

T.C.
ADİYAMAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENELLEŞMİŞ GENİŞLEMİYEN DÖNÜŞÜMLERİN BİR SINIFI
İÇİN YAKINSAKLIK TEOREMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORUÇ ZİNCİR

DANIŞMAN
PROF. DR. SEYİT TEMİR

ADİYAMAN, 2025

ÖZET

GENELLEŞMİŞ GENİŞLEMİYEN DÖNÜŞÜMLERİN BİR SINIFI İÇİN YAKINSAKLIK TEOREMLERİ

Oruç ZİNCİR

Matematik Anabilim Dalı

Adıyaman Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Ağustos/2025, Sayfa: 42

Danışman: Prof. Dr. Seyit TEMİR

Bu tez çalışmasında, Garcia-Falset genelleşmiş genişlemeyen dönüşüm olarak adlandırılan genelleşmiş genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarının yakınsama sonuçları incelenmektedir. T.S- iterasyon süreci yardımıyla Garcia-Falset genelleşmiş genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktaya yakınsaklığı ispatlanmakta ve bu dönüşümlerin sabit nokta yaklaşımları örneklerle gösterilmektedir. Ayrıca bu örneklerde, Garcia-Falset genelleşmiş genişlemeyen dönüşümün Suzuki-tip genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşümleri ve genelleştirilmiş α -genişlemeyen dönüşümlerin sınıfını kapsadığı gösterilmektedir. Verilen örneklerle Garcia-Falset genelleştirilmiş dönüşümünün sabit noktasına yaklaşımında kullanılan T.S. iterasyon süreci yakınsaması, diğer bilinen iterasyon süreçleri ile karşılaştırılmakta olup T.S- iterasyon sürecinin sabit noktaya yaklaşımının diğerlerinden daha hızlı olduğu gözlemlenmektedir.

Anahtar Kelimeler: Genelleşmiş genişlemeyen dönüşüm; İterasyon süreçleri; Sabit nokta, yakınsaklık; Düzgün konveks Banach uzayı.

ABSTRACT

CORVERGENCE THEOREMS FOR A CLASS OF GENERALIZED NONEXPANSIVE MAPPINGS

Oruç ZİNCİR

Department of Mathematics

Adıyaman University, Graduate Education Institute, August/2025, Page: 42

Supervisor: Prof. Dr. Seyit TEMİR

In this thesis, the convergence results of fixed points for generalized nonexpansive mappings, referred to as Garcia-Falset generalized nonexpansive mappings, are studied. Using the T.S- iteration process, the convergence of Garcia-Falset generalized nonexpansive mappings to a fixed point is proven, and the fixed point approximations of these mappings are showed with examples. Additionally, it is shown that the Garcia-Falset generalized nonexpansive mapping encompasses the class of Suzuki-type generalized nonexpansive mappings and generalized α -nonexpansive mappings. With the given examples, the convergence of the T.S- iteration process used for approximating the fixed point of the Garcia-Falset generalized mapping is compared with other well-known iteration processes, and it is observed that the T.S. iteration process converges to the fixed point faster than the others.

Keywords: Generalized nonexpansive mapping; Iteration processes; Convergence; Fixed point; Uniformly convex Banach space.

TEŞEKKÜR

Bu süreçte, gerek öğrenim sürecinde gerekse araştırmamın her aşamasının ve yürütülmesinde bana yol gösteren, beni yüreklendiren, bilgisi ve alan deneyimleri ile her zaman özveriyle yanımda olan değerli hocam ve danışmanım Prof. Dr. Seyit TEMİR'e, lisansüstü öğrenimim boyunca tecrübelerinden faydalandığım tüm değerli hocalarıma ve bu süreçte her daim yanımda olup desteğini benden esirgemeyen canım eşim Eda TUTUŞ ZİNCİR'e teşekkürü bir borç bilirim.



ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Adıyaman Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Oruç ZİNCİR

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
BAŞLIK SAYFASI.....	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR.....	v
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	x
1. GİRİŞ.....	1
2. BAŞLICA TANIMLAR VE KAVRAMLAR.....	4
2.1. Başlıca Tanımlar ve Kavramlar	4
2.2. Sabit Nokta Kavramı.....	8
2.3. Genişlemeyen ve Quasi-Genişlemeyen Dönüşümler.....	8
2.4. (C) - Şartını Gerçekleyen Genişlemeyen Dönüşümler.....	10
2.5. α -Genişlemeyen Dönüşümler ve Genelleşmiş α -Genişlemeyen Dönüşümler	13
3. MATERYAL VE YÖNTEM	15
3.1. İterasyon (Yineleme) Süreçleri	15
3.2. Gerekli Tanımlar, Lemmalar ve Teoremler.....	18
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	21
4.1. Garcia-Falset Genelleşmiş Genişlemeyen Dönüşümler	21
4.2. (E) - Şartını Sağlayan GDD'lerin Zayıf ve Kuvvetli Yakınsaklıkları	27
4.3. (E) - Şartını Sağlayan Dönüşümlerin Örnekleri	32
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	39
KAYNAKÇA.....	40
ÖZ GEÇMİŞ	

ÇİZELGELER DİZİNİ

	Sayfa
Çizelge 4.1. Örnek 4.3.1'in Ψ dönüşümü için (3.1.2-3.1.8) iterasyon süreçlerinin yakınsaklık çizelgesi	34
Çizelge 4.2. Örnek 4.3.2'in Ψ dönüşümü için (3.1.2-3.1.8) iterasyon süreçlerinin yakınsaklık çizelgesi	37



ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 4.1. Örnek 4.3.1'de tanımlanan Ψ dönüşümü için (3.1.2-3.1.8) iterasyon süreçlerinin yakınsaklık davranışları	35
Şekil 4.2. Örnek 4.3.2'de tanımlanan Ψ dönüşümü için (3.1.2-3.1.8) iterasyon süreçlerinin yakınsaklık davranışları	38



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$(X, \ \cdot\)$	: Normlu uzay
R_K	: K kümesinin çapı
$Z_\alpha(K, \{u_n\})$	: asimptotik merkez
$r_\alpha(K, \{u_n\})$	: asimptotik yarıçap
(E)- şartı	: Garcia-Falset GGD
(X, ρ)	: Metrik uzay
$(X, \ \cdot\)$	: Normlu uzay
$(X, F, +, \cdot)$	: Lineer uzayı (vektör uzayı)
$u_n \rightarrow u$	: u_n 'nin u 'ya kuvvetli yakınsaması
$u_n \rightharpoonup u$	: u_n 'nin u 'ya zayıf yakınsaması
X^*	: X 'in normlu duali
DKU	: Düzgün (uniformly) konveks uzay
DKBU	: Düzgün konveks Banach uzayı
$F(\Psi)$	: Ψ nin sabit noktalarının kümesi
GGD	: Genelleşmiş genişlemeyen dönüşümler

1. GİRİŞ

Matematikte ve birçok disiplinde sabit nokta kavramı çok önemlidir. Dönüşümlerin çözümlere sahip olduğu koşullar sabit nokta sonuçlarıyla sağlanır. Sabit nokta yaklaşımları, bilişimden biyolojiye, ekonomiden kimya ve mühendisliğe kadar pek çok farklı alanda yaygın olarak kullanılmaktadır. Sabit nokta kuramı, çoğu zaman analitik yöntemlerle yaklaşılamayan doğrusal olmayan problemlerin çözümlerini bulmak için alternatif teknikler sağlamakta olup bunun iki ana araştırma yönü vardır: birincisi, sabit noktalarının varlığının kurulabileceği dönüşüm sınıfları ve koşulları bulmaktan oluşurken, ikincisi bunlara ulaşmak için iterasyon süreçleri tanımlamaya odaklanır. İterasyon süreci, amaçlanan sabit noktayı elde etmenin yaygın yollarından biridir. Son 65 yılda pek çok yazar bu alanlarla ilgilenmiş ve genişlemeyen dönüşümler için yaklaşık sabit noktalar ve genişlemeyen dönüşümlerin daha geniş sınıfları için birçok iterasyon süreçleri oluşturulmuştur. X bir Banach uzayı ve $K \neq \emptyset$ bir altkümesi olsun. K üzerinde tanımlanan dönüşüm, bu alt kümedeki tüm u ve v noktaları için $\|\Psi(u) - \Psi(v)\| \leq \|u - v\|$ eşitsizliği gerçekleşirse bu tür dönüşümlere genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm adı verilir; ayrıca, Ψ 'nin en az bir sabit noktası varsa, yani Ψ 'nin $F(\Psi) = \{p \in K : \Psi p = p\}$ ile gösterilen sabit noktaları kümesi boş değil ve tüm $u \in K$ ve $p \in F(\Psi)$ için $\|\Psi(u) - p\| \leq \|u - p\|$ ise bu dönüşümün quasi-genişlemeyen olduğu söylenir. Quasi-genişlemeyen dönüşümlerin sınıfı, genişlemeyen dönüşümlerin sınıfından daha zayıftır. Ψ 'nin sabit noktalarının varlığının belirlenebileceği koşulların tanımlanması, onlarca yıldır önemli bir araştırma konusu olmuştur. Böylece, Kirk (1965), K , X yansımali bir Banach uzayının boş olmayan kapalı, sınırlı ve konveks bir alt kümesi olduğunu ve ayrıca bu alt kümenin normal bir yapıya sahip olduğunu göstermiştir (Agarwal & Regan, 2009). Ayrıca K üzerinde tanımlı Ψ genişlemeyen dönüşümünün sabit bir noktaya sahip olduğunu da gösterdi. Browder (1965) ve Göhde (1965) tarafından bağımsız olarak X 'in düzgün konveks Banach uzayı (DKBU) olması durumunda benzer sonuçlar elde etmişlerdir. Özellikle genişlemeyen dönüşümlerin bazı genişlemeleri ve onların sabit nokta teoremlerinin incelenmesi son yıllarda yoğun bir şekilde yürütülmüştür (Suzuki, 2008; Aoyama & Kohsaka, 2011; Garc'ia-Falset vd., 2011, Thakur vd., 2016; Pant & Shukla, 2017; Ullah & Arshad, 2018; Pandey vd., 2019; Usurelu & Postolache, 2019; Usurelu vd., 2020; Thakur, 2021; Usurelu vd., 2022; Temir & Korkut, 2023; Temir & Zincir, 2023). Suzuki (2008) (C)-şartı olarak bilinen genelleşmiş genişlemeyen dönüşümler (GGD)

kavramını sunmuştur. $K \neq \emptyset$, X Banach uzayının konveks bir alt kümesi olsun. Tüm $u, v \in K$ için

$$\frac{1}{2} \|u - \Psi u\| \leq \|u - v\| \Rightarrow \|\Psi u - \Psi v\| \leq \|u - v\|$$

ise $\Psi : K \rightarrow K$, (C) şartını sağlar. Suzuki (C)-şartını sağlayan dönüşümün genişlemeyen dönüşümlerden daha zayıf, quasi-genişlemeyenden daha güçlü olduğunu göstermiştir. Son zamanlarda, Suzuki-(GGD) tipli için sabit nokta teoremleri çok sayıda kişi tarafından incelenmiştir (Suzuki, 2008; Thakur vd., 2016; Ullah & Arshad, 2018; Usurelu & Postolache, 2019; Usurelu vd., 2020; Temir, 2021; Usurelu vd., 2022; Temir & Korkut, 2023; Temir & Zincir, 2023).

Yine yakın zamanda Aoyama ve Kohsaka (2011) α -genişlemeyen dönüşümler olarak adlandırılan genişlemeyen dönüşümlerin yeni bir sınıfını sunmuşlardır. Bu sınıf, genişlemeyen dönüşümler sınıfını kapsamaktadır. Burada, 0-genişlemeyen dönüşümler olarak genişlemeyen dönüşümler olduğu görülmektedir. Genişlemeyen dönüşümler sürekli dirler. Ancak, Suzuki'nin (2008) sunduğu Suzuki-genelleşmiş genişlemeyen dönüşümler ve Aoyama ve Kohsaka'nın (2011) sunduğu α -genişlemeyen dönüşümlerin sürekli olmaları gerekmez. Bu yüzden, bu dönüşümler uygulamada ve teorikte önemlidir. Buradan, doğal olarak bir soru ortaya çıkmaktadır. Suzuki-tip genelleşmiş genişlemeyen dönüşümleri ve α -genişlemeyen dönüşümlerin her ikisini kapsayan dönüşümler sınıfı var mıdır? Kısmi olarak bu sorunun cevabı olumludur. Pant ve Shukla'nın (2017) bu soruya kısmi olarak olumlu cevap verdikleri gözlemlenmektedir. Pant ve Shukla (2017) α -genişlemeyen dönüşümler ile Suzuki-GGD'leri birleştirerek genelleşmiş α -genişlemeyen dönüşümler olarak adlandırılan dönüşümlerin yeni sınıfını sunmuşlardır. (C)-şartını sağlayanlardan daha geniş sabit nokta özelliklerini koruyan iki yeni genelleşmiş genişlemeyen dönüşümlerin sınıfı, 2011 yılında Garcia-Falset ve ark. (2011) tarafından sunulmuştur. (E)-şartı olarak adlandırılan Garcia-Falset-GGD'lerini araştırmışlardır. Lineer (doğrusal) olmayan dönüşümlerin bu yeni sınıfı genişlemeyen dönüşümleri, Suzuki-tip genelleşmiş genişlemeyen dönüşümleri ve genelleştirilmiş α -genişlemeyen dönüşümlerin sınıfını içermektedir. Ancak (E)-şartını sağlayan dönüşümlerin sınıfı quasi genişlemeyen dönüşümlerin sınıfından daha kuvvetlidir. 2019'un sonlarında, yine sürekli olması gerekmeyen genişlemeyen dönüşümlerin sınıfı için Pandey ve ark. (2019) sabit nokta sonuçlarını sunmuş ve diğer GGD'lerin sınıflarının bu sınıfın içinde yer aldığını göstermişlerdir. Son zamanlarda Usurelu ve ark. (Usurelu & Postolache, 2019; Usurelu vd., 2020; Usurelu vd., 2022) çeşitli iterasyon süreçlerin ve (E)-şartını sağlayan

dönüşümlerin sınıfı için bazı sabit nokta sonuçlarının yakınsama davranışlarını araştırmıştır. Usurelu ve ark.(2020) düzgün konveks Banach uzayı (DKBU)'nda (E)-şartını sağlayan GGD'lerin Thakur iterasyonu kullanılarak sabit noktaya yaklaşımları incelemiştir. DKBU 'da genelleştirilmiş α -genişlemeyen dönüşümler için Demir ve Korkut (2023) yakın zamanda bir iterasyonu (T.S- iterasyonu olarak adlandırılır) sunmuştur ve bu iterasyonu kullanarak bazı yakınsama sonuçları ispatlanmıştır.

Bu çalışmada, Suzuki (2008), Garcia-Falset ve ark. (2011), Pant ve Shukla (2017) ve Demir ve Zincir (2023) makaleleri detaylı olarak incelenerek, GGD'lerin bir sınıfı olan (E)-şartını sağlayan dönüşümleri incelenmektedir. DKBU 'da Suzuki genelleşmiş genişlemeyen dönüşümlerin genelleştirilmesi olan Garcia-Falset genelleşmiş genişlemeyen dönüşümleri için zayıf ve güçlü yakınsama sonuçları kanıtlanmıştır. Bu amaçla, T.S-iterasyon süreci kullanılmıştır. Ayrıca, Suzuki GGD olmayan Garcia-Falset- GGD örnekleri verilmiştir. Bu örnekler üzerinde T.S-iterasyonunun, Garcia-Falset GGD'nin sabit noktasına, diğer alınan iterasyon süreçlerinden daha hızlı yakınsadığı gösterilmiştir.

2. BAŞLICA TANIMLAR VE KAVRAMLAR

2.1. Başlıca Tanımlar ve Kavramlar

Çalışmanın ilerleyen kısımlarında kullanılacak temel kavramlar, tanımlar ve teoremler bu bölümde ele alınmıştır.

Tanım 2.1.1. $X \neq \emptyset$ bir küme olsun. $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna, her $u, v, w \in X$ için

1. $\rho(u, v) \geq 0$

2. $\rho(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$

3. $\rho(u, v) = \rho(v, u)$

4. $\rho(u, v) \leq \rho(u, w) + \rho(w, v)$ (üçgen eşitsizliği)

koşullarını gerçeklerse X üzerinde bir metrik adı verilir. Bu durumda (X, ρ) ikilisine de bir metrik uzay denir (Kolmogorov & Fomin, 1970; Kreyszig, 1989).

Tanım 2.1.2. (X, ρ) bir metrik uzay ve bu uzay içinde bir dizi $\{u_n\}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n_0 \leq n, m$ olduğunda

$$\rho(u_n, u_m) < \varepsilon$$

sağlayacak biçimde bir n_0 doğal sayısı varsa $\{u_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir (Kolmogorov & Fomin, 1970).

Metrik uzayda yakınsak her dizi Cauchy dizisidir. Eğer (X, ρ) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde yakınsak ise, bu metrik uzaya tam metrik uzay denir (Kolmogorov & Fomin, 1970; Kreyszig, 1989).

Tanım 2.1.3. (X, ρ) metrik uzayı içinde $\{u_n\}$ bir dizi olsun. $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(u_n, u) = 0$ olacak biçimde bir $u \in X$ bulunabiliyorsa $\{u_n\}$ dizisi u noktasına yakınsaktır denir (Kolmogorov & Fomin, 1970; Kreyszig, 1989). Ayrıca u noktasına $\{u_n\}$ dizisinin limiti denir. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ ya da $u_n \rightarrow u$ şeklinde gösterilir.

(X, ρ) bir metrik uzay ve $K \subset X$ altkümesi olmak üzere $u_0 \in X$ elemanı için her bir u_0 'dan farklı en az bir $v \in K$ noktası içeriyorsa u_0 noktasına K 'nın bir yığılma noktası denir. K 'nın yığılma noktalarının kümesi K' ile gösterilir.

(X, ρ) bir metrik uzay ve $K \subset X$ altkümesi olmak üzere $K \cup K'$ kümesine K 'nın kapanışı denir ve $\bar{K}$ ile gösterilir (Kolmogorov & Fomin, 1970; Kreyszig, 1989).

$\bar{K} = K$ ise K 'ya kapalı küme denir (Kolmogorov & Fomin, 1970; Kreyszig, 1989).

Tanım 2.1.4. (X, ρ) bir metrik uzay olsun. Bir $K \subset X$ kümesindeki her $\{u_n\}$ dizisi K 'nın bir elemanına yakınsayan bir alt diziye sahipse K 'ya bir kompakt küme denir.

Tanım 2.1.5. $V \neq \emptyset$ bir küme ve $\mathbb{K}$ bir cisim olsun. $+: V \times V \rightarrow V$ ve $\cdot: \mathbb{K} \times V \rightarrow V$ işlemi tanımlansın. Eğer $+$ ve $\cdot$ işlemleri aşağıdaki özellikleri şartları sağlarsa $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ dörtlüsüne lineer uzayı (vektör uzayı) denir.

1. Her $u, v, w \in V$ için $(u + v) + w = u + (v + w)$ ' dir.
2. Her $u, v \in V$ için $u + v = v + u$ ' dir.
3. Her $u \in V$ için $u + \theta = \theta + u = u$ olacak şekilde $\theta \in V$ vardır.
4. Her $u \in V$ için $u + v = v + u = \theta$ olacak şekilde $v \in V$ vardır.
5. Her $a \in \mathbb{K}$ ve her $u, v \in V$ için $a.(u + v) = a.u + a.v$ ' dir.
6. Her $a, b \in \mathbb{K}$ ve her $u \in V$ için $(a + b).u = a.u + b.u$ 'dir.
7. Her $a, b \in \mathbb{K}$ ve her $u \in V$ için $(ab)u = a(b.u)$ ' dir.
8. Her $u \in V$ için $1.u = u$ olacak şekilde $1 \in \mathbb{K}$ vardır.

Tanım 2.1.6. $X, \mathbb{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir u elemanındaki değerini $\|u\|$ ile gösterelim. O zaman, $\forall u, v \in X$ için

1. $\|u\| \geq 0$ ve $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \theta$
2. $\|au\| = |a|\|u\|$, $(a \in \mathbb{K})$
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

koşullarını gerçeklerse, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm denir. Bu durumda, $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu uzay denir.

X bir normlu uzay olmak üzere, $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, $\rho(u, v) = \|u - v\|$ ile tanımlanan ρ , X uzayı üzerinde bir metriktir. Bu metriğe norm metriği denir. Buradan da her normlu uzay bir metrik uzaydır (Kreyszig, 1989).

Şimdi aşağıdaki ifadeleri verelim.

i) $(X, \|\cdot\|)$ normlu vektör uzayının alt kümesi K olsun. Eğer

$$R_K = \sup\{\|u - v\| : u, v \in K\}$$

R_K 'ya K kümesinin çapı denir.

ii) $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olmak üzere, bu uzaydaki her yakınsak dizi sınırlı olup, tek bir limite yakınsar.

iii) K sınırlıdır ancak ve ancak her $u \in K$ için $\|u\| \leq k$ olacak şekilde bir $k > 0$ vardır (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.1.7. K , X vektör uzayının bir alt kümesi olsun. Her $u, v \in K$ ve $\lambda \in [0,1]$ için $(1 - \lambda)u + \lambda v \in K$ ise, K 'ya konveks(dışbükey) küme denir. Her lineer uzay konvektir. Her alt uzay konvektir (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.1.8. Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir limite yakınsıyorsa, $(X, \|\cdot\|)$ uzayına tam normlu uzay (Banach uzayı) denir.

Tanım 2.1.9. X bir Banach uzayı olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $\|u\| \leq 1, \|v\| \leq 1$ ve $\|u - v\| \geq \varepsilon$ şartını sağlayan her $u, v \in X$ için

$$\left\| \frac{u + v}{2} \right\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$$

olacak şekilde $\delta(\varepsilon) \geq 0$ sayısı varsa, X uzayına düzgün (*uniformly*) konveks Banach uzayı(DKBU) denir (Clarkson, 1936).

Tanım 2.1.10. X ve Y aynı skaler $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlanmış vektör uzayları olsun. $\Psi: X \rightarrow Y$ ile tanımlanan dönüşüm, $\forall u, v \in X$ ve $\forall a \in \mathbb{K}$ için

$$\begin{aligned}\Psi(u + v) &= \Psi(u) + \Psi(v) \\ \Psi(a \cdot u) &= a \cdot \Psi(u)\end{aligned}$$

ya da buna denk olarak her $\forall u, v \in X$ ve $\forall a, b \in \mathbb{K}$ için

$$\Psi(a \cdot u + b \cdot v) = a \cdot \Psi(u) + b \cdot \Psi(v)$$

şartını sağlıyorsa Ψ 'ye doğrusal dönüşüm denir.

Eğer Ψ dönüşümü yukarıdaki koşullardan herhangi birini sağlamazsa Ψ 'ye doğrusal olmayan dönüşüm denir.

Tanım 2.1.11. X normlu vektör uzayı olsun. X' de tanımlı tüm sürekli ve reel değerli doğrusal fonksiyonların kümesini $B(X, \mathbb{R})$ olarak gösterelim. Yani

$$B(X, \mathbb{R}) = \{\Psi: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ lineer ve sürekli} \} \text{ olsun.}$$

Her $u \in X$ ve $\Psi_1, \Psi_2 \in B(X, \mathbb{R})$ için

$$\begin{cases} (\Psi_1 + \Psi_2)(u) = \Psi_1(u) + \Psi_2(u) \\ (a\Psi_1)(u) = a\Psi_1(u) \end{cases}$$

olursa, $B(X, \mathbb{R})$ bir vektör uzayıdır. X üzerindeki tüm sürekli doğrusal fonksiyonellerin oluşturduğu uzaya X 'in normlu duali denir ve X^* ile gösterim yapılır (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.1.12. X normlu uzay ve $\{u_n\}$, X' de bir dizi olmak üzere eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\| = 0$ olacak şekilde $u \in X$ varsa bu $\{u_n\}$ dizisi u' ya yakınsaktır (veya norma göre yakınsaktır) denir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ ya da kısaca $u_n \xrightarrow{k} u$ olarak gösterilir (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.1.13. X normlu uzay ve $\{u_n\}$, X' de bir dizi olmak üzere eğer her $f \in X^*$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = f(u)$$

olacak şekilde $u \in X$ varsa bu $\{u_n\}$ dizisi u' ya zayıf yakınsaktır denir ve $u_n \xrightarrow{z} u$ ya da $u_n \rightharpoonup u$ olarak gösterilir (Kreyszig, 1989).

Teorem 2.1.14. X normlu uzay ve $\{u_n\}$, X' de bir dizi olsun. O zaman

- i) $\{u_n\}$ dizisi kuvvetli yakınsak ise aynı zamanda zayıf yakınsaktır. Fakat zayıf yakınsak olan bir dizi kuvvetli yakınsak olmak zorunda değildir.
- ii) Sonlu boyutlu normlu uzayda zayıf yakınsaklık ile kuvvetli yakınsaklık denktir (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.1.15. $(X, \|\cdot\|_1), (Y, \|\cdot\|_2)$, normlu vektör uzayları verilsin ve $u_0 \in X$ ve X uzayından Y uzayına bir g fonksiyonu tanımlansın. $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık

$$\|u - u_0\|_1 < \delta \Rightarrow \|g(u) - g(u_0)\|_2 < \varepsilon$$

ya da buna denk olarak

$$g(B(u_0, \delta)) \subset B(g(u_0, \varepsilon))$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa g fonksiyonuna u_0 noktasında süreklidir denir.

Her noktada sürekli olan g fonksiyonuna, X üzerinde sürekli bir fonksiyon denir (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.1.16. $(X, \|\cdot\|)$ ve $(Y, \|\cdot\|)$ iki normlu uzay ve $\Psi: X \rightarrow Y$ bir dönüşüm olsun. Her $u \in X$ için

$$\|\Psi(u)\| \leq M \cdot \|u\|$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sabiti varsa, Ψ sınırlı bir dönüşümdür (Kreyszig, 1989).

2.2. Sabit Nokta Kavramı

Tanım 2.2.1. $X \neq \emptyset$ ve $\Psi: X \rightarrow X$ dönüşümü verilsin. $\Psi(u) = u$ olacak şekilde bir $u \in X$ varsa u noktasına Ψ dönüşümünün sabit noktası denir. Bu tezde Ψ dönüşümünün tüm sabit noktaları kümesi $F(\Psi)$ olarak gösterilmektedir.

Örnek 2.2.2. $\Psi(u) = \begin{cases} 5u & 0 < u < \frac{1}{2} \\ 1 - u & \frac{1}{2} \leq u < \frac{3}{2} \end{cases}$ dönüşümü tanımlansın. O zaman $F(\Psi) = \frac{1}{2}$ 'dir.

Örnek 2.2.3. $\Psi(u) = \ln u$ dönüşümünün sabit noktası yoktur.

Örnek 2.2.4. $\Psi(u) = \begin{cases} 1 - u & 0 \leq u < \frac{1}{8} \\ \frac{u+7}{8} & \frac{1}{8} \leq u \leq 1 \end{cases}$ dönüşümü tanımlansın. O zaman $F(\Psi) = 1$ olur.

Tanım 2.2.5. (X, ρ) bir metrik uzay ve $\Psi: X \rightarrow X$ bir dönüşümü verilsin. Eğer

- a) $\forall u, v \in X$ için $\rho(\Psi u, \Psi v) \leq \theta \rho(u, v)$ olacak şekilde bir $\theta \geq 0$ sabit sayısı varsa Ψ dönüşümüne Lipschitzian dönüşümü denir. Bu eşitsizliği sağlayan en küçük θ sayısına da Lipschitzian sabiti denir.
- b) Eğer $\forall u, v \in X$ $\rho(\Psi u, \Psi v) \leq \theta \rho(u, v)$ olacak şekilde bir $\theta \in [0, 1)$ sayısı bulunabiliyorsa Ψ dönüşümüne daralma dönüşümü (*contraction mapping*) denir.

Lipschitz şartını sağlayan her dönüşüm düzgün süreklidir. Dolayısıyla daralma dönüşümleri de düzgün süreklidir. Eğer Ψ sürekli değilse, bir daralma dönüşümü de olamaz. Ayrıca Ψ daralma dönüşümü olmasa bile, herhangi bir n için Ψ^n daralma dönüşümü olabilir.

2.3. Genişlemeyen ve Quasi-Genişlemeyen Dönüşümler

Tanım 2.3.1. $K \neq \emptyset$, X Banach uzayının kapalı ve konveks bir alt kümesi olmak üzere $\Psi: K \rightarrow K$ dönüşümü, her $u, v \in K$ için,

$$\|\Psi u - \Psi v\| \leq \|u - v\|$$

koşulunu gerçeklerse $\Psi: K \rightarrow K$ dönüşümüne genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm denir. Her daralma dönüşümü aynı zamanda genişlemeyen bir dönüşümdür. $\Psi: K \rightarrow K$ genişlemeyen bir dönüşüm ise Lipschitz sabiti $\theta = 1$.

Örnek 2.3.2. $\Psi: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $\Psi u = 1 - u^{\frac{2}{3}}$ dönüşümü verilsin.

$\forall u, v \in [0,1]$ için $\|\Psi u - \Psi v\| \leq \|u - v\|$ ifadesinde $u = 2^{-3}$ ve $v = 3^{-3}$ olarak alırsak $\|\Psi u - \Psi v\| = \frac{5}{36} > \frac{19}{216} = \|u - v\|$ olur. Dolayısıyla Ψ genişlemeyen dönüşüm değildir.

Örnek 2.3.3. $\mathbb{R}^2$ üzerinde $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ için $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ ile tanımlı öklidyen normunun olduğunu düşünelim.

$B = \{u: \|u\| < 1\}$, $\mathbb{R}^2$ 'deki birim yuvarı göstermek üzere, $\Psi: B \rightarrow B$,

$\Psi(u_1, u_2) = (-\frac{u_1}{2}, u_2)$ ile tanımlı Ψ dönüşümü

$$\begin{aligned} \|\Psi u - \Psi v\| &= \left\| \left(-\frac{u_1}{2}, u_2\right) - \left(-\frac{v_1}{2}, v_2\right) \right\| = \left\| \left(\frac{v_1 - u_1}{2}, u_2 - v_2\right) \right\| \\ &= \sqrt{\left(\frac{v_1 - u_1}{2}\right)^2 + (u_2 - v_2)^2} \leq \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2} \\ &\leq \|u - v\| \end{aligned}$$

olup genişlemeyen (*nonexpansive*) dönüşüm olur. $u = (0,0) \in \mathbb{R}^2$, Ψ 'nin sabit noktasıdır.

Tanım 2.3.4. $K \neq \emptyset$, X Banach uzayının kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. Eğer $p \in F(\Psi) \neq \emptyset$ ve her $u \in K$ için

$$\|\Psi u - p\| \leq \|u - p\|$$

şartını sağlarsa $\Psi: K \rightarrow K$ dönüşümüne quasi-genişlemeyen dönüşüm denir.

Örnek 2.3.5. Ψ dönüşümünü $[0, 4]$ aralığı üzerinde

$$\Psi(u) = \begin{cases} 0, & u \neq 4 \\ 3, & u = 4 \end{cases}$$

olarak verilsin. Bu Ψ dönüşümünün sabit noktası $u = 0$ olur. Ψ , sürekli bir dönüşüm değildir. Bu nedenle Ψ dönüşümü, genişlemeyen dönüşüm değildir. Bunun yanında $\forall u \in [0, 4]$ için

$$\|\Psi(u) - 0\| \leq \|u - 0\|$$

olduğundan, Ψ dönüşümü, quasi-genişlemeyen dönüşümdür.

Örnek 2.3.6. $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $\Psi: X \rightarrow X$ dönüşümü

$$\Psi(u) = \begin{cases} 0, & (-\infty, 1] \\ \frac{1}{7}, & u > 1 \end{cases}$$

tanımlansın. X üzerinde alışılmış mutlak değer normunun olduğunu düşünelim. Burada Ψ dönüşümü sürekli değildir, bu nedenle Ψ genişlemeyen dönüşüm değildir. Bu dönüşümün sabit noktası $u=0$ 'dır. Her $u \in X$ için Her $u \in X$ için

$$\|\Psi(u) - 0\| \leq \|u - 0\|$$

olup, Ψ dönüşümünün bir quasi-genişlemeyen dönüşüm olduğu görülür.

Örnek 2.3.7. $\Psi: [0,2] \rightarrow [0,2]$ dönüşümü

$$\Psi(u) = \begin{cases} u^3, & 0 \leq u < 1 \\ \frac{u}{2}, & 1 \leq u \leq 2 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Ψ dönüşümü, sürekli olmadığından genişlemeyen dönüşüm değildir.

$u = 0$ noktası bu dönüşüm için sabit noktadır. Her $u \in [0,2]$ için

$$\|\Psi(u) - 0\| \leq \|u - 0\|$$

olup Ψ dönüşümü quasi-genişlemeyen dönüşümdür.

Buradan da görüldüğü gibi; quasi-genişlemeyen dönüşümlerin, genişlemeyen dönüşümlerden daha zayıf olduğu söylenir. Genişlemeyen dönüşüm bir sabit noktaya sahipse o zaman bu dönüşüm, quasi-genişlemeyen dönüşüm olur.

2.4. (C) -şartını Gerçekleyen Genişlemeyen Dönüşümler

Tanım 2.4.1. (Suzuki (C)-Şartı) $K \neq \emptyset$, X Banach uzayının bir alt kümesi olsun. $\Psi: K \rightarrow K$ dönüşümü, eğer, her $u, v \in K$ için

$$\frac{1}{2} \|u - \Psi u\| \leq \|u - v\| \Rightarrow \|\Psi u - \Psi v\| \leq \|u - v\|$$

ise (C) şartını sağlar denir (Suzuki, 2008).

Önerme 2.4.2. Her genişlemeyen dönüşüm (C)-şartını sağlar. Fakat bunun tersi doğru değildir (Suzuki, 2008).

Örnek 2.4.3. $\Psi: [0,3] \rightarrow [0,3]$ dönüşümü

$$\Psi u = \begin{cases} 0, & u \neq 3 \\ 1, & u = 3 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Ψ dönüşümü (C)-şartını sağlar, fakat genişlemeyen dönüşüm değildir.

Eğer $u < v$ ve $(u, v) \in ([0, 3] \times [0, 3]) \setminus ((2, 3) \times \{3\})$ alınırsa

$$\|\Psi u - \Psi v\| \leq \|u - v\| \text{ olur.}$$

Eğer $u \in (2, 3)$ ve $v = 3$ alınırsa

$$\frac{1}{2} \|u - \Psi u\| = \frac{u}{2} > 1 > \|u - v\| \quad \text{ve} \quad \frac{1}{2} \|v - \Psi v\| = 1 > \|u - v\|$$

olup (C)-şartını sağlar. Fakat Ψ sürekli olmadığından, Ψ genişlemeyen değildir (Suzuki (2008)).

Örnek 2.4.4. $\Psi: [0,1] \rightarrow [0,1]$

$$\Psi u = \begin{cases} 1 - u & u \in [0, \frac{1}{12}) \\ \frac{u+11}{12} & u \in [\frac{1}{12}, 1) \end{cases}$$

dönüşümü verilsin.

$u = \frac{2}{25}$ $v = \frac{1}{12}$ için Ψ dönüşümünün genişlemeyen dönüşüm olmadığı görülür.

$$\begin{aligned}\|\Psi(u) - \Psi(v)\| &= |\Psi u - \Psi v| \\ &= \left| 1 - \frac{2}{25} - \frac{133}{144} \right| = \left| \frac{3312 - 3325}{3600} \right| = \frac{13}{3600} \\ \|u - v\| &= \left\| \frac{2}{25} - \frac{1}{12} \right\| = \frac{1}{300}\end{aligned}$$

$\|\Psi(u) - \Psi(v)\| > \|u - v\|$ Buradan Ψ nin genişlemeyen dönüşüm olmadığı görülür. Şimdi de Ψ 'nin Suzuki genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm olduğunu kanıtlamak için aşağıdaki durumları inceleyelim.

Durum 1. $u \in \left[0, \frac{1}{12}\right)$ için $\frac{1}{2} \|u - \Psi(u)\| = \frac{1-2u}{2} \in \left(\frac{5}{12}, \frac{1}{2}\right]$ elde edilir.

$\frac{1}{2} \|u - \Psi(u)\| \leq \|u - v\|$ için $\frac{1-2u}{2} \leq v - u$ elde edilir. Buradan

$\frac{1}{2} \leq v$ yani $v \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ olur.

$$\frac{1}{2} \|u - \Psi(u)\| \leq \|u - v\| = \left| \frac{v+11}{12} - (1-u) \right| = \left| \frac{v+12u-1}{12} \right| < \frac{1}{12} \text{ ve}$$

$$\|u - v\| = |u - v| > \left| \frac{1}{12} - \frac{1}{2} \right| = \frac{5}{12} \text{ elde edilir.}$$

$\frac{1}{2} \|u - \Psi(u)\| \leq \|u - v\|$ ise $\|\Psi u - \Psi v\| \leq \|u - v\|$ olduğu görülür.

Durum 2. $u \in \left[\frac{1}{12}, 1\right]$ için $\frac{1}{2} \|u - \Psi(u)\| = \frac{1}{2} \left| \frac{u+11}{12} - u \right| = \frac{11-11u}{24} \in \left[0, \frac{121}{288}\right]$ olur.

$\frac{1}{2} \|u - \Psi(u)\| \leq \|u - v\|$ için $\frac{11-11u}{24} \leq \|u - v\|$ elde edilir. Buradan iki durum ortaya çıkar:

a) $u < v$ için $\frac{11-11u}{24} < v - u$ ise $v \geq \frac{11+13u}{24}$ $v \in \left[\frac{145}{288}, 1\right] \subset \left[\frac{1}{12}, 1\right]$ olur. Buradan

$$\|\Psi u - \Psi v\| = \left| \frac{u+11}{12} - \frac{v+11}{12} \right| = \frac{1}{12} \|u - v\| \leq \|u - v\| \text{ elde edilir.}$$

$\frac{1}{2} \|u - \Psi(u)\| \leq \|u - v\|$ ise $\|\Psi u - \Psi v\| \leq \|u - v\|$ sağlanır.

b) $u > v$ için $\frac{11-11u}{24} \leq \|u - v\|$ $v \leq \frac{35u-11}{24}$ ise $v \in \left[\frac{-97}{288}, 1\right]$ dolayısıyla $v \in [0, 1]$

olduğu görülür.

$$v \leq \frac{35u-11}{24} \text{ ise } u = \frac{24v+11}{35} \in \left[\frac{11}{35}, 1\right] \text{ olur.}$$

$u \in \left[\frac{11}{35}, 1\right]$ ve $v \in \left[\frac{1}{12}, 1\right]$ seçilirse (a) durumunun aynısı elde edilir.

$$u \in \left[\frac{11}{35}, 1\right] \text{ ve } v \in \left[0, \frac{1}{12}\right) \text{ için } \|\Psi u - \Psi v\| = \left| \frac{u+11}{12} - (1-v) \right| = \left| \frac{u+12v-1}{8} \right| \leq \frac{1}{24}$$

$\|u - v\| > \frac{97}{420}$ Dolayısıyla $\|\Psi u - \Psi v\| \leq \|u - v\|$ olduğu görülür.

$u \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ $v \in \left[0, \frac{1}{12}\right)$ için $\|\Psi u - \Psi v\| \leq \frac{1}{12}$ ve $\|u - v\| > \frac{5}{12}$ Buradan

$\|\Psi u - \Psi v\| \leq \|u - v\|$ olduğu görülür.

$\frac{1}{2} \|u - \Psi(u)\| \leq \|u - v\|$ ise $\|\Psi u - \Psi v\| \leq \|u - v\|$ bütün durumlar için

sağlandığından Ψ dönüşümü Suzuki genelleşmiş genişlemeyen dönüşümdür.

Önerme 2.4.5. Sabit noktaya sahip Ψ dönüşümü (C)-şartını sağlarsa, Ψ dönüşümü quasi-genişlemeyen dönüşümdür (Suzuki, 2008).

Örnek 2.4.6. $\Psi: [0,3] \rightarrow [0,3]$ dönüşümü

$$\Psi u = \begin{cases} 0, & u \neq 3 \\ 2, & u = 3 \end{cases}$$

ile tanımlansın. $F(\Psi) \neq \emptyset$ 'dir. Ψ quasi-genişlemeyen dönüşüm olup (C)-şartını sağlamaz. $F(\Psi) = \{0\} \neq \emptyset$ ve Ψ quasi-genişlemeyen dönüşümdür. Fakat

$$\frac{1}{2} \|3 - \Psi 3\| = \frac{1}{2} \leq 1 = \|3 - 2\| \text{ ve } \|\Psi 3 - \Psi 2\| = 2 > 1 = \|3 - 2\|$$

olduğundan (C)-şartını sağlamaz (Suzuki, 2008).

Örnek 2.4.7. $\Psi: [-1,1] \rightarrow [-1,1]$ dönüşümünü

$$\Psi u = \begin{cases} \frac{4u}{5} \sin \frac{1}{2u} & u \neq 0 \\ 0 & u = 0 \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. O zaman, Ψ sürekli ve quasi-genişlemeyen dönüşümdür. Fakat $\mathbb{R}$ 'de alışılmış norm altında genişlemeyen dönüşüm değildir.

Açıkça görülmektedir, Ψ sürekli ve Ψ 'nin tek sabit noktası 0'dır. $u \neq 0$

ve $\Psi u = u$ ise, o zaman $u \in [-1,0) \cup (0,1]$ aldığımızda $u = \frac{4u}{5} \sin \frac{1}{2u}$ veya

$\sin \frac{1}{2u} = \frac{5}{4}$ için bu sonuç imkansızdır. $|\Psi u - 0| = \left| \frac{4u}{5} \sin \frac{1}{2u} \right| \leq \left| \frac{4u}{5} \right|$ olduğundan her

$u \in [-1,1]$ için $|\Psi u - 0| < |u - 0|$ gerçekleştiğinden Ψ quasi-genişlemeyen

dönüşümdür. Ancak Ψ genişlemeyen dönüşüm değildir. $u = \frac{1}{\pi}$ ve $v = \frac{1}{3\pi}$ alınırsa,

$$|\Psi u - \Psi v| = \frac{16}{15\pi} \quad |u - v| = \frac{2}{3\pi} \text{ ve } |\Psi u - \Psi v| > |u - v|$$

olup Ψ 'nin genişlemeyen dönüşüm şartını sağlamadığı görülür. Ayrıca $u = \frac{1}{\pi}$ ve $v = \frac{1}{3\pi}$

değerleri için, $\frac{1}{2} |u - \Psi u| = \frac{1}{10\pi} < |u - v| = \frac{2}{3\pi}$ sağlanır. Ancak $|\Psi u - \Psi v| = \frac{16}{15\pi}$

$> \frac{2}{3\pi} = |u - v|$ olduğundan Ψ dönüşümü (C)-şartını da sağlamaz.

Suzuki (2008) çalışmasında, (C)-şartını sağlayan dönüşümlerin genişlemeyen dönüşümlerden daha zayıf, quasi- genişlemeyen dönüşümlerden daha güçlü olduğunu göstermiştir.

2.5. α - Genişlemeyen Dönüşümler ve Genelleşmiş α - Genişlemeyen Dönüşümler

Aoyama ve Kohsaka (2011) α -genişlemeyen dönüşümler olarak adlandırılan genişlemeyen dönüşümlerin yeni bir sınıfını sunmuşlardır.

Tanım 2.5.1. $K \neq \emptyset$, X Banach uzayının bir alt kümesi olmak üzere her $u, v \in K$ için

$$\| \Psi u - \Psi v \|^2 \leq \alpha \| \Psi v - u \|^2 + \alpha \| \Psi u - v \|^2 + (1 - 2\alpha) \| u - v \|^2$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\alpha \in [0, 1)$ varsa $\Psi: K \rightarrow K$ dönüşümüne α -genişlemeyen dönüşümü denir (Aoyama & Kohsaka, 2011).

Bu sınıf, genişlemeyen dönüşümler sınıfını kapsamaktadır. Burada, 0-genişlemeyen dönüşümler olarak genişlemeyen dönüşümler olduğu görülmektedir. Genişlemeyen dönüşümler süreklidirler. Ancak, Suzuki'nin (2008) sunduğu Suzuki-GGD ve Aoyama ve Kohsaka'nın (2011) sunduğu α -genişlemeyen dönüşümlerin sürekli olmaları gerekmez.

Pant ve Shukla (2017), α -genişlemeyen dönüşümler ile Suzuki-genelleşmiş genişlemeyen dönüşümleri birleştirerek genelleşmiş α -genişlemeyen dönüşümler olarak adlandırılan dönüşümlerin yeni sınıfını sunmuşlardır. Pant ve Shukla (2017), aşağıda tanımı verilen ve (C)-şartını sağlayan dönüşümleri içeren genelleştirilmiş α -genişlemeyen dönüşümler sınıfını tanıtmışlardır.

Tanım 2.5.2. $K \neq \emptyset$, X Banach uzayının bir alt kümesi olmak üzere her $u, v \in K$ için

$$\frac{1}{2} \| u - \Psi u \| \leq \| u - v \|$$

$$\Rightarrow \| \Psi u - \Psi v \| \leq \alpha \| \Psi v - u \| + \alpha \| \Psi u - v \| + (1 - 2\alpha) \| u - v \|$$

olacak şekilde bir $\alpha \in [0, 1)$ varsa , $\Psi: K \rightarrow K$ dönüşümüne genelleşmiş α -genişlemeyen dönüşüm denir (Pant & Shukla, 2017).

Önerme 2.5.3. (C) şartını sağlayan her dönüşüm genelleştirilmiş α - genişlemeyen dönüşümdür. Fakat bunun tersi doğru değildir. $\alpha = 0$ olduğu zaman genelleşmiş α -genişlemeyen dönüşüm, (C) - şartını sağlayan bir dönüşüme dönüşür (Pant & Shukla, 2017).

Örnek 2.5.4. $K = [0, 4]$ alışılmış norma sahip $\mathbb{R}$ 'nin bir alt kümesi olsun.

$$\Psi: K \rightarrow K, \Psi u = \begin{cases} 0, & u \neq 4 \\ 2, & u = 4 \end{cases} \text{ olarak tanımlayalım.}$$

$u \in (2, \frac{8}{3}]$ ve $v = 4$ alalım.

$$\frac{1}{2} \|u - \Psi u\| \leq \|u - v\| \quad \text{ve} \quad \|\Psi u - \Psi v\| = 2 > \|u - v\|$$

Ψ , (C) şartını sağlamaz. Şimdi de $u \in (\frac{8}{3}, 3]$ ve $v = 4$ alındığında

$$\frac{1}{2} \|v - \Psi v\| \leq \|u - v\| \quad \text{ve} \quad \|\Psi u - \Psi v\| > \|u - v\|$$

Ψ , (C)-şartını sağlamaz. Bununla birlikte $\alpha \geq \frac{1}{3}$ için genelleşmiş α -genişlemeyen dönüşümdür (Pant & Shukla, 2017).

Örnek 2.5.5. $\Psi: [0, 2] \rightarrow [0, 2]$ dönüşümü

$$\Psi u = \begin{cases} 0, & u \neq 2 \\ 1, & u = 2 \end{cases}$$

olarak tanımlayalım.

$u \in (1, 1,33]$ ve $v = 2$ için

$$\frac{1}{2} \|u - \Psi u\| \leq \|u - v\| \quad \text{ve} \quad \|\Psi u - \Psi v\| = 1 > 2 - u = \|u - v\|$$

olduğundan Ψ dönüşümü (C)-şartını sağlamaz. Bununla birlikte $\alpha \geq \frac{1}{3}$ için genelleşmiş α genişlemeyen dönüşüm olur (Suzuki, 2008).

Örnek 2.5.6. $\Psi: [0, 8] \rightarrow [0, 8]$ dönüşümü

$$\Psi u = \begin{cases} 0, & u \neq 8 \\ 4, & u = 8 \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. $u \in (4, 5,33]$ ve $v = 8$ için

$$\frac{1}{2} \|u - \Psi u\| \leq \|u - v\| \quad \text{ve} \quad \|\Psi u - \Psi v\| = 4 > 8 - u = \|u - v\|$$

olduğundan Ψ dönüşümü (C)-şartını sağlamaz. Bununla birlikte $\alpha \geq \frac{1}{3}$ için genelleşmiş α -genişlemeyen dönüşüm olur.

3. MATERİYAL VE YÖNTEM

3.1. İterasyon (Yineleme) Süreçleri

Sabit nokta bulma problemlerinde, farklı iterasyon yöntemleri ve yaklaşımlarından yararlanılır. Bunlardan bazıları şunlardır:

Tanım 3.1.1. Picard iterasyonu (1890), ardışık yaklaşımlar dizisi şeklinde tanımlanır. X bir düzgün konveks Banach uzayı, $K \neq \emptyset$ X 'in kapalı konveks bir alt kümesi olsun. $\Psi: K \rightarrow K$ bir dönüşüm olsun. Keyfi $u_0 \in K$, $n \geq 1$ pozitif tamsayı için

$$u_{n+1} = \Psi u_n \quad (3.1.1)$$

olsun. (3.1.1) oluşan diziye Picard iterasyonu süreci denir (Picard, 1890). Krasnosel'skii (1955) genişlemeyen bir dönüşümün sabit noktası bulunsa bile, Picard iterasyonunun bu sabit noktaya yakınsamayabileceğini göstermiştir. Şimdi bunu açıklayalım. $X = [0,1]$ olmak üzere $\Psi : [0,1] \rightarrow [0,1]$, $\Psi u = 1 - u$ genişlemeyen bir dönüşüm olsun. $F(\Psi) = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ elde edilir. Buradan herhangi bir $u_1 = a \neq \frac{1}{2}$ noktası için (3.1.1) Picard iterasyonu,

$$\begin{aligned} u_2 &= \Psi u_1 = 1 - a \\ u_2 &= \Psi u_1 = \Psi^2(u_0) = a \\ u_3 &= \Psi u_2 = \Psi^2(u_1) = \Psi^3(u_0) = 1 - a \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ u_n &= \Psi u_{n-1} = \Psi^2(u_{n-2}) = \dots = \Psi^n(u_0) \end{aligned}$$

şeklinde dir. Bu ise $(a, 1 - a, a, 1 - a, \dots)$ dizisini oluşturur. Bu dizi $a \neq \frac{1}{2}$ için yakınsak olmadığından, Picard iterasyonu Ψ dönüşümünün sabit noktasına yakınsamaz.

Mann iterasyonu, sabit nokta teorisinde kullanılan önemli bir yöntemdir. Nonexpansive (genişlemeyen) dönüşümler için sabit noktasını bulmak amacıyla kullanılır. Banach sabit nokta teoremi daralma dönüşümler için geçerliyken, Mann iterasyonu daha genel durumda, özellikle genişlemeyen dönüşümlerde işe yarar.

Tanım 3.1.2. 1953 yılında, Mann (1953) literatüre Mann iterasyonu olarak geçen yöntemi önermiştir. X Banach uzayı, $K \neq \emptyset$, X 'in kapalı konveks bir alt kümesi olarak alınsın. $\Psi: K \rightarrow K$ bir dönüşüm ve $u_1 \in K$ olmak üzere Mann iterasyonu;

$$u_{n+1} = (1 - a_n)u_n + a_n \Psi u_n \quad (3.1.2)$$

olarak tanımlanır. Burada $\{a_n\}$, $[0,1]$ aralığında bir dizidir.

S. Ishikawa (1976) tarafından Ishikawa iterasyonu sunulmuştur. Ishikawa iterasyonu, özellikle daha karmaşık sabit nokta denklemleri ve daha genel dönüşümler için avantajlıdır.

Tanım 3.1.3. X Banach uzayı, $K \neq \emptyset$, X' in kapalı konveks bir alt kümesi ve $\Psi: K \rightarrow K$ dönüşüm olsun. Ishikawa iterasyonu ;

$$\begin{cases} u = u_1 \\ u_{n+1} = (1 - a_n)u_n + a_n \Psi y_n, \\ y_n = (1 - b_n)u_n + b_n \Psi u_n \end{cases} \quad (3.1.3)$$

olarak tanımlanır. Burada $u_1 \in K$ keyfi elemanı ve $\{a_n\}, \{b_n\} \in [0,1]$ 'dir.

Ishikawa iterasyonda $b_n = 0$ alınırsa, Mann iterasyonuna indirgenmiş olur. Mann iterasyonu, 1- adımlı bir yaklaşımdır. Ishikawa iterasyonu, 2- adımlı bir yaklaşımdır.

2000 yılında, Noor (2000) tarafından Noor iterasyon yöntemi sunulmuştur. Bu çalışma, Hilbert uzaylarında ortaya çıkan çeşitli eşitsizliklerin yaklaşık çözümlerini elde etmek amacıyla kullanılan üç adımlı Noor iterasyon yöntemini tanıtmış ve bu yöntemi yinelemeli teknikler çerçevesinde analiz etmiştir. Noor iterasyonu, sabit nokta teorisinde ve özellikle nonexpansive dönüşümler altında çözüm ararken kullanılan, Mann ve Ishikawa metodlarının daha genelleşmiş bir halidir.

Tanım 3.1.4. Noor (2000), $u_1 \in K$ keyfi elemanı ve $[0,1]$ aralığında olan $\{a_n\}, \{b_n\}$ ve $\{c_n\}$ dizileri için

$$\begin{cases} u = u_1, \\ u_{n+1} = (1 - a_n)u_n + a_n \Psi y_n, \\ y_n = (1 - b_n)u_n + b_n \Psi z_n, \\ z_n = (1 - c_n)u_n + c_n \Psi u_n \end{cases} \quad (3.1.4)$$

iterasyonunu tanımladı.

Tanım 3.1.5. Thakur vd. (2016), $u_1 \in K$, $[0,1]$ aralığındaki $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ dizileri için

$$\begin{cases} u = u_1, \\ u_{n+1} = (1 - a_n)\Psi z_n + a_n \Psi y_n, \\ y_n = (1 - b_n)z_n + b_n \Psi z_n, \\ z_n = (1 - c_n)u_n + c_n \Psi u_n, \end{cases} \quad (3.1.5)$$

iterasyonunu sundular ve genelleşmiş genişlemeyen dönüşümler için yakınsaklık sonuçlarını bu iterasyon metodunu kullanarak ispatladılar.

Ullah ve Arshad (2018), aşağıda yer alan ve mevcut iterasyon süreçleri ile karşılaştırıldığında daha iyi yakınsaklık oranları sunan, M-iterasyonu olarak bilinen, üç

aşamalı yeni bir iterasyon sürecini sundular. Genelleşmiş genişlemeyen dönüşümler için yakınsaklık sonuçlarını M iterasyonunu kullanarak ispatladılar.

Tanım 3.1.6. M iterasyonu,

$$u_0 \in K \text{ ve } \{a_n\} \in [0,1] \text{ olmak üzere,} \quad (3.1.6)$$

$$\begin{cases} u = u_1, \\ u_{n+1} = \Psi y_n, \\ y_n = \Psi z_n, \\ z_n = (1 - a_n)u_n + a_n \Psi u_n \end{cases}$$

şeklinde tanımladılar.

K-iterasyonu, sabit nokta teorisinde kullanılan ve özellikle genişlemeyen (nonexpansive) veya daha genel dönüşümler için önerilen genelleştirilmiş bir iterasyon yöntemidir. Hussain vd. (2018), K-iterasyon işlemi yardımıyla, daralma dönüşümlerinin sabit noktası için veri bağımlılığı sonucu ispatlamışlardır. Ayrıca, düzgün konveks Banach uzaylarında, hem daralma hem de genişlemeyen dönüşümlerin genelleştirilmesini ifade eden, Suzuki (C)-şartını sağlayan genelleşmiş genişlemeyen dönüşümler için bazı zayıf ve güçlü yakınsaklık teoremlerini ispatlamışlardır. K iterasyonu aşağıdaki gibi tanımlamışlardır.

Tanım 3.1.7. K iterasyonu aşağıdaki gibi tanımlandı.

$u_1 \in K$, $[0,1]$ aralığındaki $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ dizileri için

$$\begin{cases} u = u_1, \\ u_{n+1} = \Psi y_n, \\ y_n = \Psi((1 - a_n)\Psi u_n + a_n \Psi z_n), \\ z_n = (1 - b_n)u_n + b_n \Psi u_n \end{cases} \quad (3.1.7)$$

iterasyonunu tanımladılar.

Temir ve Korkut (2023) düzgün konveks Banach uzaylarında, genelleşmiş α -genişlemeyen dönüşümler için aşağıda verilen T.S-iterasyon süreci kullanarak bazı yakınsaklık sonuçlarını ispatlamışlardır.

Tanım 3.1.8. T.S-iterasyon süreci aşağıdaki gibi tanımlandı.

$u_1 \in K, [0,1]$ aralığındaki $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ dizileri için

$$\begin{cases} u = u_1, \\ u_{n+1} = \Psi w_n, \\ w_n = \Psi((1 - a_n)y_n + a_n \Psi y_n), \\ y_n = \Psi((1 - b_n)\Psi u_n + b_n \Psi z_n), \\ z_n = \Psi((1 - c_n)u_n + c_n \Psi u_n). \end{cases} \quad (3.1.8)$$

3.2. Gerekli Tanımlar, Lemmalar ve Teoremler

Tanım 3.2.1. Banach uzayı X , Opial şartını (1967)) sağlıyorsa, her zayıf yakınsak dizi $\{u_n\}$ ve her $u \in X, u \neq v$ için aşağıdaki şart sağlanır:

Eğer $u_n \rightharpoonup v$ (yani u_n zayıf olarak v 'e yakınsıyorsa), o zaman

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\| < \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n - v\|.$$

Opial şartı, sabit nokta kuramında özellikle zayıf yakınsaklık analizlerinde kullanılan bir koşuldur. Banach uzaylarının bazı özelliklerini ifade eder ve özellikle genişlemeyen dönüşümler için yakınsama analizinde önemli bir rol oynar.

Tanım 3.2.2. Bir Banach uzayı olan X 'de, $K \neq \emptyset$ kapalı bir altküme olsun. $\Psi: K \rightarrow K$ dönüşümü tanımlansın. K içinde $\{u_n\}$ sınırlı dizisi, $u \in K$ 'ya zayıf yakınsak ve $\|\Psi u_n - u_n\| \rightarrow 0$ ise $\Psi u = u$, yani u , Ψ dönüşümünün sabit noktasıdır. O halde $I - \Psi I$ dönüşümü (yani sabit nokta eşitliğini ifade eden $\Psi u = u$ için, sıfır (0)' da yarı kapalı (*demi-closed*) dönüşüm denir (Agarwal & O'Regan (2009)). Burada I birim dönüşümdür.

Tanım 3.2.3. (I Şartı): X bir DKBU ve K, X 'in boştan farklı konveks alt kümesi, $\Psi: K \rightarrow K$ tanımlanan dönüşüm ve $F(\Psi) \neq \emptyset$ olsun. Her $k > 0$ için $f(k) > 0, f(0) = 0$ olacak biçimde azalmayan bir $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu var ve her $u \in K$ için $\|u - \Psi u\| \geq f(d(u, F(\Psi)))$ ise, Ψ ye (I) şartını sağlar denir (Senter & Dotson, 1974). Burada $d(u, F(\Psi)) = \inf_{v \in F(\Psi)} d(u, v)$ 'dir. (I) şartı, K 'nın kompaktlığından daha zayıftır.

Lemma 3.2.4. X bir DKBU ve tüm pozitif tamsayılar için $0 < p \leq t_n \leq q < 1$ olsun. Ayrıca $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ X 'de bazı $r \geq 0$ için

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| \leq r, \limsup_{n \rightarrow \infty} \|v_n\| \leq r$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|t_n u_n + (1 - t_n) v_n\| = r$$

şartlarını sağlayan iki dizi olsun. Bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - v_n\| = 0$ olur (Schu , 1991).

Tanım 3.2.5. K, X Banach uzayının bir alt kümesi ve $\{u_n\}$, X ’ de sınırlı bir dizi olsun. $u \in X$ olmak üzere,

$$r_\alpha(u, \{u_n\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|$$

ile verilen $r_\alpha(u, \{u_n\})$ ’nın infimumuna $\{u_n\}$ dizisinin K ’ya göre asimptotik yarıçapı denir ve $r_\alpha(K, \{u_n\})$ ile gösterilir. Yani asimptotik yarıçap

$r_\alpha(K, \{u_n\}) = \inf\{r_\alpha(u, \{u_n\}) : u \in K\}$ olarak ifade edilir.

$z \in K$ için

$$r_\alpha(z, \{u_n\}) = \inf\{r_\alpha(u, \{u_n\}) : u \in K\} = r_\alpha(K, \{u_n\})$$

ise $z \in K$ noktasına $\{u_n\}$ dizisinin K ya göre asimptotik merkez denir . $\{u_n\}$ dizisinin K ’ ya göre asimptotik merkezlerinin sınıfı $Z_\alpha(K, \{u_n\})$ şeklinde ifade edilir.

$$Z_\alpha(K, \{u_n\}) = \{z \in K : r_\alpha(z, \{u_n\}) = r_\alpha(K, \{u_n\})\}'dir.$$

$Z_\alpha(K, \{u_n\})$ nin elemanı olmayacağı gibi bir veya birden çok elemanı olabilir.

Edelstein [5] da, X bir DKBU ve K, X ’in boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi olsun. X ’deki her sınırlı $\{u_n\}$ dizisi için $Z_\alpha(K, \{u_n\})$ kümesinin tek elemana sahip olduğunu aşağıdaki teoremle gösterdi.

Teorem 3.2.6. $K \neq \emptyset$, X DKBU’nun kapalı konveks bir alt kümesi olsun. Her sınırlı $\{u_n\} \subset X$ dizisi, K altkümesine göre yalnızca bir asimptotik merkeze sahiptir. Yani

$$Z_\alpha(K, \{u_n\}) = \{z\}$$

ve $u \neq z$ olmak üzere

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n - z\| < \limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\| \text{ 'dir (Garc'ia-Falset vd., 2011).}$$

Sonuç 3.2.7.

1. Eğer K zayıf kompakt ise $Z_\alpha(K, \{u_n\})$ boş olmayan bir kümedir.
2. Eğer K kapalı ise $Z_\alpha(K, \{u_n\})$ de kapalıdır.
3. Eğer K konveks ise $Z_\alpha(K, \{u_n\})$ de konvekstir (Agarwal & O'Regan, 2009).

Teorem 3.2.8. K, X DKBU’ nun boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi ve $\{u_n\}$, K da $Z_\alpha(K, \{u_n\}) = \{z\}$ olacak biçimde sınırlı bir dizi olsun. Eğer $\{v_m\}$, K ’ de $\lim_{m \rightarrow \infty} r_\alpha(v_m, \{u_n\}) = r_\alpha(K, \{u_n\})$ koşulunu gerçekleştiren bir dizi ise $\lim_{m \rightarrow \infty} v_m = z$ dir [1].

Lemma 3.2.9. K, X Banach uzayının boş olmayan alt kümesi olsun. $\Psi: K \rightarrow K$ genelleşmiş α – genişlemeyen dönüşüm olsun. Her $u, v \in K$ için

$$\|u - \Psi(v)\| \leq \frac{3 + \alpha}{1 - \alpha} \|u - \Psi(u)\| + \|u - v\|$$

eşitsizliği vardır (Pant & Shukla , 2017).

Lemma 3.2.10. Ψ, X Banach uzayının K alt kümesi üzerinde bir dönüşüm olsun. (C)-şartını sağladığını varsayalım. O zaman her $(u, v) \in K$ için

$$\|u - \Psi v\| \leq 3 \|\Psi u - u\| + \|u - v\|$$

sağlanır (Suzuki, 2008).

Lemma 3.2.11. Ψ, X Banach uzayının K alt kümesi üzerinde bir dönüşüm olsun. (C)-şartını sağladığını varsayalım. O zaman aşağıdaki durumlar söz konusudur (Suzuki, 2008):

$$i) \|\Psi u - \Psi^2 u\| \leq \|u - \Psi u\|,$$

$$ii) \frac{1}{2} \|u - \Psi u\| \leq \|u - v\| \text{ ya da } \frac{1}{2} \|\Psi u - \Psi^2 u\| \leq \|\Psi u - v\|,$$

$$iii) \|\Psi u - \Psi v\| \leq \|u - v\| \text{ ya da } \|\Psi^2 u - \Psi v\| \leq \|\Psi u - v\|.$$

Theorem 3.2.12. K, X Banach uzayının boş olmayan bir altkümesi olsun. $\Psi : K \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer,

i) K 'de Ψ için $\{u_n\}$ varsa öyle ki $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - \Psi u_n\| = 0$ ve $u_n \rightarrow u \in K$ (zayıf olarak)

ii) Ψ, K üzerinde (E)-şartını sağlıyorsa

iii) $(X, \|\cdot\|)$ Opial koşulunu sağlıyorsa $u = \Psi u$ olur (Garc'ia-Falset vd., 2011).

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Garcia-Falset Genelleşmiş Genişlemeyen Dönüşümler

Tanım 4.1.1. (Garcia-Falset genelleşmiş genişlemeyen dönüşüm): X Banach uzayı ve $K \neq \emptyset, K \subset X$ boş olmayan bir altkümesi olmak üzere $\mu \geq 1$ için, $\Psi: K \rightarrow X$ dönüşümünü tanımlayalım. Her $u, v \in K$ için $\mu \geq 1$ varsa,

$$\|u - \Psi v\| \leq \mu \|u - \Psi u\| + \|u - v\|, \quad (4.1.1)$$

K üzerindeki (E_μ) şartı sağladığında, Ψ 'nin K üzerindeki (E) -şartını sağladığını söyleyebiliriz. (E) -şartını gerçekleyen dönüşümler sınıfı, Garcia-Falset-genelleşmiş genişlemeyen dönüşümler veya Garcia-Falset GGD dönüşümleri olarak isimlendirilecektir. Garcia-Falset genelleşmiş genişlemeyen dönüşümlerin sınıfı, Suzuki dönüşümleri sınıfını (ve dolayısıyla genişlemeyen dönüşümler sınıfını) kapsar, ancak quasi-genişlemeyen dönüşümlerden daha güçlüdür

Önerme 4.1.2. Eğer $\Psi: K \rightarrow X$ genişlemeyen bir dönüşüm ise, o zaman (E_1) -şartını sağlar. Bunun tersi doğru değildir (Garc'ia-Falset, 2011).

Önerme 4.1.3. Eğer $\Psi: K \rightarrow K$, K üzerindeki (C) -şartını sağlıyorsa, o zaman (E_3) -şartını sağlar (Garc'ia-Falset, 2011).

Önerme 4.1.4. $\Psi: K \rightarrow X, K$ üzerinde (E) -şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. Ψ 'nin bir sabit noktası varsa, Ψ quasi-genişlemeyen dönüşümdür. Tersisi doğru değildir (Garc'ia-Falset, 2011).

Önerme 4.1.5. $\Psi: K \rightarrow X, K$ üzerinde (E_α) - şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

a) Eğer $\Psi, K \subset K$ ise tüm $u \in K$ için,

$$\|u - \Psi^2 u\| \leq (\alpha + 1) \|u - \Psi u\|$$

b) Eğer $\Psi, K \subset K$ ise tüm $u, v \in K$ için,

$$\|\Psi u - \Psi v\| \leq \alpha \|\Psi u - \Psi^2 u\| + \|\Psi u - v\|$$

c) Eğer $r \in (0, 1)$ ise, o zaman $\Psi r = r\Psi + (1 - r)I$ olarak tanımlanan

$\Psi r: K \rightarrow X$ dönüşümleri (burada I , birim dönüşüm), K üzerinde (E_α) - şartını sağlar (Garc'ia-Falset, 2011).

Önerme 4.1.6. K, X Banach uzayının boş olmayan sınırlı bir alt kümesi olsun. $\Psi : K \rightarrow K$ keyfi bir dönüşüm olsun. O zaman aşağıdaki ifadelerin en az biri geçerlidir.

a) $\|u_n - \Psi u_n\| \rightarrow 0$ olacak şekilde K içinde bir $\{u_n\}$ varsa böyle dizilere Ψ nin *hemen hemen sabit nokta dizisi* denir.

b) Ψ, K üzerindeki (E)-şartını sağlar (Garc'ia-Falset, 2011).

Örnek 4.1.7. $K = [-2, 1] \subset \mathbb{R}, \mathbb{R}$ 'de alışılmış normla donatılmış olsun ve

$\Psi: [-2, 1] \rightarrow [-2, 1]$ olmak üzere

$$\Psi u = \begin{cases} \frac{|u|}{2} & u \in [-2, 1) \\ -\frac{1}{2} & u = 1 \end{cases}$$

dönüşümü verilsin. Ψ 'nin $[-2, 1]$ 'de (E)-şartını sağladığını göstermek için aşağıdaki durumları ele alalım.

a) $u \in [-2, 0], v \in [-2, 1]$ için $\|u - \Psi u\| = \frac{3}{2}\|u\|$

$$\|u - \Psi v\| \leq \|u\| + \frac{1}{2}\|v\| \leq \frac{1}{2}\|u - v\| \leq \|u - \Psi u\| + \|u - v\| \text{ elde edilir.}$$

b) $u \in [0, 1), v \in [-2, 1]$ için $\|u - \Psi u\| = \frac{1}{2}\|u\|$

$$\|u - \Psi v\| \leq \|u\| + \frac{1}{2}\|v\| \leq \frac{1}{2}\|u - v\| \leq 3\|u - \Psi u\| + \|u - v\| \text{ elde edilir.}$$

c) $u = 1, v \in [-2, 1)$ için $\|u - \Psi u\| = \frac{3}{2}$

$$|1 - \Psi v| = \frac{1}{2} + \frac{1-|v|}{2} \leq \frac{1}{3}|1 - \Psi(1)| + \frac{1}{2}|1 - v| \leq |1 - \Psi(1)| + |1 - v| \text{ elde edilir.}$$

$u, v \in [-2, 1)$ alınırsa, bütün durumlar için $\|u - \Psi v\| \leq 3\|u - \Psi u\| + \|u - v\|$ olur.

Yani $\Psi, [-2, 1]$ 'de (E_3) -şartı sağlanır. Ancak bu örnek, tersinin doğru olmadığını gösteriyor. Çünkü bu dönüşüm, $[-2, 1]$ de (C)-şartını sağlamıyor.

Eğer $u = \frac{4}{5}$ ve $v = 1$ alınırsa

$$\frac{1}{2} \left| \frac{4}{5} - \Psi \left(\frac{4}{5} \right) \right| = \frac{1}{5} \leq \left| \frac{4}{5} - 1 \right|$$

$$\left| \Psi \left(\frac{4}{5} \right) - \Psi(1) \right| = \frac{2}{5} + \frac{1}{2} > \left| \frac{4}{5} - 1 \right|$$

elde edilir. Böylece (E)-şartını sağlayan dönüşümler (C)-şartını sağlamaz.

Son olarak, Önerme 4.1.4'den $\Psi (0) = 0$ olduğundan, Ψ 'nin $[-2, 1]$ üzerinde quasi-genişlemeyen olduğunu elde edilir (Garc'ia-Falset, 2011).

Örnek 4.1.8. $K = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ 'de alışılmış normla donatılmış olsun ve

$$\Psi: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$$

$$\Psi u = \begin{cases} \frac{u}{1+|u|} \sin \frac{1}{u} & u \neq 0 \\ 0 & u = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Ψ 'nin sabit noktasının 0 dolduğu kolayca görülebilir.

Şimdi $u \in [-1, 1]$ alalım. O zaman $|\Psi u| \leq u$ bulunur.

$$|\Psi u| = \left| \frac{u}{1+|u|} \sin \frac{1}{u} \right| \leq \left| \frac{u}{1+|u|} \right| \leq \frac{|u|}{1+|u|} \leq |u|$$

Bu da $[-1, 1]$ aralığında Ψ nin quasi genişlemeyen dönüşüm olduğunu söyler.

Şimdi Ψ nin $[-1, 1]$ aralığında (E)- şartını sağlamadığını gösterelim.

Eğer $u_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$ ve $v_n = \frac{1}{2\pi n}$ $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ alınırsa o zaman

$$\frac{|u_n - \Psi v_n| - |u_n - v_n|}{|u_n - \Psi u_n|} = \frac{u_n - (v_n - u_n)}{|u_n - \Psi u_n|}$$

$$= \frac{u_n - (v_n - u_n)}{\frac{u_n^2}{1+u_n}} = \frac{(1+u_n)(2 - \frac{v_n}{u_n})}{u_n} \rightarrow \infty$$

Sonuç olarak Ψ dönüşümü $[-1, 1]$ aralığında (E)-şartını sağlamaz (Garc'ia-Falset, 2011).

Örnek 4.1.9. $K = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ 'de alışılmış normla donatılmış olsun ve

$$\Psi: K \rightarrow K, \quad \Psi(u) = \begin{cases} \frac{u}{2} & u \in [0, 1) \\ \frac{8}{9} & u = 1 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. İlk olarak Ψ nin Tanım 2.5.2 de verilen eşitsizliği yani genelleşmiş α -genişlemeyen durumunu sağlamadığını gösterelim. Aslında $u = \frac{7}{9}$ ve $v = 1$ seçersek doğrudan hesaplama ile

$$\frac{1}{2} \|u - \Psi u\| = \frac{1}{6} \leq \frac{2}{9} = \|u - v\| \text{ olduğunda,}$$

$$\alpha |\Psi u - v| + \alpha |\Psi v - u| + (1 - 2\alpha) |u - v| = \frac{2}{9} (\alpha + 1) < \frac{4}{9} = |\Psi u - \Psi v|$$

elde edilir. Böylece Ψ nin genelleşmiş α -genişlemeyen dönüşüm olmadığını gösterir.

Diğer taraftan kabul edilebilir parametreyi $\mu=4$ seçersek dönüşüm (E)-şartını sağlar. Bu bağlamda aşağıdaki durumları inceleyeceğiz.

Durum 1: $u, v \in [0,1)$ olsun. Böylece (4.1.1) eşitsizliği aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\|u - \Psi v\| = \left| u - \frac{v}{2} \right| \leq u + \frac{1}{2}v \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{2}|u - v| \leq 3\|u - \Psi u\| + \|u - v\| \text{ ifadesinden}$$

Ψ, E_3 şartını sağlar.

Durum 2: $u=1$ ve $v \in [0,1)$ olsun. Buradan $|u - \Psi u| = \frac{1}{9}$ olur. Bu durum için (E)-şartı değerlendirildiğinde,

$$\|u - \Psi v\| = 1 - \frac{v}{2} \leq \mu \frac{1}{9} + 1 - v \text{ veya } v \leq \mu \frac{2}{9} \text{ elde edilir. Bu durumda } \Psi, E_5 \text{ şartını}$$

sağlar.

Durum 3: $u \in [0,1), v = 1$ için (E)-şartı aşağıdaki duruma dönüşür:

$$\|u - \Psi v\| = \left| u - \frac{8}{9} \right| \leq \mu \frac{u}{2} + 1 - u$$

Eğer $u \geq \frac{8}{9}$ olursa yukardaki eşitsizlik $2u \leq \frac{u}{2}\mu + \frac{17}{9}$ şeklinde yazılabilir. Bu durumda $\Psi, (E_4)$ -şartını sağlar. Ancak $u \leq \frac{8}{9}$ için Ψ nin (E)-şartını sağladığı kolayca görülebilir. μ parametresinin en büyük değeri alındığında Ψ nin (E_5) -şartını sağladığı görülür. Daha genel bir ifade ile Örnek 4.1.9' da tanımlanan Ψ dönüşümün Garcia-Falset dönüşümü olduğu ancak Ψ nin genelleşmiş α -genişlemeyen dönüşüm olmadığı sonucuna ulaşılır.

Örnek 4.1.10. $K = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ 'de alışılmış normla donatılmış olsun ve

$$\Psi: K \rightarrow K, \Psi u = \begin{cases} \frac{1}{u^2+2} & u \neq 1 \\ \frac{3}{4} & u = 1 \end{cases}$$

ile tanımlansın. Ψ nin (E_4) şartını sağladığını göstermek için aşağıdaki eşitsizliğe bakalım.

$$\|u - \Psi v\| \leq 4\|u - \Psi u\| + \|u - v\| \quad \forall u, v \in [0,1] \quad (4.1.2)$$

Durum 1: $u = 1$ ve $v \in [0,1)$ olsun. Yukarıdaki eşitsizlik aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\left|1 - \frac{1}{v^2+2}\right| \leq 4\left|1 - \frac{3}{4}\right| + |1 - v|$$

yani $1 - \frac{1}{v^2+2} \leq 1 + 1 - v$ buradan $v - \frac{1}{v^2+2} \leq 1$ eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik $v < 1$ iken sağlanır.

Durum 2: $u \in [0,1)$ ve $v = 1$ olsun. Eşitsizlik (4.1.2) den aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\left|u - \frac{3}{4}\right| \leq 4\left|u - \frac{1}{u^2+2}\right| + |u - 1|$$

$u \geq \frac{3}{4}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $f(u) = u - \frac{1}{u^2+2}$ fonksiyonu azalmayan olduğu için $f(u) \geq f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{59}{164} > 0$ değeri elde edilir. Buradan sağlanması gereken eşitsizlik

$$u - \frac{3}{4} \leq 4u - \frac{4}{u^2+2} + 1 - u \text{ olduğu görülür.}$$

Yani, $0 \leq 2u - \frac{4}{u^2+2} + \frac{7}{4}$ için $g(u) = 2u - \frac{4}{u^2+2} + \frac{7}{4}$ fonksiyonu azalmayandır ve en küçük değerinin $g\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{277}{164}$ için pozitif olduğu görülür.

$u \in \left[0, \frac{3}{4}\right]$ için (4.1.2) eşitsizliği şu şekilde elde edilir.

$$\frac{3}{4} - u \leq 4\left|u - \frac{1}{u^2+2}\right| + 1 - u$$

Yani $0 \leq \frac{2}{7} + \frac{7}{2}\left|u - \frac{1}{u^2+2}\right|$ ifadesinin doğru olduğu görülür.

Durum 3: $u, v \in [0,1)$ için (4.1.2) eşitsizliği

$\left|u - \frac{1}{v^2+2}\right| \leq 4\left|u - \frac{1}{u^2+2}\right| + |u - v|$ şeklini alır. Buradan aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{aligned}
\left| u - \frac{1}{v^2 + 2} \right| &\leq \left| u - \frac{1}{u^2 + 2} \right| + \left| \frac{1}{u^2 + 2} - \frac{1}{v^2 + 2} \right| \\
&\leq \left| u - \frac{1}{u^2 + 2} \right| + |u - v| \\
&\leq 4 \left| u - \frac{1}{u^2 + 2} \right| + |u - v|
\end{aligned}$$

Bu da bize istediğimiz sonucu verir.

Durum 4: $u = 1$ ve $v = 1$ için (4.1.2) eşitsizliği;

$\left| 1 - \frac{3}{4} \right| \leq 4 \left| 1 - \frac{3}{4} \right| + |1 - 1|$ şeklinde elde edilir. (4.1.2) eşitsizliği sağladığından Ψ nin (E_4) - şartını sağlar. Bu durum için de istediğimiz şart sağlanır.

Sonuç olarak yukarıda verilen durumlar göz önüne alınarak bu durumlardan Ψ nin (E_4) - şartını sağladığı görülür.

Şimdi bu dönüşümün (C)-şartını sağlamadığını gösterelim.

$u = 1$, $v = \frac{4}{5} = 0,8$ alalım. O zaman

$$\frac{1}{2} \|u - \Psi u\| = \frac{1}{2} \left| 1 - \frac{3}{4} \right| = 0.125 \leq 0.2 = \|u - v\|$$

$$\|\Psi u - \Psi v\| = \left| \frac{3}{4} - \frac{25}{66} \right| = \frac{198 - 100}{264} = \frac{98}{264} = 0.3712 > 0.2 = \|u - v\|$$

elde edilir. Bu da (C)-şartının sağlanmadığını gösterir.

Örnek 4.1.11. $K = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ 'de alışılmış normla donatılmış olsun ve $\Psi: K \rightarrow K$,

$$\Psi u = \begin{cases} -u , & u \in [-1, 0] - \left\{ -\frac{1}{2} \right\} \\ 0, & u = -\frac{1}{2} \\ -\frac{u}{2}, & u \in (0, 1] \end{cases}$$

dönüşümünü tanımlayalım.

Bu dönüşümün (C)-şartını sağlamadığını gösterelim.

$u = -1$, $v = -\frac{1}{2}$ alalım. O zaman

$$\frac{1}{2} \|u - \Psi u\| = \frac{1}{2} |-1 - 1| = \frac{1}{2} = \|u - v\|$$

$$\|\Psi u - \Psi v\| = |1 - 0| = 1 > \frac{1}{2} = \|u - v\|$$

elde edilir. Bu da (C)-şartını sağlanmadığını gösterir.

Şimdi (E)-şartını sağladığını gösterelim ve aşağıdaki durumları inceleyelim.

i) $u, v \in (0,1)$ için

$$\begin{aligned} \|u - \Psi v\| &\leq \|u - \Psi u\| + \|u - v\| \\ &= \|u - \Psi u\| + \left\| \frac{u}{2} - \frac{v}{2} \right\| \\ &= \|u - \Psi u\| + \frac{1}{2} \|u - v\| \\ &\leq \|u - \Psi u\| + \|u - v\| \end{aligned}$$

ii) $u \in [-1,0] - \left\{-\frac{1}{2}\right\}, v \in (0,1)$ için

$$\begin{aligned} \|u - \Psi v\| &\leq \|u - \Psi u\| + \|\Psi u - \Psi v\| \\ &= \|u - \Psi u\| + \left\| -u + \frac{v}{2} \right\| \\ &\leq \|u - \Psi u\| + \left\| -u + v \right\| \\ &\leq \|u - \Psi u\| + \|u - v\| \end{aligned}$$

iii) $u \in [-1,0] - \left\{-\frac{1}{2}\right\}, v = -\frac{1}{2}$ için

$$\begin{aligned} \|u - \Psi v\| &= |u| \leq 2 \cdot |u| + \left| u + \frac{1}{2} \right| \\ &= \|u - \Psi u\| + \|u - v\| \end{aligned}$$

iv) $u \in (0,1), v = -\frac{1}{2}$ için

$$\begin{aligned} \|u - \Psi v\| &= |u| \leq \frac{3}{2} |u| + \left| u + \frac{1}{2} \right| \\ &= \|u - \Psi u\| + \|u - v\| \end{aligned}$$

Böylece $\Psi, \mu \geq 1$ ile (E)-şartını sağlar ve Ψ dönüşümü, 0 sabit noktasına sahip olur.

4.2. (E) - Şartını Sağlayan GGD'lerin Zayıf ve Kuvvetli Yakınsaklıkları

Bu bölüm, düzgün konveks Garcia-Falset GGD'lerinin (3.1.9) iterasyon süreci için zayıf ve güçlü yakınsama teoremlerini ispatlanmaktadır.

Lemma 4.2.1. K , düzgün konveks bir Banach X uzayının boş olmayan kapalı konveks bir altkütmesi, $\Psi : K \rightarrow K$, $F(\Psi) \neq \emptyset$ olan bir Garcia-Falset GGD olsun. Keyfi olarak seçilen $u_1 \in K$ için, $\{u_n\}$ (3.1.8) tarafından üretilen bir dizi olsun, o zaman herhangi bir $p \in F(\Psi)$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - p\|$ mevcuttur (Temir & Zincir, 2023).

İspat $F(\Psi) \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. $\Psi : K \rightarrow K$ bir Garcia-Falset GGD olduğundan Ψ quasi-genişlemeyendir. (3.1.8) iterasyon süreci ve herhangi bir $p \in F(\Psi)$ için, Ψ quasi-genişlemeyen dönüşüm olmasından dolayı

$$\begin{aligned} \|z_n - p\| &= \|\Psi((1 - c_n)u_n + c_n\Psi u_n) - p\| \\ &\leq \|(1 - c_n)(u_n - p) + c_n(\Psi u_n - p)\| \\ &\leq (1 - c_n)\|u_n - p\| + c_n\|\Psi u_n - p\| \\ &= \|u_n - p\| \quad \text{elde edilir.} \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

(3.1.8) ve (4.2.1)'den

$$\begin{aligned} \|y_n - p\| &= \|\Psi((1 - b_n)\Psi u_n + b_n\Psi z_n) - p\| \\ &\leq \|(1 - b_n)(\Psi u_n - p) + b_n(\Psi z_n - p)\| \\ &\leq (1 - b_n)\|\Psi u_n - p\| + b_n\|\Psi z_n - p\| \\ &= \|u_n - p\| \quad \text{elde edilir.} \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

(3.1.8) ve (4.2.2)'den

$$\begin{aligned} \|w_n - p\| &= \|\Psi((1 - a_n)y_n) + a_n\Psi y_n - p\| \\ &\leq \|(1 - a_n)(y_n - p) + a_n(\Psi y_n - p)\| \\ &\leq (1 - a_n)\|y_n - p\| + a_n\|\Psi y_n - p\| \\ &= \|u_n - p\| \quad \text{elde edilir.} \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Ayrıca (3.1.8) ve (4.2.3)'den

$$\|u_{n+1} - p\| = \|\Psi w_n - p\| \leq \|w_n - p\| \leq \|u_n - p\| \text{ elde edilir.}$$

Bu, $\{\|u_n - p\|\}$ 'nin tüm $p \in F(\Psi)$ için sınırlı ve artmayan olduğu anlamına gelir.

Dolayısıyla, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - p\|$ vardır (Temir & Zincir, 2023).

Teorem 4.2.2. K , DKBU X 'in boş olmayan kapalı konveks bir altkütmesi olsun. $\mu \geq 1$ için, $\Psi : K \rightarrow K$ bir Garcia-Falset GGD olsun. Keyfi olarak seçilen $u_1 \in K$ için, $\{u_n\}$ 'un $[0, 1]$ 'de $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ve $\{c_n\}$ reel dizileriyle (3.1.8) ile tanımlanan bir dizi olsun. O zaman $F(\Psi) \neq \emptyset$ ancak ve ancak $\{u_n\}$ sınırlıysa ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - \Psi u_n\| = 0$ olur (Temir & Zincir, 2023).

İspat

$F(\Psi) \neq \emptyset$ olduğunu ve $p \in F(\Psi)$ olduğunu varsayalım. Lemma 4.2.1'den, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - p\|$ vardır ve $\{u_n\}$ sınırlıdır.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - p\| = \kappa$ yazalım. (E) koşulunu sağlayan bir GGD quasi genişlemeyen dönüşüm olduğundan ve (3.1.8)'den,

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|z_n - p\| &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n - p\| = \kappa \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \|w_n - p\| &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|y_n - p\| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n - p\| = \kappa \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \|\Psi u_n - p\| &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n - p\| = \kappa \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

Ayrıca, $\|u_{n+1} - p\| \leq \|w_n - p\|$ olur. Bu nedenle, $\kappa \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|w_n - p\|$ dir.

Böylece, $\kappa = \lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n - p\|$ elde edilir.

Buradan da, $\kappa = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|w_n - p\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|y_n - p\|$ elde edilir.

Sonuç olarak, $\kappa = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - p\|$ elde edilir.

Ayrıca,

$$\begin{aligned} \|y_n - p\| &= \|\Psi((1 - b_n)\Psi u_n + b_n\Psi z_n) - p\| \\ &\leq \|(1 - b_n)(\Psi u_n - p) + b_n(\Psi z_n - p)\| \\ &\leq (1 - b_n)\|\Psi u_n - p\| + b_n\|\Psi z_n - p\| \\ &\leq (1 - b_n)\|u_n - p\| + b_n\|z_n - p\| \end{aligned}$$

Bu nedenle

$$\begin{aligned} \|y_n - p\| - \|u_n - p\| &\leq \frac{\|y_n - p\| - \|u_n - p\|}{b_n} \leq \|z_n - p\| - \|u_n - p\|, \|y_n - p\| \leq \\ &\|z_n - p\| \\ &\text{elde edilir.} \end{aligned}$$

Böylece $\kappa = \lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - p\|$ olduğu bulunur.

Yine (3.1.8)'den $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(1 - c_n)(u_n - p) + c_n(\Psi u_n - p)\| = \kappa$ elde edilir.

Böylece Lemma 3.2.4'e göre $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - \Psi u_n\| = 0$ elde edilir.

Tersine, $\{u_n\}$ 'un sınırlı ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - \Psi u_n\| = 0$ olsun. $p \in A(K, \{u_n\})$ alalım.

$\Psi, \mu \geq 1$ ile (E)-şartını sağladığından,

$$\begin{aligned} r(\Psi p, \{u_n\}) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n - \Psi p\| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (\mu \|\Psi u_n - u_n\| + \|u_n - p\|) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n - p\| = r(p, \{u_n\}) \text{ olur (Temir \& Zincir, 2023).} \end{aligned}$$

Teorem 4.2.3. X in gerçek bir DKBU ve K 'nin X 'in boş olmayan kompakt konveks bir altkümesi olduğunu ve $\Psi: K \rightarrow K$ 'nin $\mu \geq 1$ için bir Garcia-Falset GGD olduğunu

varsayalım. Ψ ve $\{u_n\}$ 'un Teorem 4.2.2'deki gibi olduğunu varsayalım. Eğer $F(\Psi) \neq \emptyset$ ise, o zaman (3.1.8) ile tanımlanan $\{u_n\}$ sabit bir Ψ noktasına güçlü bir şekilde yakınsar (Temir & Zincir, 2023).

İspat

$F(\Psi) \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. Böylece Teorem 4.2.2'ye göre $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Psi u_n - u_n\| = 0$ elde edilir. K kompakt olduğundan, $k \rightarrow \infty$ bazı $p \in K$ için $u_{n_k} \rightarrow p$ olacak şekilde $\{u_n\}$ dizisinin $\{u_{n_k}\}$ alt dizisi vardır. $\Psi, \mu \geq 1$ ile (E) -şartını sağladığından, tüm $k \in \mathbb{N}$ için,

$$\|u_{n_k} - \Psi p\| \leq \mu \|\Psi u_{n_k} - u_{n_k}\| + \|u_{n_k} - p\| \text{ elde edilir.}$$

$k \rightarrow \infty$ alındığında, $u_{n_k} \rightarrow \Psi p$ elde edilir. Böylece $\Psi p = p$, yani $p \in F(\Psi)$ olur.

Ayrıca, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - p\|$ her $p \in F(\Psi)$ için vardır, dolayısıyla $\{u_n\}$, Ψ dönüşümünün sabit noktasına güçlü bir şekilde yakınsar (Temir & Zincir, 2023). Ayrıca, (I)-şartını sağlayan Garcia-Falset GGD'lerinin güçlü yakınsama teoremi aşağıda verilmiştir.

Teorem 4.2.4. K, X düzgün konveks Banach uzayının boş olmayan, kapalı konveks bir altkütmesi ve $\Psi: K \rightarrow K, \mu \geq 1$ için bir Garcia-Falset GGD olsun. Ψ ve $\{u_n\}$ Teorem 4.2.2'deki gibi tanımlansın ve $F(\Psi) \neq \emptyset$ olsun. Ψ , (I)-şartını sağlıyorsa, (3.1.8) ile tanımlanan $\{u_n\}$, Ψ sabit noktasına güçlü bir şekilde yakınsar (Temir & Zincir, 2023).

İspat: Lemma 4.2.1'den $p \in F(\Psi)$ için, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ mevcuttur ve böylece $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F(\Psi))$ mevcuttur. $r \geq 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = r$ olduğunu kabul edelim. Eğer $r = 0$ ise sonuç bulunur. $r > 0$ olduğunu kabul edelim. Hipotezden ve (I)-şartından $f(d(x_n, F(\Psi))) \leq \|\Psi x_n - x_n\|$ elde edilir. $F(\Psi) \neq \emptyset$ olduğundan Teorem 4.2.2' den $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Psi x_n - x_n\| = 0$ elde edilir. Bu da $\lim_{n \rightarrow \infty} f(d(x_n, F(\Psi))) = 0$ olduğunu verir. f azalmayan bir fonksiyon olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf d(x_n, F(\Psi)) = 0$ elde edilir. Böylece tüm $j \in \mathbb{N}$ için $\|x_{n_j} - y_j\| < \frac{1}{2^j}$ olacak şekilde $\{x_n\}$ dizisinin bir alt dizisi $\{x_{n_j}\}$ ve $\{y_j\} \subset F(\Psi)$ dizisine elde ederiz. O zaman

$$\|x_{n_{j+1}} - y_j\| \leq \|x_{n_j} - y_j\| < \frac{1}{2^j}$$

Böylece

$$\begin{aligned} \|y_{j+1} - y_j\| &\leq \|y_{j+1} - x_{j+1}\| + \|x_{j+1} - y_j\| \\ &\leq \frac{1}{2^{j+1}} + \frac{1}{2^j} < \frac{1}{2^{j-1}} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Böylece $\{y_j\}$ dizisi $F(\Psi)$ içinde bir Cauchy dizisi olduğu görülür ve dizi bir p noktasına yakınsar. $F(\Psi)$ kapalı olduğundan $p \in F(\Psi)$ olur ve $\{x_{n_j}\}$ p ye kuvvetli yakınsar. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ mevcut olduğundan $\{x_n\} \rightarrow p \in F(\Psi)$ elde edilir (Temir & Zincir, 2023).

Son olarak, Opial koşulunu sağlayan düzgün konveks Banach uzayındaki(DKBU) Garcia-Falset GDD'lerinin aşağıdaki zayıf yakınsama teoremi verilmiştir.

Teorem 4.2.5. K , Opial'in koşuluyla donatılmış bir DKBU olan X 'in boş olmayan kapalı konveks altkütmesi ve $\Psi: K \rightarrow K$, $\mu \geq 1$ için bir Garcia-Falset GGD olsun. Ψ ve $\{u_n\}$, Teorem 4.2.2'deki gibi ve $F(\Psi) \neq \emptyset$ olsun. O zaman, $\{u_n\}$ zayıf bir şekilde Ψ sabit noktasına yakınsar (Temir & Zincir, 2023).

İspat

$F(\Psi) \neq \emptyset$ olduğundan, p 'nin Ψ 'nin sabit bir noktası olduğunu varsayalım. Teorem 4.2.2'ye göre, $\{u_n\}$ dizisi sınırlıdır ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Psi u_n - u_n\| = 0$ ve Lemma 4.2.1'e göre, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - p\|$ vardır. X düzgün konveks olduğundan, X yansımalıdır. X 'in yansıma özelliği nedeniyle, $\{u_n\}$ dizisinin $\{u_{n_j}\}$ alt dizisi vardır ve $\{u_{n_j}\}$ zayıf bir şekilde bazı $v_1 \in X$ 'e yakınsar. K , X 'in kapalı ve konveks altkütmesi olduğundan, Mazur Teoremi'ne göre, $v_1 \in K$ dir. Buradan, Teorem 4.2.2 'ye göre $\Psi v_1 = v_1$, dolayısıyla $v_1 \in F(\Psi)$ elde edilir. Çelişki yoluyla tartışarak, $\{u_n\}$ dizisinin zayıf bir şekilde sırasıyla v_1 ve v_2 'ye yakınsayan iki alt dizisi $\{u_{n_j}\}$ ve $\{u_{n_k}\}$ olduğunu varsayalım. $\Psi v_2 = v_2$, $\Psi v_1 = v_1$ 'de aynı şekilde elde edilir. Bundan sonra, tekliği ispatlanacaktır. Lemma 4.2.1'e göre, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - v_1\|$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - v_2\|$ mevcuttur. $v_1 \neq v_2$ olduğunu varsayalım, daha sonra Opial koşuluna göre,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - v_1\| &= \lim_{j \rightarrow \infty} \|u_{n_j} - v_1\| < \\ \lim_{j \rightarrow \infty} \|u_{n_j} - v_2\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - v_2\| = \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_{n_k} - v_2\| &< \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_{n_k} - v_1\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - v_1\| \end{aligned}$$

elde edilir. Bu bir çelişkidir. Buradan, $v_1 = v_2$ olur. Dolayısıyla, $\{u_n\}$ zayıf bir şekilde Ψ sabit noktasına yakınsar. Bu, kanıtı tamamlar (Temir & Zincir, 2023).

4.3. (E) - Şartını Sağlayan Dönüşümlerin Örnekleri

Bu bölümde, Suzuki genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşümler sınıfını kapsayan Garcia-Falset-GGD'lere örnekler verilmektedir.

Örnek 4.3.1. $K = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ 'de alışılmış normla donatılmış olsun ve $\Psi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, şu şekilde tanımlanan bir dönüşüm olsun.

$$\Psi_u = \begin{cases} \frac{\arctan u}{2}, & u \neq 1 \\ \frac{5}{7}, & u = 1 \end{cases}$$

Burada, Ψ bir Garcia-Falset GGD'dir. Şimdi Ψ 'nin $(E_{7/2})$ -şartını karşıladığını göstereceğiz. Ψ için, $(E_{\frac{7}{2}})$ -şartını karşılamak, açıkça aşağıdaki eşitsizliğin geçerli olup olmadığını kontrol etmek anlamına gelir:

$$\text{Tüm } u, v \in [0, 1] \text{ için } \|u - \Psi v\| \leq \frac{7}{2} \|u - \Psi u\| + \|u - v\| \quad (4.3.1)$$

Ψ 'nin $(E_{\frac{7}{2}})$ -şartını sağladığını doğrulamak için aşağıdaki durumları ele alalım.

Durum I: $u = 1$ ve $v \in [0, 1)$ olsun. O zaman, (4.3.1) bu özel durum için aşağıdaki gibi yazılır

$$\left|1 - \frac{\arctan v}{2}\right| \leq \frac{7}{2} \left|1 - \frac{5}{7}\right| + |1 - v|$$

$$1 - \frac{\arctan v}{2} \leq 1 + 1 - v$$

Böylece

$v - \frac{\arctan v}{2} \leq 1 + 1 - v$ elde edilir ki bu da sonuçta $f(v) = v - \frac{\arctan v}{2} \leq 1$ koşuluna eşdeğerdir. $f(v) = v - \frac{\arctan v}{2}$ $[0, 1)$ aralığında azalmayan olduğundan, $Im(f) = [f(0), f(1)) = [f(0), 1 - \frac{\pi}{8})$; dolayısıyla bu eşitsizlik sağlanır.

Durum II: $u \in [0, 1)$ ve $v = 1$ olsun. O zaman, (4.3.1) eşitsizliği bu durum için aşağıdaki gibi yazılır

$$\left|u - \frac{5}{7}\right| \leq \frac{7}{2} \left|u - \frac{\arctan u}{2}\right| + |u - 1|$$

$$\leq \frac{7u}{2} - \frac{7\arctan u}{4} + 1 - u$$

$$\leq \frac{5u}{2} - \frac{7\arctan u}{4} + 1$$

$g(u) = \frac{5u}{2} - \frac{7\arctan u}{4} + 1$ fonksiyonu elde edilir. $g(u) = \frac{5u}{2} - \frac{7\arctan u}{4} + 1$ fonksiyonu $[0,1)$ aralığında azalmayan olduğundan $Im(g) = [g(0), g(1)) = [1, \frac{7}{2} - \frac{7\pi}{2})$ dir. Bu nedenle tüm $u \in [0, 1)$ için $g(u) \geq 1 > \left|u - \frac{5}{7}\right|$. Bu nedenle, bu eşitsizlik sağlanır.

Durum III: $u, v \in [0, 1)$ olsun. $\|u - \Psi v\| \leq \|u - \Psi u\| + \|\Psi u - \Psi v\|$ elde edilir. Yerine koyarak

$$\left|u - \frac{\arctan v}{2}\right| \leq \frac{7}{2} \left|u - \frac{\arctan u}{2}\right| + \frac{1}{2} |\arctan u - \arctan v| \text{ elde edilir.}$$

Ortalama değer teoreminden

$$\begin{aligned} \left|u - \frac{\arctan v}{2}\right| &\leq \frac{7}{2} \left|u - \frac{\arctan u}{2}\right| + \frac{1}{2} |u - v| \\ &\leq \frac{7}{2} \left|u - \frac{\arctan u}{2}\right| + |u - v| \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da tam olarak (4.3.1) eşitsizliği, $u, v \in [0, 1)$ için geçerlidir. Dolayısıyla, bu eşitsizlik sağlanır.

Durum IV: $u = 1, v = 1$ olsun. O zaman, yerine getirilmesi gereken (4.3.1) eşitsizliği şu şekildedir:

$$\left|1 - \frac{5}{7}\right| \leq \frac{7}{2} \left|1 - \frac{5}{7}\right| + |1 - 1|$$

$$\frac{2}{7} \leq 1$$

ve açıkça yerine getirilmiştir.

Son olarak Örnek 4.3.1 in (C)-şartını sağlamadığını gösterelim.

Eğer $u = 1, v = 0,8$ alınırsa, o zaman

$$\frac{1}{2} \|u - \Psi u\| = \frac{1}{2} \left|1 - \frac{5}{7}\right| = \frac{1}{7} = 0,1428 < 0,2 = \|u - v\| \text{ ve}$$

$$\|\Psi u - \Psi v\| = \left|\frac{5}{7} - \frac{\arctan(0.8)}{2}\right| = 0,37693 > 0,2 = \|u - v\| \text{ olur. Bu nedenle}$$

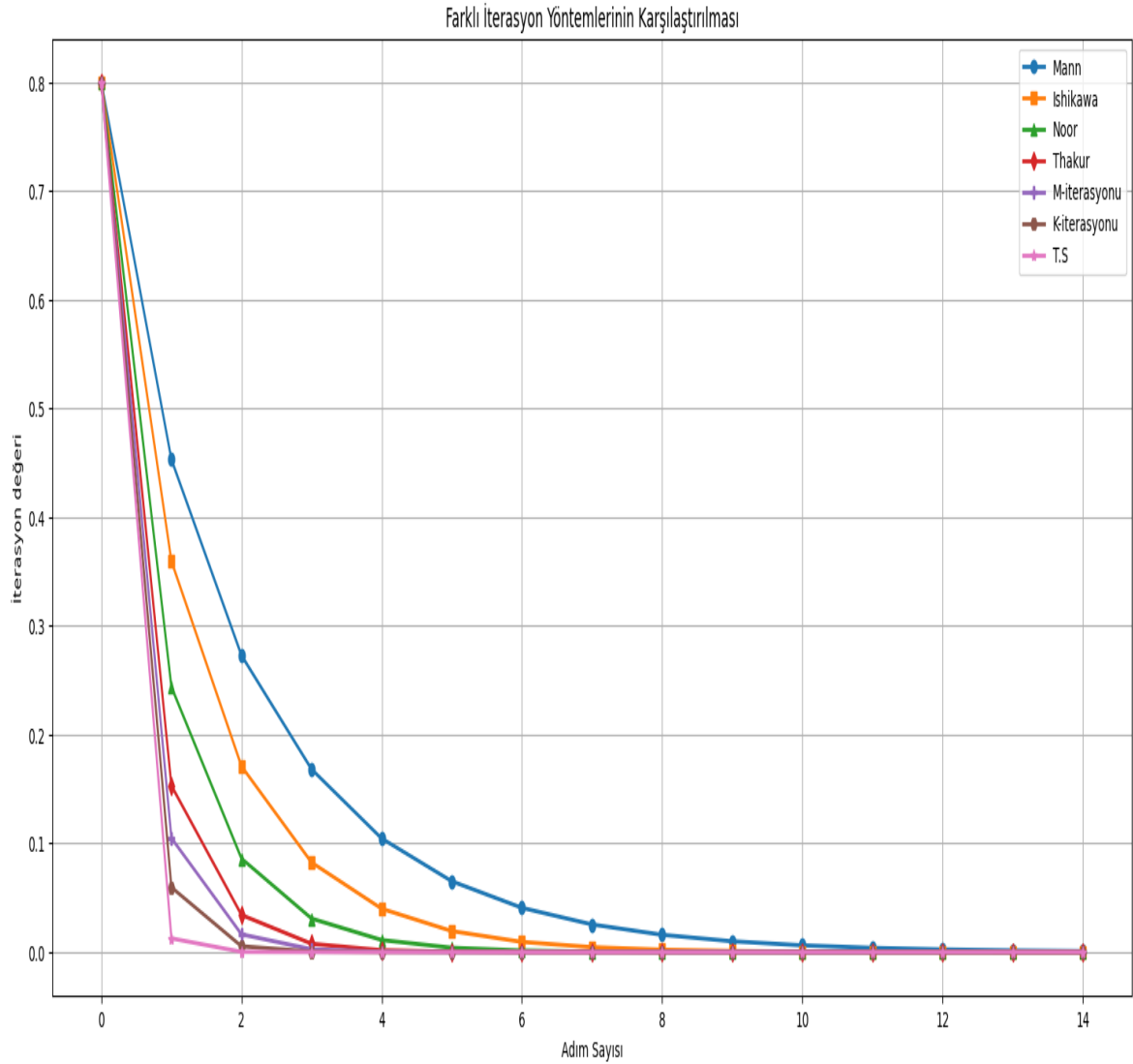
Ψ , (C) koşulunu sağlamaz (Temir & Zincir, 2023).

Şimdi de Garcia-Falset GGD'nin((E)-şartı) Örnek 4.3.1 sağlandığından (3.1.2-3.1.8) iterasyonlarının yakınsama davranışlarını bu örnek için sayısal hesaplamalarını yaparak

şekil ile belirtelim. Örnek 4.3.1 ‘de verilen dönüşüm için aşağıdaki çizelge ve şekilde, (3.1.2-3.1.8) iterasyon süreçlerinin yakınsama davranışları karşılaştırılmaktadır. Tüm $n \geq 1$ için $\{a_n\} = \{b_n\} = \{c_n\} = 0,8$ olsun. 0, Örnek 4.3.1’de tanımlanan dönüşümün sabit noktasıdır.

Çizelge 4.1. Örnek 4.3.1’in Ψ dönüşümü için (3.1.2-3.1.8) iterasyon süreçlerinin yakınsaklık çizelgesi

Adım	Mann	Ishikawa	Noor	Thakur	M-iterasyonu	K-iterasyonu	T.S
0	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8
1	0,453028	0,359513	0,243856	0,153031	0,104781	0,059514	0,012588
2	0,27277	0,170834	0,085974	0,034111	0,016307	0,00534	0,000238
3	0,168052	0,08237	0,030822	0,007659	0,002548	0,00048	4,51E-06
4	0,104449	0,039855	0,011073	0,00172	0,000398	4,31E-05	8,53E-08
5	0,065139	0,0193	0,003979	0,000386	6,22E-05	3,87E-06	1,61E-09
6	0,040678	0,009348	0,00143	8,68E-05	9,72E-06	3,48E-07	3,05E-11
7	0,025415	0,004528	0,000514	1,95E-05	1,52E-06	3,13E-08	5,78E-13
8	0,015882	0,002193	0,000185	4,38E-06	2,37E-07	2,81E-09	1,09E-14
9	0,009926	0,001062	6,64E-05	9,83E-07	3,71E-08	2,52E-10	2,07E-16
10	0,006204	0,000515	2,39E-05	2,21E-07	5,79E-09	2,27E-11	3,91E-18
11	0,003877	0,000249	8,57E-06	4,96E-08	9,05E-10	2,04E-12	7,4E-20
12	0,002423	0,000121	3,08E-06	1,11E-08	1,41E-10	1,83E-13	1,4E-21
13	0,001515	5,85E-05	1,11E-06	2,5E-09	2,21E-11	1,64E-14	2,65E-23
14	0,000947	2,83E-05	3,98E-07	5,62E-10	3,45E-12	1,48E-15	5,01E-25



Şekil 4.1. Örnek 4.3.1'de tanımlanan Ψ dönüşümü için (3.1.2-3.1.8) iterasyon süreçlerinin yakınsaklık davranışları.

Örnek 4.3.2.

$K = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ 'de alışılmış normla donatılmış olsun ve $\Psi: K \rightarrow K$,

$$\Psi u = \begin{cases} \frac{2u}{3}, & u \in [0,1) \\ \frac{6}{7}, & u = 1 \end{cases}$$

dönüşümünü tanımlayalım.

Şimdi Ψ dönüşümünün genelleşmiş α -genişlemeyen dönüşüm olmadığını ve Garcia

– Falset GGD'nün ((E) - şartı) sağlandığını gösterelim.

İlk olarak Ψ' 'nin $\frac{1}{2}|u - \Psi u| \leq |u - v|$ ise

$|\Psi u - \Psi v| \leq \alpha|\Psi u - v| + \alpha|\Psi v - u| + (1 - 2\alpha)|u - v|$ eşitsizliğini sağlamadığını gösterelim. $u = \frac{6}{7}$ ve $v = 1$ alalım. O zaman $|u - v| = \frac{1}{7}$ olur.

$$\frac{1}{2}|u - \Psi u| = \frac{1}{2}\left|\frac{6}{7} - \frac{12}{21}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{18 - 12}{21}\right| = \left|\frac{3}{21}\right| < \frac{1}{7}|u - v|$$

sağlanırken yukarıdaki eşitsizliğin sağlanmadığı görülür. Çünkü u ve v için

$$\begin{aligned} & \alpha\left|\frac{12}{21} - 1\right| + \alpha\left|\frac{6}{7} - \frac{6}{7}\right| + (1 - 2\alpha)|u - v| \\ & \frac{3}{7}\alpha + 0 + (1 - 2\alpha)\frac{1}{7} = \frac{1}{7}(\alpha + 1) < \frac{2}{7} = |\Psi u - \Psi v| \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan Ψ genelleşmiş α – genişlemeyen değildir.

Diğer taraftan $\mu=6$ kabul edilebilir bir parametre seçersek Ψ dönüşümünün (E) – şartını sağladığı görülür. Bunun için aşağıdaki durumları analiz edelim.

Durum 1: $|u - \Psi u| = \frac{u}{3}$ olacak şekilde, $v \in [0,1)$ olsun. O zaman

$$|u - \Psi v| = \left|u - \frac{2v}{3}\right| \leq u + \frac{2v}{3} \leq \frac{5}{3} + \frac{2}{3}|u - v| \leq 5|u - \Psi v| + |u - v| \quad (4.3.2)$$

eşitsizliği sağlanır. O zaman Ψ , (E₅) – şartını sağlar.

Durum 2: $u = 1, v \in [0,1)$ ise o zaman

$$|u - \Psi u| = \left|1 - \frac{6}{7}\right| = \frac{1}{7} \text{ olur. Buradan eşitsizliği elde edelim.}$$

$$|u - \Psi v| = \left|1 - \frac{2v}{3}\right| = 1 - \frac{2v}{3} \leq \mu \frac{1}{7} + 1 - v$$

olmalıdır. O halde

$$v - \frac{2v}{3} < \mu \frac{1}{7} \text{ ise } v \leq \frac{1}{7} \mu \text{ olmalıdır. O zaman da } \Psi, (E_3) \text{ – şartını sağlar.}$$

Durum 3: $u \in [0,1)$ ve $v = 1$ için

$$|u - \Psi u| = \left|u - \frac{2u}{3}\right| = \frac{u}{3} \text{ olur. (4.3.2) eşitsizliğini analiz edelim.}$$

$$|u - \Psi v| = \left|u - \frac{6}{7}\right| \leq \mu \frac{u}{3} + 1 - u \text{ olmalıdır. O halde;}$$

a) $u \geq \frac{6}{7}$ ise o zaman $u - \frac{6}{7} \leq \mu \frac{u}{3} + 1 - u$ den $2u \leq \mu \frac{u}{3} + \frac{13}{7}$ bulunur. Böylece Ψ , (E₆) – şartını sağlar.

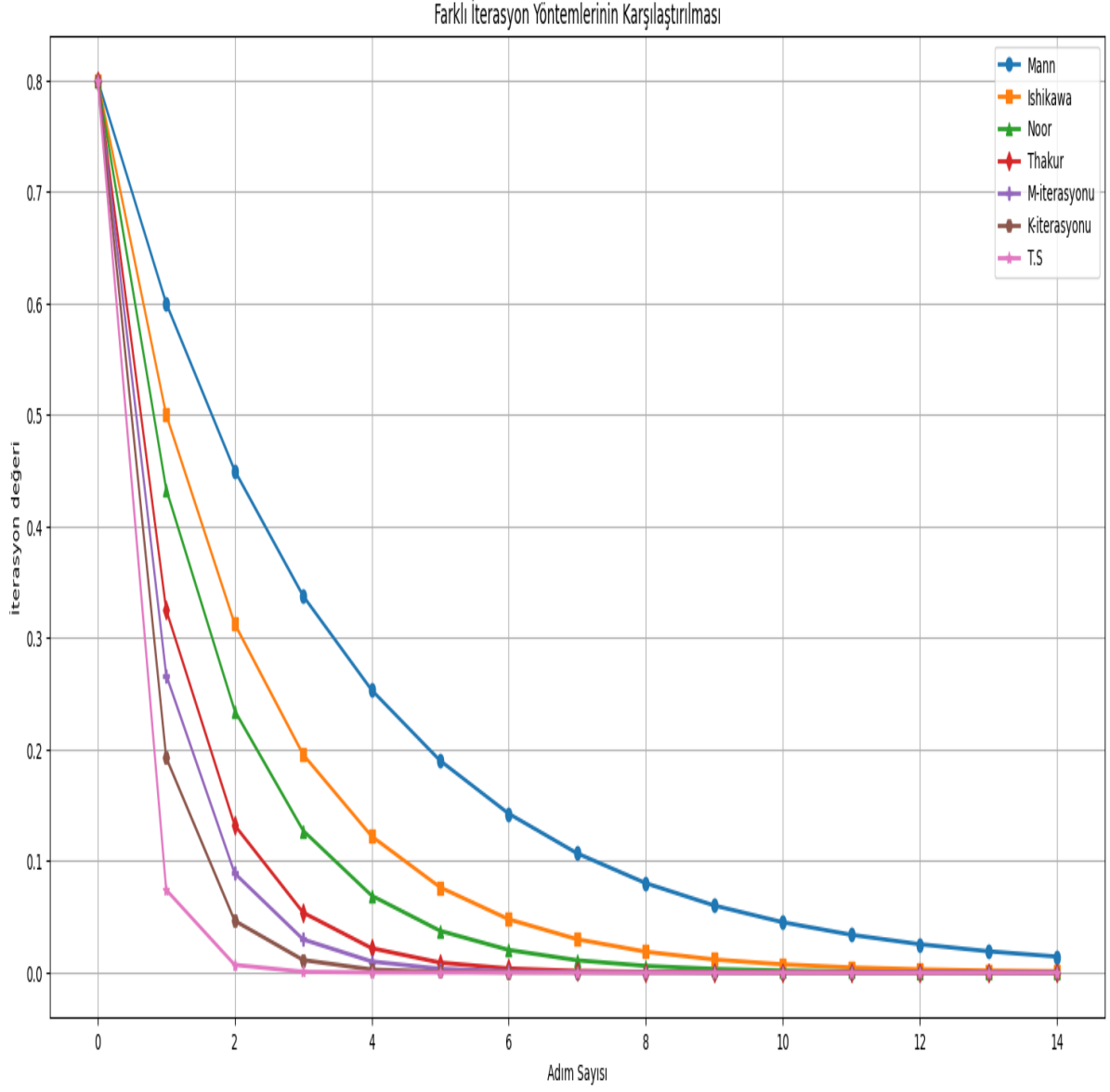
b) $u \leq \frac{6}{7}$ ise o zaman Ψ_1 , (E₁) – şartını sağladığı gösterilir.

Buradan μ parametresinin maximum değeri alınarak Ψ dönüşümünün (E₆) – şartını sağladığı sonucuna ulaşırız. Sonuç olarak, Ψ , Garcia-Falset GGD((E) şartını) sağladığı görülür.

Örnek 4.3.2 de verilen dönüşüm için aşağıdaki çizelge ve şekilde, (3.1.2-3.1.8) iterasyon süreçlerinin yakınsama davranışları karşılaştırılmaktadır. Tüm $n \geq 1$ için $\{a_n\} = \{b_n\} = \{c_n\} = 0,8$ olsun. 0, Örnek 4.3.3'de tanımlanan dönüşümün sabit noktasıdır.

Çizelge 4.2. Örnek 4.3.2'in Ψ dönüşümü için (3.1.2-3.1.8) iterasyon süreçlerinin yakınsaklık çizelgesi

Adım	Mann	Ishikawa	Noor	Thakur	M-iterasyonu	K-iterasyonu	T.S
0	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8
1	0,6	0,5	0,433333	0,325	0,266667	0,192593	0,074074
2	0,45	0,3125	0,234722	0,132031	0,088889	0,046365	0,006859
3	0,3375	0,195313	0,127141	0,053638	0,02963	0,011162	0,000635
4	0,253125	0,12207	0,068868	0,02179	0,009877	0,002687	5,88E-05
5	0,189844	0,076294	0,037304	0,008852	0,003292	0,000647	5,44E-06
6	0,142383	0,047684	0,020206	0,003596	0,001097	0,000156	5,04E-07
7	0,106787	0,029802	0,010945	0,001461	0,000366	3,75E-05	4,67E-08
8	0,08009	0,018626	0,005929	0,000594	0,000122	9,03E-06	4,32E-09
9	0,060068	0,011642	0,003211	0,000241	4,06E-05	2,17E-06	4E-10
10	0,045051	0,007276	0,001739	9,8E-05	1,35E-05	5,23E-07	3,71E-11
11	0,033788	0,004547	0,000942	3,98E-05	4,52E-06	1,26E-07	3,43E-12
12	0,025341	0,002842	0,00051	1,62E-05	1,51E-06	3,03E-08	3,18E-13
13	0,019006	0,001776	0,000276	6,57E-06	5,02E-07	7,3E-09	2,94E-14
14	0,014254	0,00111	0,00015	2,67E-06	1,67E-07	1,76E-09	2,72E-15



Şekil 4.2. Örnek 4.3.2'de tanımlanan Ψ dönüşümü için (3.1.2-3.1.8) iterasyon süreçlerinin yakınsaklık davranışları.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışma, düzgün konveks Banach uzaylarında Garcia-Falset GGD((E)-Şartı)'leri için T.S-iterasyon sürecinin sabit noktalara yakınsamasını incelemiştir. Bu çalışmanın en önemli sonuçları açıklayıcı sayısal örneklerle sunulmuştur. Örnek 4.3.1 (E)-şartını sağlamaktadır. Ancak, bu örnek (C)-şartını karşılamamaktadır. Bu, Garcia-Falset GGD sınıfının aslında Suzuki GGD sınıfından daha geniş olduğunu sayısal olarak göstermeyi amaçlamaktadır. Ayrıca, Örnek 4.3.1'den oluşturulan Çizelge ve Şekil'den de görüldüğü gibi, T.S-iterasyon sürecinin Materyal ve Yöntem kısmında verilen diğer iterasyonlara göre karşılaştırmaları yapılmış olup T.S-iterasyon sürecinin diğerlerinden daha hızlı yakınsadığı gösterilmiştir. Örnek 4.3.2'den oluşturulan Çizelge ve Şekil'den de görüldüğü gibi, T.S-iterasyon sürecinin yine Materyal ve Yöntem kısmında verilen diğer iterasyonlara göre karşılaştırmaları yapılmış olup T.S-iterasyon sürecinin diğerlerinden daha hızlı yakınsadığı gösterilmiştir. Gelecekteki çalışmalarda, burada sunulanlardan daha hızlı yakınsayan yeni yinelemeler geliştirilebilir. Ek olarak, bu çalışmada elde edilen sonuçları karşılaştırmak için daha karmaşık örnekler de incelenebilir.

KAYNAKÇA

- Agarwal, R. P. D., & O'Regan, D. R. (2009). *Sahu, Fixed Point Theory for Lipschitzian-Type Mappings with Applications*, Series, Topological Fixed Point Theory and its App., New York: Springer.
- Aoyama K., and Kohsaka F. (2011). "Fixed point theorem for α -nonexpansive mappings in Banach spaces". *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 74, (13), 4387-4391.
- Browder F. E. (1965). "Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space". *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, (54), 1041-1044.
- Clarkson, J. A. (1936). "Uniformly convex spaces". *Transactions of the American Mathematical Society*, (40), 396-414.
- Edelstein, M. (1974). "Fixed point theorems in uniformly convex Banach spaces", *Proceedings of the American Mathematical Society*, 44 (2), 369-374.
- García-Falset J., Llorens-Fuster E., T., & Suzuki T. (2011). "Fixed point theory for a class of generalized nonexpansive mappings" *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 375 (1), 185–195.
- Göhde D. (1965). "Zum prinzip der kontraktiven abbildung", *Mathematische Nachrichten*, 30, 251–258. doi:<https://doi.org/10.1002/mana.19650300312>.
- Hussain, N., Ullah, K., & Arshad, M. (2018). "Fixed point approximation of Suzuki generalized non-expansive mappings via new faster iteration process". *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, (19), 1383-1393.
- Ishikawa, S. (1976). "Fixed points and iteration of a nonexpansive mapping in a Banach space", *Proceedings of the American Mathematical Society*, 59 (1), 65-71.
- Krasnosel'skii, M.A. (1955) "Two Remarks on the Method of Successive Approximations". *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 10, 123-127.
- Kirk, W. A. (1965). "A fixed point theorem for mappings which do not increase distances". *American Mathematical Monthly*, (72), 1004-1006.
- Kolmogorov A. N., Fomin S. V. (1970). *Introductory Real Analysis*, London: Prentice-Hall Inc.
- Kreyszig, E. (1989). *Introductory Functional Analysis with Applications*, USA: John Wiley & Sons.
- Mann, W. R. (1953). "Mean value methods in iteration", *Proceedings of the American Mathematical Society*, 4 (50), 6–510.

- Noor, M. A. (2000). "New approximation schemes for general variational inequalities", *Journal of Mathematical Analysis and applications*, 251 (1), 217-229.
- Opial, Z. (1967). "Weak convergence of successive approximations for nonexpansive mappings". *Bulletin of the American Mathematical Society*, (73), 591-597.
- Pandey R., Pant R., Rakočević V., & Shukla R. (2019). "Approximating fixed points of a general class of nonexpansive mappings in Banach spaces with applications", *Results in Mathematics*, 74 (1), 1-24.
- Pant R., Shukla R. (2017). "Approximating fixed points of generalized α -nonexpansive mappings in banach spaces", *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 38 (2), 248-266.
- Picard, E. (1890). "Memorie sur la theorie des equations aux derivees partielles et la methode des approximations successives". *Journal de Mathematiques Pures et Appliquees*, (6), 145-210.
- Schu, J. (1991). "Weak and strong convergence of fixed points of asymptotically nonexpansive mappings". *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, (43), 153-159 .
- Senter, H. F., & Dotson Jr, W. G. (1974). "Approximating fixed points of nonexpansive mappings", *Proceedings of the American Mathematical Society*, (44), 375-380.
- Suzuki T. (2008). "Fixed point theorems and convergence theorems for some generalized nonexpansive mappings", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 340 (2), 1088-1095.
- Thakur, B.S., Thakur, D., & Postolache, M. (2016). "A new iterative scheme for approximating fixed points of nonexpansive mappings". *Filomat*. 30 (10), 2711–2720. DOI: 10.2298/FIL1610711T.
- Temir, S. (2021). "Weak and strong convergence theorems for three suzuki's generalized nonexpansive mappings". *Publications de l'Institut Mathematique* 110 (124), 121-129.
- Temir, S., & Korkut, O. (2023). "Some convergence results using a new iteration process for generalized nonexpansive mappings in banach spaces". *Asian-European Journal of Mathematics*, 16 (05), 2350077.
- Temir S., Zincir O. (2023). "Approximating of fixed points for Garsia-Falset generalized nonexpansive mappings", *Journal of New Results in Science*, 12 (1), 55-64.
- Ullah, K., & Arshad, M. (2018). "Numerical reckoning fixed points for Suzuki' s generalized nonexpansive mappings via new iteration process", *Filomat*, 32 (1), 187-196.

- Usurelu, G. I., & Postolache, M. (2019). “Convergence analysis for a three-step thakur iteration for suzuki-type nonexpansive mappings with visualization”. *Symmetry*, 11 (12), 1-18.
- Usurelu, G. I., Bejenaru, A., & Postolache, M. (2020). “Operators with property (E) as concerns numerical analysis and visualization”, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 41 (11), 1398-1419.
- Usurelu, G. I., Turcanu, A., & Postolache, M. (2022). “Algorithm for Two Generalized Nonexpansive Mappings in Uniformly Convex Spaces”. *Mathematics*, 10, 318, 18 pages.

