

T.C.  
ADİYAMAN ÜNİVERSİTESİ  
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENELLEŞMİŞ FONKSİYON KATSAYILI “ÇEKİLİ” STURM-  
LIOUVILLE PROBLEMİNİN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİNİN  
İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mehmet Burak TANRIVEREN

DANIŞMAN  
Prof. Dr. Manaf MANAFLI

ADİYAMAN, 2024

## ÖZET

### GENELLEŞMİŞ FONKSİYON KATSAYILI “ÇEKİLİ” STURM-LIOUVILLE PROBLEMİNİN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİNİN İNCELENMESİ

**Mehmet Burak TANRIVEREN**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Adıyaman Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Temmuz/2024, Sayfa:37**

**Danışman: Prof. Dr. Manaf MANAFLI**

Bu çalışmanın birinci kısmında, diferansiyel operatörler ve Sturm-Liouville operatörü ile ilgili bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde, diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde sık kullanılan temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde Sturm-Liouville operatörü için sınır şartları ve asimptotik formüller için genel bilgiler verilmiştir. Son olarak ters problemlerin delta etkileşimli ağırlıklı Sturm-Liouville operatörü incelenmiştir.

**Anahtar Sözcükler:** Sturm-Liouville operatörü; Çekili Sturm-Liouville problemi; Spektral problemler; Özdeğer; Özfonksiyon.

## ABSTRACT

### INVESTIGATION OF THE SPECTRAL PROPERTIES OF THE “WEIGHTED” STURM-LIOUVILLE PROBLEM WITH GENERALIZED FUNCTION COEFFICIENT

**Mehmet Burak TANRIVEREN**

**Department of Mathematics**

**Adiyaman University, Graduate Education Institute, July/2024, Page:37**

**Supervisor: Prof. Dr. Manaf MANAFLI**

In the first part of this study, information about differential operators, Sturm-Liouville operator is given. In the second chapter, the basic definitions and theorems that are frequently used in the spectral theory of differential operators are given. In the third chapter, general information about the boundary conditions and asymptotic formulas for the Sturm-Liouville operator is given. Finally, weighted Sturm-Liouville operators with delta communication for inverse problems are examined.

**Keywords:** Sturm-Liouville operator; Weighted Sturm-Liouville problem; Spectral problems; Eigenvalue; Eigenfunction.

## TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmamın her aşamasında, bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyen, çalışmamda bana her şekilde destek olan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Manaf MANAFLI'ya ve her daim yanımda olan sevgili aileme en içten duygularıyla teşekkür ederim.

Mehmet Burak TANRIVEREN



19/07/2024

## ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Adıyaman Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

.....  
Mehmet Burak TANRIVEREN

# İÇİNDEKİLER

|                                                                                       | Sayfa |
|---------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| BAŞLIK SAYFASI.....                                                                   | i     |
| JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI.....                                                            | ii    |
| ÖZET.....                                                                             | iii   |
| ABSTRACT.....                                                                         | iv    |
| TEŞEKKÜR.....                                                                         | v     |
| ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ.....                                      | vi    |
| İÇİNDEKİLER.....                                                                      | vii   |
| SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....                                                   | viii  |
| 1. GİRİŞ.....                                                                         | 1     |
| 2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....                                                             | 2     |
| 3. TEMEL KAVRAMLAR.....                                                               | 6     |
| 4. STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ.....                                                     | 10    |
| 4.1 Materyal ve Yöntem.....                                                           | 10    |
| 4.2 Sturm-Liouville Operatörü İçin Genel Bilgiler.....                                | 10    |
| 4.3 Özdeğer ve Özfonksiyonlar için Asimptotik Formüller.....                          | 12    |
| 5. TERS PROBLEMLERİN DELTA ETKİLEŞİMLİ “AĞIRLIKLIL”<br>STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ..... | 24    |
| 5.1 Ters Problemin Formülasyonu. Tekli Teoremi.....                                   | 25    |
| 6. SONUÇLAR.....                                                                      | 32    |
| KAYNAKÇA .....                                                                        | 33    |
| ÖZGEÇMİŞ                                                                              |       |

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

|                |                                                                       |
|----------------|-----------------------------------------------------------------------|
| $\alpha$       | : Normlaştırıcı Sayılar                                               |
| $\Gamma$       | : Gamma fonksiyonu                                                    |
| $C[a,b]$       | : $[a,b]$ aralığında sürekli ve reel değerli tüm fonksiyonların uzayı |
| $H$            | : Hilbert Uzayı                                                       |
| $L$            | : Lineer Operatör                                                     |
| $L^*$          | : $L$ operatörünün eşleniği                                           |
| $L^2[a,b]$     | : Karesi integrallenebilen fonksiyonlar uzayı                         |
| $\mathbb{N}$   | : Doğal sayılar kümesi                                                |
| $O$            | : Sınırlı değerler için asimptotik davranışlar                        |
| $o$            | : Sonsuz küçük değerler için asimptotik davranışlar                   |
| $\mathbb{R}$   | : Reel sayılar kümesi                                                 |
| $W(f,g)$       | : Wronskian Determinantı                                              |
| $y(x,\lambda)$ | : Özfonksiyon                                                         |

## 1. GİRİŞ

Operatörlerin spektral teorisi matematik ve mekanikte oldukça yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Lineer operatörlerde spektral teorelin esas kaynağı olarak birbirine benzeyen lineer cebir ile titreşim teorisinin problemleri olarak bilinmektedir (telin titreşimi, zar titreşimi, vs.). Katsayıları sürekli fonksiyonlar ve tanım bölgesi sonlu olarak tanımlanan ikinci dereceden düzenli diferansiyel operatörlerde spektral teori günümüzde Sturm-Liouville teorisi olarak bilinir.

Bu tez çalışmasında Sturm-Liouville operatörünün özdeğer ve özfonksiyonları ile normlaştırıcı sayıları için asimptotik formüller araştırılmıştır. Daha sonra ters problemlerde delta etkileşimli “ağırlıklı” Sturm-Liouville operatörü incelenmiştir.



## 2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

İntegral denklemler teorisinde yaptığı çalışmalarda, lineer cebir problemleri ile titreşim teorisi problemleri arasındaki benzerliklerin farkına varan ve bundan faydalanan ilk olarak D. Hilbert olmuştur. Bunların sonucu olarak  $l_2$  uzayı ve daha sonra ise genel Hilbert uzayı üzerinde çalışılmıştır. Matematikçiler  $l_2$  ve  $H$  soyut Hilbert uzayını tanımladıktan sonra lineer self adjoint operatörler terosindeki gelişmeler hızlanmıştır ve 19. ile 20. yüzyıllarda bu teori çok önemli bir seviyeye ulaşarak özdeğerler, özfonksiyonlar, spectral fonksiyon, normlaştırıcı sayılar, vs. spektral veriler tanımlanmış ve farklı yöntemlerle bunlar için asimptotik formüller bulunmuştur. Spektral teoride önemli bir yere sahip olan spectral açılım teoremi ispatlanarak belirli diferansiyel ve fark operatörleri için spektral açılımın uygun denklem çözümleri vasıtasıyla ifade edildiği araştırılmıştır [1].

Daha sonraları regüler ve singüler diferansiyel operatör tanımlanmış ve bunların spektral teorileri üzerinde çalışılmıştır. Tanım bölgesi sonlu ve katsayıları sürekli fonksiyonlar olan diferansiyel operatörlere regüler operatörler, tanım bölgesi sonsuz veya katsayıları kısmen toplanabilir olmayan diferansiyel operatörlere ise singüler operatörler denir. İkinci mertebeden regüler operatörlerin spektral teorisi Strum-Liouville teorisi olarak bilinir. G.D. Birkoff tarafından sonlu aralıkta sınır şartları verilen ikinci mertebeden diferansiyel operatörler için keyfi mertebeden adi diferansiyel operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı incelenmiş ve daha sonra birinci mertebeden iki denklemin regüler sistemleri incelenmiştir [2]. Singüler operatörler için spektral teori ilk olarak H. Weyl tarafından incelenmiştir. Daha sonra Rietsz, Neumann ve diğer matematikçiler tarafından simetrik ve self-adjoint operatörlerin genel spektral teorisi oluşturulmuştur. Sonraki yıllarda J. Neuman tarafından simetrik operatörlerin tüm self-adjoint genişlemelerinin bulunması problemi yapılmıştır [3]. Titchmarsh, 1958'de ikinci mertebeden singüler operatörlerin spektral teorisi için yeni bir yaklaşım ortaya koymuş ve doğru ekseninde tanımlı azalan (artan) potansiyelli olan

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

Strum-Liouville operatörleri (son yıllarda bu operatöre sık sık bir boyutlu  $q(x)$  potansiyelli Schrödinger denklemi de denir) için özdeğerlerin dağılımı formülünü

bulmuştur. 1949 yılında Levitan tarafından diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde önemli çalışmalar yapılmıştır. R.Courant, M.S Birman, T.Carleman, W.P. Maslov, M.Z Salamyak, M.V. Keldish gibi önemli matematikçiler tarafından farklı singüler durumlar için diferansiyel operatörlerin spektral teorisi, özdeğerler ile özfonksiyonların asimptotikliğine ve özfonksiyonların tamlığına ilişkin konular geliştirilmiştir. Sturm-Liouville denkleminin incelenme sürecinde kullanılan yöntemlerden biri de ters problemlerin çözümü konusunda önemli yere sahip olan ve Delsart ve Levitan tarafından geliştirilen dönüşüm operatörü kavramıdır.

Strum-Liouville denklemini inceleme sürecinde özellikle 20. yüzyılın ikinci yarısında kullanılan yöntemler sürekli artmıştır. 1967’de bir grup Amerikan bilim insanları Gardner, Greene, Kruskal ve Miura tarafından bulunan bazı kısmi türevli nonlinear evalusyon denklemleri ile Strum-Liouville operatörlerinin spektral teorisi arasındaki ilişki önemli bir yere sahiptir.

Benzer şekilde Dirac operatörünün spektral teorisine ait bazı önemli sonuçları ele alalım. Dirac operatörünün spektral analizi ile ilgili ilk çalışmalar fizikçiler F. Prats, J. Toll, H. E. Moses tarafından yapılmıştır. Dirac operatörü için  $(0, \infty)$  aralığında spektral fonksiyona göre ters problem M. G. Gasimov ve B.M. Levitan tarafından çözülmüştür [4]. Bu çalışmada  $k(x)$  ve  $t(x)$   $(0, \infty)$  aralığının her sonlu alt aralığında sürekli, reel fonksiyonlar ve

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B(x) = \begin{pmatrix} k(x) & k(x) \\ t(x) & -k(x) \end{pmatrix} \quad , \quad y(x, \lambda) = \begin{pmatrix} y_1(x, \lambda) \\ y_2(x, \lambda) \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$A \frac{dy}{dx} + B(x)y = \lambda y \quad , \quad 0 < x < \infty \quad (1.1)$$

$$y_1(0) = 0 \quad , \quad y_2(\pi) + H_1 y_1(\pi) = 0 \quad (1.2)$$

$$y_1(0) = 0 \quad , \quad y_2(\pi) + H_1 y_1(\pi) = 0 \quad , \quad H \neq H_1 \quad (1.3)$$

Sınır problemi ele alınmıştır. Bu taktirde

$$\varphi(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x, \lambda) \\ \varphi_2(x, \lambda) \end{pmatrix}$$

(1.1) denkleminin

$$\varphi_1(0, \lambda) = 0 \quad , \quad \varphi_2(0, \lambda) = -1 \quad (1.4)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümü, monoton artan  $k(\lambda)$  ( $-\infty < x < \infty$ ) (1.1) , (1.2) probleminin spektral fonksiyonu ve her  $g(x) \in L^2(0, \infty)$  fonksiyonu için

$$F_n(\lambda) = \int_0^n g^T(x, \lambda_n) \varphi(x, \lambda_n) dx$$

olacak biçimde

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{F(\lambda) - F_n(\lambda)\}^2 dp(\lambda) = 0$$

olmak üzere

$$\int_0^{\infty} g^T(x) g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(x) dp(\lambda) \quad (1.5)$$

dır.

Parseval eşitliğinin sağlandığı gösterilmiştir. Dirac operatörü için özvektör fonksiyonlarının tamlığı, Cauchy probleminin çözümü self-adjointlik durumunda spektrumun diskretliği ve sürekliliği, regülerize izin hesaplanması, periyodik ve antiperyodik problemler, açılım teoremleri, özvektör fonksiyonlarının asimptotiği,  $2n$  mertebeli Dirac denklemler sistemi için ters saçılma problemi I. S. Sargsjan çalışmalarında incelenmiştir [4]. Daha sonraki yıllarda H. Hochstadt, B. M. Levitan ve E.S. Penahov kısmen çakışmayan iki spektruma göre farklı yöntemlerle Sturm-Liouville ve Dirac operatörleri için ters problemi incelemişlerdir. Singüler Sturm-Liouville operatörler ailesinden olan ve sıfır noktasında

$$\frac{l(l+1)^2}{x^2}$$

şeklinde tekilliğe sahip operatörler için spektral fonksiyona göre ters problem Stashevskaya (1953) tarafından çözülmüştür [5]. Volk (1953) ise bu tür operatörler için Riemann yöntemiyle dönüşüm operatörünün varlığını incelemiştir [6]. Daha sonraları ise iki spektruma göre ters problem Gasymov ve kısmen çakışmayan iki spektruma göre ters problemin çeşitli sorunları Panakhov tarafından incelenmiştir [7]. Ayrıca, Jeofizikte birçok uygulamaları olan Bessel operatörleri için kuantum saçılma teorisinin ters problemleri Chadán, Sabatier, Korop, Sohin, Carlson vs. matematikçiler tarafından ele alınmış ve çözülmüştür [8,9,10,11].

### 3. TEMEL KAVRAMLAR

**Tanım 3.1 (Hilbert Uzayı)**  $x, y, z$  elemanlarından oluşan herhangi bir cümle  $H$  olsun ve aşağıdaki aksiyomlar sağlasın:

1.  $H$  lineer complex uzay
2.  $H$ 'nin her  $x, y$  ikili elamanına karşılık gelen  $\langle x, y \rangle$  complex sayıları için

a)  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

b)  $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$  ( $x_1, x_2 \in H$ )

c)  $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$  (Her  $\lambda$  complex sayısı için)

d)  $\langle x, x \rangle \geq 0$  ;  $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$  ; ( $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ )

3.  $d(x, y) = \|x - y\|$  metriği anlamında  $H$  tamdır.

4. Her  $n$  doğal sayısı için  $H$ 'de  $n$  sayıda lineer bağımsız eleman vardır. Yani  $H$  sonsuz boyutludur.

Bu taktirde 1-4 şartlarını sağlayan uzaya Soyut Hilbert uzayı, 1-3 şartlarını sağlayan uzaya ise Üniter Hilbert uzayı denir [12].

**Tanım 3.2 (Operatör)** Tanım ve değer cümlesi vektörlerden oluşan dönüşüme operatör denir [13].

**Tanım 3.3 (Lineer Operatör)**  $E_x$  ve  $E_y$  herhangi iki vektör uzayı olsun.  $A: E_x \rightarrow E_y$  operator dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa  $A$  lineer operatörüne lineerdir denir.

i)  $x_1, x_2 \in E_x$  ,  $A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2) = Ax_1 + Ax_2$

ii)  $A(\lambda x) = \lambda Ax$  ,  $\lambda \in \mathbb{R}$

**Tanım 3.4 (Süreklili Operatör)**  $A: S(x, \delta) \rightarrow A(A_x, \epsilon)$  olsun.  $|x - x_0| \leq \delta$  için  $|Ax - Ax_0| < \epsilon$  ise  $A$  operatörü süreklidir denir [13].

**Tanım 3.5**  $X$  ve  $Y$  birer normlu uzay ve  $D(L) \subset X$  bir  $L$  operatörünün tanım cümlesi olsun. Eğer  $\|Lx - y\| \leq c\|x\|$  olacak şekilde bir  $c$  reel sayısı varsa  $L$  operatörüne sınırlıdır denir [14].

**Tanım 3.6. (Adjoint Operatör)**  $H_1$  ve  $H_2$  iki Hilbert uzay ve  $A: H_1 \rightarrow H_2$  sınırlı lineer bir operatör olsun. Eğer  $L^*: H_1 \rightarrow H_2$  operatörü  $\langle Lx, y \rangle = \langle x, L^*y \rangle$  şartını sağlıyorsa  $L^*$

operatörüne  $L$  operatörünün adjointi denir. Eğer  $L = L^*$  ise  $L$  operatörüne self adjoint operatör denir [14].

**Tanım 3.7**  $D(L)$  tanım bölgesinde sınırlı lineer bir operatör olmak üzere  $Lx = \lambda y$  eşitliğini sağlayan  $y(x) \neq 0$  fonksiyonu mevcut ise  $\lambda$  sayısına  $L$  operatörünün özdeğeri,  $y$  fonksiyonuna ise bir özfonksiyonu denir [15].

**Tanım 3.8**  $\{\lambda_n\}$  dizisi  $L$  operatörünün özdeğerleri ve  $y(x, \lambda_n)$  'ler bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar olacak şekilde

$$\alpha_n = \int_a^b y^2(x, \lambda_n) dx$$

sayısına  $L$  operatörünün normlaştırıcı sayıları denir [15].

**Tanım 3.9 (Dönüşüm Operatörü)**  $E$  lineer topolojik uzay,  $A$  ve  $B$  operatörleri  $A: E \rightarrow E$ ,  $B: E \rightarrow E$  şeklinde tanımlı iki lineer operator olsun.  $E_1$  ve  $E_2$  ise  $E$  lineer uzayının kapalı alt uzayları olmak üzere  $E$  uzayının tamamında tanımlı  $E_1$  ve  $E_2$  'ye dönüşüm yapan ve lineer terse sahip  $X$  operatörü,

- i)  $X$  ve  $X^{-1}$  operatörleri  $E$  uzayında süreklidir.
- ii)  $AX = XB$  operator denklemi sağlanıyor.

şartları sağlıyorsa  $A$  ve  $B$  operatörleri çifti için dönüşüm operatörü denir [15].

**Lemma 3.10**  $B$  operatörünün özdeğerine karşılık gelen özvektör  $\varphi_\lambda \in E_1$  olsun. Dolayısıyla  $B\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda$  'dir. Bu taktirde  $A$  operatörünün  $\lambda$  özdeğerine karşılık gelen özvektörü  $\psi_\lambda = X\varphi_\lambda$  dır. Burada  $X$  dönüşüm operatörüdür [15].

**İspat:**  $AX = XB$  olduğundan  $A\psi_\lambda = AX\varphi_\lambda = XB\varphi_\lambda = \lambda X\varphi_\lambda = \lambda\psi_\lambda$  olur.

**Lemma 3.11**  $A, B, C$  lineer operatörleri uzayında tanımlı ve  $E_1, E_2, E_3$  ise  $E$  'nin kapalı alt uzayları olsun.  $X_{A,B}: E_2 \rightarrow E_3$ ,  $X_{B,C}: E_1 \rightarrow E_2$  olsun. Bu durumda  $X_{A,C}: E_1 \rightarrow E_3$  operatörü  $X_{A,C} = X_{A,B} \cdot X_{B,C}$  şeklindedir [16].

**İspat:** Dönüşüm operatörü tanımından  $AX_{A,B} = X_{A,B}.B$ ,  $BX_{B,C} = X_{B,C}.C$  şeklindedir. İkinci denklemden  $B = [X_{B,C}C(X_{B,C}^{-1})]$  elde edilir. Son eşitliği ilk denklemde yerine yazarsak,  $AX_{A,B} = X_{A,B}X_{B,C}CX_{B,C}^{-1}$  veya  $AX_{A,B}X_{B,C} = X_{A,B}X_{B,C}C$  olur.

**Tanım 3.12**  $f(z)$  kompleks fonksiyonu düzlemin keyfi bir  $z_0$  noktasının  $\delta$  komşuluğunun tüm noktalarında diferensiyellenebiliyor ise  $f(z)$  fonksiyonuna  $z_0$  noktasında analitiktir denir [16].

**Tanım 3.13**  $f(z)$  kompleks fonksiyonu düzlemin tüm noktalarında analitik ise  $f(z)$  fonksiyonuna tam fonksiyon denir.

**Tanım 3.14** Bir  $f(z)$  fonksiyonuna karşılık gelen  $A$  ve  $\alpha$  pozitif sayıları bulunabiliyorsa, öyle ki  $r = |z| \rightarrow \infty$  iken  $|f(z)| < Ae^{r^\alpha}$  ise  $f(z)$  fonksiyonu sonlu mertebeden bir tam fonksiyondur,  $\alpha$  sayılarının en küçüğü olan  $r$  'ye ise tam fonksiyon mertebesi denir [17].

**Tanım 3.15**  $x \rightarrow 0$  (veya  $x \rightarrow \infty$ ) iken eğer  $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0$  ise  $f(x) = o(g(x))$ ,  $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|$  sınırlı ise  $f(x) = O(g(x))$  olarak gösterilir .

**Tanım 3.16**  $a \leq t \leq b$  olmak üzere  $L^2[a, b]$  uzayı

$$L^2[a, b] = \left\{ x(t) : \int_a^b [x(t)]^2 dt < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzayda iç çarpım

$$\langle f(x), h(x) \rangle = \int_a^b f(x) \cdot \overline{h(x)} dx$$

şeklinde tanımlanır (reel durumda  $h(x) = \overline{h(x)}$  olur).

**Tanım 3.17 (Gamma Fonksiyonu)**  $n > 0$  olmak üzere

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona gamma fonksiyonu denir [17].

**Teorem 3.18 (Rouche Teoremi)** Eğer  $f(x)$  ve  $g(x)$  fonksiyonlar kapalı bir  $C$  eğrisi üzerinde içinde analitik ve  $|g(x)| < f(x)$  ise  $g(x) + f(x)$  ile  $f(x)$  fonksiyonları  $C$  üzerinde aynı sayıda köke sahiptir [18].

**Teorem 3.19 (Green Teoremi)**  $B$  ;  $xoy$  düzleminde basit bir bölge, de bu bölgeyi çevreleyen ve saat yönünün tersine yönlendirilmiş bir eğri olsun. Bu durumda

$$\int_C (P(x, y) + Q(x, y)) dy = \iint_B \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

olur [18].

**Tanım 3.20**  $L - \lambda I$  operatörünün sınırlı  $(L - \lambda I)^{-1}$  tersinin mevcut olmadığı  $\lambda$  'lar cümlesine  $L$  operatörünün spektrumu denir [19].

**Tanım 3.17** Herhangi  $\lambda$  için  $L - \lambda I$  operatörü terse sahipse  $R_\lambda = (L - \lambda I)^{-1}$  operatörüne  $Lx - \lambda x = y$  veya  $(L - \lambda)x = y$  denkleminin rezolvent operatörü denir [2].

**Tanım 3.18** Analitik  $f(z)$  fonksiyonunun ayırık tekil noktası  $z_0$  olsun. Eğer  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$  ise  $z_0$  'a  $f(z)$  'nin kutup'u denir.

**Tanım 3.19**  $r > R$  için

$$M(r) < \exp(r^\mu) \quad (3.1)$$

olmak üzere  $\mu > 0$  varsa  $f(z)$  tam fonksiyonu sonlu mertebelidir ve (3.1) eşitsizliğini sağlayan  $\mu$  sayılarının cümlesinin

$$\rho = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r)}{\ln r},$$

formülü ile tanımlı  $\rho$  alt sınırına  $f(z)$  'nin mertebesi denir. [20]

**Tanım 3.20**  $\sigma = 0$ ,  $0 < \sigma < \infty$ ,  $\sigma = \infty$  olacak biçimde  $\rho$  ( $0 < \rho < \infty$ ) mertebeli  $f(z)$  tam fonksiyonu sırası ile minimal, normal, maksimal tipe sahiptir denir.



## 4. STRUM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ

### 4.1. Materyal ve Yöntem

Bu bölümde sonlu aralıktaki Sturm Liouville operatörleri için spektral teoriye giriş yapılacaktır. Bölüm 4.2 de sınır şartları incelenecektir. Daha sonra bölüm 4.3 de Sturm-Liouville operatörünün sınır değer problemleri için özfonksiyonlar, özdeğerler ile asimptotik formüller araştırılacak ve normalatırılmış katsayılar incelenecektir.

### 4.2. Sturm-Liouville Operatörü İçin Genel Bilgiler

$Ly = \lambda y$  eşitliğini sağlayan  $y$  fonksiyonuna  $L$  operatörünün özfonksiyonu,  $\lambda$  'ya ise özdeğeri denir.  $L$  herhangi elemanlar cümlesinde tanımlı lineer bir operatör olsun.  $y \neq 0$  olmak üzere operatörlerin spektral teorisinde sık sık göz önüne alınan Sturm- Liouville operatörü

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $q(x)$  ,  $[a,b]$  aralığında sürekli reel değerli fonksiyondur.  $L$  operatörü için sınır şartları genellikle aşağıdaki gibi tanımlanır.

**1. tür sınır şartı:** Bunlara ayrık sınır şartları denir ve

$$y(a) \cos \alpha + y'(a) \sin \alpha = 0$$

$$y(b) \cos \beta + y'(b) \sin \beta = 0$$

şekkinde tanımlanır.

**2. tür sınır şartı:** Bunlar periyodik ve antiperiyodik sınır şartları olarak bilinir ve sırası ile

$$y(a) = -y(b)$$

$$y'(a) = y'(b)$$

**3. tür sınır şartı:** Bunlar uçları bağlı sınır şartları olarak bilinir ve

$$y(a) = y(b) = 0$$

veya

$$y'(a) = y'(b) = 0$$

şeklinde tanımlanır.

$$Ly = -y'' + q(x)y = \lambda y \quad (4.1)$$

$$y(a) \cos \alpha + y'(a) \sin \alpha = 0, \quad y(b) \cos \beta + y'(b) \sin \beta = 0 \quad (4.2)$$

şeklinde tanımlanan (4.1) - (4.2) sınır değer problemi literatürde Sturm-Liouville problemi olarak bilinir [21].

**Lemma 4.2.1**  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  farklı özdeğerlerine karşılık gelen  $y(x, \lambda_1)$  ve  $y(x, \lambda_2)$  özfonksiyonları ortogonaldır. Yani;

$$\int_0^\pi y(x, \lambda_1) y(x, \lambda_2) dx = 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad (4.3)$$

dır.

**İspat:**  $f(x)$  ve  $g(x)$  sürekli ve iki kez diferansiyellenebilen fonksiyonlar olsunlar.

$$Lf = f(x)$$

alalım.

$$W_x\{f, g\} = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}$$

olmak üzere bu ifadeye iki kez kısmi integral uygulanırsa

$$\int_0^{\pi} Lfg(x)dx = W_{\pi}\{f, g\} - W_0\{f, g\} + \int_0^{\pi} f(x)Lgdx \quad (4.4)$$

denklemini elde edilir.  $f(x) = y(x, \lambda_1)$  ve  $g(x) = y(x, \lambda_2)$  olsun. (4.2) sınır şartlarından

$$W_0\{f, g\} = W_{\pi}\{f, g\} = 0$$

olduğu kolaylıkla görülür. Bundan dolayı (4.4) denkleminde

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_0^{\pi} y(x, \lambda_1)y(x, \lambda_2)dx = 0$$

ve dolayısıyla  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  olduğundan Lemma (4.2.1) ispatlanmış olur.

**Lemma 4.2.2** (4.1) - (4.2) sınır değer probleminin özdeğerleri reeldir.

**İspat:**  $\lambda_1 = u + iv$  kompleks bir özdeğer olsun.  $q(x)$  reel değerli bir fonksiyon  $\alpha$  ve  $\beta$  sayıları reel olduğundan dolayı  $\overline{y(x, \lambda_1)}$  özfonksiyonu  $\lambda_1 = \overline{\lambda_1} = u + iv$  sayısına sahip bir özdeğer olur. Bu taktirde Lemma (4.2.1)'den

$$\int_0^{\pi} |y(x, \lambda_1)|' dx = 0$$

elde ederiz ki buradan da  $y(x, \lambda_1) = 0$  olduğu bulunur [4].

### 4.3. Özdeğer ve Özfonksiyonlar İçin Asimptotik Formüller

1.  $q(x)$ ,  $[0, \pi]$  aralığında sürekli ve reel değerli bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki Sturm-Liouville Problemini

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \quad , \quad x \in [0, \pi] \quad (4.5)$$

$$y'(0) - hy(0) = 0 \quad , \quad y'(\pi) - Hy(\pi) = 0 \quad (4.6)$$

göz önüne alalım. (4.5) denkleminin

$$\varphi(0, \lambda) = 1 \quad , \quad \varphi'(0, \lambda) = h \quad (4.7)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü  $\varphi(x, \lambda)$  ile gösterelim. Aynı denklemin

$$\psi(0, \lambda) = 1 \quad , \quad \psi'(0, \lambda) = H \quad (4.8)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü de  $\psi(x, \lambda)$  ile gösterelim.

**Lemma 4.3.1**  $\lambda = s^2$  olsun. Bu takdirde

$$\varphi(x, \lambda) = \cos sx + \frac{h}{s} \sin sx + \frac{1}{s} \int_0^x \sin\{s(x-\tau)\} q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau \quad (4.9)$$

$$\psi(x, \lambda) = \frac{1}{s} \sin sx + \frac{1}{s} \int_0^x \sin\{s(x-\tau)\} q(\tau) \psi(\tau, \lambda) d\tau \quad (4.10)$$

şeklindedir.

**İspat:** Öncelikle (4.9) eşitliğini ispatlayalım  $\varphi(x, \lambda)$  fonksiyonu (4.5) denklemini sağladığı için

$$\int_0^x \sin\{s(x-\tau)\} q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau$$

$$= \int_0^x \sin\{s(x-\tau)\} \varphi''(\tau, \lambda) d\tau + s^2 \int_0^x \sin\{s(x-\tau)\} \varphi(\tau, \lambda) d\tau$$

yazılabilir. Daha sonra sağdaki ilk integrali iki kez kısmi integralleyelim ve (4.7) şartını göz önüne alalım. Bu takdirde

$$\int_0^x \sin\{s(x-\tau)\} \varphi''(\tau, \lambda) d\tau$$

integralini hesaplayalım.

$$\begin{aligned} & \int_0^x \sin\{s(x-\tau)\} \varphi''(\tau, \lambda) d\tau \\ &= \varphi'(x, \lambda) \sin\{s(x-x)\} - \varphi'(0, \lambda) \sin\{s(x-0)\} + s \int_0^x \cos\{s(x-\tau)\} \varphi'(\tau, \lambda) d\tau \\ &= -h \sin sx + s \int_0^x \cos\{s(x-\tau)\} \varphi'(\tau, \lambda) d\tau \\ &= -h \sin sx + s \left\{ \varphi(x, \lambda) \cos\{s(x-x)\} - \varphi(0, \lambda) \cos\{s(x-0)\} - s \int_0^x \sin\{s(x-\tau)\} \varphi(\tau, \lambda) d\tau \right\} \\ &= -h \sin sx + s \left\{ \varphi(x, \lambda) - \cos sx - s \int_0^x \sin\{s(x-\tau)\} \varphi(\tau, \lambda) d\tau \right\} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} & \int_0^x \sin\{s(x-\tau)\} q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau \\ &= \int_0^x \sin\{s(x-\tau)\} \varphi(\tau, \lambda) d\tau + s^2 \int_0^x \sin\{s(x-\tau)\} \varphi(\tau, \lambda) d\tau \\ &= -h \sin sx + s \{ \varphi(x, \lambda) - \cos sx \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -s^2 \int_0^x \sin\{s(x-\tau)\} \varphi(\tau, \lambda) d\tau + s^2 \int_0^x \sin\{s(x-\tau)\} \varphi(\tau, \lambda) d\tau \\
& = -h \sin sx + s\varphi(x, \lambda) - s \cos sx
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.10) bağıntısının ispatı da benzer şekilde yapılır.

**Lemma 4.3.2**  $s = \sigma + i$  olsun. Bu durumda öyle  $s_0 > 0$  vardır ki  $|s| > s_0$  için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\varphi(x, \lambda) = O(e^{|t|x}) \quad , \quad \psi(x, \lambda) = O\left(\frac{e^{|t|x}}{|s|}\right) \quad (4.11)$$

$$\varphi(\tau, \lambda) = \cos s\tau + O\left(\frac{e^{|t|\tau}}{|s|}\right) \quad (4.12)$$

$$\psi(x, \lambda) = \frac{\sin sx}{s} + O\left(\frac{e^{|t|x}}{|s|^2}\right) \quad (4.13)$$

$0 \leq x \leq \pi$  için  $x$ 'in aldığı tüm değerlerde bu ifadeler sağlanır.

2. Şimdi özdeğerler ve özfonksiyonlar için asimptotik formülleri hesaplayalım. (4.5) - (4.6)

Sturm-Liouville problemini göz önüne alalım. Lemma 4.3.1 ve Lemma 4.3.2 den dolayı

$$\varphi(x, \lambda) = \cos sx + \frac{h}{s} \sin sx + \frac{1}{s} \int_0^x \sin\{s(x-\tau)\} q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau$$

$$\varphi(x, \lambda) = \cos sx + O\left(\frac{e^{|t|x}}{|s|}\right)$$

şeklindedir.

$h \neq \infty$  ve  $H \neq \infty$  olsun.  $\varphi(x, \lambda)$ , (4.5) denkleminin (4.6) sınır şartlarını sağlayan bir çözümü olduğundan bu fonksiyonun  $\pi$  noktasındaki değerini (4.6) sınır şartlarının ikincisinde yazdığımızda özdeğerleri buluruz. Lemma 4.2.2 den dolayı özdeğerler reeldir.

Negatif özdeğerlerin sayısı sonludur.  $\lambda$  pozitif sayısı için  $\text{Im } s = 0$  'dır. Bu sebeble (4.12) formülünden

$$\varphi(x, \lambda) = \cos sx + O\left(\frac{1}{s}\right) \quad (4.14)$$

yazılabilir. Daha sonra (4.9) ifadesinin  $x$ 'e göre diferansiyelini alıp ve (4.14) bağıntısını da kullanırsak

$$\varphi'_x(x, \lambda) = -s \sin sx + h \cos sx + O\left(\frac{1}{s}\right) \quad (4.15)$$

ifadesini elde ederiz. (4.6) sınır şartlarının ikincisinde (4.12) ve (4.15) ifadelerini yerlerine yazarsak özdeğerleri bulmak için aşağıdaki

$$-s \sin s\pi + (h + H) \cos s\pi + O\left(\frac{1}{s}\right) = 0 \quad (4.16)$$

denklemini elde ederiz,  $s$ 'nin büyük değerleri için (4.16) denkleminin tam doğal sayılarının komşuluğunda kökleri olmak üzere çözümlerin varlığı açıktır. Buradan özdeğerlerin sonsuz bir cümlesinin var olduğunu elde ederiz. Herhangi yeteri kadar büyük tam  $n$ 'den başlayarak her  $n$ 'nin komşuluğunda (4.16) denkleminin sadece bir kökünün bulunduğunu gösterelim. Bu amaçla (4.16) denkleminin sol kısmının  $s$ 'ye göre diferansiyeli alınırsa

$$-\pi s \cos s\pi - \sin s\pi - \pi(h + H) \sin s\pi + O(1) = 0$$

elde edilir. Sol taraftaki ifadenin  $s$  büyük tam değerleri komşuluğunda sıfıra eşit olmadığını göstermek mümkündür.

$s_n$  ile (4.16) denkleminin  $n$ . dereceden kökünü gösterelim. Sturm'un salınım teoreminden ve (4.12) formülünden  $s_n$  için  $s$ 'nin sıfırlarını yalnız tam  $n$  komşuluğunda elde ederiz. Bu iddianın Sturm teoremine bağlı kalmadan başka bir ifadesini de söyleyebiliriz.

$\lambda = s^2$  olsun. Bu takdirde özdeğerler

$$\varphi'_x(\pi, \lambda) = H\varphi(\pi, \lambda) \equiv w(\lambda) = 0$$

denkleminin kökleri olduğu için  $w(\lambda) = w_1(s)$  'dir. (4.9) ifadesinden dolayı  $w_1(s)$ ,  $s$ 'ye göre tam fonksiyondur. Buna ilaveten (4.14) ve (4.15) formüllerinden  $\sin s\pi \neq 0$  için  $w(\lambda) = w_1(s)$  ifadesinden

$$W_i(s) = -Hs \sin \pi \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{|s|}\right) \right\} \quad (4.17)$$

elde edilir.

$S$  düzleminde  $R = N + \frac{1}{2}$  yarıçaplı ve merkezi orijinde olan  $D_R$  dairesini göz önüne alalım. Rouché teoreminden ve (4.17) asimptotik formülünden  $D_R$  dairesinin içinde  $w_1(s)$  fonksiyonunun sıfırlarının sayısına eşit olup bu sayı  $2n+2$  dir.  $w_1(s)$  'nin her pozitif sıfırına karşılık gelir. Yani  $N + \frac{1}{2}$  den küçük olan  $s_k$  özdeğerinin sayısı olacaktır.  $s_n$  için asimptotik formül aşağıdaki gibi olur.

$$s_n = n + o(1) \quad (4.18)$$

$s_n = n + \delta_n$  olsun. O zaman (4.16) denklemi

$$n \sin \delta_n + O(1) = 0$$

şeklinde olur. Buradan  $\sin \delta_n \pi = o\left(\frac{1}{n}\right)$  yani  $\delta_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$  olur. Buna göre (4.16) denkleminin köklerini büyük  $n$  ler için



$$s_n = n + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (4.19)$$

Eğer (4.1) denkleminde  $q(x)$  fonksiyonu sınırlı türeve sahipse (4.19) formülü yeteri kadar düzgün sayılır. Şayet (4.9) eşitliğinin  $x$  göre türevini alıp daha sonra  $\varphi(x, \lambda)$  ve  $\varphi'(x, \lambda)$  ifadelerinin (4.6) sınır şartlarının ikincisinde kullanıp birkaç dönüşüm yaparsak

$$A = h + H + \int_0^\pi \left\{ \cos s\tau + \frac{H}{s} \sin s\tau \right\} q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau$$

$$B = \frac{hH}{s} + \int_0^\pi \left\{ \sin s\tau + \frac{H}{s} \right\} q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau$$

olacak şekilde

$$(-s + B) \sin s\pi + A \cos s\pi = 0 \quad (4.20)$$

ifadesini elde ederiz. (4.14) ifadesinden dolayı ve  $A$  ve  $B$  için

$$A = h + H + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(\tau) \cos 2s\tau d\tau + O\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$B = \frac{1}{2} \int_0^\pi q(\tau) \sin 2s\tau d\tau + O\left(\frac{1}{2}\right)$$

olur. Hipotezimizden dolayı  $q(x)$  potansiyel fonksiyonu sınırlı türeve sahip olduğu için kısmi integral alınır

$$\int_0^\pi q(\tau) \cos 2s\tau d\tau = O\left(\frac{1}{s}\right)$$

olur. Dolayısıyla

$$h_1 = \frac{1}{s} \int_0^\pi q(\tau) d\tau$$

olmak üzere  $A$  ve  $B$  ifadeleri için

$$A = h + H + h_1 + O\left(\frac{1}{s}\right)$$

ve

$$B = O\left(\frac{1}{s}\right)$$

elde edilir. Bu sebeple (4.20) denklemini

$$\tan s\pi = \frac{h + H + h_1 + O\left(\frac{1}{s}\right)}{s + O\left(\frac{1}{s}\right)}$$

şeklinde yazmak mümkündür. Tekrar  $s_n = n + \delta_n$  alınırsa

$$s_n = \frac{h + H + h_1}{\pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

olmak üzere

$$\tan \pi \delta_n = \frac{h + H + h_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

elde edilir ve

$$c = \frac{1}{\pi} \left( h + H + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(\tau) d\tau \right)$$

olmak üzere

$$s_n = n + \frac{c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (4.21)$$

elde ederiz.  $q(x) \in C^2(0, \pi)$  olduğunu kabul edersek daha yaklaşık bir asimptotik formül buluruz,  $c_1$  sabit olmak üzere

$$s_n = n + \frac{c}{n} + \frac{c_1}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \quad (4.22)$$

olur. Şimdi (4.21) formülünden faydalanarak  $\varphi(x, \lambda_n) = \varphi(x)$  özfonksiyonları için asimptotik formül bulalım. Bunun için (4.9) eşitliğinde  $\varphi(x, \lambda)$  yerine (4.14) ifadesini yazarsak

$$\begin{aligned} \varphi(x, \lambda) &= \cos sx + \frac{h}{s} \sin sx + \frac{1}{2} \int_0^x \sin\{s(x-\tau)\} \cos s\tau q(\tau) d\tau + O\left(\frac{1}{s^2}\right) \\ &= \cos sx + \frac{h}{s} \sin sx + \frac{\sin sx}{2s} \int_0^x q(\tau) d\tau + O\left(\frac{1}{s^2}\right) \end{aligned} \quad (4.23)$$

bulunur. Böylece özfonksiyonlar için asimptotik formüller elde edilir. (4.21) formülünde  $s$  için her yerde  $s_n$  alınırsa,

$$\beta(x) = -cx + h + \frac{1}{2} \int_0^x q(\tau) d\tau$$

olmak üzere

$$\varphi(x, \lambda) = \varphi(x) = \cos nx - \frac{cx}{n} \sin nx + \frac{h}{n} \sin nx + \frac{\sin nx}{2n} \int_0^x q(\tau) d\tau + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \cos nx - \frac{\beta(x)}{n} \sin nx + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

elde ederiz.  $\varphi_n(x)$  normlaştırılmış özfonksiyonlarının asimptotik formüllerini bulmak için

$$\alpha_n^2 = \int_0^\pi \varphi_n^2(x) dx = \int_0^\pi \cos nx dx + \frac{1}{n} \int_0^\pi \beta(x) \sin 2nx dx + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

integralini göz önüne alalım.  $\beta(x)$  fonksiyonu diferensiyellenebilir olduğundan

$$\int_0^\pi \beta(x) \sin 2nx dx = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

dir. Bundan dolayı  $\alpha_n^2 = \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  olduğundan

$$\frac{1}{\alpha_n} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (4.24)$$

bulunur. Normlaştırıcı sayılar için asimptotik formüller elde edilir. Böylece normlu özfonksiyonlar için asimptotik formül

$$\nu_n(x) = \frac{1}{\alpha_n} \varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \cos nx + \frac{\beta(x)}{n} \sin nx \right\} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (4.25)$$

şeklinde olur.

3. Şimdi  $h = \infty$ ,  $H \neq \infty$  olduğu durumu inceleyelim. (4.6) sınır şartlarının birincisinde

$$y(0) = 0 \quad (4.26)$$

olduğunu kabul edelim.  $\psi(x, \lambda)$  fonksiyonu (4.26) şartını sağlar. Bundan dolayı

araştırdığımız durum için (4.6) sınır şartlarının ikincisinde  $\psi(x, \lambda)$  fonksiyonunu yazarak özdeğerlerini araştırabiliriz. (4.10) ifadesinin  $x$ 'e göre diferansiyelini alırsak

$$\psi'(x, \lambda) = \cos sx + \int_0^x \sin\{s(x-\tau)\}q(\tau)\psi(x, \lambda)d\tau$$

elde ederiz. Bundan dolayı (4.6) sınır şartlarının ikincisinden

$$\begin{aligned} & \cos s\pi + \int_0^x \cos\{s(\pi-\tau)\}q(\tau)\psi(\tau, \lambda)d\tau \\ & + H \left\{ \frac{\sin s\pi}{s} + \frac{1}{2} \int_0^x \sin\{s(\pi-\tau)\}q(\tau)\psi(\tau, \lambda)d\tau \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

elde ederiz. (4.13) ifadesinden dolayı (4.27) den

$$\cos s\pi + \frac{1}{2} \int_0^x \cos\{s(\pi-\tau)\} \sin s\tau q(\tau)d\tau + \frac{\sin s\pi}{s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right) = 0 \quad (4.28)$$

bulunur.  $q(x)$  sınırlı türevelere sahip olduğundan

$$\begin{aligned} \varphi(x, \tau) &= \int_0^\pi q(\tau) \cos\{s(x-\tau)\} \sin s\tau d\tau \\ &= \cos s\pi \int_0^\pi \sin s\tau \cos s\tau q(\tau)d\tau \\ &+ \cos s\pi \int_0^\pi \sin^2 s\tau d\tau = \frac{\sin s\pi}{2} \int_0^\pi q(\tau)d\tau + O\left(\frac{1}{s}\right) \end{aligned}$$

olur. Bundan dolayı (4.28) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
& \cos s\pi + \frac{\sin s\pi}{s} \left\{ H + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(\tau) d\tau \right\} + O\left(\frac{1}{s^2}\right) \\
& = \cos s\pi + H_1 \frac{\sin s\pi}{s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right) = 0
\end{aligned} \tag{4.29}$$

olur.

$s_n = n + \frac{1}{2} + \delta_n$  olsun. O zaman (4.29) ifadesinden

$$s_n = -\frac{H_1}{\pi \left(n + \frac{1}{2}\right)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

olmak üzere

$$\cot\left(n + \frac{1}{2} + \delta_n\right)\pi = -\tan \delta_n \pi = -\frac{H_1}{n + \frac{1}{2}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

olur ve

$$H_1 = h + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(\tau) d\tau$$

olmak üzere

$$s_n = n + \frac{1}{2} + \frac{H_1}{\pi \left(n + \frac{1}{2}\right)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{4.30}$$

elde ederiz. Şimdi (4.30) da  $s_n$  değerini yerleştirirsek  $\psi(x, \lambda_n) = \psi_n(x)$  özfonksiyonları için aşağıdaki asimptotik formülü

$$\psi_n(x) = \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (4.31)$$

elde ederiz.  $\alpha_n^{-1}$  normlaştırılmış katsayıları için

$$\frac{1}{\alpha_n} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(n + \frac{1}{2}\right) \left\{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right\} \quad (4.32)$$

formülünü elde ederiz. Bundan dolayı bu durum için  $v_n(x) = \left(\frac{1}{\alpha_n}\right) \psi_n(x)$  normleştirilmiş özfonksiyonları

$$v_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (4.33)$$

şeklinde olur.

**4.** Son olarak  $h = \infty$  ve  $H = \infty$  durumunu araştıralım. (4.6) sınır şartlarında

$$y(0) = y(\pi) = 0$$

olduğunu söyleyebiliriz ve bundan dolayı  $\psi(x, \lambda)$  fonksiyonu özel olarak  $\psi(x, \lambda) = 0$  şartını sağlamalıdır. (4.10) ifadesinden

$$\sin s\pi + \int_0^\pi \sin\{s(\pi - \tau)\} q(\tau) \psi(\tau, \lambda) d\tau = 0$$

ya da

$$\sin s\pi + \left\{1 + \int_0^\pi \cos s\tau q(\tau) \psi(\tau, \lambda) d\tau\right\} - \cos s\pi \int_0^\pi \sin s\tau q(\tau) \psi(\tau, \lambda) d\tau = 0$$

elde edilir. (4.13) ifadesinden dolayı ( $q(x)$  sınırlı)

$$\sin s\pi - \frac{1}{2s} \cos s\pi \int_0^\pi q(\tau) d\tau + O\left(\frac{1}{s^2}\right) = \sin s\pi - \frac{\alpha}{s} \cos s\pi + O\left(\frac{1}{s^2}\right) = 0 \quad (4.34)$$

elde ederiz. Bu denklem (4.16) denklemi ile aynıdır. Bundan dolayı (4.34) denkleminin  $s_n$  kökleri  $\alpha_1 = \left(\frac{1}{2\pi}\right) \int_0^\pi q(\tau) d\tau$  olmak üzere

$$s_n = n + \frac{1}{2} + \frac{\alpha_1}{\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (4.35)$$

şeklindedir. (4.30) da  $s_n$  'nin değerini yerine yazarsak  $\psi(x, \lambda_n) = \psi_n(x)$  özfonksiyonları için

$$\psi_n(x) = \frac{\sin nx}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (4.36)$$

asimptotik formülünü elde ederiz.  $\alpha_n^{-1}$  normlaştırılmış katsayıları için

$$\frac{1}{\alpha_n} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} n \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\} \quad (4.37)$$

formülünü elde ederiz. Bundan dolayı  $v_n(x) = \left(\frac{1}{\alpha_n}\right) \psi_n(x)$  normlaştırılmış özfonksiyonları

$$v_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (4.38)$$

olur. Böylece Sturm-Liouville operatörünün özdeğer, özfonksiyon ve normlaştırıcı sayıları için asimptotik formüller elde edilir [3, 4, 20,22].



## 5. TERS PROBLEMLERDE DELTA ETKİLEŞİMLİ “AĞIRLIKLIL” STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ

Aşağıdaki Strum-Liouville problemini ve sınır şartlarını düşünelim  $L := L(q(x))$

$$\ell[y] := -y'' + q(x)y = \lambda y \quad , \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \quad (5.1)$$

$$U(y) := y'(0) = 0 \quad , \quad V(y) := y(\pi) = 0 \quad (5.2)$$

ve  $x = \frac{\pi}{2}$  noktasındaki sınır şartları da aşağıdaki gibi verilsin,

$$I(y) := \begin{cases} y\left(\frac{\pi}{2}+0\right) = y\left(\frac{\pi}{2}-0\right) \equiv y\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ y'\left(\frac{\pi}{2}+0\right) - y'\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = -\alpha \lambda y\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \quad (5.3)$$

burada  $q(x)$ ,  $W_2^1(0, \pi)$ 'de reel değerli bir fonksiyon ve  $\alpha > 0$ ;  $\lambda$  spectral parametre. Problemin basit gerçel ve özdeğerlerinden oluşan ayırık bir spektruma sahip olduğu bilinmektedir [23,24]. Dikkat edilirse (5.1) problemi, (5.3) denkleminin incelenmesidir.

$$-y'' + q(x)y = \lambda \rho(x)y \quad , \quad x \in (0, \pi) \quad (5.4)$$

$\rho(x) = 1 + \alpha \delta(x - \frac{\pi}{2})$  ifadesinde  $\delta(x)$  dirac fonksiyonudur [25]. Bu açıdan, denklem (5.4)

için çeşitli spektral problemler [19]'de incelenmiştir. Burada kendimizi verilen spektral özellikler kümesinden  $L$ 'yi elde etme sorunuyla sınırlayacağız [23,24], burada bu problem için uygun bir üretim uzayı  $L_2[0, \pi] \oplus \mathbb{C}$  de kendine eşlenik operatör-teorik formülasyonunu ile spektrumun bazı özellikleri elde edilmiş ve  $L$ 'nin ters problemleri için bazı teoremler kanıtlanmıştır. Aralık içindeki süreksizliklerin olduğu sınır değer problemleri matematik, mekanik, fizik, jeofizik ve doğa bilimlerinin diğer dallarında sıklıkla görülür. Genellikle bu tür problemler süreksiz malzeme özelliklerini içerir. Örneğin, süreksiz Sturm-Liouville

problemi (5.1) - (5.3), sonlu sayıda nokta kütleli bir diziye karşılık gelen tek boyutlu dalga denkleminde ortaya çıkar (bkz. [13]), ayrıca, bir iç noktadaki süreksizliklerle birlikte sınır valfi sorunları da Dünya'nın salınımlarına ilişkin jeofizik modellerde ortaya çıkmaktadır (bkz. [26]). Buradaki ana süreksizlik, kabuğun tabanındaki kayma dalgalarının yansımından kaynaklanmaktadır. Bir ortamın maddi özelliklerinin, ortamın dışından toplanan verilerden yeniden yapılandırılmasına ilişkin ters problem, merkezi öneme sahiptir.

Spektral parametreye bağlı iç nokta koşullarıyla ilgili ters Sturm-Liouville problemlerinin araştırılması daha azdır ve günümüzde bu yönde oldukça sınırlı sayıda çalışma bulunmaktadır (bkz. [16,25,27-29] ve buradaki referanslar).

Bu tezde,  $L$ 'yi Weyl fonksiyonundan veya spektral verilerden veya iki spektrumdan kurtarmanın bazı teklik teoremlerini üç ters problemi kanıtlıyoruz. Burada elde edilen sonuçlar, iç nokta koşulları (5.3) spektral parametreyi içerdiğinden, klasik ters problemlerdeki iyi bilinen sonuçların doğal genellemeleridir.

### 5.1. Ters Problemin Formülasyonu. Teklik Teoremi

Bu bölümde  $L$  sınır değer probleminin spektral özellikleri verilecek ve bu spektral özellikler arasındaki ilişkiyi belirtilecektir. Ayrıca  $L$  problemini yeniden yapılandırmanın ters problemini Weyl fonksiyonundan, spektral verilerden ve iki spektrumdan formüle edilecektir. Başlangıç koşulları altında denklem (5.1)'in çözümleri  $\varphi(x, \lambda)$  ve  $\psi(x, \lambda)$  olsun.

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = 0; \quad \psi(\pi, \lambda) = 0, \quad \psi'(\pi, \lambda) = 1 \quad (5.5)$$

ve sırasıyla iç nokta koşulları (5.3) verilmiştir. Her sabit  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$  için  $\varphi(x, \lambda)$  ve  $\psi(x, \lambda)$  fonksiyonları ve bunların  $x$ 'e göre türevleri  $\lambda$  cinsinden tamdır. Kolaylık olması açısından  $\rho = \sqrt{\lambda} = \sigma + i\tau$  olarak ifade ederiz. Aşağıdaki asimptotik tahminlerin  $x \in (0, \pi)$  'ye göre  $|\rho| \rightarrow \infty$  olarak aynı şekilde geçerli olduğu bilinmektedir [24].

$$\varphi(x, \lambda) = \cos \rho x + \frac{\sin \rho x}{2\rho} \int_0^x q(t) dt + O\left(\frac{1}{\rho^2} \exp|\tau|x\right), x < \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned}\varphi(x, \lambda) = & -\frac{\alpha}{2} \rho \sin \rho x + \frac{\alpha}{2} \rho \sin \rho(\pi - x) + \cos \rho x \left[ 1 + \frac{\alpha}{4} \int_0^x q(t) dt \right] \\ & + \frac{\alpha}{4} \cos \rho(\pi - x) \left[ \int_{\pi/2}^{\pi} q(t) dt - \int_0^{\pi/2} q(t) dt \right] + O\left(\frac{1}{\rho} \exp(|\tau| x)\right), x > \frac{\pi}{2}\end{aligned}\quad (5.6)$$

ve

$$\begin{aligned}\psi(x, \lambda) = & -\frac{\sin \rho(\pi - x)}{\rho} + \frac{\cos \rho(\pi - x)}{2\rho^2} \int_x^{\pi} q(t) dt + O\left(\frac{1}{\rho^3} \exp(|\tau|(\pi - x))\right), x > \frac{\pi}{2} \\ \psi(x, \lambda) = & -\frac{\alpha}{2} \cos \rho x - \frac{\alpha}{2} \cos \rho(\pi - x) - \frac{\alpha}{4\rho} [\sin \rho x + \sin \rho(\pi - x)] \int_x^{\pi/2} q(t) dt \\ & + O\left(\frac{1}{\rho^2} \exp(|\tau|(\pi - x))\right), x < \frac{\pi}{2}\end{aligned}\quad (5.7)$$

Wronskians determinanti olan  $\langle y, z \rangle(x) := (yz' - y'z)(x)$  ifadesinde  $y(x)$  ve  $z(x)$  fonksiyonları  $(0, \pi) \setminus \left(\frac{\pi}{2}\right)$  üzerinde sürekli ve türevlenebilirdir. (5.3) ve (5.5)'ten

$$\langle \varphi, \psi \rangle \left( \frac{\pi}{2} - 0, \lambda \right) = \langle \varphi, \psi \rangle \left( \frac{\pi}{2} + 0, \lambda \right)$$

ifadesi doğrulanabilmektedir, bu Wronskian  $\langle \varphi, \psi \rangle(x, \lambda)$ 'nin  $(0, \pi)$  üzerinde sürekli olduğunu ima eder. Liouville'in formülü sayesinde  $\langle \varphi, \psi \rangle(x, \lambda)$  ifadesinin  $x$ 'e bağlı olmadığı sonucuna varılmaktadır.

$$\Delta(\lambda) = \langle \varphi(x, \lambda), \psi(x, \lambda) \rangle \quad (5.8)$$

(5.8) denkleminde  $x = 0$  ve  $x = \pi$  yerine koyarsak,  $\Delta(\lambda) = -V(\varphi) = U(\psi)$  elde edilir.  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\Delta(\lambda)$  fonksiyonun sınırları olsun. O zaman  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  sayıları (5.1) - (5.3) ile tanımlanan  $L$  probleminin özdeğerleriyle çakışır ve bu nedenle  $\Delta(\lambda)$  fonksiyonuna  $L$ 'nin

karakteristik fonksiyonu denir.  $\varphi(x, \lambda_n)$  ve  $\psi(x, \lambda_n)$  fonksiyonları özfonksiyonlardır ve  $\{\beta_n\}$  dizisi

$$\psi(x, \lambda_n) = \beta_n \varphi(x, \lambda_n), \quad \beta \neq 0 \quad (5.9)$$

Burada  $\beta_n = \psi(0, \lambda_n)$  'dir.

$$\alpha_n = \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n) dx + \alpha \varphi^2\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n\right) \quad (5.10)$$

notasyonunu  $\lambda_n$  özdeğerine karşılık gelen normlama sabiti olarak kullanılmaktadır.

$\Omega = \{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=1}^\infty$  verileri problem (5.1) - (5.3) ile ilişkili spektral veriler olarak adlandırılır.

**Lemma 5.1.** Aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

i. Her bir  $\lambda_n$  özdeğeri için,

$$\dot{\Delta}(\lambda_n) = \alpha_n \beta_n \quad (5.11)$$

burada  $\dot{\Delta}(\lambda_n) = \frac{d\Delta(\lambda)}{d\lambda}$ .

ii. (5.1) - (5.3) probleminin özdeğeri  $\lambda_n$  olsun.  $\{\rho_n^0\}_{n=1}^\infty$  tüm fonksiyonların sıfırları olsun.

$$\Delta_0(\lambda) = \frac{\alpha}{2} \sin \rho \pi$$

Daha sonra  $n \rightarrow \infty$  ve

$$\omega_1 = \frac{2}{\alpha} + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) dt, \quad \omega_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left[ \int_0^{\pi/2} q(t) dt - \int_{\pi/2}^\pi q(t) dt \right]$$

olmak üzere [24],

$$\rho_n = n - 1 + \frac{1}{\pi n} \left( \omega_1 + (-1)^{n-1} \omega_2 \right) + \frac{\xi_n}{n}, \xi_n \in \ell_2 \quad (5.12)$$

elde edilir.

**iii.**  $\delta > 0$  için, öyle bir  $C_\delta$  sabiti vardır ki

$$|\Delta(\lambda)| > C_\delta |\rho|^2 \exp(|\tau|\pi), \quad \rho \in G_\delta, \quad |\rho| \geq \rho^* \quad (5.13)$$

yeterince büyük  $\rho^*$  için,  $G_\delta = \{\rho : |\rho - \rho_n^0| \geq \delta, n \geq 1\}$ .

**iv.** Aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\alpha_n = \alpha_n^0 + o(1), n \rightarrow \infty$$

burada

$$\alpha_n^0 = \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n^0) dx + \alpha \varphi^2\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^0\right).$$

Weyl fonksiyonunu şu şekilde tanımlarız,

$$M(\lambda) = \frac{\psi(0, \lambda)}{\Delta(\lambda)} \quad (5.14)$$

Burada  $\psi(0, \lambda)$  fonksiyonu,  $y(0) = V(y) = 0$  sınır koşullarına ve (5.3) nokta koşullarına tabi olarak denklem (5.1) için sınır değer probleminin karakteristik fonksiyonudur.  $\psi(0, \lambda)$  fonksiyonunun tamamının sıfırları  $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$  olsun. Açıkcası  $\psi(0, \lambda)$  ve  $\Delta(\lambda)$ 'nın ortak sıfırları yoktur. Dolayısıyla Weyl fonksiyonu  $M(y)$ ,  $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$  da meromofiktir ve  $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$  de

sıfırlar vardır. Aşağıdaki lemma  $L'$  nin spektral özellikleri arasındaki ilişkiyi sağlar: Weyl fonksiyonu  $M(\lambda)$ , spektral veri  $\Omega$  ve iki spektrum  $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

**Lemma 5.2.**  $M(\lambda)$ ,  $\Omega$  ve  $\Delta(\lambda)$ 'nın Lemma 5.1'deki gibi tanımlandığını varsayalım.

$$M(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n (\lambda - \lambda_n)} \quad (5.15)$$

Ayrıca eğer koşul (5.13) geçerliyse,

$$\Delta(\lambda) = -\pi \alpha (\lambda_1 - \lambda) \prod_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda}{\rho_n} \quad (5.16)$$

Lemma 5.1 – 5.2 nin kanıtlarını klasik Strum-Liouville operatörüne benzer olduğu için atlıyoruz [12].

$L'$ 'nin aşağıdaki ters problemlerini ele alalım:

- (i) Ters problem 1: Weyl fonksiyonu  $M(\lambda)$  verildiğinde,  $q(x)$ 'i bulunuz.
- (ii) Ters problem 2:  $\{\lambda_n, \mu_n\}_{n=1}^{\infty}$  spektral verilerinden  $q(x)$ 'i bulunuz.
- (iii) Ters problem 3: (5.1.1.13) 'ün geçerli olduğunu varsayarak  $\{\lambda_n, \mu_n\}_{n=1}^{\infty}$  spektral verilerinden  $q(x)$ 'i bulunuz.

Bu bize ters problemlerin çözümleri için istenen teklik sonucunu verir. Dahası, (5.14), (5.15) ve (5.16) 'ya göre,  $L$ 'nin spektral verilerden ve iki spektrumdan kurtarılmasının ters problemleri,  $L$ 'nin Weyl fonksiyonundan kurtarılmasının özel ters problemidir. Sonuç olarak, ters problemler 1-3 eşdeğerdir.

İlk olarak, (i) - (iii) problemlerinin çözümleri için teklik teoremlerini kanıtlayalım. Bir sınır değer problem  $\tilde{L}$  ile aynı özelliklere sahip fakat farklı  $\tilde{q}(x)$  katsayılı  $L$  sınır değer problemini ele alalım. Eğer aşağıda belirli bir  $e$  sembolü bir nesneyi ifade ediyorsa  $L$  ile ilgili, yaklaşık işaretiyle birlikte karşılık gelen  $\tilde{e}$  sembolü  $\tilde{L}$  ile ilgili benzer nesneyi belirtir.

**Teorem 5.3.** Eğer  $M(\lambda) = \tilde{M}(\lambda)$  ise  $L = \tilde{L}$ . Böylece, Weyl fonksiyonunun  $M(\lambda)$ ,  $L$ 'yi belirler.

**Kanıt.** Matrisi tanımlayalım,  $P(x, \lambda) = [P_{jk}(x, \lambda)]_{j,k=1,2}$  formülüne göre

$$P(x, \lambda) \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}(x, \lambda) & \tilde{\Phi}(x, \lambda) \\ \tilde{\varphi}'(x, \lambda) & \tilde{\Phi}'(x, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}(x, \lambda) & \tilde{\Phi}(x, \lambda) \\ \tilde{\varphi}'(x, \lambda) & \tilde{\Phi}'(x, \lambda) \end{pmatrix}$$

burada

$$\Phi(x, \lambda) = \frac{\psi(x, \lambda)}{\Delta(x, \lambda)} = S(x, \lambda) + M(\lambda)\varphi(x, \lambda), \quad (5.17)$$

ve  $S(x, \lambda)$  başlangıç koşulları  $S(x, \lambda) = 0$   $S'(0, \lambda) = 1$  ve nokta koşulları (5.3) olan denklem (5.1) 'in çözümüdür.  $\Phi(x, \lambda)$  fonksiyonuna  $L$  için Weyl çözümü denir. (5.17) denklemini hesaplırsak

$$\begin{cases} P_{j1}(x, \lambda) = \varphi^{(j-1)}(x, \lambda)\tilde{\Phi}'(x, \lambda) - \Phi^{(j-1)}(x, \lambda)\tilde{\varphi}'(x, \lambda) \\ P_{j2}(x, \lambda) = \Phi^{(j-1)}(x, \lambda)\tilde{\varphi}(x, \lambda) - \varphi^{(j-1)}(x, \lambda)\tilde{\Phi}(x, \lambda) \end{cases} \quad (5.18)$$

ve

$$\begin{cases} \varphi(x, \lambda) = P_{11}(x, \lambda)\tilde{\varphi}(x, \lambda) + P_{12}(x, \lambda)\tilde{\varphi}'(x, \lambda), \\ \Phi(x, \lambda) = P_{11}(x, \lambda)\tilde{\Phi}(x, \lambda) + P_{12}(x, \lambda)\tilde{\Phi}'(x, \lambda). \end{cases} \quad (5.19)$$

(5.6), (5.7) ve (5.13) 'ü dikkate alarak şunu çıkarırız:

$$|P_{11}(x, \lambda) - 1| \leq C_\delta |\rho|^{-1}, \quad |P_{12}(x, \lambda)| \leq C_\delta |\rho|^{-1}, \quad \rho \in G_\delta, \quad |\rho| \geq \rho^*, \quad (5.20)$$

burada  $G_\delta$  (5.13)'te tanımlanır ve  $C_\delta$  bir sabittir. Diğer yandan (5.14) ve (5.18)'e göre

$$\begin{cases} P_{11}(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda)\tilde{S}'(x, \lambda) - S(x, \lambda)\tilde{\varphi}'(x, \lambda) + (\tilde{M}(\lambda) - M(\lambda))\varphi(x, \lambda)\tilde{\varphi}'(x, \lambda), \\ P_{12}(x, \lambda) = S(x, \lambda)\tilde{\varphi}(x, \lambda) - \varphi(x, \lambda)\tilde{S}(x, \lambda) + (M(\lambda) - \tilde{M}(\lambda))\varphi'(x, \lambda)\tilde{\varphi}(x, \lambda). \end{cases}$$

$M(\lambda) = \widetilde{M}(\lambda)$  olduğundan, her  $x$  için  $P_{1k}(x, \lambda)$   $k=1,2$  fonksiyonlarının  $\lambda$  'da tam olduğu sonucu çıkar. (5.20) ve Liouville teoreminin yardımıyla bu,

$$P_{11}(x, \lambda) \equiv 1 \text{ ve } P_{12}(x, \lambda) \equiv 0$$

sonucunu verir. (5.19)'u değiştirirsek her  $x \in (0, \pi) \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$  ve  $\lambda$  için  $\varphi(\lambda) = \widetilde{\varphi}(\lambda)$ ,

$\Phi(\lambda) = \widetilde{\Phi}(\lambda)$  elde ederiz. Bunu dikkate alarak, (5.1)'den,  $(0, \pi)$  üzerinde  $q(x) = \widetilde{q}(x)$  elde ederiz. Sonuç olarak,  $L = \widetilde{L}$ .

**Teorem 5.4.** Eğer  $\lambda_n = \widetilde{\lambda}_n, \alpha_n = \widetilde{\alpha}_n, n=1,2,\dots$  ise  $L = \widetilde{L}$ . Böylece spektral verinin  $\Omega = \{\lambda_n, \mu_n\}_{n=1}^{\infty}$  özellikleri,  $L$  operatörünü belirler.

**Kanıt.** Teoremin hipotezi altında, (5.15)'in ışığında  $M(\lambda) = \widetilde{M}(\lambda)$  sonucunu Teorem 5.3'e göre  $L = \widetilde{L}$  elde ederiz.

**Teorem 5.5.** Eğer  $\lambda_n = \widetilde{\lambda}_n, \mu_n = \widetilde{\mu}_n, n=1,2,\dots$  ise  $L = \widetilde{L}$ . Dolayısıyla iki spektrumun  $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$  özellikleri  $L$ 'yi belirler.

**Kanıt.**  $\Delta(\lambda)$  ve  $\psi(0, \lambda)$  karakteristik fonksiyonlarının sırasıyla  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  ve  $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$  dizileri tarafından belirlendiği açıktır. Eğer,  $\lambda_n = \widetilde{\lambda}_n, \mu_n = \widetilde{\mu}_n, n=1,2,\dots$  ise  $\Delta(\lambda) = \widetilde{\Delta}(\lambda)$ ,  $\psi(\lambda) = \widetilde{\psi}(\lambda)$  olur. (5.14) ile birlikte bu,  $M(\lambda) = \widetilde{M}(\lambda)$  sonucunu verir. Teorem 5.3'e göre  $L = \widetilde{L}$  elde ederiz.



## 6. SONUÇLAR

Bu tezde, katsayıları genelleşmiş fonsiyonlardan oluşan çekili Strum-Liouville probleminin spektral özellikleri incelenmiştir. Giriş bölümünde integral denklemler ile ilgili çalışmaların nasıl başladığı ve bu çalışmaların sonucunda operatörler, özdeğerler ve özfonksiyonlar ile normlaştırıcı sayılar ve spektral fonksiyonlar gibi spektral verilerin ortaya çıkışlarının nasıl olduğu ile ilgili bilgiler verilmiştir. Sonrasında diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde kullanılan temel tanım ve teoremler verilmiş, asimptotik formüller bulunmuş ve Strum-Liouville probleminin sınır değerleri için sonuçları elde edilmiştir. Son olarak ters problemlerin delta etkileşimli ağırlıklı Strum-Liouville operatörü incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar fonksiyon katsayılı Strum-Liouville problemleri hakkında araştırmaların daha ileri bir noktaya gideceği yönünde umut vermiştir.

## KAYNAKÇA

- [1] Kreyszig, E. (1978). On a Decision Theoretic Method for Social Decision. In Hooker, C.A., Leach, J.J., McClennen, E.F. (Eds), Foundations and Applications of Decision Theory (pp. 275–281). Springer, Dordrecht: The University of Western Ontario Series in Philosophy of Science.
- [2] Lyusternik, L., Sobolev, V. (1961). Elements of Functional Analysis. New York: Frederick Ungar Publishing Company.
- [3] Kostyuchenko, A. G.; Sargsyan, I. S. (1979). Distribution of Eigenvalues. Selfadjoint Ordinary Differential Operators. Moskva: Nauka.
- [4] Levitan, B. M., & Gasymov, M. G. (1964). “Determination of Differential Equation by Two of Its Spectra”. Russian Mathematical Surveys, 19 (2), 1.
- [5] Stashevskaya, V. V. (1953). “On Inverse Problems of Spectral Analysis For A Class of Differential Equations,”. Dokl. Akad. Nauk SSSR 93, 409–411.
- [6] Volk, V.Y. (1953). “On Inverse Formulas for A Differential Equation With A Singularity at  $x=0$ ”. Uspekhi Matematicheskikh Nauk, 56 (8), 141-151.
- [7] Panakhov, E. S. (1981). “Inverse Problem For Dirac System in Two Partially Settled Spectrum”. Vinity, 3304, 1-29.
- [8] Chadan, K., & Sabatier, P. C. (1977). “Inverse Problems in Quantum Scattering Theory”. New York, Heidelberg Berlin: Springer Verlag
- [9] A.S. Sokhin., A. S. (1969). “On The Transformation Operators”. Truoli Fiz-Tekh. Ins. Low Tepme AN USSR, Mathematical Physics Functional Analysis. vip. I
- [10] Korop, V. F. (1961). “The Inverse Problem in Scattering For The Singular Equation”. Siberian Mathematical Journal. 2 (5), 672-693.
- [11] Carlson, R. (1977). “A Borg-Levinson Theorem For Bessel Operator.” Pasific Journal of Mathematics. 177 (1), 1-26.
- [12] Albeverio, S., Gesztesy, F., Hoegh-Krohn, R., & Holden, H. (1998). Solvable Models in Quantum Mechanics. USA: AMS Chelsea Publishing.

- [13] Carlson, R. (1995). "Hearing Point Masses in A String". *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 26 (3), 583–600.
- [14] Coddington, E. A., & Levinson, N. (1955). *Theory of Ordinary Differential Equations*. New York: McGraw-Hill.
- [15] Freiling, G., & Yurko, V. A. (2001). *Inverse Sturm-Liouville Problems and Their Applications*. Huntington: NOVA Science Publishers.
- [16] Guseinov, I., & Mammadova, L. (2014). "Reconstruction of The Diffusion Equation With Singular Coefficients For Two Spectra". In *Doklady Mathematics*, 90 (1), 401–404.
- [17] Hald, O. H. (1984). "Discontinuous Inverse Eigenvalue Problems". *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 37 (5), 539–577.
- [18] Churchill, R. V. (1941). *Fourier Series and Boundary Value Problems*. New York: McGraw Hill.
- [19] Karakus, A., & Dzh, M. M. (2022). "The Regularized Trace Formula For "Weighted" Sturm-Liouville Equation with  $\delta$ -Interaction". *Baku Mathematical Journal*, 1 (2), 164-171.
- [20] Uluçay, C. (1978). *Fonksiyonlar teorisi ve Riemann yüzeyleri*. Trabzon: TC. Karadeniz Teknik Üniversitesi Temel Bilimler Fakültesi Yayınları.
- [21] Gasymov, M. G. (1965). "The Definition of Sturm-Liouville Operator From Two Spectra". *DAN SSSR*, 161 (2), 274–276.
- [22] Marchenko, V. A. (1950). "Concerning the Theory of a Differential Operator of The Second Order". (Russian) *Doklady Akad. Nauk SSSR.(NS)*, 72, 457–460.
- [23] Manaflı, M. (2021). "A Regularized Trace Formula For "Weighted" Sturm-Liouville Equation With Point  $\delta$ -Interaction". *Turkish Journal of Mathematics*, 45 (4), 1767-1774.
- [24] Manafov, M.Dzh., Tanrıveren, M.B. (2024). "On the Uniqueness of Inverse Problems For "Weighted" Sturm-Liouville Operator With Delta Interaction". *Baku Mathematical Journal*, 3 (1), 35-41.
- [25] Dubuc, S. (1990). "An approximation of the gamma function". *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 146 (2), 461–468.

- [26] Yurko, V. A. E. (2021). “Recovering Differential Operators on the Half-Line with Indefinite Discontinuous Weights”. *Tamkang Journal of Mathematics*, 52 (1), 155-169.
- [27] Manafov, M. D., & Kablan, A. (2013). “Inverse Scattering Problems For Energy-Dependent Sturm-Liouville Equations With Point  $\delta$ -Interaction and Eigenparameter-Dependent Boundary Condition”. *Electron Journal Differential Equations*, 2013, 1-9.
- [28] Manafov, M. D., & Kablan, A. (2015). “Inverse Spectral and Inverse Nodal Problems For Energydependent Sturm-Liouville Equations With  $\delta$ -Interaction”. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2015 (26), 1-10.
- [29] Manafov, M. D. (2016). “Inverse Spectral Problems For Energy-Dependent Sturm-Liouville Equations With Finitely Many Point  $\delta$ -Interactions”. *Electronic Journal of Differential Equations*, 11, 1–12.