

GENEL BİÇİMLİ KABUKLAR İÇİN BİR SONLU ELEMAN

FORMÜLASYONU

DOKTORA TEZİ

İnş.Yük.Müh. Tülay AKSU

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 28 Nisan 1993

Tezin Savunulduğu Tarih : 30 Haziran 1993

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Nahit KUMBASAR

Diğer Jüri Üyeleri : Prof.Dr. Yalçın AKÖZ

: Prof.Dr. Gülay AŞKAR

HAZİRAN 1993

ÖNSÖZ

Çalışmalarımın her aşamasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen, sürekli destek olan Sayın Hocam Prof. Dr. Nahit KUMBASAR'a sonsuz teşekkürü zevkli bir görev sayarım.

Ayrıca tezin yazımı aşamasında yardımcı olan Yük. Müh. Attila Özütok ve Fatma Sarı'ya da teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

NOTASYON LİSTESİ	vi
ŞEKİL LİSTESİ	ix
TABLO LİSTESİ	xi
ÖZET	xii
SUMMARY	xiii
BÖLÜM 1 GİRİŞ	1
1.1 Konu	1
1.2 Kabuklar İle İlgili Teorik Çalışmalar	
1.3 Sonlu Eleman Metodu Uygulamalarının..	2
Kabuklarda Geçirdiği Aşamalar	3
BÖLÜM 2 GENEL BİÇİMLİ KABUK TEORİSİ	6
2.1 Varsayımlar	6
2.2 Yüzey Geometrisi	7
2.2.1 Yüzeyin I. ve II. Ana Formu	7
2.2.2 Kabuk Geometrik Büyüklükleri	10
2.3 Yer Değiştirme-Şekil Değiştirme Ba- ğıntıları	11
2.4 Gerilme-Şekil Değiştirme Bağntıları İle Kesit Tesirleri	15
BÖLÜM 3 GENEL BİÇİMLİ KABUK İÇİN FONKSİYONELİN ELDE EDİLMESİ	18
3.1 Kabuklarda Şekil Değiştirme Enerjisi.	18
3.2 Mevcut Çalışmalar	18
3.3 Geliştirilmiş Şekil Değiştirme Ener- jisi İfadesi	20
BÖLÜM 4 SONLU ELEMAN YÖNTEMİ	31
4.1 Yöntemin Esası	31
4.2 Yer Değiştirme Yöntemi	31
4.3 Sonlu Eleman Karakteristiklerinin Formülasyonu	32
4.3.1 Yer Değiştirme Fonksiyonu	32
4.3.2 Şekil Değiştirmeler	33

4.3.3 Gerilmeler	34
4.3.4 Eşdeğer Düğüm Noktası Kuvvetleri ..	34
4.3.5 Minimum Potansiyel Enerji Prensibi ..	34
4.4 Sistemin Çözümlemesi	37
4.5 Sayısal Entegrasyon	39
BÖLÜM 5 GENEL BİÇİMLİ KABUK İÇİN İZOPARAMETRİK BİR SONLU ELEMAN	41
5.1 Genel Açıklama	41
5.2 Geliştirilen Sonlu Eleman	42
5.3 Geliştirilen Genel Sonlu Elemanın Formülasyonu	45
5.3.1 Gerilmelerle Şekil Değiştirmeler Arasındaki Bağlıntılar	45
5.3.1.1 Mambran Etki, Eğilme Etkisi, Kayma Etkisi	45
5.3.1.2 Ek Terimlerin Etkisi	50
5.3.2 Şekil Değiştirmelerle Yer Değiştirmeler Arasındaki Bağlıntılar	52
5.3.2.1 $[B]_1$ Matrisinin Oluşturulması ...	53
5.3.2.2 $[B]_2$ Matrisinin Oluşturulması ...	56
5.4 Kayma Kilitlenmesi	59
5.5 Eleman Rijitlik Matrisinin Elde Edilmesi	59
5.6 Eğilme ve Kayma Terimlerinin Ayrılması	61
5.6.1 $[D]_b$ ve $[D]_s$ Matrislerinin Belirlenmesi.	61
5.6.2 $[B]_b$ ve $[B]_s$ Matrislerinin Belirlenmesi.	62
5.7 Yükleme Matrisleri	64
5.8 Gerilmeler	67
BÖLÜM 6 SONLU ELEMANLARDA KABUK GEOMETRİK BÜYÜKLÜKLERİ	70
6.1 Koordinat Dönüşümünde Biçim Fonksiyonlarının Kullanılması	70
6.2 Kabuk Geometrik Büyüklükleri Üzerine Yapılan Çalışmalar	72
6.3 Yüksek Mertebeden Terimler İçeren Biçim Fonksiyonlarının Elde Edilmesi ..	74
6.4 Yüksek Mertebeden Biçim Fonksiyonlarının Türevleri	79
6.5 Kabuk Geometrik Büyüklükleri İçin Sayısal Örnekler	80

BÖLÜM 7	SAYISAL ÖRNEKLER	88
7.1	Örnek 1	88
7.2	Örnek 2	90
7.3	Örnek 3	91
7.4	Örnek 4	95
7.5	Örnek 5	99
7.6	Örnek 6	101
BÖLÜM 8	BİLGİSAYAR PROGRAMI	109
8.1	Programın Yapısı ve Çalışma Düzeni	109
8.2	Programın Kullanılması	117
8.2.1	Giriş Bilgileri	117
8.2.2	Çıkış Bilgileri	121
SONUÇLAR		122
KAYNAKLAR		126
ÖZGEÇMİŞ		133



NOTASYON LİSTESİ

α_1, α_2	: Yüzeyin eğrisel koordinatları.
α_1, α_2, z	: Kabuk ortalama yüzeyinden geçen eksen takımı.
$\vec{r}$	: Ortalama yüzeydeki bir noktanın konum vektörü.
X, Y, Z	: Kartezyen koordinatlar.
$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$	: Kartezyen koordinatlarda birim vektörler.
$\vec{n}$	: Yüzeyin birim normal vektörü.
A_1, A_2	: Yüzey baz vektörlerinin şiddeti.
dS_1, dS_2	: Elemanın sırası ile α_2 =sabit ve α_1 =sabit eğrileri boyunca ortalama yüzey üzerindeki kenar boyları.
$\frac{\vec{r}}{r}$	: Ortalama yüzeyden z mesafedeki bir noktanın konum vektörü.
$dS_1(z), dS_2(z)$	: Elemanın sırası ile α_2 =sabit ve α_1 =sabit eğrileri boyunca ortalama yüzeyden z mesafedeki kenar boyları.
$d\Sigma_1, d\Sigma_2$	: Elemanter şerit alanları.
K_n	: Yüzeyin eğriliği.
R_1, R_2	: Ortogonal koordinat sisteminde α_2 =sabit ve α_1 =sabit eğrilere ait eğrilik yarıçapları.
U, V, W	: α_1, α_2 ve z kabuk koordinatları doğrultusundaki yer değiştirmeler.
u, v, w	: Ortalama yüzeyin kabuk koordinatları doğrultusundaki yer değiştirmeleri.
α, β	: α_1 ve α_2 koordinat eğrileri teğetinin dönme miktarı.
$\epsilon_1, \epsilon_2, \gamma_{12}$	: Kabuk orta yüzeyinden z mesafedeki birim uzamalar ve birim kayma açısı.
γ_{12}, γ_{22}	: Kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmeleri.
$\epsilon_1^0, \epsilon_2^0, \gamma_{12}^0$	: Ortalama yüzeyin birim uzamaları ve birim kayma açısı.
χ_1, χ_2, τ	: Ortalama yüzeyin eğrilik değişimleri ve burulma eğriliği.
$\gamma_{12}^0, \gamma_{22}^0$	: Ortalama yüzeyin kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmeleri.
σ_1, σ_2	: Eleman yüzlerine etki eden normal gerilmeler.

τ_{12}, τ_{21}	: Ortalama yüzeye paralel olan kayma gerilmeleri.
τ_{1z}, τ_{2z}	: Ortalama yüzeyin normali doğrultusunca etki eden kayma gerilmeleri.
E, ν, G	: Elastisite modülü, Poisson oranı, Kayma modülü.
N_1, N_2	: Eksenel normal kuvvetler.
N_{12}, N_{21}	: Kayma kuvvetleri.
M_1, M_2	: Eğilme momentleri.
M_{12}, M_{21}	: Burulma momentleri.
T_1, T_2	: Kesme kuvvetleri.
h	: Kabuk kalınlığı.
V	: İç kuvvet durumunun şekil değiştirme enerjisi.
W	: Yük sisteminin potansiyel enerjisi.
π	: Toplam potansiyel enerji.
Q_0	: Şekil değiştirme enerjisine ortalama yüzeydeki birim uzamaların ve birim kayma açısının katkısı.
Q_2	: Şekil değiştirme enerjisine eğilme terimlerinin katkısı.
Q_3	: Şekil değiştirme enerjisine kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmelerinin katkısı.
$\{ \}$	: Vektör gösterimi.
$[]$	: Matris gösterimi.
$[]^T$	: Matrisin transpozu.
$[N]$	: Biçim fonksiyonları.
$[N_p]$	: Yayılı yükü tanımlayan biçim fonksiyonları.
$\{P\}^e$	: Eleman düğüm noktalarındaki yük değerleri.
$\{P\}$	: Yayılı yük fonksiyonlarından oluşan vektör.
$\{F\}_p^e$	: Yayılı yüklerden oluşan düğüm noktası kuvvetleri.
$\{F\}^e$	: Elemanın eşdeğer düğüm noktası kuvvetleri.
$\{\delta\}^e$	: Elemanın düğüm noktası yer değiştirmeleri.
$[k]^e$	: Eleman rijitlik matrisi.
$[k]_1^e$	: Mambran etki, eğilme etkisi ve kayma etkisinden oluşan eleman rijitlik matrisi.
$[k]_b^e$	: Mambran etki ve eğilme etkisinden oluşan eleman rijitlik matrisi.
$[k]_s^e$	: Kayma terimlerinden oluşan eleman rijitlik matrisi.
$[k]_2^e$	: Yapılan iyileştirmeden kaynaklanan ek eleman rijitlik matrisi.
$\{\varepsilon\}^e$	: Eleman şekil değiştirme vektörü.
$[B]$	: Şekil değiştirmeleri yer değiştirmelere bağlayan matris.
$\{\sigma\}^e$	: Eleman gerilme vektörü.

$[D]$	:	Elastisite matrisi.
$[S]^e$	:	Eleman gerilme matrisi.
$[D]_1$	:	Mambran etki, eğilme etkisi ve kayma etkisini gösteren gerilme-şekil değiştirme matrisi.
$[D]_2$	:	İyileştirmeden kaynaklanan ek terimlerin gerilme-şekil değiştirme matrisi.
$[B]_1$	:	Mambran, eğilme ve kayma şekil değiştirmelerini yer değiştirmelere bağlayan matris.
$[B]_2$	:	İyileştirmeden kaynaklanan ek terimlerin şekil değiştirmelerini yer değiştirmelere bağlayan matris.
$[\bar{N}]$	:	Yüzey geometrisini tanımlayan biçim fonksiyonları.
w_i	:	Sayısal integrasyonda Gauss ağırlık fonksiyonları.



ŞEKİL LİSTESİ

- Şekil 2.1: Yüzeyin eğrisel koordinatları.
Şekil 2.2: Yüzey büyüklükleri.
Şekil 2.3: Kabuk elemanda gerilmeler.
Şekil 2.4: Kabuk elemanda kuvvet ve moment bileşenleri.
- Şekil 5.1: İzoparametrik kabuk sonlu eleman.
- Şekil 6.1: Yüksek mertebeden terimler içeren sonlu eleman.
Şekil 6.2: Küresel kabuk ve paraboloid kabuk eleman.
- Şekil 7.1: Dönel silindirik yüke maruz sonsuz uzun silindirik kabuk.
Şekil 7.2: Dönel simetrik çizgisel yüke maruz silindirik kabuk.
Şekil 7.3: Eşkenar hiperbolik paraboloid kabuk.
Şekil 7.4: a) Hiperbolik paraboloid kabuğun x eksenini boyunca w yer değiştirme eğrisi.
b) Hiperbolik paraboloid kabuğun x eksenini boyunca M_y moment eğrisi.
Şekil 7.5: Eliptik paraboloid kabuk.
Şekil 7.6: Eliptik paraboloid kabuk için $\overline{AB}$ boyunca w yer değiştirmesi dağılımı.
Şekil 7.7: Eliptik paraboloid kabuk için $\overline{AB}$ boyunca Membran kuvvetlerin dağılımı.
Şekil 7.8: Eliptik paraboloid kabuk için $\overline{AB}$ boyunca M_x eğilme momenti dağılımı.
Şekil 7.9: Eliptik paraboloid kabuk için $\overline{AB}$ boyunca M_y eğilme momenti dağılımı.
Şekil 7.10: Kesik küresel kabuk.
Şekil 7.11: Sabit iç basınca maruz dönel simetrik kabuk.
Şekil 7.12: ($x=2.5h$ ve $z=0.8h$) kesitindeki σ_1 teğetsel gerilmesinin kalınlık boyunca dağılımı.
Şekil 7.13: ($x=2.5h$ ve $z=0.8h$) kesitindeki σ_2 meridyen boyunca olan gerilmenin kalınlık boyunca dağılımı.
Şekil 7.14: ($x=2.5h$ ve $z=0.8h$) kesitindeki τ_{22} kalınlık doğrultusundaki kayma gerilmesinin kalınlık boyunca dağılımı.
Şekil 7.15: ($x=2.5h$ ve $z=4.2h$) kesitindeki σ_1 teğetsel gerilmesinin kalınlık boyunca dağılımı.

- Şekil 7.16: ($x=2.5h$ ve $z=4.2h$) kesitindeki σ_2 meridyen boyunca olan gerilmenin kalınlık boyunca dağılımı.
- Şekil 7.17: ($x=2.5h$ ve $z=4.2h$) kesitindeki τ_{zz} kalınlık doğrultusundaki kayma gerilmesinin kalınlık boyunca dağılımı.
- Şekil 7.18: ($x=2.5h$ ve $z=4.4h$) kesitindeki σ_1 teğetsel gerilmesinin kalınlık boyunca dağılımı.
- Şekil 7.19: ($x=2.5h$ ve $z=4.4h$) kesitindeki σ_2 meridyen boyunca olan gerilmenin kalınlık boyunca dağılımı.
- Şekil 7.20: ($x=2.5h$ ve $z=4.4h$) kesitindeki τ_{zz} kalınlık doğrultusundaki kayma gerilmesinin kalınlık boyunca dağılımı.
- Şekil 8.1: AK03 ana program akış şeması.
- Şekil 8.2: Kabil alt programının akış şeması.
- Şekil 8.3: Kabel alt programının akış şeması.
- Şekil 8.4: Kumri alt programının akış şeması.
- Şekil 8.5: Kumger alt programının akış şeması.
- Şekil 8.6: Tuger alt programının akış şeması.

TABLO LİSTESİ

- Tablo 6.1: Küresel kabuk elemanlar için A_1 ve A_2 geometrik büyüklükleri.
- Tablo 6.2: Küresel kabuk elemanlar için R_1 ve R_2 geometrik büyüklükleri.
- Tablo 6.3: Paraboloid kabuk elemanlar için A_1 ve A_2 geometrik büyüklükleri.
- Tablo 6.4: Paraboloid kabuk elemanlar için R_1 ve R_2 geometrik büyüklükleri.
- Tablo 6.5: Küresel ve paraboloid kabuk elemanları için A_2 büyüklüğünün türevleri.
- Tablo 7.1: Dönel silindirik yüke maruz sonsuz uzun silindirik kabuk için elde edilen wE/pa ve σ/p değerleri.
- Tablo 7.2: Dönel simetrik çizgisel yüke maruz silindirik kabuk için wEh/Pa değerleri.
- Tablo 7.3: Hiperbolik paraboloid kabuğun merkezindeki w yer değiştirmesi.
- Tablo 7.4: Üniform yük altında dört kenarından basit mesnetli eliptik paraboloid kabuğun orta noktasındaki yer değiştirmesi ($w \times 1000$).
- Tablo 7.5: Yarım küresel kabuk için yükün etkidiği noktadaki w yer değiştirmesi.
- Tablo 8.1: AK03 programına bilgi aktarımı.

ÖZET

Kabuklar hem matematik formülasyonu hem de geometrisi nedeni ile karmaşık yapı sistemleri olarak bilinirler. Pek çok mühendislik yapısında karşılaşılan, eğilme tesirlerinin önemli olduğu genel biçimli kalın sayılabilecek kabukların kullanımının artması sonucu Kirchoff-Love hipotezi yerine daha doğru bir teori geliştirmek zorunlu olmuştur. Kalın sayılabilecek kabuklar için geliştirilmiş bir çözüm yolu olarak yer değiştirmelerin kalınlık doğrultusundaki değişimi için bir seri alınması ve bu serinin yeterli sayıda teriminin hesaba katılması söylenebilir. Bilgisayara uygulanması açısından elverişli olmayan bu yöntem yerine daha yaklaşık bir yöntem olarak kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmeleri gözönüne alınmakta veya (z/R) terimi 1'in yanında ihmal edilmeyerek hesaba katılmaktadır.

Bu çalışmada, kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmelerini ve yarıçap yanında kalınlığın etkisini de hesaba katarak genel biçimli kabuklar için bir şekil değiştirme enerjisi ifadesi elde edilmiştir. Elde edilen bu fonksiyonel yardımı ile yer değiştirmelerin bilinmeyen olarak tanımlandığı eğrisel izoparametrik bir dörtgen eleman geliştirilmiştir.

Sonraki aşamada, kabuk geometrik büyüklüklerini daha iyi tanımlamak amacı ile eğrilik değişiminin yeter yaklaşıklıkta ifade edilemediği doğrultuda eleman kenarlarındaki nokta sayısı artırılarak ve Lagrange interpolasyon fonksiyonlarından yararlanarak yüksek mertebeden terimler içeren biçim fonksiyonları elde edilmiştir.

Problemlerin çözümü için Fortran kodlama dilinde bir bilgisayar programı hazırlanmıştır. Geliştirilen sonlu elemanın yaklaşıklık derecesi değişik yükleme ve sınır koşulları altında genel biçimli kabuklarda belirlenmeye çalışılmış ve sonuçlar mühendislik açısından yeterli düzeyde bulunmuştur.

SUMMARY

A FINITE ELEMENT FORMULATION FOR MODERATELY THICK SHELLS OF GENERAL SHAPE

Shells are known as complex, structural systems due to complexity in mathematical formulation and geometric shape. For that reason, both in theoretical and experimental analysis, certain problems were met and only systems with severely idealized situations under certain conditions were solvable.

With the development of computer systems, numerical analysis has become an essential tool in engineering mechanics and finite element method came into definition as an extension to matrix structural analysis. The finite element method has made possible the development of computer programs which may be used for analyzing complete arbitrary structural systems.

Different methods of analysis are used for analysis of shells to obtain adequate solutions, with increasing thickness-radius ratio. On the other hands, thickness shear deformations and the ratio z/R near unity is neglected for thin shells. They have to be considered for moderate ones, while asymptotic expansions or basic equations of elasticity must be used for thicker shells.

One of the refined solutions for small deflections theory of shells is to express the displacements in power series taking into account of sufficient number of terms, instead of using Kirchhoff-Love hypothesis. There are various solution methods developed especially for the computer application, where thickness shear deformation is taken into account and the first three terms of power series of $1/(1+z/R)$ are considered for integration, as $(1-z/R+z^2/R^2)$.

Novozhilov, stated that additional terms of refinements of order $(h/R)^2$ will not yield any significant improvement, since due to the Kirchhoff-Love hypothesis, there is an admissible error of the order h/R in the expression of the potential energy. He has deduced in this regard that, additional terms in potential energy originated by including the terms z/R , instead of neglecting in comparison with unity, will be in order of h/R or $(h/R)^2$, assuming the bending and membrane stresses are of the same order.

The most important part of the error originated from the Kirchhoff-Love hypothesis is due to the neglect of thickness shear deformation. The ratio of maximum shear to normal stresses in a cylindrical shell is of order h/R for axially symmetrical loads. This order may be accepted for several types of shells considering the Geckeler approximation. Inclusion of the shear deformation will thus add terms of error of the same order, the inclusion of these terms may be considered as consistent and necessary.

In this thesis, an expression for the potential energy of a shell of general shape, including thickness shear deformation and without neglecting z/R in comparison with unity, is derived. Then a finite element formulation based on this functional is obtained.

The following assumptions are considered;

-The transverse normal stress is small compared with the other normal stress components and may be neglected.

-Strains and displacements are sufficiently small so that the quantities of second and higher order magnitude in the strain-displacement relations may be neglected in comparison with the first-order terms.

-In moderately thick shells (z/R) is included instead of neglecting in comparison with unity.

-Normals to the undeformed middle surface remain straight but not perpendicular to the deformed surface.

-Hooke's Law is valid.

$\epsilon_1, \epsilon_2, \gamma_{12}, \gamma_{1z}, \gamma_{2z}$ strain-displacement relations obtained in three dimensional elasticity for small displacements can be expressed in terms of shell coordinates α_1, α_2, z and the displacements U, V, W along these coordinate directions. These expressions are the same as those used by Novozhilov except the thickness shear deformations. Considering the strains obtained, together with Hooke's Law and inserting in the expression.

$$V = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_1 \epsilon_1 + \sigma_2 \epsilon_2 + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{12} \gamma_{12} + \tau_{1z} \gamma_{1z} + \tau_{2z} \gamma_{2z}) dv$$

various types of integrals, depending on z , are encountered. It is possible to integrate them with respect to z and find exact expressions instead of expanding $1/(1+z/R)$ in power series. They may be used for solutions having the desired degree of accuracy.

Some typical integrations are given below:

$$\int_{-h/2}^{+h/2} \frac{dz}{R_i + z} = \ln \frac{1+h/2R_i}{1-h/2R_i} = \frac{h}{R_i} (1+Z_i)$$

Where,

$$Z_i = \frac{R_i}{h} \ln \frac{1+\frac{h}{2R_i}}{1-\frac{h}{2R_i}} - 1$$

or

$$Z_i = \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2R_i} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{h}{2R_i} \right)^4 + \frac{1}{7} \left(\frac{h}{2R_i} \right)^6 + \frac{1}{9} \left(\frac{h}{2R_i} \right)^8 + \dots$$

These integrals may be obtained in terms of Z_i . The strain energy may be formed after performing all of these integrals and a field integral is obtained in the result. In order to obtain an expression similar to those obtained in previous works, one may write

$$V = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_A Q_0 dA + \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \int_A Q_2 dA + \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_A Q_3 dA$$

in which Q_3 represents the effects of thickness shear stresses. Where

$$Q_0 = \left(\epsilon_1^0 + \epsilon_2^0 \right)^2 - 2(1-\nu) \left(\epsilon_1^0 \epsilon_2^0 - \frac{\gamma_{12}^{02}}{4} \right)$$

which is the same expression given by Novozhilov. In order to make the expression Q_2 similar to Q_2 given by Novozhilov and retain the terms consistent with the accuracy of the present analysis, one may write.

$$Z_1 \cong \frac{h^2}{12R_1^2}, \quad Z_2 \cong \frac{h^2}{12R_2^2}$$

Thus the followings are obtained.

$$\begin{aligned}
 Q_2 = & \left(\chi_1 + \chi_2 \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\chi_1 \chi_2 - \frac{\tau}{4} \right] + \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \left[\frac{\varepsilon_1}{R_1} - \frac{\varepsilon_2}{R_2} \right] - \\
 & - 2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \left[\varepsilon_1^{\circ} \chi_1 - \varepsilon_2^{\circ} \chi_2 \right] + \frac{1}{2} (1-\nu) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \left[\frac{\gamma_1^{\circ 2}}{R_1} - \frac{\gamma_2^{\circ 2}}{R_2} \right] - \\
 & - (1-\nu) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \left[\gamma_1^{\circ} \tau_1 - \gamma_2^{\circ} \tau_1 \right] \\
 \\
 Q_3 = & \frac{3}{5} (1-\nu) \left[\gamma_{1z}^{\circ 2} + \gamma_{2z}^{\circ 2} \right]
 \end{aligned}$$

The reason for the difference of Q_2 from that given by Novozhilov is the independence of the functions α and β from the displacements u, v, w , due to the inclusion of shear deformations. An additional strain energy term Q_3 is also obtained due to the same reason. This formulation of the functional were not met in the literature survey.

A curved isoparametric trapezoidal finite element formulation based on this expression for the potential energy of a shell of general shape, including thickness shear deformation and without neglecting z/R in comparison with unity, is derived. The shell element has eight nodes and at each node three displacements at the directions of the local coordinates and two rotations are defined i.e. a total of five parameters. To obtain element stiffness matrices, shape functions and derivatives of shape functions of this element are used.

Shape functions of the shell finite element with eight nodes are used to describe the surface geometry similar to the calculation of element stiffness matrices. But in existing study, the level of approximation obtained for the geometrical values are indicated insufficient. For that reason, a finite element shape function presented in this study contains high degree terms to describe the surface geometry better. The approach in the geometry calculation is improved with shape functions, that are found by increasing the number of points on two sides of the element and making use of the Lagrange interpolation functions.

These shape functions are;

$$\bar{N}_i = \frac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i) \left[\xi\xi_i + (1-\eta\eta_i) \left(-\frac{4}{3}\eta^2\eta_i^2 - \frac{4}{3}\eta\eta_i - 1 \right) \right] \quad i=1,2,3,4$$

at the corner nodes, and

$$\xi_i=0, \quad \bar{N}_i = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta\eta_i) \quad i=6,8$$

$$\eta_i=0, \quad \bar{N}_i = 2(1+\xi\xi_i)(\eta^2-1)(\eta^2-1/4) \quad i=5,7$$

$$\eta_i=\pm 1/2, \quad \bar{N}_i = -\frac{4}{3}(1+\xi\xi_i)\eta(\eta^2-1)(\eta+\eta_i) \quad i=9,10,11,12$$

at the middle nodes.

The level of approximation obtained for the geometrical values are indicated in the numerical examples.

Shape functions with high degree terms are used only to describe the surface geometry. In the calculation of element stiffness matrices shape functions with quadratic terms are preferred. In the solution of a problem, data enter in respect of the finite element with twelve nodes, that contains high degree terms. When displacements which belong to last four nodes enter as zero, using different elements doesn't form any difficulty during data input.

A computer program, written in Fortran programming language is developed for the analysis of moderately thick shells of general shape.

Accuracy of finite element solutions of moderately thick shells of general shape is shown on examples. Looking from the view of necessary engineering precision, the comparison of the results with the examples given in the literature has shown in good agreement.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Konu

Kabuklar kesin çözüm açısından yapı sistemleri içinde gerek matematik ve gerekse geometrik yapı olarak karmaşık sistemler arasındadır. Bu nedenle çalışmalarda belli zorluklarla karşılaşmış ve sistemler bazı koşullar altında çözülebilmıştır. Ayrıca kabuk çözümlerinde kalınlığın artması ile değişik yaklaşıklık düzeylerinde hesap yapılması gerektiği de bilinmektedir. İnce kabuklar için kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmeleri terk edilmekte ve z/R terimi 1'in yanında ihmal edilmektedir. Orta derecede kalın kabuklarda ise bu terimler hesaba katılmakta daha kalın kabuklar için elastisitenin genel denklemlerinin çözülmesi ya da asimtotik çözümlere gidilmesi gerekmektedir.

Teorik incelemelerde karşılaşılan güçlükler ve son yıllarda bilgisayarların hızlı gelişimi sayısal hesap yöntemlerinin gelişmesine neden olmuştur. Bu yöntemlerden biri olan sonlu eleman yöntemi, yapı sistemine ait mesnet şartları, dış etkenlerin aktarılması ve sistemin geometrik yapısının düzgün olmaması gibi çok önemli etkenleri gözönüne alabilmesi açısından, matematik güçlükler sebebi ile çözümü zor olan veya çözülemeyen karmaşık sistemlerin çözümüne olanak sağlamıştır.

Bu çalışmada, kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmelerini ve 1'in yanında z/R terimini ihmal

etmeden genel biçimli kabuklar için şekil değiştirme enerjisi ifadesi elde edilmiştir. Bu ifadeden elde edilen fonksiyonel yardımı ile bir sonlu eleman geliştirilmiştir.

1.2 Kabuklar İle İlgili Teorik Çalışmalar

Kabuklar teorisi üzerine yazılmış çok sayıda yayın olduğu bilinmektedir. Burada konu ile ilgili görülen bazılarından söz edilecektir. [1] ile [12] arasında belirtilen bu yayınlarda ince kabuklarla ilgili özel durumlar ele alındığı gibi genel biçimli ince kabuklar için açıklamalar da geniş bir biçimde verilmiştir.

Kalın kabuklar için son zamanlarda yapılan çalışmalarda, yer değiştirmelerin kalınlık boyunca değişimi için kuvvet serileri alınmaktadır. Kalın dönel kabuklar için yer değiştirmelerin kalınlıkla değişimi kuvvet serileri ile ifade edilip, ince kabuk teorisindeki yaklaşımlarla birleştirilmiş ve kalın sayılabilecek kabuğa göre düzenlenmiştir [13], [14]. Ancak bilgisayara uygulanması açısından elverişli olmayan bu yöntem yerine aynı yaklaşıklık düzeyinde olmasa da kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmelerini hesaba katmakla yetinilmektedir. Yüklemenin bir çok özel durumunda kalın kabuklarda normal doğrultudaki gerilme yayılımı önemlidir ve kalın dönel kabuk analizinde bu etkiler hesaba katılmıştır [15], [16].

[17]'de ise kalın silindirik kabukların radyal yük altında davranışı incelenmiştir. Bu çalışmada kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmeleri, radyal gerilme σ_z ve kalınlığın etkisini hesaba katarak elde edilen bu teorinin kalın silindirik kabuklar için oldukça iyi sonuçlar verdiği belirtilmiştir.

1.3 Sonlu Eleman Yöntemi Uygulamalarının Kabuklarda Geçirdiği Aşamalar

Sonlu eleman yöntemi üzerine yazılmış çok sayıda eser mevcuttur [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24], [25], [26].

Sonlu eleman tekniğinin kabuğa ilk uygulaması düzlem üçgen ve dikdörtgen elemanlar kullanılmasıdır. 1960'lı yılların ortalarından itibaren kabuklarda matris-deplasman yönteminde düzlem elemanların geç yakınsaması nedeni ile eğrisel elemanların düşünülmesi sonucu sonlu elemanların gelişiminde yeni bir boyut açılmıştır. Kabuk yüzey geometrisine uygun eğrisel üçgen ve dörtgen elemanlarda, yer değiştirmelerin çeşitli mertebeden polinom yaklaşım fonksiyonları kullanılarak tanımlandığı pek çok araştırma mevcuttur [27], [28], [29], [30], [31], [32]. Stricklin, Navaratna ve Pian, Jones ve Strome halka sektörü kabuk elemanı dönel kabukların analizinde kullanmak üzere geliştirmişlerdir. Bogner, Fox ve Schmit, Cantin ve Clough dikdörtgen silindirik kabuk elemanı geliştirmişlerdir [33], [34].

Minimum potansiyel enerji kavramından hareket ile hem silindirik hem de hiperbolik-parabolik kabuklara uygulanabilen bir dikdörtgen sonlu eleman tanımı [35]'de verilmiştir. [36]'da Novozhilov'un konik kabukların gerilme-şekil değiştirme ifadelerinden faydalanılarak, 28 serbestlik dereceli eleman rijitlik matrisi nümerik integrasyon ile hesaplanarak silindirik kabuklara uygulanmıştır. Ayrıca farklı geometriye sahip kabuk yapılara uygulanabilen üçgen eğrisel bir sonlu eleman ve paraboloid dönel kabuklara uygulanan izoparametrik eğrisel kabuk elemanlarla ilgili çalışmalar [37], [38], [39], [40]'da görülmektedir.

Daha iyi bir kabuk sonlu eleman klasik kabuk teorisi yerine kalınlık doğrultusundaki kayma şekil

değiştirmelerini ve normal doğrultudaki gerilmenin etkisini hesaba katan esaslara dayanmaktadır. Kalın kabuklarla ilgili çalışmalarda üç boyutlu izoparametrik eleman yerine kalın kabuk eleman kullanımı ilk kez Ahmad tarafından 1968'de uygulanmıştır. Ahmad, Zienkiewicz ve Irons bu yöntemin kalın kabuklara izoparametrik kalın sonlu eleman olarak, basitleştirilmiş halinin de ince cidarlı dönel kabuklara uygulanışını [41]'de sunmuşlardır. Bu konu ile ilgili benzer çalışmalar arasında [42], [43], [44], [45] görölmektedir.

Kalın sayılabilecek dönel yüke maruz dönel kabuklar için yüksek mertebeden terimler içeren bir sonlu eleman [46]'da geliştirilmiştir.

[47]'de Reissner-Mindlin tipindeki bir yer değiştirme şekil değiştirme bağıntısından hareketle bir kabuk eleman geliştirilmiştir. Kalın sayılabilecek kabuklarda kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmeleri hesaba katılarak, σ_z normal gerilmesinin ve kalınlığın etkisi ihmal edilerek geliştirilen bu dikdörtgen elemanın iyi sonuçlar verdiği belirtilmiştir.

[48]'de dönel kabuklar, geliştirilen kalın kabuk eleman ve üç boyutlu elemanla incelenmiştir. Kalın silindirik kabuklar için [17]'de verilen geliştirilmiş teoriye göre tanımlanan bir sonlu eleman formölasyonu [49]'da geliştirilmiştir. Bu elemanın rijid cisim hareketini sağladığı özellikle $R/h=3$ olan kalın silindirik kabuklarda oldukça iyi sonuç verdiği gözlenmiştir.

1970'li yılların başından itibaren özellikle hybrid ve karışık metodlara dayanan eleman tanımları gelişmeye başlamıştır [50], [51].

Bu sonlu eleman modellerinin ince kabuklara uygulanışı ile ilgili çalışmalar arasında [52], [53], [54], [55] gösterilebilir. Kalınlık doğrultusundaki kayma şekil

değiştirmelerini içeren ve buna göre geliştirilen bu tür sonlu eleman modelleri ile yapılan pek çok araştırma mevcuttur [56], [57], [58], [59], [60], [61], [62].

Bu çalışmada, kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmelerinin ve kabuk kalınlığının etkisini hesaba katarak genel biçimli kabuklar için elde edilen fonksiyonel yardımcı ile yer değiştirmelerin bilinmeyen olarak tanımlandığı izoparametrik bir dörtgen sonlu eleman geliştirilmiştir. Literatürde sözkonusu etkilerin bir kısmını hesaba katan dönel kabuk, silindirik kabuk gibi bazı özel durumları ele alan çalışmalara rastlanmış, genel biçimli kabuklarla ilgili bu tür bir çalışma görülmemiştir. Elde edilen ifadenin yaklaşıklık derecesi, değişik yükleme ve sınır koşulları altında genel biçimli kabuklarda belirlenmeye çalışılmıştır. Sonuçlar literatürdekilerle karşılaştırılarak, mühendislik için gerekli yeter yaklaşıklığın sağlandığı gösterilmiştir.

BÖLÜM 2

GENEL BİÇİMLİ KABUK TEORİSİ

Bundan sonraki bölümlerde yararlanmak amacı ile bu bölümde kalınlık doğrultusundaki kayma gerilmelerinin ve yarıçap yanında kalınlığın etkisini de hesaba katarak genel biçimli kabukların eğilmeli teorisinin temel bağıntıları verilecektir.

2.1 Varsayımlar

Kesit tesirleri aşağıda verilen varsayımlara dayanılarak elde edilecektir.

1- Kabuk kalınlığı, kabuk ortalama yüzeyinin plandaki boyutları ve eğrilik yarıçapına göre küçüktür. Klasik kabuk teorisinde z/R terimi 1'in yanında ihmal edilirken orta derecede kalın kabuklarda yarıçap yanında kalınlığın etkisi de hesaba katılmaktadır.

2- Kabuk ortalama yüzeyine dik doğrultudaki σ_z normal gerilmeleri diğer gerilmelere göre ihmal edilecek mertebededir.

3- Yer değiştirmeler kabuk kalınlığına göre küçük olup, denge denklemleri ve geometrik uygunluk şartlarında ikinci mertebe etkiler ihmal edilir.

4- Gerilme-şekil değiştirme bağıntılarında Hooke kanunu geçerlidir.

5- Şekil değiştirmemiş bir kabukta ortalama yüzeye normal bir doğru parçası, şekil değiştirmeden sonra rijid deplasman yaparak yine doğru kalır. Ancak bu doğru kalınlık doğrultusundaki kayma gerilmelerinin hesaba katılması nedeni ile deforme olmuş ortalama yüzeye diklik özelliğini korumaz.

2.2 Yüzey Geometrisi

2.2.1 Yüzeyin I. ve II. Ana Formu

Kabuk ortalama yüzeyi, kabuk kalınlığının orta noktalarının geometrik yeri olarak tanımlanır. Bu ortalama yüzey, α_1 ve α_2 gibi yüzeyin eğrisel koordinatları olarak adlandırılan iki parametre cinsinden ifade edilebilir. Bu yüzey üzerindeki herhangi bir noktanın $\vec{r}$ konum vektörü, (X,Y,Z) kartezyen koordinatlarında $X=f_1(\alpha_1,\alpha_2)$, $Y=f_2(\alpha_1,\alpha_2)$ ve $Z=f_3(\alpha_1,\alpha_2)$ olduğuna göre

$$\vec{r}(\alpha_1,\alpha_2) = f_1(\alpha_1,\alpha_2)\vec{e}_1 + f_2(\alpha_1,\alpha_2)\vec{e}_2 + f_3(\alpha_1,\alpha_2)\vec{e}_3 \quad (2.1)$$

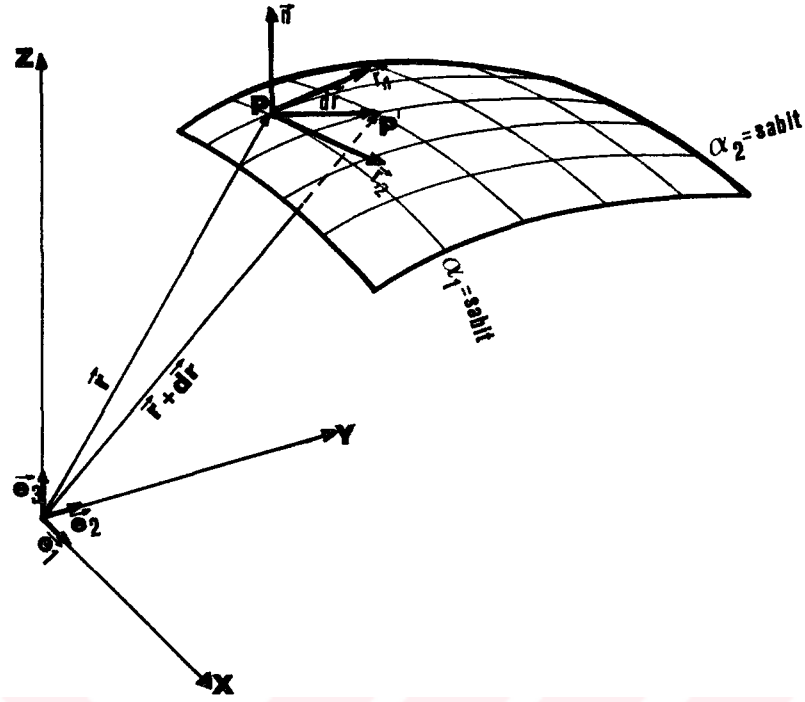
şeklinde yazılır. $\vec{r}$ konum vektöründeki $d\vec{r}$ diferansiyel değişimi

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 = \vec{r}_{,1} d\alpha_1 + \vec{r}_{,2} d\alpha_2 \quad (2.2)$$

olup, $\vec{r}_{,1}$ ve $\vec{r}_{,2}$ sırası ile $\alpha_2 = \text{sabit}$ ve $\alpha_1 = \text{sabit}$ eğri-lerine teğet olan vektörleri (baz vektörlerini) göstermektedir. Baz vektörünün üçüncü bileşeni ise

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_{,1} \times \vec{r}_{,2}}{|\vec{r}_{,1} \times \vec{r}_{,2}|} \quad (2.3)$$

şeklinde yüzeye dik olan birim vektördür (Şekil 2.1).



Şekil 2.1: Yüzeyin Eğrisel Koordinatları.

Kabuk ortalama yüzeyi üzerindeki herhangi bir yay elemanının boyu

$$dS^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = \vec{r}_{,1} \cdot \vec{r}_{,1} d\alpha_1^2 + 2\vec{r}_{,1} \cdot \vec{r}_{,2} d\alpha_1 d\alpha_2 + \vec{r}_{,2} \cdot \vec{r}_{,2} d\alpha_2^2 \quad (2.4)$$

ile gösterilebilir. Burada,

$$E = \vec{r}_{,1} \cdot \vec{r}_{,1}, \quad F = \vec{r}_{,1} \cdot \vec{r}_{,2}, \quad G = \vec{r}_{,2} \cdot \vec{r}_{,2} \quad (2.5)$$

olmak üzere

$$dS^2 = E d\alpha_1^2 + 2F d\alpha_1 d\alpha_2 + G d\alpha_2^2 \quad (2.6)$$

ifadesi elde edilir. Denklem (2.6) $\vec{r}(\alpha_1, \alpha_2)$ vektörü ile tanımlanan yüzeyin I. Ana Formu olarak adlandırılmaktadır. Eğer parametrik eğriler ortogonal ise $F = \vec{r}_{,1} \cdot \vec{r}_{,2} = 0$

olacağından

$$dS^2 = E d\alpha_1^2 + G d\alpha_2^2 \quad (2.7)$$

elde edilir. Yüzey baz vektörlerinin şiddeti A_1 ve A_2 ile gösterilirse

$$A_1 = \sqrt{E} \quad , \quad A_2 = \sqrt{G} \quad (2.8)$$

olacağından yüzeyin I. Ana Formu

$$dS^2 = A_1^2 d\alpha_1^2 + A_2^2 d\alpha_2^2 \quad (2.9)$$

şeklini almaktadır.

Bu durumda α_1 , $(\alpha_1 + d\alpha_1)$ ve α_2 , $(\alpha_2 + d\alpha_2)$ eğrilerinin sınırladığı bir yüzey elemanı, ortalama yüzey üzerindeki kenar boyları

$$dS_1 = A_1 d\alpha_1 \quad (2.10)$$

$$dS_2 = A_2 d\alpha_2$$

olan Şekil (2.2)'deki gibi ortogonal bir yüzey parçası olacaktır. Yüzeyin eğriliği,

$$K_n = \frac{d\vec{n} \cdot d\vec{r}}{d\vec{r} \cdot d\vec{r}} \quad (2.11)$$

olmak üzere teşkil edilirse

$$K_n = \frac{L d\alpha_1^2 + 2M d\alpha_1 d\alpha_2 + N d\alpha_2^2}{E d\alpha_1^2 + 2F d\alpha_1 d\alpha_2 + G d\alpha_2^2} \quad (2.12)$$

bulunur. Elde edilen yeni değerler $(L d\alpha_1^2 + 2M d\alpha_1 d\alpha_2 + N d\alpha_2^2)$ yüzeyin II. Ana Formu olarak adlandırılır ve aşağıdaki

gibi tanımlanır.

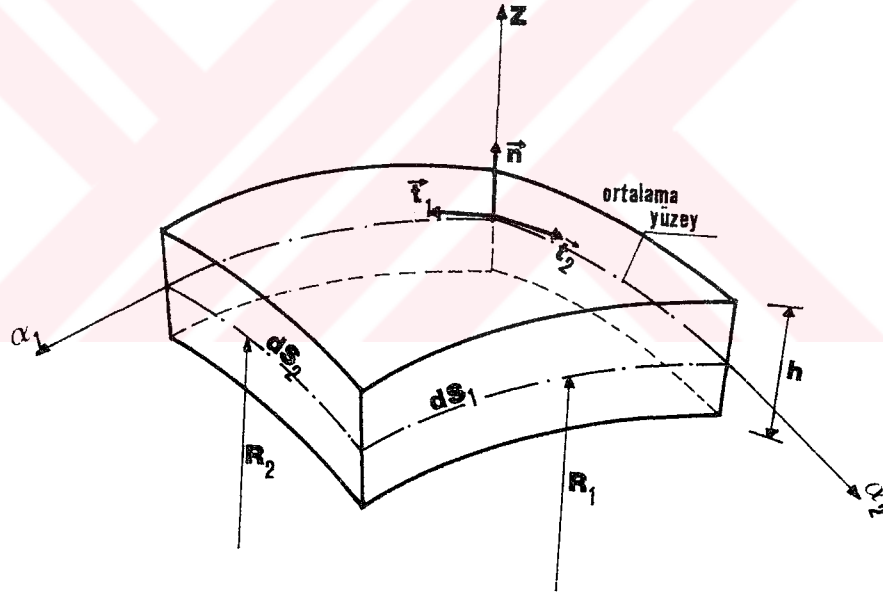
$$L = \vec{r}_{,1} \cdot \vec{n}_{,1}, \quad 2M = \vec{r}_{,1} \cdot \vec{n}_{,2} + \vec{r}_{,2} \cdot \vec{n}_{,1}, \quad N = \vec{r}_{,2} \cdot \vec{n}_{,2} \quad (2.13)$$

Ortogonal koordinat sisteminde $\alpha_2 = \text{sabit}$ ve $\alpha_1 = \text{sabit}$ eğrilerine ait asal eğrilikler $M=0$ olması halinde sırası ile

$$K_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{L}{E} \quad (2.14)$$

$$K_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{N}{G}$$

şeklinde ifade edilebilir (Şekil 2.2).



Şekil 2.2: Yüzey Büyüklükleri.

2.2.2 Kabuk Geometrik Büyüklükleri

Genel biçimli kabukların eğilmeli teorisinin temel bağıntılarına geçmeden önce gerekli bazı büyüklükler kısaca gözden geçirilecektir.

Kabuk ortalama yüzeyinden z mesafedeki herhangi bir noktanın konum vektörü $\vec{r}$, orta yüzeydeki $\vec{r}$ konum vektörü ile orta yüzeyin normali doğrultusundaki bir vektörün toplamından elde edilir.

$$\vec{r}(\alpha_1, \alpha_2, z) = \vec{r}(\alpha_1, \alpha_2) + z\vec{n}(\alpha_1, \alpha_2) \quad (2.15)$$

$\vec{r}$ konum vektörünün yay uzunluğu ise (2.2.1)'de anlatıldığı gibi

$$d\vec{S}^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = A_1^2(1+z/R_1)^2 d\alpha_1^2 + A_2^2(1+z/R_2)^2 d\alpha_2^2 + dz^2 \quad (2.16)$$

şeklinde bulunabilir. Ortalama yüzeyden z mesafedeki noktanın Lamé parametreleri ve asal eğrilik yarıçapları ise aşağıdaki şekilde verilmektedir.

$$A_1^{(z)} = A_1(1+z/R_1) \quad , \quad R_1^{(z)} = R_1 + z \quad (2.17)$$

$$A_2^{(z)} = A_2(1+z/R_2) \quad , \quad R_2^{(z)} = R_2 + z$$

Buna göre elemanın yay boyları

$$dS_1(z) = A_1(1+z/R_1) d\alpha_1 \quad (2.18)$$

$$dS_2(z) = A_2(1+z/R_2) d\alpha_2$$

ile bulunurken, elemanter şerit alanı ise aşağıdaki gibi elde edilir.

$$d\Sigma_1 = dS_1(z) dz = A_1(1+z/R_1) d\alpha_1 dz \quad (2.19)$$

$$d\Sigma_2 = dS_2(z) dz = A_2(1+z/R_2) d\alpha_2 dz$$

2.3 Yer Değiştirme-Şekil Değiştirme Bağıntıları

Üç boyutlu elastisitede küçük yer değiştirmeler için elde edilmiş olan şekil değiştirme bağıntıları α_1, α_2, z

kabuk koordinatları cinsinden yazılırsa 1, 2 ve z doğrultusundaki U, V, W yer değiştirmeleri cinsinden bilinen

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{A_1(1+z/R_1)} \left[U_{,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} V + \frac{A_1}{R_1} W \right] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{A_2(1+z/R_2)} \left[\frac{A_{2,1}}{A_1} U + V_{,2} + \frac{A_2}{R_2} W \right] \\ \gamma_{12} &= \frac{A_1(1+z/R_1)}{A_2(1+z/R_2)} \left[\frac{U}{A_1(1+z/R_1)} \right]_{,2} + \frac{A_2(1+z/R_2)}{A_1(1+z/R_1)} \left[\frac{V}{A_2(1+z/R_2)} \right]_{,1}\end{aligned}\quad (2.20)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{1z} &= U_{,z} + \frac{1}{A_1(1+z/R_1)} W_{,1} - \frac{1}{R_1(1+z/R_1)} U \\ \gamma_{2z} &= V_{,z} + \frac{1}{A_2(1+z/R_2)} W_{,2} - \frac{1}{R_2(1+z/R_2)} V\end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir. Burada,

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}$: Kabuk orta yüzeyinden z mesafedeki birim uzamalar ve birim kayma şekil değiştirmesi.

γ_{1z}, γ_{2z} : Kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmeleri.

Varsayımlara dayanarak kabuğun herhangi bir noktasındaki yer değiştirmeler,

$$U(\alpha_1, \alpha_2, z) = u(\alpha_1, \alpha_2) + z\alpha(\alpha_1, \alpha_2)$$

$$V(\alpha_1, \alpha_2, z) = v(\alpha_1, \alpha_2) + z\beta(\alpha_1, \alpha_2) \quad (2.21)$$

$$W(\alpha_1, \alpha_2, z) = w(\alpha_1, \alpha_2)$$

olup u, v, w kabuk ortalama yüzeyinin sırası ile 1, 2 ve z doğrultusundaki yer değiştirmelerini, α ve β ise α_1, α_2 koordinat eğrileri teğetinin şekil değiştirme sonucu dönme miktarını göstermektedir. u, v, w, α, β için pozitif yönler [6]'daki gibi alınmıştır. (2.21) bağıntılarından yararlanarak şekil değiştirme ifadeleri düzenlenecek olursa

$$\varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_1^0 + z \bar{\chi}_1$$

$$\varepsilon_2 = \bar{\varepsilon}_2^0 + z \bar{\chi}_2$$

$$\gamma_{12} = \bar{\gamma}_{12}^0 + z \bar{\tau}$$

(2.22)

$$\gamma_{1z} = \frac{R_1}{R_1 + z} \gamma_{1z}^0$$

$$\gamma_{2z} = \frac{R_2}{R_2 + z} \gamma_{2z}^0$$

elde edilir. (2.22)'deki bağıntılar ortalama yüzeyin birim şekil değiştirmeleri cinsinden

$$\bar{\varepsilon}_1^0 = \frac{1}{A_1(1+z/R_1)} u_{,1} + \frac{A_{1,2}}{A_1 A_2(1+z/R_1)} v + \frac{1}{R_1 + z} w = \frac{1}{1+z/R_1} \varepsilon_1^0$$

$$\bar{\varepsilon}_2^0 = \frac{A_{2,1}}{A_1 A_2(1+z/R_2)} u + \frac{1}{A_2(1+z/R_2)} v_{,2} + \frac{1}{R_2 + z} w = \frac{1}{1+z/R_2} \varepsilon_2^0$$

$$\bar{\gamma}_{12}^o = \frac{A_1(1+z/R_1)}{A_2(1+z/R_2)} \left[\frac{u}{A_1(1+z/R_1)} \right]_{,2} + \frac{A_2(1+z/R_2)}{A_1(1+z/R_1)} \left[\frac{v}{A_2(1+z/R_2)} \right]_{,1}$$

$$\bar{\gamma}_{12}^o = \frac{1}{1+z/R_1} \gamma_1^o + \frac{1}{1+z/R_2} \gamma_2^o$$

$$\bar{\chi}_1 = \frac{1}{A_1(1+z/R_1)} \alpha_{,1} + \frac{A_{1,2}}{A_1 A_2(1+z/R_1)} \beta = \frac{1}{1+z/R_1} \chi_1$$

(2.23)

$$\bar{\chi}_2 = \frac{A_{2,1}}{A_1 A_2(1+z/R_2)} \alpha + \frac{1}{A_2(1+z/R_2)} \beta_{,2} = \frac{1}{1+z/R_2} \chi_2$$

$$\bar{\tau} = \frac{A_1(1+z/R_1)}{A_2(1+z/R_2)} \left[\frac{\alpha}{A_1(1+z/R_1)} \right]_{,2} + \frac{A_2(1+z/R_2)}{A_1(1+z/R_1)} \left[\frac{\beta}{A_2(1+z/R_2)} \right]_{,1}$$

$$\bar{\tau} = \frac{1}{1+z/R_1} \tau_1 + \frac{1}{1+z/R_2} \tau_2$$

$$\gamma_{1z}^o = \alpha + \frac{w_{,1}}{A_1} - \frac{u}{R_1}$$

$$\gamma_{2z}^o = \beta + \frac{w_{,2}}{A_2} - \frac{v}{R_2}$$

olarak tanımlanmıştır. Kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmeleri dışında ifadeler Novozhilov tarafından kullanılanların aynıdır. Burada,

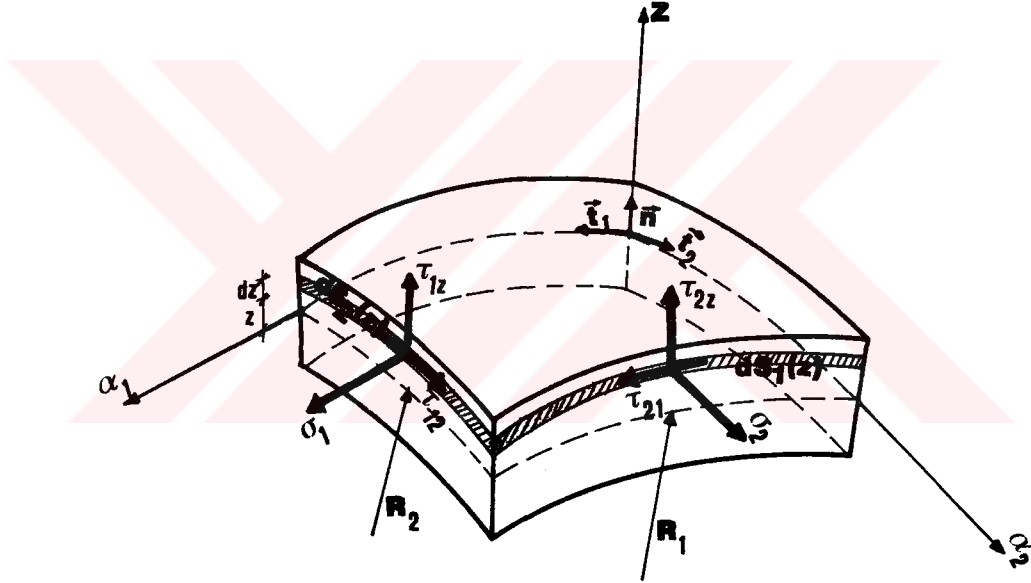
ε_1^o , ε_2^o , γ_{12}^o : Ortalama yüzeyin birim uzamaları ve birim kayma şekil değiştirmesi.

χ_1, χ_2, τ : Ortalama yüzeyin eğrilik değişimleri ve burulma eğriliği.

$\gamma_{1z}^0, \gamma_{2z}^0$: Ortalama yüzeyin kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmeleri.

2.4 Gerilme-Şekil Değiştirme Bağıntıları İle Kesit Tesirleri

Şekil (2.3)'de $\alpha_1, (\alpha_1 + d\alpha_1)$ ve $\alpha_2, (\alpha_2 + d\alpha_2)$ kesitlerinden sınırlanan kalınlığı h olan bir kabuk hacim elemanı görülmektedir.



Şekil 2.3: Kabuk Elemanda Gerilmeler.

σ_1, σ_2 : Eleman yüzlerine etki eden normal gerilmeler.

τ_{12}, τ_{21} : Ortalama yüzeye paralel olan kayma gerilmeleri.

τ_{1z}, τ_{2z} : Ortalama yüzeyin normali doğrultusunda etki eden kayma gerilmeleri.

Birim şekil değiştirmeler (2.22) bağıntıları ile elde edildikten sonra Hooke kanunu ve $\sigma_z = 0$ kabulü kullanılarak E elastisite modülü, ν poisson oranı olmak üzere kabuk ortalama yüzeyinden z mesafedeki bir noktada pozitif yönleri Şekil (2.3)'de gösterilen gerilmeler,

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2) = \frac{E}{1-\nu^2} \left[(\varepsilon_1^o + z \bar{\chi}_1) + \nu (\varepsilon_2^o + z \bar{\chi}_2) \right] \\ &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[(\varepsilon_1^o + \nu \varepsilon_2^o) + z (\bar{\chi}_1 + \nu \bar{\chi}_2) \right] \\ \sigma_2 &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1) = \frac{E}{1-\nu^2} \left[(\varepsilon_2^o + z \bar{\chi}_2) + \nu (\varepsilon_1^o + z \bar{\chi}_1) \right] \\ &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[(\varepsilon_2^o + \nu \varepsilon_1^o) + z (\bar{\chi}_2 + \nu \bar{\chi}_1) \right] \quad (2.24)\end{aligned}$$

$$\tau_{12} = G \gamma_{12} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\gamma_{12}^o + z \bar{\tau} \right)$$

$$\tau_{1z} = G \gamma_{1z} = \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{R_1}{R_1 + z} \gamma_{1z}^o$$

$$\tau_{2z} = G \gamma_{2z} = \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{R_2}{R_2 + z} \gamma_{2z}^o$$

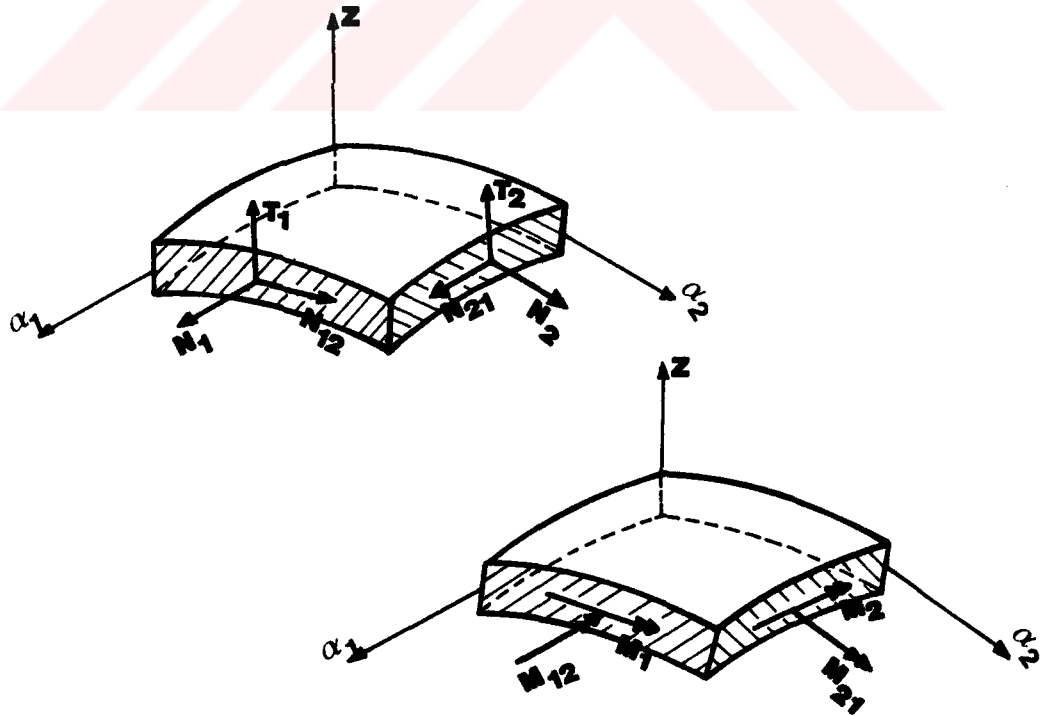
şeklinde ifade edilirler. Birim boyaya gelen kesit tesirleri bileşenleri ise gerilme bileşenlerinin α_1 =sabit ve α_2 =sabit kesitinde kalınlık boyunca integralleri olarak tarif edilirler.

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_{12} \\ T_1 \\ M_1 \\ M_{12} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \tau_{12} \\ \tau_{1z} \\ z\sigma_1 \\ z\tau_{12} \end{Bmatrix} (1+z/R_2) dz$$

(2.25)

$$\begin{Bmatrix} N_2 \\ N_{21} \\ T_2 \\ M_2 \\ M_{21} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_2 \\ \tau_{21} \\ \tau_{2z} \\ z\sigma_2 \\ z\tau_{21} \end{Bmatrix} (1+z/R_1) dz$$

Bu bağıntılarla elde edilen kesit tesirlerine ait pozitif yönler Şekil (2.4)'de gösterilmiştir.



Şekil 2.4: Kabuk Elemanda Kuvvet ve Moment Bileşenleri.

BÖLÜM 3

GENEL BİÇİMLİ KABUK İÇİN FONKSİYONELİN ELDE EDİLMESİ

3.1 Kabuklarda Şekil Değiştirme Enerjisi

Kabuk elemanında iç kuvvet durumunun şekil değiştirme enerjisi için

$$V = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{12} \gamma_{12} + \tau_{1z} \gamma_{1z} + \tau_{2z} \gamma_{2z}) dv \quad (3.1)$$

hacim integrali yazılabilir. Bölüm (2.1)'deki varsayımlara göre ve şekil değiştirme, gerilme değerleri (2.22) ve (2.24) bağıntılarından yararlanarak ifade edilirse şekil değiştirme enerjisi

$$V = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_V \left\{ \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\nu \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \frac{1}{2}(1-\nu) \gamma_{12}^2 + \frac{1}{2}(1-\nu) \gamma_{1z}^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}(1-\nu) \gamma_{2z}^2 \right\} A_1 A_2 (1+z/R_1)(1+z/R_2) d\alpha_1 d\alpha_2 dz \quad (3.2)$$

şeklinde bulunur.

3.2 Mevcut Çalışmalar

Elde edilen fonksiyonele geçmeden önce kısaca Novozhilov tarafından verilen şekil değiştirme enerjisinden söz edilecektir. Novozhilov Kirchhoff-Love hipotezi nedeni ile kayma şekil değiştirmelerini ve normal doğrultudaki gerilmeyi ihmal ederek,

$$V = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \tau_{12} \gamma_{12}) dv \quad (3.3)$$

ifadesini teşkil ederken, şekil değiştirmelerdeki $1/(1+z/R)$ terimleri yerine ikinci mertebeden terimler içeren serileri kullanmıştır.

$$\frac{1}{1+z/R_i} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{R_i} \right)^n = \left[1 - z/R_i + z^2/R_i^2 + \dots \right] \quad (3.4)$$

İlk üç terimi alarak,

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{1+z/R_1} \left(\varepsilon_1^0 + z \chi_1 \right) = \varepsilon_1^0 + z \left(\chi_1 - \frac{\varepsilon_1^0}{R_1} \right) - \frac{z^2}{R_1} \left(\chi_1 - \frac{\varepsilon_1^0}{R_1} \right) \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{1+z/R_2} \left(\varepsilon_2^0 + z \chi_2 \right) = \varepsilon_2^0 + z \left(\chi_2 - \frac{\varepsilon_2^0}{R_2} \right) - \frac{z^2}{R_2} \left(\chi_2 - \frac{\varepsilon_2^0}{R_2} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{12}^0 + 2z \left[\tau - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{\gamma_{12}^0}{2} \right] - z^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \left[\tau - \frac{R_1^2 + R_2^2}{R_1 + R_2} \frac{\gamma_{12}^0}{R_1 R_2} \right]$$

değerlerini elde etmiş ve şekil değiştirme enerjisi ifadesinde z ile ilgili integrallerde bu serinin integrallerini kullanmıştır.

$$V = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_A \left\{ \int_{-h/2}^{+h/2} \left(Q_0 + Q_1 z + Q_2 z^2 \right) dz \right\} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (3.6)$$

şeklinde düzenlenen şekil değiştirme enerjisi ifadesinde

$$Q_0 = \left(\varepsilon_1^0 + \varepsilon_2^0 \right)^2 - 2(1-\nu) \left(\varepsilon_1^0 \varepsilon_2^0 - \frac{\gamma_{12}^{02}}{4} \right) \quad (3.7a)$$

$$Q_1 = 2 \left(\varepsilon_1^0 \chi_1 + \varepsilon_2^0 \chi_2 \right) + 2\nu \left(\varepsilon_1^0 \chi_2 + \varepsilon_2^0 \chi_1 \right) + (1-\nu) \gamma_{12}^0 \tau - \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \left(\varepsilon_1^{02} - \varepsilon_2^{02} \right) \quad (3.7b)$$

$$\begin{aligned}
Q_2 = & \left(\chi_1 + \chi_2 \right)^2 - 2(1-\nu) \left(\chi_1 \chi_2 - \tau^2 \right) - 2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \left(\varepsilon_1^0 \chi_1 - \varepsilon_2^0 \chi_2 \right) + \\
& + \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \left(\frac{\varepsilon_1^{02}}{R_1} - \frac{\varepsilon_2^{02}}{R_2} \right) - (1-\nu) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \gamma_{12}^0 \tau + \\
& + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2} \right) \gamma_{12}^{02}
\end{aligned} \tag{3.7c}$$

olarak ortalama yüzeyin birim şekil değiştirmeleri cinsinden elde edilir. z'e göre integral alınırsa $\int_z Q_1 z dz = 0$ olacağından şekil değiştirme enerjisi

$$V = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_A Q_0 dA + \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \int_A Q_2 dA \tag{3.8}$$

olan bir yüzey integraline dönüşür.

Novozhilov, Kirchhoff-Love hipotezi nedeni ile iç kuvvetlerin potansiyel enerjisinde h/R mertebesinde bir hata bulunduğunu bu nedenle $(h/R)^2$ mertebesinde ek terimler getiren iyileştirmelerin tutarlı olmayacağını belirtmiştir. Bu çerçevede, eğilme şekil değiştirmelerinin membran şekil değiştirmeler mertebesinde olduğu kabulü ile, z/R 'nin 1'in yanında ihmal edilmeyerek integrale katılmasından gelen ek terimlerin h/R veya karesi mertebesinde küçük olacağını göstermiştir.

3.3 Geliştirilmiş Şekil Değiştirme Enerjisi İfadesi

İnce kabuk teorisinde, şekil değiştirme enerjisi ifadesi elde edilirken Kirchhoff-Love hipotezi esas alınmaktadır. Başka bir deyişle kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmeleri terk edilmekte ve $z/R \ll 1$ alınıp kalınlığın etkisi ihmal edilmektedir.

Çökmelerin küçük olduğu lineer kabuk teorisinde, geliştirilmiş çözümler olarak anılan çözüm yöntemlerinden biri, Kirchhoff-Love hipotezi yerine yer değiştirmelerin kalınlık doğrultusundaki değişimi için bir seri alınması ve bu serinin yeterli sayıda teriminin hesaba katılmasıdır. Bilgisayara uygulanması ve bu amaçla sonlu eleman formülasyonuna elverişli olmayan bu yöntem yerine ya kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmeleri gözönüne alınmakta veya $1/(1+z/R)$ yerine kuvvet serisinin ilk üç terimi $(1-z/R+z^2/R^2)$ alınarak z doğrultusundaki integral işleminde kullanılmaktadır.

Novozhilov'un çalışmasında da görüldüğü gibi Kirchhoff-Love hipotezinden ortaya çıkan hatanın en önemli bölümü kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmelerinin atılmasından kaynaklanır. Dönel simetrik silindirik kabuklarda en büyük kayma gerilmesi en büyük eğilme gerilmesinin $\sqrt{h/R}$ katı mertebesinde dir. Geckeler yaklaşımı gözönüne alınarak bu oranın kabukların birçoğu için de geçerli olduğu söylenebilir. Bu kayma gerilmelerinin hesaba katılması h/R ile orantılı ek terimler getirir. Böylece kalınlık doğrultusunda kayma şekil değiştirme enerjisinin hesaba katılması ile şekil değiştirme enerjisinde h/R mertebeli bir iyileştirme sağlandığından aynı mertebeli terimler içeren $(1+z/R)$ teriminin de hesaba katılmasının tutarlı ve gerekli olduğu sonucuna varılır.

Bu bölümde, kalınlık doğrultusundaki kayma gerilmelerinin ve yarıçap yanında kalınlığın etkisini de hesaba katarak genel biçimli kabuklar için elde edilen şekil değiştirme enerjisinden bahsedilecektir. Genel biçimli kabuk için bölüm 2'de verilen şekil değiştirmeler, (3.2) şekil değiştirme enerjisi ifadesinde yerine konursa z koordinatına bağlı belirli tipte integral ifadeleri ile karşılaşılır. Bunların elde edilmesinde $(1+z/R)$ 'nin kuvvet serisine açılması yerine kesin değerlerinin bulunması mümkündür. Daha sonra bu değerler istenen yaklaşıklık düzeyinde kullanılabilecektir.

Sözü edilen integrallerden tipik birkaçı, aşağıda verilmiştir.

$$\ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} = 2\varepsilon \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{3} + \frac{\varepsilon^4}{5} + \dots \right) \quad (3.9)$$

olduğu gözönüne alınarak,

$$\int_{-h/2}^{+h/2} \frac{dz}{R_i + z} = \ln \frac{1+h/2R_i}{1-h/2R_i} = \frac{h}{R_i} (1+Z_i) \quad (3.10)$$

yazılabilir. Burada,

$$Z_i = \frac{R_i}{h} \ln \frac{1 + \frac{h}{2R_i}}{1 - \frac{h}{2R_i}} - 1$$

veya (3.11)

$$Z_i = \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2R_i} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{h}{2R_i} \right)^4 + \frac{1}{7} \left(\frac{h}{2R_i} \right)^6 + \frac{1}{9} \left(\frac{h}{2R_i} \right)^8 + \dots$$

eşitlikleri geçerlidir. Diğer bütün integraller tanımlanan Z_i cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\int_{-h/2}^{+h/2} \frac{R_j + z}{R_i + z} dz = \left[\frac{R_j}{R_i} + \left(\frac{R_j}{R_i} - 1 \right) Z_i \right] h$$

$$\int_{-h/2}^{+h/2} \frac{R_j + z}{R_i + z} z dz = \left(R_i - R_j \right) Z_i h \quad (3.12)$$

$$\int_{-h/2}^{+h/2} \frac{R_j + z}{R_i + z} z^2 dz = R_j R_i Z_i h, \quad \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{z}{R_i + z} dz = -h Z_i$$

Bu şekilde integral ifadeleri elde edildikten sonra şekil değiştirme enerjisi ifadesi düzenlenebilir. Verilen bu bilgilere dayanarak örnek olmak üzere şekil değiştirme enerjisinde ϵ_1^2 ve γ_{12}^2 'den gelen terimlerin hesabı ve düzenlenmesi aşağıda gösterilmiştir. ϵ_1^2 'den gelen terimler,

$$V_{\epsilon_1^2} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_v \epsilon_1^2 A_1 A_2 (1+z/R_1)(1+z/R_2) d\alpha_1 d\alpha_2 dz \quad (3.13a)$$

$$V_{\epsilon_1^2} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_v \left\{ \left[\frac{1}{A_1 (1+z/R_1)} (u_{,1} + \alpha_{,1} z) + \frac{A_{1,2}}{A_1 A_2 (1+z/R_1)} (v + \beta z) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{w}{R_1 + z} \right] \frac{1}{R_1 R_2} (R_1 + z)(R_2 + z) \right\} dA dz \quad (3.13b)$$

$$V_{\epsilon_1^2} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_A \left\{ \frac{R_1}{R_2 A_1^2} \left[u_{,1}^2 \int_z \frac{R_2 + z}{R_1 + z} dz + 2u_{,1} \alpha_{,1} \int_z \frac{R_2 + z}{R_1 + z} z dz + \right. \right. \\ \left. \left. + \alpha_{,1}^2 \int_z \frac{R_2 + z}{R_1 + z} z^2 dz \right] + \frac{R_1 A_{1,2}^2}{R_2 A_1^2 A_2^2} \left[v^2 \int_z \frac{R_2 + z}{R_1 + z} dz + 2v\beta \int_z \frac{R_2 + z}{R_1 + z} z dz + \right. \right. \\ \left. \left. + \beta^2 \int_z \frac{R_2 + z}{R_1 + z} z^2 dz \right] + \frac{w^2}{R_1 R_2} \int_z \frac{R_2 + z}{R_1 + z} dz + 2 \frac{R_1 A_{1,2}}{A_1^2 A_2 R_2} \left[u_{,1} v \int_z \frac{R_2 + z}{R_1 + z} dz + \right. \right. \\ \left. \left. + \alpha_{,1} \beta \int_z \frac{R_2 + z}{R_1 + z} z dz + \beta w \int_z \frac{R_2 + z}{R_1 + z} z dz \right] \right\} dz$$

$$\begin{aligned}
& +u_{,1}\beta\int_z^{\frac{R_2+z}{R_1+z}} zdz+\alpha_{,1}v\int_z^{\frac{R_2+z}{R_1+z}} zdz+\alpha_{,1}\beta\int_z^{\frac{R_2+z}{R_1+z}} z^2dz\Bigg]+ \\
& +\frac{2}{A_1R_2}\left[u_{,1}w\int_z^{\frac{R_2+z}{R_1+z}} dz+\alpha_{,1}w\int_z^{\frac{R_2+z}{R_1+z}} zdz\right]+ \\
& +2\frac{A_{1,2}}{A_1A_2R_2}\left[vw\int_z^{\frac{R_2+z}{R_1+z}} dz+\beta w\int_z^{\frac{R_2+z}{R_1+z}} zdz\right]\Bigg\}A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2
\end{aligned}
\tag{3.13c}$$

$$\begin{aligned}
\frac{E}{2(1-\nu^2)}\int_v^{\varepsilon_1^2} dv &= \frac{Eh}{2(1-\nu^2)}\int_A\left\{\varepsilon_1^{o2}\left(1+Z_1-\frac{R_1}{R_2}Z_1\right)+\right. \\
& \left.+\varepsilon_1^o\chi_1\left[2(R_1-R_2)\frac{R_1}{R_2}Z_1\right]+\chi_1^2R_1^2Z_1\right\}A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2
\end{aligned}
\tag{3.13d}$$

dir. γ_{12}^2 'den gelen terimler ise

$$V_{\gamma_{12}^2} = \frac{E}{2(1-\nu^2)}\int_v\frac{1}{2}(1-\nu)\gamma_{12}^2\frac{1}{R_1R_2}(R_1+z)(R_2+z)A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2dz
\tag{3.14a}$$

$$\begin{aligned}
V_{\gamma_{12}^2} &= \frac{E}{2(1-\nu^2)}\int_v\frac{1}{2}(1-\nu)\left[\frac{R_1}{R_1+z}(\gamma_1^o+z\tau_1)+\frac{R_2}{R_2+z}(\gamma_2^o+z\tau_2)\right]^2 \\
&\quad \frac{1}{R_1R_2}(R_1+z)(R_2+z)dAdz
\end{aligned}
\tag{3.14b}$$

$$\begin{aligned}
V_{\gamma_{12}^2} = & \frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{1}{2} (1-\nu) \int_A \left\{ \frac{R_1}{R_2} \left[\gamma_1^{\circ 2} \int_z \frac{R_2+z}{R_1+z} dz + 2\gamma_1^{\circ} \tau_1 \int_z \frac{R_2+z}{R_1+z} z dz + \right. \right. \\
& + \tau_1^2 \int_z \frac{R_2+z}{R_1+z} z^2 dz \left. \right] + \frac{R_2}{R_1} \left[\gamma_2^{\circ 2} \int_z \frac{R_1+z}{R_2+z} dz + 2\gamma_2^{\circ} \tau_2 \int_z \frac{R_1+z}{R_2+z} z dz + \right. \\
& + \tau_2^2 \int_z \frac{R_1+z}{R_2+z} z^2 dz \left. \right] + 2 \left[\gamma_1^{\circ} \gamma_2^{\circ} \int_z dz + \gamma_1^{\circ} \tau_2 \int_z z dz + \gamma_2^{\circ} \tau_1 \int_z z dz + \right. \\
& \left. \left. + \tau_1 \tau_2 \int_z z^2 dz \right] \right\} dA
\end{aligned} \tag{3.14c}$$

$$\begin{aligned}
\frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_V \frac{1}{2} (1-\nu) \gamma_{12}^2 dv = & \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_A \left\{ \frac{1}{2} (1-\nu) \frac{R_1}{R_2} \left[\frac{R_2}{R_1} + Z_1 \left(\frac{R_2}{R_1} - 1 \right) \right] \gamma_1^{\circ 2} \right. \\
& + (1-\nu) \frac{R_1}{R_2} (R_1 - R_2) \gamma_1^{\circ} \tau_1 Z_1 + \frac{1}{2} (1-\nu) R_1^2 \tau_1^2 Z_1 + \frac{1}{2} (1-\nu) \frac{R_2}{R_1} \left[\frac{R_1}{R_2} + \right. \\
& + Z_2 \left(\frac{R_1}{R_2} - 1 \right) \left. \right] \gamma_2^{\circ 2} + (1-\nu) \frac{R_2}{R_1} (R_2 - R_1) \gamma_2^{\circ} \tau_2 Z_2 + \frac{1}{2} (1-\nu) R_2^2 \tau_2^2 Z_2 + \\
& \left. + (1-\nu) \gamma_1^{\circ} \gamma_2^{\circ} + (1-\nu) \frac{h^2}{12} \tau_1 \tau_2 \right\} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2
\end{aligned} \tag{3.14d}$$

biçimindedir. Benzer şekilde ε_2^2 ve $(\varepsilon_1 \varepsilon_2)$ 'den gelen terimler

$$\begin{aligned} \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_v \varepsilon_z^2 dv = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_A \left\{ \varepsilon_z^0 \left[1 + Z_2 - \frac{R_2}{R_1} Z_2 \right] + \right. \\ \left. + \varepsilon_z^0 \chi_z \left[2(R_2 - R_1) \frac{R_2}{R_1} Z_2 \right] + \chi_z^2 R_2^2 Z_2 \right\} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_v 2\nu \varepsilon_1 \varepsilon_2 dv = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_A \left\{ 2\nu \varepsilon_1^0 \varepsilon_2^0 + 2\nu \frac{h^2}{12} \chi_1 \chi_2 \right\} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (3.16)$$

olarak elde edilirler. Kayma şekil değiştirmeleri ise kalınlık doğrultusundaki yayılışının parabolik olduğu varsayılarak

$$\gamma_{1z} = \frac{3}{2} \frac{R_1}{R_1 + z} \gamma_{1z}^0 \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) \quad (3.17)$$

$$\gamma_{2z} = \frac{3}{2} \frac{R_2}{R_2 + z} \gamma_{2z}^0 \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right)$$

olarak alınmıştır. Kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmelerinin şekil değiştirme enerjisine katkısı ise

$$V_{\gamma_{1z}} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_v \frac{1}{2} (1-\nu) \gamma_{1z}^2 A_1 A_2 (1+z/R_1) (1+z/R_2) d\alpha_1 d\alpha_2 dz \quad (3.18)$$

$$V_{\gamma_{1z}^2} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_A \frac{1}{2}(1-\nu) \frac{1}{R_1 R_2} dA \int_z (R_1 + z)(R_2 + z) \gamma_{1z}^2 dz \quad (a)$$

(3.19)

$$V_{\gamma_{1z}^2} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_A \frac{1}{2}(1-\nu) \frac{R_1}{R_2} dA \frac{9}{4} \int_z \frac{R_2 + z}{R_1 + z} \gamma_{1z}^2 \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) dz \quad (b)$$

biçiminde elde edilir. Bu integraller alınırken şekil değiştirme enerjisi içindeki payı h/R mertebesinde olan kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmelerinde bir küçük mertebe terimler vermesi nedeni ile z/R terimi 1'in yanında ihmal edilmiştir. Bu varsayımlara dayanarak (3.19) ifadesi düzenlenirse

$$\frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_v \frac{1}{2}(1-\nu) \gamma_{1z}^2 dv = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_A \frac{3}{5}(1-\nu) \gamma_{1z}^2 dA \quad (3.20)$$

biçimini alır. Benzer şekilde γ_{2z} kayma şekil değiştirmesinin katkısı

$$\frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_v \frac{1}{2}(1-\nu) \gamma_{2z}^2 dv = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_A \frac{3}{5}(1-\nu) \gamma_{2z}^2 dA \quad (3.21)$$

olarak bulunur. Böylece terimlerin etkisi hesaplanıp bağıntı (3.2)'ye göre toplanarak şekil değiştirme enerjisi için

$$V = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_A \left\{ \epsilon_1^2 + Z_1 \left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right) \epsilon_1^2 + 2(R_1 - R_2) \frac{R_1}{R_2} Z_1 \epsilon_1^0 \chi_1 + R_1^2 Z_1 \chi_1^2 + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +\varepsilon_2^{\circ 2}+Z_2\left[1-\frac{R_2}{R_1}\right]\varepsilon_2^{\circ 2}+2(R_2-R_1)\frac{R_2}{R_1}Z_2\varepsilon_2^{\circ}\chi_2+R_2^2Z_2\chi_2^2+ \\
& +2\nu\varepsilon_1^{\circ}\varepsilon_2^{\circ}+2\nu\frac{h^2}{12}\chi_1\chi_2+\frac{1}{2}(1-\nu)\gamma_1^{\circ 2}+\frac{1}{2}(1-\nu)\frac{R_1}{R_2}\left[\frac{R_2}{R_1}-1\right]Z_1\gamma_1^{\circ 2}+ \\
& +\frac{1}{2}(1-\nu)\gamma_2^{\circ 2}+\frac{1}{2}(1-\nu)\frac{R_2}{R_1}\left[\frac{R_1}{R_2}-1\right]Z_2\gamma_2^{\circ 2}+ \quad (3.22) \\
& +(1-\nu)\frac{R_1}{R_2}(R_1-R_2)Z_1\gamma_1^{\circ}\tau_1+(1-\nu)\frac{R_2}{R_1}(R_2-R_1)Z_2\gamma_2^{\circ}\tau_2+ \\
& +\frac{1}{2}(1-\nu)^2Z_1R_1^2\tau_1^2+\frac{1}{2}(1-\nu)Z_2R_2^2\tau_2^2+(1-\nu)\frac{h^2}{12}\tau_1\tau_2+ \\
& +(1-\nu)\gamma_1^{\circ}\gamma_2^{\circ}+\frac{3}{5}(1-\nu)\left[\gamma_{12}^{\circ 2}+\gamma_{22}^{\circ 2}\right]\} dA
\end{aligned}$$

şeklinde bir yüzey integrali bulunur. İfadenin daha önceki çalışmalarda kullanılan notasyona uygun düzenlenmesi amacı ile

$$V = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_A Q_0 dA + \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \int_A Q_2 dA + \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_A Q_3 dA \quad (3.23)$$

denecek olursa burada farklı olarak kalınlık doğrultusunda kayma şekil değiştirmelerinin etkisini gösteren Q_3 teriminin katılmış olduğu görülür.

$$Q_0 = \varepsilon_1^{\circ 2} + \varepsilon_2^{\circ 2} + 2\nu\varepsilon_1^{\circ}\varepsilon_2^{\circ} + \frac{1}{2}(1-\nu)\gamma_1^{\circ 2} + \frac{1}{2}(1-\nu)\gamma_2^{\circ 2} + (1-\nu)\gamma_1^{\circ}\gamma_2^{\circ} \quad (3.24)$$

düzenlenerek $\gamma_{12}^{\circ} = \gamma_1^{\circ} + \gamma_2^{\circ}$ tanımı ile Novozhilov'un çalışmasında verilen ifade ile aynı olan

$$Q_o = \left(\varepsilon_1^o + \varepsilon_2^o \right)^2 - 2(1-\nu) \left(\varepsilon_1^o \varepsilon_2^o - \frac{\gamma_{12}^{o2}}{4} \right) \quad (3.25)$$

bulunur.

$$\begin{aligned} Q_z = & Z_1 \left(1 - \frac{R_1}{R_2} \right) \varepsilon_1^{o2} + 2(R_1 - R_2) \frac{R_1}{R_2} Z_1 \varepsilon_1^o \chi_1 + R_1^2 Z_1 \chi_1^2 + Z_2 \left(1 - \frac{R_2}{R_1} \right) \varepsilon_2^{o2} + \\ & + 2(R_2 - R_1) \frac{R_2}{R_1} Z_2 \varepsilon_2^o \chi_2 + R_2^2 Z_2 \chi_2^2 + 2\nu \frac{h^2}{12} \chi_1 \chi_2 + \\ & + \frac{1}{2}(1-\nu) \frac{R_1}{R_2} \left(\frac{R_2}{R_1} - 1 \right) Z_1 \gamma_1^{o2} + \frac{1}{2}(1-\nu) \frac{R_2}{R_1} \left(\frac{R_1}{R_2} - 1 \right) Z_2 \gamma_2^{o2} + \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} & + (1-\nu) \frac{R_1}{R_2} (R_1 - R_2) Z_1 \gamma_1^o \tau_1 + (1-\nu) \frac{R_2}{R_1} (R_2 - R_1) Z_2 \gamma_2^o \tau_2 + \\ & + \frac{1}{2}(1-\nu) Z_1 R_1^2 \tau_1^2 + \frac{1}{2}(1-\nu) Z_2 R_2^2 \tau_2^2 + (1-\nu) \frac{h^2}{12} \tau_1 \tau_2 \end{aligned}$$

ifadesi yine aynı kaynakta [7] verilen ifadeye benzer duruma getirilmek ve hesaptaki yaklaşıklıkla tutarlı terimleri koruyabilmek üzere

$$Z_1 \cong \frac{h^2}{12R_1^2}, \quad Z_2 \cong \frac{h^2}{12R_2^2} \quad (3.27)$$

olarak alınıp düzenlenirse

$$Q_z = \left(\chi_1 + \chi_2 \right)^2 - 2(1-\nu) \left(\chi_1 \chi_2 - \frac{\tau^2}{4} \right) + \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \left(\frac{\varepsilon_1^{o2}}{R_1} - \frac{\varepsilon_2^{o2}}{R_2} \right) -$$

$$\begin{aligned}
& -2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \left(\varepsilon_1^0 \chi_1 - \varepsilon_2^0 \chi_2 \right) + \frac{1}{2} (1-\nu) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \left(\frac{\gamma_1^{02}}{R_1} - \frac{\gamma_2^{02}}{R_2} \right) - \\
& -(1-\nu) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \left(\gamma_1^0 \tau_1 - \gamma_2^0 \tau_2 \right)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

bulunur. Ayrıca Q_3 ile tanımlanan kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmelerinin katkısını gösteren

$$Q_3 = \frac{3}{5} (1-\nu) \left(\gamma_{1z}^{02} + \gamma_{2z}^{02} \right) \tag{3.29}$$

ifadesi elde edilir. Q_2 'nin Novozhilov'un ifadesinden farklı oluşu anlaşılacağı gibi kayma şekil değiştirmelerinin hesaba katılması nedeni ile α ve β dönmelerinin u , v , w yer değiştirmelerinden bağımsız olmasından kaynaklanmaktadır. Yine aynı nedene bağlı olarak Q_3 'le tanımlanan ek bir şekil değiştirme enerjisi terimi elde edilmektedir.

BÖLÜM 4

SONLU ELEMAN YÖNTEMİ

4.1 Yöntemin Esası

Mühendislik yapıları, sonlu sayıda düğüm noktasında birbirine bağlanan yapı elemanlarının bir birleşimi olarak gözönüne alınabilir. Elemanlar için kuvvet yer değiştirme bağıntıları biliniyorsa, yapı sistemleri analizinin çeşitli teknikleri kullanılarak birleşik yapı sisteminin özelliklerini bulmak ve davranışını incelemek mümkündür. Bu düşünceden hareketle, sonlu elemanlar yönteminde sürekli bir sisteme ait diferansiyel denklemin integrasyonu ayrık bir sisteme ait cebrik bir denklem takımının çözümüne indirgenmektedir.

Bu çalışmada, kullanışının büyük bir genelliğe sahip olması nedeni ile yer değiştirme yöntemi kullanılacağından önce sonlu eleman yer değiştirme yönteminin esasları özetlenecektir.

4.2 Yer Değiştirme Yöntemi

Eleman davranışının elastik olduğu düşünülürse karakteristik bağıntı 'e' elemanı için

$$\{F\}^e = [k]^e \{\delta\}^e + \{F\}_p^e + \{F\}_{e0}^e \quad (4.1)$$

şeklinde olacaktır. Burada $\{F\}_p^e$ elemana tesir eden yaygınlı yükü dengelemek için gerekli düğüm noktası

kuvvetlerini ve $\{F\}_{\mathcal{E}_0}^e$ ısı değişiminden ileri gelen şekil değiştirmeler gibi çeşitli başlangıç şekil değiştirmelerini dengelemek için gerekli düğüm noktası kuvvetlerini tanımlamaktadır. $\{F\}^e$ ise düğüm noktalarının yer değiştirmesinden ileri gelen kuvvetleri göstermektedir. Benzer tarzda elemanın herhangi bir noktasında gerilmeler düğüm noktası yer değiştirmeleri cinsinden tanımlanmaktadır. Bu gerilmeler,

$$\{\sigma\}^e = [S]^e \{\delta\}^e + \{\sigma\}_p^e + \{\sigma\}_{\mathcal{E}_0}^e \quad (4.2)$$

şeklinde bir bağıntı ile elde edilir. Burada son iki terim basit olarak düğüm noktası yer değiştirmesi mevcut olmaması durumunda sırasıyla, eleman yüzeyinde yayılı yüklerden ileri gelen gerilmeleri ve başlangıç gerilmelerini göstermektedir. $[k]^e$ matrisi eleman rijitlik matrisi, $[S]^e$ matrisi eleman gerilme matrisi olarak tanımlanır. $[k]^e$ ve $[S]^e$ matrisleri elde edilmişse, $\{\delta\}^e$ yer değiştirmeleri cinsinden düğüm noktası kuvvetleri ve gerilmeler elde edilir. Söz konusu matrislerin elde edilişi ise minimum potansiyel enerji ya da virtüel iş prensibine dayanmaktadır.

4.3 Sonlu Eleman Karakteristiklerinin Formülasyonu

Bu aşamada elemanla ilgili karakteristiklerin tanımlanması yapılacaktır.

4.3.1 Yer Değiştirme Fonksiyonu

Tanımlı bir 'e' elemanın içinde veya sınırlarında bulunan herhangi bir noktadaki $\{f\}$ yer değiştirme fonksiyonu

$$\{f\} = [N]\{\delta\}^e = \begin{bmatrix} [N^i], [N^j], [N^k], \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta^i\} \\ \{\delta^j\} \\ \{\delta^k\} \\ . \\ . \\ . \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $[N]$ biçim fonksiyonları, düğüm noktalarının koordinatları yukarıdaki denklemde yerine konulduğu zaman düğüm noktası yer değiştirmelerini verecek tarzda seçilmek zorundadır. Dolayısı ile $[N]$ biçim fonksiyonları,

$$\sum_{i=1}^n N_i(x, y) = 1$$

$$N_i(x_i, y_i) = 1 \quad (4.4)$$

$$N_i(x_j, y_j) = N_i(x_m, y_m) = 0$$

koşulları sağlanacak şekilde oluşturulmalıdır. $\{\delta\}^e$ ise elemanın düğüm noktası yer değiştirmelerini göstermektedir.

4.3.2 Şekil Değiştirmeler

Eleman içindeki bütün noktalarda yer değiştirmeler bilinince herhangi bir noktadaki şekil değiştirmeler, yer değiştirmeleri şekil değiştirmelere bağlayan matris $[B]$ ile gösterilirse

$$\{\epsilon\}^e = [B]\{\delta\}^e \quad (4.5)$$

şeklinde yazılabilen bir bağıntıyla sonuçlanacaktır.

4.3.3 Gerilmeler

Genel elastik davranış durumunda gerilmelerle şekil değiştirmeler arasındaki bağıntı lineer ve

$$\langle \sigma \rangle^e = [D] \left(\langle \varepsilon \rangle^e - \langle \varepsilon_0 \rangle^e \right) + \langle \sigma_0 \rangle^e \quad (4.6)$$

şeklinde olacaktır. Burada şekil değiştirmeleri gerilmelere bağlayan $[D]$ elastisite matrisi homojen ve izotrop malzeme halinde E elastisite modülü ve ν poisson oranına bağlıdır. $\langle \varepsilon_0 \rangle$ başlangıç şekil değiştirmelerine ve $\langle \sigma_0 \rangle$ başlangıç gerilmelerine maruz ise bu değerler de ilave edilmelidir.

4.3.4 Eşdeğer Düğüm Noktası Kuvvetleri

Sınır gerilmelerine ve eleman üzerindeki yayılı yük- lere statik olarak eşdeğer düğüm noktası kuvvetleri,

$$\langle F \rangle^e = \begin{Bmatrix} \langle F^i \rangle \\ \langle F^j \rangle \\ \langle F^k \rangle \\ . \\ . \\ . \end{Bmatrix} \quad (4.7)$$

ile tarif edilmektedir. Her $\langle F^i \rangle$ alt vektörü $\langle \delta^i \rangle$ alt vektöründeki uç serbestliklerine eşit sayıda ve onların doğrultularında bileşen içermelidir.

4.3.5 Minimum Potansiyel Enerji Prensibi

Rijitlik matrisi ve eşdeğer düğüm noktası kuvvetleri- nin elde edilişinde toplam potansiyel enerjinin minimum olma prensibinden yararlanılmıştır.

Birim hacim başına $\langle P \rangle$ yayılı yükleri ve $\langle R \rangle$ tekil yükleri altında, sırası ile $\langle f \rangle$ ve $\langle \delta \rangle$ yer değiştirme enerjisi V ile gösterilsin. Eğer sistem hem içten hem dıştan dengede ise ve bir $\delta \langle \delta \rangle$ sonsuz küçük yer değiştirme değişimi verilmişse dış yükler tarafından yapılan iş, şekil değiştirme enerjisi değişimine eşit olmalıdır. Yani

$$\delta(V) = \delta \left[\langle R \rangle^T \langle \delta \rangle \right] + \delta \left[\int \langle P \rangle^T \langle f \rangle dv \right] \quad (4.8)$$

veya

$$\delta \left[V - \langle R \rangle^T \langle \delta \rangle - \int \langle P \rangle^T \langle f \rangle dv \right] = 0 \quad (4.9)$$

olmalıdır. Parantez içindeki son iki terim yük sisteminin potansiyel enerjisi olan W 'yi gösterir, dolayısı ile

$$\pi = V + W \quad (4.10)$$

şeklinde sistemin toplam potansiyel enerjisi belirlenir ve

$$\delta[\pi] = 0 \quad (4.11)$$

bulunur. Bu sonuç, denge konumunda toplam potansiyel enerjinin stasyoner bir büyüklük olması gerektiğini belirtir. Şekil değiştirme enerjisi daima pozitif olmakla beraber, W pozitif veya negatif değerler alabildiğinden dengenin stasyoner durumu bir minimum durumu olup, aşağıdaki gibi ifade edilir.

"Elastik bir cisimde, geometrik sınır şartlarını sağlayan bütün yer değiştirme halleri arasında, gerçek yer değiştirme toplam potansiyel enerjiyi minimum yapandır."

Değişken parametreler olarak kabul edilen düğüm noktası yer değiştirmelerine nazaran, toplam potansiyel enerji π 'yi minimum kılmak için

$$\frac{\partial(\pi)}{\partial\{\delta_i\}} = 0 \quad (4.12)$$

şeklinde bir denklem sistemini oluşturmak gerekir. Toplam potansiyel enerji, her bir elemanın π^e potansiyel enerjileri ile düğüm noktası yükleri $\{R\}$ 'nin potansiyel enerjisi toplamı olarak gözönüne alınabilir, yani

$$\pi = \sum_{e=1}^n \pi^e - \{R\}^T \{\delta\} \quad (4.13)$$

ve potansiyel enerjinin minimum olma prensibi kullanılarak

$$\frac{\partial(\pi)}{\partial\{\delta_i\}} = \sum_{e=1}^n \frac{\partial(\pi^e)}{\partial\{\delta_i\}} - \{R_i\} \quad (4.14)$$

şeklini alır. Böylece tipik bir eleman içinde sadece toplam potansiyel enerji değişimlerinin gözönüne alınması gerekmektedir.

Elemanlar içindeki birim hacim başına şekil değiştirme enerjisi değişimi sadece şekil değiştirmelerin değişimine bağlı olduğundan

$$\frac{\partial(\{\sigma\}^T \{\epsilon\})}{\partial\{\delta_i\}} = \frac{\partial(\{\epsilon\})}{\partial\{\delta_i\}} \{\sigma\} \quad (4.15)$$

diferansiyeli şeklinde bulunur. (4.5) ve (4.6) eşitlikleri yukarıda yerlerine konarak

$$\frac{\partial\{\delta\}^e}{\partial\{\delta_i\}} \left[[B]^T [D] [B] \{\delta\}^e - [B]^T [D] \{\epsilon_0\} \right] \quad (4.16)$$

elde edilir. Benzer tarzda elemanın birim haciminde dış yükün potansiyel enerjisi değişimi

$$\frac{\partial(\{P\}^T \{f\})}{\partial\{\delta_i\}} = \frac{\partial\{f\}}{\partial\{\delta_i\}} \{P\} \quad (4.17)$$

ve $\{f\}$ değeri yerine konarak

$$\frac{\partial\{\delta\}^e}{\partial\{\delta_i\}} [N]^T \{P\} \quad (4.18)$$

bulunur. Böylece elemanın bütünü için,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\pi)^e}{\partial\{\delta\}_i^e} &= \frac{\partial\{\delta\}^e}{\partial\{\delta\}_i^e} \left[\left(\int_V [B]^T [D] [B] dv \right) \{\delta\}^e - \int_V [B]^T [D] \{\epsilon_o\} dv - \right. \\ &\quad \left. - \int_V [N]^T \{P\} dv \right] \end{aligned} \quad (4.19)$$

veya bütün düğüm noktalarını dahil ederek

$$\frac{\partial(\pi)^e}{\partial\{\delta\}^e} = [k]^e \{\delta\}^e + \{F\}_p^e + \{F\}_{\epsilon_o}^e \quad (4.20)$$

şeklinde bilinen (4.1) eşitliği elde edilir. Burada rijitlik matrisi,

$$[k]^e = \int_V [B]^T [D] [B] dv \quad (4.21)$$

başlangıç şekil değiştirmelerinden oluşan düğüm noktası kuvvetleri,

$$\{F\}_{\epsilon_o}^e = - \int_V [B]^T [D] \{\epsilon_o\} dv \quad (4.22)$$

yayılı yüklerden oluşan düğüm noktası kuvvetleri,

$$\{F\}_p^e = - \int_V [N]^T \{P\} dv \quad (4.23)$$

ile gösterilmektedir.

4.4 Sistemin Çözülmesi

Bu aşamada amaç, sistem denklemlerini kurmak ve bu denklemlerin çözümünü yapmaktır.

$$\{R_i\} = \sum \{F_i\} \quad (4.24)$$

olmak üzere bütün noktalar için denge denklemleri yazılır ve matris formunda ifade edilirse

$$\{R_i\} = \sum_{m=1}^n [k_{im}]^e \{\delta_m\} + \sum_{m=1}^n \{F_i\}_p^e + \sum_{m=1}^n \{F_i\}_{\varepsilon_0}^e \quad (4.25)$$

şeklini alır.

$$[K] = \sum [k_{im}]^e \quad (a)$$

$$\{F_i\}_p = \sum \{F_i\}_p^e \quad (b) \quad (4.26)$$

$$\{F_i\}_{\varepsilon_0} = \sum \{F_i\}_{\varepsilon_0}^e \quad (c)$$

olmak üzere (4.25) bağıntısı,

$$[K]\{\delta\} = \{R_i\} - \{F_i\}_p - \{F_i\}_{\varepsilon_0} \quad (4.27)$$

şeklinde de düzenlenebilir. Burada $[K]$ sistem rijitlik matrisi, $\{\delta\}$ sistem yer değiştirmelerini gösteren vektör olarak adlandırılabilir. (4.27) lineer denklem takımında sisteme ait sınır şartları konulup denklem çözülerek $\{\delta\}$ vektörü, yani problemin bilinmeyenleri elde edilir.

Daha sonra elemanın herhangi bir noktasındaki gerilmeler (4.6)'da verilen ifade kullanılarak

$$\{\sigma\}^e = [D][B]\{\delta\}^e - [D]\{\varepsilon_0\}^e + \{\sigma_0\}^e \quad (4.28)$$

şeklinde bulunur. Burada eleman gerilme matrisi

$$[S]^e = [D][B] \quad (4.29)$$

ile gösterilen matristir.

4.5 Sayısal İntegrasyon

(4.21) bağıntısı ile genel halde verilen eleman rijitlik matrisi ve (4.23) bağıntısı ile birim yüzeye etki eden $\{P\}$ yayılı yükü için eşdeğer düğüm noktası kuvvetleri vektörü kalınlığının sabit olması halinde sırası ile

$$[k]^e = \int_A [B]^T [D] [B] dA \quad (a)$$

(4.30)

$$\{F\}_p^e = - \int_A [N]^T \{P\} dA \quad (b)$$

şekline dönüşür. Görüldüğü gibi yer değiştirme yöntemi her bir eleman etkisinin integrasyonunu zorunlu kılan bir denge kavramına götürmektedir. Söz konusu integral ifadelerinin nümerik olarak değerlendirilmesi gerekir. Bu çalışmada Gauss nümerik integrasyon metodu kullanılmıştır. Gauss'un bilinen integrasyon şemaları integral ifadeye analitik olarak ele alınan polinomlarla yaklaşırlar.

Bu çalışmada izoparametrik elemanın rijitlik matrisi için yerel eksen takımında çalışılırsa (4.30a) ile verilen ifade

$$[k]^e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B(\xi, \eta)]^T [D] [B(\xi, \eta)] d\xi d\eta \quad (4.31)$$

şeklinde alan üzerindeki bir integral ifadenin alınmasına dönüşecektir. Yukardaki ifade Gauss integralinden yararlanarak

$$[k]^e = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [B(\xi_i, \eta_j)]^T [D] [B(\xi_i, \eta_j)] W_i W_j \quad (4.32)$$

şeklinde bulunur. Burada W_i , W_j Gauss ağırlık fonksiyonlarını, ξ_i ve η_j Gauss integrasyon noktalarını, n ise her doğrultudaki Gauss integrasyon noktalarının sayısını göstermektedir.



BÖLÜM 5

GENEL BİÇİMLİ KABUK İÇİN İZOPARAMETRİK BİR SONLU ELEMAN

5.1 Genel Açıklama

Sonlu elemanlarda genelleştirilmiş koordinatlarda eleman tanımı x, y, z değişkenlerine bağlı polinomlar ile α_i katsayılarına bağlı olarak tanımlanmaktadır. Genelleştirilmiş koordinatlar kullanıldığında elemanın düğüm noktalarındaki bilinmeyenlerin lineer kombinasyonuna ulaşılmakta ve katsayıların hesabı için dönüşüm matrisinin tersinin bulunması gerekmektedir. Ancak işlemsel fazlalığının yanı sıra bazı eleman tanımlarında bu matrisin tersi alınamayabilmektedir.

İzoparametrik sonlu eleman tanımında amaç, elemanın herhangi bir yerindeki bilinmeyenler ile elemanın düğüm noktalarındaki bilinmeyenler arasındaki ilişkileri doğrudan biçim fonksiyonlarını kullanarak elde etmektir. Zira bir problemin çözümünde gerekli matrisler biçim fonksiyonları ve biçim fonksiyonlarının türevleri cinsinden ifade edilmektedir. Böylelikle eleman matrisleri istenilen serbestlikle doğrudan yazılabilmektedir.

İzoparametrik sonlu eleman tanımında temel yöntem eleman koordinatları ve eleman bilinmeyenlerini doğal koordinat sistemini kullanarak biçimlendirmektir. Genel olarak üç boyutlu elemanda, koordinat yaklaşımı $\sum_{i=1}^n N_i = 1$ olmak koşulu ile

$$x = N_1 x_1 + N_2 x_2 + \dots = \sum_{i=1}^n N_i x_i$$

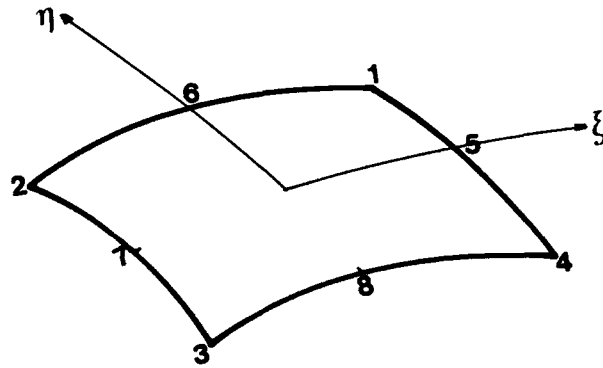
$$y = N_1 y_1 + N_2 y_2 + \dots = \sum_{i=1}^n N_i y_i \quad (5.1)$$

$$z = N_1 z_1 + N_2 z_2 + \dots = \sum_{i=1}^n N_i z_i$$

şeklindedir. Burada x, y, z herhangi bir noktanın eleman-daki yerel koordinatları ve x_i, y_i, z_i elemanın düğüm nok-tası koordinatlarıdır. Biçim fonksiyonları N_i 'ler ise elemanın yerel koordinat sisteminde herbiri π aralığında değişen (ξ, η, ζ) değişkenleri cinsinden tanımlanmıştır. (5.1)'de verilen N_i biçim fonksiyonlarının ana özelliği yerel koordinat sisteminde $N_i(x_i, y_i, z_i) = 1$, $N_i(x_j, y_j, z_j) = 0$ olmalarıdır.

5.2 Geliştirilen Sonlu Eleman

Genel biçimli kabuklar için bölüm 3'de elde edilen fonksiyonlardan faydalanarak bir sonlu eleman modeli ge-liştirilmiştir.



Şekil 5.1: İzoparametrik Kabuk Sonlu Eleman.

Şekil (5.1)'de görülen ikinci dereceden terimler içeren kenarları üzerinde ara noktaları bulunan 8 noktalı izoparametrik eğrisel eleman kullanılmıştır. (ξ, η) yerel koordinatlar olmak üzere söz konusu elemanın biçim fonksiyonları köşe noktalarında,

$$N_i = \frac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(\xi\xi_i+\eta\eta_i-1)$$

orta noktalarda,

$$\xi_i=0, \quad N_i = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta\eta_i) \quad (5.2)$$

$$\eta_i=0, \quad N_i = \frac{1}{2}(1+\xi\xi_i)(1-\eta^2)$$

dır. Eleman rijitlik matrisinin formülasyonunda, genel biçimli kabuklar için elde edilmiş fonksiyonelden hareketle söz konusu eğrisel izoparametrik elemanın biçim fonksiyonları ve biçim fonksiyonlarının türevlerinden faydalanılmıştır.

Genel sonlu elemanda her bir düğüm noktasında, u, v teğetsel ve w yüzeye normal yer değiştirme bileşenleri ile (α_1, α_2) eğrisel koordinatlarına ait teğetlerin dönme vektörleri doğrultusunda olan α ve β dönme bileşenleri uç serbestlikleri olarak alınmıştır. Elemanın uç serbestlikleri matris formunda

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \{\delta^1\} \\ \{\delta^2\} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \{\delta^8\} \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

yazılabilir.

Burada i düğüm noktasının serbestliklerinden oluşan $\{\delta^i\}$ vektörü

$$\{\delta^i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \quad (5.4)$$

dır. Böylece her bir düğüm noktasının serbestlik derecesi 5, elemanın serbestlik derecesi 40 olarak alınmaktadır. Elemanın yer değiştirme fonksiyonları (4.3) bağıntısından

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = [N]_{(5 \times 40)} \{\delta\}_{(40 \times 1)}^e \quad (5.5)$$

$$\{f\} = \left[[N^1], [N^2], \dots, [N^8] \right] \begin{Bmatrix} \{\delta^1\} \\ \{\delta^2\} \\ \vdots \\ \{\delta^8\} \end{Bmatrix}$$

olarak yazılabilir. Burada (5×5) boyutundaki $[N^i]$ ($i=1,2,3,\dots,8$) matrisinin herhangi bir kolonunu teşkil eden satırlar o kolona gelen serbestliğin birim, diğer bütün serbestliklerin sıfır olması halinde sırayla u, v, w, α, β yer değiştirmelerini ifade eden (5.2) bağıntısı ile verilen biçim fonksiyonlarıdır.

5.3 Geliştirilen Genel Sonlu Elemanın Formülasyonu

5.3.1 Gerilmelerle Şekil Değiştirmeler Arasındaki Bağın- tılar

Elastik davranış durumunda gerilmelerle şekil değış-
tirmeler arasındaki bağıntı (4.6) ile bilinmektedir. Bu
bölümde elde edilen genel biçimli kabuk fonksiyonelinden
hareketle elastisite matrisinin elde edilmesinden söz
edilecektir.

5.3.1.1 Mambran Etki, Eğilme Etkisi, Kayma Etkisi

Eleman kesit tesirlerinden oluşan matris $\{o\}_1$ ile
gösterilirse

$$\{o\}_1^{eT} = \{ N_1 \quad N_2 \quad N_{12} \quad M_1 \quad M_2 \quad M_{12} \quad T_1 \quad T_2 \} \quad (5.6)$$

olup

$$\{o\}_1^e = [D]_1 \{\varepsilon\}_1^e = [D]_1 \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^o \\ \varepsilon_2^o \\ \gamma_{12}^o \\ \chi_1 \\ \chi_2 \\ \tau \\ \gamma_{1z} \\ \gamma_{2z} \end{Bmatrix}_1 \quad (5.7)$$

bağıntısı ile bulunur. Burada $[D]_1$ ile gösterilen elas-
tisite matrisi (8x8) boyutunda bir matristir.

a) Mambran Etki

Genel biçimli kabuğun şekil değiştirme enerjisinde mambran etkiden gelen terimler bölüm 3'de aşağıdaki biçimi ile elde edilmişti.

$$V_{\varepsilon^o} = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon^o\}^T \{\sigma\} dv = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_A \left[\varepsilon_1^{o2} + \varepsilon_2^{o2} + 2\nu \varepsilon_1^o \varepsilon_2^o + \frac{1}{2}(1-\nu) \gamma_{12}^{o2} \right] dA \quad (5.8)$$

$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$ matris gösterimi ile yukarıdaki ifade düzenlenecek olursa

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon^o\}^T [D_o] \{\varepsilon^o\} dv &= \\ &= \frac{1}{2} \int_A \begin{bmatrix} \varepsilon_1^o & \varepsilon_2^o & \gamma_{12}^o \end{bmatrix} \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^o \\ \varepsilon_2^o \\ \gamma_{12}^o \end{Bmatrix} dA \end{aligned} \quad (5.9)$$

şeklinde elde edilir. Mambran etkiyi gösteren gerilme-şekil değiştirme matrisi $[D_o]$

$$[D_o] = \begin{bmatrix} \frac{Eh}{1-\nu^2} & \nu \frac{Eh}{1-\nu^2} & 0 \\ \nu \frac{Eh}{1-\nu^2} & \frac{Eh}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Eh}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

şeklindedir.

b) Eğilme Etkisi

Şekil değiştirme enerjisi ifadesinde eğilme terimlerinden gelen katkı

$$V_{\chi} = \frac{1}{2} \int_V \{\chi\}^T \{M\} dv = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \int_A \left[\chi_1^2 + \chi_2^2 + 2\nu\chi_1\chi_2 + \frac{1}{2}(1-\nu)\tau^2 \right] dA \quad (5.11)$$

şeklinde elde edilmişti. Bu ifade de benzer biçimde matris gösterimi ile düzenlenirse

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_V \{\chi\}^T [D_{\circ}] \{\chi\} dv = \\ = \frac{1}{2} \int_A \begin{bmatrix} \chi_1 & \chi_2 & \tau \end{bmatrix} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \tau \end{Bmatrix} dA \end{aligned} \quad (5.12)$$

bulunur. Eğilme terimlerinin etkisini gösteren bu matris $[D_{\circ}]$ ile tanımlanırsa

$$[D_{\circ}] = \begin{bmatrix} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} & \nu \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} & 0 \\ \nu \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} & \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Eh^3}{24(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

olduğu görülür.

c) Kayma Etkisi

Kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmelerinin hesaba katılmasından oluşan şekil değiştirme enerjisi matris gösteriminde düzenlenirse aşağıdaki şekli ile elde edilir.

$$\int_V (\tau_{1z} \gamma_{1z} + \tau_{2z} \gamma_{2z}) dv = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \int_A \frac{6}{5} (\gamma_{1z}^{\circ 2} + \gamma_{2z}^{\circ 2}) dA \quad (a)$$

(5.14)

$$= \int_A \begin{bmatrix} \gamma_{1z}^{\circ} & \gamma_{2z}^{\circ} \end{bmatrix} \frac{Eh}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1,2 & 0 \\ 0 & 1,2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{1z}^{\circ} \\ \gamma_{2z}^{\circ} \end{Bmatrix} dA \quad (b)$$

Kalınlık doğrultusundaki kayma gerilmeleri ile kayma şekil değiştirmeleri arasındaki bağıntı $[D_s]$ ile gösterilirse

$$[D_s] = \begin{bmatrix} \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ 1,2 \frac{Eh}{2(1+\nu)} & & 0 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ & 0 & 1,2 \frac{Eh}{2(1+\nu)} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

şeklindedir.

Homojen, elastik, izotrop malzeme için (5.7) bağıntısında $[D]_1$ ile gösterilen elastisite matrisi (5.10), (5.13), (5.15)'de verilen alt matrislerin birleştirilmesi ile aşağıdaki şekilde bulunur.

(5.16)

$$[D]_1 = \begin{bmatrix} \frac{Eh}{1-\nu^2} & \nu \frac{Eh}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu \frac{Eh}{1-\nu^2} & \frac{Eh}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Eh}{2(1+\nu)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} & \nu \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} & \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{Eh^3}{24(1+\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{Eh}{1,2\sqrt{2(1+\nu)}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,2\frac{Eh}{\sqrt{2(1+\nu)}} \end{bmatrix} \quad (8 \times 8)$$

5.3.1.2 Ek Terimlerin Etkisi

Kalınlık etkisinin ve kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmelerinin hesaba katılması nedeni ile α ve β dönmeleri u, v, w yer değiştirmelerinden bağımsız alındığı için şekil değiştirme enerjisinde ek terimler elde edilmişti. Ek terimler benzer biçimde matris gösteriminde düzenlenirse, sözkonusu ifadede gerilmelerle şekil değiştirmeler arasındaki bağıntıyı veren $[D]_2$ olarak tanımlanan elastisite matrisinin (8×8) boyutunda bir matris olduğu görülür.

Şekil değiştirme enerjisi ifadesinde ε_1^o , ε_2^o , χ_1 ve χ_2 şekil değiştirmeleri ile ilgili olan ek terimler matris formunda,

$$\int_A \begin{bmatrix} \varepsilon_1^o & \varepsilon_2^o & \chi_1 & \chi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^o \\ \varepsilon_2^o \\ \chi_1 \\ \chi_2 \end{Bmatrix} dA = \quad (5.17)$$

$$= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \int_A \left[\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \left(\frac{\varepsilon_1^{o2}}{R_1} - \frac{\varepsilon_2^{o2}}{R_2} \right) - 2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) (\varepsilon_1^o \chi_1 - \varepsilon_2^o \chi_2) \right] dA$$

şeklinde yazılabilir. (5.17) eşitliği düzenlenip bilinmeyen katsayılar bulunduktan sonra aradaki bağıntı $[D_1]_2$ ile tanımlanacak olursa

$$[D_1]_2 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \begin{bmatrix} 1/R_1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1/R_2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

şeklinde elde edilir.

Benzer biçimde γ_1^o , γ_2^o , τ_1 ve τ_2 şekil değiştirmeleri ile ilgili ek terimler matris gösterimi ile

$$\int_A \begin{bmatrix} \gamma_1^o & \gamma_2^o & \tau_1 & \tau_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_1^o \\ \gamma_2^o \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{Bmatrix} dA =$$

(5.19)

$$= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \int_A \left[\frac{1}{2}(1-\nu) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \left(\frac{\gamma_1^{o2}}{R_1} - \frac{\gamma_2^{o2}}{R_2} \right) - \right.$$

$$\left. -(1-\nu) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \left(\gamma_1^o \tau_1 - \gamma_2^o \tau_2 \right) \right] dA$$

şeklindedir. Söz konusu eşitlik düzenlenip katsayılar bulunursa $[D_2]_2$ ile gösterilen elastisite matrisi

$$[D_2]_2 = \frac{Eh^3}{24(1+\nu)} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \begin{bmatrix} 1/R_1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1/R_2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

şeklinde elde edilir.

Yapılan işiyleştirmeden kaynaklanan bu etkiler $[D]_2$ matrisinde toplanırsa

$$A = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) , \quad B = \frac{Eh^3}{24(1+\nu)} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (5.21)$$

olmak üzere aşağıdaki gibi olacaktır.

$$[D]_2 = \begin{bmatrix} A\frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 & -A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A\frac{1}{R_2} & 0 & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B\frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 & -B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B\frac{1}{R_2} & 0 & 0 & 0 & B \\ -A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (8 \times 8) \\ (5.22) \end{matrix}$$

5.3.2 Şekil Değiştirmelerle Yer Değiştirmeler Arasındaki Bağıntılar

Şekil değiştirmelerle yer değiştirmeler arasındaki bağıntı "e" elemanı için (4.5)'den bilindiği üzere

$$\{\varepsilon\}^e = [B] \{\delta\}^e = [B] \begin{Bmatrix} \{\delta^1\} \\ \{\delta^2\} \\ . \\ . \\ . \\ \{\delta^8\} \end{Bmatrix} \quad (5.23)$$

şeklindedir. Aradaki bağıntıyı tanımlayan $[B]$ matrisi, $[\partial]$ bir diferansiyel operatör olmak üzere

$$[B] = [\partial][N_i] \quad (5.24)$$

şeklinde elde edilir. Elastisite matrisinde olduğu gibi şekil değiştirmeler ile yer değiştirmeler arasındaki bağıntıyı sağlayan iki ayrı $[B]$ matrisi söz konusudur.

5.3.2.1 $[B]_1$ Matrisinin Oluşturulması

(5.7) bağıntısındaki $\{\varepsilon\}_1^e$ eleman şekil değiştirmeleri

$$\{\varepsilon\}_1^e = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^o \\ \varepsilon_2^o \\ \gamma_{12}^o \\ \chi_1 \\ \chi_2 \\ \tau \\ \gamma_{1z} \\ \gamma_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + \frac{A_{1,2}}{A_1 A_2} v + \frac{w}{R_1} \\ \frac{A_{2,1}}{A_1 A_2} u + \frac{1}{A_2} \frac{\partial v}{\partial \alpha_2} + \frac{w}{R_2} \\ \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} - \frac{A_{1,2}}{A_1 A_2} \right) u + \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} - \frac{A_{2,1}}{A_1 A_2} \right) v \\ \frac{1}{A_1} \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_1} + \frac{A_{1,2}}{A_1 A_2} \beta \\ \frac{A_{2,1}}{A_1 A_2} \alpha + \frac{1}{A_2} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha_2} \\ \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} - \frac{A_{1,2}}{A_1 A_2} \right) \alpha + \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} - \frac{A_{2,1}}{A_1 A_2} \right) \beta \\ \alpha + \frac{w_{,1}}{A_1} - \frac{u}{R_1} \\ \beta + \frac{w_{,2}}{A_2} - \frac{v}{R_2} \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

olup $\{\varepsilon\}_1^* = [B]_1 \{\delta\}^*$ gösterimi ile bilinmektedir. Yer de-
 ğiştirmeler elemanın düğüm noktası yer değiştirmeleri
 cinsinden (5.5) bağıntısında verildiği şekli ile (5.25)'
 de yerine konursa $[B]_1$ matrisi elde edilir. $[B]_1$ matri-
 si,

$$[B]_1^i = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_1} & \frac{A_{1,2}}{A_1 A_2} N_i & N_i/R_1 & 0 & 0 \\ \frac{A_{2,1}}{A_1 A_2} N_i & \frac{1}{A_2} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_2} & N_i/R_2 & 0 & 0 \\ \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_2} - \frac{A_{1,2}}{A_1 A_2} N_i \right) & \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_1} - \frac{A_{2,1}}{A_1 A_2} N_i \right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A_1} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_1} & \frac{A_{1,2}}{A_1 A_2} N_i \\ 0 & 0 & 0 & \frac{A_{2,1}}{A_1 A_2} N_i & \frac{1}{A_2} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_2} \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_2} - \frac{A_{1,2}}{A_1 A_2} N_i \right) & \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_1} - \frac{A_{2,1}}{A_1 A_2} N_i \right) \\ -N_i/R_1 & 0 & \frac{1}{A_1} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_1} & N_i & 0 \\ 0 & -N_i/R_2 & \frac{1}{A_2} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_2} & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

(8x5)

olmak üzere aşağıdaki gösterimi ile (8x5) boyutundaki
 $[B]_1^i$ alt matrislerinin toplamından oluşan (8x40)
 boyutunda olan bir matristir ($i=1,2,3,\dots,8$).

$$\left[\begin{matrix} \epsilon_1^o \\ \epsilon_2^o \\ \gamma_{12}^o \\ \chi_1 \\ \chi_2 \\ \tau \\ \gamma_{1z} \\ \gamma_{2z} \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} [B]_1^1, [B]_1^2, [B]_1^3, [B]_1^4, \\ , , , , [B]_1^5, [B]_1^6 \end{matrix} \right] \quad (8 \times 1)$$

$$[B]_1$$

$$[B]_1^1, [B]_1^2, [B]_1^3, [B]_1^4, [B]_1^5, [B]_1^6$$

$$(8 \times 40)$$

$$\left[\begin{matrix} \left[\begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \end{matrix} \right] \\ \left[\begin{matrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \end{matrix} \right] \\ \vdots \\ \left[\begin{matrix} u_8 \\ v_8 \\ w_8 \\ \alpha_8 \\ \beta_8 \end{matrix} \right] \end{matrix} \right] \quad (40 \times 1)$$

$$(5.27)$$

5.3.2.2 $[B]_2$ Matrisinin Oluşturulması

Benzer şekilde $\{\varepsilon\}_2^o$ ile gösterilen şekil değiştirmeler

$$\{\varepsilon\}_2^o = [B]_2 \{\delta\}^o \quad (5.28)$$

olup yer değiştirmeler cinsinden

$$\{\varepsilon\}_2^o = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^o \\ \varepsilon_2^o \\ \gamma_1^o \\ \gamma_2^o \\ \chi_1 \\ \chi_2 \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + \frac{A_{1,2}}{A_1 A_2} v + \frac{w}{R_1} \\ \frac{A_{2,1}}{A_1 A_2} u + \frac{1}{A_2} \frac{\partial v}{\partial \alpha_2} + \frac{w}{R_2} \\ \frac{1}{A_1} \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} - \frac{A_{1,2}}{A_1 A_2} u \\ \frac{1}{A_2} \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} - \frac{A_{2,1}}{A_1 A_2} v \\ \frac{1}{A_1} \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_1} + \frac{A_{1,2}}{A_1 A_2} \beta \\ \frac{A_{2,1}}{A_1 A_2} \alpha + \frac{1}{A_2} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha_2} \\ \frac{1}{A_1} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha_1} - \frac{A_{1,2}}{A_1 A_2} \alpha \\ \frac{1}{A_2} \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_2} - \frac{A_{2,1}}{A_1 A_2} \beta \end{Bmatrix} \quad (5.29)$$

biçiminde bilinmektedir. (5.29) ifadesi düzenlenirse biçim fonksiyonlarına bağlı olarak $[B]_2$ matrisi elde edilir.

$[B]_2$ matrisi de benzer biçimde,

$$[B]_2^i = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_1} & \frac{A_{1,2}}{A_1 A_2} N_i & N_i / R_1 & 0 & 0 \\ \frac{A_{2,1}}{A_1 A_2} N_i & \frac{1}{A_2} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_2} & N_i / R_2 & 0 & 0 \\ -\frac{A_{1,2}}{A_1 A_2} N_i & \frac{1}{A_1} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{A_2} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_2} & -\frac{A_{2,1}}{A_1 A_2} N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A_1} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_1} & \frac{A_{1,2}}{A_1 A_2} N_i \\ 0 & 0 & 0 & \frac{A_{2,1}}{A_1 A_2} N_i & \frac{1}{A_2} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_1} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{A_{1,2}}{A_1 A_2} N_i & \frac{1}{A_1} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_1} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A_2} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_2} & -\frac{A_{2,1}}{A_1 A_2} N_i \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

(8x5)

olmak üzere (8x5) boyutundaki $[B]_2^i$ alt matrislerinin toplamından oluşan (8x40) boyutunda olan bir matristir ($i=1,2,3,\dots,8$).

$$\left[\begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{c} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \end{array} \right\} \\ \vdots \\ \left\{ \begin{array}{c} u_8 \\ v_8 \\ w_8 \\ \alpha_8 \\ \beta_8 \end{array} \right\} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} [B]_2^1, [B]_2^2, [B]_2^3, [B]_2^4, \dots, [B]_2^8 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{array} \right] \quad (8 \times 1)$$

5.4 Kayma Kilitlenmesi

Kullanılan kabuk eleman birim uzamalar ve açı değişiminin yanında kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmeleri ile tanımlanmıştır. Kaymadan gelen terimler kabuğun kalın olması durumunda ihmal edilemeyecek mertebede iken ince olması durumunda eğilme terimleri yanında bu terimlerin etkisi çok küçüktür. Bu yüzden kalın kabuklara uygulanan bu tür genel sonlu elemanların ince kabuklara uygulanması ile kayma kilitlenmesi denilen olayla karşılaşılır. Zira ince kabukta kalınlık doğrultusundaki kayma gerilmelerinden gelen rijitlik matrisi terimlerinin diğer terimlere göre daha büyük değerler alması çözümün hassasiyetini bozup bu tür zorluklara yol açmaktadır.

Kabuk elemanlarda kayma kilitlenmesi problemi sayısal integrasyon adımı azaltılarak basit bir biçimde çözülmektedir. Zira integralde az terim almak serbestlik derecesi sayısını artırarak kayma şekil değiştirmelerini sıfır ve potansiyel enerjiyi minimum yapacak düzeye çıkarır. Bu da kayma terimlerinden gelen kilitlenmeyi kaldırır [26], [63], [64], [65].

Elemanın davranışı kayma davranışından bağımsız olarak ele alınabilir. Çünkü toplam şekil değiştirme enerjisi eğilme ve kayma enerjilerinin toplamına eşittir. Bu nedenle integrallerde sadece kayma terimlerinde düşük mertebe integral adımı alınmıştır.

5.5 Eleman Rijitlik Matrisinin Elde Edilmesi

Bu çalışmada, yapılan iyileştirmeden kaynaklanan ek matrislerin olması nedeni ile eleman rijitlik matrisi iki ayrı bölümde hesaplanmaktadır.

$$[k]^e = [k]_1^e + [k]_2^e \quad (5.32)$$

Burada $[k]_1^e$ membran etki, eğilme etkisi ve kayma etkisinden oluşan eleman rijitlik matrisini, $[k]_2^e$ ise yapılan iyileştirmeden kaynaklanan ek eleman rijitlik matrisini göstermektedir. (5.32) bağıntısı ile verilen eleman rijitlik matrisi bu çalışmada,

$$[k]^e = \int_A [B]_1^T [D]_1 [B]_1 dA + \int_A [B]_2^T [D]_2 [B]_2 dA \quad (5.33)$$

şeklinde olacaktır. $[k]^e$ eleman rijitlik matrisi (40x40) boyutunda simetrik bir kare matristir.

Kalın sayılabilecek kabuklara uygulanan geliştirilen bu sonlu elemanla çözümde eleman rijitlik matrisi hesaplanırken sayısal integrasyon adımı her bir doğrultu için 4 alınmıştır.

Geliştirilen kabuk sonlu elemanı ince kabuklara uyguladığımızda karşılaşılan kayma kilitlenmesi nedeni ile integrallerde sadece kayma terimlerinde düşük mertebe integral adımı kullanılmıştır. Bu yüzden kayma etkisini de içeren $[k]_1^e$ eleman rijitlik matrisi, eğilme rijitlik matrisi ve kayma rijitlik matrislerinin toplamı şeklinde yazılabilmektedir.

$$[k]_1^e = [k]_b^e + [k]_s^e \quad (5.34)$$

Burada $[k]_b^e$ eğilme terimlerinden oluşan rijitlik matrisini, $[k]_s^e$ ise kayma terimlerinden oluşan rijitlik matrisini tanımlamaktadır. Bu değerler (5.33) bağıntısından bilindiği şekli ile

$$[k]_b^e = \int_A [B]_b^T [D]_b [B]_b dA \quad , \quad [k]_s^e = \int_A [B]_s^T [D]_s [B]_s dA \quad (5.35)$$

biçiminde elde edilir.

5.6 Eğilme ve Kayma Terimlerinin Ayrılması

Bu bölümde, kayma kilitlenmesi olması durumunda eğilme terimleri rijitlik matrisi ve kayma terimleri rijitlik matrisi ayrı ayrı hesaplandığından $[D]_1$ elastisite matrisi ile $[B]_1$ matrisindeki eğilme ve kayma terimlerinin ayrılmasından söz edilecektir. Matrislerin bu şekilde ayrılması, daha küçük boyutlarda matrisler elde edileceği için bilgisayar aşamasında bellek kullanımı açısından da kolaylık sağlayacaktır.

5.6.1 $[D]_b$ ve $[D]_s$ Matrislerinin Belirlenmesi

Eğilme ve kayma etkisinden oluşan (5.16) bağıntısındaki $[D]_1$ elastisite matrisinde eğilme ve kayma terimleri ayrılırsa $[D]_b$ ile gösterilen eğilme elastisite matrisi,

$$[D]_b = \begin{bmatrix} \frac{Eh}{1-\nu^2} & \nu \frac{Eh}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu \frac{Eh}{1-\nu^2} & \frac{Eh}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Eh}{2(1+\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} & \nu \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} & \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{Eh^3}{24(1+\nu)} \end{bmatrix}$$

(6x6)
(5.36)

şeklini alır. Kayma terimlerini içeren $[D]_s$ elastisite

matrisi ise aşağıda verilmiştir.

$$[D]_s = \begin{bmatrix} 1.2 \frac{Eh}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 1.2 \frac{Eh}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (2 \times 2) \quad (5.37)$$

5.6.2 $[B]_b$ ve $[B]_s$ Matrislerinin Belirlenmesi

Benzer biçimde $[B]_1$ matrisinin terimleri ayrılacak olursa eğilme terimlerini içeren $[B]_b$ matrisi,

$$[B]_b^i = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_1} & \frac{A_{1,2}}{A_1 A_2} N_i & N_i/R_1 & 0 & 0 \\ \frac{A_{2,1}}{A_1 A_2} N_i & \frac{1}{A_2} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_2} & N_i/R_2 & 0 & 0 \\ \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_2} \right. & \left. \frac{1}{A_1} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_1} \right. & 0 & 0 & 0 \\ \left. -\frac{A_{1,2}}{A_1 A_2} N_i \right) & \left. -\frac{A_{2,1}}{A_1 A_2} N_i \right) & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A_1} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_1} & \frac{A_{1,2}}{A_1 A_2} N_i \\ 0 & 0 & 0 & \frac{A_{2,1}}{A_1 A_2} N_i & \frac{1}{A_2} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_2} \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_2} \right. & \left. \frac{1}{A_1} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_1} \right. \\ & & & \left. -\frac{A_{1,2}}{A_1 A_2} N_i \right) & \left. -\frac{A_{2,1}}{A_1 A_2} N_i \right) \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

(6x5)

olmak üzere (6×5) boyutundaki $[B]_b^i$ alt matrislerinin toplamından oluşan aşağıda verilmiş (6×40) boyutundaki matristir ($i=1,2,3, \dots, 8$).

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^o \\ \varepsilon_2^o \\ \gamma_{12}^o \\ \chi_1 \\ \chi_2 \\ \tau \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} [B]_b^1 & [B]_b^2 & [B]_b^3 & \dots & [B]_b^8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \end{Bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{Bmatrix} u_8 \\ v_8 \\ w_8 \\ \alpha_8 \\ \beta_8 \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \\
 (6 \times 1) & \quad (6 \times 40) \quad (40 \times 1) \\
 & \quad [B]_b
 \end{aligned}
 \tag{5.39}$$

Kayma terimlerini içeren $[B]_s$ matrisi de benzer biçimde

$$[B]_s^i = \begin{bmatrix} -\frac{N_i}{R_1} & 0 & \frac{1}{A_1} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_1} & N_i & 0 \\ 0 & -\frac{N_i}{R_2} & \frac{1}{A_2} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_2} & 0 & N_i \end{bmatrix}
 \tag{5.40}$$

(2x5)

olacak şekilde düzenlenen (2×5) boyutundaki $[B]_s^i$ alt matrislerinin toplamından elde edilen aşağıda verildiği şekli ile (2×40) boyutunda olan matristir.

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{1z} \\ \gamma_{2z} \end{Bmatrix}_{(2 \times 1)} = \begin{bmatrix} [B]_s^1 & [B]_s^2 & [B]_s^3 & \dots & [B]_s^8 \end{bmatrix}_{(2 \times 40)} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \end{Bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{Bmatrix} u_8 \\ v_8 \\ w_8 \\ \alpha_8 \\ \beta_8 \end{Bmatrix} \end{Bmatrix}_{(40 \times 1)} \quad (5.41)$$

$[B]_s$

5.7 Yükleme Matrisleri

$\{p\}$ yayılı yükleri, eleman içinde birim alandaki malzeme üzerine, bu noktadaki $\{f\}$ yer değiştirmelerinin doğrultusunda tesir eden yükler olarak tarif edilirler. Eleman üzerinde herhangi bir şekilde yayılı $\{p\}$ yükünün eleman içindeki dağılımı

$$\{p\} = [N_p] \{p\}^e \quad (5.42)$$

ile verilebilir. Burada $[N_p]$ yük için seçilmiş interpolasyon fonksiyonunu, $\{p\}^e$ yüklerin düğüm noktalarındaki değerlerinden, $\{p\}$ 'de yer değiştirme bileşenlerine eşit sayıda ve onların doğrultusunda yük fonksiyonlarından oluşan vektörü göstermektedir.

Bu çalışmada önerilen elemanda, $\{p\}$ 'nin u,v,w doğrultusundaki bileşenleri olan P_u , P_v , P_w 'nin eleman içindeki dağılımları lineer olarak alınmıştır. Buna göre P_u , P_v , P_w yük bileşenleri fonksiyonları,

$$P_u = \sum_{i=1}^4 P_u^i N_{pi} \quad (a)$$

$$P_v = \sum_{i=1}^4 P_v^i N_{pi} \quad (b) \quad (5.43)$$

$$P_w = \sum_{i=1}^4 P_w^i N_{pi} \quad (c)$$

olmaktadır. P_u^i , P_v^i , P_w^i , ($i=1,2,3,4$) dış yüklerin düğüm noktalarında yer değiştirme bileşenleri doğrultusundaki değerleridir.

$$\{P^i\}^T = \{P_u^i \quad P_v^i \quad P_w^i\} \quad (5.44)$$

$$\{P\}^e = \begin{Bmatrix} \{P^1\} \\ \{P^2\} \\ \{P^3\} \\ \{P^4\} \end{Bmatrix} \quad (5.45)$$

olmak üzere

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} P_u \\ P_v \\ P_w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{p1} & 0 & 0 & N_{p2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & N_{p1} & 0 & 0 & \dots & N_{p4} & 0 \\ 0 & 0 & N_{p1} & 0 & \dots & 0 & N_{p4} \end{bmatrix} \{P\}^e \quad (5.46)$$

yazılabilir. Burada $[N_p]$ biçim fonksiyonları,

$$N_{pi}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) \quad (5.47)$$

biçiminde bilinen lineer biçim fonksiyonlarıdır.

Eleman üzerinde yayılı $\{P\}$ dış yüklerine eşdeğer ve yer değiştirmeler doğrultusunda bileşen ihtiva eden düğüm noktası yüklerinden oluşan $\{F\}_p^e$ vektörünün elde edilmesinde potansiyel enerjinin minimum olma prensibinden yararlanarak (4.23) bağıntısı elde edilmişti. Kalınlığın sabit olması halinde ise (4.23) bağıntısı

$$\{F\}_p^e = - \int_A [N]^T \{P\} dA \quad (5.48)$$

biçimine dönüşür. (5.42) bağıntısı (5.48) eşitliğinde yerine konursa

$$\{F\}_p^e = - \int_A [N]^T [N_p] \{P\}^e dA \quad (5.49)$$

elde edilir. Genel halde verilmiş olan (5.49) bağıntısı örnek olmak üzere u yer değiştirmesi doğrultusundaki eşdeğer düğüm noktası kuvveti bileşenleri için yazılacak olursa,

$$\{F\}_{pu}^e = - \int_A \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \\ N_7 \\ N_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{p1} & N_{p2} & N_{p3} & N_{p4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_u^1 \\ p_u^2 \\ p_u^3 \\ p_u^4 \end{Bmatrix} dA \quad (5.50)$$

şeklindedir. Yukarıdaki ifade düzenlenirse sözkonusu düğüm noktası kuvvetleri

$$\{F\}_{pu}^e = \begin{bmatrix} F_{pu}^1 \\ F_{pu}^2 \\ F_{pu}^3 \\ . \\ . \\ . \\ F_{pu}^8 \end{bmatrix} = - \int_A \begin{bmatrix} N_1 N_{p1} & N_1 N_{p2} & N_1 N_{p3} & N_1 N_{p4} \\ N_2 N_{p1} & N_2 N_{p2} & N_2 N_{p3} & N_2 N_{p4} \\ N_3 N_{p1} & N_3 N_{p2} & N_3 N_{p3} & N_3 N_{p4} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ N_8 N_{p1} & N_8 N_{p2} & N_8 N_{p3} & N_8 N_{p4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_u^1 \\ P_u^2 \\ P_u^3 \\ P_u^4 \end{Bmatrix} dA \quad (5.51)$$

biçiminde elde edilir. Eşdeğer düğüm noktası kuvvetlerinin diğer bileşenleri $\{F\}_{pv}^e$, $\{F\}_{pw}^e$ benzer biçimde elde edilirler. Buradaki integrasyon işlemi rijitlik matrisinin elde edilişinde anlatıldığı şekilde yapılmaktadır.

5.8 Gerilmeler

Sistem denklemleri kurulup bilinmeyenler yani düğüm noktası yer değiştirmeleri bulunduktan sonra, elemanın i düğüm noktasına ait gerilme vektörü

$$\{\sigma^i\}^T = \{\sigma_1^i \quad \sigma_2^i \quad \tau_{12}^i \quad \tau_{1z}^i \quad \tau_{2z}^i\} \quad (5.52)$$

olmak üzere gerilmeler (4.28) bağıntısı ile elde edilebilir. Elemanın i düğüm noktasının şekil değiştirmeleri

$$\{\varepsilon^i\}^T = \{\varepsilon_1^i \quad \varepsilon_2^i \quad \gamma_{12}^i \quad \gamma_{1z}^i \quad \gamma_{2z}^i\} \quad (5.53)$$

olacak şekilde gerilmeleri şekil değiştirmelere bağlayan $[D]$ elastisite matrisi homojen, elastik, izotrop malzeme için

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \nu \frac{E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ \nu \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

(5x5)

biçimindedir. Burada $[D]$ matrisi (5×5) boyutunda olan simetrik bir kare matristir.

Bu çalışmada önerilen elemanda gerilmelerin kalınlık boyunca olan dağılımı elde edildiğinden (2.22) ve (2.23)'de verilen bağıntılar yardımı ile şekil değiştirmeleri yer değiştirmelere bağlayan $[B] = [\partial][N_i]$ eşitliği oluşturularak $[B]$ matrisi elde edilir. Bu matris aşağıda (5.55) ile verilen $[B]^i$ alt matrislerinin toplamından bulunur. Görüldüğü gibi $[B]$ matrisi, kalınlık boyunca değişimi veren z kabuk koordinatına bağlı (5×40) boyutunda bir matristir.

$[D]$ elastisite matrisi ve $[B]$ matrisinin çarpımı ile belirlenen (4.29) bağıntısı ile verilen (5×40) boyutundaki $[S]^e$ eleman gerilme matrisi oluşturulduktan sonra elemanın herhangi bir noktasındaki gerilmeler $\{\sigma\}^e = [S]^e \{\delta\}^e$ bağıntısı ile eleman kalınlığı boyunca istenen sayıdaki noktada elde edilebilirler.

$$\begin{aligned}
 [B]^i = & \begin{bmatrix}
 \frac{1}{1+z/R_1} \frac{1}{A_1} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_1} & \frac{1}{1+z/R_1} \frac{A_{1,2}}{A_1 A_2} N_i & \frac{1}{1+z/R_1} \frac{1}{R_1} & \frac{1}{1+z/R_1} \frac{1}{A_1} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_1} & \frac{z}{1+z/R_1} \frac{A_{1,2}}{A_1 A_2} N_i \\
 \frac{1}{1+z/R_2} \frac{A_{2,1}}{A_2 A_1} N_i & \frac{1}{1+z/R_2} \frac{1}{A_2} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_2} & \frac{1}{1+z/R_2} \frac{1}{R_2} & \frac{1}{1+z/R_2} \frac{A_{2,1}}{A_2 A_1} \frac{1}{A_1} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_1} & \frac{z}{1+z/R_2} \frac{1}{A_2} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_2} \\
 \frac{1}{1+z/R_2} \frac{1}{A_2} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_2} & \frac{1}{1+z/R_1} \frac{1}{A_1} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_1} & 0 & \frac{z}{1+z/R_2} \frac{1}{A_2} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_2} & \frac{z}{1+z/R_1} \frac{1}{A_1} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_1} \\
 -\frac{1}{1+z/R_1} \frac{A_{1,2}}{A_1 A_2} N_i & -\frac{1}{1+z/R_2} \frac{A_{2,1}}{A_2 A_1} \frac{1}{A_1} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_1} & -\frac{1}{1+z/R_2} \frac{A_{2,1}}{A_2 A_1} N_i & -\frac{z}{1+z/R_1} \frac{A_{1,2}}{A_1 A_2} \frac{1}{A_1} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_1} & -\frac{z}{1+z/R_2} \frac{A_{2,1}}{A_2 A_1} \frac{1}{A_2} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_2} \\
 -\frac{3}{2} \frac{1}{R_1 (1+z/R_1)} & \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) N_i & \frac{3}{2} \frac{1}{A_1 (1+z/R_1)} & \frac{3}{2} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) N_i & 0 \\
 0 & \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) N_i & \frac{3}{2} \frac{1}{R_2 (1+z/R_2)} & \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_1} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) & \frac{3}{2} \frac{1}{A_2 (1+z/R_2)} \\
 0 & \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) N_i & -\frac{3}{2} \frac{1}{R_2 (1+z/R_2)} & \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_2} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) & \frac{3}{2} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) N_i
 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

(5x5)

(5.55)

BÖLÜM 6

SONLU ELEMANLARDA KABUK GEOMETRİK BÜYÜKLÜKLERİ

Bu bölümde yüzey geometrisini daha iyi tanımlamak amacı ile yüksek mertebeden terimler içeren bir sonlu eleman biçim fonksiyonundan söz edilmektedir. Yaklaşımın yeterli olmadığı doğrultuda nokta sayısı artırılarak ve Lagrange interpolasyon fonksiyonlarından yararlanılarak bulunan biçim fonksiyonları ile geometri hesabındaki yaklaşıklık iyileştirilmeye çalışılmıştır.

6.1 Koordinat Dönüşümünde Biçim Fonksiyonlarının Kullanılması

α_1 ve α_2 yüzey eğrisel koordinatları cinsinden tanımlanan kabuk orta yüzeyi üzerindeki bir noktanın $\vec{r}$ konum vektörü (2.1) bağıntısı ile bilinmektedir. $\vec{r}$ konum vektörü elemanın yüzey geometrisini tanımlayan $\bar{N}_i(\alpha_1, \alpha_2)$ biçim fonksiyonları cinsinden

$$\vec{r}(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{i=1}^n \bar{N}_i(\alpha_1, \alpha_2) r_i \quad (6.1)$$

şeklinde de yazılabilir. (2.5) ve (2.13) bağıntılarından görüldüğü gibi kabuk yüzeyini tanımlayan E, F, G, L, M, N değerleri konum vektörlerine dolayısı ile biçim fonksiyonlarına bağlı olarak elde edilen büyüklüklerdir.

Yerel eksen takımı (ξ, η) ile gösterilecek olursa, genel koordinatlar biçim fonksiyonları cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$x = \sum_{i=1}^n \bar{N}_i(\xi, \eta) x_i$$

$$y = \sum_{i=1}^n \bar{N}_i(\xi, \eta) y_i \quad (6.2)$$

$$z = \sum_{i=1}^n \bar{N}_i(\xi, \eta) z_i$$

Burada bilindiği gibi $\bar{N}_i(\xi, \eta)$ elemanın biçim fonksiyonlarını, (x_i, y_i, z_i) elemanın düğüm noktası koordinatlarını göstermektedir. Yüzey geometrisi büyüklüklerinin hesabında kullanılan türevler ise $\bar{N}_i(\xi, \eta)$ biçim fonksiyonlarının türevlerinden elde edilebileceğinden, ξ ve η 'ya bağlı olarak bulunur.

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \xi} \bar{N}_i(\xi, \eta) x_i, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \eta} \bar{N}_i(\xi, \eta) x_i$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \xi} \bar{N}_i(\xi, \eta) y_i, \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \eta} \bar{N}_i(\xi, \eta) y_i \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \xi} \bar{N}_i(\xi, \eta) z_i, \quad \frac{\partial z}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \eta} \bar{N}_i(\xi, \eta) z_i$$

Aynı bağıntılarda x_i, y_i, z_i yerine aynı noktalardaki birinci türevler konularak ikinci türevler de bulunur.

6.2 Kabuk Geometrik Büyüklükleri Üzerine Yapılan Çalışmalar

Genel biçimli kabuk için eleman rijitlik matrisi gerilme-şekil değiştirme bağıntılarına, bu nedenle de kabuğun geometrik özelliklerine bağlıdır. Örneğin,

$$\epsilon_1 = \frac{1}{A_1} u_{,1} + \frac{A_{1,2}}{A_1 A_2} v + \frac{1}{R_1} w + z \left[\frac{1}{A_1} \alpha_{,1} + \frac{A_{1,2}}{A_1 A_2} \beta \right] \quad (6.4)$$

$$\epsilon_2 = \frac{A_{2,1}}{A_1 A_2} u + \frac{1}{A_2} v_{,2} + \frac{1}{R_2} w + z \left[\frac{A_{2,1}}{A_1 A_2} \alpha + \frac{1}{A_2} \beta_{,2} \right]$$

ifadelerinde A_1 , A_2 , R_1 , R_2 kabuk geometrik büyüklükleri eleman üzerinde noktadan noktaya değişmektedir. Bu değişimi hesaba katabilmek için A_1 , A_2 , $A_{1,2}$, $A_{2,1}$, R_1 , R_2 değerlerini eleman koordinatları cinsinden yeterli doğrulukta ifade ederek integral işleminde kullanmak gerekir.

Görüldüğü gibi yüzey geometrisi ile ilgili büyüklüklerin sayısal değerleri yukarıda sözü edilen geometrik bilgilerden yararlanılarak bu yaklaşıklık çerçevesinde hesaplanmaktadır.

Yüzey büyüklüklerinin hesabında sonlu elemanla çözümde yaygın olarak kullanılan 4 noktalı elemanın biçim fonksiyonları, lineer terimler içeren bu fonksiyonların sadeliği nedeni ile söz konusu elemanı formüle etmek kolay olduğu için tercih edilmektedir. Ancak geometrik yaklaşımı hassas problemler için düzlem kabuk eleman çözümleri çok yavaş yaklaşım göstermektedir.

Eğrisel yüzeyi tanımlamak amacı ile yüksek mertebeden terimler içeren elemanlar kullanılmaktadır (8 ve 12 noktalı eleman). Rijitlik matrisinin hesaplanmasında yararlanılan ve ikinci mertebeden terimler içeren 8 noktalı

kabuk sonlu eleman bilgisayar aşamasında kolaylık sağladığı için yüzey geometrisi ile ilgili büyüklüklerin hesabında da tercih edilmektedir. Ancak yapılan çalışmalar kabuk geometrisinin hesabında bu yaklaşımın yeterli olmadığını göstermiştir.

8 noktalı sonlu elemanın biçim fonksiyonları (5.2) bağıntısı ile bilinmektedir. Söz konusu biçim fonksiyonları aşağıdaki interpolasyon fonksiyonundan elde edilmektedir.

$$\phi = a_0 + a_1 \xi + a_2 \eta + a_3 \xi^2 + a_4 \xi \eta + a_5 \eta^2 + a_6 \xi^2 \eta + a_7 \xi \eta^2 \quad (6.5)$$

Görüldüğü gibi, kullanılan interpolasyon fonksiyonu ikinci dereceden terimler içermektedir. Geometrik büyüklüklerin hesabında ise biçim fonksiyonlarının birinci ve ikinci türevleri kullanılmaktadır. İstenen, bu türevlerin çözüm bölgesini mümkün olduğunca iyi ifade etmesidir. Birinci türevler bunu sağlarken A_1 ve A_2 değerlerinin türevleri ile eğriliklerin hesabında kullanılan biçim fonksiyonlarının ikinci türevleri eleman içinde sabit kalarak yeterli yaklaşımı sağlayamadığı için hesaplarda ek hatalara yol açmaktadır.

Yüzey büyüklüklerinin hesabında bilinen 12 noktalı izoparametrik elemana ait üçüncü dereceden terimler içeren biçim fonksiyonları kullanıldığı takdirde ikinci dereceden biçim fonksiyonlarına göre biraz daha iyi sonuç elde edildiği gözlenmiştir. Ancak rijitlik matrisi hesabında 8 noktalı eleman kullanıldığı için geometri hesabında bu elemanın kullanılması bilgisayar aşamasında data girişinde zorluk oluşturacağından tercih edilmemiştir.

Bu nedenle 8 noktalı elemanın interpolasyon fonksiyonu için yüksek mertebeden terimler içeren polinomlar seçilerek geometri hesabındaki yaklaşıklık iyileştirilmeye çalışılmıştır. Ancak bu tür denklemlerin çözümü, bir kısım terimler atılmasına rağmen sabitlerin hesaplanması için

yeterli koşul yazılamaması ve denklemlerin birbirine bağılı olması nedeni ile oldukça zordur.

Kang ve Pian rijitlik matrisi hesaplarında doğrusal biçim fonksiyonlarını kullandıkları halde kabuk geometrisi için daha yüksek dereceden biçim fonksiyonları kullanarak doyurucu sonuçlar elde ettiklerini belirtmektedirler [66]. Benzer biçimde bu çalışmada rijitlik matrisinin hesabında kullanılan 8 noktalı elemana ait biçim fonksiyonları lineer terimlerle çarpılarak ve

$$\sum_{i=1}^8 \bar{N}_i(\xi, \eta) = 1 \quad (6.6)$$

$$\bar{N}_i(\xi_i, \eta_i) = 1, \quad \bar{N}_i(\xi_j, \eta_j) = 0$$

koşulları da sağlanacak şekilde bulunan yüksek mertebeden biçim fonksiyonlarından yararlanılmaya çalışılmıştır. Ancak bu şekildeki bir çözüm yolunun da geometriyi iyi ifade etmediği gözlenmiştir.

6.3 Yüksek Mertebeden Terimler İçeren Biçim Fonksiyonlarının Elde Edilmesi

Biçim fonksiyonlarının elde edilmesinde en basit ve sistematik yöntem iki koordinat boyunca uygun polinomların çarpımıdır. Elemanın ara noktalarındaki biçim fonksiyonları bir boyutlu Lagrange interpolasyon fonksiyonu

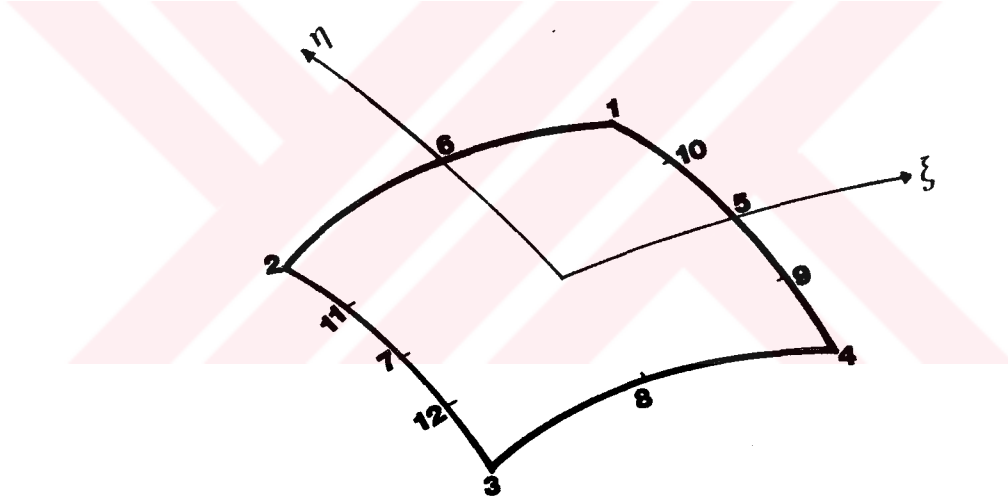
$$l_I^n(\xi) = \frac{\sum_{b=1, b \neq I}^n (\xi - \xi_b)}{\sum_{b=1, b \neq I}^n (\xi_I - \xi_b)} \quad (6.7)$$

olmak üzere bu fonksiyonların çarpımı ile

$$\bar{N}_i = \bar{N}_{IJ} = l_I^n(\xi) l_J^m(\eta) \quad (6.8)$$

biçiminde bulunur. Burada n ve m her iki doğrultudaki nokta sayısını, I ve J ise biçim fonksiyonu aranan noktayı göstermektedir.

Yukarda sözü edilen çalışmalar gözönüne alınarak eğrilik değişiminin yeter yaklaşıklıkta ifade edilemediği doğrultuda eleman kenarlarındaki nokta sayısı artırılarak ve Lagrange interpolasyon fonksiyonlarından yararlanılarak bir doğrultuda 4. dereceden diğer doğrultuda 2. dereceden olan biçim fonksiyonları bulunmuştur (Şekil 6.1).



Şekil 6.1: Yüksek Mertebeden Terimler İçeren Sonlu Eleman.

Şekil (6.1)'de tanımlanan bu elemanın kenarları üzerindeki noktaların, yani (5,6,7,8,9,10,11,12) ile gösterilen noktaların biçim fonksiyonları (6.7) ve (6.8) bağıntılarından hareketle elde edilir. Yüksek mertebeden terimler içeren bu biçim fonksiyonları,

$$\bar{N}_5 = 2(1+\xi)(\eta^2-1)(\eta^2-1/4)$$

$$\bar{N}_6 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$$

$$\bar{N}_7 = 2(1-\xi)(\eta^2-1)(\eta^2-1/4)$$

$$\bar{N}_8 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$$

$$\bar{N}_9 = -\frac{4}{3}(1+\xi)\eta(\eta^2-1)(\eta-1/2)$$

(6.9)

$$\bar{N}_{10} = -\frac{4}{3}(1+\xi)\eta(\eta^2-1)(\eta+1/2)$$

$$\bar{N}_{11} = -\frac{4}{3}(1-\xi)\eta(\eta^2-1)(\eta+1/2)$$

$$\bar{N}_{12} = -\frac{4}{3}(1-\xi)\eta(\eta^2-1)(\eta-1/2)$$

şeklindedir.

Elemanın köşe noktalarına ait biçim fonksiyonlarının eldesinde, ara noktaların koordinatları köşe noktalarının biçim fonksiyonlarına konduğu zaman sıfır olması şartının sağlanmasına çalışılmaktadır. Bu sağlanacak şekilde ve 4 noktalı elemana ait lineer biçim fonksiyonları

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i) \quad i=1,2,3,4 \quad (6.10)$$

olmak üzere köşe noktalarına ait biçim fonksiyonları

$$\bar{N}_1 = N_1 - \frac{1}{2}(\bar{N}_5 + \bar{N}_6) - \frac{1}{4}\bar{N}_9 - \frac{3}{4}\bar{N}_{10}$$

$$\bar{N}_2 = N_2 - \frac{1}{2}(\bar{N}_6 + \bar{N}_7) - \frac{1}{4}\bar{N}_{12} - \frac{3}{4}\bar{N}_{11} \quad (6.11)$$

$$\bar{N}_9 = N_9 - \frac{1}{2}(\bar{N}_7 + \bar{N}_8) - \frac{1}{4}\bar{N}_{11} - \frac{3}{4}\bar{N}_{12}$$

$$\bar{N}_4 = N_4 - \frac{1}{2}(\bar{N}_5 + \bar{N}_8) - \frac{1}{4}\bar{N}_{10} - \frac{3}{4}\bar{N}_9$$

tarzında teşkil edilirler. (6.9) ile verilmiş olan eleman ara noktalarına ait biçim fonksiyonları ve (6.10)'da verilen lineer biçim fonksiyonları (6.11) ifadesinde konup düzenlenirse söz konusu biçim fonksiyonları,

$$\begin{aligned} \bar{N}_1 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \left[\xi + (\eta-1) \left(-\frac{4}{3}\eta^2 + \frac{4}{3}\eta + 1 \right) \right] \\ \bar{N}_2 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \left[-\xi + (\eta-1) \left(-\frac{4}{3}\eta^2 + \frac{4}{3}\eta + 1 \right) \right] \\ \bar{N}_3 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \left[-\xi + (\eta+1) \left(-\frac{4}{3}\eta^2 + \frac{4}{3}\eta - 1 \right) \right] \\ \bar{N}_4 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \left[\xi + (\eta+1) \left(-\frac{4}{3}\eta^2 + \frac{4}{3}\eta - 1 \right) \right] \end{aligned} \quad (6.12)$$

şeklinde bulunur. Sonuçta,

$$\sum_{i=1}^{12} \bar{N}_i(\xi, \eta) = 1$$

$$\bar{N}_i(\xi_i, \eta_i) = 1 \quad i = 1, 2, 3, \dots, 12 \quad (6.13)$$

$$\bar{N}_i(\xi_j, \eta_j) = 0$$

koşulları da sağlanacak şekilde sözkonusu elemana ait yüksek mertebeden terimler içeren biçim fonksiyonları elde edilir. İnterpolasyon fonksiyonları için kullanımı yaygın olan gösterilişi ile bu biçim fonksiyonları

köşe noktalarında,

$$\bar{N}_i = \frac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i) \left[\xi\xi_i + (1-\eta\eta_i) \left[-\frac{4}{3}\eta^2\eta_i^2 - \frac{4}{3}\eta\eta_i - 1 \right] \right] \quad i=1,2,3,4$$

eleman kenarları üzerinde,

$$\xi_i = 0, \quad \bar{N}_i = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta\eta_i) \quad i=6,8 \quad (6.14)$$

$$\eta_i = 0, \quad \bar{N}_i = 2(1+\xi\xi_i)(\eta^2-1)(\eta^2-1/4) \quad i=5,7$$

$$\eta_i = \pm 1/2, \quad \bar{N}_i = -\frac{4}{3}(1+\xi\xi_i)\eta(\eta^2-1)(\eta+\eta_i) \quad i=9,10,11,12$$

olarak ifade edilebilir.

Bu çalışmada sözkonusu biçim fonksiyonları sadece yüzey büyüklüklerinin hesabında kullanılmıştır. Rijitlik matrisinin hesabında ise, yüksek mertebeden terimler içeren biçim fonksiyonlarının kullanılması gereksiz bellek kullanımına neden olacağından oldukça iyi sonuç veren ikinci dereceden biçim fonksiyonları tercih edilmiştir. Çözüm esnasında giriş bilgileri yüksek mertebeden terimler içeren 12 noktalı elemana göre girilmektedir. Son 4 noktaya ait bilinmeyenler yani yer değiştirmeler giriş bilgisinde sıfır olarak verildiği için kabuk geometrisi ile rijitlik matrisinin hesabında farklı elemanların kullanılması giriş bilgileri açısından zorluk oluşturmamaktadır.

Eleman iki kenarı boyunca nokta sayısını artırmak ve iki doğrultuda da yüksek mertebeden terimler içeren biçim fonksiyonları elde etmek mümkündür. Ancak bu şekildeki bir eleman seçimi bilgisayar çalışması sırasında aşırı bellek kullanımına yol açarak kapasitesi sınırlı bilgisayarlarda zorluk oluşturacaktır.

6.4 Yüksek Mertebeden Biçim Fonksiyonlarının Türevleri

Geometrik büyüklüklerin hesabında kullanılan biçim fonksiyonlarının yerel koordinatlara göre türevleri gösterimi yaygın olan şekli ile

köşe noktalarında,

$$\frac{\partial \bar{N}_i}{\partial \xi} = \frac{1}{4} (1 + \eta \eta_i) \left[(2\xi + \xi_i) + (1 - \eta \eta_i) \left(-\frac{4}{3} \eta^2 \xi_i - \frac{4}{3} \eta \eta_i \xi_i - \xi_i \right) \right]$$

$i = 1, 2, 3, 4$ (6.15a)

$$\frac{\partial \bar{N}_i}{\partial \eta} = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) \left[\xi \xi_i \eta_i + \left(\frac{16}{3} \eta^3 + 4 \eta^2 \eta_i - \frac{2}{3} \eta - \frac{4}{3} \eta_i \right) \right]$$

kenarlar üzerinde,

$$\frac{\partial \bar{N}_i}{\partial \xi} = 2 \xi_i (\eta^2 - 1) (\eta^2 - 1/4)$$

$$\eta_i = 0, \quad i = 5, 7 \quad (6.15b)$$

$$\frac{\partial \bar{N}_i}{\partial \eta} = 2 (1 + \xi \xi_i) \left(4 \eta^3 - \frac{5}{2} \eta \right)$$

$$\frac{\partial \bar{N}_i}{\partial \xi} = -\xi (1 + \eta \eta_i)$$

$$\xi_i = 0 ,$$

$$i = 6, 8$$

$$(6.15c)$$

$$\frac{\partial \bar{N}_i}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \eta_i (1 - \xi^2)$$

$$\frac{\partial \bar{N}_i}{\partial \xi} = -\frac{4}{3} \eta \xi_i (\eta^2 - 1) (\eta + \eta_i)$$

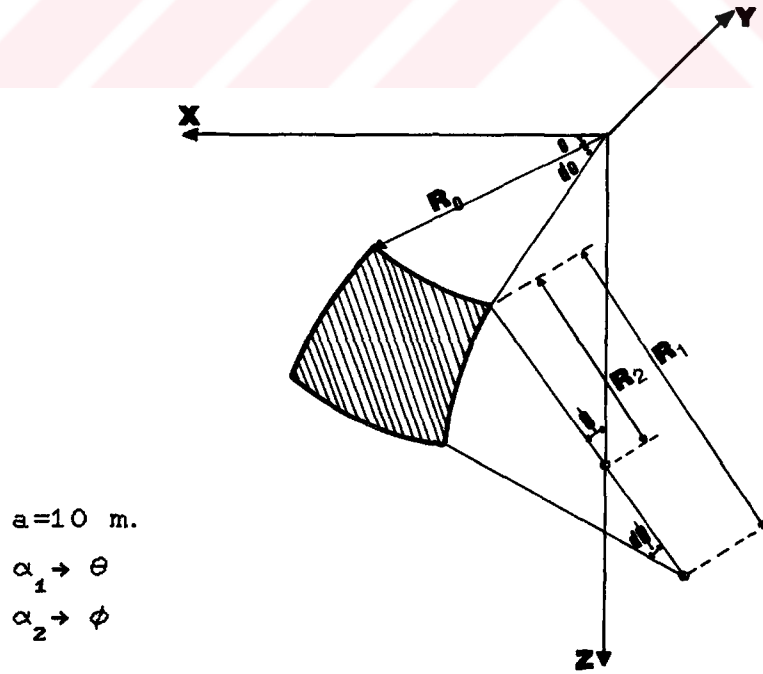
$$\eta_i = \pm 1/2 ,$$

$$i = 9, 10, 11, 12 \quad (6.15d)$$

$$\frac{\partial \bar{N}_i}{\partial \eta} = -\frac{4}{3} (1 + \xi \xi_i) (4\eta^3 + 3\eta^2 \eta_i - 2\eta - \eta_i)$$

olarak ifade edilebilir.

6.5 Kabuk Geometrik Büyüklükleri İçin Sayısal Örnekler



Şekil 6.2: Küresel Kabuk ve Paraboloid Kabuk Eleman.

Yüksek mertebeden terimler içeren biçim fonksiyonları ile kabuk geometrik büyüklüklerinin (A_1, A_2, R_1, R_2) tanımlanma düzeyini göstermek üzere küresel kabuk ve paraboloid kabuk elemanları alınarak bu elemanlara ait geometrik büyüklükler elde edilmiştir (Şekil 6.2).

Sözkonusu kabuk elemanlarına ait geometrik büyüklükler 8 noktalı elemana ait biçim fonksiyonları ile de elde edilmiştir.

Küresel kabuk elemanda, paralel daire merkez açısı θ 'nın $-2.5^\circ/2.5^\circ$ olduğu yüzeyin normalinin dönme eksenini ile yaptığı ϕ açısının $5^\circ/10^\circ$, $25^\circ/30^\circ$, $85^\circ/90^\circ$ olduğu üç farklı değeri için A_1 , A_2 , R_1 , R_2 büyüklükleri elde edilen biçim fonksiyonları ve 8 noktalı elemana ait biçim fonksiyonları ile bulunmuştur. Elde edilen sonuçlar ve analitik çözüm sonuçları tablo (6.1) ve tablo (6.2)'de elemanın bazı noktaları için verilmiştir.

Küresel kabuk geometrik büyüklükleri incelenirse, tablo (6.1)'den görüldüğü gibi nokta sayısının artırıldığı doğrultudaki geometrik büyüklük A_2 değeri, 8 noktalı elemana ait biçim fonksiyonları ile üç basamak doğru elde edilirken, yüksek mertebeden terimler içeren biçim fonksiyonları ile altı-yedi basamak doğrulukla elde edilmiştir. Aynı örnek için eğriliklerde de benzer yaklaşım görülmektedir (Tablo 6.2).

Paraboloid kabuk için benzer biçimde paralel daire merkez açısı θ 'nın $-2.5^\circ/2.5^\circ$ olduğu yüzeyin normalinin dönme eksenini ile yaptığı ϕ açısının $5^\circ/10^\circ$, $25^\circ/30^\circ$, $45^\circ/50^\circ$ olduğu üç farklı elemanda geometrik büyüklükler elde edilmiş ve sonuçlar tablo (6.3) ve tablo (6.4)'de verilmiştir.

Paraboloid kabuk elemanda ise nokta sayısının artırıldığı doğrultudaki A_2 değeri yüksek mertebeden biçim fonksiyonları ile beş-altı basamak doğrulukla bulunurken,

2. dereceden biçim fonksiyonları ile bir-iki basamak doğrulukla elde edilmiştir (Tablo 6.3).

Tablo (6.4)'den görüleceği gibi elde edilen biçim fonksiyonları ile R_2 eğriliği iki-üç basamak doğrulukla elde edilirken, 8 noktalı elemana ait biçim fonksiyonları ile R_2 'nin yaklaşımının iyi olmadığı gözlenmektedir. Özellikle ϕ merkez açının büyüdüğü paraboloid kabuk elemanda yüksek mertebeden terimler içeren biçim fonksiyonları ile elde edilen büyüklüklerdeki yaklaşımın 2. derece biçim fonksiyonları ile elde edilen sonuçlara göre çok daha iyi olduğu görülmektedir. 8 noktalı elemanla bulunan büyüklüklerdeki bağıl hata bazı noktalarda % 30 dolayında iken elde edilen biçim fonksiyonları ile bağıl hata %3'e kadar düşmektedir.

Ayrıca sözkonusu örnekler için nokta sayısının artırıldığı doğrultudaki A_2 geometrik büyüklüğünün türevlerindeki yaklaşımı göstermek amacı ile elemanın sadece (1) noktasındaki değerler karşılaştırılmış ve sonuçlar tablo (6.5)'de verilmiştir. A_2 büyüklüğünün türevleri için de benzer yaklaşım görülmektedir.

Tablo 6.1: Küresel Kabuk Elemanlar İçin A_1 ve A_2 Geometrik Büyüklükleri.

	Nokta No	ANALİTİK ÇÖZÜM		2. DERECE BİÇİM FONKSİYONLARI		YÜKSEK MERTEBEDEN BİÇİM FONKSİYONLARI	
		A_1	A_2	A_1	A_2	A_1	A_2
$\theta = -2.5^\circ / 2.5^\circ$ paralel $\theta = 5^\circ / 10^\circ$ merkez açısı arasındaki küresel ka- buk eleman	1	0.03802867	0.43633231	0.03805298	0.43660899	0.03805298	0.43633184
	3	0.07576831	0.43633231	0.07581629	0.43660914	0.07581628	0.43633279
	5	0.05695279	0.43633231	0.05698878	0.43619391	0.05698878	0.43632971
	6	0.03802867	0.43633231	0.03801679	0.43660663	0.03801679	0.43632971
$\theta = -2.5^\circ / 2.5^\circ$ paralel $\theta = 25^\circ / 30^\circ$ merkez açısı arasındaki küresel ka- buk eleman	1	0.184402	0.43633231	0.18451885	0.43660912	0.18451885	0.43633254
	3	0.21816616	0.43633231	0.21830448	0.43660894	0.21830448	0.43633271
	5	0.20147584	0.43633231	0.20160324	0.43619388	0.20160324	0.43633236
	6	0.184402	0.43633231	0.18434339	0.43660154	0.18434339	0.43632515
$\theta = -2.5^\circ / 2.5^\circ$ paralel $\theta = 85^\circ / 90^\circ$ merkez açısı arasındaki küresel ka- buk eleman	1	0.43467194	0.43633231	0.43494758	0.43660914	0.43494758	0.43633195
	3	0.43633231	0.43633231	0.43660896	0.43660890	0.43660896	0.43633251
	5	0.43591702	0.43633231	0.43619268	0.43619386	0.43619268	0.43633254
	6	0.43467194	0.43633231	0.434534	0.43660622	0.434544	0.43632902

Tablo 6.2: Küresel Kabuk Elemanlar İçin R_1 ve R_2 Geometrik Büyüklükleri.

	Nokta No	ANALİTİK ÇÖZÜM		2. DERECE BİÇİM FONKSİYONLARI		YÜKSEK MERTEBEDEN BİÇİM FONKSİYONLARI	
		R_1	R_2	R_1	R_2	R_1	R_2
$\theta = -2.5^\circ/2.5^\circ$ paralel $\theta = 5^\circ/10^\circ$ merkez açısı arasındaki küresel ka- buk eleman	1	10.0	10.0	10.02177417	10.02381829	10.02418645	9.99959345
	3	10.0	10.0	10.02524693	10.02381829	10.02404732	9.99964984
	5	10.0	10.0	10.03359385	9.99525639	10.03359616	10.00009703
	6	10.0	10.0	9.99316096	10.02381826	9.99557175	9.99957377
$\theta = -2.5^\circ/2.5^\circ$ paralel $\theta = 25^\circ/30^\circ$ merkez açısı arasındaki küresel ka- buk eleman	1	10.0	10.0	10.02331980	10.02388120	10.02377510	9.9995274
	3	10.0	10.0	10.024154	10.02386840	10.0237846	9.9994778
	5	10.0	10.0	10.03328140	9.99530810	10.033282	10.0001828
	6	10.0	10.0	9.99458041	10.025394	9.99503874	10.0009094
$\theta = -2.5^\circ/2.5^\circ$ paralel $\theta = 85^\circ/90^\circ$ merkez açısı arasındaki küresel ka- buk eleman	1	10.0	10.0	10.0240027	10.0237909	10.0240208	9.9998165
	3	10.0	10.0	10.0237881	10.0237742	10.0237881	9.9991732
	5	10.0	10.0	10.0333386	9.9952156	10.0333387	10.0000735
	6	10.0	10.0	9.9953992	10.0331534	9.9954172	10.0092625

Tablo 6.3: Paraboloid Kabuk Elemanlar için A_1 ve A_2 Geometrik Büyüklükleri.

	Nokta No	ANALİTİK ÇÖZÜM		2. DERECE BİÇİM FONKSİYONLARI		YÜKSEK MERTEBEDEN BİÇİM FONKSİYONLARI	
		A ₁	A ₂	A ₁	A ₂	A ₁	A ₂
θ=-2.5°/2.5° paralel θ=5°/10° merkez açısı arasındaki paraboloid kabuk eleman	1	0.03817413	0.44135159	0.03819832	0.44074265	0.03819832	0.44135129
	3	0.07693716	0.45683882	0.07698590	0.45618987	0.07698590	0.45683844
	5	0.05744424	0.44772534	0.05748087	0.44803935	0.05748087	0.44772551
	6	0.03817413	0.44135159	0.03816199	0.44074747	0.03816199	0.44135558
θ=-2.5°/2.5° paralel θ=25°/30° merkez açısı arasındaki paraboloid kabuk eleman	1	0.20346509	0.58612499	0.20359409	0.58417840	0.20359409	0.58612240
	3	0.25191658	0.67177756	0.25207629	0.66953986	0.25207629	0.67177433
	5	0.22714022	0.62521675	0.22728527	0.62626096	0.22728527	0.62521648
	6	0.20346509	0.58612499	0.20340049	0.58420020	0.20340049	0.58614281
θ=-2.5°/2.5° paralel θ=45°/50° merkez açısı arasındaki paraboloid kabuk eleman	1	0.43633231	1.23413415	0.43660896	1.22065991	0.43660896	1.23408698
	3	0.52000060	1.64291419	0.52033038	1.62655833	0.52033038	1.64285478
	5	0.47617316	1.41503551	0.47647887	1.42238838	0.47647887	1.41502777
	6	0.43633231	1.23413415	0.43619379	1.22072175	0.43619379	1.23414497

Tablo 6.4: Paraboloid Kabuk Elemanlar için R_1 ve R_2 Geometrik Büyüklükleri.

	Nokta No	ANALİTİK ÇÖZÜM		2. DERECE BİÇİM FONKSİYONLARI		YÜKSEK MERTEBEDEN BİÇİM FONKSİYONLARI	
		R_1	R_2	R_1	R_2	R_1	R_2
$\theta = -2.5^\circ / 2.5^\circ$ paralel $\theta = 5^\circ / 10^\circ$ merkez açısı arasındaki paraboloid kabuk eleman	1	10.03819835	10.11503331	10.12119198	9.76921955	10.06223103	10.11277396
	3	10.15426614	10.46997454	10.20711882	10.83282079	10.17871194	10.47092575
	5	10.08628961	10.261109	10.07180234	10.26249887	10.09100246	10.261289956
	6	10.03819835	10.11503331	10.09245769	9.76922358	10.03365148	10.11281825
$\theta = -2.5^\circ / 2.5^\circ$ paralel $\theta = 25^\circ / 30^\circ$ merkez açısı arasındaki paraboloid kabuk eleman	1	11.03377915	13.43299523	11.11132022	11.65420842	11.06019340	13.42064206
	3	11.54700543	15.39600748	11.61170209	17.54589852	11.5745511	15.40682690
	5	11.27381950	14.32891247	11.25205237	14.35860721	11.27351649	14.32907085
	6	11.03377915	13.43299523	11.08006769	11.65077277	11.02906243	13.41675327
$\theta = -2.5^\circ / 2.5^\circ$ paralel $\theta = 45^\circ / 50^\circ$ merkez açısı arasındaki paraboloid kabuk eleman	1	14.14213564	28.28427129	14.24652057	20.68387365	14.1761034	28.15593060
	3	15.55723826	37.65281961	15.64068150	48.96627140	15.59428056	37.76888450
	5	14.80187222	32.43022507	14.74741562	32.72671536	14.77554862	32.4305769
	6	14.14213564	28.28427129	14.20663856	20.66554110	14.13636695	28.12796234

Tablo 6.5: Küresel ve Paraboloid Kabuk Elemanları İçin A_2 Büyüklüğünün Türevleri

			A_2	$A_{2,1}$	$A_{2,2}$
Küresel Kabuk Eleman	$\theta = -2.5^\circ/2.5^\circ$ $\phi = 5^\circ/10^\circ$	Analitik çözüm	0.43633231	0.0	0.0
		2.derece biçim fonk.	0.43660899	$0.47268116 \cdot 10^{-5}$	$0.83024523 \cdot 10^{-3}$
		Yüksek mer. biçim fonk.	0.43633184	$0.42524157 \cdot 10^{-5}$	$-0.26939981 \cdot 10^{-5}$
	$\theta = -2.5^\circ/2.5^\circ$ $\phi = 25^\circ/30^\circ$	Analitik çözüm	0.43633231	0.0	0.0
		2.derece biçim fonk.	0.43660912	$0.15176528 \cdot 10^{-4}$	$0.83040173 \cdot 10^{-3}$
		Yüksek mer. biçim fonk.	0.43633254	$0.14780166 \cdot 10^{-4}$	$-0.35411641 \cdot 10^{-6}$
	$\theta = -2.5^\circ/2.5^\circ$ $\phi = 85^\circ/90^\circ$	Analitik çözüm	0.43633231	0.0	0.0
		2.derece biçim fonk.	0.43660914	$0.58452691 \cdot 10^{-5}$	$0.83044603 \cdot 10^{-3}$
		Yüksek mer. biçim fonk.	0.43633195	$0.58485715 \cdot 10^{-5}$	$-0.2595023 \cdot 10^{-5}$
Parabo- loid Kabuk Eleman	$\theta = -2.5^\circ/2.5^\circ$ $\phi = 5^\circ/10^\circ$	Analitik çözüm	0.44135159	0.0	$-0.50547532 \cdot 10^{-2}$
		2.derece biçim fonk.	0.44074265	$-0.96377505 \cdot 10^{-5}$	$-0.68697958 \cdot 10^{-2}$
		Yüksek mer. biçim fonk.	0.44135129	$-0.85700819 \cdot 10^{-5}$	$-0.50576767 \cdot 10^{-2}$
	$\theta = -2.5^\circ/2.5^\circ$ $\phi = 25^\circ/30^\circ$	Analitik çözüm	0.58612499	0.0	$-0.3577884 \cdot 10^{-1}$
		2.derece biçim fonk.	0.5841784	$-0.43605559 \cdot 10^{-4}$	$-0.41484388 \cdot 10^{-1}$
		Yüksek mer. biçim fonk.	0.58612211	$-0.41386082 \cdot 10^{-4}$	$-0.35801267 \cdot 10^{-1}$
	$\theta = -2.5^\circ/2.5^\circ$ $\phi = 45^\circ/50^\circ$	Analitik çözüm	1.23413415	0.0	-0.16155703
		2.derece biçim fonk.	1.22065991	$-0.12368624 \cdot 10^{-3}$	-0.20035772
		Yüksek mer. biçim fonk.	1.23408698	$-0.11599198 \cdot 10^{-3}$	-0.16193809

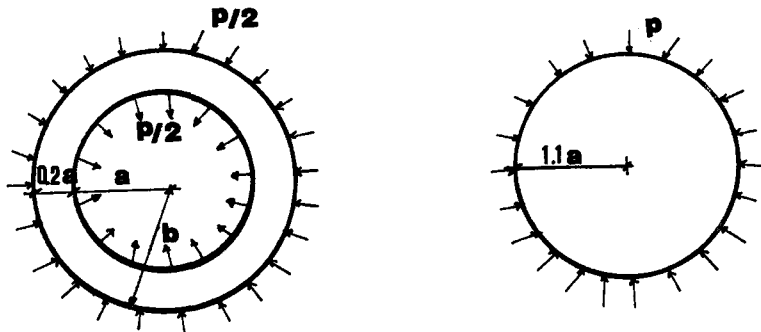
BÖLÜM 7

SAYISAL ÖRNEKLER

Bu bölümde, genel biçimli kabuklar için elde edilmiş sonlu eleman formülasyonundan yararlanarak sayısal örnekler çözülmüş ve yaklaşıklık derecesi belirlenmeye çalışılmıştır. İlk iki örnekte, elde edilen potansiyel enerji ifadesinin yaklaşıklık düzeyi gösterilmiştir.

7.1 Örnek 1

Elastisite teorisinden çözümü bilinen sonuçlarla karşılaştırma yapabilmek üzere dış basınca maruz sonsuz uzun silindirik kabuk için çözümler karşılaştırılmıştır (Şekil 7.1).



Şekil 7.1: Dönel Silindirik Yüke Maruz Sonsuz Uzun Silindirik Kabuk.

Elastisite çözümü için Maurice Bricas'ın verdiği bağıntılardan yararlanılmıştır [67]. Benzerliği artırmak amacı ile p basıncı elastisite çözümünde yarısı iç, yarısı dış yüze etkiyor kabul edilmiştir. Klasik kabuk teorisi çözümünde ise Flügge'nin vermiş olduğu bağıntılardan yararlanılmıştır.

Elde edilen boyutsuz yer değiştirme ve çembersel gerilme değerlerinin kalınlık boyunca değişimi tablo (7.1)'de verilmiştir.

Tablo 7.1: Dönel Silindirik Yüke Maruz Sonsuz Uzun Silindirik Kabuk İçin Elde Edilen wE/pa ve σ/p Değerleri.

		Elastisite Çözümü	Klasik Kabuk Teorisi	İyileştirilmiş Teori
$r=a$	wE/pa	5.923	5.808	5.792
	σ/p	6.045	5.500	6.033
$r=1.1a$	wE/pa	5.766	5.808	5.792
	σ/p	5.477	5.500	5.485
$r=b$	wE/pa	5.667	5.808	5.792
	σ/p	5.045	5.500	5.028

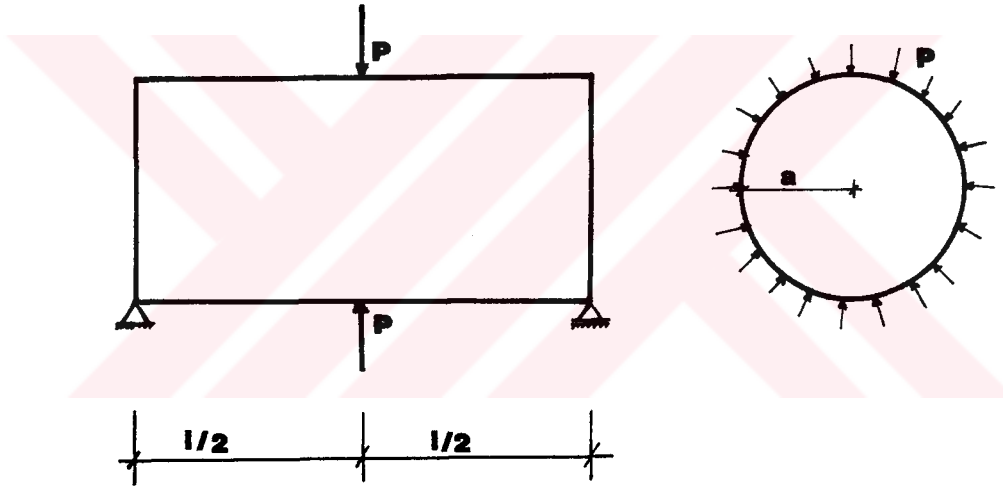
Çözülen örnek için kesin sayılabilecek elastisite çözümünde çökmenin kabuğun iç ve dış yüzleri arasında daha az (% 4.5), çembersel gerilmenin daha hızlı (% 20) değiştiğini ortaya koymaktadır. Gerilmede w 'nın değişimi yanında $1/r$ etkeni olması nedeni ile bu beklenen bir sonuçtur.

Özellikle gerilme değerlerinde iyileştirilmiş çözüm sonuçlarının klasik teori sonuçlarından belirgin biçimde daha az hatalı olduğu görülmektedir. Bu örnekte kayma şekil değiştirmeleri sözkonusu olmaksızın klasik teoriden

daha iyi sonuç elde edilmesi z/R 'li terimlerin hesaba katılmasının da bir iyileştirme sağladığını göstermektedir. Bu etki ile ilgili olarak şekil değiştirme enerjisinde elde edilen ek terimler daha önce elde edilmiş olandan biraz farklıdır.

7.2 Örnek 2

İkinci örnek olarak dönel simetrik çizgisel yüke maruz bir silindirik kabuk çözülmüştür. Uçlarında basit mesnetli olarak alınan kabuğun açıklık ortasında dönel simetrik çizgisel P yükü etki etmektedir (Şekil 7.2).



Şekil 7.2: Dönel Simetrik Çizgisel Yüke Maruz Silindirik Kabuk.

Sayısal hesaplamalarda, elastisite çözümü için Lurje'nin [68], klasik kabuk teorisi çözümü için ise Flügge'nin [8] verdiği bağıntılardan yararlanılmıştır. Lurje'nin verdiği çözümde, boyuna doğrultuda trigonometrik, kalınlık doğrultusunda ise Bessel fonksiyonları kullanılmıştır. Bu örnekte de, karşılaştırma yapabilmek üzere

elastisite çözümü için yükün yarısının iç,yarısının dış yüze etki ettiği kabul edilmiştir.

Uç çözümde de kullanılan Fourier serisinde ilk 101 tek numaralı terimle hesap yapılmıştır. Tablo (7.2)'de ortalama düzlemin boyutsuz en büyük yer değiştirmesi dört ayrı kalınlık oranı için karşılaştırılmıştır.

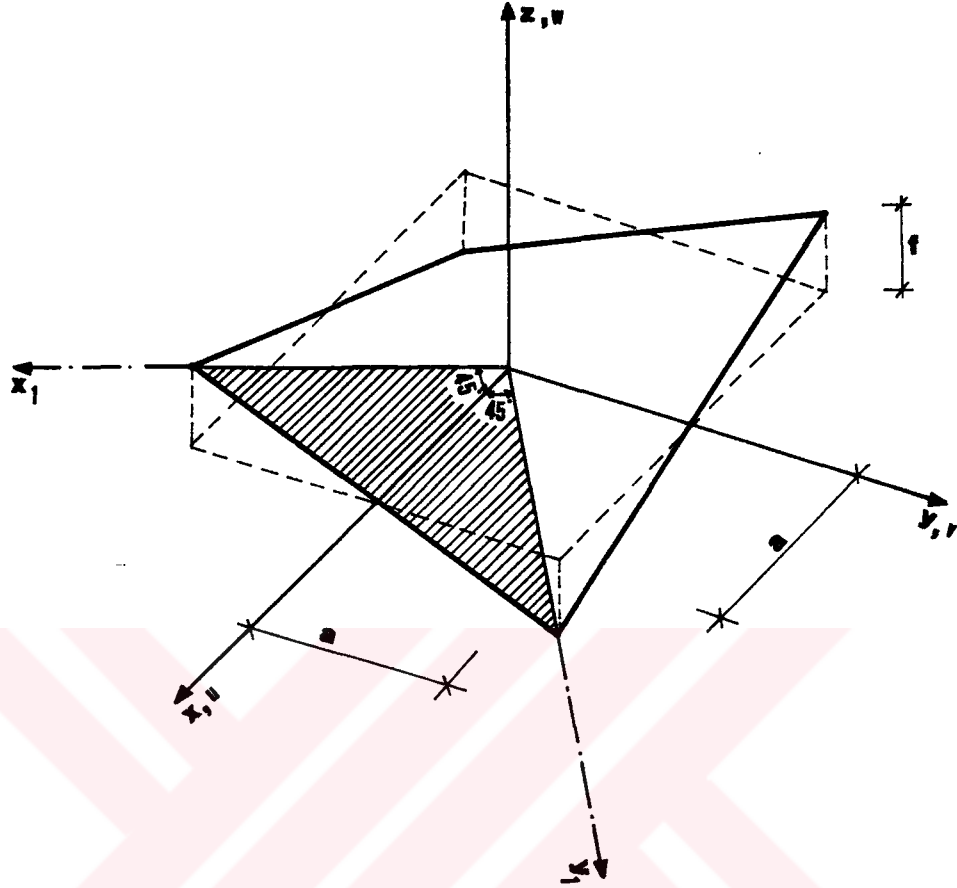
Tablo 7.2: Dönel Simetrik Çizgisel Yüke Maruz Silindirik Kabuk İçin wEh/Pa Değerleri.

h/a	Elastisite Çözümü	Klasik Kabuk Teorisi	İyileştirilmiş Teori
0.01	6.462	6.427	6.460
0.02	4.600	4.545	4.590
0.10	2.143	2.032	2.136
0.20	1.577	1.453	1.583

Bu örnekte de iyileştirilmiş potansiyel enerji ile bulunan çözümün klasik kabuk çözümünden daha iyi sonuç verdiği, farkın kabuk kalınlaştıkça daha belirgin olduğu görülmektedir. Bu örnekte hesaplanan çökme değerlerinde farkın en önemli bölümünün kayma şekil değiştirmelerinin hesaba katılmasından ileri geldiği görülmektedir.

7.3 Örnek 3

Bu çalışmada geliştirilen sonlu elemanla, bir çok çalışmada ele alınan şekil (7.3)'de verilen dört kenarından ankastre mesnetli eşkenar hiperbolik paraboloid kabuğun kendi ağırlığı altında hesabı yapılmıştır. Problemin boyutları ve malzeme özellikleri; $a=15.70\text{cm}$, $f=3.3\text{cm}$, $h=0.635\text{cm}$, $E=35000\text{kg/cm}^2$, $\nu=0.39$, $g=0.07\text{kg/cm}^2$ 'dir.



Şekil 7.3: Eşkenar Hiperbolik Paraboloid Kabuk.

Problemin çözümünde asal eğrilik yarıçapları kullanılacağı için yüzeyin parametrik eğrileri olarak asal doğrultuları almak gerekir. (x_1, y_1) eksen takımına göre simetriden de yararlanarak kabuğun 1/4'i ile hesap yapmak yeterlidir (Şekil 7.3). Kabuk geometrik büyüklükleri için ikinci dereceden biçim fonksiyonları yeterli olduğundan sonlu eleman ağı buna uygun düzenlenmiştir.

36 elemandan oluşan bu sonlu eleman ağı ile elde edilen sonuçlar [59]'daki sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Chieslar ve Ghali çalışmalarında 4 noktalı kalın bir

hybrid kabuk eleman geliştirmişlerdir. Bu elemanın verdiği sonuçlar Hadid ve Tottenham'ın verdiği analitik sonuçlarla ayrıca [69]'daki çalışmada verilen 8 noktalı deplasman metoduna dayanan kalın kabuk eleman sonuçları ile de karşılaştırılmıştır.

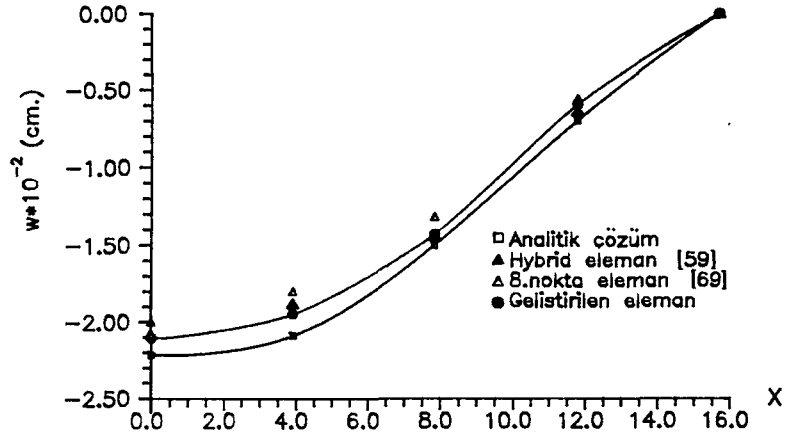
Tablo (7.3)'de kabuğun orta noktasındaki w yer değiştirmesi sözkonusu çalışmalardaki sonuçlarla verilmiştir. Tablodan görüldüğü gibi 64 elemandan oluşan hybrid sonlu eleman ağına göre bulunan sonucun analitik çözüme göre bağıl hatası % 10 iken geliştirilen elemanla elde edilen sonuçta bağıl hata yaklaşık % 4.8'e düşmektedir.

Tablo 7.3: Hiperbolik Paraboloid Kabuğun Merkezindeki w Yer Değiştirmesi.

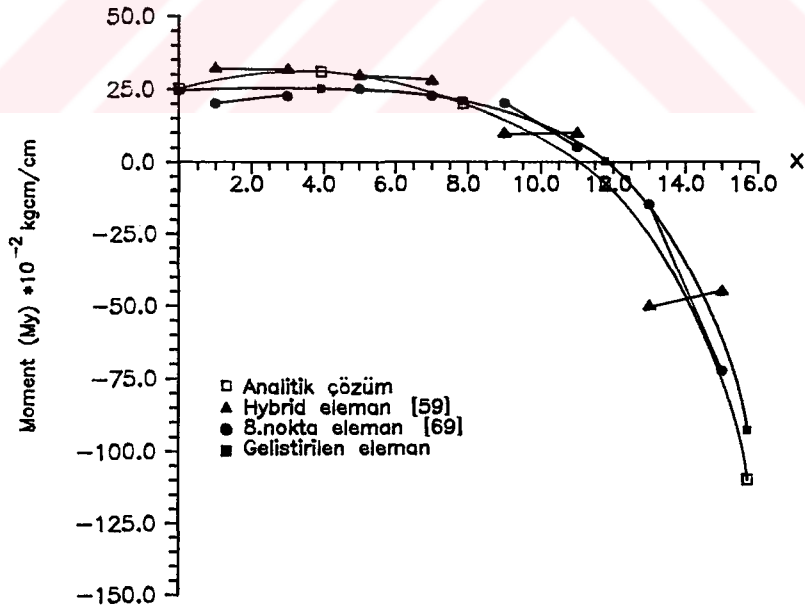
	Analitik Çözüm	Hybrid eleman [59], 64 eleman	8 nok. eleman [69], 64 eleman	Geliştirilen el., 36 ele.
w	0.02215	0.01993	0.01927	0.02107

Şekil (7.4) (a) ve (b)'de sırası ile x eksenı boyunca w yer değiştirmesinin ve M_y eğilme momentinin dağılımı sözkonusu çalışmalarda birlikte verilmiştir.

Geliştirilen elemanla elde edilen w yer değiştirme dağılımı ve M_y eğilme momenti dağılımı analitik çözüme oldukça iyi bir yaklaşıml göstermektedir. Bu problemin sonlu eleman ağında sistemin kenarlarında tanımlanan elemanın dörtgen elemandan ziyade üçgen elemana benzemesinden kaynaklanan bir miktar hata artışı olmakla beraber sonuçların analitik çözüme yeter yaklaşıklıkta uyduğu görülmektedir.



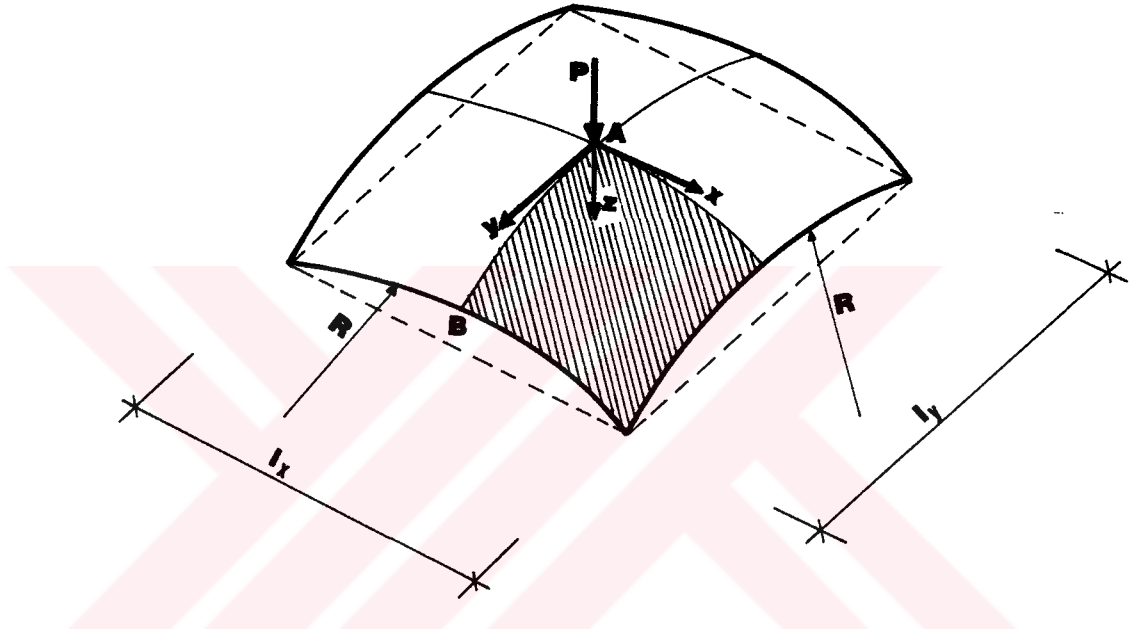
Şekil 7.4: a) Hiperbolik Paraboloid Kabuğun x Ekseni Boyunca w Yer Değiştirme Eğrisi.



Şekil 7.4: b) Hiperbolik Paraboloid Kabuğun x Ekseni Boyunca M_y Moment Eğrisi.

7.4 Örnek 4

Geliştirilen sonlu elemanın ince kabuk için yaklaşımını göstermek amacı ile boyutları verilen merkezinde tekil yüke maruz ince eliptik paraboloid kabuk hesabı yapılmıştır (Şekil 7.5).



$$R=96 \text{ in.} \quad h=0.1 \text{ in.} \quad l_x=l_y=32 \text{ in.}$$

$$E=10^7 \text{ psi.} \quad \nu=0.30 \quad P=100 \text{ lb.}$$

Şekil 7.5: Eliptik Paraboloid Kabuk.

Tüm kenarları basit mesnetli olan bu kabukta simetriden dolayı 1/4 parçası alınarak sonlu eleman ağı oluşturulmuştur. Kabuk geometrik büyüklükleri ikinci dereceden biçim fonksiyonları yeterli olduğu için 8 noktalı elemana göre hesaplanmış ve 64 elemanlı bir sonlu eleman

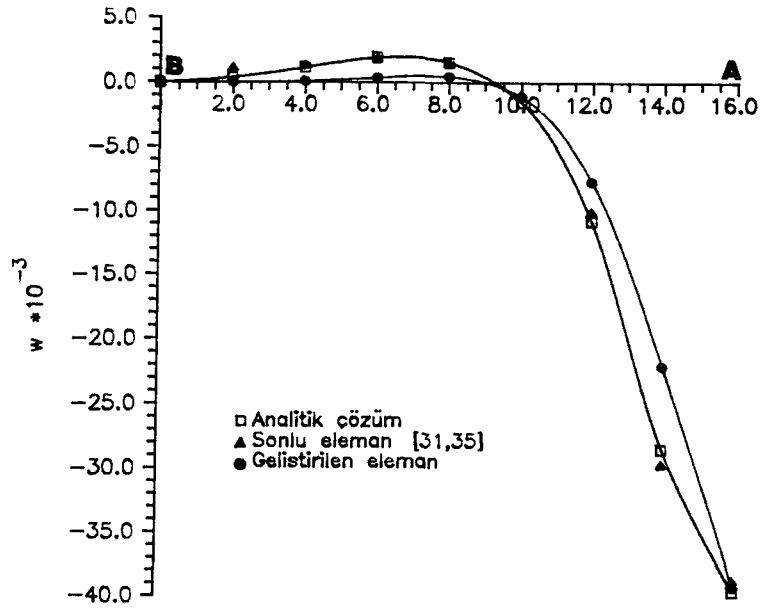
ağı oluşturulmuştur. Bu örneğin çözümünde bölüm 5'de sözü edilen kayma kilitlenmesinden kurtulmak için integral adımı 2 olarak alınmıştır.

Elde edilen sonuçlar [31] ve [35]'de verilen sonuçla karşılaştırılmıştır. Bu çalışmalarda sözkonusu örnek için elde edilen sonuçlar Vlasov'un verdiği serilerle çözüm sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Analitik çözümde yer değiştirme ve membran kuvvetler 100x100 terim, eğilme momentleri ise 250x250 terim alınarak bulunmuştur.

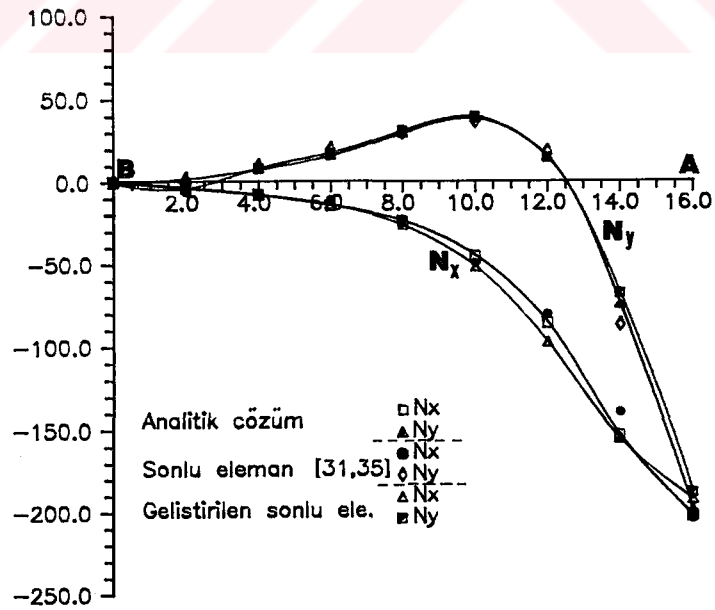
Şekil (7.6)'da eliptik paraboloid kabuğun $\overline{AB}$ kenarı boyunca w yer değiştirmesinin değişimi karşılaştırılarak verilmiştir. Görüldüğü gibi geliştirilen sonlu eleman çözümü analitik çözümle çok iyi uyumaktadır. Yükün etkidiği noktadaki w yer değiştirmesinin analitik çözüme göre bağıl hatası %7 gibi çok küçük bir değerdir.

Şekil (7.7)'de ise kabuğun $\overline{AB}$ kenarı boyunca N_x ve N_y membran kuvvetlerinin dağılımı sözkonusu çalışmalarda gözönüne alınarak karşılaştırılmıştır. Membran kuvvetler için yükün etkidiği noktada bağıl hata yaklaşık % 5 dolayındadır.

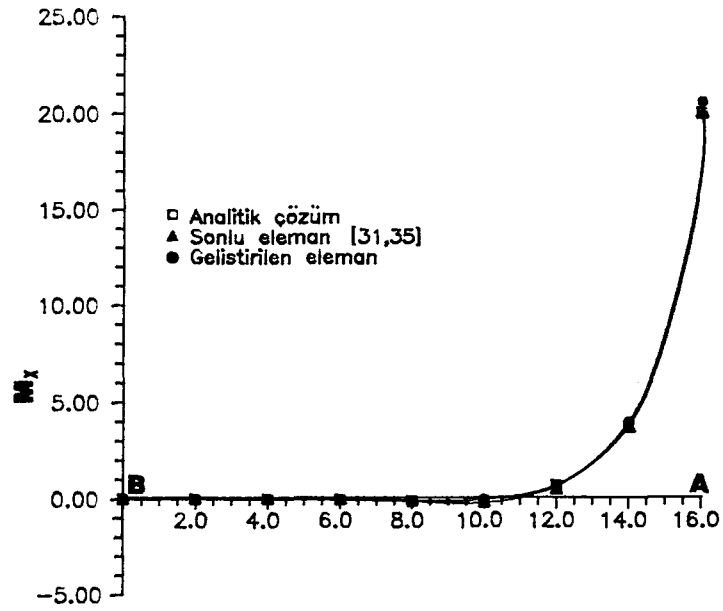
Şekil (7.8) ve (7.9)'da kabuğun $\overline{AB}$ kenarı boyunca M_x ve M_y eğilme momentlerinin dağılımı verilmiştir. Elde edilen sonuçlarda bağıl hatanın % 4 -% 8 arasında değiştiği söylenebilir.



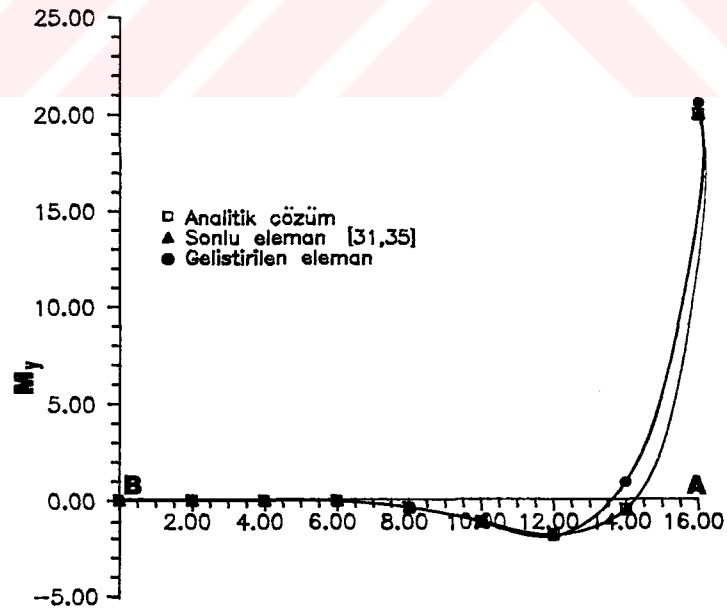
Şekil 7.6: Eliptik Paraboloid Kabuk İçin $\overline{AB}$ Boyunca w Yer Değiştirmesi Dağılımı.



Şekil 7.7: Eliptik Paraboloid Kabuk İçin $\overline{AB}$ Boyunca Membran Kuvvetlerin Dağılımı.



Şekil 7.8: Eliptik Paraboloid Kabuk İçin $\overline{AB}$ Boyunca M_x Eğilme Momenti Dağılımı.



Şekil 7.9: Eliptik Paraboloid Kabuk İçin $\overline{AB}$ Boyunca M_y Eğilme Momenti Dağılımı.

Ayrıca şekil (7.5)'de verilen eliptik paraboloid kabuk üniform düzgün yayılı yük altında da çözülmüştür. Kabuğun boyutları aynı olup sadece $E/p_z=10^5$ olarak alınmıştır. Bu örnek Reddy(1984) tarafından kalın kabuk teorisine dayanarak analitik olarak çözülmüştür. Kabuk orta noktasındaki w yer değiştirmesi bu çalışmada geliştirilen sonlu elemanla elde edilmiş ve sonuçlar analitik çözüm sonuçları ile tablo (7.4)'de verilmiştir.

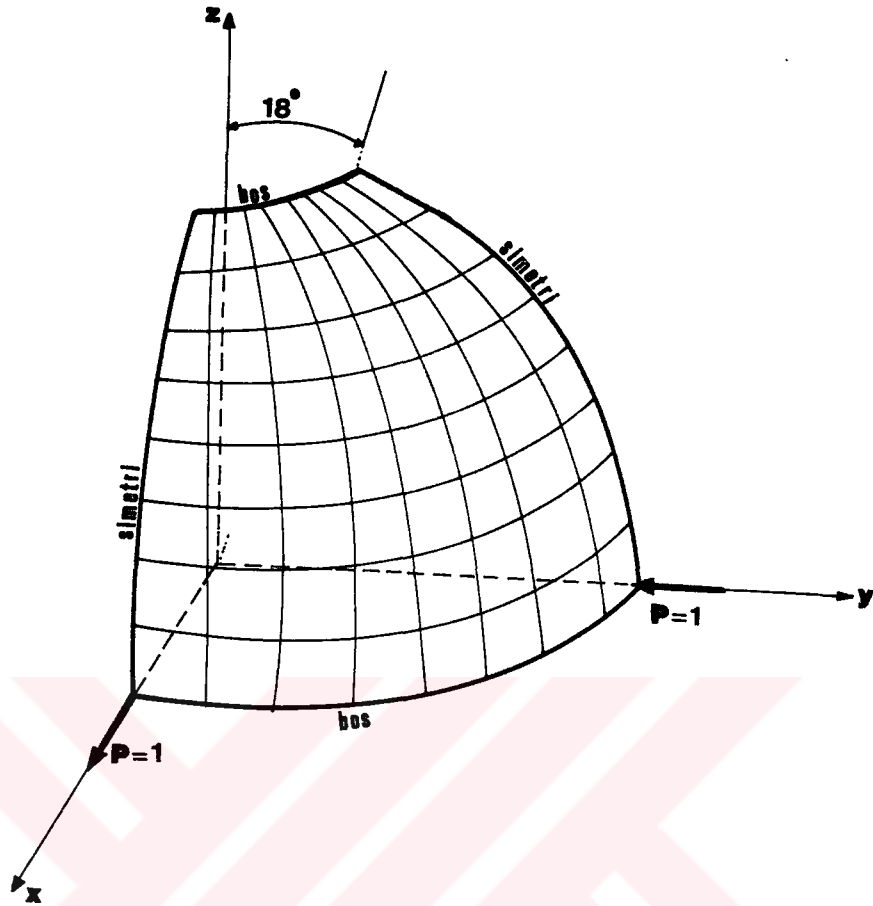
Tablo 7.4: Üniform Yük Altında Dört Kenarından Basit Mesnetli Eliptik Paraboloid Kabuğun Orta Noktasındaki Yer Değiştirmesi ($w \times 10^3$).

Kalınlık (h)	0.32	1.60	3.20	6.40
Geliştirilen Eleman	330.469	51.583	11.482	1.929
Analitik Çözüm	313.860	49.695	11.265	1.976

Görüldüğü gibi geliştirilen sonlu eleman ile bulunan sonuçlar kabuk kalınlaştıkça kesin çözüm denebilecek Reddy'nin sonuçlarına çok yakın değerler almaktadır. İnce kabukta bağıl hata miktarı % 5 dolayında iken kabuk kalınlaştıkça % 2 mertebesine düşmektedir.

7.5 Örnek 5

Geliştirilen sonlu eleman modelinin ince kabuk için yaklaşımını göstermek amacı ile tepesi $\phi=18^\circ$ lik açılı yapacak şekilde delik olan yarım küresel kabuk için sadece w yer değiştirmesinin hesabı yapılmıştır. Boyutları ve malzeme özellikleri aşağıda verilen kabuk P karşılıklı tekil yüklerine maruzdur (Şekil 7.10).



$R=10.0$ in. , $h=0.04$ in. , $E=6.825 \times 10^7$ psi. , $\nu=0.30$

$\phi=18^\circ$, $P=1.0$ lb. (1/4 parçaya gelen)

Şekil 7.10: Kesik Küresel Kabuk.

Simetriden yararlanarak yarım küresel kabuğun 1/8'lik parçası alınarak sonlu eleman ağı oluşturulmuştur. Kabuk geometrik büyüklükleri yüksek mertebeden terimler içeren biçim fonksiyonlarına göre hesaplandığı için data girişi 12 noktalı elemana göre yapılmıştır. 45 elemandan oluşan bu sonlu eleman ağına göre yükün etkidiği noktadaki radyal yer değiştirme [48] ve [60]'daki sonuçlarla karşılaştırılmıştır (Tablo 7.5).

Tablo 7.5: Kesik Küresel Kabuk İçin Yükün Etkidiği Noktadaki w Yer Değiştirmesi.

	SAP 90 [48]	HMSH5 [60]	Q4-SRI [60]	ANALİTİK ÇÖZÜM	GELİŞTİRİLEN EL
w	0.092982	0.09494	0.09212	0.093	0.09274

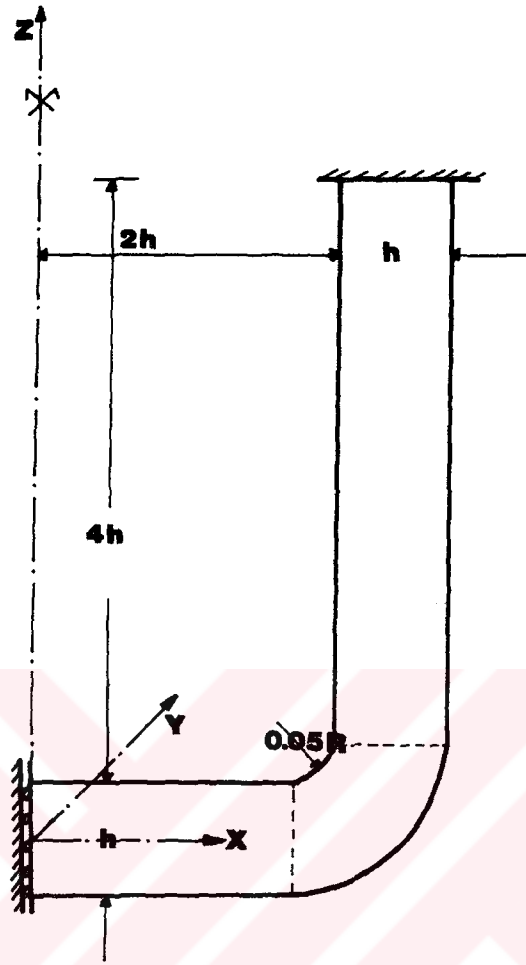
Görüldüğü gibi geliştirilen elemanla elde edilen w yer değiştirmesinin analitik çözüme yaklaşımı oldukça iyidir.

7.6 Örnek 6

Şekil (7.11)'de boyutları verilmiş olan sabit iç basınca maruz kalın dönel simetrik bir kabuğun hesabı yapılmıştır. Dairesel plak, tor yüzey ve silindirik kabuktan oluşan bu sistemde kalınlığın yarıçapa oranı $2/5$ ve tor yüzeyin iç yarıçapı kabuk yarıçapının 0.05 katıdır. Sabit p iç basıncı ile yüklenmiş bu sistem iki ucundan ankastre mesnetlidir.

Bu örnek Soler ve Barrett tarafından geliştirilen simetrik yüklenmiş dönel kabuklar için yüksek mertebeden terimler içeren sonlu eleman modeli ile çözülmüştür [46]. HOT eleman olarak adlandırdıkları üç boyutlu bu eleman kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmelerini ve σ_z normal gerilmesini de içermektedir. Soler ve Barrett çalışmalarında, 157 elemandan oluşan HOT sonlu eleman ağına göre ve problemi karşılaştırmak amacı ile 399 elemandan oluşan bilinen 4 noktalı dörtgen sonlu eleman ağına göre sonuçlar elde etmişlerdir.

Geliştirilen elemanla çözüm yapılırken sistemin simetrik olması nedeni ile yarısı alınmış ve sistem eksen takımı şekil(7.11)'de gösterildiği gibi seçilmiştir.



$$R=2.5 \text{ m.}$$

$$h=1.0 \text{ m.}$$

$$E=1.0 \text{ t/m}^2$$

$$\nu=0.30$$

$$p=1.0 \text{ t/m}^2$$

tor yüzeyin iç
yarıçapı=0.125m.

Şekil 7.11: Sabit İç Basınca Maruz Dönel Simetrik Kabuk.

Sistemin ve yükün dönel simetrik olmasından hareketle dairesel plak ortasından itibaren $\sin\theta=0.1$ olan şerit alınmış ve aynı açığı gören genişlikteki şerit tor yüzey ile silindirik kabukta da alınarak sonlu eleman ağı oluşturulmuştur. Dairesel plak ve tor yüzeyde geometrik büyüklükler bölüm 6'da sözü edilen yüksek mertebeden terimler içeren biçim fonksiyonları ile hesaplanmıştır. Bu yüzden söz konusu kısımlarda eleman tanımları 12 noktalı elemana göre yapılmıştır. Silindirik kabukta ise geometrik büyüklükler datada girildiğinden eleman tanımları 8 noktalı sonlu elemana göre düzenlenmiştir. 223 nokta ile

tanımlanan ve 32 elemandan oluşan bu sonlu eleman ağında bilinmeyen sayısı 674'dür.

Yükler dairesel plakta $p=1.0t/m^2$ olan yayılı yük olarak girilmiştir. Kalın silindirik kabukta ise kabuk eksenine etki eden iç basınç $\bar{p}=p \times R_i / R_o = 0.8p$ şeklinde ve aynı nedene bağlı olarak tor yüzeyde de $\bar{p}=0.16p$ şeklinde düzenlenerek girilmiştir.

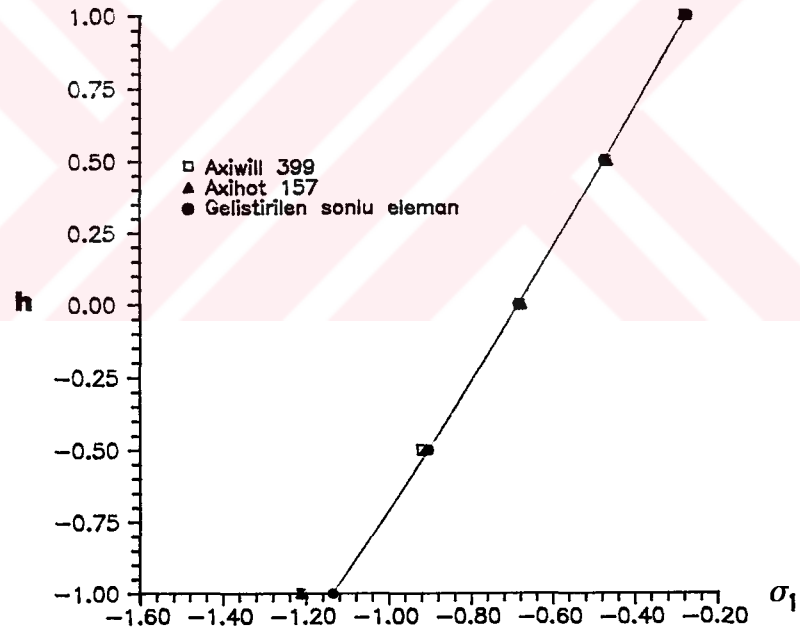
Geliştirilen sonlu eleman ile elde edilen σ_1 teğetsel gerilmeleri, σ_2 meridyen boyunca olan gerilmeler ve τ_{zz} ile gösterilen kalınlık boyunca olan kayma gerilmeleri [46] ile gösterilen çalışmada elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Bu gerilmelerin kalınlık boyunca olan dağılımları üç ayrı kesit için şekil(7.12)- şekil(7.20) arasında verilmiştir.

Silindirik kabuğun alt kısmında ($x=2.5h$, $z=0.8h$) yani tor yüzeyden silindirik kabuğa geçiş bölgesi yakınlarında σ_1 teğetsel gerilmesi ile σ_2 meridyen boyunca olan gerilmenin kalınlık boyunca değişimi [46]'daki sonuçlara çok iyi bir yaklaşım göstermektedir. AXIWILL 399 ile bulunan sonuçlar esas alınırca σ_1 teğetsel gerilmesi için maximum bağıl hata % 5 dolayında iken σ_2 meridyen boyunca olan gerilmesi için % 13 mertebesinde dir. Şekil(7.12), (7.13).

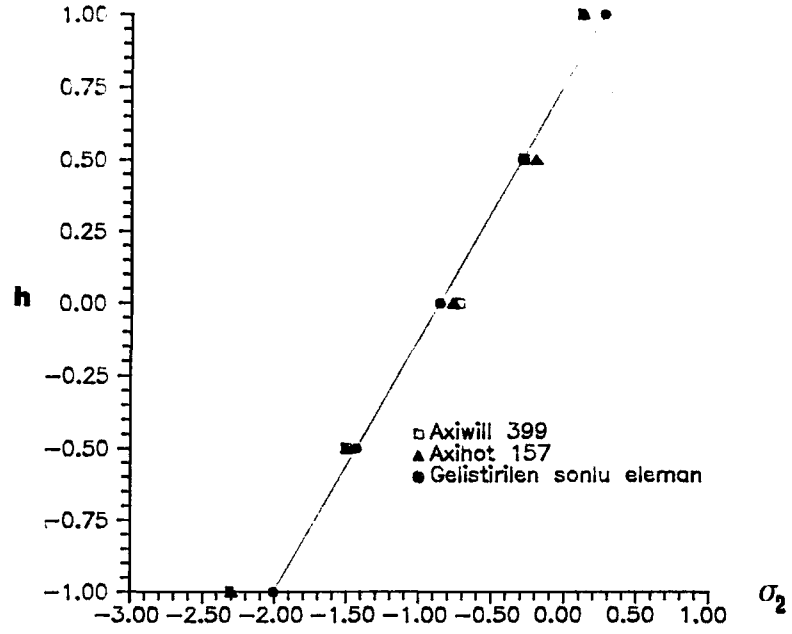
τ_{zz} kalınlık doğrultusundaki kayma gerilmesi için bu çalışmada parabolik bir dağılım alındığından kabuk ortalama yüzeyine göre simetrik bir değişim elde edilmiştir. Bazı noktalardaki τ_{zz} değerleri çalışmadaki sonuçlarla üst üste düşmekle beraber farklılıklar söz konusudur (Şekil 7.14).

Silindirik kabuğun ($x=2.5h$, $z=4.2h$) kesitindeki σ_1 , σ_2 ve τ_{zz} gerilmelerinin kalınlık boyunca değişimleri şekil (7.15), (7.16) ve (7.17)'de verilmiştir. Bu kesitte de gerilme dağılımlarının çalışmadaki sonuçlarla benzer oranda bir yaklaşım gösterdiği söylenebilir.

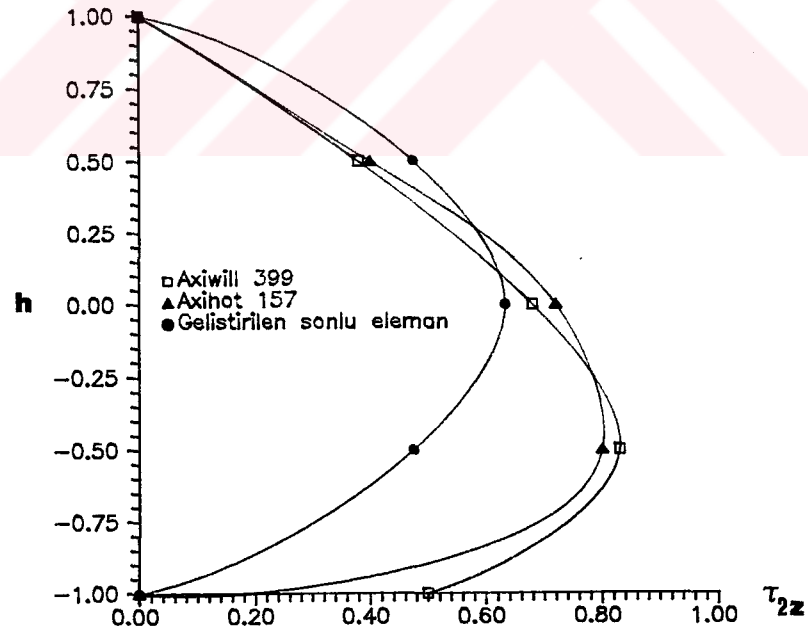
Şekil (7.18), (7.19), (7.20)'de ise $(x=2.5h, z=4.4h)$ kesitinde yani mesnede yakın noktalarındaki σ_1 , σ_2 , τ_{2z} gerilmelerinin dağılımı verilmiştir. Sonuçlar [46]'daki sonuçlara benzerlik göstermekle beraber $-h/2$ ve $+h/2$ noktalarında farklı değerler almaktadır. Bu kesitte bağıl hata miktarı artmasına rağmen geliştirilen elemanla elde edilen sonuçların yeter yaklaşıklıkta olduğu gözlenmektedir.



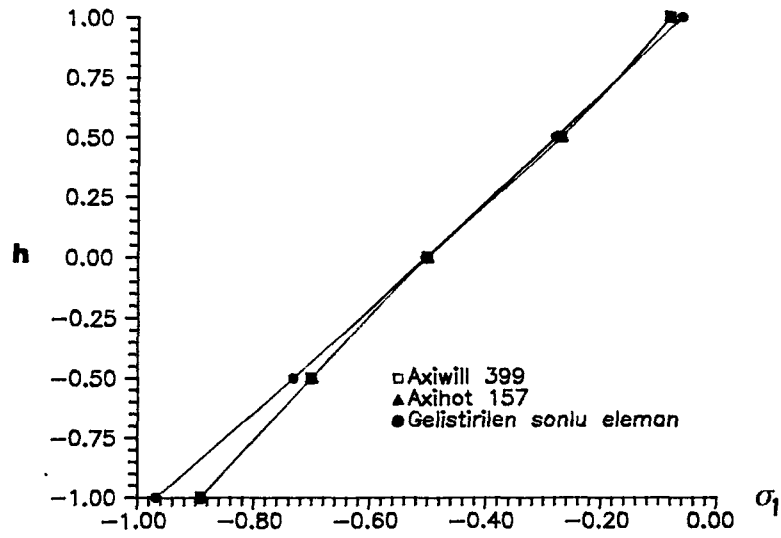
Şekil 7.12: $(x=2.5h$ ve $z=0.8h)$ Kesitindeki σ_1 Teğetsel Gerilmesinin Kalınlık Boyunca Dağılımı.



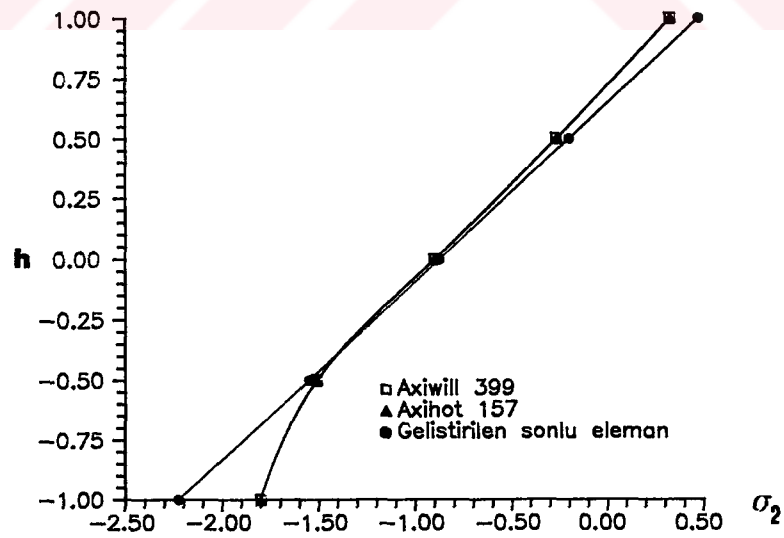
Şekil 7.13: ($x=2.5h$ ve $z=0.8h$) Kesitindeki σ_2 Meridyen Boyunca Olan Gerilmenin Kalınlık Boyunca Dağılımı.



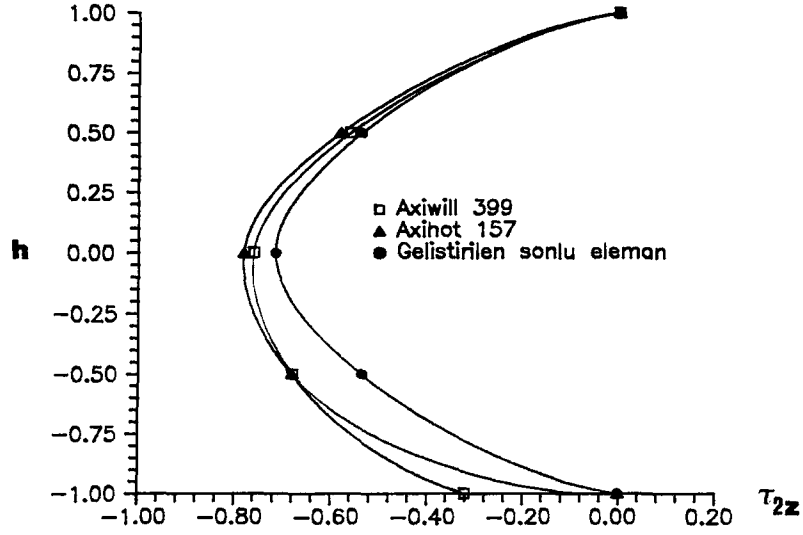
Şekil 7.14: ($x=2.5h$ ve $z=0.8h$) Kesitindeki τ_{2z} Kalınlık Doğrultusundaki Kayma Gerilmesinin Kalınlık Boyunca Dağılımı.



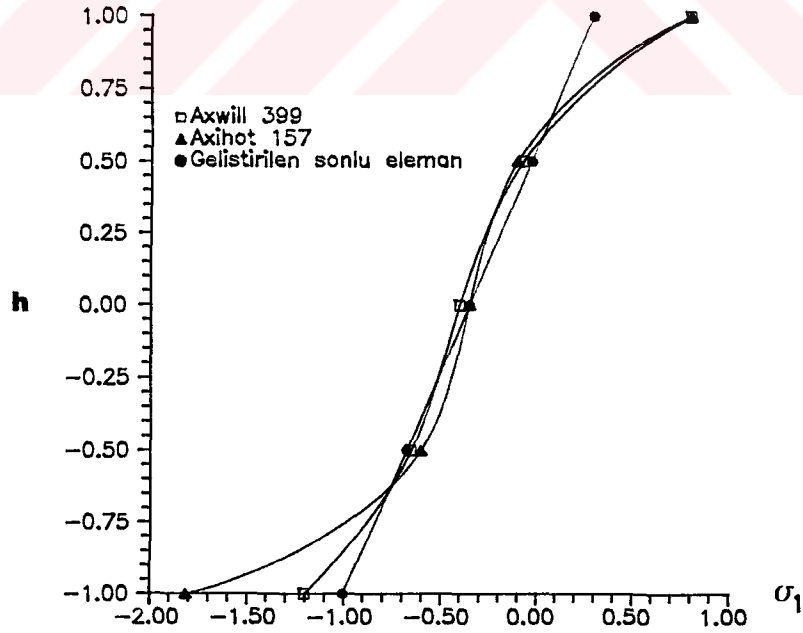
Şekil 7.15: ($x=2.5h$ ve $z=4.2h$) Kesitindeki σ_1 Teğetsel Gerilmesinin Kalınlık Boyunca Dağılımı.



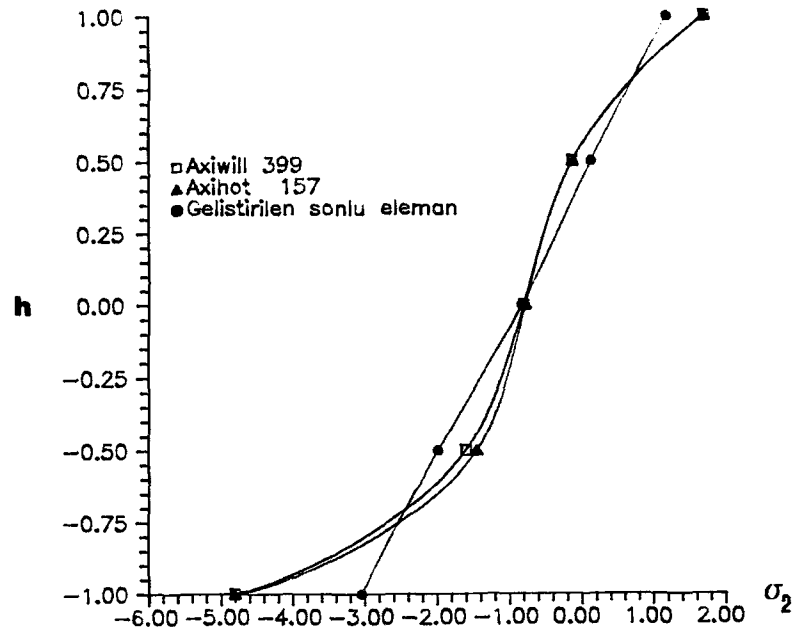
Şekil 7.16: ($x=2.5h$ ve $z=4.2h$) Kesitindeki σ_2 Meridyen Boyunca Olan Gerilmenin Kalınlık Boyunca Dağılımı.



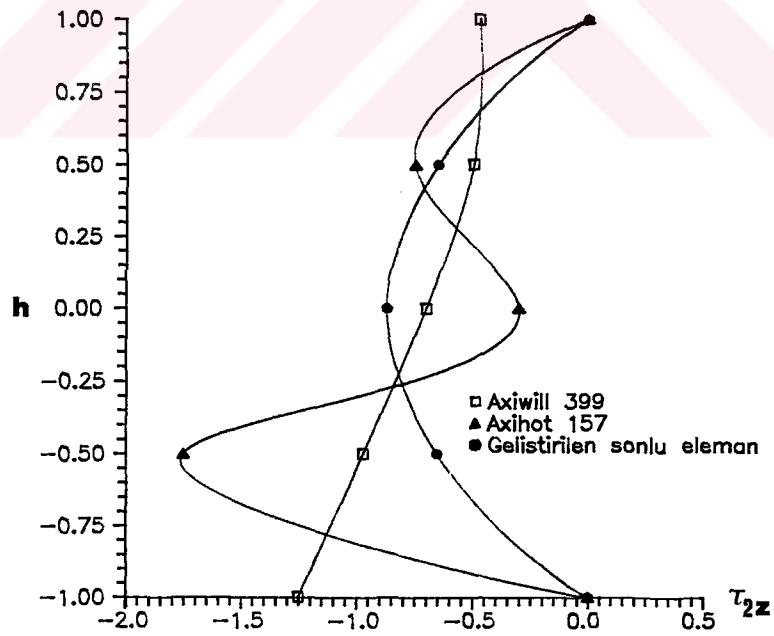
Şekil 7.17: ($x=2.5h$ ve $z=4.2h$) Kesitindeki τ_{2z} Kalınlık Doğrultusundaki Kayma Gerilmesinin Kalınlık Boyunca Dağılımı.



Şekil 7.18: ($x=2.5h$ ve $z=4.4h$) Kesitindeki σ_1 Teğetsel Gerilmesinin Kalınlık Boyunca Dağılımı.



Şekil 7.19: ($x=2.5h$ ve $z=4.4h$) Kesitindeki σ_2 Meridyen Boyunca Olan Gerilmenin Kalınlık Boyunca Olan Dağılımı.



Şekil 7.20: ($x=2.5h$ ve $z=4.4h$) Kesitindeki τ_{2z} Kalınlık Doğrultusundaki Kayma Gerilmesinin Kalınlık Boyunca Dağılımı.

BÖLÜM 8

BİLGİSAYAR PROGRAMI

Bu çalışmada, geliştirilen sonlu elemanın sayısal örneklerle uygulanması amacı ile FORTRAN programlama dilinde kodlanan bir program hazırlanmıştır. Program I.T.Ü. Bilgi İşlem Merkezinin olanaklarından faydalanılarak geliştirilmiştir. Bu program yardımı ile genel olarak sonlu elemanlara idealleştirilmiş herhangi bir yüzeysel taşıyıcı sistemin kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirme-lerinin ve kalınlığının bölüm 3'de açıklandığı gibi etkisi de gözönüne alınarak statik hesabı yapılmaktadır.

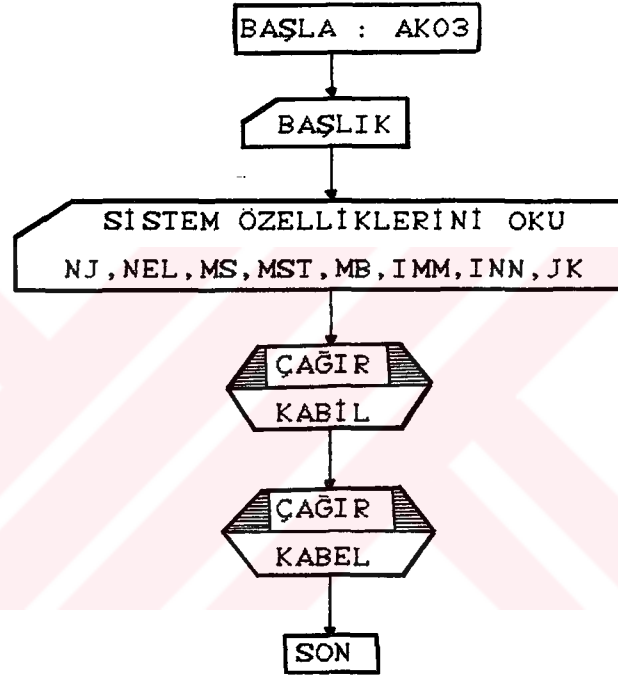
8.1 Programın Yapısı Ve Çalışma Düzeni

Genel biçimli kabuk sistemlerin çözümü için, önce geliştirilen fonksiyonelden hareketle 8 noktalı izoparametrik elemana göre AK02 olarak adlandırılan program geliştirilmiştir. Bu programda kabuk geometrik büyüklükleri, biçim fonksiyonları ikinci dereceden terimler içeren 8 noktalı elemana göre hesaplanmaktadır.

Bölüm 6'da sözü edilen nedenlere dayanarak kabuk geometrik büyüklüklerini bir doğrultuda dördüncü dereceden diğer doğrultuda ikinci dereceden terimler içeren biçim fonksiyonlarına göre hesaplamak amacı ile AK03 olarak adlandırılan program geliştirilmiştir. Bu bölümde, AK02'yi kapsaması ve daha genel olması nedeni ile AK03 programı açıklanacaktır. AK03 programı, bir ana program ve birbirini izleyen iki alt program ile onların çağırdığı 11 alt

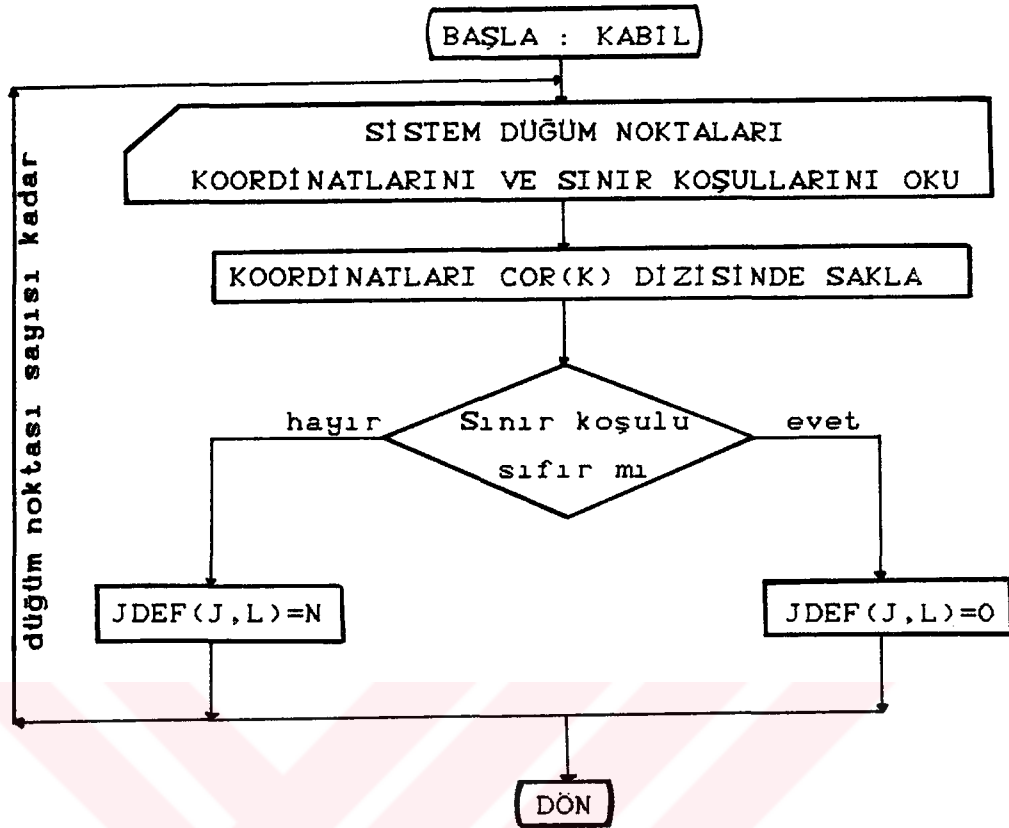
programdan oluşmaktadır. İcra ediliş sırasına uyularak bu programlardan önemlilerinin çalışma düzenleri akış şemaları ile birlikte açıklanacaktır.

AK03: Ana çekirdek program. Sistem özellikleri tanımlandıktan sonra 2 alt programı uygun bir sıra içinde icra ettirir. Bu programa ait akış şeması şekil(8.1)'de verilmiştir.



Şekil 8.1: AK03 Ana Program Akış Şeması.

KABİL: Kabuk verileri ile ilgili bilgileri tanımlayan alt programdır. Bu programda önce sistemin düğüm noktası koordinatları ve sınır koşulları okunur. Koordinatlar $COR(K)$, sistem bilinmeyenleri ise doğrultularını da tanımlayan $JDEF(J,L)$ dizisine yerleştirilir ve AK03'e döndürülür (Şekil 8.2).



Şekil 8.2: Kabil Alt Programının Akış Şeması.

KABEL: Bu alt programda önce malzeme özellikleri E Elastisite modülü, ν Poisson oranı okunur ve sistem rijitlik matrisinin eleman sayısı MJ hesaplanır. Sonraki aşamada ise her bir elemanın düğüm noktası numaraları $IN(I)$ 'lar tanımlanır. Bu programda malzeme özellikleri farklı olan sistemlerin çözümü yapılabildiği için elemanların tanımı yapılırken malzeme cinsi IMA, eleman tipi JT, eleman kalınlığı TH ve geometrik büyüklükler datada verilebiliyorsa R1, R2, A1, A2 bilgileri okunur. Daha sonra aynı özelliklere sahip elemanlar ITP(M) ile adlandırılan dizide ve her bir elemanın düğüm noktası adlandırmaları $NODE(M,I)=IN(I)$ şeklinde saklanarak tanımları yapılır.

Ayrıca kabel alt programı içinde eleman yayılı yüke maruz ise bunu eşdeğer tekil yüke çevirme işlemi yapılır

ve dış yük olarak tekil yük varsa bunlar da okunup doğrultusuna göre sözkonusu noktadaki $YM(I,1)$ ile gösterilen düğüm noktası kuvvetleri saptanır.

Kabel alt programı bünyesinde NOKNO, KUMRİ, YERLE, AKSUDOS, KUMGER gibi 5 alt programı barındırmaktadır (Şekil 8.3).

NOKNO: Bu programda elemanı, elemanın düğüm noktalarını bilinmeyenlerin doğrultusu ile tanımlayan NCODE(JZ) dizisine atama işlemi yapılmaktadır.

KUMRİ: Bu alt programda eleman rijitlik matrisi hesaplanmaktadır. Datada kabuk geometrik büyüklükleri verilmemiş ise TUXI programına dallanıp koordinatların türevleri hesaplanır ve A1, A2, R1, R2, geometrik büyüklükleri ile A1 ve A2'nin türevleri hesaplanır. Bölüm 5'de anlatıldığı şekli ile eğilme terimleri, kayma terimleri ve iyileştirmeden kaynaklanan ek terimler ayrı ayrı ele alınıp eleman rijitlik matrisi terimleri bulunur. Sonuçta eleman rijitlik matrisi terimleri $ST(I,J)$ matrisinde saklanır (Şekil 8.4).

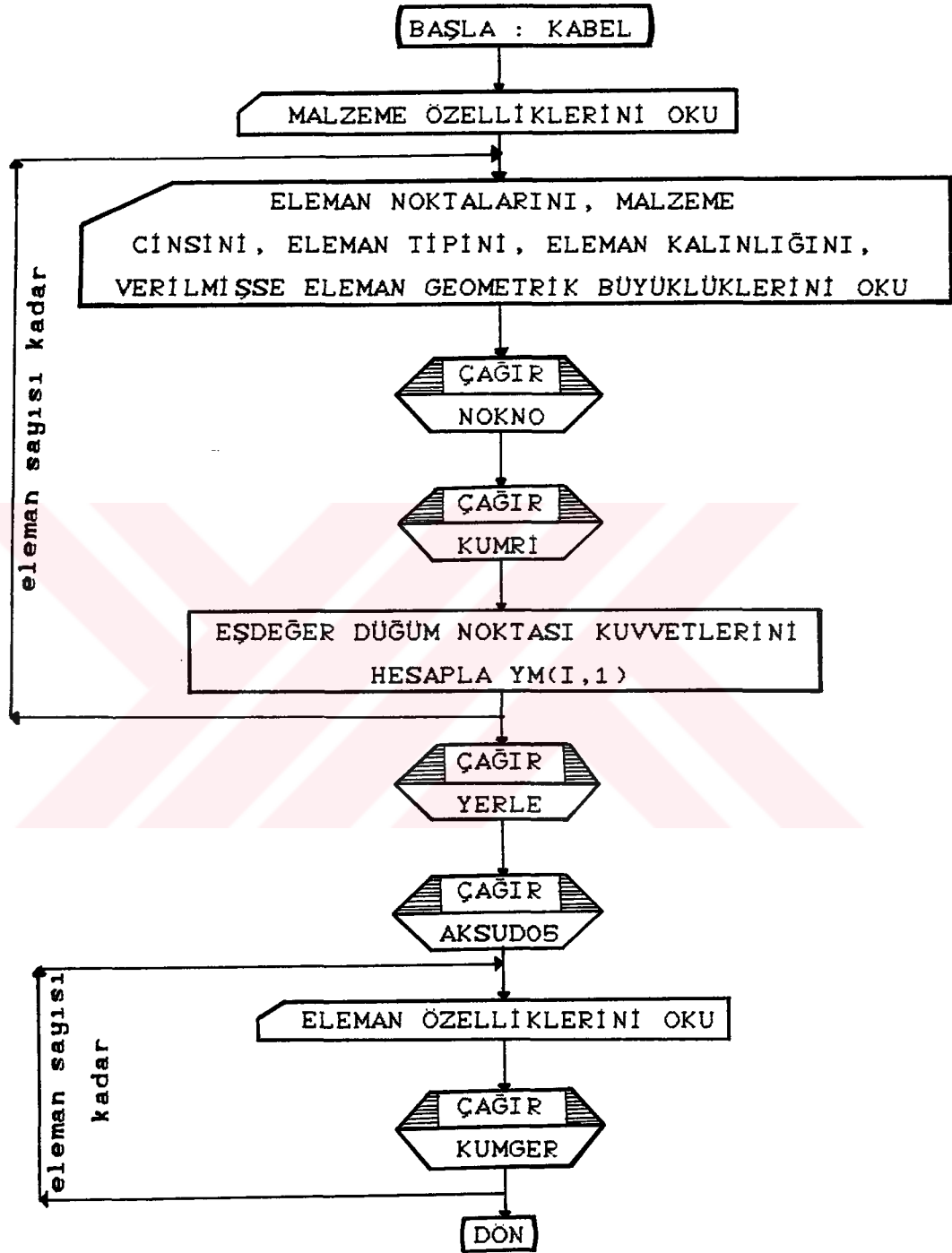
TUXI: Kabuk geometrik büyüklüklerinin hesabında kullanılan koordinatların türevlerini hesaplamak amacı ile KUMTU alt programına dallanarak türev hesaplayan bir programdır.

KUMTU: JACO12 olarak adlandırılan alt programa dallanarak bölüm 6'da sözü edilen biçimi ile koordinatların türevlerini hesaplayan alt programdır.

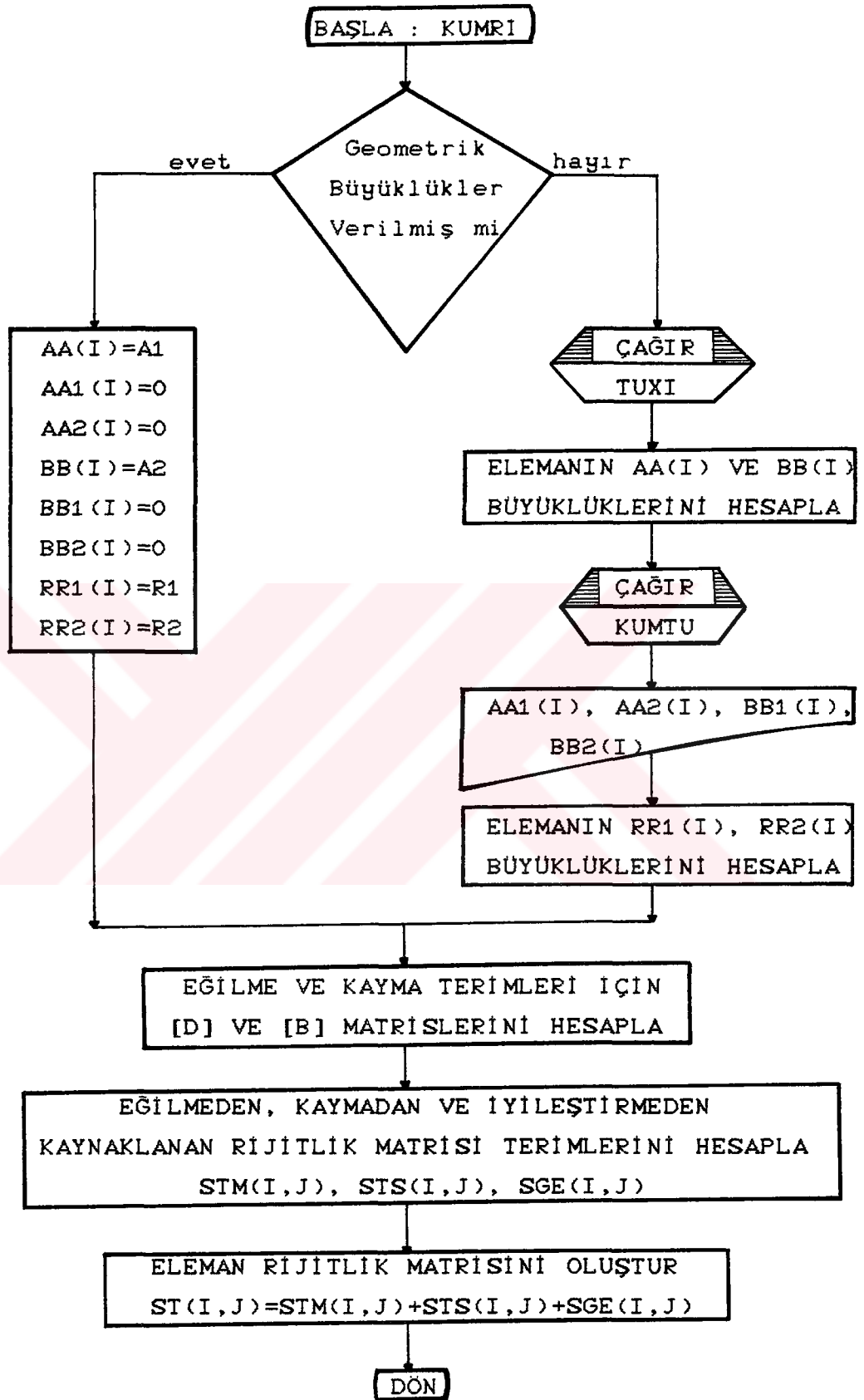
YERLE: Sistem rijitlik matrisinin kurulması bu alt program çağrılarak yapılmaktadır. Bu alt programda sistem rijitlik matrisinin elemanları $W(I)$ ile gösterilen bir diziye atanmaktadır.

AKSUDOS: Bu alt program kurulan lineer denklem takımının

Gauss eliminasyonu ile çözümünü yapmakta ve sonuçları basmaktadır.



Şekil 8.3: Kabel Alt Programının Akış Şeması.



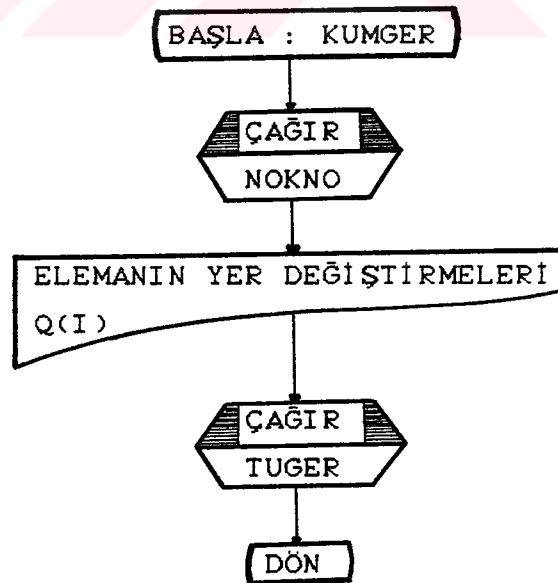
Şekil 8.4: Kumri Alt Programının Akış Şeması.

JACO12: Kabuk geometrik büyüklüklerinin hesabında kullanılan bir doğrultuda dördüncü dereceden diğer doğrultuda ikinci dereceden terimler içeren biçim fonksiyonlarını ve türevlerini hesaplayan alt programdır.

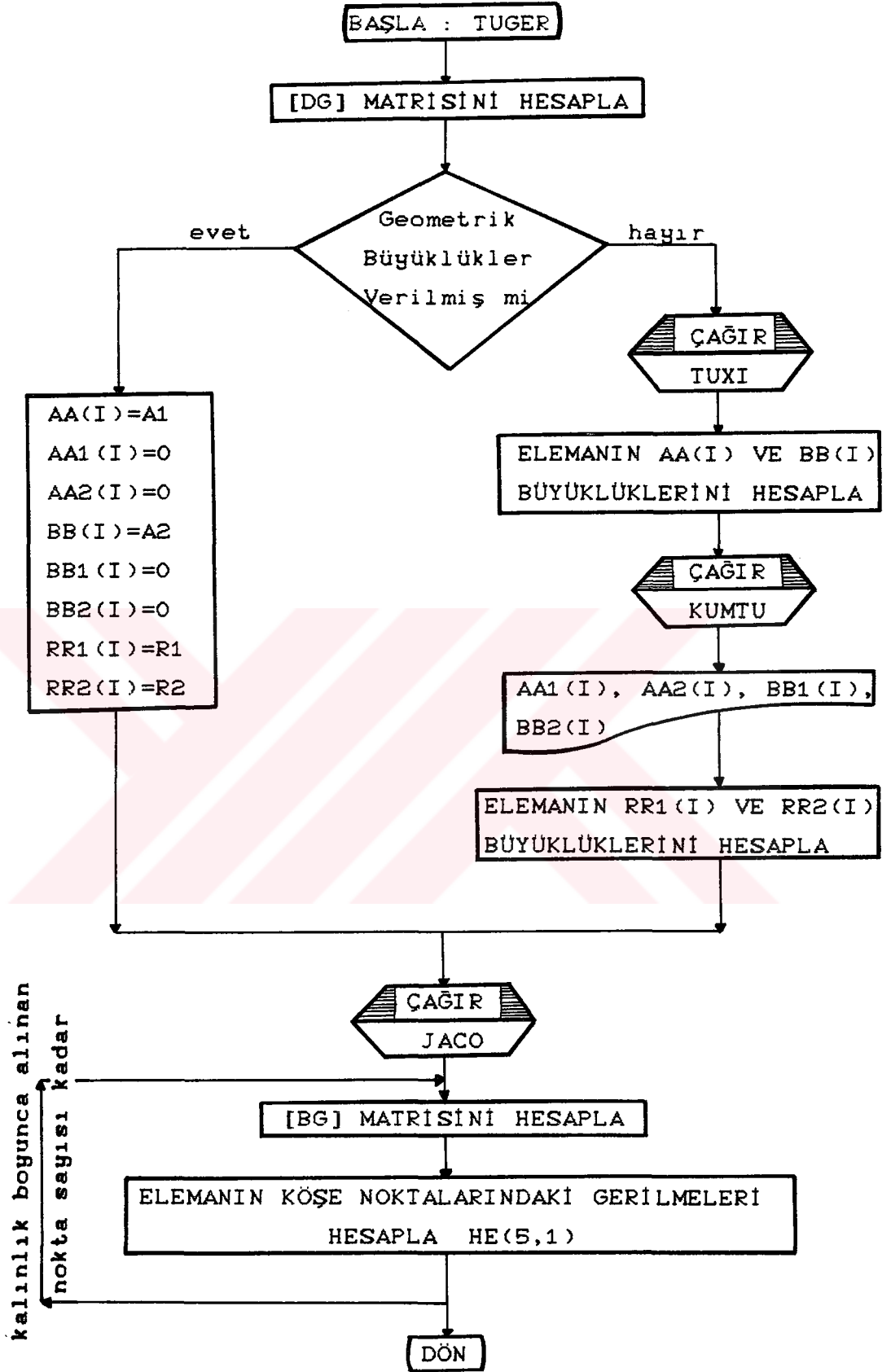
JACO: Rijitlik matrisi hesabında dolayısı ile gerilme hesabında kullanılan 8 noktalı elemanın biçim fonksiyonlarını ve bu biçim fonksiyonlarının türevlerini hesaplayan alt programdır.

KUMGER: Bu alt program ile bilinmeyenler yani yer değiştirmeler $Q(I)$ ile tanımlanan diziye atanmaktadır. Sonra TUGER alt programına dallanarak gerilmeler hesaplanmakta ve KABEL alt programına geri dönülmektedir (Şekil 8.5).

TUGER: Bölüm 5'de verilen $[DG]$ ile tanımlanan elastisite matrisi ve $[BG]$ ile tanımlanan matris hesaplandıktan sonra elemanın köşe noktalarındaki gerilmeleri eleman kalınlığı boyunca istenen sayıdaki noktada hesaplayan bir alt programdır (Şekil 8.6).



Şekil 8.5: Kumger Alt Programının Akış Şeması.



Şekil 8.6: Tuger Alt Programının Akış Şeması.

8.2 Programın Kullanılması

8.2.1 Giriş Bilgileri:

Programda bilgi girişinin dallanması gerekli açıklamalar ve format düzenleri ile tablo (8.1)'de verilmiştir.

Tablo 8.1: AK03 Programına Bilgi Aktarımı.

	OKUTULANLAR	FORMAT
	AÇIKLAMALARI	
ANA PROGRAM	BAŞLIK	(20A4)
	Problemin adı	
	NJ, NEL, MS, MST, MB, IMM, INN, JK	(8I3)
	NJ : Sistemdeki düğüm noktası sayısı NEL : Sistemdeki eleman sayısı MS : Elemanın bir düğüm noktasındaki serbestlik derecesi (u, v, w, α, β) MST : Elemanın serbestlik derecesi (8x5=40) MB : Sistem rijitlik matrisinin tahmini bant genişliği (Tahmin doğru değilse yerle alt programında bant genişliğinin hatalı olduğu belirtilir.) IMM : Eğilme terimlerinde nümerik integrasyon için alınan nokta sayısı INN : Kayma terimlerinde nümerik integrasyon için alınan nokta sayısı JK : Gerilme hesabında kalınlık boyunca alınan nokta sayısı	

Tablo 8.1a: AK03 Programına Bilgi Aktarımı.

	OKUTULANLAR	FORMAT
	AÇIKLAMALARI	
KABİL	JJ, XE, YY, ZZ, (JEF(J), J=1,MS)	(I5, 3F10.0, SI1)
	JJ : Sistemdeki düğüm noktası numaraları XE : Düğüm noktalarının x koordinatı YY : Düğüm noktalarının y koordinatı ZZ : Düğüm noktalarının z koordinatı (Sistemdeki düğüm noktası sayısı kadar girilir.) JEF(J): Problemin sınır koşulları (Sınır koşulları sıfır ise data da 1 girilir.)	
KABEL	E1, P1, E2, P2	4F10.0
	E1 : 1.tip malzemenin elastisite modülü P1 : 1. tip malzemenin poisson oranı E2 : 2. tip malzemenin elastisite modülü P2 : 2. tip malzemenin poisson oranı	
	IM, (IN(I), I=1,12), IMA, JT, TH, R1, R2, A1, A2 Bu değerler eleman sayısı kadar girilir IM : Elemanın numarası IN(I): Elemanın düğüm noktaları numarası (Kabuk geometrik büyüklükleri yüksek mertebeden	(15I3, 3F5.0, 2F10.0)

Tablo 8.1b: AK03 Programına Bilgi Aktarımı.

	OKUTULANLAR	FORMAT
	AÇIKLAMALARI	
KABEL (devam ediyor)	terimler içeren 12 noktalı elemana göre hesaplandığı için eleman tanımı buna göre girilmektedir.) IMA : Malzeme cinsi (IMA>0 ise E=E2, ν=P2 alınır.) JT : Eleman tipi (Özellikleri aynı olan elemanlar ITP(M) dizisinde saklanır.) TH : Eleman kalınlığı (Değişken kalınlıklı sistemlerin de çözümü yapılabilir.) R1 : Elemanın α_1 doğrultusundaki eğrilik yarıçapı R2 : Elemanın α_2 doğrultusundaki eğrilik yarıçapı A1 : Elemanın α_1 doğrultusundaki Lamé parametresi A2 : Elemanın α_2 doğrultusundaki Lamé parametresi (Geometrik büyüklükler datada veriliyorsa bu değerler, verilmemişse 12 noktalı elemanın biçim fonksiyonlarından yararlanarak hesaplanan değerler kullanılır.)	
	IM, (PX(I), PY(I), PZ(I), I=1,4) (Eleman üzerinde yayılı yük varsa elemanın köşe düğüm noktalarındaki yük bileşenleri datada girilir.) IM : Eleman numarası	(I5, 12FS.0)

Tablo 8.1c: AK03 Programına Bilgi Aktarımı.

	OKUTULANLAR	FORMAT
	AÇIKLAMALARI	
KABEL (devam ediyor)	PX(I) : Yayılı yükün x doğrultusundaki bileşeni PY(I) : Yayılı yükün y doğrultusundaki bileşeni PZ(I) : Yayılı yükün z doğrultusundaki bileşeni	
	JJ, II, ZY	(2I5, F10.0)
	Sistemde tekil dış kuvvet varsa JJ : düğüm noktasını, II : yükün doğrultusunu, ZY : tekil dış kuvvetin şiddetini göstermektedir. (Sistem düğüm noktalarındaki toplam tekil kuvvetler YM(I,1) biçiminde saptanır.)	
	IM, (IN(I), I=1,12), IMA, JT, TH, R1, R2, A1, A2	(15I3, 3F5.0, 2F10.0)
	Eleman tanımları gerilme hesabı için yukarıda anlatıldığı biçimi ile yeniden girilir.	

8.2.2 Çıkış Bilgileri

Bu kısımda problemin adı, eleman tanımları ile bilinmeyenlerin sistemdeki numaraları, denklem takımının çözümü sonucunda bulunan bilinmeyenler, her bir elemandaki u, v, w, α, β yer değiştirmeleri ve kalınlık boyunca istenen sayıdaki noktada $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}, \tau_{1z}, \tau_{zz}$ gerilmeleri bastırılmaktadır.



SONUÇLAR

Genel biçimli kalın sayılabilecek kabuk sistemlerin çözümünü için geliştirilen eğrisel izoparametrik dörtgen sonlu eleman ve bu sonlu elemana ait uygulamaları kapsayan çalışmada elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

1. Bölüm 3'de açıklandığı şekli ile kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmelerinin ve kalınlığın etkisini de hesaba katarak genel biçimli kabuklar için şekil değiştirme enerjisi ifadesi elde edilmiştir. Bu etkilerin hesaba katılması ile şekil değiştirme enerjisinde h/R mertebeli bir iyileştirme sağlanmıştır. Mevcut çalışmalarda Q_z ile tanımlanan eğilme etkilerinde bu iyileştirmeden kaynaklanan farklı terimler elde edilmiş, yine aynı nedene bağlı olarak Q_s 'le tanımlanan bir ek şekil değiştirme enerjisi terimi elde edilmiştir. Literatürde genel biçimli kabuklarla ilgili bu tür bir ifadeye rastlanmamıştır.

2. z koordinatına bağlı integral ifadelerinde $(1+z/R)^n$ 'yi kuvvet serisine açmak yerine bu integrallerin kesin değerleri bulunmuştur. Böylece daha genel bir şekil değiştirme enerjisi ifadesi elde edilmiştir. Daha sonra bu değerler istenen yaklaşıklık düzeyinde kullanılmıştır.

3. Elde edilen şekil değiştirme enerjisi ifadesinin yaklaşıklık düzeyini göstermek amacı ile elastisite teorisinden çözümü bilinen sonuçlarla karşılaştırma yapabilmek üzere dış basınca maruz sonsuz uzun silindirik kabuk ve dönel simetrik çizgisel yüke maruz bir silindirik kabuk çözülmüştür. Her iki örnekte de iyileştirilmiş teori ile elde edilen çökme ve gerilme değerlerinin klasik teori

sonuçlarından belirgin biçimde daha az hatalı olduğu ve elastisite çözümüne yaklaştığı görülmüştür. İyileştirmenin kabuk kalınlaştıkça daha belirgin olduğu gözlenmektedir. Tablo (7.1), tablo (7.2).

4. Toplam potansiyel enerjinin minimum olmasından hareketle eleman düğüm noktasında üç yer değiştirme ve iki dönme olmak üzere düğüm noktası serbestliği 5 olan 8 noktalı eğrisel izoparametrik dörtgen eleman geliştirilmiştir. Eleman rijitlik matrisinin formülasyonunda elde edilen fonksiyonlardan yararlanılarak sözkonusu elemanın biçim fonksiyonları ve bu biçim fonksiyonlarının türevleri kullanılmıştır. Böylece rijitlik matrisleri elde edilirken genelleştirilmiş koordinatlar sisteminde karşılaşılan matrislerin tersinin alınması gibi hesap hacmini artıracak işlemlerle karşılaşılmmamakta bu da bilgisayar zamanından tasarruf sağlamaktadır. Ayrıca bu elemanın basitliği ve genelliği her geometriye uyması açısından da avantaj sağlar.

5. Kabuk yüzey geometrisini daha iyi tanımlamak amacı ile elde edilen, yüksek mertebeden terimler içeren biçim fonksiyonları ile kabuk geometrik büyüklüklerinin tanımlanma düzeyini göstermek üzere kabuk elemanlar alınmıştır. Elde edilen sonuçların analitik çözümlere yaklaşımı tablo (6.1), (6.2), (6.3), (6.4) 'de elemanın bazı noktalarında görülmektedir. Bu biçim fonksiyonları ile bulunan büyüklüklerin analitik çözüme göre bağıl hatası bazı noktalarda % 3 mertebesinde olup bu yaklaşımın ikinci derece biçim fonksiyonları ile elde edilen sonuçlara göre çok daha iyi olduğu görülmektedir. Çözüm esnasında giriş bilgisi 12 noktalı elemana göre girilmekte, son 4 noktaya ait yer değiştirmeler giriş bilgisinde sıfır olarak verilmektedir. Böylece kabuk geometrisi ile rijitlik matrisinin hesabında farklı elemanların kullanılması giriş bilgileri açısından zorluk oluşturmamaktadır.

6. Çalışma düzeni ve kullanma esasları bölüm 8'de açıklanan bir bilgisayar programı geliştirilmiştir. Fortran dilinde kodlanan bu programda, eleman rijitlik matrisi elde edilirken eğilme terimlerinin katkısı ve kayma terimlerinin katkısı ayrı ayrı ele alınmıştır. Bu durumda daha küçük boyutlarda matrislerle çalışılacağından bellek kullanımı açısından ve çalışma hızı açısından da kolaylık sağlamaktadır. Yapılan iyileştirmeden kaynaklanan ek rijitlik matrisi terimleri ayrıca hesaplanıp eğilme ve kaymadan gelen rijitlik matrisi terimlerine ilave edilmektedir.

7. Çeşitli araştırmacıların, geliştirdikleri elemanın etkinlik düzeyini karşılaştırmak için kullandığı sayısal örneklerden kendi ağırlığı altındaki eşkenar hiperbolik paraboloid kabuk ve karşılıklı tekil yüklere maruz tepesinde boşluk olan yarım küresel kabuk geliştirilen elemanın yaklaşıklık düzeyini göstermek amacı ile bu çalışmada da çözülmüştür. Ayrıca geliştirilen sonlu elemanın ince kabuk için yaklaşımını göstermek amacı ile ortasında tekil yük etki eden eliptik paraboloid kabuk incelenmiş, aynı örnek yayılı yük altında dört farklı kalınlık için de çözülmüştür. Sözkonusu örneklerle ait sonuçlar bölüm 7 de sözü edildiği gibi analitik çözüme oldukça iyi bir yaklaşım göstermektedir.

Bölüm (7.6)'da verilen dairesel plak, tor yüzey ve silindirik kabuktan oluşan kalın, iç basınca maruz genel biçimli kabın sayısal incelemesinden elde edilen sonuçların [46]'daki sonuçlara göre yaklaşımının iyi olduğu görülmektedir. Ancak silindirik kabuğun mesnetlenme noktasına yakın kesitinde bağıl hata miktarı biraz fazladır. Sonuçlardaki farkın fazla olması, bu çalışmada şekil değiştirme yer değiştirme bağıntıları lineer olan bir eleman tanımlandığı için oldukça kalın olan sistemin sözkonusu kesitinde şekil değiştirmelerin iyi tanımlanmamasından kaynaklanmaktadır.

8. Esas olarak kalın sayılabilecek kabuklar için geliştirilen bu sonlu eleman gerektiğinde ince kabuklarda da kullanılıp yeterli sonuç alındığı görülmüştür. Çok ince kabuklarda karşılaşılan kayma kilitlenmesinden kurtulmak için integral adımı azaltılmış ve bu tür problemlerde iyi sonuç elde edilmiştir. Ancak bu eleman çok kalın kabuklara uygulandığı zaman, kabuk ortalama yüzeyine dik doğrultudaki normal gerilme ihmal edildiği ve şekil değiştirme yer değiştirme bağıntılarında u, v yer değiştirmelelerinin z 'e göre lineer olması nedeni ile yaklaşıklık düzeyinin iyi olmadığı gözlenmiştir.

Sayısal örnekler, değişik geometrilere uygulanması açısından da avantaj sağlayan bu sonlu elemanın mühendislik uygulamaları için yeterli yaklaşıma sahip olduğunu ve iyi sonuç verdiğini göstermiştir.

KAYNAKLAR

- [1] GOL'DENVEIZER, A.L. , Theory of Elastic Thin Shells, Pergamon Press, (1961).
- [2] LANGHAAR, H.L. , Energy Methods in Applied Mechanics John Wiley and Sons Inc., (1962).
- [3] TIMOSHENKO, S. , -çeviri: İNAN, M., SÖNMEZ, F. , Plak ve Kabuklar Teorisi, İ.T.Ü. Matbaası, İstanbul, (1964).
- [4] GIRKMANN, K. , -çeviri: TAMEROĞLU, S.S., Yüzeysel Taşıyıcı Sistemler, Matbaa Teknisyenleri Basımevi, İstanbul, (1965).
- [5] BILLINGTON, D.P., Thin Shell Concrete Structures, Mc Graw-Hill Book Company, (1965).
- [6] KRAUS, H., Thin Elastic Shells, John Wiley and Sons Inc., (1967).
- [7] NOVOZHILOV, V. V., Thin Shell Theory, Woiters Noordhoff Publishing, Groningen, (1970).
- [8] FLÜGGE, W., Stresses in Shells, Springer-Verlag, (1973).
- [9] ÖZDEN, K., Dönel Kabuklar, Matbaa Teknisyenleri Basımevi, İstanbul, (1975).
- [10] KESKİNEL, F., KUMBASAR, N., Sürekli Temeller ve Dönel Kabuklar, Sonlu Kiriş Tesir Çizgileri ile Çözüm, Matbaa Teknisyenleri Koll. Şti., İstanbul, (1976).
- [11] REKACH, V.G., Static Theory of Thin-Walled Space Structures, Mir Publishers, Moscow, (1978).

- [12] TIMOSHENKO, S.P., KRIEGER, S.W., Theory of Plates and Shells, Mc Graw-Hill Book Company, (1982).
- [13] BERCHA, F.G., GLOCKNER, P.G., ASCE, M., Numerical Analysis of Thick Shells of Revolution, Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol.99, pp.1053-1073, (1973).
- [14] GAMBY, D., POITIERS, F., CHUNG-NAM, B., Generalized Kirchhoff-Love Assumptions for Thick Shells: Application to Thermal Stresses in Rectilinear Tubes, Acta Mechanica, pp.95-106 (1987).
- [15] RYCHTER, Z., Global Error Estimates in Reissner Theory of Thin Elastic Shells, International Journal Engineering Science, Vol.26, No.8, pp.787-795, (1988).
- [16] DONNELL, L.H., Thick General Shells Under General Loading, Journal of Applied Mechanics, Vol.56, pp.391-394, (1989).
- [17] VOYIADJIS, G.Z., SHI, G., A Refined Two-Dimensional Theory for Thick Cylindrical Shells, International Journal Solids Structures, Vol. 27, No.3, pp.261-282, (1991).
- [18] MARTIN, H.C., CAREY, G.F., Introduction to Finite Element Analysis, Mc Graw-Hill Book Company, (1973).
- [19] ZIENKIEWICZ, O.C., Methode der Finiten Elemente, Carl Hanser Verlag, München, Wien, (1975).
- [20] BREBBIA, C.A., The Boundary Element Method for Engineers, Pentech Press, London, (1978).
- [21] ZIENKIEWICZ, O.C., The Finite Element Method, Mc Graw-Hill Book Company, (1979).
- [22] BECKER, E. B., CAREY, G.F., ODEN, J.T., Finite Elements an Introduction, Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, (1981).

- [23] HUEBNER, K. H., The Finite Element Method for Engineers, John Wiley and Sons , (1982).
- [24] CAREY, G.F., ODEN, J.T., Finite Elements, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, (1983).
- [25] CAREY, G. F., ODEN, J. T., Finite Elements Computational Aspects, Prentice-Hall Inc., Englewood-Cliffs, (1984).
- [26] HUGHES, T.J.R., The Finite Element Method, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, (1987).
- [27] STRICKLIN, J.A., NAVARATNA, D.R., PIAN, T.H.H., Improvements on the Analysis of Shells of Revolution by the Matrix Displacement Method, AIAA Journal, Vol.4, No.11, pp.2069-2072, (1966).
- [28] JONES, R.E., STROME, D.R., Direct Stiffness Method Analysis of Shells of Revolution Utilizing Curved Elements, AIAA Journal, Vol.4, No.9, pp.1519-1525, (1966).
- [29] CONNOR, J.J., ASCE, M.,BREBBIA, C., Stiffness Matrix for Shallow Rectangular Shell Element, Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol.93, EMS, pp.43-65, (1967).
- [30] GIANNINI, M., MILES, G. A., A Curved Element Approximation in the Analysis of Axisymmetric Thin Shells, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.2, pp.459-476, (1970).
- [31] MOHR, G.A., Application of Penalty Factors to A Doubly Curved Qudratic Shell Element, Computers and Structures, Vol.14, No.1-2, pp.15-19, (1981).
- [32] AYDOĞAN, M., Silindirik Kabukların Gerilme Durumuna Delik Etkisi, Doktora Tezi, İ.T.Ü. İnşaat Fakültesi, (1980).

- [33] BOGNER, F.K., FOX, R.L., SCHMIT, L.A., A Cylindrical Shell Discrete Element, AIAA Journal, Vol.5, No.4, pp.745-750, (1967).
- [34] CANTIN, G., CLOUGH, R.W., A Curved Cylindrical Shell Finite Element, AIAA Journal, Vol.6, pp.1057-1062, (1968).
- [35] YANG, T.Y., ASCE, A. M., High-Order Rectangular Shallow Shell Finite Element, Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol.99, No.EM1, pp.157-181, (1973).
- [36] RAJU, I.S., RAO, G.V., VENKATARAMANA, J., A Conical Shell Finite Element, Computers and Structures, Vol.4, pp.901-915, (1974).
- [37] LEE, S.W., DAI, C.C., YEOM, C.H., A Triangular Finite Element for Thin Plates and Shells, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.21, pp.1813-1831, (1985).
- [38] ADITYA, A.K., BANDYOPADHYAY, J.N., Study of the Shell Characteristics of a Paraboloid of Revolution Shell Structure Using the Finite Element Method, Computers and Structures, Vol.32, No.2, pp.423-432, (1989).
- [39] GHOSH, B., BANDYOPADHYAY, J. N., Analysis of Paraboloid of Revolution Type Shell Structures Using Isoparametric Doubly Curved Shell Elements, Computers and Structures, Vol.36, No.5, pp.791-800, (1990).
- [40] LAURSEN, M. E., NEILSEN, M.P., GELLERT, M., Application of A New Stress Finite Element to Analysis of Shell Structures, Computers and Structures, Vol.7, pp.751-757, (1977).
- [41] AHMAD, S., IRONS, B.M., ZIENKIEWICZ, O.C., Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.2, pp.419-451, (1970).

- [42] RHIU, J.J., RUSSELL, R.M., LEE, S.W., Two Higher Order Shell Finite Elements with Stabilization Matrix, AIAA Journal, Vol.28, No.8, pp.1517-1524, (1990).
- [43] PAWSEY, S. F., CLOUGH, R.W., Improved Numerical Integration of Thick Shell Finite Elements, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.3, pp.575-586, (1971).
- [44] ALTAN, M., Kalın Silindirik Kabukların Çözümü İçin Üç Boyutlu Bir Sonlu Eleman ve Uygulamaları, Doktora Tezi, İstanbul, (1981).
- [45] YEOM, C. H., SCARDERA, M.P., LEE, S.W., Shell Analysis with a Combination of Eight Node and Nine Node Finite Elements, Computers and Structures, Vol.28, No.2, pp.155-163, (1988).
- [46] BARRETT, D.J., SOLER, A., A Finite Element Model for Thick Walled Axisymmetric Shells, Journal of Pressure Vessel Technology, Vol.104, pp.215-222, (1982).
- [47] HEPPLER, G.R., HANSEN, J.S., A Mindlin Element for Thick and Deep Shells, Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.54, pp.21-47, (1986).
- [48] IBRAHIMBEGOVIĆ, A., WILSON, E.L., Thick Shell and Solid Finite Elements with Independent Rotation Fields, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.31, pp.1393-1414, (1991).
- [49] SHI, G., VOYIADJIS, G.Z., A Simple C^0 Quadrilateral Thick/Thin Shell Element Based on the Refined Shell Theory and the Assumed Strain Fields, Computers and Structures, vol.27, No.3, pp.283-298, (1991).
- [50] GHALI, A., ASCE, F., CHIESLAR, J., Hybrid Finite Elements, Journal of Structural Engineering, Vol.112, No.11, (1986).

- [51] YOSHIDA, Y., A Hybrid Stress Element for Thin Shell Analysis, Technical Report, No.17, Tokyo Institute of Technology, (1974).
- [52] PIAN, T.H.H., SUMIHARA, K., Hybrid Semiloof Elements for Plates and Shells Based Upon A Modified Hu-Washizu Principle, Computers and Structures, Vol.19, No.1-2, pp.165-173, (1984).
- [53] KANG, D.S., PIAN, T.H.H., A 20-Dof Hybrid Stress General Shell Element, Computers and Structures, Vol.30, No.4, pp.789-794, (1988).
- [54] BERGMANN, V.L., MUKHERJEE, S., A Hybrid Strain Finite Element for Plates and Shells, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.30, pp.233-257, (1990).
- [55] YEOM, C.H., LEE, S.W., On the Strain Assumption in a Finite Element Model for Plates and Shells, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.31, pp.287-305, (1991).
- [56] LEE, S.W., PIAN, T.H.H., Improvement of Plate and Shell Finite Elements by Mixed Formulations AIAA Journal, Vol.16, No.1, pp.29-33, (1978).
- [57] SPILKER, R.L., SINGH, S.P., Three Dimensional Hybrid Stress Isoparametric Quadratic Displacement Elements, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.18, pp.445-465, (1982).
- [58] PUNCH, E. F., ATLURI, S.N., Applications of Isoparametric Three Dimensional Hybrid Stress Finite Elements with Least-Order Stress Fields, Computers and Structures, Vol.19, No.3, pp.409-430, (1984).
- [59] CHIESLAR, J.D., GHALI, A., A Hybrid Strain Technique for Finite Element Analysis of Plates and Shells, Computers and Structures, Vol.24, No.5, pp.749-765, (1986).

- [60] SALEEB, A.F., CHANG, T.Y., GRAF, W., A Quadrilateral Shell Element Using A Mixed Formulation, Computers and Structures, Vol.26, No.5, pp.787-803, (1987).
- [61] CHEUNG, Y. K., CHEN, W., Generalized Hybrid Degenerated Elements for Plates and Shells, Computers and Structures, Vol.36, No.2, pp.279-290, (1990).
- [62] OMURTAG, M.H., Takviyeli Değişken Kesitli Silindirik Kabukların Karışık Sonlu Eleman Yöntemi ile Çözümü, Doktora Tezi, İstanbul, ,(1990).
- [63] BRIASSOULIS, D., On the Basics of the Shear Locking Problem of C^0 Isoparametric Plate Elements, Computers and Structures, Vol.33, No.1, pp.169-185, (1989).
- [64] BRIASSOULIS, D., The C^0 Structural Elements with No Locking Mechanisms and Zero Energy Modes, Numeta 90, pp.86-93.
- [65] YANG, H.T.Y., SAIGAL, S., LIAW, D.G., Advances of Thin Shell Finite Elements and Some Applications-Version I, Computers and Structures, Vol.35, No.4, pp.481-504, (1990).
- [66] KANG, D.S., PIAN, T.H.H., A 20-Dof Hybrid Stress General Shell Element, Computers and Structures, Vol.30, No.4, pp.789-794, (1988).
- [67] BRICAS, M., -çeviri: CİNEMRE, V., İki Boyutlu Elastisite Teorisi, Matbaa Teknisyenleri Basımevi, İstanbul, (1963).
- [68] LURJE, A.I., Räumliche Probleme der Elastizitätstheorie, Akademie Verlag Berlin, (1963).
- [69] ZIENKIEWICZ, O.C., TAYLOR, R.L., TOO, J.M., Reduced Integration Technique in General Analysis of Plates and Shells, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.3, pp.275-290, (1971).

ÖZGEÇMİŞ

Tülay Aksu 1963 yılında Hatay'da doğmuş, lise öğrenimini Bursa Kız Lisesinde tamamlamıştır.

1980 yılında başladığı lisans öğrenimini 1984 yılında tamamlayıp Yıldız Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Bölümünden mezun olmuştur. Lisansüstü çalışmalarına da aynı üniversite de başlayıp Haziran 1987'de bitirmiştir.

Halen İ.T.Ü. İnşaat Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü Yapı Anabilim Dalı Betonarme Çalışma Birimi'nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmalarını sürdürmektedir.