle N_1^*, W_1^* \rangle + d\langle W_1^*, W_1^* \rangle$$

şeklinde olur. Burada $\langle W^*, W_1^* \rangle = f f_1 \cos \varrho$, $\langle W_1^*, W_1^* \rangle = f_1^2$ ve $\langle N_1^*, W_1^* \rangle = 0$ olduğu göz önüne alınır

$$f f_1 \cos \varrho = d f_1^2$$

ifadesi bulunur ve son ifadeden

$$d = \frac{f}{f_1} \cos \varrho$$

biçiminde elde edilir. Sonuç olarak bulunan a, b, c, d katsayıları yerine yazıldığında N^* ve W^* vektörleri

$$N^* = \frac{\kappa}{\kappa_1} \cos \varrho N_1^* + \frac{\kappa}{f_1} \sin \varrho W_1^*,$$

$$W^* = -\frac{f}{\kappa_1} \sin \varrho N_1^* + \frac{f}{f_1} \cos \varrho W_1^*$$

ya da

$$N^* = \kappa \left(\frac{\cos \varrho}{\kappa_1} N_1^* + \frac{\sin \varrho}{f_1} W_1^* \right),$$

$$W^* = f \left(-\frac{\sin \varrho}{\kappa_1} N_1^* + \frac{\cos \varrho}{f_1} W_1^* \right)$$

olarak bulunur. Ayrıca son denklemlerden N_1^* ve W_1^* yalnız bırakılırsa

$$f \sin \varrho N^* = \frac{f \kappa}{\kappa_1} \cos \varrho \sin \varrho N_1^* + \frac{f \kappa \sin^2 \varrho}{f_1} W_1^*,$$

$$\kappa \cos \varrho W^* = -\frac{f \kappa}{\kappa_1} \cos \varrho \sin \varrho N_1^* + \frac{f \kappa \cos^2 \varrho}{f_1} W_1^*$$

elde edilir. Son iki denklem taraf tarafa toplanıp düzenlenirse

$$\frac{f \kappa}{f_1} W_1^* = f \sin \varrho N^* + \kappa \cos \varrho W^*$$

bulunur. Benzer şekilde

$$f \cos \varrho N^* = \frac{f \kappa \cos^2 \varrho}{\kappa_1} N_1^* + \frac{f \kappa}{f_1} \cos \varrho \sin \varrho W_1^*,$$

$$-\kappa \sin \varrho W^* = \frac{f \kappa \sin^2 \varrho}{\kappa_1} N_1^* - \frac{f \kappa}{f_1} \cos \varrho \sin \varrho W_1^*$$

olduğundan son iki denklem taraf tarafa toplanıp düzenlenirse

$$\frac{f \kappa}{\kappa_1} N_1^* = f \cos \varrho N^* - \kappa \sin \varrho W^*$$

elde edilir. Ayrıca $f^2 = f_1^2$ ve $f, f_1 > 0$ olduğundan

$$f = f_1$$

olarak bulunur. O halde

$$N^* = \frac{\kappa}{\kappa_1} \cos \varrho N_1^* + \frac{\kappa}{f_1} \sin \varrho W_1^*,$$

$$W^* = -\frac{f}{\kappa_1} \sin \varrho N_1^* + \cos \varrho W_1^* \quad (5.15)$$

ya da

$$N_1^* = \frac{\kappa_1}{\kappa} \cos \varrho N^* - \frac{\kappa_1}{f} \sin \varrho W^*,$$

$$W_1^* = \frac{f}{\kappa} \sin \varrho N^* + \cos \varrho W^* \quad (5.16)$$

olduğu elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 5.2.3. (α) ve (β) , $\mathbb{E}^3$ te C^* -partner eğrileri olsun. Bu durumda (α, β) eğri çiftinin sırasıyla, N^* ve N_1^* normal vektör alanları arasındaki açı sabittir (Kızıltuğ vd., 2023).

İspat. (α) ve (β) , $\mathbb{E}^3$ te C^* -partner eğrileri olsun. Bu durumda (5.16) denkleminde

$$N_1^* = \frac{\kappa_1}{\kappa} \cos \varrho N^* - \frac{\kappa_1}{f} \sin \varrho W^* \quad (5.17)$$

elde edilir. Burada $\{N^*, C^*, W^*, f, g\}$ ve $\{N_1^*, C_1^*, W_1^*, f_1, g_1\}$ sırasıyla (α) ve (β) geliştirilmiş alternatif ortogonal çatı elemanları ve κ , κ_1 bu eğri çiftinin Frenet eğrilikleridir. Buradan (5.17) denkleminin s parametresine göre türevi alınarak aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\frac{dN_1^*}{ds} = \frac{dN_1^*}{ds_1} \frac{ds_1}{ds} = \left(\frac{\kappa_1 \cos \varrho}{\kappa} \right)' N^* + \frac{\kappa_1 \cos \varrho}{\kappa} (N^*)' - \left(\frac{\kappa_1 \sin \varrho}{f} \right)' W^* - \frac{\kappa_1 \sin \varrho}{f} (W^*)'.$$

Ek olarak (5.2) ve (5.17) denklemlerini göz önünde bulundurarak

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\kappa_1'}{\kappa_1} N_1^* + \kappa_1 C_1^* \right) \frac{ds_1}{ds} \\ &= \left(\frac{(\kappa_1 \cos \varrho)' \kappa - \kappa' \kappa_1 \cos \varrho}{\kappa^2} \right) N^* + \frac{\kappa_1}{\kappa} \cos \varrho \left(\frac{\kappa'}{\kappa} N^* + \kappa C^* \right) \\ & \quad - \left(\frac{(\kappa_1 \sin \varrho)' f - f' \kappa_1 \sin \varrho}{f^2} \right) W^* - \frac{\kappa_1}{f} \sin \varrho \left(-g C^* + \frac{f'}{f} W^* \right) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Son denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned}
& \frac{\kappa_1'}{\kappa_1} \frac{ds_1}{ds} N_1^* + \kappa_1 \frac{ds_1}{ds} C_1^* \\
&= \left(\frac{(\kappa_1' \cos \varrho - \kappa_1 \varrho' \sin \varrho) \kappa - \kappa' \kappa_1 \cos \varrho}{\kappa^2} + \frac{\kappa' \kappa_1}{\kappa^2} \cos \varrho \right) N^* \\
&+ \left(\kappa_1 \cos \varrho + \frac{\kappa_1 g}{f} \sin \varrho \right) C^* \\
&- \left(\frac{(\kappa_1' \sin \varrho - \kappa_1 \varrho' \cos \varrho) f - f' \kappa_1 \sin \varrho}{f^2} + \frac{\kappa_1 f'}{f^2} \sin \varrho \right) W^*
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Böylece

$$\begin{aligned}
& \frac{\kappa_1'}{\kappa_1} \frac{ds_1}{ds} N_1^* + \kappa_1 \frac{ds_1}{ds} C_1^* \\
&= \left(\frac{\kappa \kappa_1' \cos \varrho - \kappa \kappa_1 \varrho' \sin \varrho}{\kappa^2} \right) N^* + \left(\kappa_1 \cos \varrho + \frac{\kappa_1 g}{f} \sin \varrho \right) C^* \\
&- \left(\frac{\kappa_1' f \sin \varrho + \kappa_1 f \varrho' \cos \varrho}{f^2} \right) W^*
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
& \frac{\kappa_1'}{\kappa_1} \frac{ds_1}{ds} N_1^* + \kappa_1 \frac{ds_1}{ds} C_1^* \\
&= \left(\frac{\kappa_1' \cos \varrho - \kappa_1 \varrho' \sin \varrho}{\kappa} \right) N^* + \left(\kappa_1 \cos \varrho + \frac{\kappa_1 g}{f} \sin \varrho \right) C^* \\
&- \left(\frac{\kappa_1' \sin \varrho + \kappa_1 \varrho' \cos \varrho}{f} \right) W^*
\end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Ayrıca $N_1^* = \frac{\kappa_1}{\kappa} \cos \varrho N^* - \frac{\kappa_1}{f} \sin \varrho W^*$ olduğundan bu ifade son denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{\kappa_1'}{\kappa_1} \cos \varrho \frac{ds_1}{ds} N^* + \kappa_1 \frac{ds_1}{ds} C_1^* - \frac{\kappa_1'}{f} \sin \varrho \frac{ds_1}{ds} W^* = \left(\frac{\kappa_1' \cos \varrho - \kappa_1 \varrho' \sin \varrho}{\kappa} \right) N^* \\
&+ \left(\kappa_1 \cos \varrho + \kappa_1 \frac{g}{f} \sin \varrho \right) C^* - \left(\frac{\kappa_1' \sin \varrho + \kappa_1 \varrho' \cos \varrho}{f} \right) W^*
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buradan aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\frac{\kappa_1'}{\kappa_1} \cos \varrho \frac{ds_1}{ds} = \frac{\kappa_1' \cos \varrho - \kappa_1 \varrho' \sin \varrho}{\kappa}, \quad (5.18)$$

$$\kappa_1 \frac{ds_1}{ds} = \kappa_1 \cos \varrho + \kappa_1 \frac{g}{f} \sin \varrho, \quad (5.19)$$

$$\frac{\kappa_1'}{f} \sin \varrho \frac{ds_1}{ds} = \frac{\kappa_1' \sin \varrho + \kappa_1 \varrho' \cos \varrho}{f} \quad (5.20)$$

(5.18) denkleminde

$$(\kappa_1 \cos \varrho)' = \kappa_1' \cos \varrho \frac{ds_1}{ds} \quad (5.21)$$

olarak bulunur. (5.19) denkleminde ise

$$\frac{ds_1}{ds} = \cos \varrho + \frac{g}{f} \sin \varrho \quad (5.22)$$

sonucuna ve (5.20) denkleminde

$$(\kappa_1 \sin \varrho)' = \kappa_1' \sin \varrho \frac{ds_1}{ds} \quad (5.23)$$

denkleminde ulaşılır. Ayrıca (5.21) ve (5.23) denklemlerinden aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\kappa_1' \frac{ds_1}{ds} = \frac{(\kappa_1 \cos \varrho)'}{\cos \varrho} = \frac{(\kappa_1 \sin \varrho)'}{\sin \varrho}$$

olduğundan

$$\kappa_1' \cos \varrho \sin \varrho - \kappa_1 \varrho' \sin^2 \varrho = \kappa_1' \cos \varrho \sin \varrho + \kappa_1 \varrho' \cos^2 \varrho$$

$$0 = \kappa_1 \varrho' (\sin^2 \varrho + \cos^2 \varrho)$$

elde edilir. Böylece $\sin^2 \varrho + \cos^2 \varrho \neq 0$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\kappa_1 \varrho' = 0$$

ifadesine ulaşılır. Sonuç olarak $\kappa_1 \neq 0$ olduğu bilindiğinden $\varrho' = 0$ dır. Böylece ϱ açısının sabit olduğu görülür.

Teorem 5.2.4. (α) ve (β) , $\mathbb{E}^3$ te C^* -partner eğrileri ve $D = D(s)$ bu eğri çiftinin çakışmayan noktaları arasındaki uzaklık fonksiyonu olsun. Böylece D uzunluğunun sabit olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{\left(\frac{\tau}{f^3}\right)' f^2}{\left(\frac{\tau}{f^2 g}\right)' g^2} = -\tan \varrho = \text{sabit}$$

olmasıdır. Burada τ , f ve g sırasıyla (α) eğrisinin Frenet torsiyonu ve alternatif eğrilikleridir. ϱ ise N^* ve N_1^* vektör alanları arasındaki açıdır (Kızıltuğ vd., 2023).

İspat. Eğer (α) ve (β) , $\mathbb{E}^3$ 'te C^* -partner eğrileri ise bu eğriler arasındaki ilişkinin

$$\beta(s) = \alpha(s) + D(s)C^*(s).$$

olduğu biliniyor. Son eşitliğin s parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\beta}{ds_1} \frac{ds_1}{ds} = \frac{d\alpha}{ds} + D'C^* + D \frac{dC^*}{ds}$$

ve bu denklemden (5.2) türev formülleri yerine yazılırsa

$$T_1 \frac{ds_1}{ds} = T + D'C^* + D \left(-\frac{f^2}{\kappa} N^* + \frac{f'}{f} C^* + gW^* \right) \quad (5.24)$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca

$$T_1 = \frac{1}{f_1^2} (\tau_1 W_1^* - \kappa_1 C_1^*),$$

$$T = \frac{1}{f^2} (\tau W^* - \kappa C^*)$$

olduğundan

$$\frac{1}{f_1^2} (\tau_1 W_1^* - \kappa_1 C_1^*) \frac{ds_1}{ds} = \frac{1}{f^2} (\tau W^* - \kappa C^*) + D'C^* + -\frac{Df^2}{\kappa} N^* + \frac{Df'}{f} C^* + DgW^*$$

biçiminde elde edilir. Son denklem düzenlenirse

$$-\frac{\kappa_1}{f_1^2} \frac{ds_1}{ds} C_1^* + \frac{\tau_1}{f_1^2} \frac{ds_1}{ds} W_1^* = -\frac{Df^2}{\kappa} N^* + \left(-\frac{\kappa}{f^2} + D' + \frac{Df'}{f} \right) C^* + \left(\frac{\tau}{f^2} + Dg \right) W^*$$

ifadesine ulaşılır. (5.14) matrisindeki $N^* = \frac{\kappa}{\kappa_1} \cos \varrho N_1^* + \frac{\kappa}{f_1} \sin \varrho W_1^*$ ve $W^* = -\frac{f}{\kappa_1} \sin \varrho N_1^* + \cos \varrho W_1^*$ denklemleri son denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\tau_1}{f_1^2} \frac{ds_1}{ds} W_1^* - \frac{\kappa_1}{f_1^2} \frac{ds_1}{ds} C_1^* &= -\frac{Df^2}{\kappa} \left(\frac{\kappa}{\kappa_1} \cos \varrho N_1^* + \frac{\kappa}{f_1} \sin \varrho W_1^* \right) \\ &+ \left(-\frac{\kappa}{f^2} + D' + \frac{Df'}{f} \right) C^* + \left(\frac{\tau}{f^2} + Dg \right) \left(-\frac{f}{\kappa_1} \sin \varrho N_1^* + \cos \varrho W_1^* \right) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Son denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned} -\frac{\kappa_1}{f_1^2} \frac{ds_1}{ds} C_1^* + \frac{\tau_1}{f_1^2} \frac{ds_1}{ds} W_1^* &= \left(-\frac{Df^2}{\kappa_1} \cos \varrho - \frac{\tau}{f\kappa_1} \sin \varrho - \frac{Dgf}{\kappa_1} \sin \varrho \right) N_1^* \\ &+ \left(-\frac{\kappa}{f^2} + D' + \frac{Df'}{f} \right) C^* + \left(-\frac{Df^2}{f_1} \sin \varrho + \frac{\tau}{f^2} \cos \varrho + Dg \cos \varrho \right) W_1^* \end{aligned} \quad (5.25)$$

olarak bulunur. Buradan C^* ve C_1^* vektör alanları lineer bağımlı olduğundan

$$-\frac{\kappa_1}{f_1^2} \frac{ds_1}{ds} = \frac{-\kappa + D'f^2 + Dff'}{f^2}$$

biçimindedir. Ayrıca $f^2 = f_1^2$ olduğundan

$$-\kappa_1 \frac{ds_1}{ds} = -\kappa + D'f^2 + Dff' \quad (5.26)$$

eşitliği elde edilir. Diğer taraftan (5.25) eşitliğinden aşağıdaki denklem yazılır.

$$\frac{\tau_1}{f_1^2} \frac{ds_1}{ds} = -\frac{Df^2}{f_1} \sin \varrho + \frac{\tau}{f^2} \cos \varrho + Dg \cos \varrho .$$

$f^2 = f_1^2$ olduğundan son denklemde payda eşitlenirse

$$\frac{\tau_1}{f_1^2} \frac{ds_1}{ds} = -\frac{Df^3}{f^2} \sin \varrho + \frac{\tau}{f^2} \cos \varrho + \frac{Dgf^2 \cos \varrho}{f^2}$$

olur. Buradan

$$\tau_1 \frac{ds_1}{ds} = Df^2(g\cos\varrho - f\sin\varrho) + \tau\cos\varrho \quad (5.27)$$

yazılabilir. (5.25) eşitliğinden

$$-\frac{Df^2}{\kappa_1}\cos\varrho - \frac{\tau}{f\kappa_1}\sin\varrho - \frac{Dgf}{\kappa_1}\sin\varrho = 0$$

ifadesine ulaşılır. Son denklem düzenlenirse

$$Df^2(f\cos\varrho + g\sin\varrho) + \tau\sin\varrho = 0 \quad (5.28)$$

denklemini elde edilir. Böylece (5.28) denkleminde D yalnız bırakılırsa

$$D = \frac{-\tau\sin\varrho}{f^2(f\cos\varrho + g\sin\varrho)} \quad (5.29)$$

bulunur. ϱ açısı sabit olmak üzere (5.29) denkleminin s parametresine göre türevi alınarak

$$D' = -\frac{(\tau'\sin\varrho)f^2(g\sin\varrho + f\cos\varrho) - (\tau\sin\varrho)(f^2g\sin\varrho + f^3\cos\varrho)'}{f^4(f\cos\varrho + g\sin\varrho)^2}$$

eşitliği elde edilebilir. Son denklem düzenlenerek

$$D' = \frac{-\tau'\sin\varrho(f^2g\sin\varrho + f^3\cos\varrho) + \tau\sin\varrho((2ff'g + f^2g')\sin\varrho + 3f^2f'\cos\varrho)}{f^4(f\cos\varrho + g\sin\varrho)^2}$$

denklemini bulunur. Şimdi ise kabul edilsin ki $D(s)$ uzaklık fonksiyonunun sabit olması için gerek ve yeter şart $D'(s) = 0$ dır. Böylece son eşitlikten

$$\tau'\sin\varrho(f^2g\sin\varrho + f^3\cos\varrho) - \tau\sin\varrho((2ff'g + f^2g')\sin\varrho + 3f^2f'\cos\varrho) = 0$$

olur. Eşitliğin her iki tarafı f ile sadeleştirilirse

$$\tau'\sin^2\varrho fg + \tau'\sin\varrho\cos\varrho f^2 - 2\tau\sin^2\varrho f'g - \tau\sin^2\varrho fg' - 3\tau ff'\sin\varrho\cos\varrho = 0$$

denkleminde ulaşılır. Son denklem $\sin\varrho$ ile sadeleştirilir ve düzenlenirse

$$\tau'\sin\varrho fg - 2\tau\sin\varrho f'g - \tau\sin\varrho fg' = -\tau'\cos\varrho f^2 + 3\tau ff'\cos\varrho$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{\sin \varrho}{\cos \varrho} = \frac{-\tau' f^2 + 3\tau f f'}{\tau' f g - 2\tau f' g - \tau f g'}$$

ifadesi bulunur. Pay ve payda f ile çarpılıp düzenlenirse

$$\frac{\sin \varrho}{\cos \varrho} = \frac{-\tau' f^3 + 3\tau f^2 f'}{\tau' f^2 g - 2\tau f f' g - \tau f^2 g'}$$

olur. Son denklemden

$$-\frac{\sin \varrho}{\cos \varrho} = \frac{\left(\frac{\tau}{f^3}\right)' f^2}{\left(\frac{\tau}{f^2 g}\right)' g^2}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece ϱ sabit olmak üzere D sabit olduğundan

$$\frac{\left(\frac{\tau}{f^3}\right)' f^2}{\left(\frac{\tau}{f^2 g}\right)' g^2} = -\tan \varrho = \text{sabit}$$

denklemini elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Bu kısımda ise (α) ve (β) , $\mathbb{E}^3$ te C^* -partner eğrileri olmak üzere (α) ve (β) eğrilerinin helis veya slant helis olması durumunda C^* -partner eğrilerinin karakterizasyonu hakkında bazı uygulamalara yer verilmiştir.

Teorem 5.2.5. (α, β) , $\mathbb{E}^3$ te C^* -partner eğrileri olsun. Bu durumda (β) eğrisinin alternatif eğrilikleri $\{f_1, g_1\}$ ile (α) eğrisinin alternatif eğrilikleri $\{f, g\}$ arasındaki ilişki

$$\frac{g_1}{f_1} = \frac{\frac{g}{f} \cos \varrho - \sin \varrho}{\frac{g}{f} \sin \varrho + \cos \varrho} \quad (5.30)$$

şeklinde dir. Burada N_1^* ve N^* arasındaki açı ϱ sabittir (Kızıltuğ vd., 2023).

İspat. (α) ve (β) , $\mathbb{E}^3$ 'te C^* -partner eğrileri olmak üzere, (5.16) denklem sistemindeki

$W_1^* = \frac{f}{\kappa} \sin \varrho N^* + \cos \varrho W^*$ denkleminin $s \in I$ parametresine göre türevi alınır

$$\frac{dW_1^*}{ds_1} \frac{ds_1}{ds} = \left(\frac{f}{\kappa} \sin \varrho \right)' N^* + \frac{f}{\kappa} \sin \varrho (N^*)' + \cos \varrho (W^*)'$$

ifadesine ulaşılır. Burada (5.2) türev formülleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \left(-g_1 C_1^* + \frac{f_1'}{f_1} W_1^* \right) \frac{ds_1}{ds} \\ &= \left(\frac{f' \kappa \sin \varrho - \kappa' f \sin \varrho}{\kappa^2} \right) N^* + \frac{f \sin \varrho}{\kappa} \left(\frac{\kappa'}{\kappa} N^* + \kappa C^* \right) \\ &+ \cos \varrho \left(-g C^* + \frac{f'}{f} W^* \right) \end{aligned}$$

olur. Son deklemden tekrar $W_1^* = \frac{f}{\kappa} \sin \varrho N^* + \cos \varrho W^*$ yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & -g_1 \frac{ds_1}{ds} C_1^* + \frac{f_1'}{f_1} \left(\frac{f}{\kappa} \sin \varrho N^* + \cos \varrho W^* \right) \frac{ds_1}{ds} \\ &= \left(\frac{f' \kappa \sin \varrho - \kappa' f \sin \varrho}{\kappa^2} + \frac{\kappa' f \sin \varrho}{\kappa^2} \right) N^* + (f \sin \varrho - g \cos \varrho) C^* \\ &+ \frac{f' \cos \varrho}{f} W^* \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} & -g_1 \frac{ds_1}{ds} C_1^* + \frac{f_1' f}{f_1 \kappa} \sin \varrho \frac{ds_1}{ds} N^* + \frac{f_1'}{f_1} \cos \varrho \frac{ds_1}{ds} W^* \\ &= \frac{f' \sin \varrho}{\kappa} N^* + (f \sin \varrho - g \cos \varrho) C^* + \frac{f' \cos \varrho}{f} W^* \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. $C^* = C_1^*$ ve $f = f_1$ olduğundan dolayı aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$-g_1 \frac{ds_1}{ds} = f \sin \varrho - g \cos \varrho, \quad (5.31)$$

$$\frac{f_1'}{\kappa} \sin \varrho \frac{ds_1}{ds} = \frac{f'}{\kappa} \sin \varrho, \quad (5.32)$$

$$\frac{f_1'}{f_1} \cos \varrho \frac{ds_1}{ds} = \frac{f'}{f} \cos \varrho. \quad (5.33)$$

(5.32) ve (5.33) denklemlerinden

$$\frac{ds_1}{ds} = \frac{f'}{f_1'}$$

oranı bulunur. Ayrıca (5.22) ve (5.31) denklemlerinden

$$\frac{ds_1}{ds} = \frac{f \cos \varrho + g \sin \varrho}{f} = \frac{-f \sin \varrho + g \cos \varrho}{g_1}$$

şeklinde elde edilir. $f = f_1$ olduğu göz önüne alınır ve son denklem düzenlenirse sonuç olarak

$$\frac{g_1}{f_1} = \frac{g \cos \varrho - f \sin \varrho}{g \sin \varrho + f \cos \varrho}$$

elde edilir. Bu durumda son denklemin sağ tarafında pay ve payda f ile bölünerek

$$\frac{g_1}{f_1} = \frac{\frac{g}{f} \cos \varrho - \sin \varrho}{\frac{g}{f} \sin \varrho + \cos \varrho}$$

denkleminde ulaşılır. Böylece ispat biter.

Teorem 5.2.5'in uygulaması olarak aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 5.2.1. (α, β) , $\mathbb{E}^3$ te C^* -partner eğrileri olsun. Ayrıca (α, β) C^* -partner eğrilerinin Frenet torsiyonu (τ, τ_1) ve $\{f, g\}$, $\{f_1, g_1\}$ sırasıyla bu C^* -partner eğrilerinin alternatif eğrilikleri olsun. Böylece Frenet torsiyonu ile alternatif eğrilikler arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir (Kızıltuğ vd., 2023).

$$\frac{\tau_1}{\tau} = \frac{\cos \varrho - \frac{g_1}{f_1} \sin \varrho}{\cos \varrho + \frac{g}{f} \sin \varrho}. \quad (5.34)$$

İspat. (α) ve (β) , $\mathbb{E}^3$ te C^* -partner eğrileri olsun. (5.29) eşitliği (5.27) denkleminde yerine yazılırsa

$$\tau_1 \frac{ds_1}{ds} = \frac{-\tau \sin \varrho}{f^2(f \cos \varrho + g \sin \varrho)} [f^2(g \cos \varrho - f \sin \varrho) + \tau \cos \varrho]$$

ifadesine ulaşılır. Son denklem düzenlenirse

$$\tau_1 \frac{ds_1}{ds} = -\tau \sin \varrho \left(\frac{g \cos \varrho - f \sin \varrho}{g \sin \varrho + f \cos \varrho} \right) + \tau \cos \varrho \quad (5.35)$$

denklemini elde edilir. Ayrıca Teorem 5.2.5'ten

$$\frac{g_1}{f_1} = \frac{g \cos \varrho - f \sin \varrho}{g \sin \varrho + f \cos \varrho}$$

olduğundan (5.35) denkleminde yerine yazılırsa

$$\tau_1 \frac{ds_1}{ds} = \tau \left(-\sin \varrho \frac{g_1}{f_1} + \cos \varrho \right)$$

sonucu bulunur. (5.22) denklemini kullanılarak

$$\tau_1 \left(\cos \varrho + \frac{g}{f} \sin \varrho \right) = \tau \left(\cos \varrho - \sin \varrho \frac{g_1}{f_1} \right)$$

şeklinde elde edilir. Böylece $f = f_1$ olduğundan torsiyonların oranı

$$\frac{\tau_1}{\tau} = \frac{\cos \varrho - \frac{g_1}{f_1} \sin \varrho}{\cos \varrho + \frac{g}{f} \sin \varrho}$$

biçiminde bulunur.

Sonuç 5.2.2. (α, β) , $\mathbb{E}^3$ te C^* -partner eğrileri olsun. (α) eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter şart (β) eğrisinin slant helis olmasıdır (Kızıltuğ vd., 2023).

İspat. (α) ve (β) , $\mathbb{E}^3$ te C^* -partner eğrileri ve (α) eğrisi slant helis olsun. Bu durumda (4.7) eşitliğinden

$$\frac{g}{f} = \text{sabit}$$

şeklindedir. (5.30) eşitliğinde ϱ açısı da sabit olduğundan

$$\frac{g_1}{f_1} = \frac{\frac{g}{f} \cos \varrho - \sin \varrho}{\frac{g}{f} \sin \varrho + \cos \varrho} = \text{sabit}$$

oranı elde edilir. Sonuç olarak son denklemden (β) eğrisi slant helis olur. Benzer şekilde (β) eğrisi slant helis olsun. O halde

$$\frac{g_1}{f_1} = c, (c = \text{sabit})$$

şeklindedir. (5.30) denkleminde $\frac{g}{f}$ yalnız bırakılırsa

$$c \left(\frac{g}{f} \sin \varrho + \cos \varrho \right) = \frac{g}{f} \cos \varrho - \sin \varrho$$

ifadesine ulaşılır son denklemden

$$\frac{g}{f} (c \sin \varrho - \cos \varrho) = -c \cos \varrho - \sin \varrho$$

bulunur. Böylece

$$\frac{g}{f} = \frac{-c \cos \varrho - \sin \varrho}{c \sin \varrho - \cos \varrho} \quad (5.36)$$

denklemini elde edilir. Ayrıca (5.36) denkleminde ϱ açısı sabit olduğundan sonuç olarak

$$\frac{g}{f} = \text{sabit}$$

olduğu bulunur. Dolayısıyla (α) eğrisi slant helistir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 5.2.3. $(\alpha, \beta), \mathbb{E}^3$ 'te C^* -partner eğrileri olsun. Eğer (α) eğrisi helis ise bu durumda (β) eğrisi slant helistir. Ayrıca, (β) eğrisi helis ise bu durumda (α) eğrisi de slant helistir (Kızıltuğ vd., 2023).

İspat. (α) eğrisi helis olarak göz önüne alınsın. Bu durumda Frenet eğrilik oranı

$$\frac{\tau}{\kappa} = \text{sabit ve } g = 0$$

dır. Böylece (5.30) denklemini göz önünde bulundurularak

$$\frac{g_1}{f_1} = -\tan \varrho \quad (\varrho = \text{sabit})$$

elde edilir. Dolayısıyla (β) eğrisi slant helistir. Benzer şekilde, eğer (β) eğrisi helis olarak alınırsa

$$g_1 = 0$$

olarak bulunur. Sonuç olarak, (5.36) denkleminde

$$\frac{g}{f} = \tan \varphi = \text{sabit}$$

ifadesine ulaşılır. Böylece (α) eğrisinin slant helis olduğu elde edilir.

Sonuç 5.2.4. $(\alpha, \beta), \mathbb{E}^3$ 'te C^* -partner eğrileri olsun. Eğer (α) (ya da (β)) eğrisi slant helis ise

$$\frac{\tau_1}{\tau} = \text{sabit}$$

tir. Burada (τ, τ_1) , C^* -partner eğrilerinin Frenet torsiyonlarıdır (Kızıltuğ vd., 2023).

İspat. (α) (ya da (β)) C^* -partner eğrileri ve (α) (ya da (β)) eğrisi slant helis olsun. Sonuç 5.2.2.'den (α) slant helis ise (β) eğrisinde slant helis olduğu bilinmektedir. Böylece

$$\frac{g}{f} = \text{sabit} \Leftrightarrow \frac{g_1}{f_1} = \text{sabit}$$

olduğu elde edilir. Ayrıca (5.34) denklemi göz önünde bulundurulursa

$$\frac{\tau_1}{\tau} = \text{sabit}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 5.2.1. Aşağıdaki parametre denklemi ile verilen ω dairesel helisi göz önüne alınsın.

$$\omega(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos \rho, \sin \rho, \rho).$$

ω dairesel helisinin alternatif hareketli çatı elemanları sırasıyla hesaplanırsa

$$N(\rho) = \frac{\omega''(\rho)}{\|\omega''(\rho)\|} = (\cos\rho, -\sin\rho, 0)$$

olur. $C = \frac{N'}{\|N'\|}$ olduğundan

$$C(\rho) = (-\sin\rho, -\cos\rho, 0)$$

şeklinde elde edilir. $N \times C = W$ olarak elde edildiğinden alternatif hareketli çatının Darboux vektörü

$$W = (0, 0, -1)$$

biçimindedir. Ayrıca $\kappa = \|T'(\rho)\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ve $f = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} = 1$ şeklinde bulunur.

Buradan (5.1) denklemleri kullanılarak geliştirilmiş alternatif ortogonal çatı elemanları

$$N^* = \left(\frac{\cos\rho}{\sqrt{2}}, -\frac{\sin\rho}{\sqrt{2}}, 0 \right),$$

$$C^* = (-\sin\rho, -\cos\rho, 0),$$

$$W^* = (0, 0, -1)$$

şeklinde elde edilir. Böylece ω dairesel helisinin ψ^* ve ψ^{**} C^* -partner eğrileri, D uzaklık fonksiyonunun aşağıdaki özel durumları için hesaplanırsa:

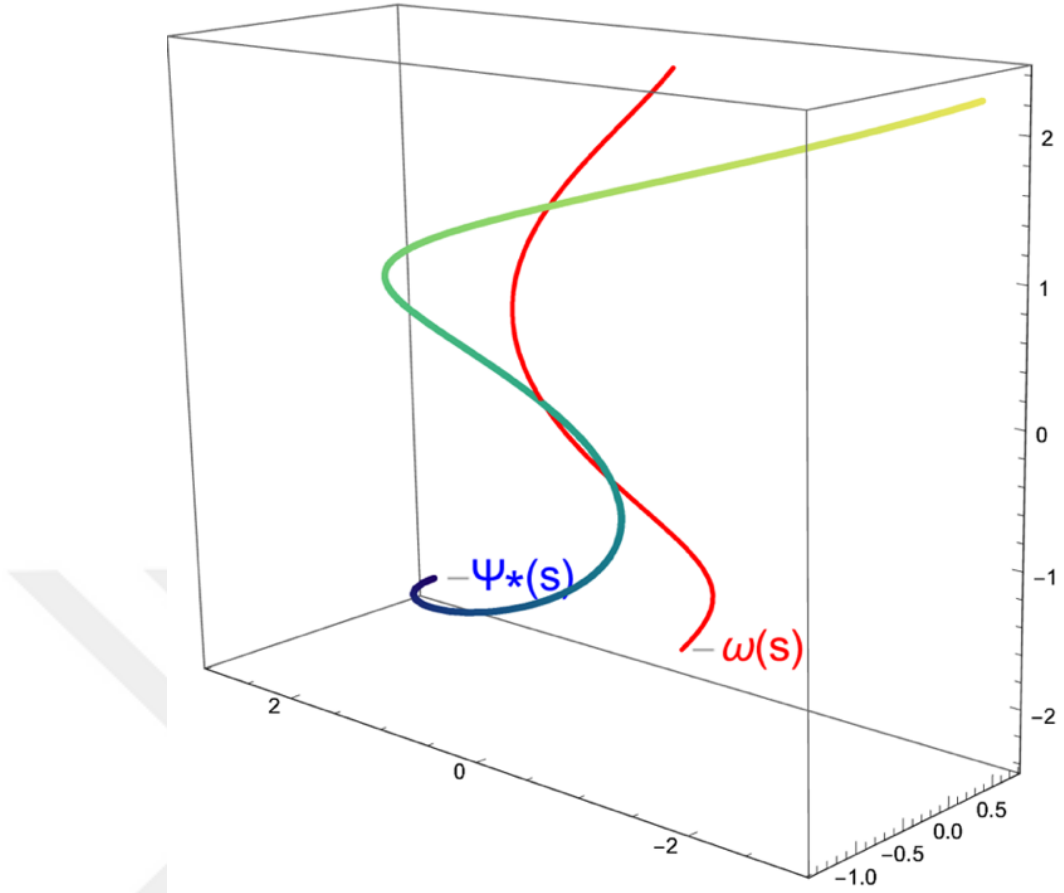
i) $D_1(\rho) = \sqrt{3}\rho$ uzaklık fonksiyonu için ω dairesel helisinin C^* -partner eğrisi ψ^* olmak üzere C^* -partner eğrileri arasındaki ilişkiden

$$\psi^*(\rho) = \omega(\rho) + D_1(\rho)C^*(\rho)$$

yazılabilir. Buradan

$$\psi^*(\rho) = \left(-\frac{\cos\rho}{\sqrt{2}} - \sqrt{3}\rho\sin\rho, \frac{\sin\rho}{\sqrt{2}} - \sqrt{3}\rho\cos\rho, \frac{\rho}{\sqrt{2}} \right)$$

şeklinde elde edilir. Buradan ω dairesel helisi ve ψ^* , C^* -partner eğrisinin grafiği aşağıdaki gibidir.



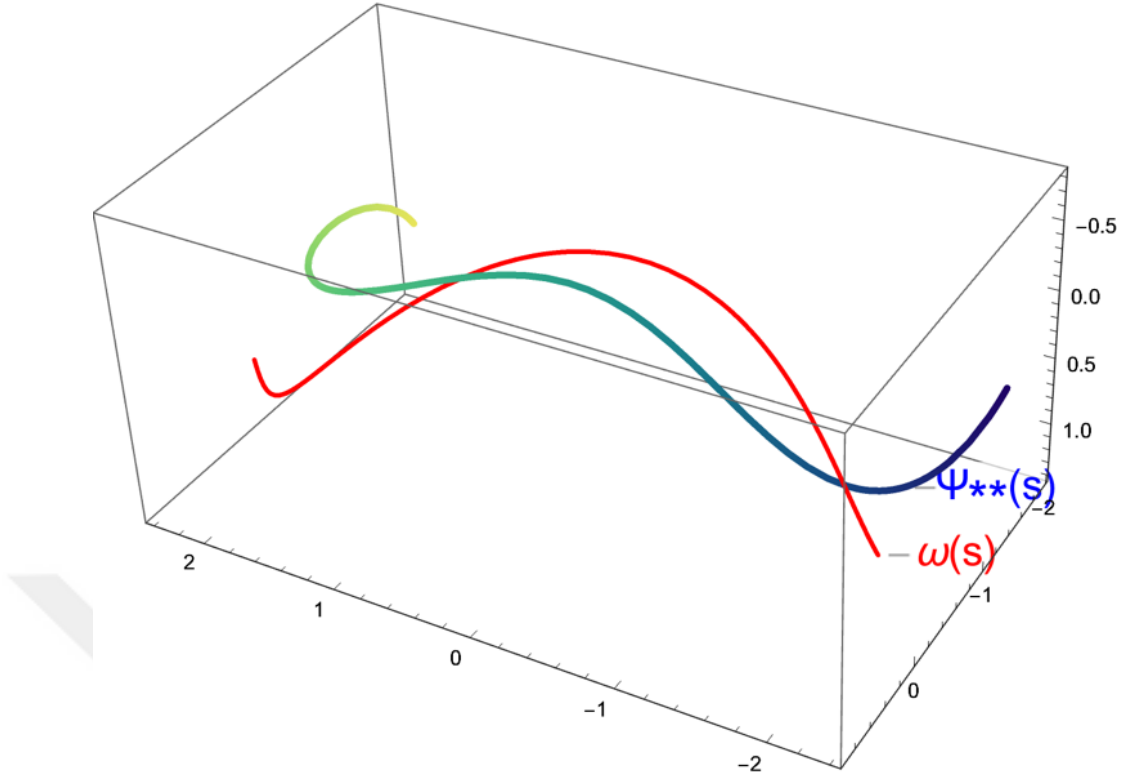
Şekil 5.2. ω dairesel helisi (kırmızı) ve ψ^* , C^* -partner eğrisi (mavi)

ii) $D_2(\rho) = \frac{(\sqrt{2} + \rho^2)}{3}$ uzaklık fonksiyonu için ω dairesel helisinin C^* -partner eğrisi ψ^{**} olmak üzere C^* -partner eğrileri arasındaki ilişkiden $\psi^{**}(\rho) = \omega(\rho) + D_2(\rho)C^*(\rho)$ 'dir. Böylece

$$\psi^{**}(\rho) = \left(-\frac{\cos \rho}{\sqrt{2}} - \frac{(\sqrt{2} + \rho^2)\sin \rho}{3}, \frac{\sin \rho}{\sqrt{2}} - \frac{(\sqrt{2} + \rho^2)\cos \rho}{3}, \frac{\rho}{\sqrt{2}} \right).$$

şeklinde elde edilir.

Buradan ω dairesel helisi ve ψ^{**} , C^* -partner eğrisinin grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 5.3. ω dairesel helisi (kırmızı) ve ψ^{**} , C^* -partner eğrisi (mavi)

Örnek 5.2.2.

$$\omega(\rho) = \left(-\frac{1}{12} \cos 4\rho - \frac{1}{3} \cos 2\rho, -\frac{1}{12} \sin 4\rho - \frac{1}{3} \sin 2\rho, -\frac{2\sqrt{2}}{3} \cos \rho \right)$$

parametrizasyonu ile ω birim hızlı slant helisi verilsin (Özdoğan vd., 2018). Bu durumda

$$N(\rho) = \frac{\omega''(\rho)}{\|\omega''(\rho)\|} = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \cos 3\rho, \frac{2\sqrt{2}}{3} \sin 3\rho, \frac{1}{3} \right)$$

olur. $C = \frac{N'}{\|N'\|}$ olduğundan

$$C(\rho) = (-\sin 3\rho, \cos 3\rho, 0)$$

şeklinde elde edilir. $N \times C = W$ olarak elde edildiğinden alternatif hareketli çatının Darboux vektörü

$$W(\rho) = \left(-\frac{1}{3} \cos 3\rho, -\frac{1}{3} \sin 3\rho, \frac{2\sqrt{2}}{3} \right)$$

biçimindedir. Ayrıca $\kappa = \frac{8}{3} \cos \rho$ ve $f = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} = 2\sqrt{2}$ şeklinde bulunur. Buradan (5.1) denklemleri kullanılarak geliştirilmiş alternatif ortogonal çatı elemanları

$$\begin{aligned} N^* &= \left(\frac{16\sqrt{2}}{9} \cos \rho \cos 3\rho, \frac{16\sqrt{2}}{9} \cos \rho \sin 3\rho, \frac{8}{9} \cos \rho \right), \\ C^* &= (-2\sqrt{2} \sin 3\rho, 2\sqrt{2} \cos 3\rho, 0), \\ W^* &= \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3} \cos 3\rho, -\frac{2\sqrt{2}}{3} \sin 3\rho, \frac{8}{3} \right) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Böylece ω slant helisinin ψ^* ve ψ^{**} C^* -partner eğrileri, D uzaklık fonksiyonunun aşağıdaki özel durumları için hesaplanırsa:

i) $D_3(\rho) = \frac{\sqrt{2}}{2} \rho$ uzaklık fonksiyonu için ω slant helisinin C^* -partner eğrisi ψ^* olmak

üzere şu şekilde elde edilir. C^* -partner eğrileri arasındaki ilişkiden

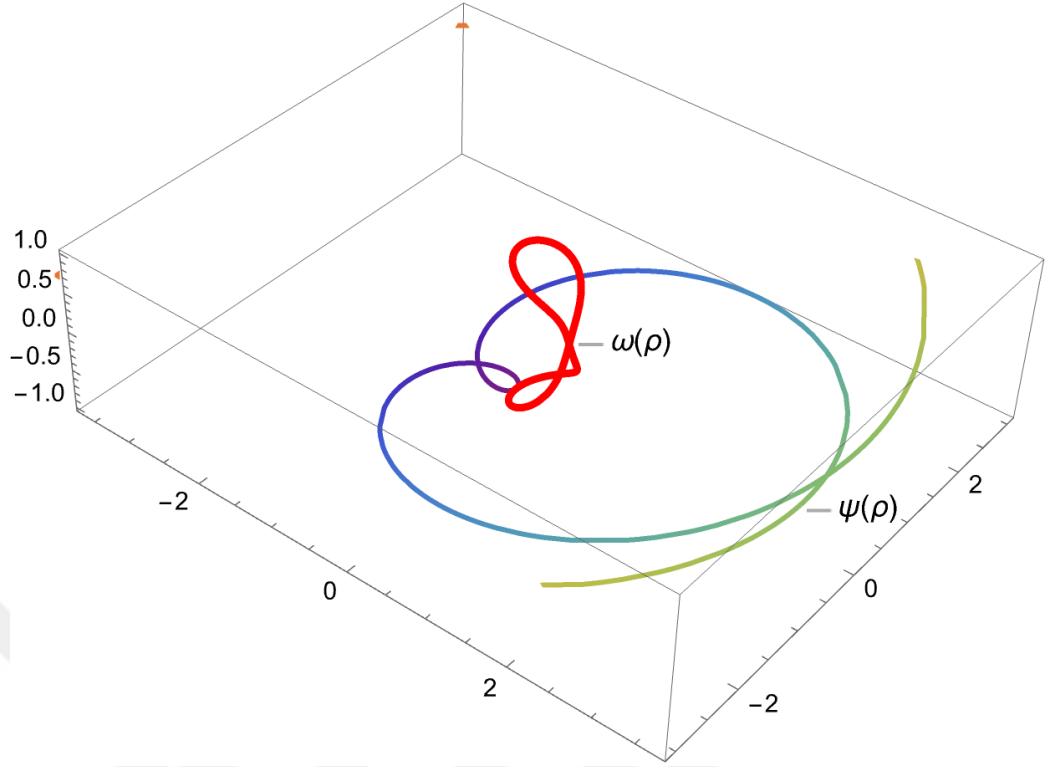
$$\psi^*(\rho) = \omega(\rho) + D_3(\rho)C^*(\rho)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} \psi^*(\rho) &= \left(-\frac{1}{12} \cos 4\rho - \frac{1}{3} \cos 2\rho - 2\rho \sin 3\rho, -\frac{1}{12} \sin 4\rho - \frac{1}{3} \sin 2\rho \right. \\ &\quad \left. + 2\rho \cos 3\rho, -\frac{2\sqrt{2}}{3} \cos \rho \right) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

Buradan ω slant helisi ile ψ^* , C^* -partner eğrisinin grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 5.4. ω slant helis eğrisi (kırmızı) ve ψ^* , C^* -partner eğrisi (mavi)

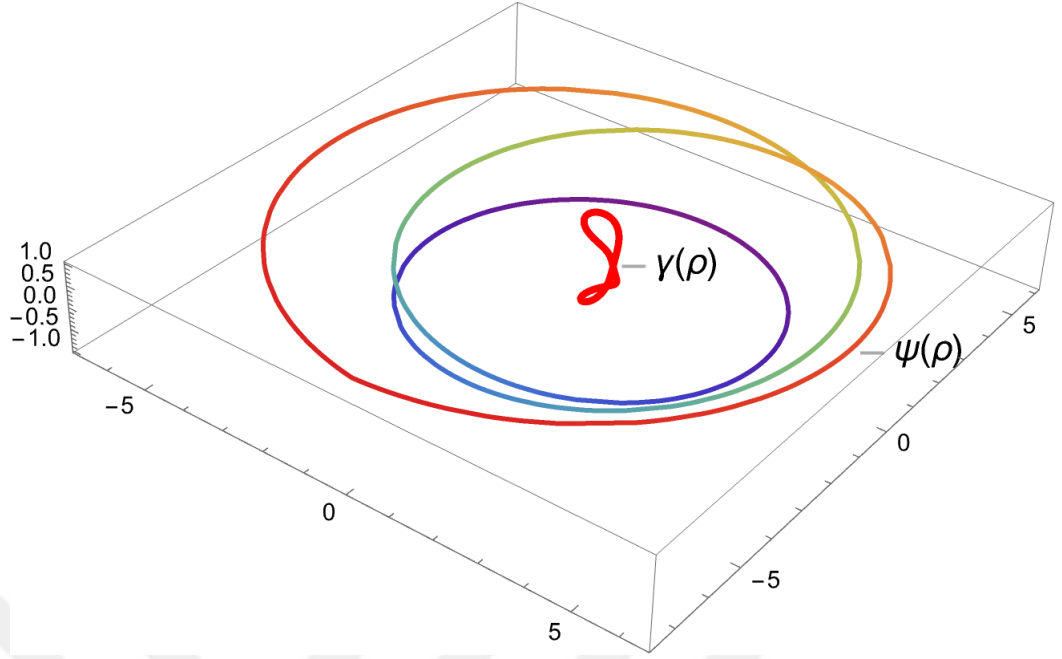
ii) $D_4(\rho) = \frac{8\sqrt{2}+\rho^2}{6\sqrt{2}}$ uzaklık fonksiyonu için ω slant helisinin C^* -partner eğrisi ψ^{**} olmak üzere şu şekilde elde edilir. C^* -partner eğrileri arasındaki ilişkiden

$$\psi^{**}(\rho) = \omega(\rho) + D_4(\rho)C^*(\rho)$$

şeklindedir. Böylece aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} \psi^{**}(\rho) = & \left(-\frac{1}{12}\cos 4\rho - \frac{1}{3}\cos 2\rho - \frac{8\sqrt{2}+\rho^2}{3}\sin 3\rho, -\frac{1}{12}\sin 4\rho - \frac{1}{3}\sin 2\rho \right. \\ & \left. + \frac{8\sqrt{2}+\rho^2}{3}\cos 3\rho, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\cos \rho \right). \end{aligned}$$

Buradan ω slant helisi ve ψ^{**} , C^* -partner eğrisinin grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 5.5. ω slant helisi (kırmızı) ve ψ^{**}, C^* -partner eğrisi (mavi)

5.3. Geliştirilmiş Alternatif Ortogonal Çatıya Göre Regle Yüzeyler

Bu bölümde geliştirilmiş alternatif ortogonal çatıya göre elde edilen regle yüzeyin dağılma parametreleri hesaplanarak bu yüzeyler için bazı teorem ve sonuçlar verilmiştir.

$\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı bir eğri ve $\{N^*, C^*, W^*\}$ geliştirilmiş alternatif ortogonal çatısı olsun. X vektörü $\{N^*, C^*, W^*\}$ çatısı üzerinde bir vektör olmak üzere

$$X \in S_p\{N^*(s), C^*(s), W^*(s)\}$$

biçiminde yazılabilir ve buradan

$$X = x_1 N^*(s) + x_2 C^*(s) + x_3 W^*(s) \quad (5.37)$$

şeklinde ifade edilebilir.

$\mathbb{R}^3$ de bir ϕ regle yüzeyi

$$\begin{aligned} \phi: I \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s, v) &\rightarrow \phi(s, v) = \gamma(s) + vX(s) \end{aligned} \quad (5.38)$$

parametrizasyonu ile verilsin. Burada $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi $\mathbb{R}^3$ te yay uzunluğu ile parametrelendirilmiş olup yüzeyin dayanak eğrisidir. X vektörü ise yüzeyin doğrultman vektörü olup γ dayanak eğrisinin T teğet vektörüne diktir.

X doğrultman vektörü ile üretilen regle yüzeyin dağılma parametresi için (5.37) eşitliğinin s parametresine göre türevi alınır

$$X' = x_1(N^*)'(s) + x_2(C^*)'(s) + x_3(W^*)'(s) \quad (5.39)$$

olarak elde edilir. Geliştirilmiş alternatif ortogonal çatının türev formülleri (5.39) denkleminde yazılırsa

$$\begin{aligned} X' = & \left(x_1 \frac{\kappa'}{\kappa} - x_2 \frac{f^2}{\kappa} \right) N^* + \left(x_1 \kappa + x_2 \frac{f'}{f} - x_3 g \right) C^* \\ & + \left(x_2 g + x_3 \frac{f'}{f} \right) W^* \end{aligned} \quad (5.40)$$

ve

$$\begin{aligned} \|X'\|^2 = & (x_1 \kappa' - x_2 f^2)^2 + (x_1 f \kappa + x_2 f' - x_3 f g)^2 \\ & + (x_2 f g + x_3 f')^2 \end{aligned} \quad (5.41)$$

bulunur. Teorem 3.4.2 yardımıyla ϕ yüzeyinin dağılma parametresi hesaplanırsa

$$\begin{aligned} P_x = & \frac{\det[\gamma', X, X']}{\|X'\|^2} \\ = & \frac{x_1 x_2 (f g \kappa^2 + f' \kappa \tau - f \kappa' \tau) + x_1 x_3 (f' \kappa^2 - f \kappa' \kappa - f g \kappa \tau) + x_2 x_3 f^3 \kappa + x_1^2 f \kappa^2 \tau + x_2^2 f^3 \tau}{f^3 \kappa ((x_1 \kappa' - x_2 f^2)^2 + (x_1 f \kappa + x_2 f' - x_3 f g)^2 + (x_2 f g + x_3 f')^2)} \end{aligned} \quad (5.42)$$

denklemini elde edilir.

Teorem 5.3.1. ϕ , (5.38) parametrizasyonu ile verilen bir regle yüzey olsun. ϕ regle yüzeyinin her zaman açılabilir olması için gerek ve yeter şart X doğrultman vektörünün W^* düzleminde olmasıdır.

İspat ϕ , (5.38) parametrizasyonu ile verilen bir regle yüzey olsun. Teorem 3.4.3'ten ϕ yüzeyinin açılabilir olması P_x dralinin sıfır olmasını gerektirir. Buradan (5.42) eşitliğinde

$$x_1 x_2 (f g \kappa^2 + f' \kappa \tau - f \kappa' \tau) + x_1 x_3 (f' \kappa^2 - f \kappa' \kappa - f g \kappa \tau) + x_2 x_3 f^3 \kappa \\ + x_1^2 f \kappa^2 \tau + x_2^2 f^3 \tau = 0$$

denkleminin sağlanması gerekir. Son denklemde $\kappa \neq 0$ ve $\tau \neq 0$ olması gerektiğinden

$$x_1 = x_2 = 0$$

olmalıdır. Buradan $X \in S_p\{W^*\}$ bulunur. Tersine $x_1 = x_2 = 0$ ise (5.42) denkleminden $P_X = 0$ olur. Böylece ϕ , regle yüzeyi açılabilir.

Teorem 5.3.2. ϕ , (5.38) parametrizasyonu ile verilen bir regle yüzey olsun. Eğer ϕ yüzeyinin dayanak eğrisi γ aynı zamanda striksiyon eğrisi ise f, g alternatif hareketli çatı eğrilikleri ve κ, τ Frenet eğrilikleri olmak üzere γ aşağıdaki denklemi sağlar.

$$-x_1 \kappa^2 + x_2 \left(\tau g - \frac{\kappa f'}{f} \right) + x_3 \left(\kappa g + \frac{\tau f'}{f} \right) = 0.$$

İspat γ eğrisi striksiyon eğrisi olsun. Tanım 3.4.5'ten

$$\langle X', T \rangle = 0$$

olarak yazılabilir ve (5.40) eşitliğinden

$$\left\langle \left(x_1 \frac{\kappa'}{\kappa} - x_2 \frac{f^2}{\kappa} \right) N^* + \left(x_1 \kappa + x_2 \frac{f'}{f} - x_3 g \right) C^* + \left(x_2 g + x_3 \frac{f'}{f} \right) W^*, -\frac{\kappa}{f^2} C^* \right. \\ \left. + \frac{\tau}{f^2} W^* \right\rangle = 0$$

denklemi elde edilir. İç çarpım işlemi yapılır ve denklem düzenlenirse

$$-x_1 \kappa^2 + x_2 \left(\tau g - \frac{\kappa f'}{f} \right) + x_3 \left(\kappa g + \frac{\tau f'}{f} \right) = 0$$

olarak bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 5.3.1. $\mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında

$$\begin{aligned}\gamma: I &\rightarrow \mathbb{E}^3 \\ v &\rightarrow \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos v, -\sin v, v)\end{aligned}$$

v parametrelili dairesel helis eğrisi olsun.

Eğrinin alternatif hareketli çatı elemanları hesaplanırsa birim normal vektör alanı

$$N = (\cos v, \sin v, 0)$$

bulunur. Buradan $C = \frac{N'}{f} = \frac{N'}{\|N'\|}$ olduğundan C vektör alanı

$$C = (-\sin v, \cos v, 0)$$

elde edilir. $N \times C = W$ olduğundan W Darboux vektörü aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$N \times C = W = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -\sin v & \cos v & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1)$$

ve eğrinin eğrilikleri $\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tau = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Eğrinin geliştirilmiş alternatif ortogonal çatı elemanları hesaplanırsa geliştirilmiş alternatif ortogonal çatının birim vektör alanları (5.1) denklemleri kullanılarak

$$N^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos v, \sin v, 0),$$

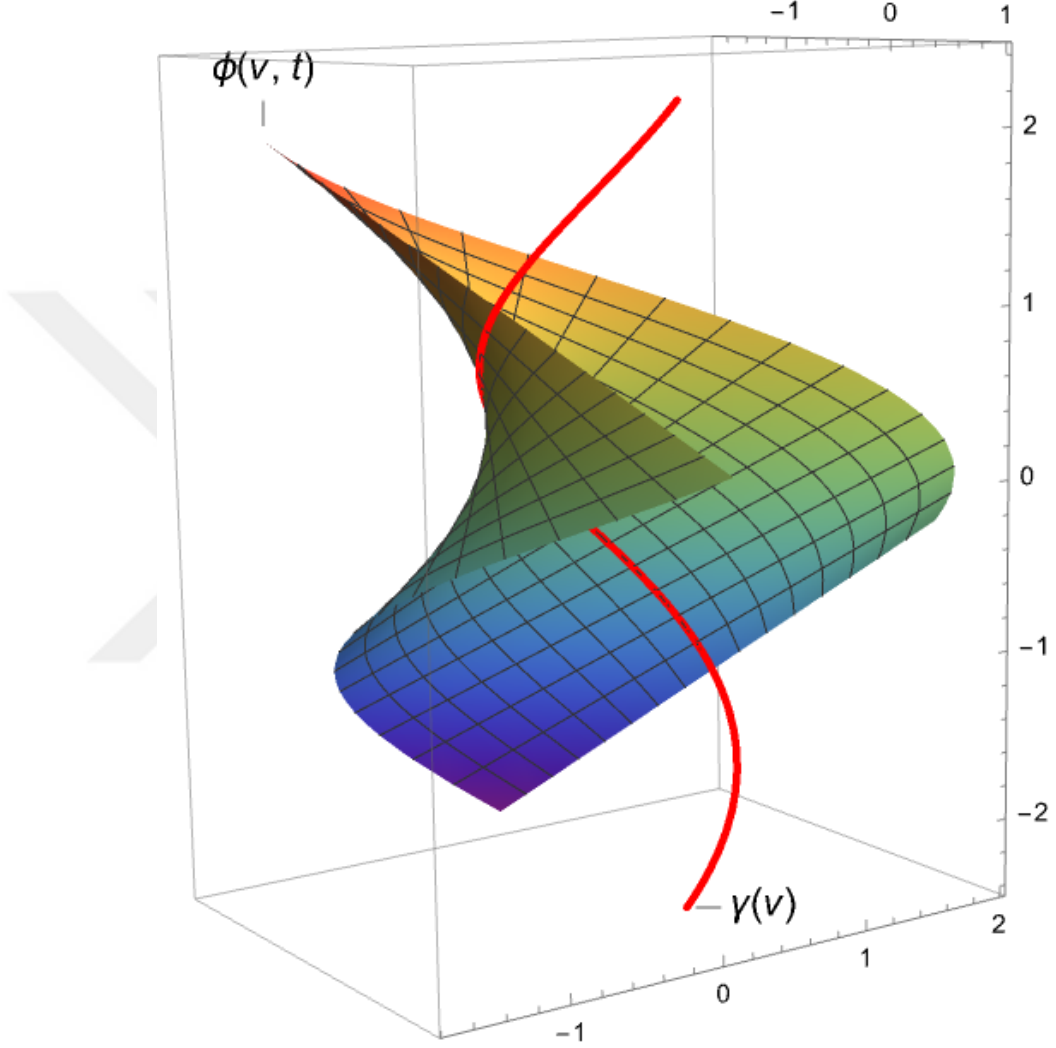
$$C^* = (-\sin v, \cos v, 0),$$

$$W^* = (0, 0, 1)$$

olarak bulunur. Buradan $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ alınarak $\phi(v, t) = \gamma(v) + tX(v)$ regle yüzeyinin denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\phi(v, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos v, -\sin v, v) + t \left(\frac{1}{\sqrt{6}}(\cos v, \sin v, 0) + \frac{1}{\sqrt{3}}(-\sin v, \cos v, 0) + \frac{1}{\sqrt{3}}(0, 0, 1) \right).$$

Bu durumda $\phi(v, t)$ regle yüzeyinin grafiği aşağıdaki gibi olur.



Şekil 5.6. γ dairesel helisi ve $\phi(v, t)$ regle yüzeyi

Örnek 5.3.2. $\mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında

$$\begin{aligned} \gamma: I &\rightarrow \mathbb{E}^3 \\ v &\rightarrow \gamma(v) = \left(\frac{4}{5} \cos v, 1 - \sin v, -\frac{3}{5} \sin v \right) \end{aligned}$$

v parametrelili dairesel helis eğrisi olsun.

Eğrinin alternatif hareketli çatı elemanları hesaplanırsa birim normal vektör alanı

$$N = \left(-\frac{4}{5} \cos v, \sin v, \frac{3}{5} \cos v \right)$$

bulunur. Buradan C vektör alanı

$$C = \left(\frac{4}{5} \sin v, \cos v, -\frac{3}{5} \sin v \right)$$

elde edilir. W , Darboux vektörü ise aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$N \times C = W = \left(-\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5} \right)$$

ve eğrinin eğrilikleri $\kappa = 1$, $\tau = 0$ olur. Eğrinin geliştirilmiş alternatif ortogonal çatı elemanları hesaplanırsa geliştirilmiş alternatif ortogonal çatının birim vektör alanları (5.1) denklemleri kullanılarak

$$N^* = \left(-\frac{4}{5} \cos v, \sin v, \frac{3}{5} \cos v \right),$$

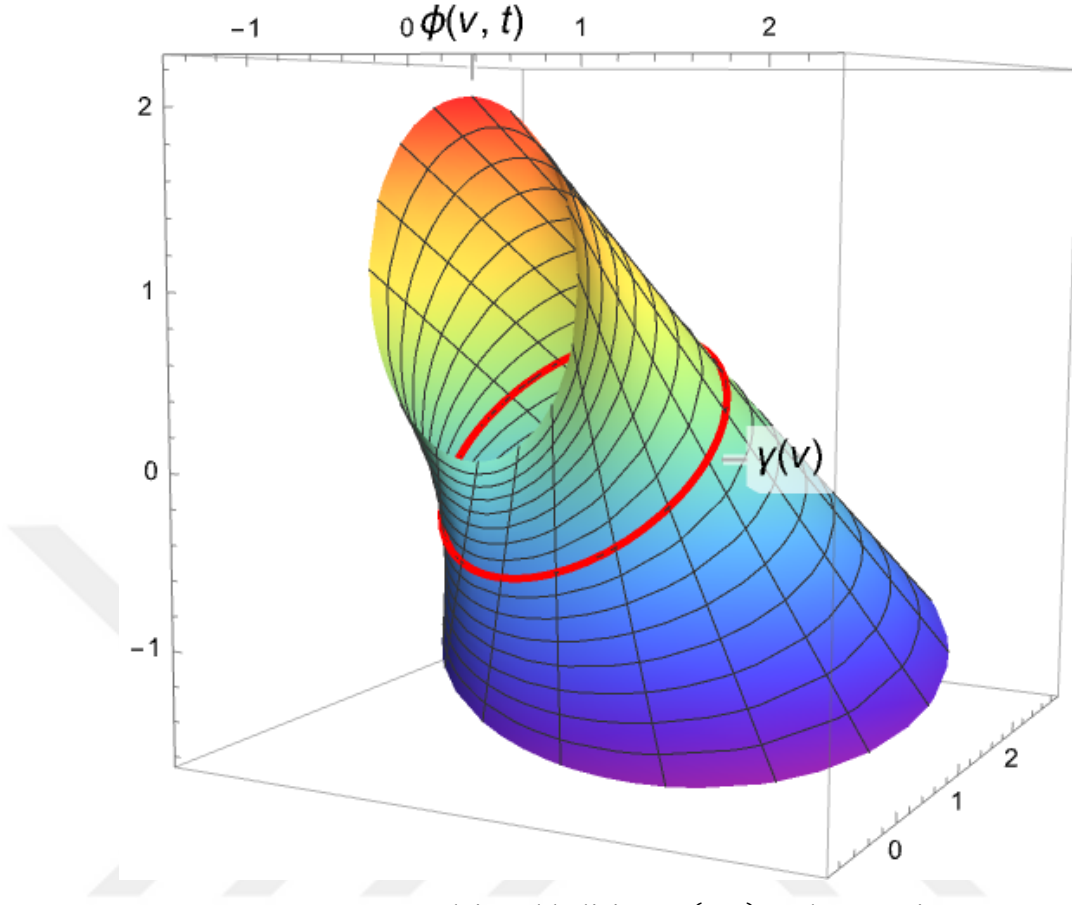
$$C^* = \left(\frac{4}{5} \sin v, \cos v, -\frac{3}{5} \sin v \right),$$

$$W^* = \left(-\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5} \right)$$

elde edilir. Buradan $x_1 = x_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}$ ve $x_3 = \frac{2}{\sqrt{6}}$ alınarak $\phi(v, t) = \gamma(v) + tX(v)$ regle yüzeyinin denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \phi(v, t) = & \left(\frac{4}{5} \cos v, 1 - \sin v, -\frac{3}{5} \sin v \right) + t \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \left(-\frac{4}{5} \cos v, \sin v, \frac{3}{5} \cos v \right) + \right. \\ & \left. \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\frac{4}{5} \sin v, \cos v, -\frac{3}{5} \sin v \right) + \frac{2}{\sqrt{6}} \left(-\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5} \right) \right). \end{aligned}$$

Bu durumda $\phi(v, t)$ regle yüzeyinin grafiği aşağıdaki gibi olur.



Şekil 5.7. γ dairesel helisi ve $\phi(v, t)$ regle yüzeyi

Örnek 5.3.3. 3-boyutlu Öklid uzayında v parametrelili birim hızlı $\kappa = \sqrt{3} \sin v$ ve $\tau = \sqrt{3} \cos v$ eğrilikli $\gamma(v) = \left(\frac{3}{4} \sin v - \frac{1}{12} \sin 3v, -\frac{3}{4} \cos v + \frac{1}{12} \cos 3v, \frac{\sqrt{3}}{2} \sin v \right)$ eğrisi göz önüne alınır ve eğrinin alternatif hareketli çatı elemanları hesaplanırsa birim normal vektör alanı

$$N = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2v, \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2v, -\frac{1}{2} \right)$$

biçimindedir. Bu eğrinin alternatif hareketli çatı eğriliği hesaplanırsa

$$f = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} = \sqrt{3}$$

olduğu elde edilir. Buradan $C = \frac{N'}{f}$ olduğundan C vektör alanı

$$C = (-\sin 2v, \cos 2v, 0)$$

olarak bulunur. $N \times C = W$ olduğundan W Darboux vektörü aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$N \times C = W = \left(\frac{1}{2} \cos 2v, \frac{1}{2} \sin 2v, \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Böylece geliştirilmiş alternatif ortogonal çatının birim vektör alanları (5.1) denklemleri kullanılarak

$$N^* = \left(\frac{3}{2} \sin v \cos 2v, \frac{3}{2} \sin v \sin 2v, -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin v \right),$$

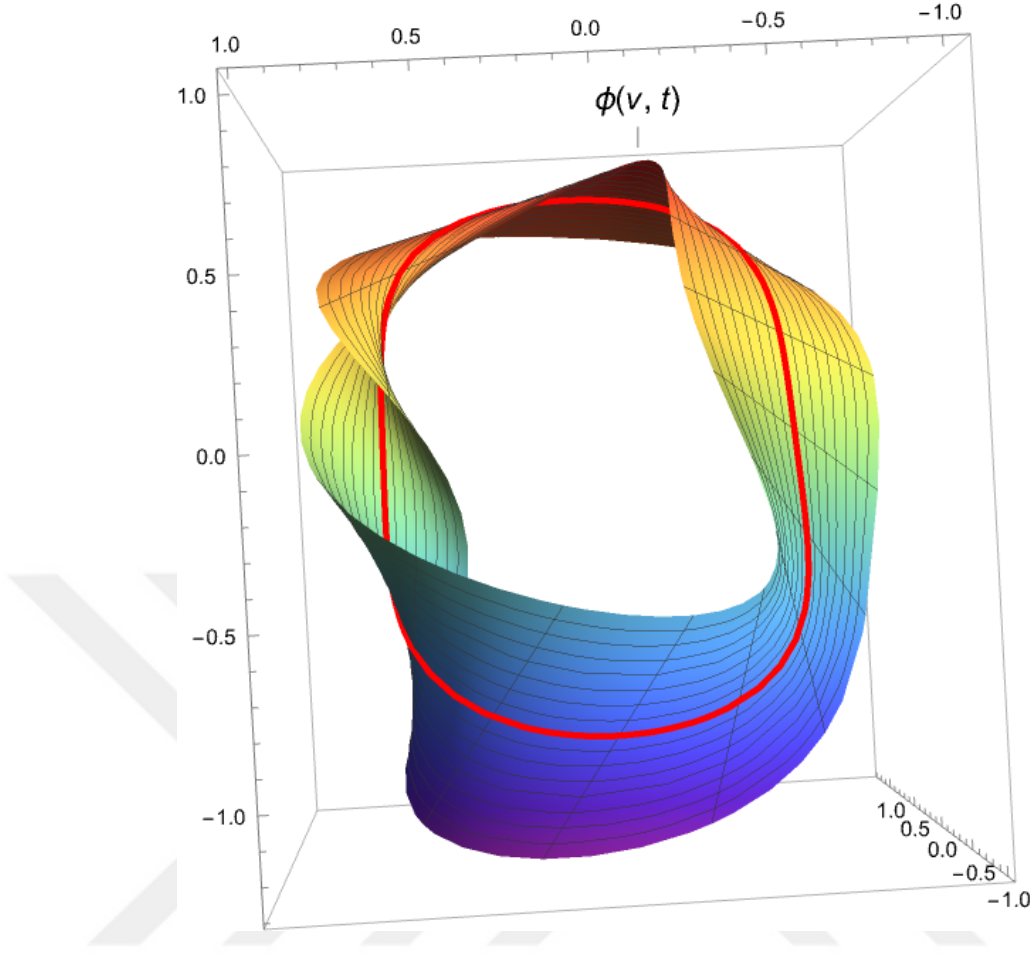
$$C^* = (-\sqrt{3} \sin 2v, \sqrt{3} \cos 2v, 0),$$

$$W^* = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2v, \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2v, \frac{3}{2} \right)$$

şeklinde bulunur. $\phi(v, t) = \gamma(v) + tX(v)$ regle yüzeyinin parametrik denkleminde $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ alınarak regle yüzeyinin denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \phi(v, t) = & \left(\frac{3}{4} \sin v - \frac{1}{12} \sin 3v, -\frac{3}{4} \cos v + \frac{1}{12} \cos 3v, \frac{\sqrt{3}}{2} \sin v \right) \\ & + t \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin v \cos 2v, \frac{\sqrt{3}}{2} \sin v \sin 2v, -\frac{1}{2} \sin v \right) \right. \\ & \left. + (-\sin 2v, \cos 2v, 0) + \left(\frac{1}{2} \cos 2v, \frac{1}{2} \sin 2v, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

Bu durumda $\phi(v, t)$ regle yüzeyinin grafiği aşağıdaki gibi olur.



Şekil 5.8. γ eğrisi ve $\phi(v, t)$ regle yüzeyi

5.4. Özel Şartlar Altında Geliştirilmiş Alternatif Ortogonal Çatıya Göre Regle Yüzeylerin Karakterizasyonları

5.4.1. Doğrultman Vektörünün $X = N^*$ Olması Halinde

Geliştirilmiş alternatif ortogonal çatılı regle yüzeyin genel parametrik denklemi

$$\phi(s, v) = \gamma(s) + v(x_1 N^*(s) + x_2 C^*(s) + x_3 W^*(s)) \quad (5.43)$$

şeklinde tanımlanır. Doğrultman vektörü $X = N^*$ olması halinde bu özel durum için

$$x_1 = 1, x_2 = x_3 = 0 \quad (5.44)$$

olur. Böylece (5.44) eşitliği (5.43) denkleminde yerine yazılırsa geliştirilmiş alternatif çatının normal vektörü tarafından üretilen regle yüzey aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\phi(s, v) = \gamma(s) + vN^*(s). \quad (5.45)$$

Elde edilen regle yüzeyin açılabilirlik durumu için (5.42) formülündeki P_x dralinde (5.44) değerleri yazılırsa

$$P_{N^*} = \frac{\kappa\tau}{f^2(\kappa'^2 + (\kappa f)^2)} \quad (5.46)$$

ifadesine ulaşılır. Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 5.4.1. ϕ , (5.38) parametrizasyonu ile verilen bir regle yüzey olsun. γ eğrisinin N^* normal vektörü tarafından üretilen regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart $\tau = 0$ olması ya da γ eğrisinin düzlemsel olmasıdır.

İspat. (5.42) denkleminde hesaplanan P_x dral formülünde $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = 0$ yazılırsa (5.46) denkleminde ulaşılır. Burada yüzeyin açılabilir olması için $P_{N^*} = 0$ olması gerekir. $\kappa = 0$ olursa P_{N^*} drali tanımlanamaz. Dolayısıyla $\tau = 0$ 'dır. Böylece γ eğrisinin düzlemsel olduğu görülür. Tersine $\tau = 0$ ise $P_{N^*} = 0$ olduğu elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

5.4.2. Doğrultman Vektörünün $X = C^*$ Olması Halinde

Doğrultman vektörü $X = C^*$ olması halinde özel durum için

$$x_2 = 1, x_1 = x_3 = 0 \quad (5.47)$$

olur. O halde (5.47) eşitliği (5.43) denkleminde yerine yazılırsa geliştirilmiş alternatif ortogonal çatının C^* vektörü tarafından üretilen regle yüzey aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\phi(s, v) = \gamma(s) + vC^*(s). \quad (5.48)$$

Elde edilen regle yüzeyin açılabilirlik durumu için elde edilen (5.42) formülünde (5.47) değerleri yazılırsa

$$P_{C^*} = \frac{\tau}{\kappa(f^4 + f'^2 + f^2g^2)} \quad (5.49)$$

şeklindedir. Buradan aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 5.4.2. ϕ , (5.38) parametrizasyonu ile verilen bir regle yüzey olsun. γ eğrisinin C^* vektörü tarafından üretilen regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart $\tau = 0$ olması ya da γ eğrisinin düzlemsel olmasıdır.

İspat. (5.42) denkleminde hesaplanan P_X dral formülünde $x_2 = 1, x_1 = x_3 = 0$ yazılırsa (5.49) denkleminde ulaşılır. Burada yüzeyin açılabilir olması için $P_{C^*} = 0$ olması gerekir. Dolayısıyla $\tau = 0$ dır. Böylece γ eğrisi düzlemseldir. Tersine $\tau = 0$ ise $P_{C^*} = 0$ olduğu elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

5.4.3. Doğrultman Vektörünün $X = W^*$ Olması Halinde

Doğrultman vektörü $X = W^*$ olması halinde özel durum için

$$x_3 = 1, x_1 = x_2 = 0 \quad (5.50)$$

olur. O halde (5.50) eşitliği (5.43) denkleminde yerine yazılırsa geliştirilmiş alternatif ortogonal çatının Darboux vektörü tarafından üretilen regle yüzey aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\phi(s, v) = \gamma(s) + vW^*(s). \quad (5.51)$$

Elde edilen regle yüzeyin açılabilirlik durumu için elde edilen (5.42) formülünde (5.50) değerleri yazılırsa

$$P_{W^*} = \frac{0}{\kappa(f^4 + f'^2 + f^2g^2)} = 0 \quad (5.52)$$

biçiminde bulunur. Bu durumda aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 5.4.1. ϕ , (5.38) parametrizasyonu ile verilen bir regle yüzey olsun. γ eğrisinin geliştirilmiş alternatif ortogonal çatısının Darboux vektörü W^* tarafından üretilen regle yüzey her zaman açılabiliridir.

İspat. (5.42) denkleminde hesaplanan P_X dral formülünde $x_3 = 1, x_1 = x_2 = 0$ yazılırsa (5.52) yani $P_{W^*} = 0$ denkleminde ulaşılır. Teorem 3.4.3'ten yüzeyin açılabilir olması için

$P_{W^*} = 0$ olması gerekir. Dolayısıyla W^* tarafından üretilen regle yüzey her zaman açılabilir olur.

5.4.4. Doğrultman Vektörünün $X \in S_p\{N^*, C^*\}$ Olması Halinde

Doğrultman vektörü $X \in S_p\{N^*, C^*\}$ olması halinde özel durum için

$$x_3 = 0 \quad (5.53)$$

olur. O halde (5.53) eşitliği (5.43) denkleminde yerine yazılırsa geliştirilmiş alternatif ortogonal çatının N^* ve C^* vektörlerinin gerdiği düzlem tarafından üretilen regle yüzey aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\phi(s, v) = \gamma(s) + v(x_1 N^*(s) + x_2 C^*(s)). \quad (5.54)$$

Elde edilen regle yüzeyin açılabilirlik durumu için (5.42) formülünde (5.53) değeri yazılırsa

$$P_{N^*-C^*} = \frac{x_1 x_2 (f g \kappa^2 + f' \kappa \tau - f \kappa \tau') + x_1^2 f \tau \kappa^2 + x_2^2 f^2 \tau}{f^3 \kappa ((x_1 \kappa' - x_2 f^2)^2 + (x_1 f \kappa + x_2 f')^2 + (x_2 f g)^2)} \quad (5.55)$$

şeklinde bulunur. Buradan aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 5.4.3. ϕ , (5.38) parametrizasyonu ile verilen bir regle yüzey olsun. γ eğrisinin N^* ve C^* vektörlerinin gerdiği düzlem tarafından üretilen regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart $\tau = 0$ olması ya da γ eğrisinin düzlemsel olmasıdır.

İspat. (5.42) denkleminde hesaplanan P_X dral formülünde $x_3 = 0$ yazılırsa (5.55) denklemi elde edilir. Burada yüzeyin açılabilir olması için $P_{N^*-C^*} = 0$ olması gerekir. $\kappa = 0$ olursa $P_{N^*-C^*}$ drali tanımlanamaz. Bu nedenle $\tau = 0$ olması gerekir. Böylece γ eğrisi düzlemseldir. Tersine $\tau = 0$ ise $P_{N^*-C^*} = 0$ olduğu elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

5.4.5. Doğrultman Vektörünün $X \in S_p\{N^*, W^*\}$ Olması Halinde

Doğrultman vektörü $X \in S_p\{N^*, W^*\}$ olması halinde özel durum için

$$x_2 = 0 \quad (5.56)$$

olur. O halde (5.56) eşitliği (5.43) denkleminde yerine yazılırsa geliştirilmiş alternatif ortogonal çatının N^* ve W^* vektörlerinin gerdiği düzlem tarafından üretilen regle yüzey aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\phi(s, v) = \gamma(s) + v(x_1 N^*(s) + x_3 W^*(s)). \quad (5.57)$$

Elde edilen regle yüzeyin açılabilirlik durumu için (5.23) formülünde (5.56) değeri yazılırsa

$$P_{N^*-W^*} = \frac{x_1 x_3 (f' \kappa^2 - f \kappa \kappa' - f g \kappa \tau) + x_1^2 f \tau \kappa^2}{f^3 \kappa ((x_1 \kappa')^2 + (x_1 f \kappa - x_3 f g)^2 + (x_3 f')^2)} = 0 \quad (5.58)$$

bulunur. Bu regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart $P_{N^*-W^*} = 0$ olmasıdır.

Sonuç 5.4.4. ϕ , (5.38) parametrizasyonu ile verilen bir regle yüzey olsun. γ eğrisinin N^* ve W^* vektörlerinin gerdiği düzlem tarafından üretilen regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart $x_1 = 0$ ve $x_3 \neq 0$ olmasıdır.

İspat. (5.42) denkleminde hesaplanan P_X dral formülünde $x_2 = 0$ yazılırsa (5.58) denklemi elde edilir. Burada yüzeyin açılabilir olması için $P_{N^*-W^*} = 0$ olması gerekir. $\kappa = 0$ olursa $P_{N^*-W^*}$ drali tanımlanamaz. Dolayısıyla $x_1 = 0$ ve $x_3 \neq 0$ olursa yüzey açılabilir. Tersine $x_1 = 0$ ve $x_3 \neq 0$ ise $P_{N^*-W^*} = 0$ olduğu elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

5.4.6. Doğrultman Vektörünün $X \in S_p\{C^*, W^*\}$ Olması Halinde

Doğrultman vektörü $X \in S_p\{C^*, W^*\}$ olması halinde özel durum için

$$x_1 = 0 \quad (5.59)$$

olur. O halde (5.59) eşitliği (5.24) denkleminde yerine yazılırsa geliştirilmiş alternatif ortogonal çatının C^* ve W^* vektörlerinin gerdiği düzlem tarafından üretilen regle yüzey aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\phi(s, v) = \gamma(s) + v(x_2 C^*(s) + x_3 W^*(s)). \quad (5.60)$$

Elde edilen regle yüzeyin açılabilirlik durumu için (5.23) formülünde (5.59) değeri yazılırsa

$$P_{C^*-W^*} = \frac{x_2(x_3\kappa + x_2\tau)}{\kappa \left((x_2 f^2)^2 + (x_2 f' - x_3 f g)^2 + (x_2 f g + x_3 f')^2 \right)} = 0 \quad (5.61)$$

bulunur. Bu regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart $P_{C^*-W^*} = 0$ olmasıdır. Bu ise $x_2 = 0$ ve $x_3 \neq 0$ olması ile mümkündür bu durumda yüzey açılabilir olur. Diğer taraftan eğer $x_3\kappa + x_2\tau = 0$ ise aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.4.2. ϕ , (5.38) parametrizasyonu ile verilen bir regle yüzey olsun. γ eğrisinin C^* ve W^* vektörlerinin gerdiği düzlem tarafından üretilen regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{\tau}{\kappa} = -\frac{x_3}{x_2} = \text{sabit}$$

olması ya da γ eğrisinin helis eğrisi olmasıdır.

İspat. (5.42) denkleminde hesaplanan P_X dral formülünde $x_1 = 0$ yazılırsa (5.61) denklemi elde edilir. Burada yüzeyin açılabilir olması için $P_{C^*-W^*} = 0$ olması gerekir. Eğer $x_3\kappa + x_2\tau = 0$ olursa yüzey açılabilir. Buradan eğrilikleri oranı

$$\frac{\tau}{\kappa} = -\frac{x_3}{x_2} = \text{sabit}$$

sonucuna ulaşılır. Bu ise γ eğrisinin helis eğrisi olmasıdır. Tersine γ eğrisinin helis eğrisi $\frac{\tau}{\kappa} = \text{sabit}$ dolayısıyla $P_{C^*-W^*} = 0$ olur. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 5.4.1. $\mathbb{E}^3$ 3-boyutlu Öklid uzayında $\kappa = 1$, $\tau = 0$ eğrilikleri ile v parametrelili

$$\gamma(v) = \left(\frac{4}{5} \cos v, 1 - \sin v, -\frac{3}{5} \sin v \right)$$

dairesel helis eğrisini alalım. Örnek 5.3.2'den eğrinin geliştirilmiş alternatif ortogonal çatıya göre birim vektör alanları (5.1) denklemleri kullanılarak

$$N^* = \left(-\frac{4}{5} \cos v, \sin v, \frac{3}{5} \cos v \right),$$

$$C^* = \left(\frac{4}{5} \sin v, \cos v, -\frac{3}{5} \sin v \right),$$

$$W^* = \left(-\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5} \right)$$

şeklinde elde edilir. (5.38) parametrizasyonu ile verilen geliştirilmiş alternatif ortogonal çatılı regle yüzey için doğrultman vektörünün özel şartlar altında durumları $\gamma(v)$ dairesel helisi için aşağıdaki gibi incelenmiştir.

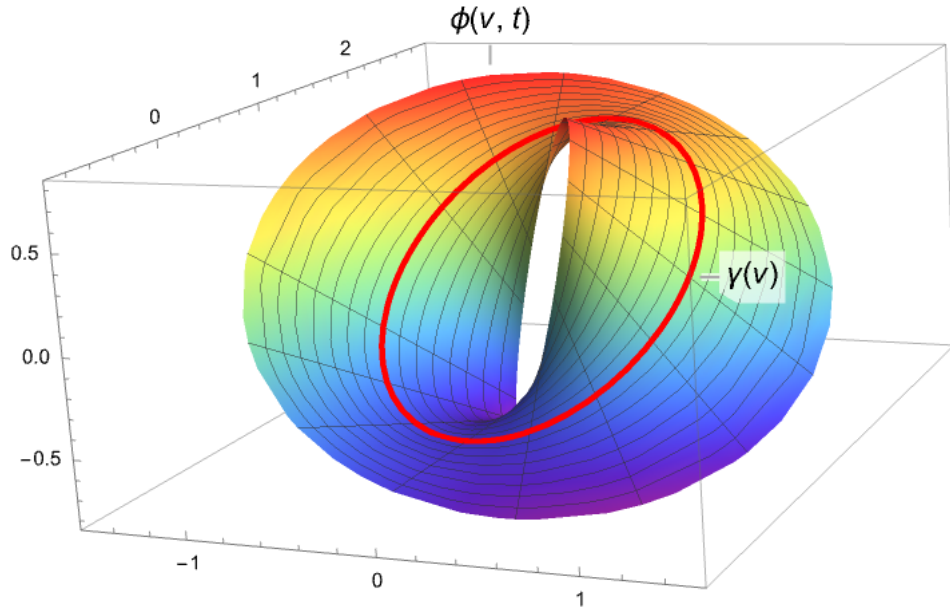
- 1) Regle yüzeyin doğrultman vektörü $X = N^*$ olması halinde yani $x_1 = 1, x_2 = x_3 = 0$ olması durumunda

$$\phi(v, t) = \gamma(v) + tN^*(v)$$

geliştirilmiş alternatif ortogonal çatılı regle yüzeyinin denklemi

$$\phi(v, t) = \left(\frac{4}{5} \cos v, 1 - \sin v, -\frac{3}{5} \sin v \right) + t \left(-\frac{4}{5} \cos v, \sin v, \frac{3}{5} \cos v \right)$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda $\phi(v, t)$ regle yüzeyinin grafiği aşağıdaki gibi olur.

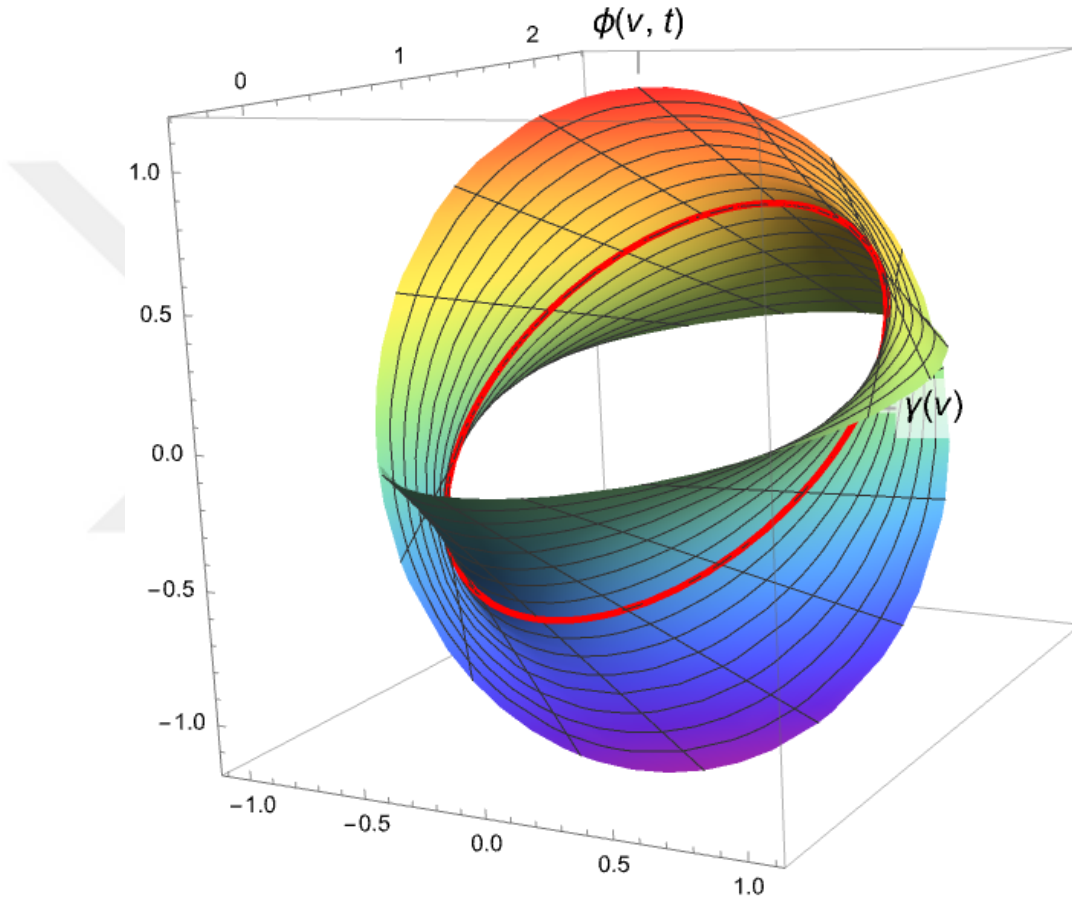


Şekil 5.9. γ dairesel helisi ve doğrultman vektörü N^* olması halinde $\phi(v, t)$ regle yüzeyi

2) Regle yüzeyin doğrultman vektörü $X = C^*$ olması halinde yani $x_1 = x_3 = 0$, $x_2 = 1$ olması durumunda $\phi(v, t) = \gamma(v) + tC^*(v)$ regle yüzeyinin denklemi

$$\phi(v, t) = \left(\frac{4}{5} \cos v, 1 - \sin v, -\frac{3}{5} \sin v \right) + t \left(\frac{4}{5} \sin v, \cos v, -\frac{3}{5} \sin v \right)$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda $\phi(v, t)$ regle yüzeyinin grafiği aşağıdaki gibi olur.

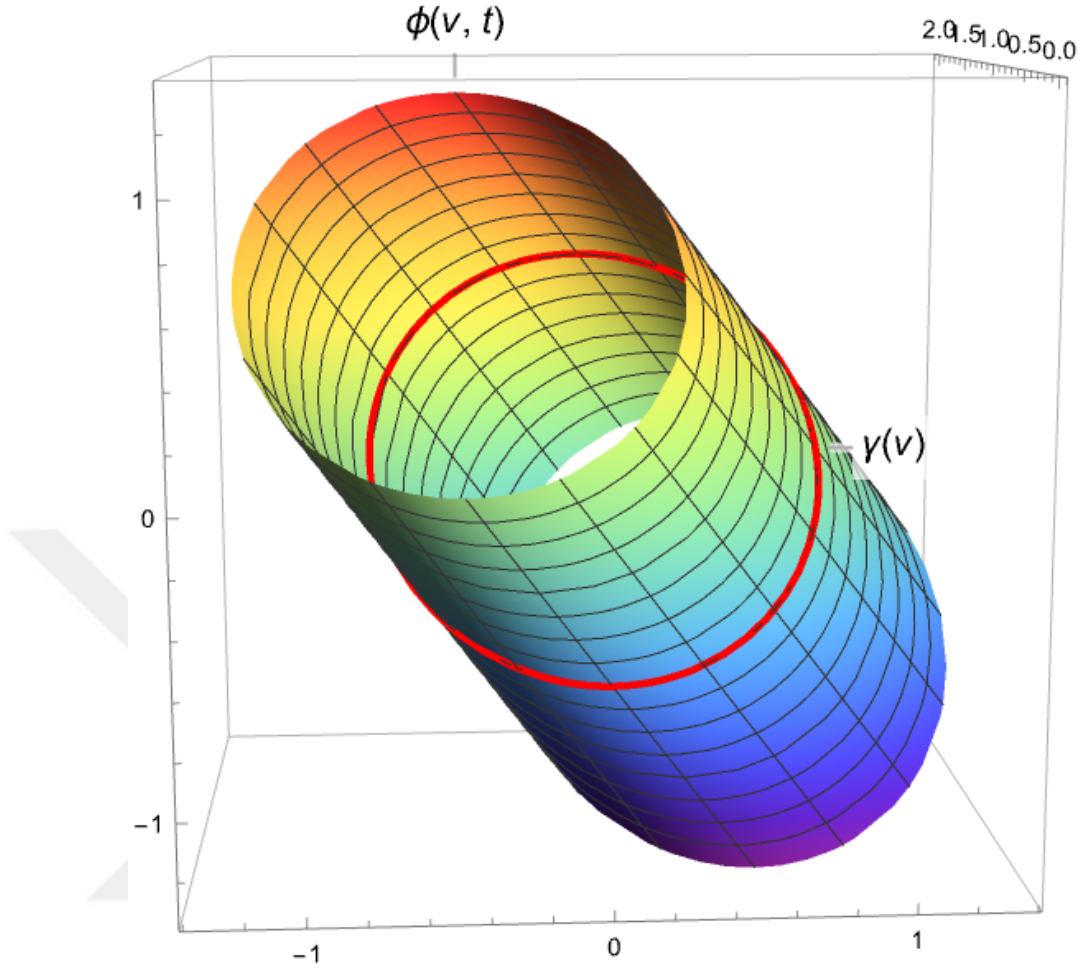


Şekil 5.10. γ dairesel helisi ve doğrultman vektörü C^* olması halinde $\phi(v, t)$ regle yüzeyi

3) Regle yüzeyin doğrultman vektörü $X = W^*$ olması halinde yani $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 1$ olması durumunda $\phi(v, t) = \gamma(v) + tW^*(v)$ regle yüzeyinin denklemi

$$\phi(v, t) = \left(\frac{4}{5} \cos v, 1 - \sin v, -\frac{3}{5} \sin v \right) + t \left(-\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5} \right)$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda $\phi(v, t)$ regle yüzeyinin grafiği aşağıdaki gibi olur.

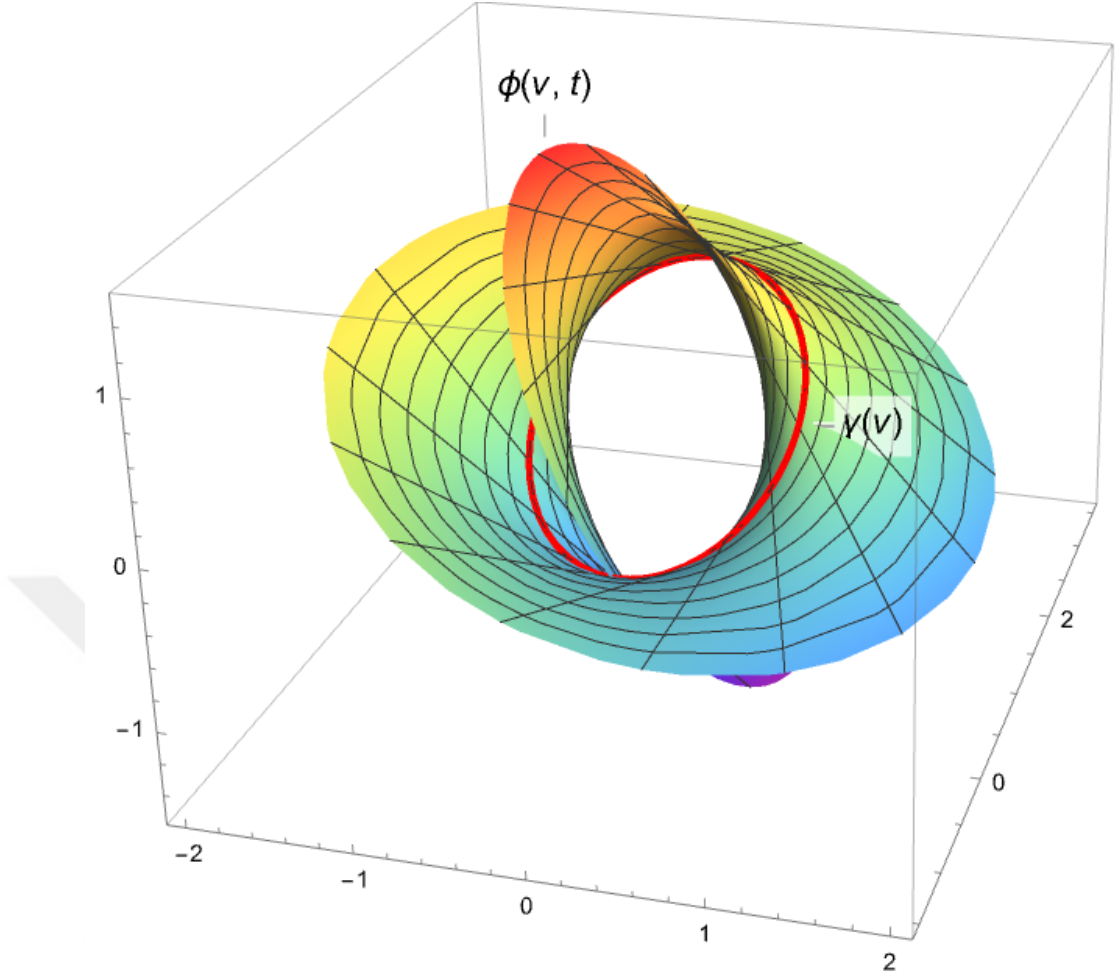


Şekil 5.11. γ dairesel helisi ve doğrultman vektörü W^* olması halinde $\phi(v, t)$ regle yüzeyi

4) Regle yüzeyin doğrultman vektörü $X = S_p\{N^*, C^*\}$ olması halinde yani $x_3 = 0$ olması durumunda $\phi(v, t) = \gamma(v) + t(x_1 N^*(v) + x_2 C^*(v))$ regle yüzeyinin denklemi $x_1 = x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ve $x_3 = 0$ değerleri için hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \phi(v, t) = & \left(\frac{4}{5} \cos v, 1 - \sin v, -\frac{3}{5} \sin v \right) \\ & + t \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{4}{5} \cos v, \sin v, \frac{3}{5} \cos v \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{4}{5} \sin v, \cos v, -\frac{3}{5} \sin v \right) \right] \end{aligned}$$

gibi elde edilir. Bu durumda $\phi(v, t)$ regle yüzeyinin grafiği aşağıdaki gibi olur.



Şekil 5.12. γ dairesel helisi ve doğrultman vektörü $S_p\{N^*, C^*\}$ olması halinde $\phi(v, t)$ regle yüzeyi

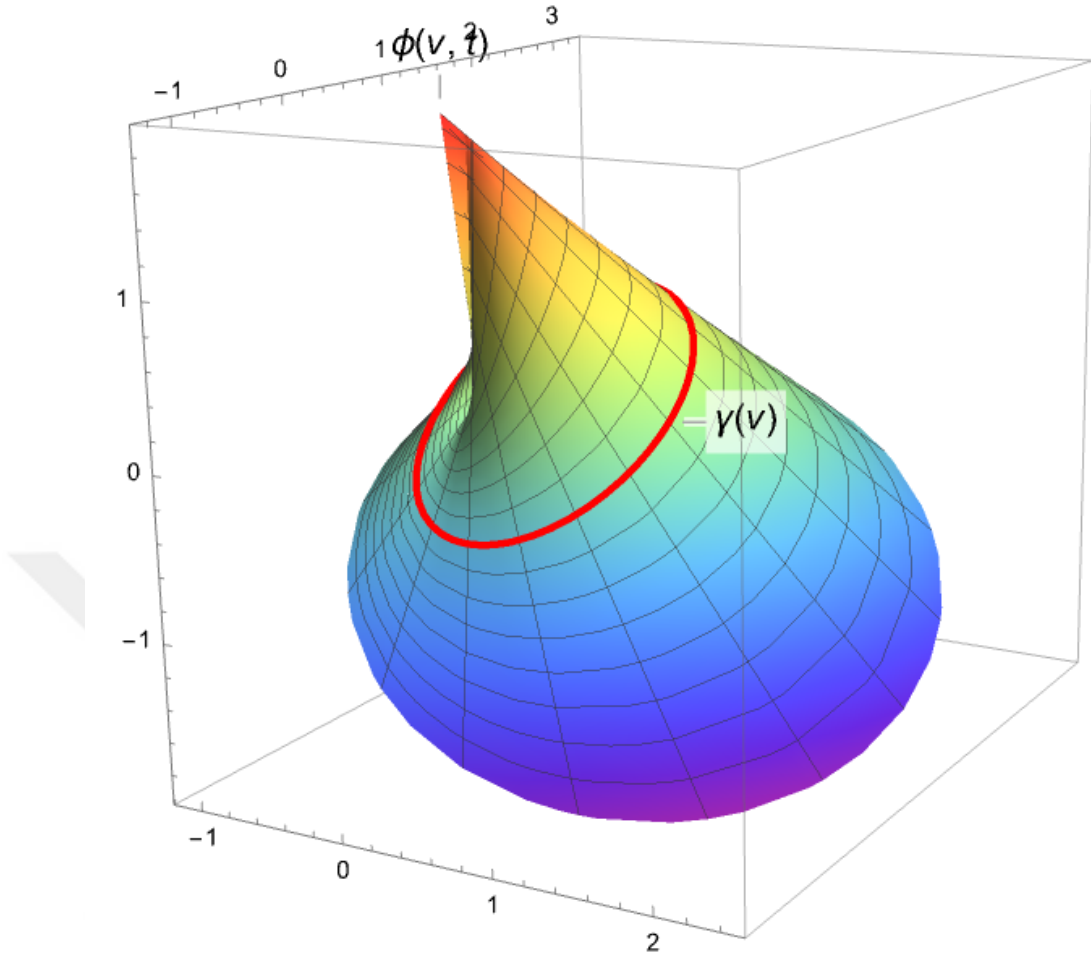
5) Regle yüzeyin doğrultman vektörü $X = S_p\{N^*, W^*\}$ olması halinde yani $x_2 = 0$ olması halinde

$$\phi(v, t) = \gamma(v) + t(x_1 N^*(v) + x_3 W^*(v))$$

regle yüzeyinin denklemi $x_1 = x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ve $x_2 = 0$ değerleri için hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \phi(v, t) = & \left(\frac{4}{5} \cos v, 1 - \sin v, -\frac{3}{5} \sin v \right) \\ & + t \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{4}{5} \cos v, \sin v, \frac{3}{5} \cos v \right) + \left(-\frac{3}{5\sqrt{2}}, 0, \frac{4}{5\sqrt{2}} \right) \right] \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda $\phi(v, t)$ regle yüzeyinin grafiği aşağıdaki gibi olur.



Şekil 5.13. γ dairesel helisi ve doğrultman vektörü $S_p\{N^*, W^*\}$ olması halinde $\phi(v, t)$ regle yüzeyi

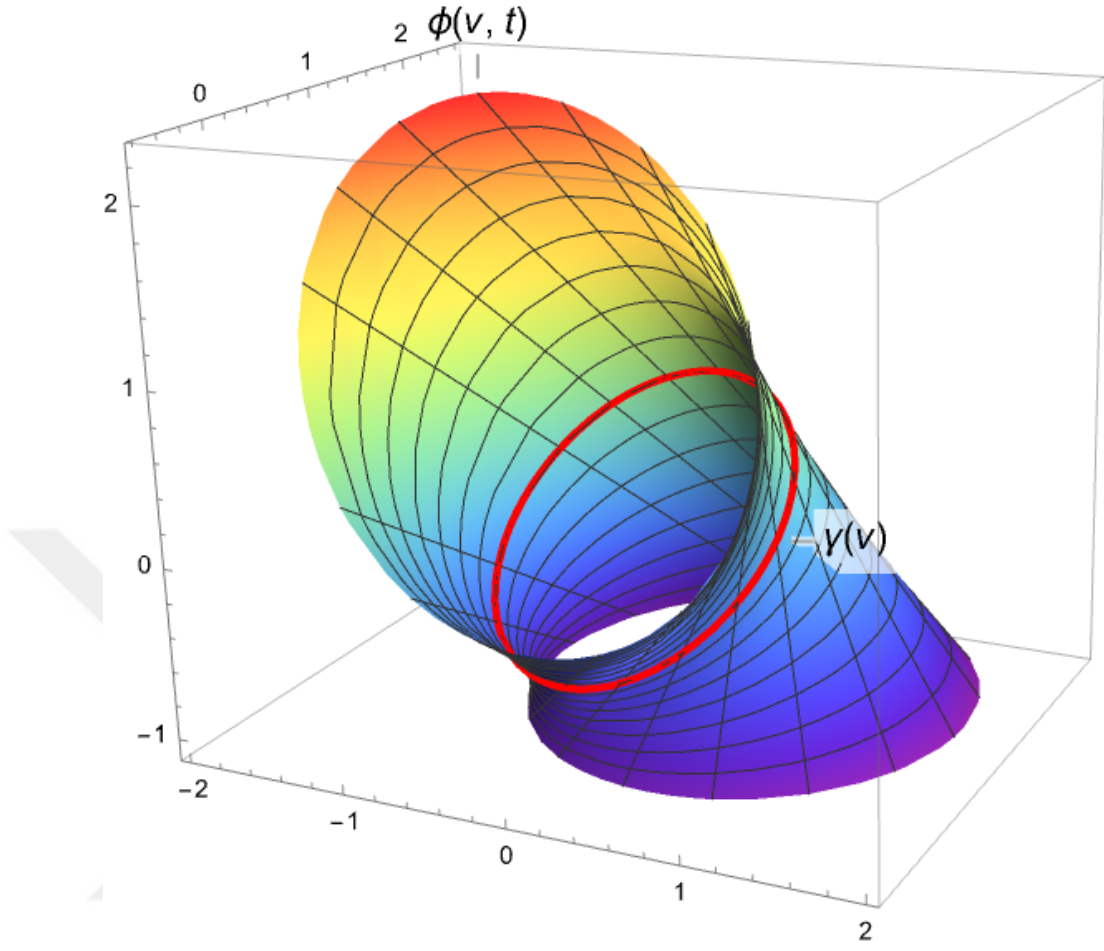
6) Regle yüzeyin doğrultman vektörü $X = S_p\{C^*, W^*\}$ olması halinde yani $x_1 = 0$ olması durumunda

$$\phi(v, t) = \gamma(v) + t(x_2 C^*(v) + x_3 W^*(v))$$

regle yüzeyinin denklemi $x_2 = x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ve $x_1 = 0$ değerleri için hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \phi(v, t) = & \left(\frac{4}{5} \cos v, 1 - \sin v, -\frac{3}{5} \sin v \right) \\ & + t \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{4}{5} \sin v, \cos v, -\frac{3}{5} \sin v \right) + \left(-\frac{3}{5\sqrt{2}}, 0, \frac{4}{5\sqrt{2}} \right) \right] \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda $\phi(v, t)$ regle yüzeyinin grafiği aşağıdaki gibi olur.



Şekil 5.14. γ dairesel helisi ve doğrultman vektörü $S_p\{C^*, W^*\}$ olması halinde $\phi(v, t)$ regle yüzeyi

6. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu bölümde geliştirilmiş alternatif ortogonal çatı tanımı ile başlayıp uygulamaları ile devam eden ve bu tez çalışması sonucunda elde edilen ana sonuçlara değinilecektir. Daha sonra literatüre katkı sağlayabilecek sonraki çalışmalar hakkında önerilerde bulunulacaktır.

Bir eğrinin eğriliğinin sıfır olduğu noktalarda eğri hareketi incelenemez. Bu tezin ana amacı bu durumun ortaya çıkardığı sorundan yola çıkarak yeni bir yöntemle eğriyi karakterize eden geliştirilmiş alternatif ortogonal çatıyı tanımlamaktır. Ayrıca geliştirilmiş alternatif ortogonal çatıya göre bazı özel eğrileri karakterize etmek ve bu çatıya göre regle yüzey tanımını verip regle yüzeyin açılabilirlik şartlarını incelemektir.

İlk olarak, geliştirilmiş alternatif ortogonal çatı tanımı verilmiş ve bu çatıya göre N^* -slant helis ve C^* -slant helis tanımları verilerek slant helis olma şartları elde edilmiştir.

İkinci olarak, $\{N^*, C^*, W^*\}$ geliştirilmiş alternatif ortogonal çatı göz önüne alınarak yeni bir eğri çifti olan C^* -partner eğriler tanımlanmıştır. Buradan C^* -partner eğrilerine karşılık gelen ve çakışmayan noktalar arasındaki uzaklığın sabit olmadığı sonucuna ulaşılmıştır. Daha sonra C^* -partner eğrilerden birinin slant helis olması için gerek ve yeter şartın diğer eğrinin de slant helis olmasıdır sonucuna ulaşılmıştır. Ek olarak C^* -partner eğrilerden biri helis ise diğer eğrinin de slant helis olduğu gösterilmiştir.

Üçüncü olarak, geliştirilmiş alternatif ortogonal çatıya göre regle yüzeyin tanımı verilmiş ve bu regle yüzeyin genel durumu için P_X drali hesaplanmıştır. Bu regle yüzeyin her zaman açılabilir olması için doğrultman vektörünün W^* yönünde kalması gerektiği sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca yüzeyin dayanak eğrisi aynı zamanda striksiyon eğrisi ise yüzeyin karakterizasyonu elde edilmiştir. Son olarak, regle yüzeyin doğrultman vektörünün N^* , C^* veya $N^* - C^*$ olduğu durumlarda yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şartın dayanak eğrisinin düzlemsel eğri olması gerektiği sonucuna ulaşılmıştır. Benzer şekilde doğrultman vektörünün W^* olması durumunda ise geliştirilmiş alternatif ortogonal çatıya göre regle yüzey her zaman açılabilir. Eğer regle yüzeyin doğrultman vektörü $C^* - W^*$ ise regle yüzeyin açılabilirlik şartı elde edilmiş ve dayanak eğrisinin helis eğrisi olması gerektiği sonucuna ulaşılmıştır.

Bu tezden yola çıkarak eğri üzerinde çatı tanımlanamadığı durumlarda incelenemeyen eğri ve eğri çiftleri bu çatıya göre tanımlanabilir. Ayrıca başka özel eğriler de bu çatıya göre araştırılabilir. Verilen bu yeni çatı diferansiyel geometride eğri ve yüzey teorisine farklı bir bakış açısı getirebilir. Farklı uzaylarda da Galile, Minkowski vb. geliştirilmiş alternatif ortogonal çatı tanımlanabilir. Böylece eğri çalışmalarına yön verebilir. Ek olarak bu yeni çatı ile fizik ve mühendislik gibi bir çok farklı bilime yeni bir çalışma alanı sağlayacağı düşünülmektedir. Bu bakımdan bu tez çalışması araştırmacılara katkı sağlayabilecek niteliktedir.



KAYNAKLAR

- Akyiğit, M., Eren, K. and Kosal, H. H. (2021) “Tubular surfaces with modified orthogonal frame in Euclidean 3-Space”, *Honam Mathematical Journal*, 43(3), 453-463.
- Ali, A. and Lopez, R. (2011) “Slant helices in Minkowski space E_1^3 ”, *Journal of the Korean Mathematical Society*, 480, 159-167.
- Ali, A. and Turgut, M. (2010) “Some characterizations of slant helices in the Euclidean space E^n ”, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 39, 327-336.
- Aslan, S., Bekar, M. and Yaylı, Y. (2021) “Ruled surfaces constructed by quaternions”, *Journal of Geometry and Physics*, 161, 104048.
- Ateş, F., Kocakuşaklı, E., Gök, İ. and Yaylı, Y. (2018) “A study of the tubular surfaces constructed by the spherical indicatrices in Euclidean 3-Space”, *Turkish Journal of Mathematics*, 42, 1711-1725.
- Barros, M. (1997) “General helices and a theorem of Lancret”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 125(5), 1503-1509.
- Bertrand, J. (1850) “Mémoire sur la théorie des courbes à double courbure”, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 15, 332–350.
- Bottema, O. and Roth, B. (1979) “Theoretical kinematics 1st ed.”, *North Holland Public Company*, New York, 20-228.
- Burke, J. F. (1960) “Bertrand curves associated with a pair of curves”, *Mathematics Magazine*, 34(1), 60-62.
- Bükçü, B. and Karacan, M. K. (2016) “Spherical curves with modified orthogonal frame”, *Journal of New Results in Science*, 5(10), 60-68.
- Ceyhan, H., Özdemir, Z., Gök, İ. and Ekmekci, F. N. (2020) “Electromagnetic curves and rotation of the polarization plane through alternative moving frame”, *The European Physical Journal Plus*, 135(11), 1-16.
- Çakmak, A. and Şahin, V. (2022) “Characterizations of adjoint curves according to alternative moving frame”, *Fundamental Journal of Mathematics and Applications*, 5(1), 42-50.
- Deshmukh, S., Chen, B. Y. and Alghanemi, A. (2018) “Natural mates of Frenet curves in Euclidean 3-space”, *Turkish Journal of Mathematics*, 42(5), 2826-2840.
- Do Carmo, M. (1976) “Differential geometry of curves and surfaces 1st ed.”, *Prentice-Hall Inc*, Englewood Cliffs, 53-315.

- Doğan Yazıcı, B., İşbilir, Z. and Tosun, M. (2023) “Generalized osculating-type ruled surfaces of singular curves”, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 1- 14.
- Ekici, C. and Dede, M. (2011) “On the Darboux vector of ruled surfaces in pseudo-Galilean space”, *Mathematical and Computational Applications*, 16(4), 830-838.
- Farouki, R. T., Giannelli, C., Sampoli, M. L. and Sestini, A. (2014) “Rotation-minimizing osculating frames”, *Computer Aided Geometric Design*, 31(1), 27-42.
- Flöry, S. and Pottmann, H. (2010) “Ruled surfaces for rationalization and design in architecture”, *LIFE in: formation. On responsive information and variations in architecture*, 103-109.
- Ge, Q. J. and Ravani, B. (1994) “Geometric construction of Bézier motions”, *Journal of Mechanical Design*, 116, 749-755.
- Gong, H., Cao, L. X. and Liu, J. (2005) “Improved positioning of cylindrical cutter for flank milling ruled surfaces”, *Computer-Aided Design*, 37(12), 1205-1213.
- Gök, İ., Camcı, C. and Hacısalihoğlu, H. (2012) “ V_n slant helices in Euclidean n -space E^n ”, *Mathematical Communications*, 14(2), 317-329.
- Guggenheimer, H. W. (1963) “Differential geometry 1st ed.”, *McGraw-Hill book company*, New York, 1-72.
- Gür, S. and Bektaş, M. (2022) “On the modified orthogonal frames of the non-unit speed curves in Euclidean space E^3 ”, *Turkish Journal of Science*, 7(2), 58-74.
- Gür, S., Şenyurt, S. and Bektaş, M. (2022) “Salkowski curves and their modified orthogonal frames in E^3 ”, *Journal of New Theory*, (40), 12-26.
- Hacısalihoğlu, H. H. (1998) “Diferensiyel Geometri I”, *Fen Fakültesi Yayınları*, Ankara Üniversitesi, III, 1-256.
- Hacısalihoğlu, H. H. (2000) “Diferensiyel Geometri II”, *Fen Fakültesi Yayınları*, Ankara Üniversitesi, IV, 33-53.
- Hord, R. (1972) “Torsion at an inflection point of a space curve”, *The American Mathematical Monthly*, 79, 371-374.
- Hoschek, J. (1971) “Liniengeometrie”, *BI-Hochschultaschenbuch* 3rd ed.”, Mannheim, 13-114.
- Izumiya, S. and Takeuchi, N. (2002) “Generic properties of helices and bertrand curves”, *Journal of Geometry*, 74, 97–109.
- Izumiya, S. and Takeuchi, N. (2004) “New special curves and developable surfaces”, *Turkish Journal of Mathematics*, 28, 153-163.

- Karaca, E. (2022) "Quaternionic approach of slant ruled surfaces", *Advances in Applied Clifford Algebras*, 32, 42.
- Kaya Filiz, E. (2010) "A characterization of cylindrical helix strip", *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 59 (1), 37-51.
- Kaya, O. and Önder, M. (2017) "C-partner curves their applications", *Differential Geometry-Dynamical Systems*, 19, 64-74.
- Kızıltuğ, S., Erişir, T., Mumcu, G. and Yaylı, Y. (2023) "C*-partner curves with modified adapted frame and their applications", *AIMS Mathematics*, 8(1), 1345-1359.
- Kızıltuğ, S., Kaya, S. and Tarakçı, Ö. (2013) "The slant helices according to type-2 Bishop frame in Euclidean 3-space", *International Journal Of Pure And Applied Mathematics*, 2, 211-222.
- Kızıltuğ, S., Önder, M. and Tarakçı, Ö. (2017) "Bertrand and Mannheim partner curves on parallel surfaces", *Boletim da Sociedade Paranaense de Matematica*, 35(2), 159-169.
- Kızıltuğ, S., Çakmak, A., Erişir, T. and Mumcu, G. (2022) "On tubular surfaces with modified orthogonal frame in Galilean space G_3 ", *Thermal Science*, 26 (2), 571-581.
- Kızıltuğ, S. and Çakmak, A. (2013) "Developable ruled surfaces with Darboux Frame in Minkowski 3-space", *Life Science Journal*, 10(4), 1906-1914.
- Kula, L., Ekmekçi, N., Yaylı, Y. and İlarslan, K. (2010) "Characterizations of slant helices in Euclidean 3-space", *Turkish Journal of Mathematics*, 34(2), 261-274.
- Kula, L. and Yaylı, Y. (2005) "On slant helix and its spherical indicatrix", *Applied Mathematics Computation*, 169, 600-607.
- Kühnel, W. (2006) "Differential geometry curves-surfaces-manifolds 2nd ed.", *American Mathematical Society*, USA, 120-345.
- Lancret, M. (1806) "Memoire surless courbes a double courbure", *Memoirespresentes A Institute*, 416-454.
- Liu, H. and Wang, F. (2008) "Mannheim partner curves in 3-space", *Journal of Geometry*, 88, 120-126.
- Lone, M. S., Es, H., Karacan, M. K. and Bükçü, B. (2019) "On some curves with modified orthogonal frame in Euclidean 3-space", *Iranian Journal Of Science And Technology, Transactions A: Science*, 43, 1905-1916.
- Lucas, P. and Ortega-Yagües, J. (2017) "Slant helices in three dimensional sphere", *Journal of the Korean Mathematical Society*, 54, 1331-1343.

- Mamieva, I. A. (2019) "Influence of the geometrical researches of ruled surfaces on design of unique structures", *Structural mechanics of engineering constructions and buildings*, 15(4), 299-307.
- Monge, G. (1850) "Application de l'analyse a la géométrie 5th ed.", *Bachelier*, Paris, 111-319.
- Monterde, J. (2008) "Salkowski curves revisited: A family of curves with constant curvature and non-constant torsion", *Computer Aided Geometric Design*, 26, 271-278.
- Özdamar, E. and Hacısalihoğlu, H. (1975) "A characterization of inclined curves in Euclidean n -space", *Communications De La Faculte Des Sciences De L'Universite D'Ankara*, 24, 15-22.
- Özdoğan, S., Tuncer, O., Gök, İ. and Yaylı, Y. (2018) "Some new types of associated curves in Euclidean 3-space", *Analele științifice ale Universității Ovidius Constanța Seria Matematică*, 26(1), 205-221.
- Paskaleva, G. (2023) "Procedural shape contraction: integration of architectural details into 3d conceptual models", *Technische Universität Wien*, 69-86.
- Sabuncuoğlu, A. (2014) "Diferensiyel Geometri", *Nobel Akademik Yayıncılık*, Ankara, V, 1-170.
- Saint-Venant, J. C. (1845) "Mémoire sur les lignes courbes non planes", *Journal d'Ecole Polytechnique*, 30, 1-76.
- Sasai, T. (1984) "The fundamental theorem of analytic space curves and apperent singularities of fuchsian differential equations", *Tohoku Mathematical Journal*, 36, 17-24.
- Sasai, T. (1987) "Geometry of analytic space curves with singularities and regular singularities of differential equations", *Funkcialaj Ekvacioj*, 30, 283-303.
- Struik, D. J. (1961) "Lectures on classical differential geometry 2nd ed.", *Addison Wesley*, Dover, 1-162.
- Şahin, B. (2012) "Manifoldların diferansiyel geometrisi", *Nobel Akademik Yayıncılık*, Ankara, I, 104-145.
- Şenol, A., Zıplar, E., Yaylı, Y. and Gök, İ. (2013) "A new approach on helices in Euclidean n -space", *Mathematical Communications*, 18(1), 241-256.
- Taş, F. and İlarslan, K. (2019) "A new approach to design the ruled surface", *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 16(06), 1950093.
- Tsay, D. M. and Her, M. J. (2001) "Accurate 5-axis machining of twisted ruled surfaces", *J. Manuf. Sci. Eng.*, 123(4), 731-738.

- Uzunoğlu, B., Gök, İ. and Yaylı, Y. (2016) “A new approach on curves of constant precession”, *Applied Mathematics and Computation*, 275, 317-323.
- Wang, C., Jiang, C., Wang, H., Tellier, X. and Pottmann, H. (2023) “Architectural structures from quad meshes with planar parameter lines”, *Computer-Aided Design*, 156, 103463.
- Whittemore, J. K. (1940) “Bertrand curves and helices”, *Duke Mathematical Journal*, 6(1), 235-245.
- Yaylı, Y. and Zıplar, E. (2011) “On slant helices and general helices in Euclidean n-spaces”, *Mathematica Aeterna*, 1, 599-610.
- Yılmaz, B. and Has, A. (2020) “Alternative partner curves in the Euclidean 3-space”, *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 69(1), 900-909.
- Yılmaz, B. and Has, A. (2022) “Obtaining fractional electromagnetic curves in optical fiber using fractional alternative moving frame”, *Optik*, 260, 169067.
- Yüce, S. (2019) “Öklid uzayında diferansiyel geometri”, *Pegem Akademi Yayıncılık*, Ankara, IV, 2-350.
- Yüksel, N. and Saltık, B. (2023) “On inextensible ruled surfaces generated via a curve derived from a curve with constant torsion”, *AIMS Mathematics*, 8(5), 11312-11324.