

**T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GELİŞTİRİLMİŞ BERNOULLİ ALT DENKLEM FONKSİYON METODU
VE SİNE GORDON AÇILIM METODU YARDIMI İLE KİSMİ
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ANALİTİK ÇÖZÜMLERİNİN
İNCELENMESİ**

Miraç KAYHAN

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

HAZİRAN 2019

Tezin Başlığı; geliştirilmiş bernoulli alt denklem fonksiyon metodu ve sine Gordon açılım metodu yardımı ile kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerinin incelenmesi

Tezi Hazırlayan : Miraç KAYHAN

Sınav Tarihi : 19/06/2019

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Matematik Ana Bilim Dalında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Tez Danışmanı :

Prof. Dr. E. Nesligöl AKSAN
İnönü Üniversitesi

Prof. Dr. Hasan BULUT
Fırat Üniversitesi

Prof. Dr. Ercan ÇELİK
Atatürk Üniversitesi

Prof. Dr. Alaattin ESEN
İnönü Üniversitesi

Doç. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR
İnönü Üniversitesi

Prof. Dr. İbrahim ADIGÜZEL
Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Doktora Tezi olarak sunduğum “Geliştirilmiş Bernoulli alt denklem fonksiyon metodu ve Sine Gordon açılım metodu yardımı ile kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerinin incelenmesi “ başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.



Miraç KAYHAN

ÖZET

Doktora Tezi

GELİŞTİRİLMİŞ BERNOULLİ ALT DENKLEM FONKSİYON METODU VE SİNE GORDON AÇILIM METODU YARDIMI İLE KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ANALİTİK ÇÖZÜMLERİNİN İNCELENMESİ

Miraç Kayhan

İnönü Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

57+VII sayfa

2019

Danışman : Prof. Dr. E. Nesligül AKSAN

Yapılan çalışma beş bölümden oluşmuştur.

Birinci bölümde, genel bir literatür taraması yapıldı.

İkinci bölümde, bu tezde kullanılan temel tanım ve teoremler verildi.

Üçüncü bölümde, Bernoulli alt denklem fonksiyon metodunun ve sine- Gordon açılım metodunun genel yapıları verildi.

Dördüncü bölümde, (3+1) Kadomtsev Petviashvili, (3+1) boyutlu Schrödinger ve Zakharov-Kuznetsov-Benjamin-Bona-Mahony denklemlerine geliştirilmiş Bernoulli alt denklem fonksiyon metodu ve sine-Gordon açılım metodu uygulandı. Wolfram Mathematica programı ele alınarak denklemlere ait çözümlerin yüzey grafikleri çizildi.

Beşinci bölümde ise genel bir sonuç verildi.

ANAHTAR KELİMELEER: Kadomtsev Petviashvili, Schrödinger, Zakharov Kuznetsov Benjamin Bona Mahony, Geliştirilmiş Bernoulli alt denklem fonksiyon metodu, sine-Gordon açılım metodu.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

**INVESTIGATIONS OF ANALYTICAL SOLUTIONS OF PARTIAL
DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH THE HELP OF IMPROVED BERNOULLI
SUB-EQUATION FUNCTION METHOD AND SINE-GORDON EXPANSION
METHOD**

Miraç Kayhan

İnönü University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

57+VII pages

2019

Supervisor : Prof. Dr. E. Nesligül AKSAN

This study is consisted of the five chapters.

In the first chapter, it has been conducted a literature survey in a general.

In second chapter, some fundamental definitions and theorems used in this thesis have been introduced.

In chapter third, the general structures of improved Bernoulli sub-equation function method and sine-Gordon expansion method have been presented.

In chapter fourth, improved Bernoulli sub-equation function method and sine-Gordon expansion method have been applied to the (3+1)-dimensional Kadomtsev-Petviashvili, (3+1)-dimensional Schrödinger equations and Zakharov-Kuznetsov-Benjamin-Bona-Mahony equations. 2D and 3D surfaces of results have been plotted with the help of Wolfram Mathematica 9 program.

In chapter fifth, a general conclusion has been given.

KEYWORDS: Kadomtsev Petviashvili, Schrödinger, Zakharov Kuznetsov Benjamin Bona Mahony, Improved Bernoulli sub equation function method, sine-Gordon expansion method.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmaya başladığımdan beri zamanlarını, araştırmalarını, bilgi ve birikimlerini esirgemeyen, sonuna kadar destek veren ve titizlikle çalışmalarımı gözden geçiren çok değerli hocalarım Prof. Dr. Hasan BULUT ve Prof. Dr. Emine Nesligül AKSAN'a sonsuz teşekkürlerimi bir borç bilir ve saygılarımı sunarım. Bu yolda beni destekleyen ve hep yanımda olan değerli eşim Gamze KAYHAN' a teşekkür ederim.

Miraç KAYHAN



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖZET.....	I
ABSTRACT.....	II
TEŞEKKÜR.....	III
İÇİNDEKİLER.....	IV
ŞEKİLLER LİSTESİ	V
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER... ..	5
3. MATERYAL VE METOTLAR.....	10
3.1 Geliştirilmiş Bernoulli Alt Denklem Fonksiyon Metodu(IBSEFM)....	10
3.2 Sine-Gordon Açılım Metodu(SGEM)	12
4. METOTLARIN UYGULANMASI.....	14
4.1 (3+1)-boyutlu lineer olmayan Kadomtsev-Petviashvili denkleminde IBSEFM'nun uygulanması.....	14
4.1.1 Durum 1.....	18
4.1.2 Durum 2.....	19
4.2 (3+1)-boyutlu Schrödinger denkleminde IBSEFM'nun uygulanması	21
4.2.1 Durum1.....	24
4.3 Zakharov-Kuznetsov-Benjamin-Bona-Mahony denkleminde IBSEFM'nun uygulanması.....	27
4.3.1 Durum 1	30
4.3.2 Durum 2.....	31
4.4 (3+1)-boyutlu lineer olmayan Kadomtsev-Petviashvili denkleminde SGEM'in uygulanması.....	33
4.4.1 Durum 1.....	34
4.4.2 Durum 2.....	36
4.5 (3+1)-boyutlu Schrödinger denkleminde SGEM'in uygulanması	39
4.5.1 Durum 1.....	40
4.5.2 Durum 2.....	41
4.6 Zakharov-Kuznetsov-Benjamin-Bona-Mahony denkleminde SGEM'in uygulanması.....	44
4.6.1 Durum 1.....	45
4.6.2 Durum 2.....	48
5. SONUÇ VE TARTIŞMA.....	51
KAYNAKÇA.....	53
ÖZGEÇMİŞ.....	57

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil-1 (4.1.16) çözümünün $w=1, d=0.2, y=0.01, z=0.8, E=0.3$ değerleri için 3 boyutlu yüzey grafiği	18
Şekil-2 (4.1.16) çözümünün $w=1, d=0.2, y=0.01, z=0.8, E=0.3$ değerleri için 2 boyutlu yüzey grafiği.....	19
Şekil-3 (4.1.18) çözümünün $w=1, d=0.6, b_0=0.2, b_1=0.5, E=0.3, y=0.01, z=0.02$ değerleri için 3 boyutlu yüzey grafiği.....	20
Şekil-4 (4.1.18) çözümünün $w=1, d=0.6, b_0=0.2, b_1=0.5, E=0.3, y=0.01, z=0.02$ değerleri için 2 boyutlu yüzey grafiği.....	20
Şekil-5 (4.2.13) çözümünün $w=0.5, a=2, b=0.25, c=0.35, d=0.2, E=0.3, y=0.8, z=0.9$ değerleri için reel kısmının 3 boyutlu yüzey grafiği.....	24
Şekil-6 (4.2.13) çözümünün $w=0.5, a=2, b=0.25, c=0.35, d=0.2, E=0.3, y=0.8, z=0.9$ değerleri için sanal kısmının 3 boyutlu yüzey grafiği.....	25
Şekil-7 (4.2.13) çözümünün $w=0.5, a=2, b=0.25, c=0.35, d=0.2, E=0.3, y=0.8, z=0.9$ değerleri için reel kısmının 2 boyutlu yüzey grafiği.....	25
Şekil-8 (4.2.13) çözümünün $w=0, a=2, b=0.25, c=0.35, d=0.2, E=0.3, y=0.8, z=0.9$ değerleri için sanal kısmının 2 boyutlu yüzey grafiği.....	26
Şekil-9 (4.3.10) çözümünün $w=1, d=0.2, E=0.3, \alpha=0.3, \beta=0.02$ değerleri için 3 boyutlu yüzey grafiği.....	30
Şekil-10 (4.3.10) çözümünün $w=1, d=0.2, E=0.3, \alpha=0.3, \beta=0.02$ değerleri için 2 boyutlu yüzey grafiği.....	31
Şekil-11 (4.3.12) çözümünün $d=0.2, b_0=0.1, E=0.3, \alpha=0.3, \beta=0.02, a_4=0.2$ değerleri için 3 boyutlu yüzey grafiği.....	32
Şekil-12 (4.3.12) çözümünün $d=0.2, b_0=0.1, E=0.3, \alpha=0.3, \beta=0.02, a_4=0.2$ değerleri için 2 boyutlu yüzey grafiği.....	32

Şekil-13 (4.4.8) çözümünün $\mu=0.2, a=0.1, z=0.5, t=0.6$ değerleri için 3 boyutlu yüzey grafiği.....	35
Şekil-14 (4.4.8) çözümünün $\mu=0.2, a=0.1, z=0.5, t=0.6$ değerleri için 2 boyutlu yüzey grafiği.....	35
Şekil-15 (4.4.10) çözümünün $\mu=0.2, a=0.1, z=0.5, t=0.6$ değerleri için reel kısmının 3 boyutlu yüzey grafiği.....	36
Şekil-16 (4.4.10) çözümünün $\mu=0.2, a=0.1, z=0.5, t=0.6$ değerleri için sanal kısmının 3 boyutlu yüzey grafiği.....	36
Şekil-17 (4.4.10) çözümünün $\mu=0.2, a=0.1, z=0.5, t=0.6, y=0.1$ değerleri için reel kısmının 2 boyutlu yüzey grafiği.....	37
Şekil-18 (4.4.10) çözümünün $\mu=0.2, a=0.1, z=0.5, t=0.6, y=0.1$ değerleri için sanal kısmının 2 boyutlu yüzey grafiği.....	38
Şekil-19 (4.5.7) çözümünün $b=-0.5, c=0.2, r=0.35, \gamma=0.25, t=0.6, z=0.9$ değerleri için 3 boyutlu yüzey grafiği.....	40
Şekil-20 (4.5.7) çözümünün $b=-0.5, c=0.2, r=0.35, \gamma=0.25, t=0.6, z=0.9$ değerleri için 2 boyutlu yüzey grafiği.....	41
Şekil-21 (4.5.9) çözümünün $a=0.3, c=0.2, b=0.5, \gamma=0.25, z=0.9, y=0.6$ değerleri için reel kısmının 3 boyutlu yüzey grafiği.....	42
Şekil-22 (4.5.9) çözümünün $a=0.3, c=0.2, b=0.5, \gamma=0.25, z=0.9, y=0.6$ değerleri için sanal kısmının 3 boyutlu yüzey grafiği.....	42
Şekil-23 (4.5.9) çözümünün $a=0.3, c=0.2, b=0.5, \gamma=0.25, t=0.75, z=0.9, y=0.6$ değerleri için reel kısmının 2 boyutlu yüzey grafiği.....	43
Şekil-24 (4.5.9) çözümünün $a=0.3, c=0.2, b=0.5, \gamma=0.25, t=0.75, z=0.9, y=0.6$ değerleri için sanal kısmının 2 boyutlu yüzey grafiği.....	43
Şekil-25 (4.6.8) çözümünün $v=0.1, p=0.2, t=0.3$ değerleri için reel kısmının 3 boyutlu yüzey grafiği.....	46
Şekil-26 (4.6.8) çözümünün $v=0.1, p=0.2, t=0.3$ değerleri için sanal kısmının 3 boyutlu yüzey grafiği.....	46

Şekil-27 (4.6.8) çözümünün $v = 0.1$, $p = 0.2$, $t = 0.3$ değerleri için reel kısmının 2 boyutlu yüzey grafiği.....	47
Şekil-28 (4.6.8) çözümünün $v = 0.1$, $p = 0.2$, $t = 0.3$ değerleri için sanal kısmının 2 boyutlu yüzey grafiği.....	47
Şekil-29 (4.6.10) çözümünün $p = 0.1$, $q = 0.2$, $t = 0.3$ değerleri için reel kısmının 3 boyutlu yüzey grafiği.....	48
Şekil-30 (4.6.10) çözümünün $p = 0.1$, $q = 0.2$, $t = 0.3$ değerleri için sanal kısmının 3 boyutlu yüzey grafiği.....	49
Şekil-31 (4.6.10) çözümünün $p = 0.1$, $q = 0.2$, $t = 0.3$ değerleri için reel kısmının 2 boyutlu yüzey grafiği.....	49
Şekil-32 (4.6.10) çözümünün $p = 0.1$, $q = 0.2$, $t = 0.3$ değerleri için sanal kısmının 2 boyutlu yüzey grafiği.....	50

1.GİRİŞ

Diferansiyel denklemler, uzun yıllardan bu yana fizik ve mühendislik alanlarında önemli bir yere sahiptir. Bilim adamları ve mühendisler genellikle değişime uğrayan sistemleri incelerler ve diferansiyel denklemler yardımıyla bu değişimleri daha iyi inceleme fırsatı bulurlar.

Fen ve Mühendislik alanında ortaya çıkan modellerin farklı fiziksel yapılarının araştırılması, yorumlanması ve literatüre kazandırılması son yıllarda birçok araştırmacının başlıca ilgi alanlarından biri haline gelmiştir. Modern çağın getirmiş olduğu birçok farklı fiziksel problemi tanımlamada daha iyi sonuçlara sahip olduğu düşünülen diferansiyel denklemler literatüre sunulmuştur. Son yıllarda bu yapıya sahip diferansiyel denklemlerin çözümlerinin elde edilmesi, birbirinden farklı simülasyonlarının oluşturulması daha da önem kazanmaya başlamıştır. Bu çalışmalar diferansiyel denklemlerin çözümlerinde kullanılan birçok yöntem ve tekniğin geliştirilmesinin önünü açmıştır.

Günlük yaşamda karşımıza çıkan problemlerin matematiksel yapılarının keşfedilmesi ve hayatı kolaylaştırma çabaları bilim insanları arasında bir diğer ilgi alanı olmuştur. Bu anlamda, önemli sağlık problemi oluşturan tüberkülozun matematiksel yapıları ve kanserin simülasyonları gibi çalışmalar birçok araştırmacı tarafından ele alınmıştır [1]. A. Atangana ve arkadaşları, Tüberküloz üzerine birçok önemli çalışma üzerinde yoğunlaşmıştır [2]. Yine K. Castro bu hastalık ile ilgili ilk çalışmaları yapmıştır [3]. Bir diğer sağlık problemi olan Hepatit B hastalığının matematiksel yapısı T. Goldstein ve arkadaşları tarafından ele alınmıştır [4].

Hedayati ve çalışma arkadaşları serbest elektron dinamikleri ve lazer pompalamaya dayalı bir serbest elektron lazeri üzerine araştırma yapmışlardır [5]. Salik ve ekibi sönmüş kireç plazması ile lazer tabanlı teşhis üzerinde çalışmışlardır [6]. Tseng ve çalışma arkadaşları radyasyona bağlı DNA'nın kırılmaları ve bunların revizyonu üzerine detaylı analizler yapmışlardır [7]. Manafian ve arkadaşları ise optik yönlü bazı denklemlerin önemli özelliklerini araştırmışlardır [8-10]. Baumann ve çalışma arkadaşları Hodgkin-Huxley modelinin bazı özelliklerini incelemişlerdir [11]. Son yıllarda, bazı araştırmacılar elastik çubuklar üzerine odaklanmıştır. Örneğin N. Umetani ve çalışma arkadaşları literatürde karmaşık eğilme ve elastik çubuklar üzerine simüle etmek için yeni bir yöntem sunmuşlardır [12].

J.T. Miller ve çalışma arkadaşları yatay silindirik kısıtlaması içinde ince elastik çubuk Buckling üzerinde çalışmışlardır [13]. Asimptotik yöntemler bükme germe modeli, Rodríguez-ARoS ve J.M. Viano tarafından elastik çubuklar için kullanılmıştır [14]. J. G. Murphy gergin, ince ve bükülmüş elastik çubukların özelliklerini gözlemlemiştir [15]. M. Luo ve çalışma arkadaşları Kirchhoff elastik çubukla ilgili bir makale yayınlamışlardır [16].

1992 yılında B. Fuchssteiner ve S. Carillo Riccati diferansiyel denkleminin özelliklerinin lineer olmayan adi diferansiyel denklemlere uygulanabileceğini ilk defa literatüre sunmuşlardır [17]. Bu çalışmada Liouville denkleminin yeni çözümlerini elde etmek için Riccati denkleminin özelliklerinden faydalanmışlardır. 1996 yılında ise Riccati ve Bernoulli denklemlerinin özelliklerini gözönüne alan W. X. Ma ve B. Fuchssteiner ilk defa *Alt Denklem Metodu* kavramını literatüre sunmuşlardır. [18]. Bu metot Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov denklemine uygulanarak hiperbolik ve salınımlı dalga çözümler elde edilmiştir [18]. Söz konusu çalışmada W. X. Ma ve B. Fuchssteiner, alt denklem metodunu lineer olmayan diferansiyel denklemlere uygulayarak yeni hiperbolik çözümler elde etmişlerdir. 2011 yılında Zheng Bernoulli alt denklem yöntemini Benjamin Bona Mahony ve genel Gardner denklemine uygulayarak hareketli dalga çözümlerini elde etmiştir [19]. 2015 yılında A. Salam Bernoulli alt denklem yöntemini Phi-four ve Benney Luke denklemlerine uygulayarak yeni dalga çözümlerini elde etmiştir [20].

Bu metodun geliştirilmiş hali olan *Geliştirilmiş Bernoulli alt denklem fonksiyon metodu* 2015 yılında literatüre sunulmuştur [21]. Bu metot kuantum alan teorisinde kullanılan Kundu-Eckhaus denklemine uygulanarak yeni kompleks analitik çözümleri elde edildi [21]. Burger tarafından literatüre sunulan ve ısı iletimini sembolize eden Burgers denklemine 2016 yılında geliştirilmiş Bernoulli alt denklem fonksiyon metodu uygulanarak farklı analitik çözümleri elde edildi [22]. 2018 yılında ise söz konusu metot Sharma-Tasso Olver denkleminin bazı fiziksel özelliklerini incelemek için ele alınmıştır [23].

Diğer yandan C. Yan *Alt denklem metodu* kavramını trigonometrik sine-Gordon denklemine genişletmiştir. C. Yan sine-Gordon denkleminin dalga dönüşümü özelliğine dayalı analitik bir metot olan *sine-Gordon açılım metodu*'nu ilk defa literatüre 1996 yılında sunmuştur. Bu çalışmada, sine-Gordon açılım metodu Regularized Long Wave (RLW) denklemine uygulanarak hiperbolik salınımlı dalga çözümleri elde edilmiştir [24]. 1999 yılında Z. Yan ve H. Zhang *Alt denklem metodu*

kavramını trigonometrik sine-cosine terimine dayalı bir analitik metot olan geliştirilmiş sine-cosine metodunu literatüre kazandırmışlardır. Bu metot, matematiksel fizikte ortaya çıkan variant Boussinesq denklem sisteminin salınımlı dalga çözümlerini elde etmek için kullanılmıştır [25]. 2005 yılında Y. Chen ve Z. Yan sine-Gordon denkleminin bir diğer önemli versiyonu olan $u_{xt}(x,t) = \alpha \sin(u(x,t))$ denklemini göz önüne alarak alt denklem metodu kavramını geliştirmişlerdir [26]. 2010 yılında ise G. Betchewe ve arkadaşları alt denklem metodu olan sine-cosine metodunu quadratic lineer olmayan denklem sistemine uygulayarak kompleks dalga çözümlerini elde etmiştir [27]. Quadratic lineer olmayan denklem sistemleri için elde edilen bu çözümlerle, lazer ve sinyal sistemlerini yönlendirmek için kullanılan periyodik dalgaların geniş bir sınıfı ilk defa literatüre sunulmuştur. 2016 yılında sine-Gordon açılım metodu, akışkanlar mekaniğinde ortaya çıkan Davey-Stewartson denklem sistemine uygulanarak yeni kompleks ve hiperbolik fonksiyon çözümleri elde edilmiştir [28]. Elde edilen bu çözümlerle Davey-Stewartson denklem sisteminin yer çekim potansiyeli ile ilgili önemli özellikler taşıdığı tahmin edilmiştir. Üstelik bu çözümlerin hiperbolik fonksiyonların fiziksel davranışlarını gösterdiği grafiklerle literatüre sunulmuştur.

Bu çalışmada ise ilk olarak geliştirilmiş Bernoulli alt denklem fonksiyonu metodu (IBSEFM) ve Sine-Gordon açılım metodu (SGEM),

$$u_{xt} + 6u_x^2 + 6uu_{xx} - u_{xxxx} - u_{yy} - u_{zz} = 0, \quad (1.1)$$

ile tanımlanan lineer olmayan (3+1)-boyutlu Kadomtsev-Petviashvili denkleminin uygulamak için göz önüne alınmıştır [29]. (1.1) denklemini, dalga dağılımlarını simgeleyen quadratic lineer olmayan denklem sistemlerinde ortaya çıkan lineer olmayan dalga teorisinde kullanılan en evrensel modellerden bir tanesidir. Bu denklem ışınların kırılmasıyla ortaya çıkan zayıf dalgalar arasındaki yüzeyi göstermek için kullanılmıştır. Üstelik (1.1) denkleminin farklı soliton çözümlerini elde etmek için F. Xie ve arkadaşları tanh metodunu kullanmışlardır [30]. Bu denkleme, Geliştirilmiş Bernoulli alt denklem fonksiyon metodu ve sine-Gordon açılım metodunun uygulanarak kompleks üstel, rasyonel, hiperbolik gibi salınımlı soliton dalga çözümleri elde edilmiştir.

İkinci olarak bir başka önemli matematiksel model

$$iu_t + u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \gamma |u|^2 u = 0, \quad (1.2)$$

ile tanımlanan (3+1) boyutlu lineer olmayan Schrödinger denklemidir [31]. Fizik alanında ortaya çıkan birçok problem (1.2) denklemiyle ifade edilmektedir. Örneğin, plazma fizikte ortaya çıkan elektromanyetik dalgaların dağılımlarını ve süper akışkanlar mekaniğindeki dalga dağılımlarını sembolize etmek için kullanılmaktadır [32]. (1.2) denkleminin dalga dağılımlarını gösteren kompleks, üstel, rasyonel, hiperbolik gibi soliton çözümlerini elde etmek için geliştirilmiş Bernoulli alt denklem fonksiyon metodu ve sine-Gordon açılım metotları uygulanmıştır.

Son olarak lineer olmayan Zakharov-Kuznetsov-Benjamin-Bona-Mahony

$$u_t + u_x - 2\alpha uu_x - \beta u_{xx} = 0, \quad (1.3)$$

olarak bilinen (1.3) diferansiyel denklemi için geliştirilmiş Bernoulli alt denklem fonksiyon metodu ve sine-Gordon açılım metotları uygulanmıştır. (1.3) denkleminde α, β sıfırdan farklı reel sabitlerdir [33]. (1.3) denkleminin genelleştirilmiş hali plazma ve akışkanlarda ortaya çıkan hidromagnetik dalgaların uzun dalga boylarının yüzeyini matematiksel olarak ifade eder [34]. A. R. Seadawy ve arkadaşları üstel fonksiyon metodu ile (1.3) denkleminin genel halinin salınımlı dalga çözümlerini elde ederek farklı dalga simülasyonlarını göstermişlerdir [34].

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1.

Bir veya daha çok bağımlı değişkenin bir veya daha çok bağımsız değişkene göre çeşitli mertebeden türevlerini içeren bir denkleme *diferansiyel denklem* denir [35-38].

Tanım 2.2.

Bir veya daha çok bağımlı değişkenin bir tek bağımsız değişkene göre çeşitli mertebeden adi türevlerini içeren bir denkleme *adi diferansiyel denklem* denir [35-38].

Tanım 2.3.

Bir veya daha çok bağımlı değişkenin en az iki bağımsız değişkene göre çeşitli mertebeden kısmi türevlerini içeren denkleme *kısmi diferansiyel denklem* denir [35-38].

Tanım 2.4.

Bir denklem sistemi iki veya daha fazla sayıda bağımsız değişken ile bu değişkenlerin bir fonksiyonu ve fonksiyonun türevlerini içeriyorsa, bu denklem sistemlerine *kısmi türevli denklem sistemi* denir. [38].

Tanım 2.5.

Bir diferansiyel denklemde görülen en yüksek mertebeden türevin mertebesine denklemin *mertebesi* denir [38].

Tanım 2.6.

Bir diferansiyel denklem içinde bulunan en yüksek mertebeli türevinin kuvvetine diferansiyel denklemin *derecesi* denir [35-38].

Tanım 2.7.

Bir diferansiyel denklemde her bağımlı değişken ve her mertebeden türevler birinci dereceden ise ve aynı zamanda bağımlı değişkenler veya türevler çarpım halinde yer

almıyorlarsa böyle denklemlere *linear (doğrusal)* diferansiyel denklemler denir. Lineer bir diferansiyel denklem,

x bağımsız değişken olmak üzere;

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x) y = g(x) \quad (2.1)$$

şeklinde ifade edilir [40-42].

Tanım 2.8.

Eğer bir diferansiyel denklem lineer değilse *linear olmayan* diferansiyel denklem denir [35-38].

Tanım 2.9.

Bir $a < x < b$ aralığında tanımlı bir Φ fonksiyonu $a < x < b$ aralığında bulunan her x için tanımlı ve ilk n . mertebeden türevelere sahip fonksiyonu

$$F(x, \Phi(x), \Phi'(x), \Phi''(x), \dots, \Phi^{(n)}(x)) = 0, \quad (2.2)$$

ise Φ fonksiyonuna (2.2) denkleminin *çözümüdür* denir. Bir adi diferansiyel denklem, denklemin mertebesi kadar sabit içerir. Çözüm fonksiyonundaki sabitlere verilen her bir değere karşılık bulunan çözüme de *özel çözüm* denir.

Bir adi diferansiyel denklemin çözümü eğri ailesine karşılık gelmesine karşın, bir kısmi diferansiyel denklemin çözümü yüzey ailesine karşılık gelir. Özel olarak, ikinci mertebeden bir diferansiyel denklem göz önüne alındığında bu tip denklemlerin çözümleri iki sabit içerdiğinden bu sabitleri bulmak için iki ek şart verilmelidir. Eğer şartlar; bağımlı değişken ve türevleri üzerinde bağımsız değişkenin aynı değeri için verilen şartlar ise *başlangıç şartları*, bağımsız değişkenin farklı değerleri için verilen şartlar ise *sınır şartları* ile tanımlanır [43].

Tanım 2.10.

Keyfi sabitlere özel değerler verilerek genel çözümden elde edilemeyen fakat verilen diferansiyel denklemini sağlayan çözümler de vardır. Bu tür çözümlere *singüler (tekil) çözüm* denir [40-42].

Tanım 2.11.

Diferansiyel denklem bir fiziksel olayın modeli olduğundan kolaylık olması bakımından genellikle ikinci mertebeden sabit katsayılı bir kısmi diferansiyel denklem alınarak sınıflandırmaya gidilmiştir, ikinci mertebeden bir kısmi diferansiyel denklemin genel hali;

$$A(x, y)U_{xx} + B(x, y)U_{xy} + C(x, y)U_{yy} + D(x, y)U_x + E(x, y)U_y + F(x, y)U + G(x, y) = 0 \quad (2.3)$$

şeklinde verilir. Diskriminant olarak

$$\Delta = B^2 - 4AC, \quad (2.4)$$

tanımlansın, bu durumda

<i>Diskriminant</i>	<i>Denklem tipi</i>	<i>Örnek</i>	<i>İsimlendirme</i>
$\Delta > 0$	<i>hiperbolik</i>	$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0,$	Dalga denklemi
$\Delta = 0$	<i>parabolik</i>	$u_t - k u_{xx} = 0,$	Isı denklemi
$\Delta < 0$	<i>eliptik</i>	$u_{xx} + u_{yy} = 0,$	Laplace denklemi

denklemdir [37].

Tanım 2.12.

p, q sıfırdan farklı sabitler olmak üzere

$$\frac{dy}{dx} + py = q$$

şeklinde yazılabilen diferansiyel denklemlere birinci mertebeden lineer diferansiyel denklem denir [44].

Tanım 2.13.

Eğer birinci mertebeden ve birinci dereceden bir diferansiyel denklem

$$X(x)dx + Y(y)dy = 0$$

biçiminde yazılıyorsa, bu denkleme değişkenlerine ayrılabilir denklem denir. Burada X yalnız x in ve Y de yalnız y nin bir fonksiyonudur [44].

Tanım 2.14.

$n \neq 0,1$ olmak üzere,

$$\frac{dy}{dx} + py = qy^n$$

şeklindeki denklemlere Bernoulli diferansiyel denklemi denir ve $v = y^{1-n}$ dönüşümü yardımıyla lineer diferansiyel denkleme dönüşür [44].

Tanım 2.15. (Balans Prensibi)

Lineer olmayan adi diferansiyel denklemdeki en yüksek mertebeden türev ile lineer olmayan terim arasında elde edilen bağıntıya balans prensibi denir [39].

Tanım 2.16.

Lineer olmayan herhangi bir adi diferansiyel denklemde en yüksek mertebeden lineer olan terim $\frac{d^q}{d\xi^q}$ ve en yüksek mertebeden lineer olmayan terim $u^p \left(\frac{d^r}{d\xi^r} \right)^s$ ile verilsin. Bu durumda M dengeleme terimi olmak üzere $M + q = Mp + s(M + r)$ eşitliği yazılabilir [43].

Tanım 2.17.

Matematiksel bir terim olarak *iyi tanımlı problem* kavramı ilk olarak Jacques Hadamard tarafından literatüre sunulan bir tanımla ortaya çıkmıştır. Hadamard, fiziksel olayların matematiksel modellemelerinin aşağıdaki özellikler sağlanacak şekilde iyi tanımlı olması gerektiğini savunmuştur.

- i) Çözüm vardır,
- ii) Çözüm tektir,
- iii) Çözüm karardır.

Matematiksel olarak bir problemin çözümünün var olması, çözüm uzayını genişleterek sağlanır. Bir problemin çözümünün tek olması, mutlak bir fonksiyon sınıfına göre çözüm tektir anlamına gelir. Bir problemin birden fazla çözümü varsa model hakkında daha fazla bilgiye ihtiyaç vardır.

Eğer başlangıç yada sınır koşulları ve parametre değerlerinde yapılan küçük bir değişiklik çözümde küçük değişikliklere neden oluyorsa bu çözüm karardır.

Matematiksel olarak iyi tanımlılık aşağıdaki şekilde ifade edilebilir. X ve Y iki normlu uzay ve $K: X \rightarrow Y$ lineer (veya lineer olmayan) bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki eşitlikler sağlanıyorsa, $Kx = y$ denklemi iyi tanımlı olarak adlandırılır.

1. Varlık: Her $y \in Y$ için $Kx = y$ olacak şekilde en az bir $x \in X$ vardır.
2. Teklik: Her $y \in Y$ için $Kx = y$ olacak şekilde en fazla bir $x \in X$ vardır.
3. Kararlılık: x çözümü daima y 'ya bağlıdır. Yani $n \rightarrow \infty$ iken $Kx_n \rightarrow Kx$ olacak şekilde her $(x_n) \subset X$ dizisi için $x_n \rightarrow x$ olmasıdır [46].

Teorem 2.1.

Sürekli $f(x, t)$ fonksiyonu $\{(x, t): a \leq x \leq b, c \leq t \leq d\}$ dikdörtgensel bir bölgede sürekli $\frac{\partial f}{\partial t}$ kısmi türevine sahip olsun. Bu takdirde $c \leq t \leq d$ için

$$\frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx, \quad (2.5)$$

dir. Eğer f fonksiyonu bu teoremin şartlarını sağlayan bir fonksiyon $a(t)$ ve $b(t)$ de $c \leq t \leq d$ aralığında sürekli türevlere sahip fonksiyonlar ise

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx + f(b(t), t)b'(t) - f(a(t), t)a'(t), \quad (2.6)$$

dir [44,47].

3. MATERYAL VE METOTLAR

3.1. GELİŞTİRİLMİŞ BERNOULLİ ALT DENKLEM FONKSİYON METODU

Bu bölümde, ilk olarak geliştirilmiş Bernoulli alt denklem fonksiyon metodunun genel hali verilmiştir. Bu metot birçok diferansiyel denklem için yeni salınımlı dalga çözümleri verir [21,22]. Geliştirilmiş Bernoulli alt denklem fonksiyon metodunun genel yapısı dört adımda ele alınır:

1.Adım:

$$P(u, u_x, u_y, u_z, u_t, u_{tt}, u_{xx}, u_{yy}, \dots) = 0, \quad (3.1.1)$$

biçiminde verilen denklemi ele alalım ve bu denkleme $c \neq 0$ olmak üzere

$$u(x, y, z, t) = U(\zeta), \quad \zeta = x + y + z - ct, \quad (3.1.2)$$

şeklinde tanımlanmış özel bir dalga dönüşümü uygulanırsa,

$$N(U, U', U'', U''', \dots) = 0, \quad (3.1.3)$$

şeklinde bir nonlinear adi diferansiyel denklem elde edilir.

2.Adım: (3.1.3) denkleminin çözümünün

$$U(\zeta) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i F^i}{\sum_{j=0}^m b_j F^j} = \frac{a_0 + a_1 F + a_2 F^2 + \dots + a_n F^n}{b_0 + b_1 F + b_2 F^2 + \dots + b_m F^m}, \quad (3.1.4)$$

olduğunu kabul edelim. Buradaki F fonksiyonu $F = F(\zeta)$ olup

$$F' = wF + dF^M, \quad w \neq 0, \quad d \neq 0, \quad M \in \mathbb{R} - \{0, 1, 2\}, \quad (3.1.5)$$

Bernoulli diferansiyel denkleminin bir çözümüdür. (3.1.4) ve (3.1.5) denklemlerini (3.1.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$\Omega(F(\zeta)) = \rho_s F(\zeta)^s + \dots + \rho_1 F(\zeta) + \rho_0 = 0, \quad (3.1.6)$$

$\Omega(F(\zeta))$ polinomuna ait denklem elde edilir.

Böylece bu denklemden, Balans Prensibi gereğince n, m ve M arasında bir bağıntı bulunur.

3.Adım: $\Omega(F(\zeta))$ polinomunun bütün katsayıları sıfır olacak şekilde düzenlenirse,

$$\rho_i = 0, i = 0, \dots, s. \quad (3.1.7)$$

denklem sistemi bulunur. Elde edilen bu sistemin çözülmesiyle $a_0, a_1, a_2 \dots, a_n$ ve $b_0, b_1, b_2 \dots, b_m$ katsayıları bulunur.

4.Adım: (3.1.5) ifadesindeki nonlinear Bernoulli denklemi çözülürse w ve d 'ye ait iki farklı durum bulunur:

$$F(\zeta) = \left[\frac{-d}{w} + \frac{E}{e^{w(M-1)\zeta}} \right]^{\frac{1}{1-M}}, \quad w \neq d, \quad (3.1.8)$$

$$F(\zeta) = \left[\frac{(E-1) + (E+1) \tanh\left(\frac{w(1-M)\zeta}{2}\right)}{1 - \tanh\left(\frac{w(1-M)\zeta}{2}\right)} \right]^{\frac{1}{1-M}}, \quad w = d, \quad E \in \mathbb{R}. \quad (3.1.9)$$

(3.1.4) denkleminde, $a_0, a_1, a_2 \dots, a_n$ ve $b_0, b_1, b_2 \dots, b_m$ katsayıları ve (3.1.8), (3.1.9) değerleri yerine yazılarak (3.1.1) denkleminde bazı yeni analitik çözümleri elde edilir.

Bu çalışmada sunulan metot ile analitik çözümlerin fiziksel yorumlarının daha anlaşılabilir olması için, parametrelerin uygun değerleri göz önüne alınarak bu çözümlerin 2 ve 3 boyutlu grafikleri Wolfram Mathematica 9 programı kullanılarak çizildi.

3.2. SİNE-GORDON AÇILIM METODU

Bu bölümde sine-Gordon açılım metodunun genel yapısı verilecektir.

Sine-Gordon denklemi [48,49]

$$u_{xx} - u_{tt} = m^2 \sin(u), \quad (3.2.1)$$

dir. Burada $u = u(x, t)$ ve m reel bir sabit sayıdır.

(3.2.1) ile verilen diferansiyel denkleme

$$u = u(x, t) = U(\xi), \quad \xi = \mu(x - ct) \quad (3.2.2)$$

dalga dönüşümü uygulandığında

$$U'' = \frac{m^2}{\mu^2(1-c^2)} \sin(U) \quad (3.2.3)$$

şeklinde bir nonlinear adi diferansiyel denklem elde edilir. Burada $U = U(\xi)$

$U'' = \frac{d^2 U}{d\xi^2}$, ξ hareketli dalganın genişliği ve c ise hareketli dalganın hızıdır.

(3.2.3) denklemi düzenlenirse

$$\left[\left(\frac{U}{2} \right)' \right]^2 = \frac{m^2}{\mu^2(1-c^2)} \sin^2 \left(\frac{U}{2} \right) + K \quad (3.2.4)$$

elde edilir. Burada K integral sabitidir. (3.2.4) denkleminde

$K = 0$, $\frac{U}{2} = w(\xi)$, ve $\frac{m^2}{\mu^2(1-c^2)} = a^2$ ifadeleri yerine yazılırsa

$$w' = a \sin(w) \quad (3.2.5)$$

denklemi elde edilir. Özel olarak $a = 1$ alınırsa

$$w' = \sin(w) \quad (3.2.6)$$

olur. (3.2.6) değişkenlerine ayrılabilir bir denklem olup bu denklemin çözümü,

$$\sin(w) = \sin(w(\xi)) = \frac{2pe^\xi}{p^2 e^{2\xi} + 1} \Big|_{p=1} = \operatorname{sech}(\xi) \quad (3.2.7)$$

$$\cos(w) = \cos(w(\xi)) = \frac{p^2 e^{2\xi} - 1}{p^2 e^{2\xi} + 1} \Big|_{p=1} = \tanh(\xi)$$

şeklinde elde edilir. Burada p integral sabitidir.

$$P(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{xxx}, \dots) = 0 \quad (3.2.8)$$

nonlinear diferansiyel denkleminin çözümünün

$$U(\xi) = \sum_{i=1}^n \tanh^{i-1}(\xi) [B_i \operatorname{sech}(\xi) + A_i \tanh(\xi)] + A_0 \quad (3.2.9)$$

şeklinde olduğunu kabul edelim. (3.2.7) , (3.2.9) denkleminde yerine yazılırsa

$$U(w) = \sum_{i=1}^n \cos^{i-1}(w) [B_i \sin(w) + A_i \cos(w)] + A_0 \quad (3.2.10)$$

elde edilir. En yüksek nonlinear terimin kuvveti ve en yüksek türevin mertebesi yardımıyla balans prensibine göre n değeri bulunur. Daha sonra $\sin^i(w) \cos^j(w)$ in katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi Wolfram Mathematica 9 programı kullanılarak çözüldüğünde A_i, B_i, μ ve c nin değerleri bulunur. Bulunan bu değerler (3.2.9) denkleminde yerine yazılırsa (3.2.8) denkleminin bir çözümü elde edilir.

4. METOTLARIN UYGULANMASI

Bu bölümde ilk olarak, lineer olmayan (3+1) boyutlu Kadomtsev-Petviashvili, (3+1) boyutlu Schrödinger ve Zakharov-Kuznetsov-Benjamin-Bona-Mahony denklemlerinin salınımlı çözümlerini elde etmek için IBSEFM ve SGEM kullanılmıştır. İkinci adımda ele alınan denklemler için bulunan salınımlı dalga çözümlerinin 2 ve 3 boyutlu grafikleri çizilmiştir.

4.1. (3+1) BOYUTLU KADOMTSEV-PETVİASHVİLİ DENKLEMİNE IBSEFM' NUN UYGULANMASI

Lineer olmayan (3+1) boyutlu Kadomtsev-Petviashvili denklemi olarak bilinen

$$u_{xt} + 6u_x^2 + 6uu_{xx} - u_{xxx} - u_{yy} - u_{zz} = 0, \quad (4.1.1)$$

diferansiyel denklemini göz önüne alalım [29].

(4.1.1) denklemine

$$u(x, t) = U(\eta) = U, \quad \eta = x + y + z - ct, \quad (4.1.2)$$

dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= U', \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -cU', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = U'', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = -cU'', \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = U^{(4)}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = U'', \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= U'' \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

denklemi elde edilir ve c bir reel sabittir. (4.1.3) eşitlikleri (4.1.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$-cU'' + 6(U')^2 + 6UU'' - U^{(4)} - U'' - U'' = 0 \quad (4.1.4)$$

lineer olmayan adi diferansiyel denklemi elde edilir. Bu diferansiyel denklemde gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$-(c+2)U'' + 6[UU']' - U^{(4)} = 0 \quad (4.1.5)$$

elde edilir. Bu (4.1.5) denkleminin iki defa integrali alınır ve integral sabitleri sıfır olarak kabul edilirse

$$-(c+2)U + 3U^2 - U'' = 0 \quad (4.1.6)$$

bulunur. Böylece (4.1.1) denklemi lineer olmayan bir adi diferansiyel denkleme dönüşür. (4.1.6) diferansiyel denkleminin çözümü IBSEFM metodu yapısı gereği

$$U = \frac{\sum_{i=0}^n a_i F^i}{\sum_{j=0}^m b_j F^j} = \frac{a_0 + a_1 F + a_2 F^2 + \dots + a_n F^n}{b_0 + b_1 F + b_2 F^2 + \dots + b_m F^m} \quad (4.1.7)$$

şeklinde ele alınır. Burada

$$F' = wF + dF^M, \quad w \neq 0, \quad d \neq 0, \quad M \in \mathbb{R} - \{0, 1, 2\}, \quad (4.1.8)$$

olarak tanımlanan Bernoulli diferansiyel denklemdir. (4.1.7) denkleminde

$$U \approx F^{n-m}, \quad (4.1.9)$$

$$U'' \approx F^{n-m-2+2M}, \quad (4.1.10)$$

yazılabilir. Balans prensibi gereğince, U^2 ve U'' terimleri dikkate alındığında;

$$n + 2 = m + 2M, \quad (4.1.11)$$

bulunur. $M = 3, m = 1$ ve $n = 5$ için,

$$U = \frac{a_0 + a_1 F + a_2 F^2 + a_3 F^3 + a_4 F^4 + a_5 F^5}{b_0 + b_1 F} = \frac{\Upsilon}{\Psi}, \quad (4.1.12)$$

$$U' = \frac{\Upsilon' \Psi - \Upsilon \Psi'}{\Psi^2}, \quad (4.1.13)$$

ve

$$U'' = \frac{\Upsilon'' \Psi - \Upsilon \Psi''}{\Psi^2} - \frac{[\Upsilon \Psi']' \Psi^2 - 2\Upsilon [\Psi']^2 \Psi}{\Psi^4}, \quad (4.1.14)$$

şeklinde elde edilir. Burada $a_5 \neq 0, b_1 \neq 0$ dır. (4.1.12) ve (4.1.14) denklemleri (4.1.6) da yerine yazılırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned}
& 3a_0^2b_0 + 6Fa_0a_1b_0 + 3F^2a_1^2b_0 + 6F^2a_0a_2b_0 + 6F^3a_1a_2b_0 + 3F^4a_2^2b_0 + 6F^3a_0a_3b_0 \\
& + 6F^4a_1a_3b_0 + 6F^5a_2a_3b_0 + 3F^6a_3^2b_0 + 6F^4a_0a_4b_0 - ca_0b_0^2 + 6F^5a_1a_4b_0 + 6F^6a_2a_4b_0 \\
& + 6F^7a_3a_4b_0 + 3F^8a_4^2b_0 + 6F^5a_0a_5b_0 + 6F^6a_1a_5b_0 + 6F^7a_2a_5b_0 + 6F^8a_3a_5b_0 + 6F^9a_4a_5b_0 \\
& + 3F^{10}a_5^2b_0 - 2a_0b_0^2 - 2Fa_1b_0^2 - cFa_1b_0^2 - 3d^2F^5a_1b_0^2 - 4dF^3wa_1b_0^2 - Fw^2a_1b_0^2 - 2F^2a_2b_0^2 \\
& - cF^2a_2b_0^2 - 8d^2F^6a_2b_0^2 - 12dF^4wa_2b_0^2 - 4F^2w^2a_2b_0^2 - 2F^3a_3b_0^2 - cF^3a_3b_0^2 + 3F^{11}a_5^2b_1 \\
& - 15d^22F^7a_3b_0^2 - 24dF^5wa_3b_0^2 - 9F^3w^2a_3b_0^2 - 2F^4a_4b_0^2 - cF^4a_4b_0^2 - 24d^2F^8a_4b_0^2 \\
& - 40dF^6wa_4b_0^2 - 16F^4w^2a_4b_0^2 - 2F^5a_5b_0^2 - cF^5a_5b_0^2 - 35d^2F^9a_5b_0^2 - 60dF^7wa_5b_0^2 \\
& - 25F^5w^2a_5b_0^2 + 3Fa_0^2b_1 + 6F^2a_0a_1b_1 + 3F^3a_1^2b_1 + 6F^3a_0a_2b_1 + 6F^4a_1a_2b_1 + 3F^5a_2^2b_1 \\
& + 6F^4a_0a_3b_1 + 6F^5a_1a_3b_1 + 6F^6a_2a_3b_1 + 3F^7a_3^2b_1 + 6F^5a_0a_4b_1 + 6F^6a_1a_4b_1 + 6F^7a_2a_4b_1 \\
& + 6F^8a_3a_4b_1 + 3F^9a_4^2b_1 + 6F^6a_0a_5b_1 + 6F^7a_1a_5b_1 + 6F^8a_2a_5b_1 + 6F^9a_3a_5b_1 + 6F^{10}a_4a_5b_1 \\
& - 4Fa_0b_0b_1 - 2cFa_0b_0b_1 + 3d^2F^5a_0b_0b_1 + 4dF^3wa_0b_0b_1 + Fw^2a_0b_0b_1 - 4F^2a_1b_0b_1 \\
& - d^2F^6a_1b_0b_1 + F^2w^2a_1b_0b_1 - 4F^3a_2b_0b_1 - 2cF^3a_2b_0b_1 - 9d^2F^7a_2b_0b_1 - 12dF^5wa_2b_0b_1 \\
& - 3F^3w^2a_2b_0b_1 - 4F^4w^2a_3b_0b_1 - 2cF^4a_3b_0b_1 - 21d^2F^8a_3b_0b_1 - 32dF^6wa_3b_0b_1 - 4F^5a_4b_0b_1 \\
& 11F^4w^2a_3b_0b_1 - 2cF^5a_4b_0b_1 - 37d^2F^9a_4b_0b_1 - 60dF^7wa_4b_0b_1 - 23F^5w^2a_4b_0b_1 - 4F^6a_5b_0b_1 \\
& - 2cF^6a_5b_0b_1 - 57d^2F^{10}a_5b_0b_1 - 96dF^8wa_5b_0b_1 - 39F^6w^2a_5b_0b_1 - 2F^2a_0b_1^2 - cF^2a_0b_1^2 \\
& + d^2F^6a_0b_1^2 - F^2w^2a_0b_1^2 - 2F^3a_1b_1^2 - cF^3a_1b_1^2 - 2F^4a_2b_1^2 - cF^4a_2b_1^2 - 3d^2F^8a_2b_1^2 \\
& - 4dF^6wa_2b_1^2 - F^4w^2a_2b_1^2 - 2F^5a_3b_1^2 - cF^5a_3b_1^2 - 8d^2F^9a_3b_1^2 - 12dF^7wa_3b_1^2 - 2cF^2a_1b_0b_1 \\
& - 4F^5w^2a_3b_1^2 - 2F^6a_4b_1^2 - cF^6a_4b_1^2 - 15d^2F^{10}a_4b_1^2 - 24dF^8wa_4b_1^2 - 9F^6w^2a_4b_1^2 \\
& - 2F^7a_5b_1^2 - cF^7a_5b_1^2 - 24d^2F^{11}a_5b_1^2 - 40dF^9wa_5b_1^2 - 16F^7w^2a_5b_1^2 = 0.
\end{aligned}$$

Elde edilen bu denklemde eşitliğin sağlanması açısından F nin aynı kuvvetten katsayıları sıfır olarak alınırsa

$$sabit : 3a_0^2b_0 - 2a_0b_0^2 - ca_0b_0^2 = 0,$$

$$F : 6a_0a_1b_1 - 2a_1b_0^2 - ca_1b_0^2 - w^2a_1b_0^2 + 3a_0^2b_1 - 4a_0b_0b_1 - 2ca_0b_0b_1 + w^2a_0b_0b_1 = 0,$$

$$F^2 : 3a_1^2b_0 + 6a_0a_2b_0 - 2a_2b_0^2 - ca_2b_0^2 - 4w^2a_2b_0^2 + 6a_0a_1b_1 - 4a_1b_0b_1 - 2ca_1b_0b_1 \\ + w^2a_1b_0b_1 - 2a_0b_1^2 - ca_0b_1^2 - w^2a_0b_1^2 = 0,$$

$$F^3 : 6a_1a_2b_0 + 6a_0a_3b_0 - 4dwa_1b_0^2 - 2a_3b_0^2 - ca_3b_0^2 - 9w^2a_3b_0^2 + 3a_1^2b_1 + 6a_0a_2b_1 \\ + 4dw6a_0b_0b_1 - 4a_2b_0b_1 - 2ca_2b_0b_1 - 3w^2a_2b_0b_1 - 2a_1b_1^2 - ca_1b_1^2 = 0,$$

$$F^4 : 3a_2^2b_0 + 6a_1a_3b_0 + 6a_0a_4b_0 - 12dwa_2b_0^2 - 2a_4b_0^2 - ca_4b_0^2 - 16w^2a_4b_0^2 + 6a_1a_2b_1 \\ + 6a_0a_3b_1 - 4a_3b_0b_1 - 2ca_3b_0b_1 - 11w^2a_3b_0b_1 - 2a_2b_1^2 - ca_2b_1^2 - w^2a_2b_1^2 = 0,$$

$$F^5 : 6a_2a_3b_0 + 6a_1a_4b_0 + 6a_0a_5b_0 - 3d^2a_1b_0^2 - 24dwa_3b_0^2 - 2a_5b_0^2 - ca_5b_0^2 - 25w^2a_5b_0^2 \\ + 3a_2^2b_1 + 6a_1a_3b_1 + 6a_0a_4b_1 + 3d^2a_0b_0b_1 - 12dwa_2b_0b_1 - 4a_4b_0b_1 - 2ca_4b_0b_1 \\ - 23w^2a_4b_0b_1 - 2a_3b_1^2 - ca_3b_1^2 - 4w^2a_3b_1^2 = 0,$$

$$F^6 : 3a_3^2b_0 + 6a_2a_4b_0 + 6a_1a_5b_0 - 8d^2a_2b_0^2 - 40dwa_4b_0^2 + 6a_2a_3b_1 + 6a_1a_4b_1 + 6a_0a_5b_1 \\ - d^2a_1b_0b_1 - 32dwa_3b_0b_1 - 4a_5b_0b_1 - 2ca_5b_0b_1 - 39w^2a_5b_0b_1 + d^2a_0b_1^2 - 4dwa_2b_1^2 \\ - 2a_4b_1^2 - ca_4b_1^2 - 9w^2a_4b_1^2 = 0,$$

$$F^7 : 6a_3a_4b_0 + 6a_2a_5b_0 - 15d^2a_3b_0^2 - 60dwa_5b_0^2 + 3a_3^2b_1 + 6a_2a_4b_1 + 6a_1a_5b_1 - 9d^2a_2b_0b_1 \\ - 60dwa_4b_0b_1 - 12dwa_3b_1^2 - 2a_5b_1^2 - ca_5b_1^2 - 16w^2a_5b_1^2 = 0,$$

$$F^8 : 3a_4^2b_0 + 6a_3a_5b_0 - 24d^2a_4b_0^2 + 6a_3a_4b_1 + 6a_2a_5b_1 - 21d^2a_3b_0b_1 - 96dwa_5b_0b_1 \\ - 3d^2a_2b_1^2 - 24dwa_4b_1^2 = 0,$$

$$F^9 : 6a_4a_5b_0 - 35d^2a_5b_0^2 + 3a_4^2b_1 + 6a_3a_5b_1 - 37d^2a_4b_0b_1 - 8d^2a_3b_1^2 - 40dwa_5b_1^2 = 0,$$

$$F^{10} : 3a_5^2b_0 + 6a_4a_5b_1 - 57d^2a_5b_0b_1 - 15d^2a_4b_1^2 = 0,$$

$$F^{11} : 3a_5^2b_1 - 24d^2a_5b_1^2 = 0,$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi Wolfram Mathematica 9 programı kullanılarak çözümlürse $c, w, d, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ ve b_0, b_1 katsayı değerleri bulunur.

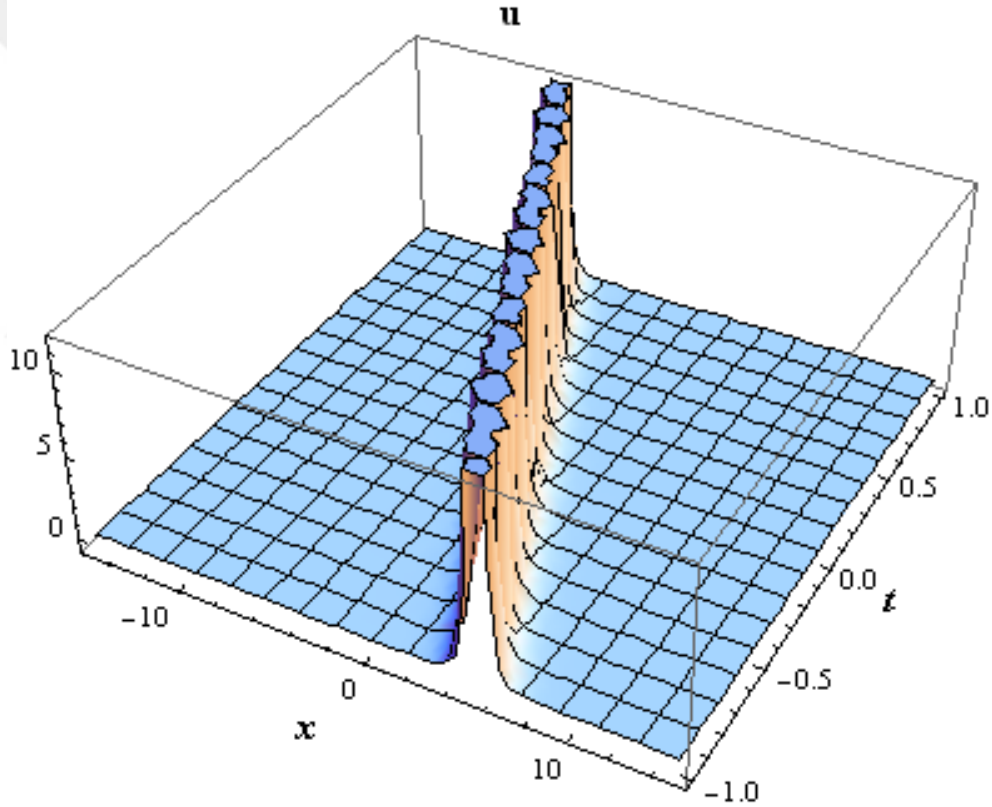
Durum 1. (3.1.8) eşitliği ve

$$a_2 = 8dwb_0, \quad a_3 = 8dwb_1, \quad a_4 = 8d^2b_0, \quad a_5 = 8d^2b_1, \quad c = -2 - w^2 \quad (4.1.15)$$

katsayıları (4.1.12) de yerine yazılırsa, (3+1)-boyutlu Kadomtsev-Petviashvili denkleminin üstel fonksiyon çözümü

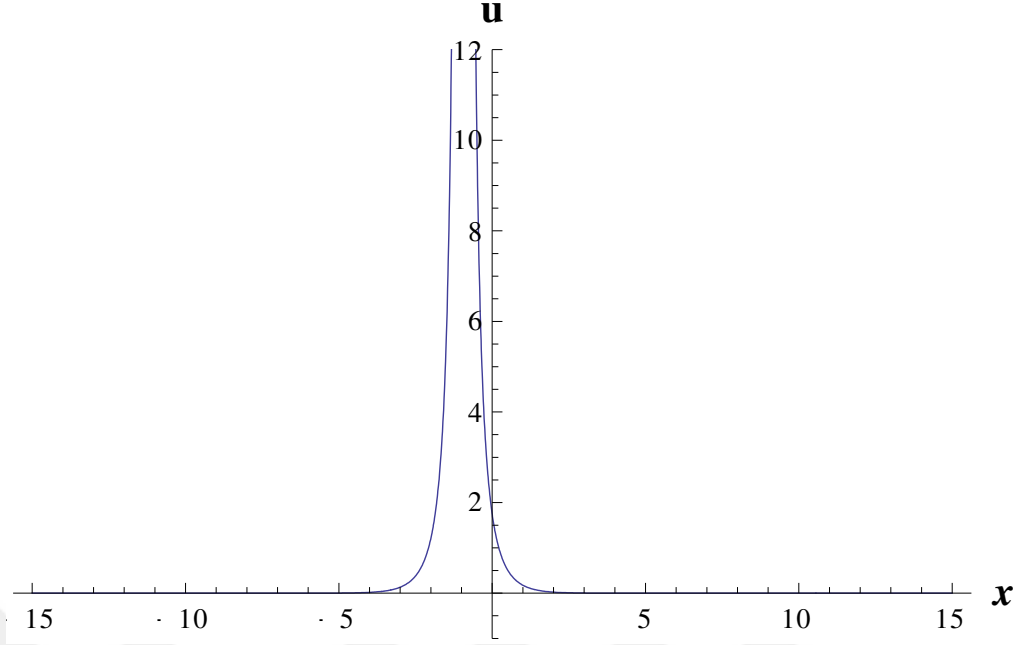
$$u_1(x, y, z, t) = \frac{8de^{2w(x+y+z+t(2+4w^2))}Ew^3}{\left(de^{2w(x+y+z+t(2+4w^2))} - Ew\right)^2}. \quad (4.1.16)$$

olarak elde edilir. Burada w, d, E sıfırdan farklı reel sabitlerdir. (3+1)-boyutlu Kadomtsev-Petviashvili denklemine IBSEFM ile elde edilen u_1 üstel fonksiyon çözümünün uygun parametre değerlerine karşılık gelen yüzey grafikleri Wolfram Mathematica 9 programı kullanılarak aşağıdaki şekilde literatüre sunulmuştur.



Şekil-1 (4.1.16) denkleminin 3 boyutlu yüzey grafiği

$w=1, d=0.2, y=0.01, z=0.8, E=0.3, -15 \leq x \leq 15, -1 \leq t \leq 1.$



Şekil-2 (4.1.16) denkleminin 2 boyutlu yüzey grafiği

$w=1, d=0.2, y=0.01, z=0.8, E=0.3, -15 \leq x \leq 15$ ve $t=0.054$

Durum 2. (3.1.8) eşitliği ve

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{4w^2b_0}{3}, a_1 = \frac{4w^2b_1}{3}, a_2 = 8dwb_0, a_3 = 8dwb_1, a_4 = 8d^2b_0 \\ a_5 &= 8d^2b_1, c = -2 + 4w^2. \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

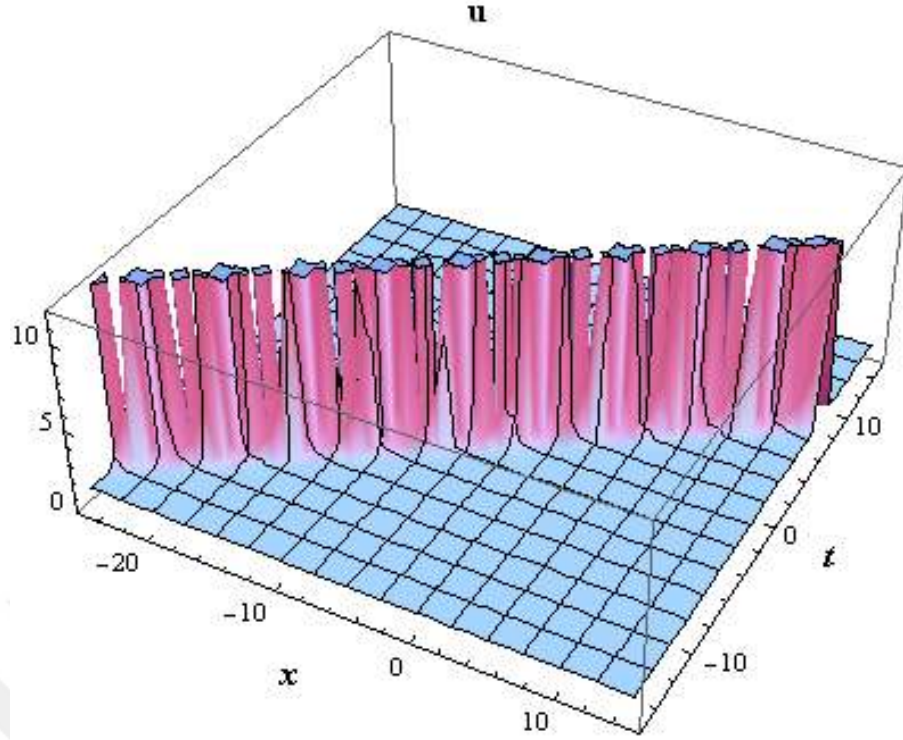
katsayıları (4.1.12)' de yerine yazılırsa (3+1) boyutlu Kadomtsev-Petviashvili denkleminin üstel fonksiyon çözümü,

$$\begin{aligned} u_2(x, y, z, t) &= \left(\frac{8d^2b_0}{f(x, y, z, t)^2} + \frac{8dwb_0}{f(x, y, z, t)} + \frac{4w^2b_0}{3} + \frac{8d^2b_1}{f(x, y, z, t)^{5/2}} \right) \left(b_0 + \frac{b_1}{\sqrt{e^{g(x, y, z, t)} E - \frac{d}{w}}} \right)^{-1} \\ &+ \left(\frac{8dwb_1}{f(x, y, z, t)^{3/2}} + \frac{4w^2b_1}{3\sqrt{f(x, y, z, t)}} \right) \left(b_0 + \frac{b_1}{\sqrt{e^{g(x, y, z, t)} E - \frac{d}{w}}} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

olarak elde edilir. Burada $g(x, y, z, t) = -2w(x + y + z - t(-2 + 4w^2))$ ve

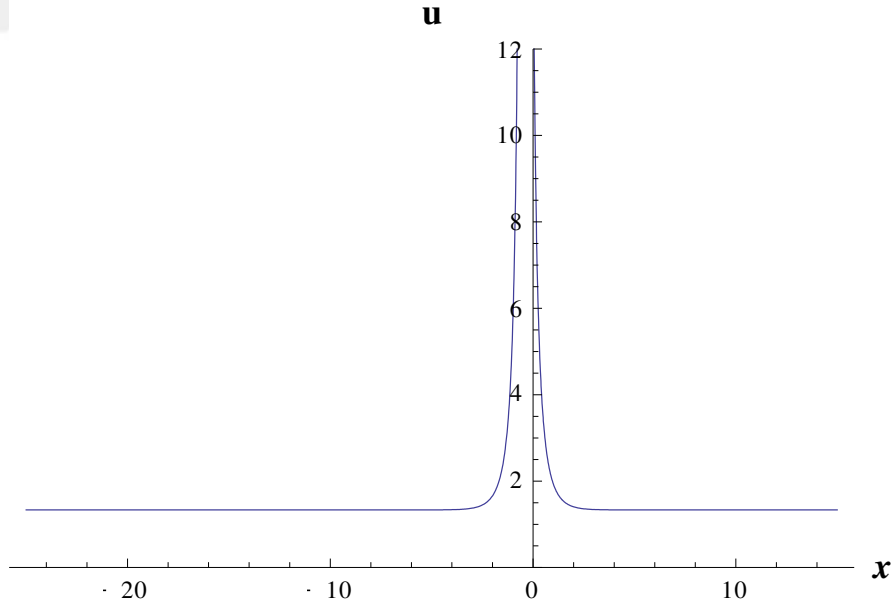
$f(x, y, z, t) = Ee^{g(x, y, z, t)} - \frac{d}{w}$ olup w, d, E sıfırdan farklı reel sabitlerdir. (3+1)-boyutlu

Kadomtsev-Petviashvili denkleminin IBSEFM ile elde edilen u_2 üstel fonksiyon çözümünün uygun parametre değerlerine karşılık gelen yüzey grafikleri Wolfram Mathematica 9 programı kullanılarak aşağıdaki şekilde literatüre sunulmuştur.



Şekil-3 (4.1.18) denkleminin 3 boyutlu yüzey grafiği

$w=1, d=0.6, b_0=0.2, b_1=0.5, E=0.3, y=0.01, z=0.02, -25 \leq x \leq 15, -15 \leq t \leq 15$



Şekil-4 (4.1.18) denkleminin 2 boyutlu yüzey grafiği

$w=1, d=0.6, b_0=0.2, b_1=0.5, E=0.3, y=0.01, z=0.02, -25 \leq x \leq 15, t=0.007$

4.2. (3+1) BOYUTLU SCHRÖDİNGER DENKLEMİNE IBSEFM' NİN UYGULANMASI

Lineer olmayan 3 boyutlu Schrödinger denklemi olarak bilinen

$$iu_t + u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \gamma |u|^2 u = 0, \quad (4.2.1)$$

diferansiyel denklemi göz önüne alalım [31].

(4.2.1) denklemine

$$u(x, y, z, t) = e^{i\Omega} \Psi(\eta), \quad \eta = x + y + z + vt, \quad \Omega = ax + by + cz + rt \quad (4.2.2)$$

dönüşümü kullanılır ve (4.2.1) denklemindeki türevler hesaplandıktan sonra

$v = -2(a + b + c)$ yazılırsa

$$3\Psi'' + \gamma \Psi^3 - (a^2 + b^2 + c^2 + r)\Psi = 0 \quad (4.2.3)$$

lineer olmayan adi diferansiyel denklem elde edilir. (4.2.3) diferansiyel denkleminin IBSEFM yapısı gereği çözümü

$$\Psi = \frac{\sum_{i=0}^n a_i F^i}{\sum_{j=0}^m b_j F^j} = \frac{a_0 + a_1 F + a_2 F^2 + \dots + a_n F^n}{b_0 + b_1 F + b_2 F^2 + \dots + b_m F^m}, \quad (4.2.4)$$

şeklinde ele alınır. Burada

$$F' = wF + dF^M, \quad w \neq 0, \quad d \neq 0, \quad M \in \mathbb{R} - \{0, 1, 2\}, \quad (4.2.5)$$

olarak tanınlanan Bernoulli diferansiyel denklemdir. (4.2.4) denkleminde

$$\Psi \approx F^{n-m}, \quad (4.2.6)$$

$$\Psi'' \approx F^{n-m-2+2M}, \quad (4.2.7)$$

yazılabilir. Balans prensibi gereğince, Ψ^3 ve Ψ'' terimleri dikkate alındığında;

$$n+1 = m+M, \quad (4.2.8)$$

bulunur. $M = 3, m = 1$ ve $n = 3$ için,

$$\Psi = \frac{a_0 + a_1 F + a_2 F^2 + a_3 F^3}{b_0 + b_1 F} = \frac{\Upsilon}{\psi} \quad (4.2.9)$$

$$\Psi' = \frac{\Upsilon' \psi - \Upsilon \psi'}{\psi^2} \quad (4.2.10)$$

ve

$$\Psi'' = \frac{\Upsilon'' \psi - \Upsilon \psi''}{\psi^2} - \frac{[\Upsilon \psi']' \psi^2 - 2\Upsilon [\psi']^2 \psi}{\psi^4}, \quad (4.2.11)$$

şeklinde elde edilir. Burada $a_3 \neq 0$, $b_1 \neq 0$ dır. (4.2.9) ve (4.2.11) denklemleri (4.2.3)

de yerine yazılırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \gamma a_0^3 + 3F\gamma a_0^2 a_1 + 3F^2\gamma a_0 a_1^2 + F^3\gamma a_1^3 + 3F^2\gamma a_0^2 a_2 + 6F^3 a_0 a_1 a_2 + 3F^4\gamma a_1^2 a_2 \\
& + 3F^4\gamma a_2^2 a_0 + 3F^5\gamma a_2^2 a_1 + F^6\gamma a_2^3 + 3F^3\gamma a_0^2 a_3 + 6F^4\gamma a_0 a_1 a_3 + 3F^5\gamma a_3 a_1^2 \\
& + 6F^5\gamma a_0 a_2 a_3 + 6F^6\gamma a_1 a_2 a_3 + 3F^7\gamma a_3 a_2^2 + 3F^6\gamma a_0 a_3^2 + 3F^7\gamma a_1 a_3^2 + 3F^8\gamma a_2 a_3^2 \\
& + F^9\gamma a_3^3 - a^2 a_0 b_0^2 - b^2 a_0 b_0^2 - c^2 a_0 b_0^2 - r a_0 b_0^2 - a^2 F a_1 b_0^2 - b^2 F a_1 b_0^2 - c^2 F a_1 b_0^2 \\
& + 9d^2 F^5 a_1 b_0^2 - F r a_1 b_0^2 + 12dF^3 w a_1 b_0^2 + 3F w^2 a_1 b_0^2 - a^2 F^2 a_2 b_0^2 - b^2 F^2 a_2 b_0^2 \\
& - c^2 F^2 a_2 b_0^2 + 24d^2 F^6 a_2 b_0^2 - F^2 r a_2 b_0^2 + 36dF^4 w a_2 b_0^2 + 12F^2 w^2 a_2 b_0^2 - a^2 F^3 a_3 b_0^2 \\
& - b^2 F^3 a_3 b_0^2 - c^2 F^3 a_3 b_0^2 + 45d^2 a^2 F^7 a_3 b_0^2 - F^3 r a_3 b_0^2 + 72dF^5 w a_3 b_0^2 + 27F^3 w^2 a_3 b_0^2 \\
& - 2a^2 F a_0 b_0 b_1 - 2b^2 F a_0 b_0 b_1 - 2c^2 F a_0 b_0 b_1 - 9d^2 F^5 a_0 b_0 b_1 - 2F r a_0 b_0 b_1 - 12dF^3 w a_0 b_0 b_1 \\
& - 3F w^2 a_0 b_0 b_1 - 2a^2 F^2 a_1 b_0 b_1 - 2b^2 F^2 a_1 b_0 b_1 - 2c^2 F^2 a_1 b_0 b_1 + 3d^2 F^6 a_1 b_0 b_1 - 2F^2 r a_1 b_0 b_1 \\
& - 3F^2 w^2 a_1 b_0 b_1 - 2a^2 F^3 a_2 b_0 b_1 - 2b^2 F^3 a_2 b_0 b_1 - 2c^2 F^3 a_2 b_0 b_1 + 27d^2 2a^2 F^7 a_2 b_0 b_1 \\
& - 2F^3 r a_2 b_0 b_1 + 36dF^5 w a_2 b_0 b_1 + 9F^3 w^2 a_2 b_0 b_1 - 2a^2 F^4 a_3 b_0 b_1 - 2b^2 F^4 a_3 b_0 b_1 \\
& - 2c^2 F^4 a_3 b_0 b_1 + 63d^2 F^8 a_3 b_0 b_1 - 2F^4 r a_3 b_0 b_1 + 96dF^6 w a_3 b_0 b_1 + 33F^4 w^2 a_3 b_0 b_1 - a^2 F^2 a_0 b_1^2 \\
& - b^2 F^2 a_0 b_1^2 - c^2 F^2 a_0 b_1^2 - 3d^2 F^6 a_0 b_1^2 - F^2 r a_0 b_1^2 + 3F^2 w^2 a_0 b_1^2 - a^2 F^3 a_1 b_1^2 - b^2 F^3 a_1 b_1^2 \\
& - c^2 F^3 a_1 b_1^2 - F^3 r a_1 b_1^2 - a^2 F^4 a_2 b_1^2 - b^2 F^4 a_2 b_1^2 - c^2 F^4 a_2 b_1^2 + 9d^2 F^8 a_2 b_1^2 - F^4 r a_2 b_1^2 \\
& + 12dF^6 w a_2 b_1^2 + 3F^4 w^2 a_2 b_1^2 - a^2 F^5 a_3 b_1^2 - b^2 F^5 a_3 b_1^2 - c^2 F^5 a_3 b_1^2 + 24d^2 F^9 a_3 b_1^2 - F^5 r a_3 b_1^2 \\
& + 36dF^7 w a_3 b_1^2 + 12F^5 w^2 a_3 b_1^2 = 0.
\end{aligned}$$

Elde edilen bu denklemde eşitliğin sağlanması açısından F nin aynı kuvvetten katsayıları sıfır olarak alınır

$$sabit : \gamma a_0^3 - a^2 a_0 b_0^2 - b^2 a_0 b_0^2 - c^2 a_0 b_0^2 - r a_0 b_0^2 = 0$$

$$\begin{aligned}
F : 3\gamma a_0^2 a_1 - a^2 a_1 b_0^2 - b^2 a_1 b_0^2 - c^2 a_1 b_0^2 - r a_1 b_0^2 + 3w^2 a_1 b_0^2 - 2a^2 a_0 b_0 b_1 - \\
2b^2 a_0 b_0 b_1 - 2c^2 a_0 b_0 b_1 - 2r a_0 b_0 b_1 - 3w^2 a_0 b_0 b_1 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F^2 : 3\gamma a_1^2 a_0 + 3\gamma a_0^2 a_2 - a^2 a_2 b_0^2 - b^2 a_2 b_0^2 - c^2 a_2 b_0^2 - r a_2 b_0^2 + 12w^2 a_2 b_0^2 - \\
2a^2 a_1 b_0 b_1 - 2b^2 a_1 b_0 b_1 - 2c^2 a_1 b_0 b_1 - 2r a_1 b_0 b_1 - 3w^2 a_1 b_0 b_1 - a^2 a_0 b_1^2 - \\
b^2 a_0 b_1^2 - c^2 a_0 b_1^2 - r a_0 b_1^2 + 3w^2 a_0 b_1^2 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F^3 : \gamma a_1^2 + 6\gamma a_0 a_1 a_2 + 3\gamma a_0^2 a_3 + 12d w a_1 b_0^2 - a^2 a_3 b_0^2 - b^2 a_3 b_0^2 - c^2 a_3 b_0^2 - \\
r a_3 b_0^2 + 27w^2 a_3 b_0^2 - 12d w a_0 b_0 b_1 - 2a^2 a_2 b_0 b_1 - 2b^2 a_2 b_0 b_1 - 2c^2 a_2 b_0 b_1 - \\
2r a_2 b_0 b_1 + 9w^2 a_2 b_0 b_1 - a^2 a_1 b_1^2 - b^2 a_1 b_1^2 - c^2 a_1 b_1^2 - r a_1 b_1^2 = 0
\end{aligned}$$

$$F^4 : 3\gamma a_1^2 a_2 + 3\gamma a_2^2 a_0 + 6\gamma a_0 a_1 a_3 + 36dwa_2 b_0^2 - 2a^2 a_3 b_0 b_1 - 2b^2 a_3 b_0 b_1 - 2c^2 a_3 b_0 b_1 - 2ra_3 b_0 b_1 + 33w^2 a_3 b_0 b_1 - a^2 a_2 b_1^2 - b^2 a_2 b_1^2 - c^2 a_2 b_1^2 - ra_2 b_1^2 - 3w^2 a_2 b_1^2 = 0$$

$$F^5 : 3\gamma a_2^2 a_1 + 3\gamma a_1^2 a_3 + 6\gamma a_0 a_2 a_3 + 9d^2 a_1 b_0^2 + 72dwa_3 b_0^2 - 9d^2 a_0 b_0 b_1 + 36dwa_2 b_0 b_1 - a^2 a_3 b_1^2 - b^2 a_3 b_1^2 - c^2 a_3 b_1^2 - ra_3 b_1^2 + 12w^2 a_3 b_1^2 = 0$$

$$F^6 : \gamma a_2^3 + 6\gamma a_1 a_2 a_3 + 3\gamma a_3^2 a_0 + 24d^2 a_2 b_0^2 + 3d^2 a_1 b_0 b_1 + 96dwa_3 b_0 b_1 - 3d^2 a_0 b_1^2 + 12dwa_2 b_1^2 = 0$$

$$F^7 : 3\gamma a_2^2 a_3 + 3\gamma a_3^2 a_1 + 45d^2 a_3 b_0^2 + 27d^2 a_2 b_0 b_1 + 36dwa_3 b_1^2 = 0$$

$$F^8 : 3\gamma a_3^2 a_2 + 63d^2 a_3 b_0 b_1 + 9d^2 a_2 b_1^2 = 0$$

$$F^9 : \gamma a_3^3 + 24d^2 a_3 b_1^2 = 0$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi Wolfram Mathematica 9 programı kullanılarak çözümlenerek $c, w, d, r, a_0, a_1, a_2, a_3$ ve b_0, b_1 katsayı değerleri bulunur.

Durum 1. (3.1.8) eşitliği ve

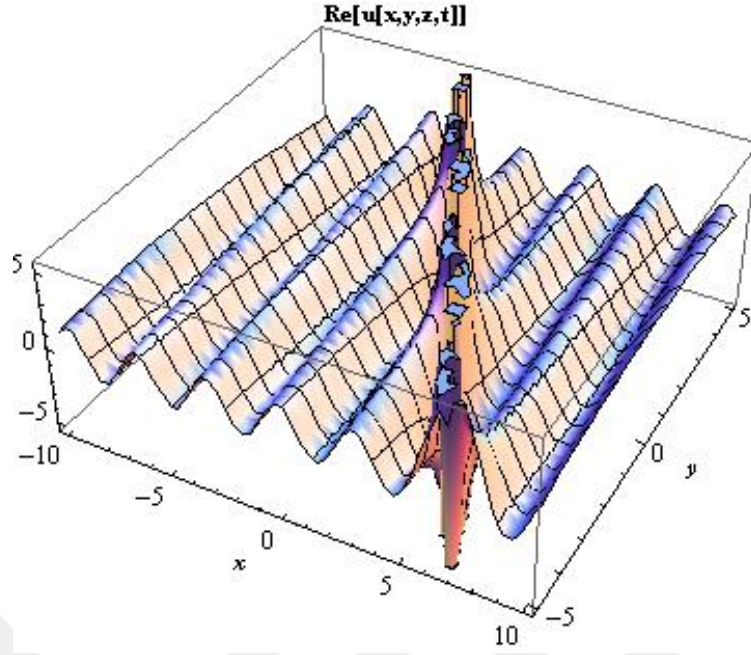
$$a_0 = \frac{-\sqrt{6}wb_0}{\sqrt{\gamma}}i, a_1 = \frac{-\sqrt{6}wb_1}{\sqrt{\gamma}}i, a_2 = \frac{-2\sqrt{6}db_0}{\sqrt{\gamma}}i, a_3 = \frac{-2\sqrt{6}db_1}{\sqrt{\gamma}}i \quad (4.2.12)$$

$$r = -(a^2 + b^2 + c^2 + 6w^2)$$

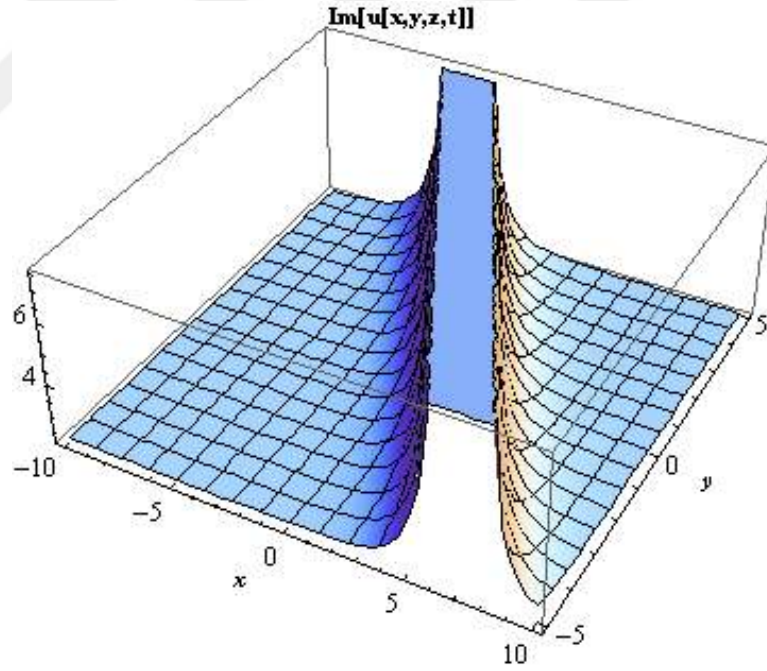
katsayıları (4.2.9) da yerine yazılırsa, (3+1)-boyutlu Schrödinger denkleminin üstel fonksiyon çözümü

$$u(x, y, z, t) = iw \sqrt{\frac{6}{\gamma}} \left(1 + \frac{2Ew}{de^{2w(x+y+z-2(a+b+c)t)} - Ew} \right) e^{i(ax+by+cz-(a^2+b^2+c^2+6w^2)t)} \quad (4.2.13)$$

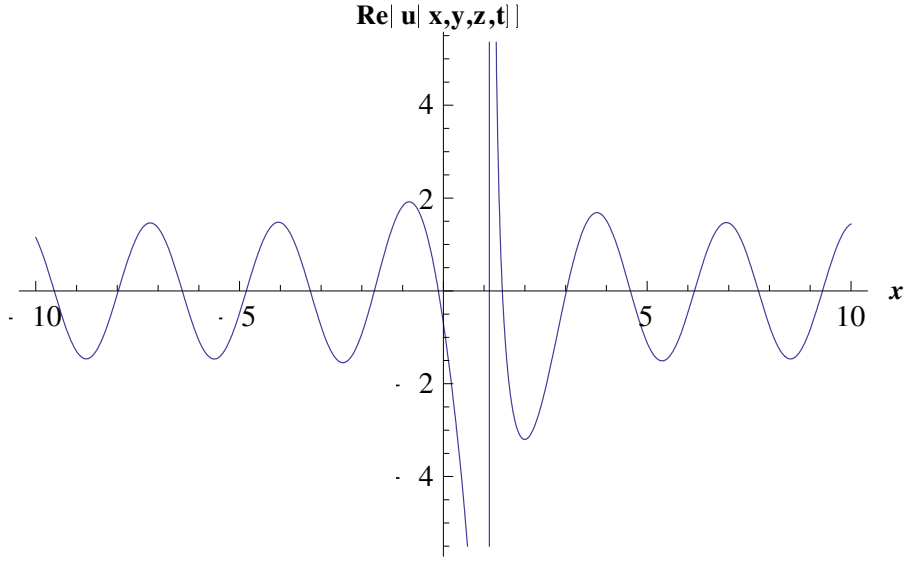
olarak elde edilir. Burada w, d, E sıfırdan farklı reel sabitlerdir. (3+1)-boyutlu boyutlu Schrödinger denkleminin IBSEFM ile elde edilen u üstel fonksiyon çözümünün uygun parametre değerlerine karşılık gelen yüzey grafikleri Wolfram Mathematica 9 programı kullanılarak aşağıdaki şekilde literatüre sunulmuştur.



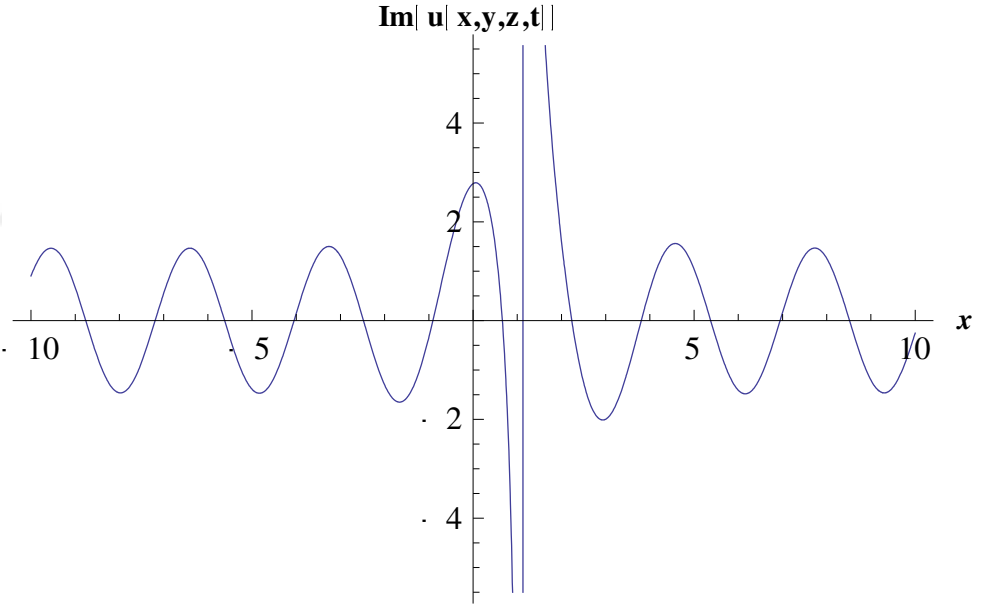
Şekil-5 (4.2.13) denkleminin reel kısmının 3 boyutlu yüzey grafikleri
 $w=0.5, a=2, b=0.25, c=0.35, d=0.2, E=0.3, y=0.8, z=0.9, -10 \leq x \leq 10, -5 \leq t \leq 5$



Şekil-6 (4.2.13) denkleminin sanal kısmının 3 boyutlu yüzey grafikleri
 $w=0.5, a=2, b=0.25, c=0.35, d=0.2, E=0.3, y=0.8, z=0.9, -10 \leq x \leq 10, -5 \leq t \leq 5$



Şekil-7 (4.2.13) denkleminin reel kısmının 2 boyutlu yüzey grafikleri
 $w=0.5, a=2, b=0.25, c=0.35, d=0.2, E=0.3, y=0.8, z=0.9, -10 \leq x \leq 10, t=0.6$



Şekil-8 (4.2.13) denkleminin sanal kısmının 2 boyutlu yüzey grafikleri
 $w=0.5, a=2, b=0.25, c=0.35, d=0.2, E=0.3, y=0.8, z=0.9, -10 \leq x \leq 10, t=0.6$

4.3.ZAKHAROV-KUZNETSOV-BENJAMIN-BONA-MAHONY DENKLEMİNE IBSEFM'NUN UYGULANMASI

Lineer olmayan Zakharov-Kuznetsov-Benjamin-Bona-Mahony denklemi olarak bilinen

$$u_t + u_x - 2\alpha uu_x - \beta u_{xxt} = 0 \quad (4.3.1)$$

diferansiyel denklemini göz önüne alalım [33].

(4.3.1) denklemine

$$u(x, y, z, t) = U(\eta), \quad \eta = x - vt \quad (4.3.2)$$

dönüşümü uygulanır ve bu dönüşüm yardımı ile (4.3.1) denklemindeki türevler yerine yazılırsa

$$(1-v)U - \alpha U^2 + \beta v U'' = 0 \quad (4.3.3)$$

lineer olmayan adi diferansiyel denklemi elde edilir. (4.3.3) diferansiyel denkleminin çözümü IBSEFM metodu yapısı gereği

$$U = \frac{\sum_{i=0}^n a_i F^i}{\sum_{j=0}^m b_j F^j} = \frac{a_0 + a_1 F + a_2 F^2 + \dots + a_n F^n}{b_0 + b_1 F + b_2 F^2 + \dots + b_m F^m}, \quad (4.3.4)$$

şekilde ele alınır. Burada

$$F' = wF + dF^M, \quad w \neq 0, \quad d \neq 0, \quad M \in \mathbb{R} - \{0, 1, 2\},$$

olarak tanımlanan Bernoulli diferansiyel denklemdir. (4.3.4) denkleminde

$$U \approx F^{n-m},$$

$$U'' \approx F^{n-m-2+2M},$$

yazılabilir. Balans prensibi gereğince U^2 ve U'' terimleri dikkate alındığında;

$$n+2 = m+2M \quad (4.3.5)$$

bulunur. $M = 3, m = 1$ ve $n = 5$ için,

$$U = \frac{a_0 + a_1 F + a_2 F^2 + a_3 F^3 + a_4 F^4 + a_5 F^5}{b_0 + b_1 F} = \frac{\Upsilon}{\psi}, \quad (4.3.6)$$

$$U' = \frac{\Upsilon' \psi - \Upsilon \psi'}{\psi^2}, \quad (4.3.7)$$

ve

$$U'' = \frac{\Upsilon'' \psi - \Upsilon \psi''}{\psi^2} - \frac{[\Upsilon \psi']' \psi^2 - 2\Upsilon [\psi']^2 \psi}{\psi^4}, \quad (4.3.8)$$

şeklinde elde edilir. Burada $a_5 \neq 0$, $b_1 \neq 0$ dir.(4.3.6) ve (4.3.8) denklemleri (4.3.3)

de yerine yazılırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned}
& -\alpha a_0^2 b_0 - 2F\alpha a_0 a_1 b_0 - F^2 \alpha a_1^2 b_0 - 2F^2 \alpha a_0 a_2 b_0 - 2F^3 \alpha a_1 a_2 b_0 - F^4 \alpha a_2^2 b_0 \\
& - 2F^3 \alpha a_0 a_3 b_0 - 2F^4 \alpha a_1 a_3 b_0 - 2F^5 \alpha a_2 a_3 b_0 - F^6 \alpha a_3^2 b_0 - 2F^4 \alpha a_0 a_4 b_0 \\
& - 2F^5 \alpha a_1 a_4 b_0 - 2F^6 \alpha a_2 a_4 b_0 - 2F^7 \alpha a_3 a_4 b_0 - F^8 \alpha a_4^2 b_0 - 2F^5 \alpha a_0 a_5 b_0 \\
& - 2F^6 \alpha a_1 a_5 b_0 - 2F^7 \alpha a_2 a_5 b_0 - 2F^8 \alpha a_3 a_5 b_0 - 2F^9 \alpha a_4 a_5 b_0 - F^{10} \alpha a_5^2 b_0 + a_0 b_0^2 \\
& - v a_0 b_0^2 + F a_1 b_0^2 - F v a_1 b_0^2 + 3d^2 F^5 v \beta a_1 b_0^2 + 3dF^3 v \beta w a_1 b_0^2 + F v \beta w^2 a_1 b_0^2 \\
& + F^2 a_2 b_0^2 - F^2 v a_2 b_0^2 + 8d^2 F^6 v \beta a_2 b_0^2 + 12dF^4 v \beta w a_2 b_0^2 + 4F^2 v \beta w^2 a_2 b_0^2 \\
& + F^3 a_3 b_0^2 - F^3 v a_3 b_0^2 + 15d^2 F^7 v \beta a_3 b_0^2 + 24dF^5 v \beta w a_3 b_0^2 + 9F^3 v \beta w^2 a_3 b_0^2 \\
& + F^4 a_4 b_0^2 - F^4 v a_4 b_0^2 - 24d^2 F^8 v \beta a_4 b_0^2 + 40dF^6 v \beta w a_4 b_0^2 + 16F^4 v \beta w^2 a_4 b_0^2 \\
& + F^5 a_5 b_0^2 - F^5 v a_5 b_0^2 + 35d^2 F^9 v \beta a_5 b_0^2 + 60dF^7 v \beta w a_5 b_0^2 + 25F^5 v \beta w^2 a_5 b_0^2 \\
& - F\alpha a_0^2 b_1 - 2F^2 \alpha a_0 a_1 b_1 - F^3 \alpha a_1^2 b_1 - 2F^3 \alpha a_0 a_2 b_1 - 2F^4 \alpha a_1 a_2 b_1 - F^5 \alpha a_2^2 b_1 \\
& - 2F^4 \alpha a_0 a_3 b_1 - 2F^5 \alpha a_1 a_3 b_1 - 2F^6 \alpha a_2 a_3 b_1 - F^7 \alpha a_3^2 b_1 - 2F^5 \alpha a_0 a_4 b_1 - 2F^6 \alpha a_1 a_4 b_1 \\
& - 2F^7 \alpha a_2 a_4 b_1 - 2F^8 \alpha a_3 a_4 b_1 - F^9 \alpha a_4^2 b_1 - 2F^6 \alpha a_0 a_5 b_1 - 2F^7 \alpha a_1 a_5 b_1 - 2F^8 \alpha a_2 a_5 b_1 \\
& - 2F^9 \alpha a_3 a_5 b_1 - 2F^{10} \alpha a_4 a_5 b_1 - F^{11} \alpha a_5^2 b_1 + 2F a_0 b_0 b_1 - 2F v a_0 b_0 b_1 - 3d^2 F^5 v \beta a_0 b_0 b_1 \\
& - 4dF^3 v \beta w a_0 b_0 b_1 - F v \beta w^2 a_0 b_0 b_1 + 2F^2 a_1 b_0 b_1 - 2F^2 v a_1 b_0 b_1 + d^2 F^6 v \beta a_1 b_0 b_1 \\
& - F^2 v \beta w^2 a_1 b_0 b_1 + 2F^3 a_2 b_0 b_1 - 2F^3 v a_2 b_0 b_1 + 9d^2 F^7 v \beta a_2 b_0 b_1 + 12dF^5 v \beta w a_2 b_0 b_1 \\
& + 3F^3 v \beta w^2 a_2 b_0 b_1 + 2F^4 a_3 b_0 b_1 - 2F^4 v a_3 b_0 b_1 + 21d^2 F^8 v \beta a_3 b_0 b_1 + 32dF^6 v \beta w a_3 b_0 b_1 \\
& + 11F^4 v \beta w^2 a_3 b_0 b_1 + 2F^5 a_4 b_0 b_1 - 2F^5 v a_4 b_0 b_1 + 37d^2 F^9 v \beta a_4 b_0 b_1 + 60dF^7 v \beta w a_4 b_0 b_1 \\
& + 23F^5 v \beta w^2 a_4 b_0 b_1 + 2F^6 a_5 b_0 b_1 - 2F^6 v a_5 b_0 b_1 + 57d^2 F^{10} v \beta a_5 b_0 b_1 + 96dF^8 v \beta w a_5 b_0 b_1 \\
& + 39F^6 v \beta w^2 a_5 b_0 b_1 + F^2 a_0 b_1^2 - F^2 v a_0 b_1^2 - d^2 F^6 v \beta a_0 b_1^2 + F^2 v \beta w^2 a_0 b_1^2 + F^3 a_1 b_1^2 \\
& - F^3 v a_1 b_1^2 + F^4 a_2 b_1^2 - F^4 v a_2 b_1^2 + 3d^2 F^8 v \beta a_2 b_1^2 + 4dF^6 v \beta w a_2 b_1^2 + F^4 v \beta w^2 a_2 b_1^2 \\
& + F^5 a_3 b_1^2 - F^5 v a_3 b_1^2 + 8d^2 F^9 v \beta a_3 b_1^2 + 12dF^7 v \beta w a_3 b_1^2 + 4F^5 v \beta w^2 a_3 b_1^2 + F^6 a_4 b_1^2 \\
& - F^6 v a_4 b_1^2 + 15d^2 F^{10} v \beta a_4 b_1^2 + 24dF^8 v \beta w a_4 b_1^2 + 9F^6 v \beta w^2 a_4 b_1^2 + F^7 a_5 b_1^2 \\
& - F^7 v a_5 b_1^2 + 24d^2 F^{11} v \beta a_5 b_1^2 + 40dF^9 v \beta w a_5 b_1^2 + 16F^7 v \beta w^2 a_5 b_1^2 = 0.
\end{aligned}$$

Elde edilen bu denklemde eşitliğin sağlanması açısından F nin aynı kuvvetten katsayıları sıfır olarak alınır

$$sabit : -\alpha a_0^2 b_0 + a_0 b_0^2 - v a_0 b_0^2 = 0,$$

$$\begin{aligned}
F : & -2\alpha a_0 a_1 b_0 + a_1 b_0^2 - v a_1 b_0^2 + v \beta w^2 a_1 b_0^2 - \alpha a_0^2 b_0 + 2a_0 b_0 b_1 - 2v a_0 b_0 b_1 \\
& - v \beta w^2 a_0 b_0 b_1 = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F^2 : & -\alpha a_1^2 b_0 - 2\alpha a_0 a_2 b_0 + a_2 b_0^2 - v a_2 b_0^2 + 4v \beta w^2 a_2 b_0^2 - 2\alpha a_0 a_1 b_1 + 2a_1 b_0 b_1 \\
& - 2v a_1 b_0 b_1 - v \beta w^2 a_1 b_0 b_1 + a_0 b_1^2 - v a_0 b_1^2 + v \beta w^2 a_0 b_1^2 = 0,
\end{aligned}$$

$$F^3 : -2\alpha a_1 a_2 b_0 - 2\alpha a_0 a_3 b_0 + 4dv\beta w a_1 b_0^2 + a_3 b_0^2 - v a_3 b_0^2 + 9v\beta w^2 a_3 b_0^2 - \alpha a_1^2 b_1 \\ - 2\alpha a_0 a_2 b_1 - 4dv\beta w a_0 b_0 b_1 + 2a_2 b_0 b_1 - 2v a_2 b_0 b_1 + 3v\beta w^2 a_2 b_0 b_1 + a_1 b_1^2 \\ - v a_1 b_1^2 = 0,$$

$$F^4 : -\alpha a_2^2 b_0 - 2\alpha a_1 a_3 b_0 - 2\alpha a_0 a_4 b_0 + 12dv\beta w a_2 b_0^2 + a_4 b_0^2 - v a_4 b_0^2 + 16v\beta w^2 a_4 b_0^2 \\ - 2\alpha a_1 a_2 b_1 - 2\alpha a_0 a_3 b_1 + 2a_3 b_0 b_1 - 2v a_3 b_0 b_1 + 11v\beta w^2 a_3 b_0 b_1 + a_2 b_1^2 - v a_2 b_1^2 \\ + v\beta w^2 a_2 b_1^2 = 0,$$

$$F^5 : -2\alpha a_2 a_3 b_0 - 2\alpha a_1 a_4 b_0 - 2\alpha a_0 a_5 b_0 + 3d^2 v\beta a_1 b_0^2 + 24dv\beta w a_3 b_0^2 + a_5 b_0^2 - v a_5 b_0^2 \\ + 25v\beta w^2 a_5 b_0^2 - \alpha a_2^2 b_1 - 2\alpha a_1 a_3 b_1 - 2\alpha a_0 a_4 b_1 - 3d^2 v a_0 b_0 b_1 + 12dv\beta w a_2 b_0 b_1 \\ + 2a_4 b_0 b_1 - 2v a_4 b_0 b_1 + 23v\beta w^2 a_4 b_0 b_1 + a_3 b_1^2 - v a_3 b_1^2 + 4v\beta w^2 a_3 b_1^2 = 0,$$

$$F^6 : -\alpha a_3^2 b_0 - 2\alpha a_2 a_4 b_0 - 2\alpha a_1 a_5 b_0 + 8d^2 v\beta a_2 b_0^2 + 40dv\beta w a_4 b_0^2 - 2\alpha a_2 a_3 b_1 \\ - 2\alpha a_0 a_5 b_1 + d^2 v\beta a_1 b_0 b_1 + 32dv\beta w a_3 b_0 b_1 + 2a_5 b_0 b_1 - 2v a_5 b_0 b_1 + 39v\beta w^2 a_5 b_0 b_1 \\ - d^2 v\beta a_0 b_1^2 + 4dv\beta w a_2 b_1^2 + a_4 b_1^2 - v a_4 b_1^2 + 9v\beta w^2 a_4 b_1^2 - 2\alpha a_1 a_4 b_1 = 0,$$

$$F^7 : -2\alpha a_3 a_4 b_0 - 2\alpha a_2 a_5 b_0 + 15d^2 v\beta a_3 b_0^2 + 60dv\beta w a_5 b_0^2 - \alpha a_3^2 b_1 - 2\alpha a_2 a_4 b_1 \\ + 9d^2 v\beta a_2 b_0 b_1 + 60dv\beta w a_4 b_0 b_1 + 12dv\beta w a_3 b_1^2 + a_5 b_1^2 - v a_5 b_1^2 \\ + 16v\beta w^2 a_5 b_1^2 - 2\alpha a_1 a_5 b_1 = 0,$$

$$F^8 : -\alpha a_4^2 b_0 - 2\alpha a_3 a_5 b_0 + 24d^2 v\beta a_4 b_0^2 - 2\alpha a_3 a_4 b_1 - 2\alpha a_2 a_5 b_1 + 21d^2 v\beta a_3 b_0 b_1 \\ + 96dv\beta w a_5 b_0 b_1 + 3d^2 v\beta a_2 b_1^2 + 24dv\beta w a_4 b_1^2 = 0,$$

$$F^9 : -2\alpha a_4 a_5 b_0 + 35d^2 v\beta a_5 b_0^2 - \alpha a_4^2 b_1 - 2\alpha a_3 a_5 b_1 + 37d^2 v\beta a_4 b_0 b_1 \\ + 8d^2 v\beta a_3 b_1^2 + 40dv\beta w a_5 b_1^2 = 0,$$

$$F^{10} : -\alpha a_5^2 b_0 - 2\alpha a_4 a_5 b_1 + 57d^2 v\beta a_5 b_0 b_1 + 15d^2 v\beta a_4 b_1^2 = 0,$$

$$F^{11} : -\alpha a_5^2 b_1 + 24d^2 v\beta a_5 b_1^2 = 0,$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi Wolfram Mathematica 9 programı kullanılarak çözümlürse $w, \alpha, \beta, d, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ ve b_0, b_1 katsayı değerleri bulunur.

Durum 1. (3.1.8) eşitliği ve

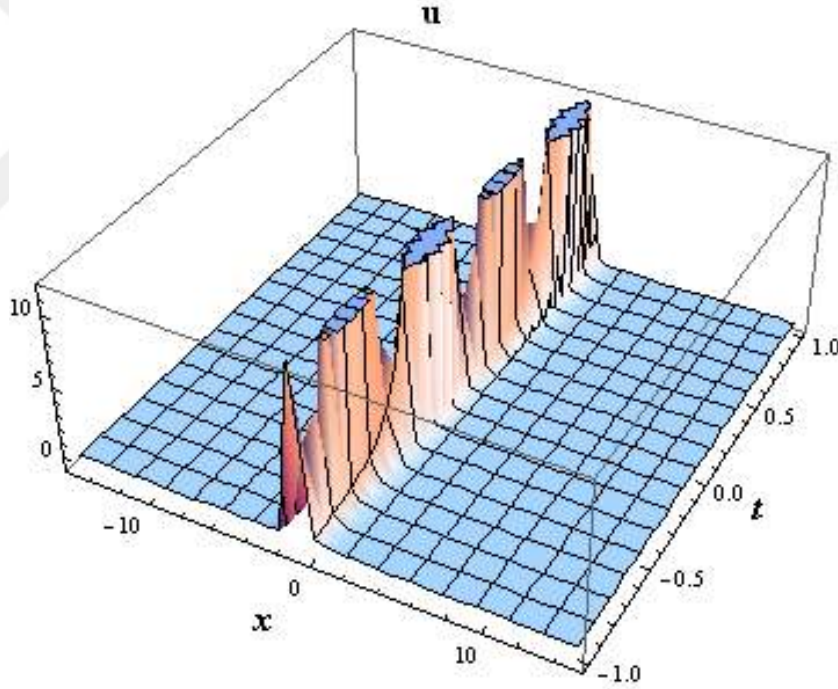
$$a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = \frac{wa_4}{d}, a_3 = \frac{wa_5}{d}, b_0 = \frac{\alpha a_4}{24d^2\beta}(1-4\beta w^2), b_1 = \frac{\alpha a_5}{24d^2\beta}(1-4\beta w^2), \quad (4.3.9)$$

$$v = \frac{1}{1-4\beta w^2}$$

katsayıları (4.3.6) de yerine yazılırsa, Zakharov-Kuznetsov-Benjamin-Bona-Mahony denkleminin üstel fonksiyon çözümü

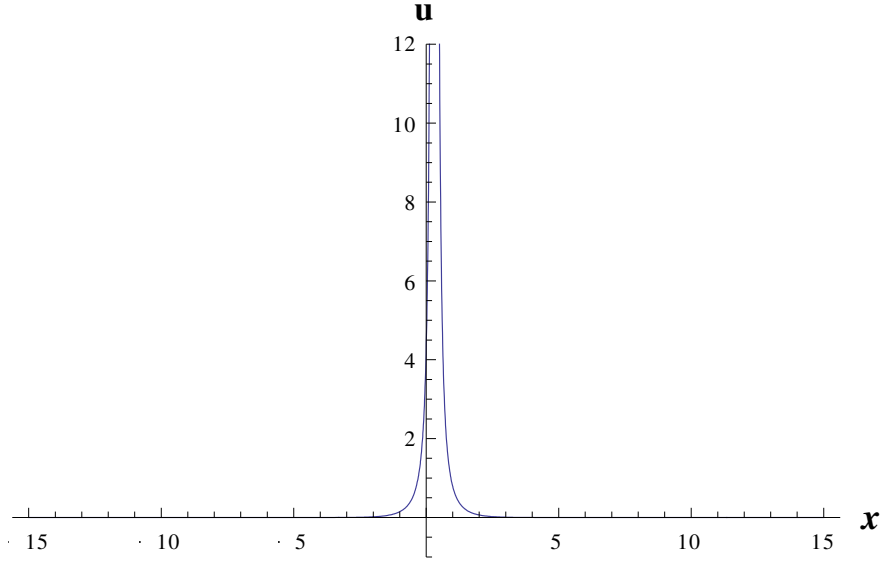
$$u_1(x,t) = -\frac{24d\beta Ew^3}{\alpha(-1+4\beta w^2)} e^{2w\left(x+\frac{t}{-1+4\beta w^2}\right)} \left(de^{2\left(\frac{x+\frac{t}{-1+4\beta w^2}}{-1+4\beta w^2}\right)} - Ew \right)^{-2}, \quad (4.3.10)$$

olarak elde edilir. Burada w, α, β, d, E reel sabitlerdir. Zakharov-Kuznetsov-Benjamin-Bona-Mahony denkleminin IBSEFM ile elde edilen u_1 üstel fonksiyon çözümünün uygun parametre değerlerine karşılık gelen yüzey grafikleri Wolfram Mathematica 9 programı kullanılarak aşağıdaki şekilde literatüre sunulmuştur.



Şekil-9 (4.3.10) denkleminin 3 boyutlu yüzey grafiği

$$w=1, d=0.2, E=0.3, \alpha=0.3, \beta=0.02, -15 \leq x \leq 15, -1 \leq t \leq 1$$



Şekil-10 (4.3.10) denkleminin 2 boyutlu yüzey grafiği

$w=1, d=0.2, E=0.3, \alpha=0.3, \beta=0.02, -15 \leq x \leq 15, t=0.1$.

Durum 2. (3.1.8) eşitliği ve

$$a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = \frac{\sqrt{a_4(\alpha a_4 - 24d^2\beta b_0)}}{2d\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}, a_5 = \frac{2d\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}a_3a_4}{\sqrt{a_4(\alpha a_4 - 24d^2\beta b_0)}}, \quad (4.3.11)$$

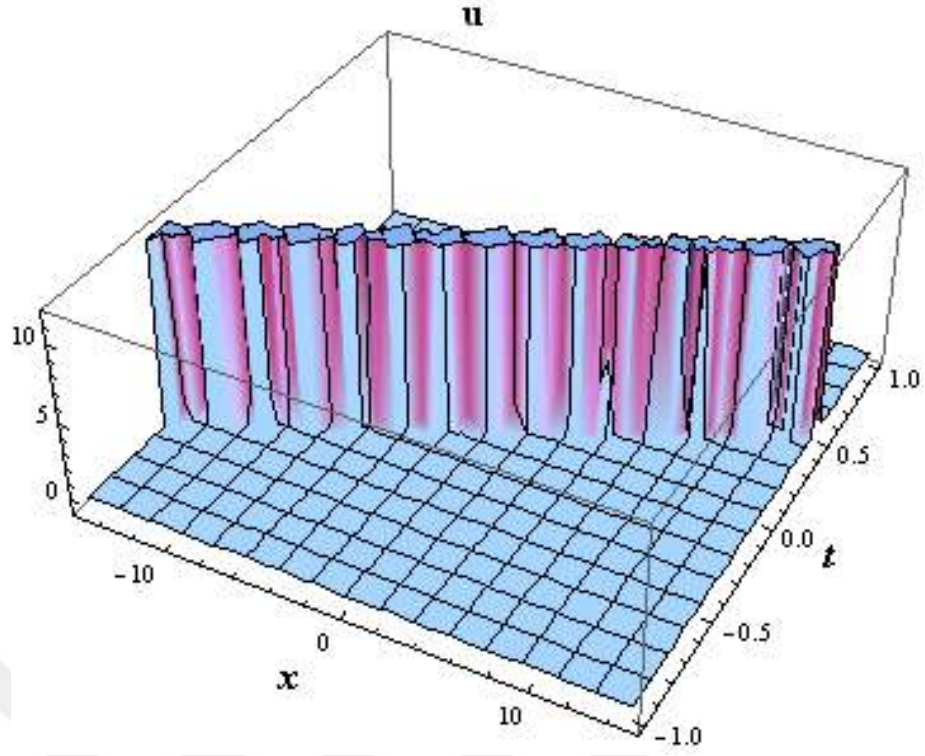
$$b_1 = \frac{2d\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}a_3b_0}{\sqrt{a_4(\alpha a_4 - 24d^2\beta b_0)}}, v = \frac{\alpha a_4}{24d^2\beta b_0}$$

katsayıları (4.3.6) de yerine yazılırsa, Zakharov-Kuznetsov-Benjamin-Bona-Mahony denkleminin üstel ve rasyonel fonksiyon çözümü

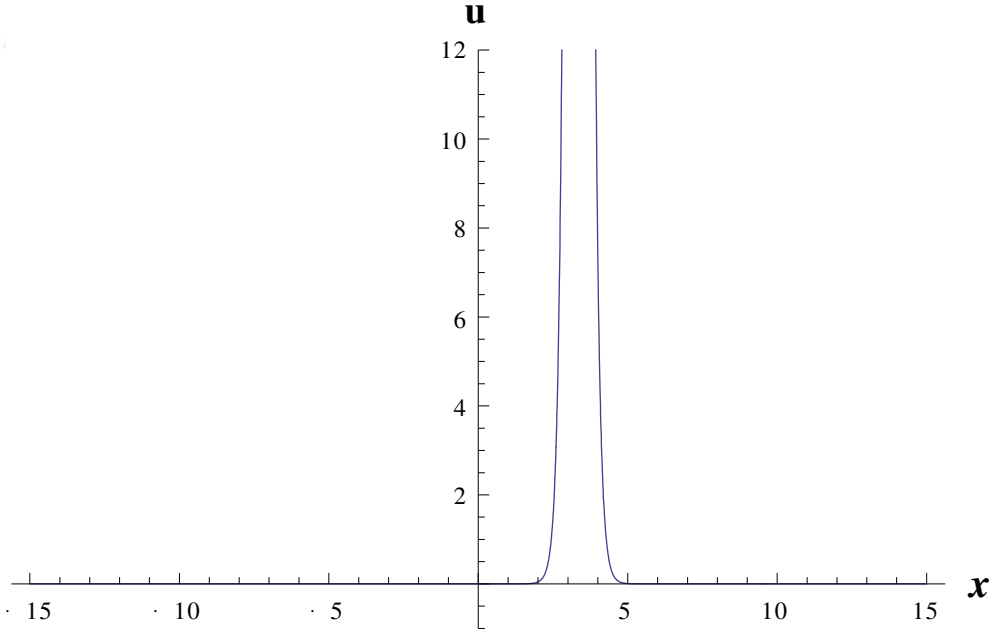
$$u_2(x, t) = \frac{e^{\frac{f(x,t)\sqrt{a_4(\alpha a_4 - 24d^2\beta b_0)}}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}a_4}} E\left(a_4(\alpha a_4 - 24d^2\beta b_0)\right)^{\frac{3}{2}}}{2d\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}b_0 \left(-2de^{\frac{f(x,t)\sqrt{a_4(\alpha a_4 - 24d^2\beta b_0)}}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}a_4}} \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}a_4 + E\sqrt{a_4(\alpha a_4 - 24d^2\beta b_0)} \right)^2} \quad (4.3.12)$$

şeklinde elde edilir. Burada $f(x, t) = x - \frac{t\alpha a_4}{24d^2\beta b_0}$ olup α, β, d, E reel sabitlerdir.

Zakharov-Kuznetsov-Benjamin-Bona-Mahony denkleminin IBSEFM ile elde edilen u_2 üstel fonksiyon çözümünün uygun parametre değerlerine karşılık gelen yüzey grafikleri Mathematica 9 programı kullanılarak aşağıdaki şekilde literatüre sunulmuştur.



Şekil-11 (4.3.12) denkleminin 3 boyutlu yüzey grafiği
 $d=0.2, b_0=0.1, E=0.3, \alpha=0.3, \beta=0.02, a_4=0.2, -15 \leq x \leq 15, -1 \leq t \leq 1$



Şekil-12 (4.3.12) denkleminin 2 boyutlu yüzey grafiği
 $d=0.2, b_0=0.1, E=0.3, \alpha=0.3, \beta=0.02, a_4=0.2, -15 \leq x \leq 15, t=0.1$

4.4. (3+1) BOYUTLU KADOMTSEV-PETVIASHVILI DENKLEMİNE SGEM'İN UYGULANMASI

Lineer olmayan Kadomtsev-Petviashvili denklemi [29]

$$u_{xt} + 6u_x^2 + 6uu_{xx} - u_{xxx} - u_{yy} - u_{zz} = 0, \quad (4.4.1)$$

olarak bilinen diferansiyel denklemi göz önüne alalım. Bu denkleme

$$u(x, t) = U(\xi) = U, \quad \xi = \mu(x + ay + z - ct), \quad (4.4.2)$$

dönüşümü uygulanırsa,

$$-(c + 1 + a^2)U'' + 6(U')^2 + 6UU'' - \mu^2 U^{(4)} = 0 \quad (4.4.3)$$

şeklinde lineer olmayan adi diferansiyel denklem elde edilir. Bu diferansiyel denklemin integrali alınır ve yeniden düzenlenirse;

$$-(c + 1 + a^2)U + 3U^2 - \mu^2 U'' = 0 \quad (4.4.4)$$

bulunur. Bu denklemde U'' ve U^2 arasında balans prensibi uygulandığında $n = 2$ bulunur. Bu n değeri (3.2.9) ve (3.2.10) ifadelerinde yerine yazılırsa

$$U(\xi) = B_1 \operatorname{sech}(\xi) + A_1 \tanh(\xi) + \tanh(\xi) [B_2 \operatorname{sech}(\xi) + A_2 \tanh(\xi)] + A_0, \quad (4.4.5)$$

ve

$$U(w) = B_1 \sin(w) + A_1 \cos(w) + B_2 \cos(w) \sin(w) + A_2 \cos^2(w) + A_0, \quad (4.4.6)$$

denklemleri elde edilir. (4.4.6) denkleminin iki defa türevi alınır

$$\begin{aligned} U''(w) = & B_1 \cos^2(w) \sin(w) - B_1 \sin^3(w) - 2A_1 \cos(w) \sin^2(w) \\ & + B_2 \cos^3(w) \sin(w) - 5B_2 \cos(w) \sin^3(w) \\ & - 4A_2 \cos^2(w) \sin^2(w) + 2A_2 \sin^4(w), \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

bulunur. (4.4.6) ve (4.4.7) ifadeleri (4.4.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & -A_0 - a^2 A_0 - c A_0 + 3A_0^2 - \cos(w) A_1 - a^2 \cos(w) A_1 - c \cos(w) A_1 \\ & + 2\mu^2 \cos(w) \sin^2(w) A_1 + 6 \cos(w) A_0 A_1 + 3 \cos^2(w) A_1^2 - \cos^2(w) A_2 \\ & - a^2 \cos^2(w) A_2 - c \cos^2(w) A_2 + 4\mu^2 \cos^2(w) \sin^2(w) A_2 - 2\mu^2 \sin^4(w) A_2 \\ & + 6 \cos^2(w) A_0 A_2 + 6 \cos^3(w) A_1 A_2 + 3 \cos^4(w) A_2^2 - \sin(w) B_1 - a^2 \sin(w) B_1 \\ & - c \sin(w) B_1 - \mu^2 \cos^2(w) \sin(w) B_1 + \mu^2 \sin^3(w) B_1 + 6 \sin(w) A_0 B_1 \\ & + 6 \cos(w) \sin(w) A_1 B_1 + 6 \cos^2(w) \sin(w) A_2 B_1 + 3 \sin^2(w) B_1^2 - \cos(w) \sin(w) B_2 \\ & - a^2 \cos(w) \sin(w) B_2 - c \cos(w) \sin(w) B_2 - \mu^2 \cos^3(w) \sin(w) B_2 \\ & + 5\mu^2 \cos(w) \sin^3(w) B_2 + 6 \cos(w) \sin(w) A_0 B_2 + 6 \cos^2(w) \sin(w) A_1 B_2 \\ & + 6 \cos^3(w) \sin(w) A_2 B_2 + 6\mu^2 \cos(w) \sin^2(w) B_1 B_2 + 3 \cos^2(w) \sin^2(w) B_2^2 = 0, \end{aligned}$$

cebirsel denklemi elde edilir. Bu cebirsel denklemin trigonometrik katsayılarının

her biri sıfıra eşitlenirse aşağıdaki denklem sistemi elde edilir;

$$\begin{aligned}
&\text{sabit: } -A_0 - a^2 A_0 - cA_0 + 3A_0^2 - 2\mu^2 A_2 + 3B_1^2 = 0, \\
&\sin(w): -B_1 - a^2 B_1 - cB_1 + \mu^2 B_1 + 6A_0 B_1 = 0, \\
&\cos(w): -A_1 - a^2 A_1 - cA_1 + 6A_0 A_1 + 6A_1 A_2 = 0, \\
&\sin(w)\cos(w): 6A_1 B_1 - B_2 - a^2 B_2 - cB_2 + 6A_0 B_2 + 5\mu^2 B_2 = 0, \\
&\cos^2(w): 3A_1^2 - A_2 - a^2 A_2 - cA_2 + 2\mu^2 A_2 + 6A_0 A_2 + 3A_2^2 - 3B_1^2 = 0, \\
&\sin^2(w)\cos(w): 2\mu^2 A_1 - 6A_1 A_2 + 6B_1 B_2 = 0, \\
&\cos^2(w)\sin(w): -2\mu^2 B_1 + 6A_2 B_1 + 6A_1 B_2 = 0, \\
&\sin^2(w)\cos^2(w): 6\mu^2 A_2 - 3A_2^2 + 3B_2^2 = 0, \\
&\cos^3(w)\sin(w): -6\mu^2 B_2 + 6A_2 B_2 = 0.
\end{aligned}$$

Bu denklem sistemi çeşitli paket programlar kullanılarak çözülürse $A_0, A_1, B_1, A_2, B_2, c, a, \mu$ katsayılarının farklı değerleri için salınımlı dalga çözümleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

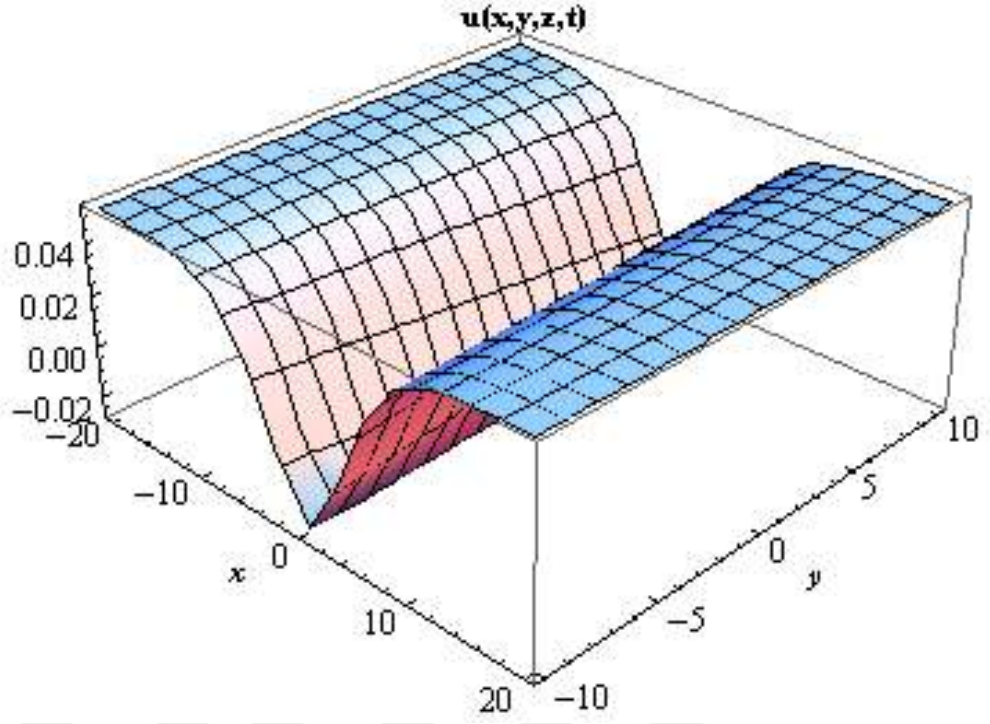
Durum 1. (4.4.5) denkleminde

$$A_0 = -\frac{2\mu^2}{3}, A_1 = 0, B_1 = 0, A_2 = 2\mu^2, B_2 = 0, c = -1 - a^2 + 4\mu^2 \quad (4.4.7)$$

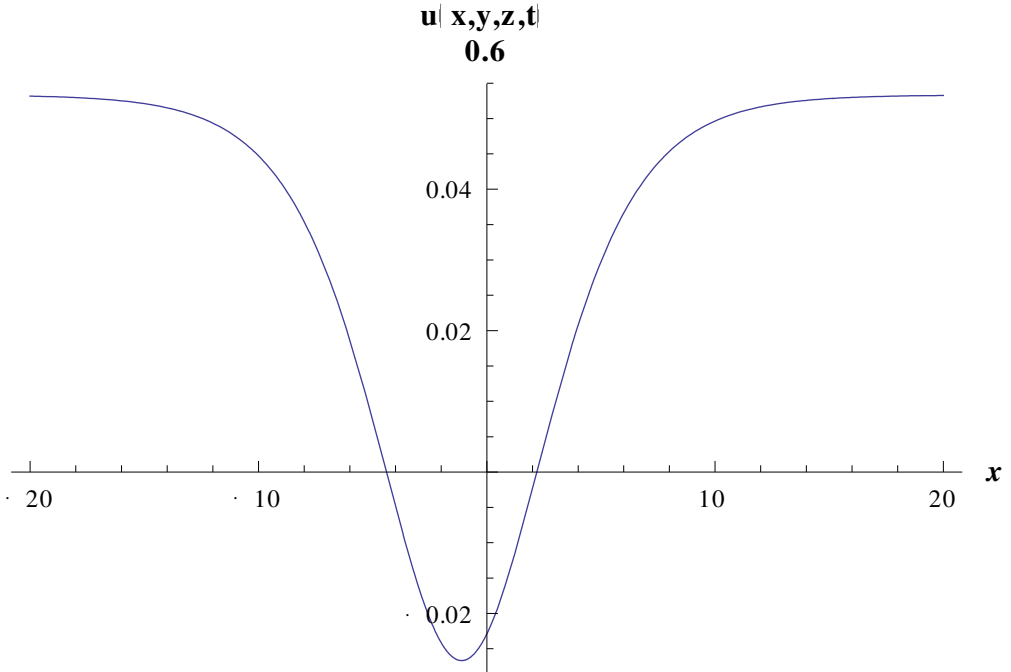
katsayıları yazılırsa, (3+1)-boyutlu Kadomstev-Petviashvili denklemi salınımlı hiperbolik dalga çözümü aşağıdaki şekilde elde edilir;

$$u_1(x, y, z, t) = \frac{2}{3}\mu^2 \left(-1 + 3 \tanh \left[\mu \left(x + ay + z - t(-1 - a^2 + 4\mu^2) \right) \right]^2 \right), \quad (4.4.8)$$

burada μ, a reel sabitlerdir. (3+1)-boyutlu Kadomstev-Petviashvili denkleminde SGEM ile elde edilen u_1 hiperbolik fonksiyon çözümünün uygun parametre değerlerine karşılık gelen yüzey grafikleri Wolfram Mathematica 9 programı kullanılarak aşağıdaki şekilde literatüre sunulmuştur.



Şekil-13 (4.4.8) denkleminin 3 boyutlu yüzey grafiği
 $\mu=0.2$, $a=0.1$, $z=0.5$, $t=0.6$, $-20 \leq x \leq 20$, $-10 \leq y \leq 10$.



Şekil-14 (4.4.8) denkleminin 2 boyutlu yüzey grafiği
 $\mu=0.2$, $a=0.1$, $z=0.5$, $t=0.6$, $-20 \leq x \leq 20$, $t=0.6$.

Durum 2. (4.4.5) denkleminde

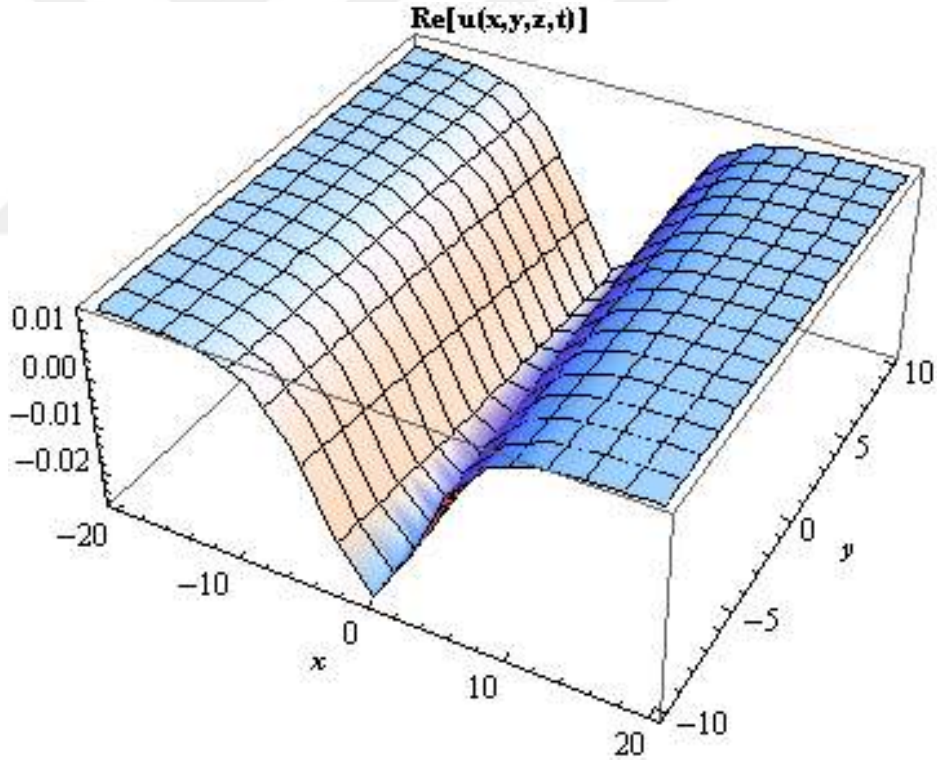
$$A_0 = -\frac{2\mu^2}{3}, A_1 = 0, B_1 = 0, A_2 = \mu^2, B_2 = i\mu^2, c = -1 - a^2 + \mu^2 \quad (4.4.9)$$

katsayıları yazılırsa (3+1)-boyutlu Kadomstev-Petviashvili denklemi salınımlı hiperbolik dalga çözümü aşağıdaki şekilde elde edilir;

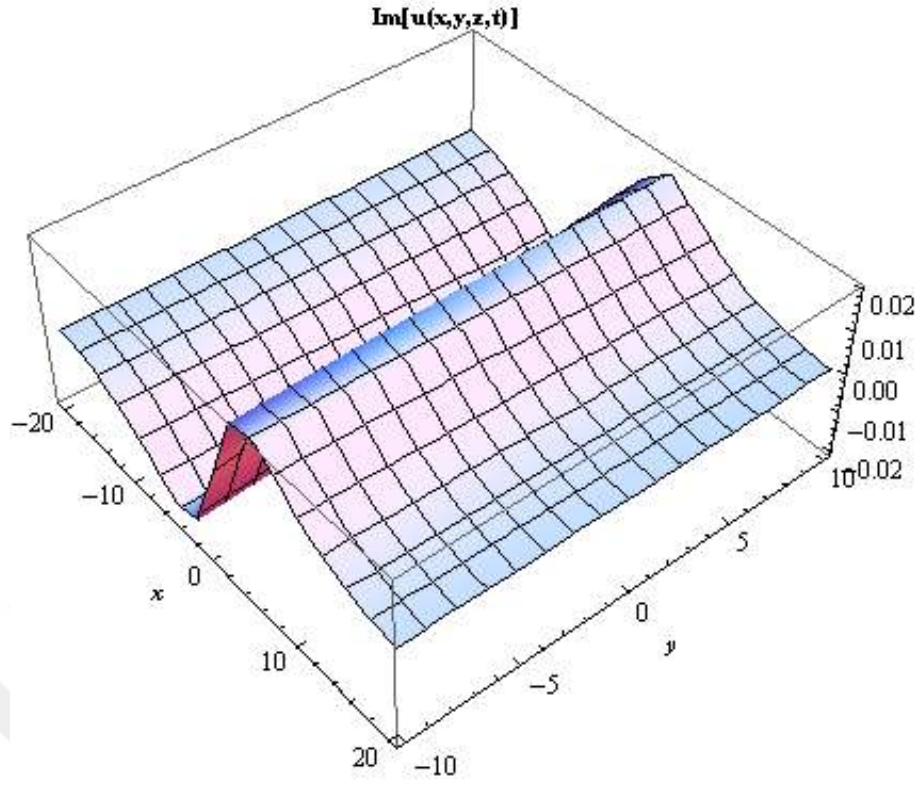
$$u_2(x, y, z, t) = \frac{1}{3}\mu^2 \left(-2 + 3 \tanh[f(x, y, z, t)] \left(i \operatorname{sech}[f(x, y, z, t)] + \tanh[f(x, y, z, t)] \right) \right) \quad (4.4.10)$$

burada μ, a reel sabitler olup $f(x, y, z, t) = \mu(x + ay + z - t(-1 - a^2 + \mu^2))$ dir.

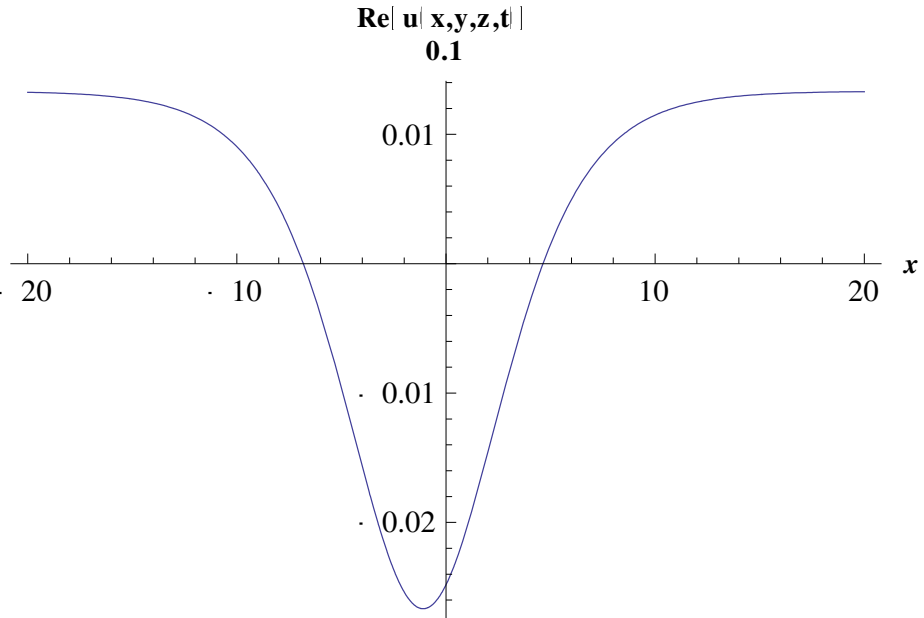
(3+1)-boyutlu Kadomstev-Petviashvili denkleminde SGEM ile elde edilen u_2 kompleks hiperbolik fonksiyon çözümünün uygun parametre değerlerine karşılık gelen yüzey grafikleri Wolfram Mathematica 9 programı kullanılarak aşağıdaki şekilde literatüre sunulmuştur.



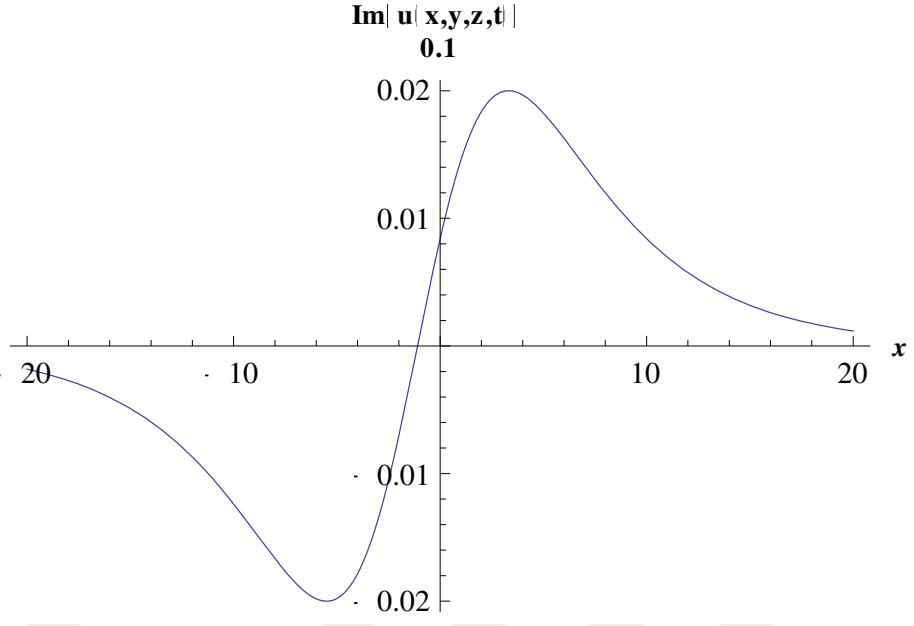
Şekil-15 (4.4.10) denkleminin reel kısmının 3 boyutlu yüzey grafiği
 $\mu = 0.2, a = 0.1, z = 0.5, t = 0.6, -20 \leq x \leq 20, -10 \leq y \leq 10$



Şekil-16 (4.4.10) denkleminin sanal kısmının 3 boyutlu yüzey grafiği
 $\mu=0.2, a=0.1, z=0.5, t=0.6, -20 \leq x \leq 20, -10 \leq y \leq 10$



Şekil-17 (4.4.10) denkleminin reel kısmının 2 boyutlu yüzey grafiği
 $\mu=0.2, a=0.1, z=0.5, t=0.6, -20 \leq x \leq 20, y=0.1$



Şekil-18 (4.4.10) denkleminin sanal kısmının 2 boyutlu yüzey grafiği
 $\mu=0.2, a=0.1, z=0.5, t=0.6, -20 \leq x \leq 20, y=0.1$

4.5. (3+1) BOYUTLU SCHRÖDİNGER DENKLEMİNE SGEM' İN UYGULANMASI

Lineer olmayan (3+1) boyutlu Schrödinger denklemi [31]

$$iu_t + u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \gamma |u|^2 u = 0 \quad (4.5.1)$$

olarak bilinen diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Bu denkleme

$$u(x, y, z, t) = e^{i\Omega} \psi(\xi), \quad \xi = x + y + z + at, \quad \Omega = ax + by + cz + rt \quad (4.5.2)$$

dönüşümü uygulanır ve $v = -2(a + b + c)$ alınır;

$$3\psi'' + \gamma\psi^3 - (a^2 + b^2 + c^2 + r)\psi = 0 \quad (4.5.3)$$

şeklinde lineer olmayan bir adi diferansiyel denklem elde edilir.

Bu denklemde ψ'' ve ψ^3 terimleri arasında balans prensibi uygulandığında $n=1$ bulunur. n değeri (3.2.9) ve (3.2.10) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\psi(\xi) = B_1 \operatorname{sech}(\xi) + A_1 \tanh(\xi) + A_0, \quad (4.5.4)$$

ve

$$\psi(w) = B_1 \sin(w) + A_1 \cos(w) + A_0, \quad (4.5.5)$$

elde edilir. Bu ifadenin iki defa türevi alınır

$$\psi''(w) = B_1 \cos^2(w) \sin(w) - B_1 \sin^3(w) - 2A_1 \sin^2(w) \cos(w), \quad (4.5.6)$$

elde edilir. (4.5.4) ve (4.5.5) ifadeleri (4.5.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & -a^2 A_0 - b^2 A_0 - c^2 A_0 - r A_0 + \gamma A_0^3 - a^2 \cos(w) A_1 - b^2 \cos(w) A_1 - c^2 \cos(w) A_1 \\ & - r \cos(w) A_1 - 6 \cos(w) \sin^2(w) A_1 + 3\gamma \cos(w) A_0^2 A_1 + 3\gamma \cos^2(w) A_0 A_1^2 \\ & + \gamma \cos^3(w) A_1^3 - a^2 \sin(w) B_1 - b^2 \sin(w) B_1 - c^2 \sin(w) B_1 - r \sin(w) B_1 \\ & + 3 \cos^2(w) \sin(w) B_1 - 3 \sin^3(w) B_1 + 3\gamma \sin(w) A_0^2 B_1 + 6\gamma \cos(w) \sin(w) A_0 A_1 B_1 \\ & + 3\gamma \cos^2(w) \sin(w) A_1^2 B_1 + 3\gamma \sin^2(w) A_0 B_1^2 + 3\gamma \cos(w) \sin^2(w) A_1 B_1^2 \\ & + \gamma \sin^3(w) B_1^3 = 0, \end{aligned} \quad (4.5.7)$$

cebirsel denklemi elde edilir. Bu cebirsel denklemin trigonometrik katsayılarının her biri sıfıra eşitlenirse aşağıdaki denklem sistemi elde edilir;

$$\begin{aligned}
& \text{sabit: } -a^2 A_0 - b^2 A_0 - c^2 A_0 - r A_0 + \gamma A_0^3 + 3\gamma A_0 B_1^2 = 0, \\
& \sin(w): -a^2 B_1 - b^2 B_1 - c^2 B_1 - r B_1 - 3B_1 + 3\gamma A_0^2 B_1 + \gamma B_1^3 = 0, \\
& \cos(w): -a^2 A_1 - b^2 A_1 - c^2 A_1 - r A_1 + 3\gamma A_0^2 A_1 + \gamma A_1^3 = 0, \\
& \sin(w)\cos(w): 6\gamma A_0 A_1 B_1 = 0, \\
& \sin^2(w): 3\gamma A_0 A_1^2 - 3\gamma A_0 B_1^2 = 0, \\
& \sin^2(w)\cos(w): -6A_1 - \gamma A_1^3 + 3\gamma A_1 B_1^2 = 0, \\
& \cos^2(w)\sin(w): 6B_1 + 3\gamma A_1^2 B_1 - \gamma B_1^3 = 0.
\end{aligned}$$

Bu denklem sistemi çeşitli paket programlar kullanılarak çözülürse $A_0, A_1, B_1, a, b, c, r$ katsayılarının farklı değerleri için salınımlı dalga çözümleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

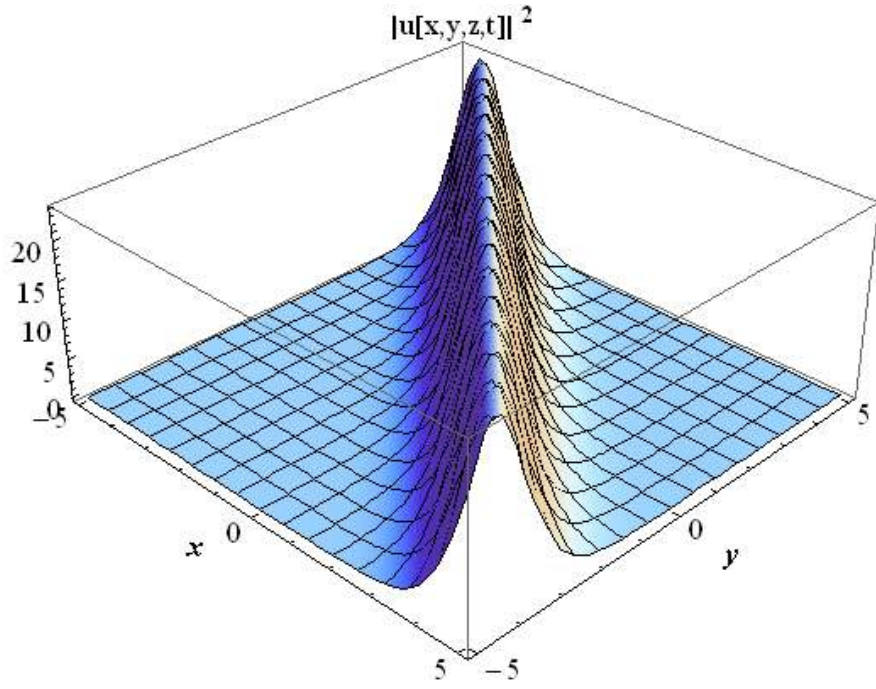
Durum 1. (4.5.4) denkleminde

$$A_0 = 0, A_1 = 0, B_1 = -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\gamma}}, a = \sqrt{3-b^2-c^2-r} \quad (4.5.8)$$

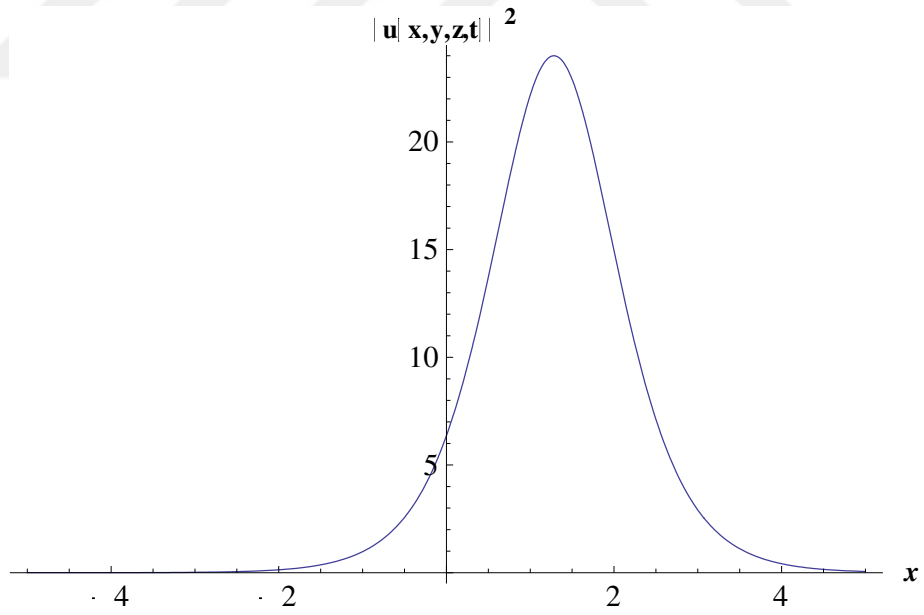
katsayıları yazılırsa, (3+1)-boyutlu Schrödinger denklemi için bir kompleks hiperbolik çözüm

$$u_1 = -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\gamma}} e^{i\left(\mu t + \sqrt{3-b^2-c^2-r}x + by + cz\right)} \operatorname{sech}\left[2\left(b+c+\sqrt{3-b^2-c^2-r}\right)t-x-y-z\right] \quad (4.5.9)$$

olarak elde edilir ve burada γ, a, b, c, r, μ reel sabitlerdir. Bu çözüm $3-b^2-c^2-r > 0$ koşulunu sağlaması gerekir. (3+1)-boyutlu Schrödinger denkleminde SGEM ile elde edilen u_1 kompleks hiperbolik fonksiyon çözümünün uygun parametre değerlerine karşılık gelen yüzey grafikleri Wolfram Mathematica 9 programı kullanılarak aşağıdaki şekilde literatüre sunulmuştur.



Şekil-19 (4.5.9) denkleminin 3 boyutlu yüzey grafiği
 $b = -0.5, c = 0.2, r = 0.35, \gamma = 0.25, t = 0.6, z = 0.9, -5 \leq x \leq 5, -5 \leq y \leq 5$



Şekil-20 (4.5.9) denkleminin 2 boyutlu yüzey grafiği
 $b = -0.5, c = 0.2, r = 0.35, \gamma = 0.25, t = 0.6, z = 0.9, -5 \leq x \leq 5$

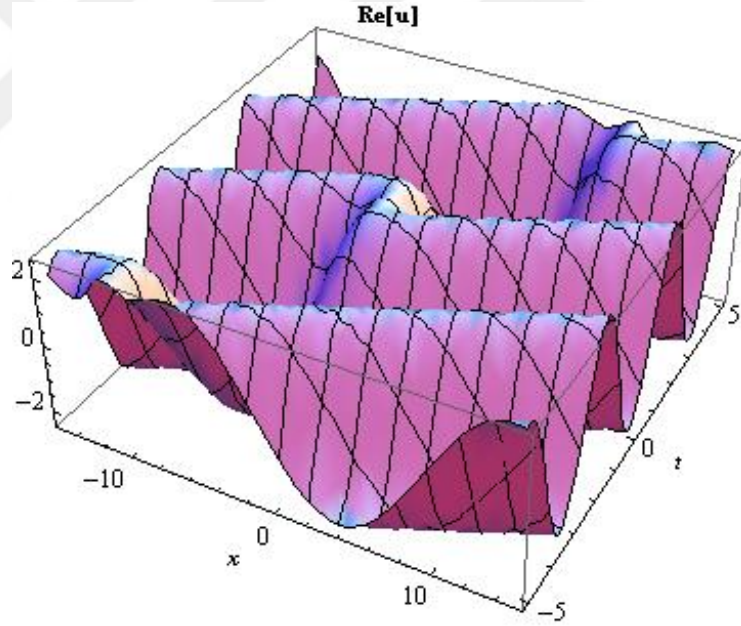
Durum 2. (4.5.4) denkleminde

$$A_0 = 0, A_1 = -\frac{i\sqrt{3}}{\sqrt{2\gamma}}, B_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\gamma}}, r = -\frac{3}{2} - a^2 - c^2 - b^2 \quad (4.5.10)$$

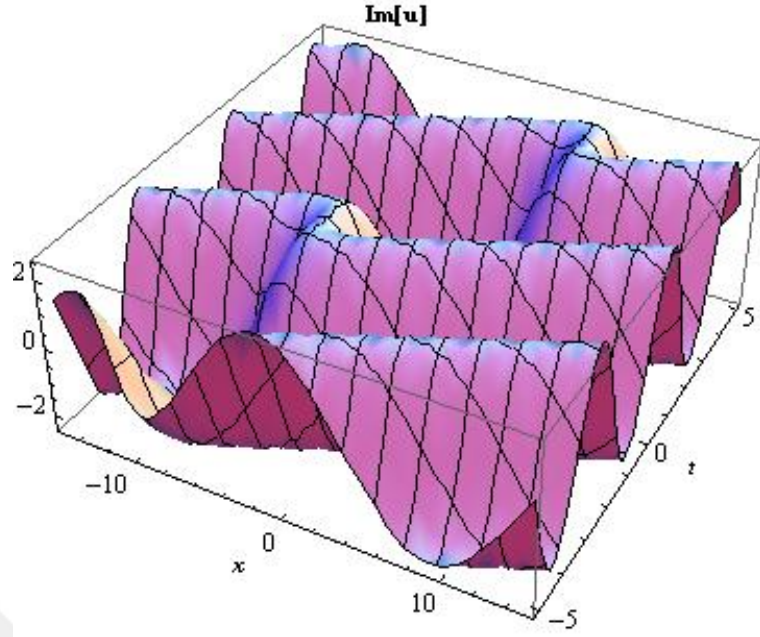
katsayıları yazılırsa, (3+1)-boyutlu Schrödinger denklemi için bir diğer kompleks hiperbolik çözüm

$$u_2 = -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{\frac{3}{2}} e^{i\left(\left(\frac{3}{2} - a^2 - b^2 - c^2\right)t + ax + by + cz\right)} \left(\operatorname{sech}[f(x, y, z, t)] + i \tanh[f(x, y, z, t)] \right), \quad (4.5.11)$$

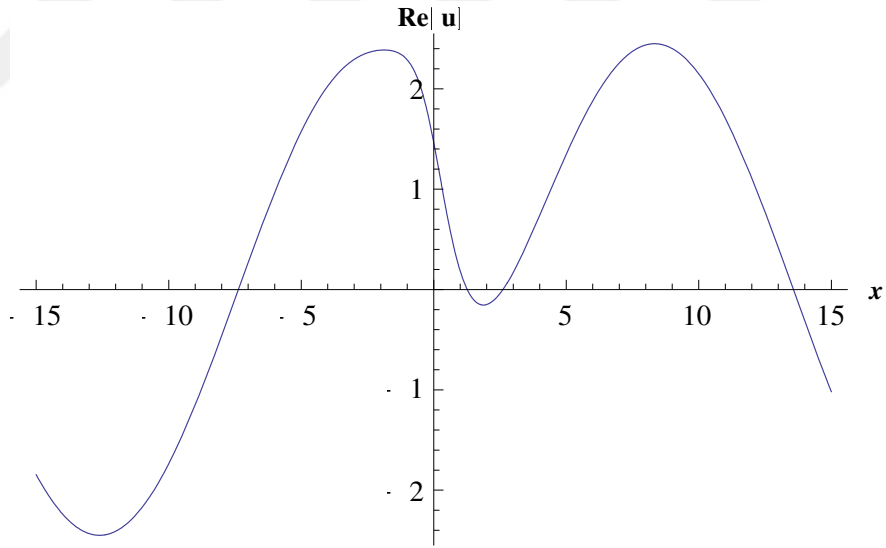
olarak elde edilir ve burada $f(x, y, z, t) = 2(a + b + c)t - x - y - z$ olup γ, a, b, c reel sabitlerdir. (3+1)-boyutlu Schrödinger denkleminde SGEM ile elde edilen u_2 kompleks hiperbolik fonksiyon çözümünün uygun parametre değerlerine karşılık gelen yüzey grafikleri Wolfram Mathematica 9 programı kullanılarak aşağıdaki şekilde literatüre sunulmuştur.



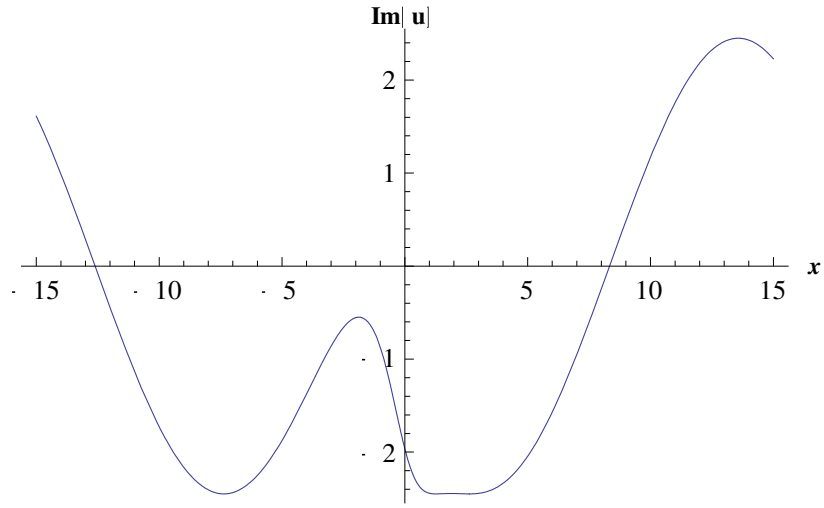
Şekil-21 (4.5.11) denkleminin reel kısmını 3 boyutlu yüzey grafiği
 $a = 0.3, b = 0.5, c = 0.2, \gamma = 0.25, y = 0.6, z = 0.9, -15 \leq x \leq 15, -15 \leq t \leq 15$



Şekil-22 (4.5.11) denkleminin sanal kısmını 3 boyutlu yüzey grafiği
 $a = 0.3, b = 0.5, c = 0.2, \gamma = 0.25, y = 0.6, z = 0.9, -15 \leq x \leq 15, -15 \leq t \leq 15$



Şekil-23 (4.5.11) denkleminin reel kısmının 2 boyutlu yüzey grafiği
 $a = 0.3, c = 0.2, b = 0.5, \gamma = 0.25, t = 0.75, z = 0.9, y = 0.6, -15 \leq x \leq 15$



Şekil-24 (4.5.11) denkleminin sanal kısmının 2 boyutlu yüzey grafiği
 $a = 0.3, c = 0.2, b = 0.5, \gamma = 0.25, t = 0.75, z = 0.9, y = 0.6, -15 \leq x \leq 15$

4.6. ZAKHAROV-KUZNETSOV-BENJAMİN-BONA-MOHANY DENKLEMİNE SGEM'İN UYGULANMASI

Lineer olmayan Zakharov-Kuznetsov-Benjamin-Bona-Mahony [33]

$$u_t + u_x - 2puu_x - qu_{xxt} = 0 \quad (4.6.1)$$

olarak bilinen diferansiyel denklemi göz önüne alalım. Bu denklemde

$$u(x, y, z, t) = U(\eta), \quad \eta = x - vt \quad (4.6.2)$$

dalga dönüşümü uygulanırsa,

$$(1-v)U - pU^2 + qvU'' = 0 \quad (4.6.3)$$

şeklinde lineer olmayan bir adi diferansiyel denklem elde edilir. Elde edilen bu denklemde U'' ve U^2 terimleri arasında balans prensibi uygulandığında $n=2$ bulunur. Bu n değeri (3.2.9) ve (3.2.10) ifadelerinde yerine yazılırsa

$$U(\xi) = B_1 \operatorname{sech}(\xi) + A_1 \tanh(\xi) + \tanh(\xi) [B_2 \operatorname{sech}(\xi) + A_2 \tanh(\xi)] + A_0, \quad (4.6.4)$$

ve

$$U(w) = B_1 \sin(w) + A_1 \cos(w) + B_2 \cos(w) \sin(w) + A_2 \cos^2(w) + A_0 \quad (4.6.5)$$

denklemleri elde edilir. (4.6.5) denkleminin iki defa türevi alınır

$$\begin{aligned} U''(w) = & B_1 \cos^2(w) \sin(w) - B_1 \sin^3(w) - 2A_1 \cos(w) \sin^2(w) \\ & + B_2 \cos^3(w) \sin(w) - 5B_2 \cos(w) \sin^3(w) + 2A_2 \sin^4(w) \\ & - 4A_2 \cos^2(w) \sin^2(w), \end{aligned} \quad (4.6.6)$$

bulunur. (4.6.5) ve (4.6.6) ifadeleri (4.6.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & A_0 - vA_0 - pA_0^2 + A_1 \cos(w) - vA_1 \cos(w) - 2qvA_1 \cos(w) \sin^2(w) \\ & - 2pA_0A_1 \cos(w) - pA_1^2 \cos(w) + A_2 \cos^2(w) - vA_2 \cos^2(w) \\ & - 4qvA_2 \cos^2(w) \sin^2(w) + 2qvA_2 \sin^4(w) - 2pA_0A_2 \cos^2(w) \\ & - 2pA_1A_2 \cos^3(w) - p \cos^4(w) A_2^2 + B_1 \sin(w) - vB_1 \sin(w) \\ & + qv \cos^2(w) \sin(w) B_1 - qvB_1 \sin^3(w) - 2pA_0B_1 \sin(w) \\ & - 2pA_1B_1 \sin(w) \cos(w) - 2pA_2B_1 \sin(w) \cos^2(w) - pB_1^2 \sin^2(w) \\ & + B_2 \cos(w) \sin(w) - vB_2 \cos(w) \sin(w) + qvB_2 \cos^3(w) \sin(w) \\ & - 5qvB_2 \cos(w) \sin^3(w) - 2pA_0B_2 \cos(w) \sin(w) - 2pA_1B_2 \cos^2(w) \sin(w) \\ & - 2pA_2B_2 \cos^3(w) \sin(w), - 2pB_1B_2 \cos(w) \sin^2(w) - pB_2^2 \cos^2(w) \sin^2(w) = 0, \end{aligned}$$

cebirsel denklemi elde edilir. Bu cebirsel denklemin trigonometrik katsayılarının her biri sıfıra eşitlenirse aşağıdaki denklem sistemi elde edilir;

$$\begin{aligned}
&\text{sabit: } A_0 - vA_0 - pA_0^2 + 2qvA_2 - pB_1^2 = 0, \\
&\sin(w): B_1 - vB_1 - qvB_1 - 2pA_0B_1 = 0, \\
&\cos(w): A_1 - vA_1 - 2pA_0A_1 - 2pA_1A_2 = 0, \\
&\sin(w)\cos(w): -2pA_1B_1 + B_2 - vB_2 - 5qvB_2 - 2pA_0B_2 = 0, \\
&\cos^2(w): -pA_1^2 + A_2 - vA_2 - 2pA_0A_2 - 2qvA_2 - pA_2^2 + pB_1^2 = 0, \\
&\sin^2(w)\cos(w): -2qvA_1 + 2pA_1A_2 - 2pB_1B_2 = 0, \\
&\cos^2(w)\sin(w): 2qvB_1 - 2pA_2B_1 - 2pA_1B_2 = 0, \\
&\sin^2(w)\cos^2(w): -6qvA_2 + pA_2^2 - pB_2^2 = 0, \\
&\cos^3(w)\sin(w): 6qvB_2 - 2pA_2B_2 = 0.
\end{aligned}$$

Bu denklem sistemi çeşitli paket programlar kullanılarak çözülürse $A_0, A_1, B_1, A_2, B_2, p, v, q$ katsayılarının farklı değerleri için salınımlı dalga çözümleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

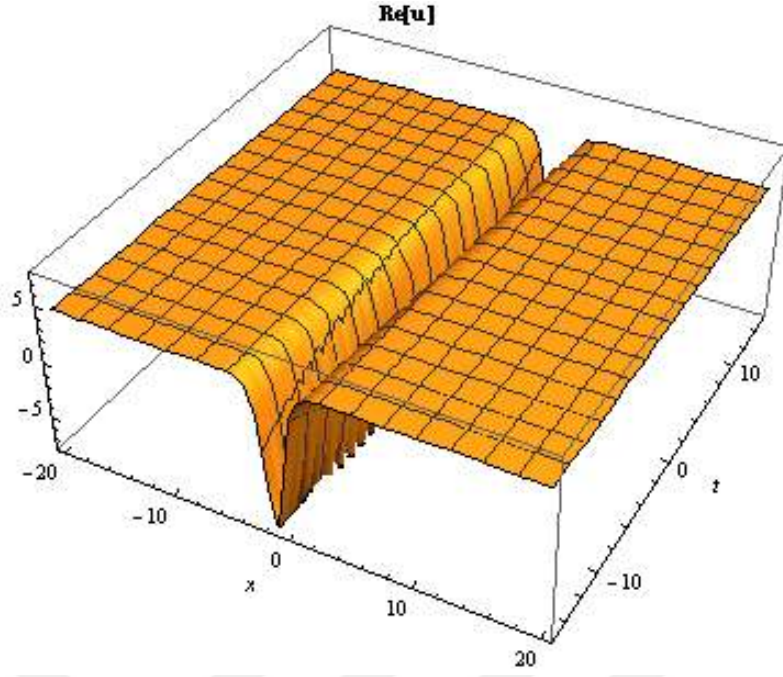
Durum 1. (4.6.4) denkleminde

$$\begin{aligned}
A_0 &= -\frac{-1 + 5\sqrt{(v-1)^2} + v}{2p}, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = \frac{3\sqrt{(v-1)^2}}{p}, \quad B_1 = 0 \\
B_2 &= -\frac{3\sqrt{-(v-1)^2}}{p}, \quad q = \frac{3\sqrt{(v-1)^2}}{v}
\end{aligned} \tag{4.6.7}$$

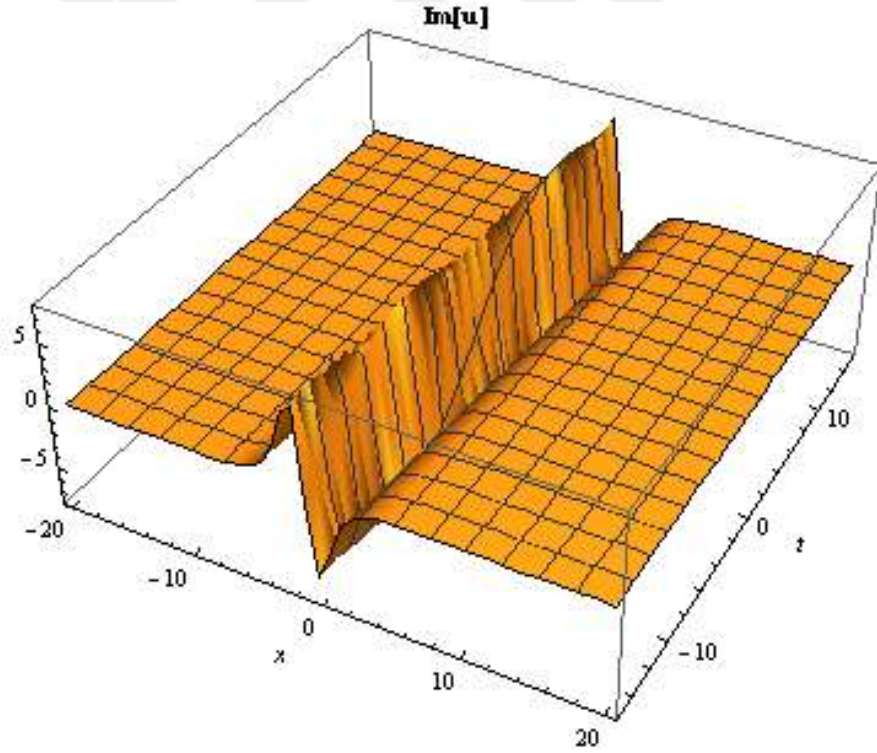
katsayıları yazılırsa, Zakharov-Kuznetsov-Benjamin-Bona-Mahony denklemi için hiperbolik dalga çözümü aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$u_1(x, t) = \frac{1 + \sqrt{(v-1)^2} - v}{2p} - \frac{3}{p} \left(\sqrt{(v-1)^2} - \sqrt{-(v-1)^2} \sinh(vt - x) \right) \text{sech}^2(vt - x), \tag{4.6.8}$$

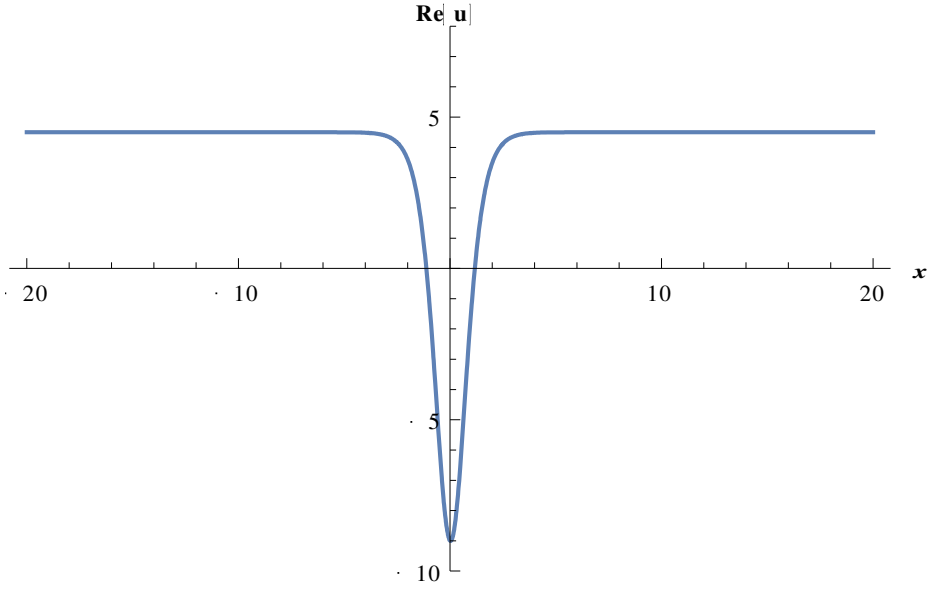
burada v, p, q reel sabitlerdir. ZK-BBM denklemine SGEM ile elde edilen $u_1(x, t)$ hiperbolik Uygun parameter değerlerine karşılık gelen yüzey grafikleri Wolfram Mathematica 9 programı kullanılarak aşağıdaki şekilde literatüre elde sunulmuştur.



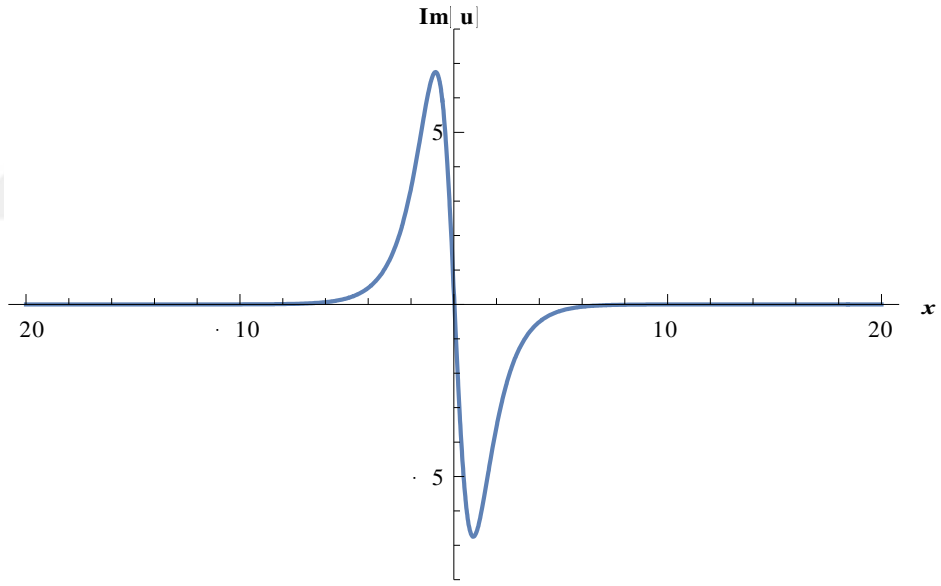
Şekil-25 (4.6.8) denkleminin reel kısmının 3 boyutlu yüzey grafiği
 $v = 0.1, \quad p = 0.2, \quad t = 0.3, -20 \leq x \leq 20, -15 \leq t \leq 15$



Şekil-26 (4.6.8) denkleminin sanal kısmının 3 boyutlu yüzey grafiği
 $v = 0.1, \quad p = 0.2, \quad t = 0.3, -20 \leq x \leq 20, -15 \leq t \leq 15$



Şekil-27 (4.6.8) denkleminin reel kısmının 2 boyutlu yüzey grafiği
 $v = 0.1, \quad p = 0.2, \quad t = 0.3, -20 \leq x \leq 20$



Şekil-28 (4.6.8) denkleminin sanal kısmının 2 boyutlu yüzey grafiği
 $v = 0.1, \quad p = 0.2, \quad t = 0.3, -20 \leq x \leq 20$

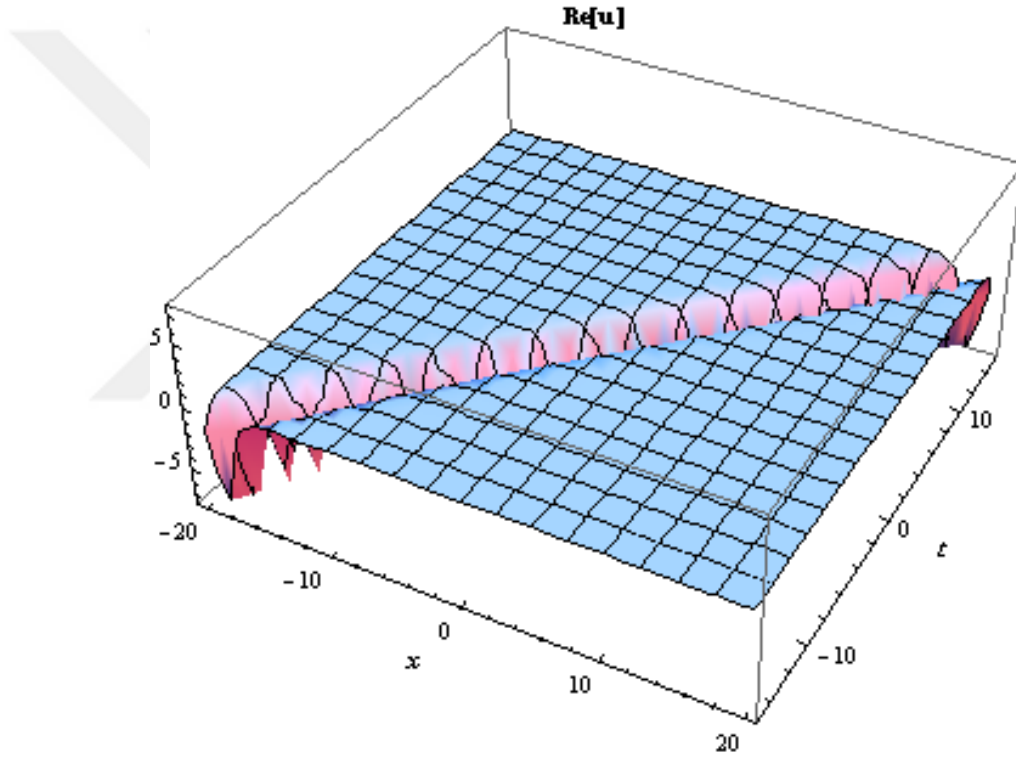
Durum 2. (4.6.4) denkleminde

$$A_0 = \frac{3q}{p(q-1)}, A_1 = 0, A_2 = \frac{3q}{p-pq}, B_1 = 0, B_2 = \frac{3iq}{p-pq}, v = \frac{1}{1-q}, \quad (4.6.9)$$

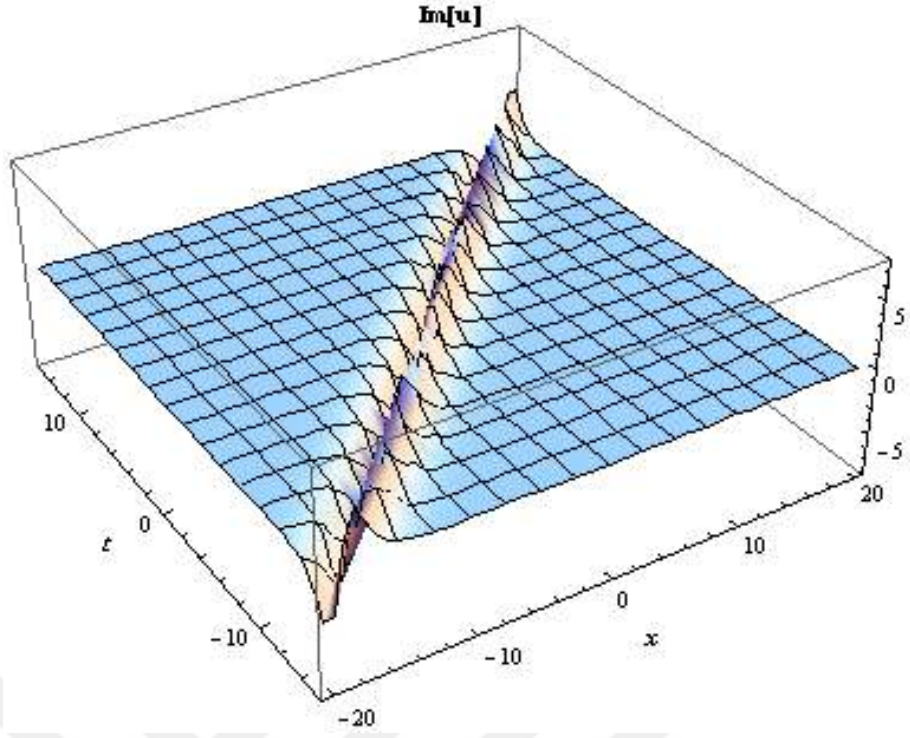
katsayıları yazılırsa, Zakharov-Kuznetsov-Benjamin-Bona-Mahony denklemi için hiperbolik dalga çözümü aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$u_2(x,t) = \frac{3q}{p(q-1)} \operatorname{sech}\left(\frac{t}{1-q} - x\right) \left(\operatorname{sech}\left(\frac{t}{1-q} - x\right) + i \tanh\left(\frac{t}{1-q} - x\right) \right), \quad (4.6.10)$$

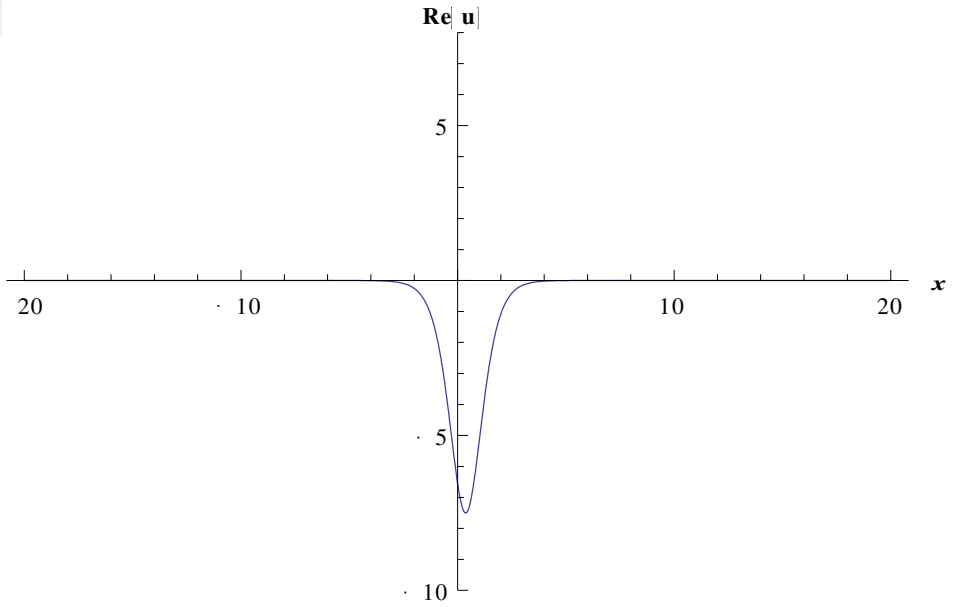
burada p, q reel sabitlerdir. ZK-BBM denkleminde SGEM ile elde edilen $u_2(x,t)$ kompleks hiperbolik dalga çözümünün uygun parametre değerlerine karşılık gelen yüzey grafikleri Wolfram Mathematica 9 programı kullanılarak aşağıdaki şekilde literatüre sunulmuştur.



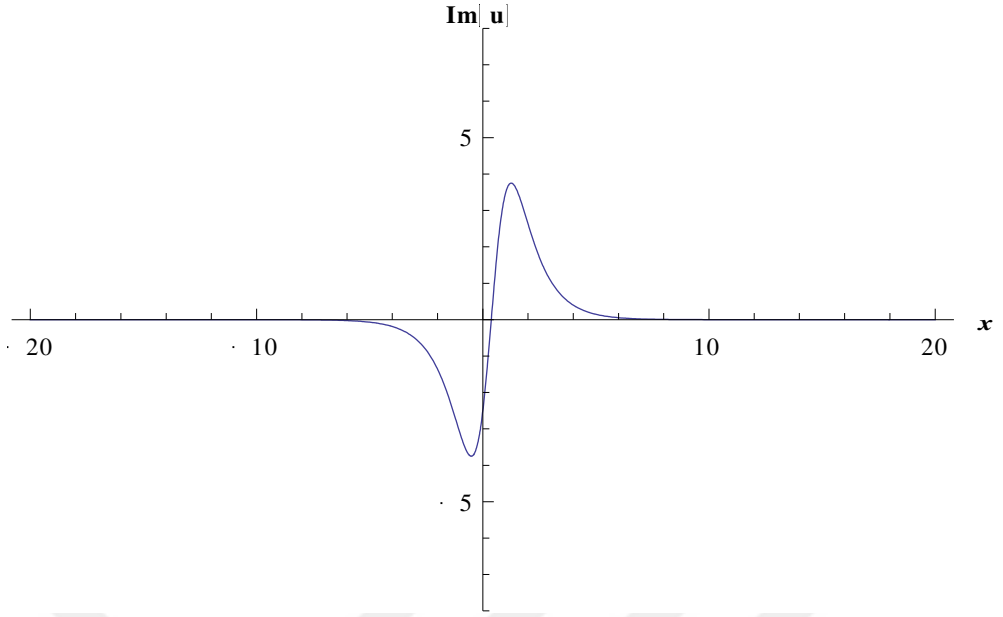
Şekil-29 (4.6.10) denkleminin reel kısmının 3 boyutlu yüzey grafiği
 $p = 0.1, q = 0.2, t = 0.3, -20 \leq x \leq 20, -15 \leq t \leq 15$.



Şekil-30 (4.6.10) denkleminin sanal kısmının 3 boyutlu yüzey grafiği
 $p = 0.1, \quad q = 0.2, \quad t = 0.3, -20 \leq x \leq 20, -15 \leq t \leq 15$



Şekil-31 (4.6.10) denkleminin reel kısmının 2 boyutlu yüzey grafiği
 $p = 0.1, \quad q = 0.2, \quad t = 0.3, -20 \leq x \leq 20.$



Şekil-32 (4.6.10) denkleminin sanal kısmının 2 boyutlu yüzey grafiği
 $p = 0.1, \quad q = 0.2, \quad t = 0.3, -20 \leq x \leq 20.$

5. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu çalışmada, geliştirilmiş Bernoulli alt denklem fonksiyon metodu ve sine-Gordon açılım metodu, (3+1)-boyutlu Kadomtsev-Petviashvili, (3+1)-boyutlu Schrödinger, Zakharov-Kuznetsov-Benjamin-Bona-Mahony denklemlerine başarılı bir şekilde uygulanmıştır.

İlk olarak (3+1)-boyutlu Kadomtsev-Petviashvili denklemi için IBSEFM ile elde edilen üstel fonksiyon çözümleri, literatürde var olan [29] trigonometrik fonksiyon çözümlerinden farklı ve yeni çözümlerdir. Yapılan algoritmada katsayıların farklı değerleri alınırsa (3+1)-boyutlu Kadomtsev-Petviashvili denklemi için daha fazla yeni analitik çözümleri elde etmek mümkündür. IBSEFM nin ikinci olarak uygulandığı (3+1)-boyutlu Schrödinger denklemi için elde edilen (4.2.13) kompleks üstel fonksiyon çözümü hiperbolik fonksiyon cinsinden aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir;

$$u = \left(iw\sqrt{\frac{6}{\gamma}} + \frac{2i\sqrt{6}Ew^2\sqrt{\cosh(f(x,y,z,t)) - \sinh(f(x,y,z,t))}}{d\sqrt{\gamma}\sqrt{\cosh(f(x,y,z,t)) + \sinh(f(x,y,z,t))} - Ew\sqrt{\gamma}\sqrt{\cosh(f(x,y,z,t)) - \sinh(f(x,y,z,t))}} \right) \times \frac{\sqrt{\cosh(ig(x,y,z,t)) + \sinh(ig(x,y,z,t))}}{\sqrt{\cosh(ig(x,y,z,t)) - \sinh(ig(x,y,z,t))}},$$

burada $f(x,y,z,t) = 2w(x+y+z-2(a+b+c)t)$, ve

$g(x,y,z,t) = ax + by + cz - (a^2 + b^2 + c^2 + 6w^2)t$ dir. Bu kompleks hiperbolik fonksiyon çözümü, literatürde bulunan çözümlerden [31] farklı ve yeni bir çözümdür. IBSEFM nin son olarak uygulandığı matematiksel model olan Zakharov-Kuznetsov-Benjamin-Bona-Mahony denklemi için elde edilen rasyonel üstel fonksiyon çözümü literatüre ilk defa sunulmuştur. Bu diferansiyel denklemler için elde edilen çözümler n, m, M nin minimum değerlerine göre bulunmuştur. Eğer n, m, M nin daha fazla değeri (3.1.4) de yerine yazılacak olursa, örneğin (3+1)-boyutlu Schrödinger denklemi için

$M = 4, m = 2$ ve $n = 5$ alınırsa

$$\Psi = \frac{a_0 + a_1F + a_2F^2 + a_3F^3 + a_4F^4 + a_5F^5}{b_0 + b_1F + b_2F^2}, \quad (5.1)$$

elde edilir. (5.1) denkleminin gerekli türevleri (4.2.3) denkleminde yerine yazılacak

olursa daha farklı sayıda denklem sistemi ve parametre elde edilecektir. Söz konusu parametreler daha yeni katsayı değerleri verecektir. Burada çözüm kabul edilen (5.1) denkleminin çözüm olabilmesi için $a_5 \neq 0, w \neq 0, d \neq 0$ ve $b_2 \neq 0$ şartını sağlaması gerekir. Burada M , m ve n nin değer verilmesinde bir üst sınır bulunmamaktadır. Söz konusu bu özellik Bernoulli alt denklem fonksiyonunun geliştirilmiş hali olan *geliştirilmiş Bernoulli alt denklem fonksiyon metodunun* en temel özelliklerinden biridir.

Sine-Gordon açılım metodu (3+1)-boyutlu Kadomtsev-Petviashvili diferansiyel denklemine uygulanarak salınımlı hiperbolik ve kompleks dalga çözümleri elde edilmiştir. Bu çözümler literatürde var olan [29] çözümlerle karşılaştırıldığında literatüre ilk defa sunulduğu gözlemlenmiştir. Sine-Gordon açılım metodunun uygulandığı bir diğer diferansiyel denklem olan (3+1)-boyutlu Schrödinger denklemi için elde edilen üstel kompleks hiperbolik çözümler kaynak makale [31] ile karşılaştırıldığında yeni çözümler olduğu görülmektedir. Analitik metotlardan olan sine-Gordon metodunun uygulandığı son diferansiyel denklem Zakharov-Kuznetsov-Benjamin-Bona-Mahony denklemi olup kompleks hiperbolik dalga çözümü elde edilmiştir. (4.6.8) ve (4.6.10) çözümleri M. Shakeel ve arkadaşları tarafından G'/G açılım metoduyla elde edilen [33] çözümlerden farklı ve yeni kompleks hiperbolik dalga çözümleridir. Elde edilen bu yeni çözümler sine-Gordon metodunun denklem sisteminden bulunmuştur. Bu denklem sisteminin başlıca özelliği trigonometrik özdeşlikleri kullanmasından kaynaklanmaktadır. Eğer denklem sisteminde bulunan değişkenlerin değerleri elde bulunamaması halinde trigonometrik özdeşlikleri kullanarak denklem sistemini çözülebilen bir denklem sistemine dönüştürmek mümkündür. Elde edilecek olan yeni denklem sisteminden kompleks çözümler bulunabilir. Bu kompleks çözümler, katsayıların kompleks olmasından dolayı daha farklı fiziksel özellikler vermektedir.

Elde edilen çözümlerde bulunan parametrelerin uygun değerleri göz önüne alınarak çizilen iki ve üç boyutlu grafikleri incelendiğinde beklenen fiziksel davranışı gösterdiği gözlemlenmiştir.

Bu çalışmada elde edilen bütün çözümler ve şekiller göz önüne alındığında, çok sayıda katsayı değerinin bulunması, hesaplamaların rahat yapılabilmesi, beklenen fiziksel özelliğin gözlemlenmesi, bu metotların güçlü yöntemler olduğunu göstermektedir.

KAYNAKÇA

- [1] C. J. Silva, D. F.M. Torres, *Optimal control for a tuberculosis model with reinfection and post-exposure interventions*, **Math. Bio.**, 244, (2013),154–164,.
- [2] A. Atangana, and N. Bildik, *Approximate Solution of Tuberculosis Disease Population Dynamics Model*, **Abstract and App. An.**, 759801, (2013),8.
- [3] K. Castro, “*Global Tuberculosis Challenges*”, **Emerging infectious disease**, 4(3), (1998), 408-409.
- [4] T. Goldstein, F. Zhou, S. C. Hadler, S. Marglis, *A mathematical model to estimate global hepatitis B disease burden and vaccination impact*, **Inter. journal of Epid.**, 34(6), (2005), 1329-1339.
- [5] R. Hedayati, S. Jafari, S. Batebi, *Free-electron Dynamics and gain in a free-electron laser based on the laser-pumped wiggler*, **Optik**, 127(11), (2016), 4639-4644.
- [6] M. Salik, M. Hanif, J. Wang, X.Q. Zhang, *Laser based diagnostics of slaked lime plasma*, **Optik**, 127(4), (2016), 1940-1945.
- [7] S. Tseng, J.P. Hsu, *A stochastics analysis of the repair of radiation-induced DNA double-strand breaks*, **Math. Bio.**,100(1), (1990), 21-31.
- [8] J. Manafian, M. Lakestani, *Application of $\tan(\phi/2)$ -expansion method for solving the Biswas–Milovic equation for Kerr law nonlinearity*, **Optik**, 127(4), (2016), 2040-2054.
- [9] J. Manafian, *Optical soliton solutions for Schrödinger type nonlinear evolution equations by the $\tan(\Phi(\xi)/2)$ -expansion method*, **Optik**, 127(10), (2016),4222-4245.
- [10] J. Manafian, M. Lakestani, *Abundant soliton solutions for the Kundu-Eckhaus equation via $\tan(\phi(\xi))$ -expansion method*, **Inter. Jou. for Light and Elect.** (2016).
- [11] G. Baumann, J.D. Bond, *A novel molecular interpretation of the Hodgkin-Huxley model of electrical excitability*, **Math. Bio.** 39(3-4), (1978), 291-297.
- [12] N. Umetani, R. Schmidt and J. Stam, *Position-based Elastic Rods*, **Symposium on Computer Animation**, (2014), 1–10.
- [13] J.T. Miller, T. Su, J. Pabon, N. Wicks, K. Bertoldi, P.M. Reis, *Buckling of a thin elastic rod inside a horizontal cylindrical constraint*, **Extreme Mechanics Letters**, 3, (2015), 36-44.

- [14] Á. Rodríguez-Arós, J.M. Viaño, *A bending-stretching model in adhesive contact for elastic rods obtained by using asymptotics methods*, **Nonli. Anal. Real World App.**, 22, (2015), 632-644.
- [15] J.G. Murphy, *The stability of thin, stretched and twisted elastic rods*, **Inter. J.of Non-Linear Mechanics**, 68, (2015), 96-100.
- [16] M. Luo, H. Xie, L. Xie, P. Cai and L. Gu, *A robust and real-time vascular intervention simulation based on Kirchhoff elastic rod*, **Com. Medical I. and Grap.**, 38(8), (2014), 735-743.
- [17] B. Fuchssteiner, S. Carillo, *A new class of nonlinear partial differential equations solvable by quadratures*, **Trends in Teaching and Research**, (1992), 73-85.
- [18] W. X. Ma, B. Fuchssteiner, *Explicit and exact solutions to a Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov equation*, **I.J.of Non-Linear Mechanics**, 31(3), (1996), 329-338.
- [19] B. Zheng, *A new Bernoulli sub-ODE method for constructing traveling wave solutions for two nonlinear wquations with any order*, **U. P. B. Sci. Bull., Series A**, 73,(2011), 3.
- [20] A. Salam, S. Uddin, P. Dey, *Generalized Bernoulli sub-ODE method and its Applications*, **Annals Pure and Applied math** , 10 (1), (2015), 1-6.
- [21] H.M. Baskonus, H. Bulut ,*on the complex structures of Kundu Eckhaus equation via improved Bernoulli Sub-equation function method* , **waves in Random and complex media**, 25(4) ,(2015),720-728.
- [22] H. Bulut, G. Yel, H.M. Baskonus, *An Application Of Improved Bernoulli Sub-Equation Function Method To The Nonlinear Time-Fractional Burgers Equation*, **Turkish J. of Math. and Com. Sci.**, 5, (2016), 1-7.
- [23] T. A. Sulaiman, A. Yokus, N. Gulluoglu, H. M. Baskonus, *Regarding the numerical solutions of the Sharma-Tasso-Olver equation*, **ITM web of conferences**, 22, (2018).
- [24] C. Yan, *A simple transformation for nonlinear waves*, **Physics Letters A**, 224, (1996), 77-84.
- [25] Z. Yan, H. Zhang, *New explicit and exact travelling wave solutions for a system of variant Boussinesq equations in mathematical physics*, **Physics Letters A**, 252, (1999), 291-296.

- [26] Y. Chen, Z. Yan, *New exact solutions of (2+1)-dimensional Gardner equation via the new sine-Gordon equation expansion method*, **Chaos Solitons and Fractals**, 26, (2005), 399-406.
- [27] G. Betchewe, B. B. Thomas, K. K. Victor, K. T. Crepin, *Explicit series solutions to nonlinear evolution equations: The sine-cosine method*, **Applied Mathematics and Computation**, 215, (2010), 4239-4247.
- [28] H. M. Baskonus, *New acoustic wave behaviors to the Davey-Stewartson equation with power law nonlinearity arising in fluid Dynamics*, **Nonlinear Dyn.**, 86, (2016), 177-183.
- [29] A. Bekir, F. Uygun, *Exact travelling wave solutions of nonlinear evolution equations by using the (G'/G) -expansion method*, **Arab j. of Math. Sci.**, 18, (2012), 73-85.
- [30] F. Xie, Y. Zhang, Z. Lu, *Symbolic computation in non-linear evolution equation: application to (3+1)-dimensional Kadomtsev-Petviashvili equation*, **Chaos solitons and Fractals**, 24, (2005), 257-263.
- [31] S. Arbabi, M. Nafaji, *Exact solitary wave solutions of the complex nonlinear Schrödinger equations*, **Optik**, (2016).
- [32] L. Gagnon, P. Winternitz, *Exact solutions of the spherical quintic nonlinear Schrödinger equation*, **Physics Letter A**, 134(5), (1989).
- [33] M. Shakeel, S. Taussef, *New (G'/G) expansion method and its application to the Zakharov-Kuznetsov-Benjamin-Bona-Mahony equation*, **J. of the Association of Arab U. for Basic and App. Sci.**, 18, (2015), 66-81.
- [34] A. R. Seadawy, D. Lu, M. M. A. Khater, *Solitary wave solutions for the generalized Zakharov-Kuznetsov-Benjamin-Bona-Mahony nonlinear evolution equation*, **J. of Ocean Engineering and Science**, 2, (2017), 137-142.
- [35] B. Çağal, *Sayısal Analiz*, Birsen Yayınevi, İstanbul, 1989.
- [36] E. Anar, *Kısmi diferansiyel denklemler*, Palme Yayıncılık, İstanbul, 2007.
- [37] Miraç Kayhan, *Kesirli kısmi diferansiyel denklemlerin sonlu farklar ve adomian ayrışım metodu ile çözümü*, Yüksek Lisans Tezi, F.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ, 2013.
- [38] İ.B. Yaşar, *Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları*, Siyasal Kitabevi, Ankara, 2005.

- [39] S. Duran, *Bazı lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin özel dönüşümler yardımıyla dalga çözümleri ve bu çözümlerin analizleri*, F. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ, 2012.
- [40] H. Steven, *Differential Equations for Dummies*, Wiley Publishing, 2008.
- [41] B. Richard, *Differential Equations*, McGraw Hill, 2003.
- [42] M. Sezer, A. Dascıoğlu, *Diferansiyel denklemler 1*, Dora yayın, 2016.
- [43] Y. Uğurlu, *Bazı Lineer Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Periyodik Dalga Çözümleri*, Doktora Tezi, F.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ, 2010.
- [44] M. Balcı, Analiz II, *Balcı Yayınları*, Ankara, 1988.
- [45] H. Bulut, T. A. Sulaiman, H. M. Baskonus, A. A. Sandulyak, *New solitary and optical wave structures to the (1+1) dimensional combined KdV-mKdV equation*, **Optik**, 135, (2017), 327-336.
- [46] E. Cavlak, *Kesirli Kuvvetlere Sahip Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Homotopi Analiz Yöntemi ile Sayısal Çözümlerinin İrdelenmesi*, Doktora Tezi, F.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ, 2013.
- [47] H. M. Baskonus, *Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemlerine Varyasyonel İterasyon Metodunun Uygulanması*, Doktora Semineri, F.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ, 2012.
- [48] H. Bulut, T. A. Sulaiman, H. M. Baskonus, *New solitary and optical wave structures to the Korteweg-de Vries equation with dual-power law nonlinearity*, **Opt Quant Electron**, 48(12), (2016), 564, 1-14.
- [49] H. M. Baskonus, H. Bulut, *New complex exact traveling wave solutions for the generalized-Zakharov equation with complex structures*, **IJOCTA**, 6(2), (2016), 141-150.

ÖZGEÇMİŞ

1990 yılında Malatya’da doğmuşum. İlk ve Orta eğitim-öğretimimi Melek Hatun İlköğretim okulunda ve Lise eğitim-öğretimimi ise Şehremini Lisesinde tamamladım. 2007 yılında İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Lisans öğrenimine başladım. 2011 yılında tamamlayarak aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladım ve 2013 yılında Yüksek Lisansı bitirdim. Aynı yıl İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında Doktora çalışmasına başladım.

