

**T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GENEL LİNEER KARMA MODEL VE BU MODELİN
ALT MODELİ ALTINDA BLUP İLİŞKİLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fatma KARADUMAN

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Enstitü Bilim Dalı : UYGULAMALI MATEMATİK

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Nesrin GÜLER

Haziran 2019

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**GENEL LİNEER KARMA MODEL VE BU MODELİN
ALT MODELİ ALTINDA BLUP İLİŞKİLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fatma KARADUMAN

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Enstitü Bilim Dalı : UYGULAMALI MATEMATİK

Bu tez 25 / 06 /2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.



Doç. Dr.
Ayşe SÖNMEZ
Jüri Başkanı



Doç. Dr.
Nesrin GÜLER
Üye



Doç. Dr.
Murat SARDUVAN
Üye

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.



Fatma KARADUMAN

10.06.2019

TEŞEKKÜR

Lisansüstü eğitimim boyunca değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, her konuda bilgi ve desteğini almaktan çekinmediğim, araştırmanın planlanmasından yazılmasına kadar tüm aşamalarında yardımlarını esirgemeyen, teşvik eden, aynı titizlikte beni yönlendiren değerli danışman hocam Doç. Dr. Nesrin GÜLER'e teşekkürlerimi sunarım.

Anlayış ve yardımlarını maddi ve manevi destekleriyle daima yanımda olan annem Hanife KARADUMAN'a, babam Muhsin KARADUMAN'a, amcam Yaşar BOZKURT'a, kardeşlerime, yengeme ve arkadaşlarıma en içten teşekkürleri sunarım.

Lisans eğitimim süresince bana değer veren ve kendimi geliştirmeme yardımcı olan Kocaeli Üniversitesi'ndeki hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	iv
ÖZET	v
SUMMARY	vi
BÖLÜM 1.	
GİRİŞ	1
BÖLÜM 2.	
ÖN BİLGİLER.....	4
2.1. Bir Matrisin Sütun Uzayı ve Satır Uzayı	4
2.2. Rank ve Özellikleri.....	5
2.3. İzdüşüm Matrisleri.....	6
2.4. Bir Matrisin Tersi ve Moore-Penrose Genelleştirilmiş Tersi.....	7
2.5. Lineer Denklem Sistemleri.....	8
2.6. Kuadrik Formlar ve Löwner Sıralaması.....	9
2.7. Rasgele Vektörler ve Bazı İstatiksel Kavramalar.....	9
BÖLÜM 3.	
GENEL LİNEER KARMA MODELLERDE TAHMİN.....	12
3.1. Giriş	12
3.2. En İyi Lineer Yansız Ön Tahmin Edici (BLUP).....	17
3.3. BLUP ve BLUE'nun Temel Denklemleri ve Bazı Özellikleri	19

BÖLÜM 4.	
GENEL LİNEER KARMA MODEL VE MODELİN ALT MODELİ ALTINDA BLUP İLİŞKİLERİ.....	28
 BÖLÜM 5.	
SONUÇ VE ÖNERİLER.....	42
 KAYNAKLAR	44
ÖZGEÇMİŞ	47



SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}^{n \times 1}$	: n boyutlu reel vektörler kümesi
$\mathbb{R}^{m \times n}$	: $m \times n$ boyutlu reel matrisler kümesi
$A, B, C, \dots$	: Matrisler
(a_{ij})	: Elemanları a_{ij} olan matris
$x, y, z, \dots$	: Vektörler
$A : B$	: Parçalanmış matris
I_m	: $m \times m$ boyutlu birim matris
A'	: A matrisinin transpozu
A^{-1}	: A matrisinin tersi
A^+	: A matrisinin Moore-Penrose genelleştirilmiş tersi
$R(A)$	: A matrisinin sütun uzayı
$A^\perp$	: A matrisinin dik tümleyeni
$R(A)^\perp$	: $R(A)$ sütun uzayının dik tümleyeni
$r(A)$	: A matrisinin rankı
P_A, E_A, F_A	: Dik izdüşüm matrisleri
$E(\cdot)$	: Beklenen değer operatörü
$\text{Cov}(\cdot)$	: Kovaryans operatörü
$\text{Var}(A)$	: A matrisin varyansı
■	: İspat sonu

ÖZET

Anahtar kelimeler: BLUE, BLUP, lineer karma model, rastgele etki, rank, sabit etki

Bu çalışmada, rasgele etkilerin ilişkili ve matrislerin tam ranklı olması varsayımları üzerine herhangi bir kısıtlama olmaksızın bir genel lineer karma model ile bu modelden bazı sabit ve rastgele etkilerin çıkarılmasıyla elde edilen bir alt model ele alınmıştır. Bu modellerden elde edilen istatistiksel sonuçlar modellerin yapısından dolayı aynı olmak zorunda değildir. Ele alınan modeller altında bilinmeyen parametreler vektörlerinin ön tahmin edicileri farklı ifadeler ve özelliklere sahiptir. Ancak bu ön tahmin ediciler bazı koşullar ve varsayımlar altında benzer özellikler gösterebilirler. Bu nedenle, bu modeller altında ortak olan bilinmeyen sabit ve rastgele vektörlerin lineer kombinasyonlarının tahminlerinin aralarındaki ilişkileri incelemek, istatistiksel sonuç çıkarmanın temel konularından biridir. Bu çalışmanın ana amacı, bu iki lineer karma model altında ortak olan bilinmeyen parametreler vektörlerinin en iyi lineer yansız ön tahmin/tahmin edicileri (Best Linear Unbiased Predictors/Estimators-BLUPs/BLUEs) arasındaki ilişkileri karakterize etmek ve BLUP/BLUE'ların ele alınan modeller altındaki eşitliğini incelemektir. Sonuçların elde edilmesi için matrislerin ranklarla ilgili bazı özellikleri kullanılmıştır.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, ele alınan modellere ilişkin literatür taraması yapılmıştır. İkinci bölümde, çalışmanın bütününde kullanılan bazı temel tanımlar ve teoremler verilmiştir. Ele alınan genel lineer karma modeller altında tüm bilinmeyen parametrelerin bir genel fonksiyonun BLUP/BLUE denklemleri ve özellikleri üçüncü bölümde ele alınmıştır. Dördüncü bölümde, bu iki lineer karma model altında ortak olan bilinmeyen parametreler vektörlerinin BLUP/BLUE'ları arasındaki ilişkiler karakterize edilerek BLUP/BLUE'ların genel lineer karma model ve alt modeli altındaki eşitliği incelenmiştir. Daha sonra bazı özel durumlar için sonuçlar verilmiştir. Son bölüm ise sonuç ve önerilerden oluşmaktadır.

RELATIONSHIP OF BLUP UNDER GENERAL LINEAR MIXED MODEL AND ITS SUB-MODEL

SUMMARY

Keywords: BLUE, BLUP, general linear mixed model, random effects, rank, fixed effects.

In this study, a general linear mixed model and its sub-model obtained by deleting some fixed and random effects from this model are considered without making any restrictions on correlation of random effects and any full rank assumptions. The statistical results obtained from these models are not necessarily the same because of the structure of the models. Predictors of unknown parameter vectors have different expressions and different properties under the considered models. However, these predictors may have similar properties under some conditions and assumptions. Therefore, examining the relationships between the prediction of linear combinations of joint unknown fixed and random vectors under these models is one of the main issues of statistical inference from these models. The main purpose of this study is to characterize the relationships between the best linear unbiased predictors/estimators (BLUPs/BLUEs) of joint unknown parameter vectors under these two linear mixed models and to investigate the equality of the BLUPs/BLUEs under considered models. In order to obtain the results, some properties related to rank of matrices are used.

There are five chapters in the study. In the first chapter, a literature review has been given on the considered models. In the second chapter, some basic definitions and theorems used throughout the study are given. Matrix equations of BLUP/BLUE for a general function of all unknown parameters and their properties are considered in the third chapter. In the fourth chapter, the relationships between the BLUP/BLUE of the vectors of joint unknown parameters under these two linear mixed models are characterized and the equality of the BLUPs/BLUEs under the general linear mixed model and its sub-model was investigated. Then the result are given for some special cases. In the last chapter consists of conclusion and proposals.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

İstatistik; rasgelelik içeren olaylar, süreçler, sistemler hakkında modeller kurmada, gözlemlere dayanarak bu modellerin geçerliliğini sınamada ve modellerden sonuç çıkarmada gerekli bazı bilgi ve yöntemleri içeren bilim dalıdır (Öztürk, 2012). Ayrıca belli bir konu ile ilgili verileri derlemek, düzenlemek, özetlemek, sunmak, analiz etmek ve bu verilerden bir sonuca varmak için kullanılan yöntemlerin her biri istatistiğin konusunu oluşturur. Gerçek hayatta karşılaşılan karmaşık problemleri anlamak, anlatmak istedikleri olgu ve sistemleri basitleştirmek, problemleri belli varsayımlar altında modellenmesi ile mümkün olur. Modellemede kullanılan en güçlü araçlardan biri istatistiktir. Genel olarak modeller deterministik ve olasılıksal olmak üzere iki şekilde sınıflandırılır. Deterministik modeller fen ve sosyal bilimlerde oldukça fazla kullanılır ve bu modeller bir sistemin gelecekteki tüm davranışlarını sistemin şimdiki durumu ile tam ve kesin olarak ortaya koyar (Özalp, 2006). Olasılıksal modellerde ise, sistem çıktıları değişkenlik gösterir. Çünkü model ya rasgele eleman içerir ya da bir şekilde rasgele değişkenler tarafından etkilenir (Meyer, 2000).

Bağımlı değişken ile bir veya daha fazla bağımsız değişken arasındaki ilişkiyi modellemek için kullanılan lineer modeller genel olarak

$$y = X\beta + \varepsilon \quad (1.1)$$

şeklinde ifade edilir. Bu modelde, $y \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ gözlenebilir rasgele bir vektör, $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$ bilinen bir matris, $\beta \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ sabit etkilerin bilinmeyen vektörü ve $\varepsilon \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ rasgele hata vektörüdür. Bu modeller ekonomi, sağlık, fen ve sosyoloji gibi birçok alanda uygulama alanına sahiptir.

Bir genel lineer karma model ise lineer modele rasgele etkilerin eklenmesiyle elde edilen hem sabit etkileri hem de rasgele etkileri içeren bir modeldir. Genel olarak bir genel lineer karma model

$$y = X\beta + Zu + \varepsilon \quad (1.2)$$

şeklinde ifade edilir. Burada y , X , β ve ε , (1.1) modelinde verildiği gibi, $Z \in \mathbb{R}^{n \times q}$ bilinen bir matris ve $u \in \mathbb{R}^{q \times 1}$ rasgele etkilerin bilinmeyen vektörüdür. Lineer karma modelleri kullanmanın bazı avantajları vardır. Bu avantajlardan biri, kayıp gözlemlerin olduğu veya dengeli olmayan tasarımların bulunduğu durumlarda bu modeller vasıtasıyla daha etkili ve güvenilir sonuçların elde edilmesidir. İkincisi, lineer karma modellerin hata varyanslarını da içermelerinden dolayı, bu modeller ile daha güçlü testlerin ve daha iyi tahminlerin yapılabilmesidir. Diğer bir avantaj ise, hem sabit hem de zamanla değişebilen tahmin edicilere bağlı olan modeller olduklarından dolayı daha esnek bir yapıya sahip olmalarıdır (Bagille ve ark., 2000). Bu modeller özellikle genetik ile ilgili uygulamalarda sık kullanılmaktadır.

Rasgele etkili modeller ile ilgili ilk çalışmalar 19. yüzyılın ortalarında özellikle astronomi alanında ve lineer karma modellerle ilgili ilk çalışmalar ise, özellikle genetik alanında 20. yüzyılın ortalarında yapılmıştır (Rao ve Poduri, 1997). Lineer karma modelin tanımı ilk olarak Eisenhart (1947) tarafından verilmiştir. Henderson tarafından elde edilen ve Henderson karma model denklemleri olarak bilinen denklemler vasıtasıyla karma modeldeki sabit ve rasgele etkilerin en iyi lineer yansız tahmin edicisi (BLUE) ve en iyi lineer yansız ön tahmin edicisi (BLUP) elde edilmiştir (Henderson, 1950, 1959, 1963). Hayvan ıslahı ve genetik çalışmalarında, yetiştirilecek bir sonraki hayvan ırkının en verimli dölleri verecek şekilde üretilmesi amacıyla, lineer karma model yardımıyla ırkın genetik değerlerinin tahminleri en iyi olacak şekilde ebeveynlerin seçimine yönelik bilimsel çalışmalar Henderson'ın (1950, 1977, 1984) çalışmalarında yapılmıştır. Ayrıca Henderson karma model teorisini kullanarak biyometride de önemli çalışmalar yapmıştır (Henderson, 1950, 1963). Henderson (1950, 1963)'te elde edilen sonuçlar farklı bir yaklaşım kullanılarak Harville (1976,

1979) tarafından ele alınmıştır. Ayrıca bu sonuçlar Haslett ve Puntanen (2010, 2011) tarafından genelleştirilmiştir.

Fay ve Herriot (1979) küçük kentlere ait nüfus ve konut sayımında kişi başına düşen geliri tahmin etmek için lineer karma modeli kullanmıştır. Laird ve Ware (1982), hava kirliliğinin akciğer fonksiyonları üzerine etkisini araştırdığı çalışmada karma modelleri kullanmıştır. Baltimore akciğer fonksiyonunun yaş ile nasıl değiştiğini lineer karma model yardımıyla tespit etmiştir (Shock ve ark., 1984). Ayrıca; Pinheiro ve Bates (2000), Verbeke ve Molenbergs (2000), West ve ark. (2007), Zuur ve ark. (2009) ve Wu (2010) lineer karma modelleri kullanarak uygulamalı çalışmalar yapmışlardır.

Bu çalışmada, bir genel lineer karma model ve bu modelden bazı sabit ve rastgele etkilerin çıkarılmasıyla elde edilen bir alt model ele alınmıştır. Ele alınan modeller altında, modellerin yapısındaki farklılıklardan dolayı bilinmeyen parametre vektörlerinin ön tahmin edicileri farklı ifadeler ve özelliklere sahiptir. Ancak bu ön tahmin ediciler bazı koşullar ve varsayımlar altında benzer özellikler gösterebilirler. Bu nedenle her iki model için ortak olan bilinmeyen sabit ve rastgele vektörlerin bir lineer kombinasyonunun BLUP'ları arasındaki ilişki karakterize edilerek BLUP'ların eşitliği incelenmiştir. BLUP'ların denklemleri karmaşık yapıda matris işlemleri içerdiğinden dolayı sonuçlar rank metodu kullanılarak elde edilmiştir. Simetrik matrisler, rank ve Löwner sıralaması ile ilgili detaylı bilgi için Tian (2010, 2012), Puntanen ve ark. (2011) ve Tian ve Jiang (2016) çalışmaları, ele alınan konu ile ilgili Bhimasankaram ve Jammalamadaka (1994), Gan ve ark. (2017), Haslett ve Puntanen (2010), Jammalamadaka ve Sengupta (1999, 2007) ve Lu ve ark. (2015) çalışmaları örnek olarak verilebilir.

BÖLÜM 2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, çalışmanın diğer bölümlerinde kullanılacak bazı tanımlar ve ispatsız olarak bazı teoremler verilecektir.

2.1. Bir Matrisin Sütun Uzayı ve Satır Uzayı

Tanım 2.1.1. $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = 0$ olacak şekilde tümü birden sıfır olmayan $c_1, c_2, \dots, c_n$ skaleri varsa $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ vektörlerinin kümesine lineer bağımlıdır denir. Aksi takdirde kümeye lineer bağımsızdır denir (Datta, 2009).

Tanım 2.1.2. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrisinin sütunlarının tüm lineer kombinasyonlarının kümesine A matrisinin sütun uzayı denir ve $R(A)$ ile gösterilir (Sengupta ve Jammalamadaka, 2003).

Tanım 2.1.3. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrisinin satırlarının tüm lineer kombinasyonlarının kümesine A matrisinin satır uzayı denir ve $R(A')$ ile gösterilir (Sengupta ve Jammalamadaka, 2003).

Teorem 2.1.4. Uygun boyutlu A ve B matrisleri için aşağıdakiler doğrudur.

- a. $R(AB) \subseteq R(A)$.
- b. $R(A) \subseteq R(B) \Leftrightarrow$ Uygun boyutlu bir N matrisi için $A = BN$ 'dir (Sengupta ve Jammalamadaka, 2003).

2.2. Rank ve Özellikleri

Tanım 2.2.1. Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir matrise, satır indirgenmiş eşelon biçimindedir denir.

- Tüm elemanları sıfır olmayan herhangi bir satırda, sıfırdan farklı ilk elemanı 1'dir (Bu eleman 1 baş elemanı olarak adlandırılır).
- 1 baş elemanını içeren herhangi bir sütundaki diğer tüm elemanlar sıfırdır.
- Sıfırdan farklı eleman içeren herhangi iki satırda daha büyük numaralı satırın 1 baş elemanı daha sağda bulunur.
- Sadece sıfır elemanlarından ibaret olan herhangi bir satır, sıfırdan farklı eleman içeren diğer satırlardan daha aşağıdadır (Venit ve Bishop, 1985).

Tanım 2.2.2. Aşağıdaki işlemlere bir matris üzerindeki elementer satır (sütun) işlemleri denir.

- Bir satırı (sütunu) sıfır olmayan bir skaleri ile çarpmak.
- İki satırın (sütunun) yerini değiştirmek.
- Bir satırın (sütunun) yerine bu satır (sütun) ile diğer bir satırın (sütunun) bir katının toplamını yazmak (Seber, 2008).

Tanım 2.2.3. $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrisler olsun. Eğer B matrisi, A matrisinin elementer satır veya sütun işlemleri tarafından elde edilirse, A matrisi B matrisine denktir denir (Seber, 2008).

Tanım 2.2.4. Bir A matrisine satırca (sütunca) denk olan indirgenmiş eşelon biçimindeki matrise A matrisinin satır (sütun) indirgenmiş eşelon biçimi denir (Hogben, 2007).

Tanım 2.2.5. Bir A matrisinin satır (sütun) indirgenmiş eşelon biçimindeki sıfırdan farklı satır (sütun) sayısına A matrisinin rankı denir ve $r(A)$ ile gösterilir (Hogben, 2007).

Teorem 2.2.6. Herhangi bir A matrisi için C matrisi, A matrisinin satır indirgenmiş eşelon biçimi olsun. A matrisinin satır uzayı ile C matrisinin satır uzayı aynıdır (Venit ve Bishop, 1985; Sengupta ve Jammalamadaka, 2003).

Teorem 2.2.7. A matrisinin rankı, sütun rankı ve satır rankı eşittir (Venit ve Bishop, 1985).

2.3. İzdüşüm Matrisleri

Tanım 2.3.1. Her $u, v \in S$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için $au + bv \in S$ olacak şekilde sonlu sayıda vektörlerin boş kümeden farklı bir S kümesi bir vektör uzayıdır (Sengupta ve Jammalamadaka, 2003).

Tanım 2.3.2. S_1 ve S_2 vektör uzayları olsun. S_1 vektör uzayındaki her vektör, S_2 vektör uzayındaki tüm vektörlere dik ise S_1 ve S_2 vektör uzayları birbirine diktir denir ve $S_1 \perp S_2$ biçiminde gösterilir (Sengupta ve Jammalamadaka, 2003).

Tanım 2.3.3. S_1 ve S_2 vektör uzayları olsun. $u \in S_1$ ve $v \in S_2$ olmak üzere $u + v$ formundaki tüm vektörleri içeren vektör uzayına bu iki vektör uzayının toplamı denir ve $S_1 + S_2$ ile gösterilir. Eğer S_1 ve S_2 vektör uzayları birbirine dik ise $S_1 + S_2$ ile gösterilen toplam $S_1 \oplus S_2$ şeklinde ifade edilir (Sengupta ve Jammalamadaka, 2003).

Tanım 2.3.4. Eğer $S_1 \oplus S_2 = \mathbb{R}^{n \times 1}$ ise S_1 ve S_2 alt uzaylarına birbirinin dik tümleyeni denir ve $S_1 = S_2^\perp$ veya $S_2 = S_1^\perp$ ile gösterilir. Bir S vektör uzayı için $(S^\perp)^\perp = S$ 'dir (Sengupta ve Jammalamadaka, 2003).

Tanım 2.3.5. S bir vektör uzayı olmak üzere her $v \in S$ ve $Pv \in S$ için $Pv = v$ ise, P matrisine bir izdüşüm matrisi denir (Sengupta ve Jammalamadaka, 2003).

Tanım 2.3.6. P matrisi, S vektör uzayının bir izdüşüm matrisi olmak üzere $I - P$ matrisi $S^\perp$ vektör uzayının bir izdüşüm matrisi ise, bu durumda P matrisine S vektör uzayının bir dik izdüşüm matrisi denir (Sengupta ve Jammalamadaka, 2003).

2.4. Bir Matrisin Tersi ve Moore-Penrose Genelleştirilmiş Tersi

Tanım 2.4.1. $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisleri için $AB = BA = I_n$ ise, B matrisine A matrisinin tersi ve A matrisine de tersinir matris denir. A matrisinin tersi A^{-1} şeklinde gösterilir (Hogben, 2007).

Tanım 2.4.2. $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrisi için

- a. $XAX = X$,
- b. $AXA = A$,
- c. $(AX)' = AX$,
- d. $(XA)' = XA$

koşulları sağlanıyorsa, A matrisine X matrisinin Moore–Penrose Genelleştirilmiş tersi denir ve bu ters X^+ ile gösterilir (Cooperstein, 2015).

Teorem 2.4.3. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ olmak üzere

- a. $(A')^+ = (A^+)',$
- b. $(A'A)^+ = A^+(A')^+,$
- c. $(A^+)^+ = A$

sağlanır (Cooperstein, 2015).

Teorem 2.4.4. Herhangi bir $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrisi için AA^+ , $E_A = I_m - AA^+$ ve $F_A = I_n - A^+A$ matrisleri sırasıyla $R(A)$, $R(A)^\perp$ ve $R(A')^\perp$ üzerine dik izdüşüm matrisleridir (Sengupta ve Jammalamadaka, 2003).

Aşağıdaki teoremlerde izdüşüm matrisi, Moore-Penrose Genelleştirilmiş tersi, rank, sütun uzayı ve satır uzayı ilgili özellikler toplanmıştır.

Teorem 2.4.5. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times k}$ ve $C \in \mathbb{R}^{l \times k}$ olsun. Bu durumda

- a. $r[A : B] = r(A) + r(E_A B) = r(B) + r(E_B A),$
- b. $r \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = r(A) + r(CF_A) = r(C) + r(AF_C),$
- c. $r \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = r(A) + r(B) + r(E_B AF_C)$

sağlanır (Marsaglia ve Styán, 1974).

Teorem 2.4.6. $R(A'_1) \subseteq R(B'_1)$ ve $R(A'_2) \subseteq R(B'_1)$ ise, $r(A_1 B_1^+ A_2) = r \begin{bmatrix} B_1 & A_2 \\ A_1 & 0 \end{bmatrix} - r(B_1)$

sağlanır (Gan ve ark., 2017).

2.5. Lineer Denklem Sistemleri

Tanım 2.5.1. $A \in \mathbb{R}^{m \times r}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times t}$ ve $C \in \mathbb{R}^{k \times t}$ bilinen matrisler ve $X \in \mathbb{R}^{r \times k}$ bilinmeyen matris olmak üzere $AXC = B$ biçimindeki eşitliğe bir lineer matris denklem sistemi denir. Özel olarak $k = t$ ve $C = I_k$ olması durumunda da yani $AX = B$ denkleminde de lineer denklem sistemi denir (Hogben, 2007).

Tanım 2.5.2. Bir lineer denklem sistemi en az bir çözüme sahip ise sistem tutarlıdır denir. Aksi takdirde sistem tutarsızdır (Hogben, 2007).

Teorem 2.5.3. $AX = B$ lineer denklem sisteminin tutarlı olmasının gerek ve yeter koşulu $r[A : B] = r(A)$ ya da denk olarak $AA^+B = B$ olmasıdır. Bu durumda, denklemin genel çözümü parametrik formda U uygun boyutlu keyfi matris olmak üzere $X = A^+B + (I - A^+A)U$ olarak yazılır (Penrose, 1995).

2.6. Kuadratik Formlar ve Löwner Sıralaması

Tanım 2.6.1. $x = (x_i) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ vektör ve $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simetrik bir matris olmak üzere

$$f(x) = x'Ax = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j$$

ifadesine x_i elemanlarının bir kuadratik form ve A matrisine de bu kuadratik formun matrisi denir. Buna göre

- Eğer $\forall x \neq 0$ için $x'Ax > 0$ ise A pozitif tanımlıdır.
- Eğer $\forall x$ için $x'Ax \geq 0$ ve bazı $x \neq 0$ vektörleri için $x'Ax = 0$ ise A pozitif yarı tanımlıdır (Meyer, 2000).

A ve B simetrik matrisler olmak üzere $B \geq_L A$ sıralamasındaki “ $\geq_L$ ” gösterimi simetrik matris kümesi üzerinde kısmi bir sıralamayı gösterir ve bu sıralama Löwner sıralaması olarak bilinir (Bhatia, 2007).

Tanım 2.6.2. Eğer A ve B simetrik matrisleri için $B - A$ pozitif yarı tanımlı ise Löwner sıralamasına göre A matrisi, B matrisinden daha küçüktür denir. $A \leq_L B$ veya $B \geq_L A$ ile gösterilir. Eğer $B - A$ pozitif tanımlı ise bu durumda Löwner sıralamasına göre A matrisi kesinlikle B matrisinden küçüktür denir. $A <_L B$ veya $B >_L A$ ile gösterilir (Sengupta ve Jammalamadaka, 2003).

2.7. Rasgele Vektörler ve Bazı İstatiksel Kavramlar

Elemanları rasgele olan vektör ve matrise sırasıyla rasgele vektör ve rasgele matris denir. Rasgele vektörler ve matrislerle ilgili bazı temel kavramlar ve teoremler aşağıda

verilmektedir.

Tanım 2.7.1. $X = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ rasgele bir matris olmak üzere, X matrisinin beklenen değeri $E(X) = (E(x_{ij}))$ 'dir (Harville, 2018).

Teorem 2.7.2. $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$ rasgele bir matris, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$ ve $C \in \mathbb{R}^{m \times q}$ bilinen matrisler olmak üzere, $E(C + AXB) = C + AE(X)B$ 'dir (Harville, 2018).

Tanım 2.7.3. $x = (x_i) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ rasgele bir vektör olmak üzere, x vektörünün varyansı,

$$D(x) = \text{var}(x) = E\left([x - E(x)][x - E(x)]'\right) = E(xx') - E(x)[E(x)]'$$

dir (Harville, 2018).

Tanım 2.7.4. $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ve $y \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ rasgele birer vektör olmak üzere, x ve y vektörlerinin kovaryans,

$$\text{cov}(x, y) = E\left([x - E(x)][y - E(y)]'\right) = E(xy') - E(x)[E(y)]'$$

dir (Harville, 2018).

Teorem 2.7.5. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ve $B \in \mathbb{R}^{s \times t}$ bilinen matrisler, $c \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ ve $k \in \mathbb{R}^{s \times 1}$ bilinen vektörler, $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ve $y \in \mathbb{R}^{t \times 1}$ rasgele vektörler olsun. Bu durumda

- a. $D(x) = \text{var}(x) = \text{var}(x') = \text{cov}(x, x)$,
- b. $\text{var}(c + Ax) = A \text{var}(x) A'$,
- c. $\text{cov}(x, y) = \text{cov}(y, x) = \text{cov}(x', y') = \text{cov}(x, y') = \text{cov}(x', y)$,

d. $\text{cov}(c + Ax, k + By) = A \text{cov}(x, y) B',$

e. $\text{var} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \text{var} \begin{pmatrix} \text{var}(x) & \text{cov}(x, y) \\ \text{cov}(y, x) & \text{var}(y) \end{pmatrix}$

sağlanır (Harville, 2018).



BÖLÜM 3. GENEL LİNEER KARMA MODELLERDE TAHMİN

3.1. Giriş

Bu bölümde bir genel lineer karma model ve bu modelin bir alt modeli tanıtılarak, modellerle ilgili bazı özellikler ifade edilecektir.

Bir genel lineer karma model ve bu modelin parçalanmış formu;

$$\mathcal{M}: y = X\beta + Zu + \varepsilon = [X_1 : X_2] \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + [Z_1 : Z_2] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \varepsilon \quad (3.1)$$

olarak ifade edilir. Burada $y \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ gözlenebilir rasgele vektör, $X_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $X_2 \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $Z_1 \in \mathbb{R}^{n \times q}$ ve $Z_2 \in \mathbb{R}^{n \times r}$ olmak üzere $X = X_1 : X_2$ ve $Z = Z_1 : Z_2$ bilinen matrisler,

$\beta_1 \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ ve $\beta_2 \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ olmak üzere $\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$ sabit etkilerin bilinmeyen vektörü,

$u_1 \in \mathbb{R}^{q \times 1}$ ve $u_2 \in \mathbb{R}^{r \times 1}$ olmak üzere $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ rasgele etkilerin gözlenemeyen vektörü

ve $\varepsilon \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ rasgele hata vektörünü temsil etmektedir. (3.1) modelinde rasgele vektörlerin beklenen değeri ve kovaryans matrisine ilişkin varsayımlar aşağıda verilmiştir.

$$E \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varepsilon \end{bmatrix} = 0 \text{ ve } D \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \text{cov} \left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varepsilon \end{bmatrix} \right) := \Sigma. \quad (3.2)$$

Burada $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bilinen pozitif yarı tanımlı matristir. (3.2) varsayımlarına göre $\tilde{Z} = [Z_1 : Z_2 : I_n]$ olmak üzere, (3.1) modeli altında y vektörünün beklenen değeri ve kovaryans matrisi

$$\begin{aligned}
 E(y) &= E(X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + Z_1u_1 + Z_2u_2 + \varepsilon) \\
 &= E(X_1\beta_1) + E(X_2\beta_2) + E(Z_1u_1) + E(Z_2u_2) + E(\varepsilon) \\
 &= X_1E(\beta_1) + X_2E(\beta_2) + Z_1E(u_1) + Z_2E(u_2) + E(\varepsilon) \\
 &= X_1\beta_1 + X_2\beta_2 \\
 &= X\beta
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

ve

$$\begin{aligned}
 D(y) &= \text{cov}(y, y) \\
 &= \text{cov}(X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + Z_1u_1 + Z_2u_2 + \varepsilon, X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + Z_1u_1 + Z_2u_2 + \varepsilon) \\
 &= \text{cov}\left(\begin{bmatrix} Z_1 : Z_2 : I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Z_1 : Z_2 : I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varepsilon \end{bmatrix}\right) \\
 &= [Z_1 : Z_2 : I_n] \text{cov}\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varepsilon \end{bmatrix}\right) [Z_1 : Z_2 : I_n]' \\
 &= [Z_1 : Z_2 : I_n] D \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varepsilon \end{bmatrix} [Z_1 : Z_2 : I_n]' \\
 &= \tilde{Z} \Sigma \tilde{Z}' = V
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

dir. Ayrıca (3.1) modelinde u_1, u_2, ε ve y vektörleri için

$$\text{cov}(u_1, y) = \text{cov}\left(\begin{bmatrix} I_q : 0 : 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Z_1 : Z_2 : I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varepsilon \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= [I_q : 0 : 0] \text{cov} \left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varepsilon \end{bmatrix} \right) [Z_1 : Z_2 : I_n]' \\
&= [I_q : 0 : 0] D \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varepsilon \end{bmatrix} [Z_1 : Z_2 : I_n]' \\
&= [I_q : 0 : 0] \Sigma \tilde{Z}', \tag{3.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{cov}(u_2, y) &= \text{cov} \left(\begin{bmatrix} 0 : I_r : 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Z_1 : Z_2 : I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varepsilon \end{bmatrix} \right) \\
&= [0 : I_r : 0] \text{cov} \left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varepsilon \end{bmatrix} \right) [Z_1 : Z_2 : I_n]' \\
&= [0 : I_r : 0] D \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varepsilon \end{bmatrix} [Z_1 : Z_2 : I_n]' \\
&= [0 : I_r : 0] \Sigma \tilde{Z}', \tag{3.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{cov}(\varepsilon, y) &= \text{cov} \left(\begin{bmatrix} 0 : 0 : I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Z_1 : Z_2 : I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varepsilon \end{bmatrix} \right) \\
&= [0 : 0 : I_n] \text{cov} \left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varepsilon \end{bmatrix} \right) [Z_1 : Z_2 : I_n]' \\
&= [0 : 0 : I_n] D \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varepsilon \end{bmatrix} [Z_1 : Z_2 : I_n]' \\
&= [0 : 0 : I_n] \Sigma \tilde{Z}' \tag{3.7}
\end{aligned}$$

bulunur.

Regresyon analizinde aynı gözlenebilir rasgele değişkene sahip iki veya daha fazla istatistiksel modelin olduğu durumlarla karşılaşılabılır. İstatistiksel sonuçlar çıkarmak için, bu lineer karma modeller arasında benzerlik veya denkliklerin olup olmadığını analiz etmek gerekebilir. Bu şekilde karşılaşılabılır durumlarından birisi, genel bir lineer karma modele yeni parametreler eklemek veya silmek ile elde edilen yeni modelleri, ilk durumdaki orijinal modeller ile karşılaştırmaktır. Bu çalışmada (3.1) modeli orijinal model olarak ele alınıp, bu modelden bazı sabit ve rasgele etkiler çıkarılarak

$$\mathcal{N} : y = X_1\beta_1 + Z_1u_1 + \varepsilon \quad (3.8)$$

şeklinde ifade edilebilecek bir alt model ele alınacaktır. Görüldüğü gibi (3.1) ve (3.8) modellerinde gözlenen yanıt değişkenleri aynı olmasına rağmen bu iki model karşılaştırıldığında bilinmeyen ortak parametreler ile ilgili istatistiksel sonuçlar doğal olarak aynı olmak zorunda değildir. Bu nedenle (3.1) ve (3.8) modelleri altındaki tüm bilinmeyen parametrelerin tahmin edicileri veya ön tahmin edicileri ile ilgili bazı genel sonuçlar elde etmek istenebilir. Bunun için aşağıdaki vektör göz önüne alınabilir.

$$m : y = K_1\beta_1 + T_1u_1 + J\varepsilon = [K_1 : 0] \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + [T_1 : 0] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + J\varepsilon = K\beta + Tu + J\varepsilon. \quad (3.9)$$

Burada $K_1 \in \mathbb{R}^{s \times p}$, $T_1 \in \mathbb{R}^{s \times q}$ ve $J \in \mathbb{R}^{s \times n}$ bilinen matrisler olmak üzere, $K = [K_1 : 0]$ ve $T = [T_1 : 0]$ 'dır. (3.2) varsayımlarına göre $\tilde{T}_1 = [T_1 \quad J]$ olmak üzere, (3.9) vektörünün beklenen değeri ve kovaryans matrisi

$$\begin{aligned} E(m) &= E(K_1\beta_1 + T_1u_1 + \varepsilon) \\ &= E(K_1\beta_1) + E(T_1u_1) + E(\varepsilon) \\ &= K_1E(\beta_1) + T_1E(u_1) + E(\varepsilon) \\ &= K_1\beta_1 \end{aligned} \quad (3.10)$$

ve

$$\begin{aligned}
D(m) &= \text{cov}(m, m) \\
&= \text{cov}(K_1\beta_1 + T_1u_1 + J\varepsilon, K_1\beta_1 + T_1u_1 + J\varepsilon) \\
&= \text{cov}\left([T_1 : 0 : J] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varepsilon \end{bmatrix}, [T_1 : 0 : J] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varepsilon \end{bmatrix}\right) \\
&= [T_1 : 0 : J] \text{cov}\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varepsilon \end{bmatrix}\right) [T_1 : 0 : J]' \\
&= [T_1 : 0 : J] D \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varepsilon \end{bmatrix} [T_1 : 0 : J]' \\
&= \tilde{T}_1' \Sigma \tilde{T}_1
\end{aligned} \tag{3.11}$$

olarak elde edilir. (3.1) modeli ve (3.9) vektörü ele alındığında

$$\begin{aligned}
\text{cov}(m, y) &= \text{cov}(K_1\beta_1 + T_1u_1 + J\varepsilon, X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + Z_1u_1 + Z_2u_2 + \varepsilon) \\
&= \text{cov}\left([T_1 : 0 : J] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varepsilon \end{bmatrix}, [Z_1 : Z_2 : I_n] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varepsilon \end{bmatrix}\right) \\
&= [T_1 : 0 : J] \text{cov}\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varepsilon \end{bmatrix}\right) [Z_1 : Z_2 : I_n]' \\
&= [T_1 : 0 : J] D \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varepsilon \end{bmatrix} [Z_1 : Z_2 : I_n]' \\
&= [T_1 : 0 : J] \Sigma [Z_1 : Z_2 : I_n]' \\
&= \tilde{T}_1' \Sigma \tilde{Z}' = C
\end{aligned} \tag{3.12}$$

elde edilir.

Benzer şekilde (3.2) varsayımlarına göre (3.8) alt modeli ele alındığında $\tilde{Z}_1 = [Z_1 : I_n]$ olmak üzere y vektörünün beklenen değeri ve kovaryans matrisi

$$E(y) = E(X_1\beta_1 + Z_1u_1 + \varepsilon) = X_1\beta_1 \quad (3.13)$$

ve

$$D(y) = \text{cov}(y, y) = \text{cov}(X_1\beta_1 + Z_1u_1 + \varepsilon, X_1\beta_1 + Z_1u_1 + \varepsilon) = \tilde{Z}_1 \Sigma \tilde{Z}_1' = V_1 \quad (3.14)$$

olarak yazılır. Ayrıca (3.8) modelinde u_1 , u_2 , ε ve y vektörleri için

$$\text{cov}(u_1, y) = [I_q : 0 : 0] \Sigma \tilde{Z}_1', \quad (3.15)$$

$$\text{cov}(\varepsilon, y) = [0 : 0 : I_n] \Sigma \tilde{Z}_1', \quad (3.16)$$

$$\text{cov}(m, y) = \tilde{t} \Sigma \tilde{Z}_1' = C_1, \quad (3.17)$$

$$\text{cov}(y, m) = \tilde{Z}_1 \Sigma \tilde{t}' = C_1' \quad (3.18)$$

elde edilir.

3.2. En İyi Lineer Yansız Ön Tahmin Edici (BLUP)

Tanım 3.2.1. Bilinmeyen kitle parametrelerinin belirlenmesi amacıyla kullanılan örneklem istatistiğine tahmin edici ve tahmin edicinin aldığı değere ise tahmin denir. α bir parametre olmak üzere $E(P)$ mevcut ve $E(P) = \alpha$ ise, P istatistiğine α parametresinin yansız tahmin edicisi, $E(P) = \alpha$ koşulu sağlanmadığında P istatistiğine α parametresinin yanlış tahmin edicisi denir. Yanlış ve yansız tahmin ediciler arasında seçim söz konusu olduğunda genel olarak yansız tahmin ediciler

seçilir. Yansız tahmin ediciler arasından birini tercih etmek gerekir ise yeni bir ölçüye ihtiyaç duyulur. Böyle bir durumda parametreye yakın olma olasılığı yüksek olan tahmin edici tercih edilir. Bir parametrenin herhangi bir yansız tahmin edicisi, diğer herhangi bir yansız tahmin edicisinden daha küçük varyansa sahip ise, bu istatistiğe parametrenin minimum varyanslı tahmin edicisi denir.

Tanım 3.2.2. (3.1) modeli ele alınsın ve m vektörü (3.9)'da verildiği gibi olsun. $L \in \mathbb{R}^{k \times n}$ olmak üzere $E(Ly - m) = 0$ olacak şekilde bir L_y lineer istatistiği varsa m vektörüne (3.1) modeli altında ön tahmin edilebilirdir denir. m vektörü (3.1) modeli altında ön tahmin edilebilir olsun. $E(Ly - m) = 0$ olmak üzere, $E(L_0y - m) = 0$ ve $\text{cov}(Ly - m) \geq_L \text{cov}(L_0y - m)$ olacak şekilde bir L_0 matrisi varsa bu durumda L_0y linear istatistiği, (3.1) modeli altında m vektörü için en iyi lineer yansız ön tahmin edici yani BLUP olarak tanımlanır ve

$$L_0y = BLUP_{\mathcal{M}}(m) = BLUP_{\mathcal{M}}(K_1\beta_1 + Tu_1 + J\varepsilon) \quad (3.19)$$

şeklinde ifade edilir (Puntanen ve ark.,2011).

BLUE, BLUP ile ilgili yapılan tanıma benzer olarak aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 3.2.3. m , (3.1) modeli altında ön tahmin edilebilir olsun. m vektöründe $T_1 = J = 0$ olarak alınsın. Bu durumda (3.1) modeli altında m vektörü için (3.19) ile verilen BLUP ifadesi $K_1\beta_1$ 'in en iyi lineer yansız tahmin edicisi yani BLUE'su olarak tanımlanır ve

$$L_0y = BLUE_{\mathcal{M}}(m) = BLUE_{\mathcal{M}}(K_1\beta_1) \quad (3.20)$$

şeklinde ifade edilir (Puntanen ve ark.,2011).

3.4. BLUP ve BLUE'nun Temel Denklemleri ve Bazı Özellikleri

Bu bölümde, ele alınan genel lineer karma modeller altında tüm bilinmeyen parametrelerin bir genel fonksiyonun BLUP/BLUE denklemleri ve özellikleri verilecektir.

(3.1) modeli ele alınsın. (3.1) modeli ve (3.9)'da verilen m vektöründen $Ly - m$ ifadesi

$$\begin{aligned} Ly - m &= L(X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + Z_1u_1 + Z_2u_2 + \varepsilon) - K_1\beta_1 + T_1u_1 + J\varepsilon \\ &= (LX_1 - K_1)\beta_1 + LX_2\beta_2 + (LZ_1 - T_1)u_1 + LZ_2u_2 + (L - J)\varepsilon \end{aligned} \quad (3.21)$$

olarak yazılır. Böylece (3.21) ifadesinin beklenen değeri ve kovaryans matrisi

$$\begin{aligned} E(Ly - m) &= E((LX_1 - K_1)\beta_1 + LX_2\beta_2) \\ &= (LX_1 - K_1)\beta_1 + LX_2\beta_2 \end{aligned} \quad (3.22)$$

ve

$$\begin{aligned} D(Ly - m) &= \text{cov}[(Ly - m), (Ly - m)] \\ &= \text{cov}[(LZ_1 - T_1)u_1 + LZ_2u_2 + (L - J)\varepsilon, (LZ_1 - T_1)u_1 + LZ_2u_2 + (L - J)\varepsilon] \\ &= \text{cov}\left[(LZ_1 - T_1 : LZ_2 : L - J) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varepsilon \end{bmatrix}, (LZ_1 - T_1 : LZ_2 : L - J) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varepsilon \end{bmatrix}\right] \\ &= (LZ_1 - T_1 : LZ_2 : L - J) \text{cov}\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varepsilon \end{bmatrix}\right) (LZ_1 - T_1 : LZ_2 : L - J)' \\ &= (LZ_1 - T_1 : LZ_2 : L - J) D \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varepsilon \end{bmatrix} (LZ_1 - T_1 : LZ_2 : L - J)' \\ &= (LZ_1 - T_1 : LZ_2 : L - J) \Sigma (LZ_1 - T_1 : LZ_2 : L - J)' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= ([LZ_1 : LZ_2 : L] - [T_1 : 0 : J]) \Sigma ([LZ_1 : LZ_2 : L] - [T_1 : 0 : J])' \\
&= (L[Z_1 : Z_2 : I_n] - [T_1 : 0 : J]) \Sigma (L[Z_1 : Z_2 : I_n] - [T_1 : 0 : J])' \\
&= [L\tilde{} \tilde{} \tilde{}] - [\tilde{} \tilde{} \tilde{}] \quad (3.23)
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Aşağıdaki lemmada m vektörünün (3.1) modeli altında ön tahmin edilebilir olma koşulu verilmiştir

Lemma 3.4.1. (3.1) modeli ele alınsın. m vektörünün (3.1) modeli altında ön tahmin edilebilir olmasının gerek ve yeter koşulu

$$R\left([K_1 : 0]'\right) \subseteq R\left([X_1 : X_2]'\right) \text{ veya denk olarak } R(K_1') \subseteq R\left([X_2^\perp X_1]'\right) \quad (3.24)$$

olmasıdır (Gan ve ark., 2017).

İspat: m vektörü (3.1) modeli altında ön tahmin edilebilir olsun. Her β_1, β_2 için

$$\begin{aligned}
E(Ly - m) = 0 &\Leftrightarrow (LX_1 - K_1)\beta_1 + LX_2\beta_2 = 0 \\
&\Leftrightarrow ([LX_1 : LX_2] - [K_1 : 0]) \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow L[X_1 : X_2] - [K_1 : 0] = 0 \\
&\Leftrightarrow L[X_1 : X_2] = [K_1 : 0]
\end{aligned}$$

dır. Böylece Teorem 2.1.4'ün (b) şikkından istenen elde edilir. ■

(3.1) modeli altında temel BLUP denklemi ve özellikleri verilecektir. Ancak öncelikli olarak ispatta kullanılacak olan lemma aşağıda verilmiştir.

Lemma 3.4.2. A , B , D ve G uygun boyutlu bilinen matrisler, H pozitif yarı tanımlı matris ve $ZA = B$ tutarlı matris denklemi olmak üzere

$$f(Z) = (ZG + D)H(ZG + D)' \quad (3.25)$$

olsun. Böylece $ZA = B$ denkleminin tüm çözümleri için $f(Z) \geq_L f(Z_0)$ sağlanacak şekilde $Z_0 A = B$ denkleminin daima bir Z_0 çözümü vardır. Bu durumda (3.25) ifadesini sağlayan Z_0 matrisi aşağıdaki tutarlı matris denklemi

$$Z_0 \begin{bmatrix} A : GHG'A^\perp \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B : -DHG'A^\perp \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

ile belirlenir (Tian, 2015).

Teorem 3.4.3. m , (3.1) modeli altında ön tahmin edilebilir olsun. $K = [K_1 : 0]$ olmak üzere

$$E(Ly - m) = 0 \text{ ve } D(Ly - m) = \min \Leftrightarrow L \begin{bmatrix} X : VX^\perp \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K : CX^\perp \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

dir. Buradaki matris denklemi temel BLUP denklemi olarak bilinir ve

$$BLUP_{\mathcal{M}}(m) = Ly \Leftrightarrow L \begin{bmatrix} X : VX^\perp \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K : CX^\perp \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

olarak ifade edilir. Bu denklem her zaman tutarlıdır ve denklemin genel çözümü olan L ve buna karşılık gelen $BLUP_{\mathcal{M}}(m)$

$$BLUP_{\mathcal{M}}(m) = Ly = \left(\begin{bmatrix} K : CX^\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X : VX^\perp \end{bmatrix}^+ + U \begin{bmatrix} X : VX^\perp \end{bmatrix}^\perp \right) y \quad (3.29)$$

dir. Burada $U \in R^{n \times m}$ keyfi bir matristir (Gan ve ark, 2017).

İspat. (3.25)'i kullanarak (3.23) ifadesinde $A = X$, $B = K$, $G = \tilde{Z}$, $H = \Sigma$, $D = \tilde{T}_1 = [T_1 \quad J]$ alınırsa ve bu ifadeler (3.26) matris eşitliğinde yazılırsa (3.27) yani (3.28) elde edilir. (3.28) ifadesindeki denklemin genel çözümü (3.29) olarak yazılır. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 3.4.3'teki matris denklemine göre aşağıdaki koşullarda sağlanır.

- $r[X : VX^\perp] = r[X : V]$, $R[X : VX^\perp] = R[X : V]$ ve $R(X) \cap R(VX^\perp) = \{0\}$.
- L tektir $\Leftrightarrow r[X : V] = n$.
- $BLUP_{\mathcal{M}}(m)$ 1 olasılıkla tektir. $\Leftrightarrow y \in R[X : V]$ 1 olasılıkla sağlanır. Yani (3.1) modeli tutarlıdır (Gan ve ark.,2017).

Böylece (3.29) ifadesine göre $BLUP_{\mathcal{M}}(m)$ ile ilgili kovaryans matrisleri

$$D[BLUP_{\mathcal{M}}(m)] = \left([K : CX^\perp] [X : VX^\perp]^+ \right) V \left([K : CX^\perp] [X : VX^\perp]^+ \right)', \quad (3.30)$$

$$\text{cov}\{BLUP_{\mathcal{M}}(m), m\} = [K : CX^\perp] [X : VX^\perp]^+ C', \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} D(m) - D(BLUP_{\mathcal{M}}(m)) \\ = \tilde{T}_1 \Sigma \tilde{T}_1' - \left([K : CX^\perp] [X : VX^\perp]^+ \right) V \left([K : CX^\perp] [X : VX^\perp]^+ \right)', \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} D[m - BLUP_{\mathcal{M}}(m)] \\ = \left([K : CX^\perp] [X : VX^\perp]^+ \right) V \left([K : CX^\perp] [X : VX^\perp]^+ \right)' \tilde{Z} - \tilde{T}_1' \end{aligned} \quad (3.33)$$

dır. Bunların elde edilmesi aşağıda detaylı olarak verilmektedir.

$$D[BLUP_{\mathcal{M}}(m)] = \text{cov}[BLUP_{\mathcal{M}}(m), BLUP_{\mathcal{M}}(m)]$$

$$\begin{aligned}
&= \text{cov} \left(\left([K : CX^\perp] [X : VX^\perp]^+ + U [X : VX^\perp]^\perp \right) y, \right. \\
&\quad \left. \left([K : CX^\perp] [X : VX^\perp]^+ + U [X : VX^\perp]^\perp \right) y \right) \\
&= \left([K : CX^\perp] [X : VX^\perp]^+ \right) \text{cov}(y, y) \left([K : CX^\perp] [X : VX^\perp]^+ \right)' \\
&= \left([K : CX^\perp] [X : VX^\perp]^+ \right) V \left([K : CX^\perp] [X : VX^\perp]^+ \right)'.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{cov} \{ BLUP_{\mathcal{M}}(m), m \} &= \text{cov} \left(\left([K : CX^\perp] [X : VX^\perp]^+ + U [X : VX^\perp]^\perp \right) y, m \right) \\
&= \left([K : CX^\perp] [X : VX^\perp]^+ \right) \text{cov}(y, m) \\
&= [K : CX^\perp] [X : VX^\perp]^+ \tilde{Z} \Sigma \tilde{T}_1' \\
&= [K : CX^\perp] [X : VX^\perp]^+ C'.
\end{aligned}$$

(3.32) matris eşitliğinin ispatı sırasıyla (4.11) ve (4.30)'dan kolayca elde edilir.

$$\begin{aligned}
D[m - BLUP_{\mathcal{M}}(m)] &= D(m) + D(BLUP_{\mathcal{M}}(m)) - \text{cov} \{ BLUP_{\mathcal{M}}(m), m \} \\
&= \tilde{T}_1 \tilde{\Sigma} \tilde{T}_1' + \left([K : CX^\perp] [X : VX^\perp]^+ \right) V \left([K : CX^\perp] [X : VX^\perp]^+ \right)' \\
&\quad - C \left([K : CX^\perp] [X : VX^\perp]^+ \right)' - [K : CX^\perp] [X : VX^\perp]^+ C' \\
&= \tilde{T}_1 \tilde{\Sigma} \tilde{T}_1' + \left([K : CX^\perp] [X : VX^\perp]^+ \right) V \left([K : CX^\perp] [X : VX^\perp]^+ \right)' \\
&\quad - \tilde{T}_1 \tilde{\Sigma} \tilde{T}_1' \left([K : CX^\perp] [X : VX^\perp]^+ \right)' - [K : CX^\perp] [X : VX^\perp]^+ \tilde{Z} \Sigma \tilde{T}_1' \\
&= -\tilde{T}_1 \tilde{\Sigma} \left([K : CX^\perp] [X : VX^\perp]^+ \right)' \\
&\quad + \left([K : CX^\perp] [X : VX^\perp]^+ \right) V \left([K : CX^\perp] [X : VX^\perp]^+ \right)' \\
&= \left([K : CX^\perp] [X : VX^\perp]^+ \right) V \left([K : CX^\perp] [X : VX^\perp]^+ \right)' - \tilde{T}_1 \tilde{\Sigma} \tilde{T}_1' \left([K : CX^\perp] [X : VX^\perp]^+ \right)'.
\end{aligned}$$

Lemma 3.4.1 ve Teorem 3.4.3 kullanılarak, (3.9) modeli için elde edilen sonuçlar aşağıdaki lemma ve teoremden toplanmıştır.

Lemma 3.4.5. (3.9) modeli ele alınsın. m vektörünün (3.9) modeli altında ön tahmin edilebilir olmasının gerek ve yeter koşulu $R(K') \subseteq R(X')$ olmasıdır (Gan ve ark., 2017).

Teorem 3.4.6. (3.9) modeli ele alınsın. m , (3.9) model altında ön tahmin edilebilir olsun. Bu durumda

$$E(Ly - m) = 0 \text{ ve } D(Ly - m) = \min \Leftrightarrow L[X : VX^\perp] = [K : CX^\perp] \quad (3.39)$$

dır (Gan ve ark., 2017). Buradaki matris denkleminin temel BLUP denklemi $BLUP_N(m) = Ly \Leftrightarrow L[X_1 : V_1 X_1^\perp] = [K_1 : C_1 X_1^\perp]$ olarak yazılır. Bu denklem tutarlıdır ve $U \in \mathbb{R}^{n \times m}$ keyfi bir matris olmak üzere denklemin genel çözümü

$$BLUP_N(m) = Ly = \left([K_1 : C_1 X_1^\perp] [X_1 : V_1 X_1^\perp]^+ + U [X_1 : V_1 X_1^\perp]^\perp \right) y \quad (3.40)$$

olarak yazılır. ■

Teorem 3.4.6'daki matris denkleminin göre aşağıdaki koşullar sağlanır:

- $r[X_1 : V_1 X_1^\perp] = r[X_1 : V_1]$, $R[X_1 : V_1 X_1^\perp] = R[X_1 : V_1]$, $R(X_1) \cap R(V_1 X_1^\perp) = \{0\}$.
- L tektir $\Leftrightarrow r[X_1 V_1] = n$.
- $BLUP_N(m)$ 1 olasılıkla tektir $\Leftrightarrow y \in R[X_1 : V_1]$ 1 olasılıkla sağlanır. Yani (3.9) modeli tutarlıdır (Gan ve ark., 2017).

(3.40) ifadesine göre $BLUP_N(m)$ ile ilgili kovaryans matrisleri

$$D[BLUP_N(m)] = [K_1 : C_1 X_1^\perp] [X_1 : V_1 X_1^\perp]^+ V_1 \left([K_1 : C_1 X_1^\perp] [X_1 : V_1 X_1^\perp]^+ \right)', \quad (3.41)$$

$$\text{cov}\{BLUP_N(m), m\} = [K_1 : C_1 X_1^\perp] [X_1 : V_1 X_1^\perp]^+ C_1', \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} D(m) - D(BLUP_N(m)) \\ = \tilde{T}_1 \Sigma \tilde{T}_1' - [K_1 : C_1 X_1^\perp] [X_1 : V_1 X_1^\perp]^+ V_1 \left([K_1 : C_1 X_1^\perp] [X_1 : V_1 X_1^\perp]^+ \right)', \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} D[m - BLUP_N(m)] \\ = \left([K_1 : C_1 X_1^\perp] [X_1 : V_1 X_1^\perp]^+ - \tilde{T}_1' \right) \left([K_1 : C_1 X_1^\perp] [X_1 : V_1 X_1^\perp]^+ - \tilde{T}_1' \right)' \end{aligned} \quad (3.44)$$

olarak bulunur.

(3.9) modeli altında m vektörü için özel durumlar ele alınırsa, Teorem 3.4.6'dan aşağıdakiler elde edilir.

$T_1 = J = 0$ için

$$BLUE_N(K_1 \beta_1) = \left([K_1 : 0] [X_1 : V_1 X^\perp]^+ + U_1 [X_1 : V_1 X^\perp]^\perp \right) y \quad (3.45)$$

ve

$K_1 = 0$ için

$$BLUP_N(T_1 u_1 + J \varepsilon) = \left([0 : C_1 X_1^\perp] [X_1 : V_1 X^\perp]^+ + U_2 [X_1 : V_1 X^\perp]^\perp \right) y. \quad (3.46)$$

Buradan özel olarak $U_1, U_2 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ keyfi matrislerdir.

BÖLÜM 4. BİR GENEL LİNEER KARMA MODEL VE BU MODELİN ALT MODELİ ALTINDA BLUP İLİŞKİLERİ

Bu kısımda, (3.1) ve (3.8) modelleri altında BLUP eşitlikleri ile ilgili sonuçlar verilecektir. Ele alınan modeller tutarlı kabul edilmektedir. Yani sırasıyla $y \in R[X : V]$ ve $y \in R[X_1 : V_1]$ koşulları 1 olasılıkla sağlandığı kabul edilmektedir (Rao, 1973). Ayrıca kolayca görülmektedir ki (3.8) modeli tutarlı olduğunda (3.1) modeli zaten tutarlıdır.

İki lineer karma modelin BLUP eşitliğiyle ilgili sonuçları içeren teoremler ve bu teoremlerin sonuçları aşağıda verilen tanım dikkate alınarak elde edilecektir.

Tanım 4.1. y rasgele bir vektör olsun.

- Eğer $G_1 = G_2$ ise $G_1 y = G_2 y$ eşitliği kesin sağlanır.
- Eğer $E[G_1 y - G_2 y] = 0$ ve $D[G_1 y - G_2 y] = 0$ ise $G_1 y = G_2 y$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.
- Eğer $E[G_1 y] = E[G_2 y]$ ve $D[G_1 y] = D[G_2 y]$ ise $G_1 y$ ve $G_2 y$ vektörlerinin beklenen değeri ve kovaryans matrisleri aynıdır (Gan ve ark., 2017).

(3.1) ve (3.8) modelleri altında m vektörü için $BLUP_M(m) = L_1 y$ ve $BLUP_N(m) = L_2 y$ olmak üzere, (3.29) ve (3.40)'a göre

$$L_1 = [K : CX^\perp][X : VX^\perp]^+ + U_1[X : VX^\perp]^\perp \quad (4.1)$$

ve

$$L_2 = [K_1 : C_1 X_1^\perp] [X_1 : V_1 X_1^\perp]^+ + U_2 [X_1 : V_1 X_1^\perp]^\perp \quad (4.2)$$

olarak yazılır. Buradan $U_1, U_2 \in R^{n \times m}$ keyfi matrislerdir. (4.1) ve (4.2)'de verilen L_1 ve L_2 çözümlerine göre (3.29) ve (3.40)'daki eşitliklere benzer olarak

$$L_1 y = \left([K : CX^\perp] [X : VX^\perp]^+ + U [X : VX^\perp]^\perp \right) y \quad (4.3)$$

ve

$$L_2 y = \left([K_1 : C_1 X_1^\perp] [X_1 : V_1 X_1^\perp]^+ + U_1 [X_1 : V_1 X_1^\perp]^\perp \right) y \quad (4.4)$$

olarak ifade edilen $BLUP_{\mathcal{M}}(\mathbf{m})$ ve $BLUP_{\mathcal{N}}(\mathbf{m})$ için $BLUP_{\mathcal{M}}(\mathbf{m}) = BLUP_{\mathcal{N}}(\mathbf{m})$ eşitliğinin sağlanmasının gerek ve yeter koşulu (3.28) ve (3.39)'da verilen matris denklemlerinin ortak bir çözüme sahip olmasıdır. Aşağıdaki teoremin ispatı buna göre elde edilecektir.

Teorem 4.2. m vektörünün (3.1) ve (3.8) modelleri altında ön tahmin edilebilir olduğu kabul edilsin. $BLUP_{\mathcal{M}}(\mathbf{m})$ ve $BLUP_{\mathcal{N}}(\mathbf{m})$ sırasıyla (4.3) ve (4.4)'te verildiği gibi olsun. Aşağıdaki durumlar birbirine denktir.

- a. (3.29) ve (3.40) matris denklemlerini sağlayan $BLUP_{\mathcal{M}}(\mathbf{m})$ ve $BLUP_{\mathcal{N}}(\mathbf{m})$ vardır öyle ki $BLUP_{\mathcal{M}}(\mathbf{m}) = BLUP_{\mathcal{N}}(\mathbf{m})$ eşitliği sağlanır.

b.
$$r \begin{bmatrix} X_1 & V_1 & X_2 & V \\ 0 & X_1' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X' \\ K_1 & C_1 & 0 & C \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} X_1 & V_1 & X_2 & V \\ 0 & X_1' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X' \end{bmatrix}.$$

c.
$$r \begin{bmatrix} X_2^\perp V_1 X_1^\perp & X_2^\perp V X_2^\perp & X_2^\perp X_1 \\ 0 & X_1' X_2^\perp & 0 \\ C_1 X_1^\perp & C X_2^\perp & K_1 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} X_2^\perp V_1 X_1^\perp & X_2^\perp V X_2^\perp & X_2^\perp X_1 \\ 0 & X_1' X_2^\perp & 0 \end{bmatrix}.$$

$$d. \quad R\left(\begin{bmatrix} K_1 & C_1 & 0 & C \end{bmatrix}\right) \subseteq R\left(\begin{bmatrix} X_1 & V_1 & X_2 & V \\ 0 & X_1' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X' \end{bmatrix}\right).$$

$$e. \quad R\left(\begin{bmatrix} C_1 X_1^\perp & C X_2^\perp & K_1 \end{bmatrix}'\right) \subseteq R\left(\begin{bmatrix} X_2^\perp V_1 X_1^\perp & X_2^\perp V X_2^\perp & X_2^\perp X_1 \\ 0 & X_1' X_2^\perp & 0 \end{bmatrix}'\right).$$

İspat. m vektörü (3.1) ve (3.8) modelleri altında ön tahmin edilebilir olduğu kabul edilsin. $BLUP_{\mathcal{M}}(m)$ ve $BLUP_{\mathcal{N}}(m)$ sırasıyla (4.3) ve (4.4)'te verildiği gibi olsun. (4.3) ve (4.4)'te verilen denklemler birleştirilerek L_0 için yeni bir matris denklemi

$$L_0 \begin{bmatrix} X_1 & V_1 X_1^\perp & X & V X^\perp \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & C_1 X_1^\perp & K & C X^\perp \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

olarak yazılabilir. Teorem 2.5.3'ten bu matris denkleminin L_0 için bir çözümü olmasının gerek ve yeter koşulu

$$r \begin{bmatrix} X_1 & V_1 X_1^\perp & X & V X^\perp \\ K_1 & C_1 X_1^\perp & K & C X^\perp \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} X_1 & V_1 X_1^\perp & X & V X^\perp \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Önce (4.6) matris eşitliğinin sol tarafı ele alınsın. $R(X^\perp) \subseteq R(X_1^\perp)$ olduğu dikkate alınarak, bu ifadeye Teorem 2.4.5 (b) uygulanırsa aşağıdakiler elde edilir:

$$\begin{aligned} r \begin{bmatrix} X_1 & V_1 X_1^\perp & X & V X^\perp \\ K_1 & C_1 X_1^\perp & K & C X^\perp \end{bmatrix} &= r \begin{bmatrix} X_1 & V_1 X_1^\perp & X_1 & X_2 & V X^\perp \\ K_1 & C_1 X_1^\perp & K_1 & 0 & C X^\perp \end{bmatrix} \\ &= r \begin{bmatrix} X_1 & V_1 X_1^\perp & X_2 & V X^\perp \\ K_1 & C_1 X_1^\perp & 0 & C X^\perp \end{bmatrix} \\ &= r \begin{bmatrix} X_1 & V_1 & X_2 & V \\ K_1 & C_1 & 0 & C \\ 0 & X_1' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X' \end{bmatrix} - r(X_1) - r(X) \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned}
&= r \begin{bmatrix} V_1 & V & X_1 & X_2 \\ C_1 & C & K_1 & 0 \\ X'_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X'_1 & 0 & 0 \\ 0 & X'_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} - r(X_1) - r(X) \\
&= r \begin{bmatrix} V_1 & V & X_1 & X_2 \\ C_1 & C & K_1 & 0 \\ 0 & X'_1 & 0 & 0 \\ 0 & X'_2 & 0 & 0 \\ X'_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - r(X_1) - r(X). \quad (4.8)
\end{aligned}$$

(4.8) ifadesine Teorem 2.4.5 (c) uygulanırsa aşağıdaki elde edilir.

$$= r \begin{bmatrix} X_2^\perp V_1 X_1^\perp & X_2^\perp V X_2^\perp & X_2^\perp X_1 \\ 0 & X'_1 X_2^\perp & 0 \\ C_1 X_1^\perp & C X_2^\perp & K_1 \end{bmatrix} + 2r(X_2) - r(X). \quad (4.9)$$

Şimdi (4.6) matris eşitliğinin sağ tarafı ele alınsın. Bu ifadeye önce Teorem 2.4.5'in (b) şık daha sonra (c) şık uygulanırsa aşağıdakiler elde edilir:

$$\begin{aligned}
r \begin{bmatrix} X_1 & V_1 X_1^\perp & X & V X^\perp \end{bmatrix} &= r \begin{bmatrix} X_1 & V_1 X_1^\perp & X_1 & X_2 & V X^\perp \end{bmatrix} \\
&= r \begin{bmatrix} X_1 & V_1 X_1^\perp & X_2 & V X^\perp \end{bmatrix} \\
&= r \begin{bmatrix} X_1 & V_1 & X_2 & V \\ 0 & X'_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X' \end{bmatrix} - r(X_1) - r(X) \quad (4.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= r \begin{bmatrix} V_1 & V & X_1 & X_2 \\ 0 & X'_1 & 0 & 0 \\ 0 & X'_2 & 0 & 0 \\ X'_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - r(X_1) - r(X) \\
&= r \begin{bmatrix} X_2^\perp V_1 X_1^\perp & X_2^\perp V X_2^\perp & X_2^\perp X_1 \\ 0 & X'_1 X_2^\perp & 0 \end{bmatrix} + 2r(X_2) - r(X). \quad (4.11)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.8) ve (4.10)'dan (b), (4.9) ve (4.11)'den (c) elde edilir. Böylece, (a)-(c) denkliği görülür. Ayrıca Teorem 2.1.4'ün (b) şikkına göre (b)'nin (d)'ye ve (c)'nin (e)'ye denk olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır. ■

Özel olarak Teorem 4.2'de $T_1 = 0$ ve $J = 0$ olarak ele alındığında $BLUE_{\mathcal{M}}(K_1\beta_1)$ ve $BLUE_{\mathcal{N}}(K_1\beta_1)$ 'e karşılık gelen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Sonuç 4.3. $K_1\beta_1$ vektörünün (3.1) ve (3.8) modelleri altında tahmin edilebilir olduğu kabul edilsin. Aşağıdaki durumlar birbirine denktir.

a. $BLUE_{\mathcal{M}}(K_1\beta_1) = BLUE_{\mathcal{N}}(K_1\beta_1)$.

b. $r \begin{bmatrix} X_1 & V_1 & X_2 & V \\ 0 & X_1' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X' \\ K_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} X_1 & V_1 & X_2 & V \\ 0 & X_1' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X' \end{bmatrix}$.

c. $r \begin{bmatrix} X_2^\perp V_1 X_1^\perp & X_2^\perp V X_2^\perp & X_2^\perp X_1 \\ 0 & X_1' X_2^\perp & 0 \\ 0 & 0 & K_1 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} X_2^\perp V_1 X_1^\perp & X_2^\perp V X_2^\perp & X_2^\perp X_1 \\ 0 & X_1' X_2^\perp & 0 \end{bmatrix}$.

d. $R\left(\begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}'\right) \subseteq R\left(\begin{bmatrix} X_1 & V_1 & X_2 & V \\ 0 & X_1' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X' \end{bmatrix}'\right)$.

e. $R\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & K_1 \end{bmatrix}'\right) \subseteq R\left(\begin{bmatrix} X_2^\perp V_1 X_1^\perp & X_2^\perp V X_2^\perp & X_2^\perp X_1 \\ 0 & X_1' X_2^\perp & 0 \end{bmatrix}'\right)$.

(4.3) ve (4.4)'te verilen $BLUP_{\mathcal{M}}(m)$ ve $BLUP_{\mathcal{N}}(m)$ için $BLUP_{\mathcal{M}}(m) = BLUP_{\mathcal{N}}(m)$ eşitliğinin 1 olasılıkla sağlanmasının gerek ve yeter koşulu $(L_1 - L_2)[X_1 : V_1] = 0$ olmasıdır. Aşağıdaki teoremin ispatı buna göre elde edilecektir.

Teorem 4.4. m vektörünün (3.1) ve (3.8) modelleri altında ön tahmin edilebilir olduğu kabul edilsin. $BLUP_{\mathcal{M}}(m)$ ve $BLUP_{\mathcal{N}}(m)$ sırasıyla (4.3) ve (4.4)'te verildiği gibi olsun. Aşağıdaki durumlar birbirine denktir.

- a. (3.29) ve (3.40) matris denklemlerini sağlayan $BLUP_{\mathcal{M}}(m)$ ve $BLUP_{\mathcal{N}}(m)$ vardır öyle ki $BLUP_{\mathcal{M}}(m) = BLUP_{\mathcal{N}}(m)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.
- b.
$$r \begin{bmatrix} V_1 X_1^\perp & X_1 & X_2 & V X^\perp \\ C_1 X_1^\perp & K_1 & 0 & C X^\perp \end{bmatrix} = r[X : V].$$

İspat. m vektörünün (3.1) ve (3.8) modelleri altında ön tahmin edilebilir olduğu kabul edilsin. $BLUP_{\mathcal{M}}(m)$ ve $BLUP_{\mathcal{N}}(m)$ sırasıyla (4.3) ve (4.4)'te verildiği gibi olsun. $BLUP_{\mathcal{M}}(m) = BLUP_{\mathcal{N}}(m)$ eşitliğinin 1 olasılıkla sağlanmasının gerek ve yeter koşulu

$$([K_1 : C_1 X_1^\perp][X_1 : V_1 X_1^\perp]^+ - [K : C X^\perp][X : V X^\perp]^+)[X_1 : V_1] = 0$$

veya

$$([K_1 : C_1 X_1^\perp] : [K : C X^\perp]) \begin{bmatrix} [X_1 : V_1 X_1^\perp] & 0 \\ 0 & -[X : V X^\perp] \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} [X_1 : V_1] \\ [X : V] \end{bmatrix} = 0 \quad (4.12)$$

olmasıdır.

$$R([K_1 : C_1 X_1^\perp]') \subseteq R([X_1 : V_1 X_1^\perp]'), R([K : C X^\perp]') \subseteq R([X : V X^\perp]'),$$

$$R[X_1 : V_1 X_1^\perp] = R[X_1 : V_1], \quad R[X : V X^\perp] = R[X : V],$$

sağlandığından, (4.12) matris denkleminin sol tarafına Teorem 2.4.6 uygulanırsa ve bazı elementer matris işlemleri yapılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\begin{aligned}
& r \left[\begin{bmatrix} K_1 : C_1 X_1^\perp \\ K : CX^\perp \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} X_1 : V_1 X_1^\perp & 0 \\ 0 & -[X : VX^\perp] \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} X_1 : V_1 \\ X_1 : V_1 \end{bmatrix} \right] \\
&= r \left[\begin{bmatrix} X_1 : V_1 X_1^\perp & 0 & X_1 : V_1 \\ 0 & -[X : VX^\perp] & X_1 : V_1 \\ K_1 : C_1 X_1^\perp & K : CX^\perp & 0 \end{bmatrix} - r \begin{bmatrix} X_1 : V_1 X_1^\perp & 0 \\ 0 & -[X : VX^\perp] \end{bmatrix} \right] \\
&= r \left[\begin{bmatrix} X_1 & V_1 X_1^\perp & 0 & 0 & X_1 & V_1 \\ 0 & 0 & -X & -VX^\perp & X_1 & V_1 \\ K_1 & C_1 X_1^\perp & K & CX^\perp & 0 & 0 \end{bmatrix} - r[X_1 : V_1] - r[X : V] \right] \\
&= r \left[\begin{bmatrix} X_1 & V_1 X_1^\perp & 0 & 0 & 0 & X_1 & V_1 \\ X_1 & V_1 X_1^\perp & X_1 & X_2 & VX^\perp & 0 & 0 \\ K_1 & C_1 X_1^\perp & K_1 & 0 & CX^\perp & 0 & 0 \end{bmatrix} - r[X_1 : V_1] - r[X : V] \right] \\
&= r \left[\begin{bmatrix} X_1 & V_1 X_1^\perp & 0 & 0 & 0 & X_1 & V_1 \\ 0 & V_1 X_1^\perp & X_1 & X_2 & VX^\perp & 0 & 0 \\ 0 & C_1 X_1^\perp & K_1 & 0 & CX^\perp & 0 & 0 \end{bmatrix} - r[X_1 : V_1] - r[X : V] \right] \\
&= r \left[\begin{bmatrix} X_1 & V_1 X_1^\perp & 0 & 0 & 0 & V_1 \\ 0 & V_1 X_1^\perp & X_1 & X_2 & VX^\perp & 0 \\ 0 & C_1 X_1^\perp & K_1 & 0 & CX^\perp & 0 \end{bmatrix} - r[X_1 : V_1] - r[X : V] \right] \\
&= r \left[\begin{bmatrix} X_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & V_1 \\ 0 & V_1 X_1^\perp & X_1 & X_2 & VX^\perp & 0 \\ 0 & C_1 X_1^\perp & K_1 & 0 & CX^\perp & 0 \end{bmatrix} - r[X_1 : V_1] - r[X : V] \right] \\
&= r \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & X_1 & V_1 \\ V_1 X_1^\perp & X_1 & X_2 & VX^\perp & 0 & 0 \\ C_1 X_1^\perp & K_1 & 0 & CX^\perp & 0 & 0 \end{bmatrix} - r[X_1 : V_1] - r[X : V] \right] \\
&= r \left[\begin{bmatrix} V_1 X_1^\perp & X_1 & X_2 & VX^\perp \\ C_1 X_1^\perp & K_1 & 0 & CX^\perp \end{bmatrix} + r[X_1 : V_1] - r[X_1 : V_1] - r[X : V] \right] \\
&= r \left[\begin{bmatrix} V_1 X_1^\perp & X_1 & X_2 & VX^\perp \\ C_1 X_1^\perp & K_1 & 0 & CX^\perp \end{bmatrix} - r[X : V] \right]. \tag{4.13}
\end{aligned}$$

(4.13) ifadesinin sağ tarafı sıfıra eşit olduğundan (b) elde edilir. Böylece (a)'nın (b)'ye denk olduğu görülür ve ispat tamamlanır. ■

Özel olarak Teorem 4.4'te $T_1 = 0$ ve $J = 0$ olarak ele alındığında $BLUE_{\mathcal{M}}(K_1\beta_1)$ ve $BLUE_{\mathcal{N}}(K_1\beta_1)$ 'e karşılık gelen sonucu aşağıda verilmiştir.

Sonuç 4.5. $K_1\beta_1$ vektörünün (3.1) ve (3.8) modelleri altında tahmin edilebilir olduğu kabul edilsin. Aşağıdaki durumlar birbirine denktir.

a. $BLUE_{\mathcal{M}}(K_1\beta_1) = BLUE_{\mathcal{N}}(K_1\beta_1)$ 1 olasılıkla sağlanır.

b.
$$r \begin{bmatrix} V_1 X_1^\perp & X_1 & X_2 & V X^\perp \\ 0 & K_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = r[X : V].$$

Bu bölümde verilecek son ana teoremin ispatı için aşağıdaki sonuca ihtiyaç vardır. Bu sonuç aşağıdaki teoremden ifade edilmiş ve ispatı detaylı olarak yapılmıştır.

Teorem 4.6. m , (3.8) modeli altında ön tahmin edilebilir olsun. $A \in \mathbb{R}^{s \times s}$ simetrik bir matris ve $D[m - BLUE_{\mathcal{M}}(y)]$ ifadesi (3.44) verildiği gibi ele alınsın. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

$$r(D[m - BLUE_{\mathcal{M}}(y)] - A) = r \begin{bmatrix} V_1 & C_1' & X_1 \\ C_1 & K_1' & 0 \\ X_1' & & \end{bmatrix} = r[X_1] + r[X_1, V_1]. \quad (4.14)$$

$$D[m - BLUE_{\mathcal{M}}(y)] = A \Leftrightarrow r \begin{bmatrix} V_1 & C_1' & X_1 \\ C_1 & K_1' & 0 \\ X_1' & & \end{bmatrix} = r[X_1] + r[X_1, V_1] \quad (4.15)$$

dir (Gan ve ark., 2017).

İspat. (3.44)'e göre $D[m - BLUE_{\mathcal{M}}(y)] - A$ ifadesi

$$\left(\begin{bmatrix} K_1 : C_1 X_1^\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 : V_1 X_1^\perp \end{bmatrix}^+ - \begin{bmatrix} \tilde{X}_1' & 0 \\ 0 & \tilde{X}_1' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{X}_1 \end{bmatrix}^+ - \tilde{T}_1 \right)' - A$$

ve bu ifadenin rankı $r(D[m - BLUR_{\tilde{X}_1, \tilde{X}_1'}] - A)$

$$r \left(\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 : C_1 X_1^\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 : V_1 X_1^\perp \end{bmatrix}^+ - \begin{bmatrix} \tilde{X}_1' & 0 \\ 0 & \tilde{X}_1' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{X}_1 \end{bmatrix}^+ - \tilde{T}_1 \\ A \end{bmatrix} \right) \quad (4.16)$$

olarak yazılır. Buradan $\Sigma = \Sigma \Sigma^+ \Sigma$ olduğundan (4.16) ifadesine Teorem 2.4.6 uygulanırsa

$$\begin{aligned} &= r \left[\begin{array}{cc} \Sigma & \Sigma \left(\begin{bmatrix} K_1 : C_1 X_1^\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 : V_1 X_1^\perp \end{bmatrix}^+ - \begin{bmatrix} \tilde{X}_1' & 0 \\ 0 & \tilde{X}_1' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{X}_1 \end{bmatrix}^+ - \tilde{T}_1 \right) \\ \left(\begin{bmatrix} K_1 : C_1 X_1^\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 : V_1 X_1^\perp \end{bmatrix}^+ - \begin{bmatrix} \tilde{X}_1' & 0 \\ 0 & \tilde{X}_1' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{X}_1 \end{bmatrix}^+ - \tilde{T}_1 \right) & A \end{array} \right] \\ &= r(\Sigma) \\ &= r \left(\begin{bmatrix} \Sigma \tilde{X}_1' & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} K_1 : C_1 X_1^\perp \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \begin{bmatrix} X_1 : V_1 X_1^\perp \end{bmatrix}^+ \\ \begin{bmatrix} X_1 : V_1 X_1^\perp \end{bmatrix}' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X}_1 \Sigma & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} K_1 : C_1 X_1^\perp \end{bmatrix}' \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} \Sigma & -\Sigma \tilde{X}_1' \\ -\tilde{X}_1 \Sigma & \tilde{T}_1 \end{bmatrix} \right) - r(\Sigma) \end{aligned} \quad (4.17)$$

elde edilir. Burada (4.17) ifadesine tekrar Teorem 2.4.6, Teorem 2.4.5 (c) uygulanırsa ve bazı elementer matris işlemleri yapılırsa aşağıdakiler elde edilir:

$$\begin{aligned} &r(D[m - BLUR_{\tilde{X}_1, \tilde{X}_1'}] - A) \\ &= r \left(\begin{bmatrix} 0 & -X_1 & -V_1 X_1^\perp & \tilde{X}_1' \\ -X_1' & 0 & 0 & 0 & K_1' \\ -X_1^\perp V_1 & 0 & 0 & 0 & X_1^\perp C' \\ \Sigma \tilde{X}_1' & \tilde{X}_1 \Sigma & \tilde{X}_1 \tilde{T}_1 & \tilde{X}_1 \tilde{X}_1' & \tilde{X}_1 \tilde{X}_1' \\ 0 & K_1 & C_1 X_1^\perp & -\tilde{X}_1 \tilde{X}_1' & \tilde{T}_1 \end{bmatrix} - r \left[\begin{bmatrix} 0 & \begin{bmatrix} X_1 : V_1 X_1^\perp \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \tilde{X}_1' & 0 \\ 0 & \tilde{X}_1' \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix} \right] - r(\Sigma) \right) \end{aligned}$$

$$= r \begin{bmatrix} 0 & -X_1 & -V_1 X_1^\perp & \tilde{\text{[redacted]}}' \\ -X_1' & 0 & 0 & 0 & K_1' \\ -X_1^\perp V_1 & 0 & 0 & 0 & X_1^\perp C_1' \\ \Sigma \tilde{\text{[redacted]}} & 0 & \Sigma & 0 \\ 0 & K_1 & C_1 X_1^\perp & -\tilde{\text{[redacted]}} \end{bmatrix} - r[X_1 : V_1 X_1^\perp] - r[X_1 : V_1 X_1^\perp] - r(\Sigma)$$

$$= r \begin{bmatrix} -\tilde{\text{[redacted]}}' \\ -X_1' & 0 & 0 & 0 & K_1' \\ -X_1^\perp V_1 & 0 & 0 & 0 & X_1^\perp C_1' \\ 0 & 0 & 0 & \Sigma & 0 \\ \tilde{\text{[redacted]}} \end{bmatrix} - 2r[X_1 : V_1 X_1^\perp] - r(\Sigma)$$

$$= r \begin{bmatrix} \tilde{\text{[redacted]}}' \\ -X_1' & 0 & 0 & 0 & K_1' \\ -X_1^\perp V_1 & 0 & 0 & 0 & X_1^\perp C_1' \\ 0 & 0 & 0 & \Sigma & 0 \\ \tilde{\text{[redacted]}} \end{bmatrix} - 2r[X_1 : V_1 X_1^\perp] - r(\Sigma)$$

$$= r \begin{bmatrix} \tilde{\text{[redacted]}}' & \blacksquare \\ X_1' & 0 & 0 & K_1' & 0 \\ X_1^\perp V_1 & 0 & 0 & X_1^\perp C_1' & 0 \\ \tilde{\text{[redacted]}} & \blacksquare \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Sigma \end{bmatrix} - 2r[X_1 : V_1] - r(\Sigma)$$

$$= r \begin{bmatrix} \tilde{\text{[redacted]}}' \\ X_1' & 0 & 0 & K_1' \\ X_1^\perp V_1 & 0 & 0 & X_1^\perp C_1' \\ \tilde{\text{[redacted]}} \end{bmatrix} - 2r[X_1 : V_1] - r(\Sigma) + r(\Sigma)$$

$$= r \begin{bmatrix} V_1 & X_1 & V_1 X_1^\perp & C_1' \\ X_1' & 0 & 0 & K_1' \\ X_1^\perp V_1 & 0 & 0 & X_1^\perp C_1' \\ C_1 & K_1 & C_1 X_1^\perp & \tilde{\text{[redacted]}} \end{bmatrix} - 2r[X_1 : V_1]$$

$$= r \begin{bmatrix} V_1 & X_1 & V_1 X_1^\perp & C_1' \\ X_1' & 0 & 0 & K_1' \\ 0 & 0 & X_1^\perp V_1 X_1^\perp & 0 \\ C_1 & K_1 & C_1 X_1^\perp & \tilde{\text{[redacted]}} \end{bmatrix} - 2r[X_1 : V_1]$$

$$\begin{aligned}
&= r \begin{bmatrix} V_1 & X_1 & C'_1 & 0 \\ X'_1 & 0 & K'_1 & 0 \\ C_1 & K_1 & \tilde{u} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X_1^\perp V_1 X_1^\perp \end{bmatrix} - 2r[X_1 : V_1] \\
&= r \begin{bmatrix} V_1 & X_1 & C'_1 \\ X'_1 & 0 & K'_1 \\ C_1 & K_1 & \tilde{u} \end{bmatrix} - 2r[X_1 : V_1] - r[X_1^\perp V_1 X_1^\perp] \\
&= r \begin{bmatrix} V_1 & X_1 & C'_1 \\ X'_1 & 0 & K'_1 \\ C_1 & K_1 & \tilde{u} \end{bmatrix} - r[X_1 : V_1] - r[X_1]. \tag{4.18}
\end{aligned}$$

Böylece son ifadede (4.14) matris eşitliği görülür. Ayrıca (4.18) ifadesinden (4.15) kolayca elde edilir. ■

Teorem 4.7. m vektörünün (3.1) ve (3.8) modelleri altında ön tahmin edilebilir olduğu kabul edilsin. $BLUP_M(m)$ ve $BLUP_N(m)$ sırasıyla (4.3) ve (4.4)'te verildiği gibi olsun. Aşağıdaki durumlar birbirine denktir.

$$a. \quad D[m - BLUP_M(m)] = D[m - BLUP_N(m)].$$

$$b. \quad r \begin{bmatrix} V & 0 & C' & X_1 & X_1 & X_2 \\ 0 & -V_1 & -C'_1 & -X_1 & 0 & 0 \\ C & -C_1 & 0 & 0 & K_1 & 0 \\ X' & -X'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X'_1 & 0 & K'_1 & 0 & 0 & 0 \\ X'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = r(X) + r[X : V] + r[X_1] + r[X_1 : V_1].$$

İspat. m vektörünün (3.1) ve (3.8) modelleri altında ön tahmin edilebilir olduğu kabul edilsin. $BLUP_M(m)$ ve $BLUP_N(m)$ sırasıyla (4.3) ve (4.4)'te verildiği gibi olsun. (4.14) ifadesine göre

$$\begin{aligned}
& r\left(D[m-BLUP_N(m)]-D[m-BLUP_M(m)]\right) \\
&= r \begin{bmatrix} V_1 & C_1' & X_1 \\ C_1 & \tilde{A} - BLUP_{\tilde{A}}(m) & K_1 \\ X_1' & K_1' & 0 \end{bmatrix} - r[X_1] - r[X_1, V_1] \quad (4.19)
\end{aligned}$$

yazılır. (4.19) matris eşitliğindeki $D[m-BLUP_M(m)]$ ifadesi yani (3.33) ifadesi yerine yazılır. Buna (4.14) uygulanırsa ve bazı elementer matris işlemleri yapılırsa aşağıdakiler elde edilir.

$$\begin{aligned}
& r \begin{bmatrix} V_1 & C_1' & X_1 \\ C_1 & \tilde{A} - BLUP_{\tilde{A}}(m) & K_1 \\ X_1' & K_1' & 0 \end{bmatrix} \\
&= r \begin{bmatrix} V_1 & C_1' & X_1 \\ C_1 & \tilde{A} - (C_1' : X_1) \begin{bmatrix} V_1 & C_1' & X_1 \\ X_1' & K_1' & 0 \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & K_1 \\ X_1' & K_1' & 0 \end{bmatrix} \\
&= r \left(\begin{bmatrix} V_1 & C_1' & X_1 \\ C_1 & \tilde{A} & K_1 \\ X_1' & K_1' & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} K : CX^\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X : VX^\perp \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right) \\
&= r \begin{bmatrix} V & [0 \ C' \ 0] & X \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A} & K_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} V_1 & C_1' & X_1 \\ X_1' & K_1' & 0 \end{bmatrix} \\ X' & [0 \ K' \ 0] & 0 \end{bmatrix} - r(X) - r[X : V]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= r \begin{bmatrix} V & 0 & C' & 0 & X_1 & X_2 \\ 0 & -V_1 & -C'_1 & -X_1 & 0 & 0 \\ C & -C_1 & 0 & -K_1 & K_1 & 0 \\ 0 & -X'_1 & -K'_1 & 0 & 0 & 0 \\ X'_1 & 0 & K'_1 & 0 & 0 & 0 \\ X'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - r(X) - r[X:V] \\
&= r \begin{bmatrix} V & 0 & C' & 0 & X_1 & X_2 \\ 0 & -V_1 & -C'_1 & -X_1 & 0 & 0 \\ C & -C_1 & 0 & -K_1 & K_1 & 0 \\ X' & -X'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X'_1 & 0 & K'_1 & 0 & 0 & 0 \\ X'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - r(X) - r[X:V] \\
&= r \begin{bmatrix} V & 0 & C' & X_1 & X_1 & X_2 \\ 0 & -V_1 & -C'_1 & -X_1 & 0 & 0 \\ C & -C_1 & 0 & 0 & K_1 & 0 \\ X' & -X'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X'_1 & 0 & K'_1 & 0 & 0 & 0 \\ X'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - r(X) - r[X:V]. \tag{4.20}
\end{aligned}$$

(4.20) ifadesi (4.19) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&r(D[m - BLUP_{\mathcal{N}}(m)] - D[m - BLUP_{\mathcal{M}}(m)]) \\
&= r \begin{bmatrix} V & 0 & C' & X_1 & X_1 & X_2 \\ 0 & -V_1 & -C'_1 & -X_1 & 0 & 0 \\ C & -C_1 & 0 & 0 & K_1 & 0 \\ X' & -X'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X'_1 & 0 & K'_1 & 0 & 0 & 0 \\ X'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - r(X) - r[X:V] - r[X_1] - r[X_1:V_1] \tag{4.21}
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.21) matris eşitliğinden sol taraf sıfıra eşit olduğunda (a) elde edilir. Böylece (a)'nın (b)'ye denk olduğu görülür ve ispat tamamlanır. ■

Özel olarak Teorem 4.7'de $T_1 = 0$ ve $J = 0$ olarak ele alındığında, bu durumda $BLUE_{\mathcal{M}}(K_1\beta_1)$ ve $BLUE_{\mathcal{N}}(K_1\beta_1)$ için aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.8. $K_1\beta_1$ vektörünün (3.1) ve (3.8) modelleri altında tahmin edilebilir olduğu kabul edilsin. Aşağıdaki durumlar birbirine denktir.

a. $D[K_1\beta_1 - BLUP(K_1\beta_1)] = D[K_1\beta_1 - BLUP(K_1\beta_1)]$.

b. $r \begin{bmatrix} V & 0 & 0 & X_1 & X_1 & X_2 \\ 0 & -V_1 & 0 & -X_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_1 & 0 \\ X' & -X'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X'_1 & 0 & K'_1 & 0 & 0 & 0 \\ X'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = r(X) + r[X:V] + r[X_1] + r[X_1:V_1].$

BÖLÜM 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada bir genel lineer karma model ve bu modelden bazı sabit ve rastgele etkilerin çıkarılmasıyla elde edilen alt model ele alınmıştır. Bu iki model altında ortak olan bilinmeyen sabit ve rastgele vektörlerin bir lineer kombinasyonunun en iyi lineer yansız ön tahmin edicisi (BLUP) incelenmiştir. Özellikle bu iki lineer karma model altında ortak olan bilinmeyen parametrelerin vektörlerinin BLUP'ları arasındaki ilişki karakterize edilerek BLUP'ların genel lineer karma model ve bu modelin alt modeli altındaki eşitliği incelenmiştir. Daha sonra bazı özel durumlarda ele alınmıştır.

Bölüm 3'te $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bilinen pozitif yarı tanımlı matris, $u_1 \in \mathbb{R}^{q \times 1}$ ve $u_2 \in \mathbb{R}^{r \times 1}$ olmak üzere $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ rasgele etkilerin gözlenemeyen vektörü ve $\varepsilon \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ rasgele hata vektörünü olmak üzere

$$E \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varepsilon \end{bmatrix} = 0 \text{ ve } D \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varepsilon \end{bmatrix} := \Sigma$$

beklenen değeri ve dağılım matrisine ilişkin varsayımları altında bir genel lineer karma model ve bu modelden bazı sabit ve rastgele etkilerin çıkarılmasıyla elde edilen bir alt model ele alınarak bu modeller altında tüm bilinmeyen parametrelerin bir genel fonksiyonun BLUP/BLUE matris denklemleri ve bu tahminlerin özellikleri ile ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Bölüm 4'te iki lineer karma model altında ortak olan bilinmeyen parametrelerin vektörlerinin BLUP'ları arasındaki ilişkiler karakterize edilerek BLUP'ların genel lineer karma model ve alt modeli altındaki eşitliği incelenmiştir. Bu eşitlikler elde

edilirken Gan ve ark. (2015; Tanım 1 ve Teorem 4)'ndan yararlanılmıştır. Buna göre ele alınan durumlar aşağıda ifade edilmiştir.

- a. $BLUP_M(m) = BLUP_N(m)$ eşitliğinin sağlanmasının gerek yeter koşulu m vektörü için elde edilen BLUP denklemlerinin ortak bir çözüme sahip olmasıdır.
- b. $BLUP_M(m) = BLUP_N(m)$ eşitliğinin 1 olasılıkla sağlanmasının gerek ve yeter koşulu $(L_1 - L_2)[X_1 : V_1] = 0$ olmasıdır. Burada L_1 ve L_2 , m vektörü için ele alınan modeller altında BLUP denklemlerinden elde edilen çözümlerdir.
- c. m vektörü için ele alınan modeller altında BLUP'ların kovaryas matrislerinin eşit olmasının gerek ve yeter koşulu $r(D[m - BLUP_N(m)] - D[m - BLUP_M(m)]) = 0$ olmasıdır.

Buradaki durumların her biri teoremler olarak ifade ve ispat edilmiştir. Ayrıca tüm durumlar için $T_1 = 0$ ve $J = 0$ olarak ele alınan özel durumlar ile ilgili sonuçlar verilmiştir.

Bu çalışmada ele alınan konu, katlı modeller altında ele alınarak BLUP'lar ve diğer tahmin ediciler için eşitlikler ile ilgili genel sonuçlar elde edilebilir. Ayrıca genel lineer karma modelin k tane alt modeli için ortak bilinmeyen parametrelerin BLUP'larını eşitlikleri incelenebilir.

KAYNAKLAR

- Bhatia, R., 2007. Positive definite matrices, Princeton series in applied mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ.
- Bhimasankaram, P., Jammalamadaka S.R., 1994. Updates of statistics in a general linear model: A statistical interpretation and applications. *Communication in Statistics-Simulation Computation*, 23, 789-801.
- Bagiella, E., Sloan, R.P., Heitjan, D.F., 2000. Mixed-Effects Models in Psychophysiology. *Psychophysiology*, 37, 13-20.
- Cooperstein, B., 2015. Advanced linear algebra. Chapman and Hall/CRC.
- Datta, B. N., 2010. Numerical linear algebra and applications. SIAM, Philadelphia.
- Eisenhart, C., 1947. The assumptions underlying the analysis of variance. *Biometrics*, 3, 1-21.
- Fay, R. E., ve Herriot, R. A., 1979. Estimates of income for small places: an application of James-Stein procedures to census data. *Journal of the American Statistical Association*, 74, 269-277.
- Gan, S., Sun Y., Tian Y., 2017. Equivalence of predictors under real and over-parameterized linear models. *Communications in Statistics, Theory and Methods*, 11, 5368-5383.
- Harville, D. A., 1976. Extension of the Gauss-Markov theorem to include the estimation of random effects. *The Annals of Statistics*, 4, 384-395.
- Harville, D., 1979. Some Useful Representations for Constrained Mixed-Model Estimation. *Journal of the American Statistical Association*, 74, 200-206.
- Harville, D. A. 2018. Linear models and the relevant distributions and matrix algebra: a unified approach. Chapman and Hall/CRC.
- Haslett, S.J., Puntanen, S., 2010. Effect of adding regressors on the equality of the BLUEs under two linear models. *Journal of Statistical Planning Inference*, 140, 104-110.
- Haslett S.J., Puntanen, S. 2011. On the equality of the BLUPs under two linear mixed models. *Metrika*, 74, 381-395.
- Henderson, C.R., 1950. Estimation of genetic parameters, *Annals of Mathematical Statistics*, 21, 309-310.
- Henderson, C.R., Kempthorne, O., Searle, S.R., von Krosigk, C.N., 1959. Estimation of environmental and genetic trends from records subject to culling. *Biometrics*, 15, 192-218.

- Henderson, C.R., 1963. Selection index and expected genetic advance, *Statistical Genetics and Plant Breeding*. NAS-NRC, 982, 141-163.
- Henderson, C.R., 1977. Best linear unbiased prediction of breeding values not in the model for records, *Journal of Dairy Science*, 60, 783-787.
- Henderson, C. R. 1984. *Applications of linear models in animal breeding*. University of Guelph Press, Guelph, Ontario, Canada
- Hogben, L., 2006. *Handbook of linear algebra*. Chapman and Hall/CRC
- Jammalamadaka, S.R., Sengupta, D., 1999. Changes in the general linear model a unified approach. *Linear Algebra and Its Applications*. 289, 225-242.
- Jammalamadaka, S.R., Sengupta, D., 2007. Inclusion and exclusion of data or parameters in the general linear model. *Statistics and Probability Letters*, 77, 1235-1247.
- Laird, N. M., Ware, J. H., 1982. Random-effects models for longitudinal data. *Biometrics*, 38, 963-974.
- Lu, C., Gan, S., Tian, Y., 2015. Some remarks on general linear model with new regressors. *Statistics and Probability Letters*, 97, 16-24.
- Marsaglia, G., Styan, G. P. H., 1974. Equalities and inequalities for ranks of matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, 2, 269-292.
- Meyer, C. D., 2000. *Matrix analysis and applied linear algebra*. SIAM, Philadelphia.
- Özalp, N., 2006. *Matematiksel Modelleme*. Gazi Kitabevi Yayınları.
- Öztürk, F., 2012. *Olasılık ve İstatistiğe Giriş I*. Gazi Kitabevi Yayınları.
- Penrose, R., 1955. A generalized inverse for matrices. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 51, 406-413.
- Pinheiro, J. C., Bates, D. M., 2000. *Mixed-effects models in S and S-plus*. Springer Science and Business Media.
- Puntanen, S., Styan, G. P. H., Isotalo, J., 2011. *Matrix tricks for linear statistical models*. Springer Verlag Herlin Heidelberg.
- Rao, C. R., 1973. Representations of best linear unbiased estimators in the Gauss-Markoff model with a singular dispersion matrix. *Journal of Multivariate Analysis*, 3 276-292.
- Rao, S.R., Poduri, S., 1997. *Variance Components Estimation: Mixed models, methodologies and applications*. Chapman and Hall/CRC.
- Seber, G. A. F., 2008. *A Matrix Handbook for Statisticians*. John Wiley & Sons.
- Sengupta, D., Jammalamadaka, S.R., 2003. *Linear models an intergated approach*. World Scientific.
- Shock, N. W., Greulich, R. C., Andres, R., Arenberg, D., Costa, P. T., JR, Lakatta, E.G. and Tobin, J. D., 1984. *Normal human aging. The baltimore longitudinal study of aging*.

- Tian, Y., 2010. Equalities and inequalities for inertias of Hermitian matrices with applications. *Linear Algebra and Its Applications*, 433, 263-296.
- Tian, Y., 2012. Solving optimization problems on ranks and inertias of some constrained nonlinear matrix functions via an algebraic linearization method. *Nonlinear Analysis*, 75, 717-734.
- Tian, Y., 2015. A new derivation of BLUPs under random-effects model. *Metrika*, 78, 905-918.
- Tian, Y., Jiang B., 2016. Matrix rank/inertia formulas for least-squares solutions with statistical applications. *Special Matrices*, 4, 130-140.
- Venit, S., Bishop, W. 1985. *Elementary linear algebra*, PWS publishers. Massachusetts.
- Verbeke, G., Molenberghs, G., 2000. *Linear mixed models for longitudinal data*. Springer, New York.
- West, B.T., Welch, K.B., Galecki, A.T., 2007. *Linear mixed models: a practical guide using statistical software*. Chapman and Hall/ CRC.
- Wu, L., 2010. *Mixed effects models for complex data*. Chapman and Hall/ CRC.
- Zuur, A., Leno, E. N., Walker, N., Saveliev, A. A., Smith, G. M., 2009. *Mixed effects models and extensions in ecology with R*. Springer Science and Business Media.

ÖZGEÇMİŞ

Fatma KARADUMAN 7 Mart 1992 tarihinde Van'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini 2012 yılında tamamladı. Aynı yıl Kocaeli Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümünde lisans öğrenimine başladı ve 2017 yılında bu bölümden üçüncülükle mezun oldu. Aynı yıl Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Uygulamalı Matematik Anabilim Dalında tezli yüksek lisans programına başladı ve halen aynı üniversitede yüksek lisans öğrenimine devam etmektedir.