

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ**



**GENELLEŞMİŞ KAYMANIN DOĞURDUĞU PARABOLİK POTANSİYELLER
ÜZERİNE**

Duyguhan SARI

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NİSAN 2025

ANTALYA

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ**



**GENELLEŞMİŞ KAYMANIN DOĞURDUĞU PARABOLİK POTANSİYELLER
ÜZERİNE**

Duyguhan SARI

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NİSAN 2025

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞMİŞ KAYMANIN DOĞURDUĞU PARABOLİK POTANSİYELLER
ÜZERİNE

Duyguhan SARI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 30/04/2025 tarihinde jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Melih ERĞİYİT (Danışman)

Prof. Dr. Simten BAYRAKÇI DOĞAN

Dr. Öğr. Üyesi Zafer ŞANLI

ÖZET

GENELLEŞMİŞ KAYMANIN DOĞURDUĞU PARABOLİK POTANSİYELLER ÜZERİNE

Duyguhan SARI

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Melih ERĞİYİT

Nisan 2025; 55 sayfa

Bu tez çalışmasının amacı Laplace-Bessel diferansiyel operatörü

$$\Delta_\nu = \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{2\nu_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=k+1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad (\nu_1, \dots, \nu_k > 0)$$

tarafından doğrulan genelleşmiş kaymanın ürettiği parabolik Bessel ve parabolik Riesz potansiyellerinin ağırlıklı Lebesgue uzaylarında sınırlılığının, yakınsama özelliklerinin incelenmesi ve dalgacık tipli dönüşüm kullanılarak Calderon yeniden üretme formülünün elde edilmesidir.

ANAHTAR KELİMELER: Dalgacık tipli dönüşüm, Genelleşmiş kayma, Laplace-Bessel diferansiyel operatörü, Parabolik Bessel potansiyeli, Parabolik Riesz potansiyeli.

JÜRİ: Prof. Dr. Melih ERĞİYİT

Prof. Dr. Simten BAYRAKÇI DOĞAN

Dr. Öğr. Üyesi Zafer ŞANLI

ABSTRACT

ON PARABOLIC POTENTIALS ASSOCIATED WITH THE GENERALIZED TRANSLATION

Duyguhan SARI

MSc Thesis in MATHEMATICS

Supervisor: Prof. Dr. Melih ERĞİYİT

April 2025; 55 pages

The purpose of this thesis is to examine the boundedness and convergence properties of parabolic Bessel and parabolic Riesz potentials generated by the generalized translation, which is verified by the Laplace-Bessel differential operator

$$\Delta_\nu = \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{2\nu_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=k+1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad (\nu_1, \dots, \nu_k > 0)$$

in weighted Lebesgue spaces and to obtain the Calderón reproducing formula by using a wavelet-type transformation.

KEYWORDS: Generalized translation, Laplace-Bessel differential operator, Parabolic Bessel potentials, Parabolic Riesz potentials, Wavelet like transform.

COMMITTEE: Prof. Dr. Melih ERĞİYİT

Prof. Dr. Simten BAYRAKÇI DOĞAN

Asst. Prof. Dr. Üyesi Zafer ŞANLI

ÖNSÖZ

$\mathbb{R}^n$ Öklid uzayının bir alt uzayında tanımlanan ve bu çalışmada göz önüne alınan Laplace-Bessel diferansiyel operatörü

$$\Delta_\nu = \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{2\nu_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=k+1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad (\nu_1, \dots, \nu_k > 0)$$

ilk k -değişkene Bessel diferansiyel operatörünün ve $n - k$ değişkene de Laplace diferansiyel operatörünün uygulandığı hibrit bir diferansiyel operatördür.

Bu tez çalışmasında öncelikle Laplace-Bessel diferansiyel operatörü Δ_ν ile ilişkilendirilen genelleşmiş kaymanın doğurduğu Genelleşmiş Gauss-Weierstrass yarırubunu tanımlandı. Ardından genelleşmiş kaymanın doğurduğu parabolik Riesz ve parabolik Bessel potansiyelleri tanımlanıp, bu potansiyellerin Genelleşmiş Gauss-Weierstrass yarırubunu vasıtasıyla ifade edildi. Tezin bulgular kısmında ilk olarak Parabolik Riesz ve parabolik Bessel potansiyellerinin ağırlıklı Lebesgue uzaylarında sınırlılığı teoremi olan Hardy-Littlewood-Sobolev tipli teorem kanıtlandı. Daha sonra potansiyellerin ağırlıklı Lebesgue uzaylarında yakınsama özelliklerinin incelendiği teorem kanıtlandı. Son olarak uygun dalgacık tipli dönüşüm kullanılarak Calderon tipli yeniden üretme formülü elde edildi.

Çalışmamız boyunca kıymetli zamanlarını ve değerli bilgilerini benden esirgemeyen danışmanım Sayın Prof. Dr. Melih Eryiğit ve Prof. Dr. Simten Bayrakçı Doğan hocalarıma, bu tezi 2210-A Yurt İçi Genel Yüksek Lisans Burs Programı çerçevesinde destekleyen TÜBİTAK'a ve daima yanımda olan sevgili Aileme çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	iii
AKADEMİK BEYAN	v
SİMGELER VE KISALTMALAR	vi
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK TARAMASI	3
2.1. Klasik Fourier Harmonik Analizinin Bazı Temel Tanım ve Teoremleri	3
2.2. Fourier-Bessel Harmonik Analizinin Temel Tanım ve Teoremleri	8
3. MATERYAL VE METOT	15
3.1. Genelleşmiş Gauss-Weierstrass Çekirdeği	15
3.2. Genelleşmiş Gauss-Weierstrass Yarıgrubu	19
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	21
4.1. Genelleşmiş Kaymanın Doğurduğu Parabolik Riesz ve Parabolik Bessel Tipli Potansiyeller	21
4.2. Parabolik Riesz Tipli Potansiyellerin Ağırlıklı Lebesgue uzaylarında Sı- nırlılığı	23
4.3. Parabolik Riesz ve Parabolik Bessel Tipli Potansiyellerin Yaklaşım Özel- likleri	33
4.4. Parabolik ve Ağırlıklı Parabolik Tipli Bileşik Dalgacık Dönüşümleri için Calderon Yeniden Üretme Formülü	41
5. SONUÇLAR	50
6. KAYNAKLAR	53
ÖZGEÇMİŞ	

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans olarak sunduğum “Genelleşmiş Kaymanın Doğurduğu Parabolik Potansiyeller üzerine ” adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

30/04/2025

Duyguhan SARI

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler:

$\mathbb{R}^n$	: n-boyutlu Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_{k,+}^n$	: ilk k değişkeni pozitif, n-boyutlu Reel sayılar kümesi
$B(x, r)$	: x -merkezli, $r > 0$ yarıçaplı yuvar
$ E $	: E kümesinin Lebesgue ölçümü
$ E _\nu$	: E kümesinin ağırlıklı Lebesgue ölçümü
$f \otimes g$	: f ile g 'nin genelleşmiş girişi

Kısaltmalar:

$L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{k,+}^n)$	: $L_{p,\nu}$
$L_p(\mathbb{R}^n)$	: L_p
$S(\mathbb{R}_{k,+}^n)$	: S
Düzgün Yakınsama	: $\varphi_n(x) \Rightarrow \varphi(x)$
Hemen hemen her	: h.h.

1. GİRİŞ

Jones ve Sampson tarafından tanımlanan klasik parabolik potansiyeller, I -Birim ve Δ -Laplace diferansiyel operatörü olmak üzere $(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta)$ ve $(\frac{\partial}{\partial t} + I - \Delta)$ diferansiyel operatörlerinin negatif kesirsel kuvveti olarak yorumlanır ve Fourier dönüşümü dilinde

$$(H^\alpha f)^\wedge(x, t) = (|x|^2 + it)^{\frac{\alpha}{2}} f^\wedge(x, t)$$

ve

$$(\mathcal{H}^\alpha f)^\wedge(x, t) = (1 + |x|^2 + it)^{\frac{\alpha}{2}} f^\wedge(x, t), \quad (x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^1, \alpha > 0)$$

şeklinde tanımlanır. Lebesgue uzaylarında sınırlılıklarının incelenmesi, ters bulma problemi gibi özelliklerin çalışılması Bagb (1971), Gopala Rao (1977), Chanillo (1981), Nogin, Rubin, Aliev, Gadjiev, Bayrakci (1986, 2001, 2006, 2008) ve daha birçok matematikçinin araştırma alanı olmuştur.

Ayrıca klasik parabolik potansiyellerin Lebesgue uzaylarında yaklaşım özelliklerinin incelenmesi Gadjiev, Aliev, Bayrakci (2006) tarafından yapılmıştır.

Bizim bu çalışmadaki amacımız

$$\Delta_\nu = \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{2\nu_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=k+1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad (\nu_1, \dots, \nu_k > 0) \quad (1.1)$$

ile tanımlanan Laplace-Bessel diferansiyel operatörü Δ_ν tarafından doğurulan genelleşmiş kaymanın ürettiği parabolik potansiyelleri tanımlamak ve ağırlıklı lebesgue uzaylarında sınırlılığını, yaklaşım özelliklerini ve uygun dalgacık tipli dönüşüm kullanılarak Calderon tipli yeniden üretme formülü incelemektir.

Laplace-Bessel diferansiyel operatörü, ilk k -değişkene Bessel diferansiyel operatörü ve kalan değişkenlere ise Laplace diferansiyel operatörünün uygulandığı bir "hibrit" diferansiyel operatördür.

Fourier-Bessel analizinde bu gibi Laplace-Bessel diferansiyel operatörleri ile çalışılmaktadır. Örneğin

$$\Delta_B = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{2\nu}{x_n} \frac{\partial}{\partial x_n} \right), \quad (\nu > 0, x_n > 0)$$

ilk $n - 1$ değişkene Laplace diferansiyel operatörü ve sonuncu değişkene Bessel diferansiyel operatörünün uygulandığı Laplace-Bessel diferansiyel operatörü Δ_B ile birçok

matematikçi çalışmalar yapmıştır. Bunlardan bazıları Kipriyanov (1967), Klyuchantsev (1970), Lofstrom ve Peetre (1969), Lyakhov (1983), Stempak (1986), Trimèche (1997), Gadjev, Aliev, Rubin, Bayrakci, Sezer (1988, 1998, 2002, 2008), Guliev, Hasanov (2000, 2006) dir. Aliev ve Rubin (2001) makalelerinde bu diferansiyel operatör ile ilişkilendirilen parabolik potansiyellerin uygun dalgacık dönüşümü kullanılarak terslerini belirlemişlerdir. Aliev ve Sezer (2008) makalelerinde parabolik potansiyeller uzayını incelemişlerdir. Yine benzer olarak tüm değişkenlerine Bessel diferansiyel operatörünü uygulayarak elde edilen Bessel diferansiyel operatörü ile ilişkilendirilen parabolik potansiyellerin ağırlıklı Lebesgue uzaylarında sınırlılığı ve yaklaşım özellikleri Bayrakci, Keleş (2014) tarafından çalışılmıştır.

Tez, Kaynak taraması, Materyal ve Metot, Bulgular, Tartışma ve Sonuç bölümlerinden oluşmaktadır.

Kaynak taraması bölümünde bize gerekli olan Fourier analizin ve Fourier-Bessel analizinin temel tanım ve kavramları verilmiştir.

Materyal ve Metot bölümünde ilk olarak genelleşmiş kaymanın doğurduğu Genelleşmiş Gauss-Weierstrass çekirdeği ve yarırubu tanımlanarak özellikleri incelenmiştir.

Bulgular kısmında ise Laplace-Bessel diferansiyel operatörünün doğurduğu parabolik Riesz ve parabolik Bessel potansiyelleri tanımlanarak ağırlıklı Lebesgue uzaylarında ve sınırlılıkları, yaklaşım özellikleri ve Calderon tipli yeniden üretme formülü kanıtlanmıştır.

2. KAYNAK TARAMASI

2.1. Klasik Fourier Harmonik Analizinin Bazı Temel Tanım ve Teoremleri

Tezin bu kısmında bizim için gerekli olacak Fourier harmonik analizin bazı temel tanım ve teoremleri ifade edilmektedir. Teoremlerin ispatlarına yanlarında verilen kaynaklardan ulaşılabilir. Temel tanımlar için Folland(1984), Stein(1970) ve Grafakos(2009) kaynaklarına bakılabilir.

Tanım 2.1. n -boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^n = \{x : x = (x_1, \dots, x_n), \forall i = 1, \dots, n \text{ için } x_i \in \mathbb{R}\}$ ve $\mathbb{R}^n$ üzerinde norm

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlanır.

Ayrıca $E \subset \mathbb{R}^n$ ölçülebilir kümesinin Lebesgue ölçümünü $|E|$ ile göstereceğiz. $\mathbb{R}^n$ de x -merkezli, $r > 0$ yarıçaplı (açık) yuvar ise

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}$$

ile tanımlanır. f ve g fonksiyonları $\mathbb{R}^n$ 'de Lebesgue ölçülebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq g(x)\}| = 0$$

ise f ile g fonksiyonlarına hemen hemen her yerde eşit fonksiyonlar denir ve

$$f(x) = g(x), \quad h.h.x \in \mathbb{R}^n$$

ile gösterilir.

Tanım 2.2. (Folland (1984)) $\mathbb{R}^n$ 'de ölçülebilir fonksiyonların normlu L_p -Lebesgue uzayı

$$L_p = L_p(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \|f\|_{L_p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty \right\}$$

ile tanımlanır.

Burada $dx = dx_1 \dots dx_n$ şeklindedir.

Ayrıca $p = \infty$ için L_∞ Lebesgue uzayı $L_\infty = L_\infty(\mathbb{R}^n) = \{f : \|f\|_\infty < \infty\}$ ve

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| = \inf \{ \lambda > 0 : |\{x : |f(x)| > \lambda\}| = 0 \}$$

biçimindedir. $1 \leq p \leq \infty$ için L_p - Lebesgue uzayı Banach uzayıdır.

$C(\mathbb{R}^n)$ uzayı $\mathbb{R}^n$ de sürekli fonksiyonlar uzayıdır ve bu uzayda norm

$$\|f\| = \max_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|$$

ile verilir. Bundan başka $C(\mathbb{R}^n)$ uzayının bir alt uzayı olan $C_0(\mathbb{R}^n)$ uzayı

$$C_0(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : f \in C(\mathbb{R}^n) \text{ ve } \lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0 \right\}$$

şeklindedir. $\mathbb{R}^n$ uzayında her mertebeden sürekli türevlenebilir fonksiyonların lineer uzayı $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. Ayrıca $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ için $x \cdot y = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ ve $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ dir. Bundan başka $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ notasyonu ile kısmi türevi göstereceğiz. Yüksek mertebeden kısmi türevler için multi-indeks notasyonu kullanılır. $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ multi-indeks olmak üzere

$$|\alpha| = \sum_{k=1}^n \alpha_k, \alpha! = \sum_{k=1}^n \alpha_k!, \partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n}$$

dir ve $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$x^\alpha = \prod_{k=1}^n x_k^{\alpha_k}$$

şeklindedir.

$C^\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayının bir alt uzayı, her mertebeden türevlenebilir, kendisi ve tüm türevleri, polinom ile çarpılsa dahi sonsuzlukta hızla sıfıra giden fonksiyonların normlu uzayına olan $S \equiv S(\mathbb{R}^n)$ - Schwartz test fonksiyonları uzayıdır ve

$$S = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{(N, \alpha)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^N |\partial^\alpha f(x)| < \infty, \forall N, \alpha \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Örneğin $\mathbb{R}^n$ de $f(x) = e^{-|x|^2}$ fonksiyonu Schwartz uzayına aittir. Her mertebeden türevlenebilir, kendisi ve tüm türevleri (hatta polinom ile çarpımı dahi) hızla sıfıra giden (sonsuzlukta limiti sıfır olan) fonksiyondur. Kolayca görülebilir ki $\mathbb{R}^n$ de $f(x) = e^{-|x|}$ fonksiyonu ise Schwartz uzayına ait değildir. Schwartz uzayı L_p uzayında yoğun olduğundan, L_p uzayı için test fonksiyonları uzayı olarak bilinir. Ayrıca Fourier dönüşümü Schwartz uzayını, Schwartz uzayına taşır.

Tanım 2.3. $\mathbb{R}^n$ 'de lokal integrallenebilen fonksiyonların lineer uzayı

$$L^1_{loc} = L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : \int_K |f(x)| dx < \infty, \forall K \subset \mathbb{R}^n, K \text{ kompakt} \right\}$$

ile tanımlanır.

Teorem 2.4. (Fubini Teoremi) (Folland (1984)) $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ve $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ σ -sonlu ölçüm uzayları, $\mu \times \nu$ ise $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ üzerinde μ ve ν nin çarpımı olsun. Eğer $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mu \times \nu$ ölçümüne göre integrallenebilir ise $h.h.x \in X$ için $\int_Y f(x, y) d\nu(y)$ ve $h.h.y \in Y$ için $\int_X f(x, y) d\mu(x)$ integralleri sonludur ve

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.5. (Hölder Eşitsizliği) (Folland (1984)) $f \in L_p, g \in L_q, 1 \leq p, q \leq \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

dir.

Teorem 2.6.) (Minkowski Eşitsizliği) (Folland (1984)) f ve $g \in L_p, 1 \leq p \leq \infty$ olsun. Bu durumda

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

dir.

Teorem 2.7. (Genelleşmiş Minkowski Eşitsizliği) (Folland (1984))

$(X, \mathcal{M}, \mu)$ ve $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ σ -sonlu ölçüm uzayları ve $\varphi(x, y), \mathcal{M} \times \mathcal{N}$ ölçülebilir fonksiyon ve $p \geq 1$ olmak üzere integraller için Minkowski eşitsizliği

$$\left(\int_X \left(\int_Y |\varphi(x, y)| d\nu(y) \right)^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_Y \left(\int_X |\varphi(x, y)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} d\nu(y)$$

biçimindedir.

Teorem 2.8. (Lebesgue baskın yakınsama teoremi) (Folland (1984))

$(X, \mathcal{M}, \mu)$ ölçüm uzayında $\{f_n\}$ ölçülebilir fonksiyonlar dizisi ve f fonksiyonu verilmiş olsun. Ayrıca $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, h.h. $x \in X$ $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$, $\forall n$ olacak şekilde X de integrallenebilir φ fonksiyonu var olsun.

Bu durumda f fonksiyonu X de integrallenebilirdir ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) dx = \int_X f(x) dx$$

eşitlik sağlanır.

Teorem 2.9. (Chebyshev Eşitsizliği) (Folland(1984))

(X, M, μ) ölçüm uzayı ve $1 \leq p < \infty$ için $f \in L_p(X)$ olsun. Bu durumda her $\alpha > 0$ sayısı için

$$\mu\{x : |f(x)| > \alpha\} \leq \left(\frac{\|f\|_{L_p, \mu}}{\alpha} \right)^p$$

eşitsizliği sağlanır..

Tanım 2.10. (Klasik girişim (convolution) operatörü)

$f, g \in L_1$ olmak üzere f ve g fonksiyonunun girişimi

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \tau^y g(x) dy \equiv \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x - y) dy$$

şeklinde tanımlanır. Burada τ^y klasik Öklid kayma operatörüdür.

Teorem 2.11. (Girişimin operatörünün özellikleri)

f, g ve $h \in L_1$ olmak üzere

(a) $f * g = g * f$ (değişme özelliği)

(b) $(f * g) * h = f * (g * h)$ (birleşme özelliği)

(c) $F(f * g)(x) = F(f)(x)F(g)(x)$

(d) $f \in L_p$ ve $g \in L_q$ olmak üzere $1 \leq p \leq q \leq r \leq \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ için $f * g \in L_r$ ve

$$\|f * g\|_{L_r} \leq \|f\|_{L_p} \|g\|_{L_q}$$

Young eşitsizliği sağlanır.

Burada (c) özelliği ile ifade edilen eşitlik, Fourier dönüşümü ile girişim arasındaki bağıntıyı veren harmonik analizinin en önemli teoremlerinden biridir. Şöyle ki Fourier dönüşümü kolay diyemeyeceğimiz bir işlem olan “*” (girişim) işlemini daha basit bir işlem olan “noktasal çarpım” işlemine dönüştürmektedir. Bu eşitlik Fourier dönüşümünün tanımı kullanılarak kolaylıkla görülebilir.

Aşağıdaki Klasik Hardy-Littlewood maksimal operatörü ve bu operatörün sınırlılığı- veren teorem verilmiştir.

Tanım 2.12. (Hardy-Littlewood maksimal operatörü) (Stein(1970))

$f \in L^1_{loc}$ olmak üzere

$$(Mf)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{|y| \leq r} |f(x-y)| dy$$

ile tanımlanan fonksiyona Hardy-Littlewood maksimale operatörü denir. Burada ω_n ile $\mathbb{R}^n$ uzayındaki birim yuvarının ölçümü (hacmi) gösterilmektedir. Eğer yukarıdaki eşitlikte $z = x - y$ değişken değişimi yapılırsa maksimal operatörün tanımı

$$(Mf)(x) = \sup_{Q_x} \frac{1}{|Q_x|} \int_{Q_x} |f(z)| dz$$

biçimine gelir. Burada supremum x -merkezli tüm Q_x yuvarları üzerinden alınmaktadır ve $|Q_x|$ ise x -merkezli Q_x yuvarının hacmidir.

Teorem 2.13. (Hardy-Littlewood teoremi) (Stein(1970))

$f \in L_p$, $1 < p \leq \infty$ olsun. Bu durumda

$$\|Mf\|_{L_p} \leq C \|f\|_{L_p}$$

olacak şekilde $C = c(n, p)$ sabiti vardır. Başka bir ifade edilişle M -operatörü (p, p) -güçlü tipli bir operatördür. $p = 1$ durumunda ise Mf maksimal operatörü $(1, 1)$ -zayıf tiplidir. Yani,

$$\mu\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \alpha\} \leq \frac{C \|f\|_{L_1}}{\alpha}, \quad (\forall \alpha > 0)$$

dir.

2.2. Fourier-Bessel Harmonik Analizinin Temel Tanım ve Teoremleri

Bu kısımda ilk olarak Laplace-Bessel kayma operatörü ile ilişkilendirilen Fourier-Bessel harmonik analizinin nasıl oluşturulduğunu açıklayalım. Diferansiyel operatör dilinde $\mathbb{R}^n$ de ilk k - değişkene Bessel diferansiyel operatörü ve kalan $(n - k)$ - değişkene de Laplace diferansiyel operatörü uygulanarak elde edilen diferansiyel operatör, Laplace-Bessel diferansiyel operatörüdür. Bu diferansiyel operatörün doğurduğu genelleşmiş kayma veya Laplace-Bessel kayması ile oluşturulan harmonik analiz, Fourier-Bessel harmonik analizi olarak bilinir. Bu kesimde çalışmamız için gerekli olacak Fourier-Bessel harmonik analizinin bazı temel tanım ve teoremleri ifade edeceğiz.

Bu tez çalışmasında Laplace-Bessel diferansiyel operatörü

$$\Delta_\nu = \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{2\nu_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=k+1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad (\nu_1, \dots, \nu_k > 0) \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

$$\mathbb{R}_{k,+}^n = \{x = (x', x'') \in \mathbb{R}^n : x' \in \mathbb{R}^k, x'' \in \mathbb{R}^{n-k}, x_1, \dots, x_k > 0, k \leq n\}$$

ve

$$\mathbb{R}_{k,+}^n \times \mathbb{R} = \{x = (x', x'', t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x' \in \mathbb{R}^k, x'' \in \mathbb{R}^{n-k}, t \in \mathbb{R}, x_1, \dots, x_k > 0, k \leq n\}$$

olmak üzere $\mathbb{R}_{k,+}^n$ ve $\mathbb{R}_{k,+}^n \times \mathbb{R}$ de ölçülebilir fonksiyonların Ağırlıklı Lebesgue uzayları $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k)$ -multi indeks $(\nu_1, \dots, \nu_k > 0 ; |\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_k)$ olmak üzere

$1 \leq p < \infty$ için

$$L_{p,\nu} \equiv L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{k,+}^n) = \left\{ f : \|f\|_{L_{p,\nu}} = \left(\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} |f(x)|^p (x')^{2\nu} dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

ve

$$\mathcal{L}_{p,\nu} \equiv \mathcal{L}_{p,\nu}(\mathbb{R}_{k,+}^n \times \mathbb{R}) = \left\{ f : \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}} = \left(\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \int_{\mathbb{R}^1} |f(x, t)|^p dt (x')^{2\nu} dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $(x')^{2\nu} dx = x_1^{2\nu_1} \dots x_k^{2\nu_k} dx_1 \dots dx_k \dots dx_n$ biçimindedir.

$p = \infty$ için $L_{\infty,\nu}$ ve $\mathcal{L}_{\infty,\nu}$ uzaylarını C_0 uzayı olarak alıyoruz.

Bundan başka, $E \subset \mathbb{R}_{k,+}^n$ ölçülebilir kümesinin Lebesgue ölçümü

$$|E|_\nu = \int_E (x')^{2\nu} dx$$

ve $\mathbb{R}_{k,+}^n$ uzayında x -merkezli $r > 0$ yarıçaplı yuvar ise

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}_{k,+}^n : |x - y| < r\}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece orjin merkezli $r > 0$ yarıçaplı yuvarın Lebesgue ölçümü

$$\begin{aligned} |B(0, r)|_\nu &= \int_{B(0, r)} (x')^{2\nu} dx \\ &= \int_{B(0, r)} x_1^{2\nu_1}, \dots, x_k^{2\nu_k} dx_1, \dots, dx_k, \dots, dx_n \end{aligned}$$

olup burada $z = \frac{x}{r}$ değişken değişimi yapılırsa

$$|B(0, r)|_\nu = r^{2|\nu|+n} \int_{B(0, 1)} (z')^{2\nu} dz = r^{2|\nu|+n} w(n, k, \nu)$$

biçiminde elde edilir. Burada, $w(n, k, \nu) = |B(0, 1)|_\nu$ dir.

Teorem 2.14. (Hölder Eşitsizliği) (Sadosky(1979), Rubin(1996))

(X, M, μ) σ -sonlu ölçüm uzayı ve $\|f\|_{L_{p,\mu}} = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}$ olsun. Bu durumda $f \in L_{p,\mu}$, $g \in L_{q,\mu}$, $1 \leq p \leq \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$\int_X |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_{L_{p,\mu}} \|g\|_{L_{q,\mu}}$$

ve $X = \mathbb{R}_{k,+}^n$ ve $d\mu(x) = (x')^{2\nu} dx$ alınrsa

$$\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} |f(x)g(x)| (x')^{2\nu} dx \leq \|f\|_{L_{p,\nu}} \|g\|_{L_{q,\nu}}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.15. (İntegraller İçin Minkowski Eşitsizliği) (Sadosky(1979), Folland(1984))

(X, M, μ) ve (Y, N, γ) σ -sonlu ölçüm uzayları ve $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu da $\mu \times \gamma$ -ölçülebilir olsun.

Eğer, hemen-hemen her y için $f(., y) \in (X, M, \mu)$, $(1 \leq p \leq \infty)$ ve

$$\int_Y \|f(., y)\|_{L_{P,\mu}} d\gamma(y) < \infty$$

ise $\int_Y \|f(x, y)\|_{L_{P,\mu}} d\gamma(y)$ integrali de hemen-hemen her x için sonludur ve

$$\left\| \int_Y \|f(x, y)\|_{L_{P,\mu}} d\gamma(y) \right\|_{L_{P,\mu}} \leq \int_Y \|f(., y)\|_{L_{P,\mu}} d\gamma(y)$$

dir.

Özel halde; $d\gamma(y) = (y')^{2\nu} dy$, $d\mu(x) = (x')^{2\nu} dx$ ve $f(x, y) \in \mathbb{R}_{k,+}^n \times \mathbb{R}$ de ölçülebilir bir fonksiyon ise

$$\left\| \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} f(x, y) (y')^{2\nu} dy \right\|_{L_{p,\nu}} \leq \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \|f(x, y)\|_{L_{p,\nu}} (y')^{2\nu} dy$$

eşitsizliği sağlanır.

Tanım 2.16. (Genelleşmiş Kayma Operatörü) (Delsarte(1938), Levitan(1951))

$x, y \in \mathbb{R}_{k,+}^n$ ve $t, \tau \in \mathbb{R}$ olmak üzere, (2.1) eşitliği ile tanımlanan Laplace-Bessel diferansiyel operatörü Δ_ν 'ye karşılık gelen $f : \mathbb{R}_{k,+}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonunun genelleşmiş kayma operatörü

$$T^{y,\tau} f(x, t) = \prod_{i=1}^k \frac{\Gamma(\nu_i + \frac{1}{2})}{\Gamma(\nu_i) \Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi f((x', y')_\alpha, (x'' - y''), (t - \tau)) d_\nu(\alpha)$$

şeklinde tanımlanır.

Burada, $(x', y')_\alpha = ((x_1, y_1)_{\alpha_1}, \dots, (x_k, y_k)_{\alpha_k})$,

$$(x_i, y_i)_{\alpha_i} = \sqrt{x_i^2 - 2x_i y_i \cos \alpha_i + y_i^2}, \quad (i = 1, \dots, k), \quad d_\nu(\alpha) = \prod_{i=1}^k \sin^{2\nu_i-1} \alpha_i d\alpha_i$$

ve

$$\prod_{i=1}^k \frac{\Gamma(\nu_i + \frac{1}{2})}{\Gamma(\nu_i) \Gamma(\frac{1}{2})}$$

katsayısı da normalleştirici katsayıdır.

Ayrıca genelleşmiş kayma için

$$\|T^{y,\tau} f\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}} \leq \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}} \quad (2.2)$$

ve

$$\lim_{(y,\tau) \rightarrow (0,0)} \|T^{y,\tau} f - f\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}} = 0 \quad (2.3)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Detaylar için Aliev, Bayrakci (1998) ve Levitan (1951) kaynaklarına bakılabilir. Levitan(1951) tarafından tanımlanan bir-boyutlu Bessel Kayma operatörü ise

$$S^\tau g(r) = \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{\Gamma(\nu)\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\pi g(\sqrt{r^2 - 2r\tau \cos \alpha + \tau^2}) \sin^{2\nu-1} \alpha d\alpha$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu operatörün sağladığı bazı özellikler aşağıdaki gibidir:

$$S^\tau g(r) = S^r g(\tau) \quad S^\tau S^t g(r) = S^t S^\tau g(r),$$

$$S^\tau g(r) = S^{-\tau} g(r) \quad S^0 g(r) = g(r),$$

$$\int_0^\infty f(\tau) S^\tau g(r) \tau^{2\nu} d\tau = \int_0^\infty S^\tau f(r) g(\tau) \tau^{2\nu} d\tau.$$

Klasik kayma operatörü τ^y vasıtasıyla tanımlanan klasik girişim “*” operatörüne benzer olarak $T^{y,\tau}$ -genelleşmiş kayma operatörü vasıtasıyla oluşturulan ve “ $\otimes$ ” sembolü ile gösterilen genelleşmiş girişim operatörü tanımlanabilir.

Tanım 2.17. (Genelleşmiş Girişim Operatörü)

$f, g \in \mathcal{L}_{p,\nu}$ fonksiyonunun genelleşmiş girişimi $f \otimes g$, $T^{y,\tau}$ -genelleşmiş kayma operatörü vasıtasıyla

$$(f \otimes g)(x, t) = \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n \times \mathbb{R}} g(y, \tau) T^{y,\tau} f(x, t) d\tau (y')^{2\nu} dy, \quad (x, t) \in \mathbb{R}_{k,+}^n \times \mathbb{R}$$

biçiminde tanımlanır.

Klasik girişim operatörünün sahip olduğu özelliklerin benzerleri genelleşmiş girişim operatörü için de sağlanmaktadır. Şöyle ki

$$(f \otimes g)(x) = (g \otimes f)(x) \quad (2.4)$$

ve

$$F_\nu(f \otimes g)(x) = F_\nu(f)(x) F_\nu(g)(x). \quad (2.5)$$

Teorem 2.18. (Genelleşmiş Young Eşitsizliği)

$f \in L_{p,\nu}$, $g \in L_{q,\nu}$, $1 \leq p, q \leq \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ ise $f \otimes g \in L_{r,\nu}$ dir. Ayrıca

$$\|f \otimes g\|_{L_{r,\nu}} \leq \|f\|_{L_{p,\nu}} \|g\|_{L_{q,\nu}} \quad (2.6)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat Önce q sabit tutulup, $r = q$ ve $p = 1$ için $\|f \otimes g\|_{L_{r,\nu}}$ ($r = q$) normunu integraller için Minkowski eşitsizliğini göz önüne alarak hesaplayalım:

$$\begin{aligned} \|f \otimes g\|_{L_{q,\nu}} &= \left(\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} |(f \otimes g)(x)|^q (x')^{2\nu} dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \left(\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} f(y) T^y g(x) (y')^{2\nu} dy \right)^q (x')^{2\nu} dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \left(\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} |f(y)|^q |T^y g(x)|^q (x')^{2\nu} dx \right)^{\frac{1}{q}} (y')^{2\nu} dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} |T^y g(x)|^q (x')^{2\nu} dx \right)^{\frac{1}{q}} (y')^{2\nu} dy \\ &= \|f\|_{L_{1,\nu}} \|T^y g\|_{L_{q,\nu}} \leq \|f\|_{L_{1,\nu}} \|g\|_{L_{q,\nu}} \end{aligned}$$

elde edilir.

Yani, genelleşmiş girişim $(1, q)$ -güçlü tiplidir.

Şimdi de $r = \infty$ ve $p = \frac{q}{q-1}$ için $\|f \otimes g\|_{L_{\infty,\nu}}$ normunu $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{q-1} + \frac{1}{q} = 1$ için Hölder eşitsizliğini göz önüne alarak hesaplayalım:

$$\begin{aligned} \|f \otimes g\|_{L_{\infty,\nu}} &= \sup_{x \in \mathbb{R}_{k,+}^n} |(f \otimes g)(x)| \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}_{k,+}^n} \left| \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} f(y) T^y g(x) (y')^{2\nu} dy \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{x \in \mathbb{R}_{k,+}^n} \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} |f(y) T^y g(x)| (y')^{2\nu} dy \\
&\leq \sup_{x \in \mathbb{R}_{k,+}^n} \left(\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} |f(y)|^p (y')^{2\nu} dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} |T^y g(x)|^q (y')^{2\nu} dy \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|f\|_{L_{p,\nu}} \|T^y g\|_{L_{q,\nu}} \leq \|f\|_{L_{p,\nu}} \|g\|_{L_{q,\nu}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani, genelleşmiş girişim (p, ∞) -güçlü tiplidir. Böylece Riesz-Thorin İnterpolasyon teoremi gereğince

$$\|f \otimes g\|_{L_{r,\nu}} \leq \|f\|_{L_{p,\nu}} \|g\|_{L_{q,\nu}}$$

eşitsizliği elde edilir. □

Tanım 2.19. (Fourier-Bessel ve Ters Fourier-Bessel Dönüşümü)

$f \in L_{1,\nu}(\mathbb{R}_{k,+}^n)$ fonksiyonunun Fourier-Bessel dönüşümü, ilk k -değişkene göre Fourier-Bessel dönüşümü, $(n-k)$ -değişkene göre de klasik Fourier dönüşümü uygulanarak

$$(F_\nu f)(x) = \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} f(y) \left(\prod_{i=1}^k j_{\nu_i - \frac{1}{2}}(x_i y_i) \right) e^{-i\langle x'', y'' \rangle} (y')^{2\nu} dy, \quad (x \in \mathbb{R}_{k,+}^n)$$

şeklinde tanımlanır.

Burada $\langle x'', y'' \rangle = x_{k+1}y_{k+1} + \dots + x_n y_n$ ve $j_p(t)$, $(p > -\frac{1}{2})$ fonksiyonu normalleştirilmiş Bessel fonksiyonu olup, özel fonksiyonlar sınıfında iyi bilinen ve I.tip Bessel fonksiyonu adı verilen $J_p(t)$ -fonksiyonu yardımıyla ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$j_p(t) = 2^p \Gamma(p+1) \frac{J_p(t)}{t^p}, \quad (0 < t < \infty, j_p(0) = 1). \quad (2.7)$$

$j_p(t)$ -normalleştirilmiş Bessel fonksiyonu, Bessel diferansiyel operatörünün $j_p(0) = 1$ ve $j_p'(0) = 0$ koşullarını sağlayan öz vektörüdür. Başka bir ifadeyle her $\lambda > 0$ için

$$B_t j_p(\lambda t) = -\lambda^2 j_p(\lambda t), \quad (j_p(0) = 1, j_p'(0) = 0)$$

dir.

Klasik Fourier dönüşümünde integral operatörünün çekirdeği olan e^{-ixy} fonksiyonu $\frac{d}{dy}$ diferansiyel operatörünün öz vektörüdür. Şöyle ki

$$\begin{aligned}
e^{-ixy} \big|_{x=0} &= 1 \\
\frac{d}{dy} e^{-ixy} &= (-ix) e^{-ixy} \big|_{x=0} = 0
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanmaktadır.

Dolayısıyla klasik Fourier analizinde “ e^{-ixy} ” fonksiyonunun üstlendiği rolü, Fourier Bessel-Harmonik analizinde “ $j_p(xy)$ ” fonksiyonunun üstlendiğini söyleyebiliriz.

Diğer yandan F_ν – Fourier Bessel dönüşümüne uygun olarak F_ν^{-1} ters Fourier Bessel dönüşümü de

$$(F_\nu^{-1}f)(x) = c(n, \nu, k) (F_\nu f)(x', -x'')$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada

$$c(n, \nu, k) = \left[(2\pi)^{n-k} 2^{2|\nu|-k} \prod_{i=1}^k \Gamma^2(\nu_i + \frac{1}{2}) \right]^{-1} \quad (2.8)$$

şeklinde dir.

$f : \mathbb{R}_{k,+}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ “yeterince iyi tanımlı” fonksiyonlar için de benzer tanımları yapmak mümkündür. Şöyle ki $(x, t) \in \mathbb{R}_{k,+}^n \times \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} (F_\nu f)(x, t) &= \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \int_{\mathbb{R}} f(y, \tau) \left(\prod_{i=1}^k j_{\nu_i - \frac{1}{2}}(x_i y_i) \right) e^{-i\langle x'', y'' \rangle} e^{-it\tau} d\tau (y')^{2\nu} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \int_{\mathbb{R}} f(y, \tau) \left(\prod_{i=1}^k j_{\nu_i - \frac{1}{2}}(x_i y_i) \right) e^{-i(\langle x'', y'' \rangle + t\tau)} d\tau (y')^{2\nu} dy \end{aligned}$$

ve

$$(F_\nu^{-1}f)(x, t) = c(n, \nu, k) (F_\nu f)(x', -x'', -t)$$

eşitlikleri ile tanımlanır. Buradaki $c(n, \nu, k)$ sabiti (2.8) ifadesindeki ile aynıdır.

Ayrıca klasik Fourier dönüşümünün sağladığı tüm özellikleri F_ν – Fourier-Bessel dönüşümü de sağlamaktadır. Örneğin

$$F_\nu(f \otimes g)(x) = F_\nu(f)(x) F_\nu(g)(x). \quad (2.9)$$

dir.

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Genelleşmiş Gauss-Weierstrass Çekirdeği

Bu ilk kısımda genelleşmiş kaymanın doğurduğu Gauss-Weierstrass çekirdeğini elde edeceğiz. Laplace-Bessel diferansiyel operatörü

$$\Delta_\nu = \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{2\nu_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=k+1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad (\nu_1, \dots, \nu_k > 0)$$

ile ilişkilendirilen ve bu tez çalışmamızın esas operatörleri olan genelleşmiş kaymanın doğurduğu Parabolik Riesz ve Parabolik Bessel potansiyellerini tanımlayabilmemiz için Δ_ν -Laplace Bessel diferansiyel operatörüne karşılık gelen Gauss-Weierstrass çekirdeğine ve integraline (yarı-grup) ihtiyacımız vardır.

Klasik Fourier analizinden $f(x) = e^{-\pi a|x|^2}$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünün **klasik Gauss-Weierstrass çekirdeği** olduğunu biliyoruz. Konu bütünlüğü açısından klasik Gauss-Weierstrass çekirdeği aşağıda hesaplayalım.

Önce $\mathbb{R}$ de $f(x) = e^{-\pi a x^2}$ fonksiyonunu göz önüne alalım ve Fourier dönüşümünü bulalım. Böylece $f'(x) = (-2\pi a x)f(x)$ ve $(f')^\wedge(x) = (2\pi i x)f^\wedge(x)$ olduğundan

$$\begin{aligned} (f')^\wedge(x) &= \frac{d}{dx} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2\pi i x t} dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx} (f(t) e^{-2\pi i x t}) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} (-2\pi i t) f(t) e^{-2\pi i x t} dt = ((-2\pi i t) f(t))^\wedge(x) \\ &= \left(\frac{i}{a} (-2\pi a t) f(t) \right)^\wedge(x) = \left(\frac{i}{a} f'(t) \right)^\wedge(x) \\ &= \frac{i}{a} 2\pi i x f^\wedge(x) = \left(-\frac{2\pi x}{a} \right) f^\wedge(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $f^\wedge(x) = g(x)$ için $g'(x) = -\frac{2\pi x}{a} g(x)$ diferansiyel denklemi çözülerek $g(x) = c e^{-\frac{\pi x^2}{a}}$ bulunur. Bu ifade $f^\wedge(x) = g(x)$ eşitliğinde yerine yazılır

$$f^\wedge(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi a x^2} e^{-2\pi i x t} dt = c e^{-\frac{\pi x^2}{a}}$$

ve $x = 0$ için

$$c = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi a t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

bulunur. Böylece

$$f^\wedge(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2\pi i x t} dt = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\pi x^2}{a}}$$

dir. $\mathbb{R}^n$ de $f(x) = e^{-\pi a |x|^2}$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü ise

$$\begin{aligned} f^\wedge(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi a |t|^2} e^{-2\pi i x \cdot t} dt = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi a (t_1^2 + \dots + t_n^2)} e^{-2\pi i (x_1 t_1 + \dots + x_n t_n)} dt_1 \dots dt_n \\ &= \prod_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi a t_k^2} e^{-2\pi i x_k t_k} dt_k = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\pi x_k^2}{a}} = \frac{1}{a^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\pi |x|^2}{a}}. \end{aligned}$$

biçimindedir. Böylece klasik Gauss-Weierstrass çekirdeğinin açık ifadesi

$$W(x, a) = \frac{1}{a^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\pi |x|^2}{a}} \quad (3.10)$$

şeklindedir.

Bu motivasyon ile çalışmamızın bu kısmında $t > 0$ olmak üzere $e^{-t|x|^2}$ fonksiyonunun ters Fourier-Bessel dönüşümü genelleşmiş kaymanın doğurduğu Genelleşmiş Gauss-Weierstrass çekirdeği olarak tanımlanacaktır. Yani,

$$w_\nu(x, t) = F_\nu^{-1}(e^{-t|\cdot|^2})(x) = c(n, \nu, k) F_\nu(e^{-t|\cdot|^2})(x', -x'') \quad (3.11)$$

şeklindedir.

Şimdi Genelleşmiş Gauss-Weierstrass çekirdeğini hesaplayalım. Bunun için, öncelikle anlamsal bütünlük açısından birtakım hatırlatmaları yapmakta yarar vardır.

$\nu > -1$ ve $\alpha, \beta > 0$ olmak üzere

$$\int_0^\infty e^{-\alpha r^2} r^{\nu+1} J_\nu(\beta r) dr = \frac{\beta^\nu}{(2\alpha)^{\nu+1}} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}} \quad (3.12)$$

dir. Detaylar için Stein-Weiss (1971) kaynağına bakılabilir. Burada

$$J_\nu(t) = 2^{-\nu} [\Gamma(\nu + 1)]^{-1} t^\nu j_\nu(t)$$

1.tip Bessel fonksiyonudur. (3.12) de yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\int_0^\infty e^{-\alpha r^2} r^{2\nu} j_{\nu-\frac{1}{2}}(\beta r) dr = \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{2\alpha^{\nu+\frac{1}{2}}} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}} \quad (3.13)$$

eşitliği elde edilir. Bundan başka $t > 0$ olmak üzere

$$[e^{-\frac{|y|^2}{4t}}]^\wedge(x) = 2\sqrt{\pi t} e^{-t|x|^2}$$

olduğundan

$$[e^{-t|y|^2}]^\wedge(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \quad (3.14)$$

olur. Bu bilgiler ışığında, gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\begin{aligned} F_\nu(e^{-t|\cdot|^2})(x', -x'') &= \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} e^{-t|y|^2} \left(\prod_{i=1}^k j_{\nu_i - \frac{1}{2}}(x_i y_i) \right) e^{-i\langle x'', y'' \rangle} (y')^{2\nu} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} e^{-t(y_1^2 + \dots + y_n^2)} \left(\prod_{i=1}^k j_{\nu_i - \frac{1}{2}}(x_i y_i) \right) e^{-i(x_{k+1} y_{k+1} + \dots + x_n y_n)} y_1^{2\nu_1} \dots y_k^{2\nu_k} dy_1 \dots dy_n \\ &= \frac{\prod_{i=1}^k \Gamma(\nu_i + \frac{1}{2}) \pi^{\frac{n-k}{2}}}{2^k t^{\frac{2|\nu|+n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \end{aligned} \quad (3.15)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik (3.14) ifadesinde yerine yazılıp düzenlenirse

$$\begin{aligned} F_\nu^{-1}(e^{-t|\cdot|^2})(x) &= c(n, \nu, k) F_\nu(e^{-t|\cdot|^2})(x', -x'') \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n-k} 2^{2|\nu|-k} \prod_{i=1}^k \Gamma^2(\nu_i + \frac{1}{2})} \frac{\prod_{i=1}^k \Gamma(\nu_i + \frac{1}{2}) \pi^{\frac{n-k}{2}}}{2^k t^{\frac{2|\nu|+n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \\ &= \sqrt{c(n, \nu, k)} (2t)^{-\frac{2|\nu|+n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \end{aligned}$$

ve buradan Genelleşmiş Gauss-Weierstrass çekirdeği

$$w_\nu(x, t) = \sqrt{c(n, \nu, k)} (2t)^{-\frac{2|\nu|+n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \quad (3.16)$$

şeklinde elde edilir. Dahası Genelleşmiş Gauss-Weierstrass çekirdeğinin tanımından

$$F_\nu^{-1}(e^{-t|\cdot|^2})(x) = w_\nu(x, t) \Leftrightarrow F_\nu(w_\nu(\cdot, t))(x) = e^{-t|x|^2} \quad (3.17)$$

elde edilir.

Genelleşmiş Gauss-Weierstrass çekirdeğinin bazı önemli özelliklerini aşağıda ifade edelim.

Teorem 3.20. (Genelleşmiş Gauss-Weierstrass Çekirdeğinin Özellikleri)

(I)

$$\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} w_\nu(x, t) (x')^{2\nu} dx = 1 \quad (3.18)$$

(2)

$$w_\nu(x, t + s) = w_\nu(x, t) \otimes w_\nu(x, s) = \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} w_\nu(y, t) T_x^y(w_\nu(x, s))(y')^{2\nu} dy \quad (3.19)$$

(3) $\forall \epsilon > 0, t > 0$ ve $x \in \mathbb{R}_{k,+}^n$ için

$$w_\nu(\sqrt{\epsilon}x, \epsilon t) = \epsilon^{-\frac{2|\nu|+n}{2}} w_\nu(x, t) \quad (3.20)$$

dir. Burada (3) özelliği “Çekirdeğin Anizotropik Özelliği” olarak da bilinir.

İspat (1)

$$F_\nu(w_\nu(\cdot, t))(x) = \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} w_\nu(y, t) \left(\prod_{i=1}^k j_{\nu_i - \frac{1}{2}}(x_i y_i) \right) e^{-i\langle x'', y'' \rangle} (y')^{2\nu} dy = e^{-t|x|^2}$$

olduğunu biliyoruz. Diğer yandan Genelleşmiş I tip Bessel fonksiyonu için $j_p(0) = 1$ olduğundan $x = 0$ alınması halinde

$$\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} w_\nu(x, t) (x')^{2\nu} dx = 1$$

eşitliği elde edilir.

(2)

$$\begin{aligned} F_\nu[w_\nu(\cdot, t) \otimes w_\nu(\cdot, s)](x) &= F_\nu[w_\nu(\cdot, t)](x) F_\nu[w_\nu(\cdot, s)](x) \\ &= e^{-t|x|^2} e^{-s|x|^2} = e^{-(t+s)|x|^2} \\ &= F_\nu[w_\nu(\cdot, t + s)](x) \end{aligned}$$

olup, Fourier-Bessel dönüşümleri eşit olan fonksiyonların kendileri de eşit olacağından

$$w_\nu(\cdot, t) \otimes w_\nu(\cdot, s) = w_\nu(\cdot, t + s)$$

eşitliği elde edilir

(3) $w_\nu(x, t) = \sqrt{c(n, \nu, k)} (2t)^{-\frac{2|\nu|+n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ ifadesinden yararlanarak

$$\begin{aligned} w_\nu(\sqrt{\epsilon}x, \epsilon t) &= \sqrt{C(n, \nu, k)} (2\epsilon t)^{-\frac{2|\nu|+n}{2}} e^{-\frac{|\sqrt{\epsilon}x|^2}{4\epsilon t}} \\ &= \sqrt{C(n, \nu, k)} \epsilon^{-\frac{2|\nu|+n}{2}} 2t^{-\frac{2|\nu|+n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \\ &= \epsilon^{-\frac{2|\nu|+n}{2}} w_\nu(x, t) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Özel olarak $\epsilon = \frac{1}{t}$ yazılırsa

$$w_\nu(x, t) = \epsilon^{\frac{2|\nu|+n}{2}} w_\nu(\sqrt{\epsilon}x, \epsilon t)$$

eşitliğinden

$$w_\nu(x, t) = t^{-\frac{2|\nu|+n}{2}} w_\nu(xt^{-\frac{1}{2}}, 1) \quad (3.21)$$

elde edilir. $\square$

3.2. Genelleşmiş Gauss-Weierstrass Yarıgrubu

Genelleşmiş Gauss-Weierstrass yarıgrubu, genelleşmiş kaymanın doğurduğu girişim tipli bir integral operatördür ve Genelleşmiş Gauss-Weierstrass çekirdeği vasıtasıyla

$$(G_{\nu,t} f)(x) \equiv G_\nu f(x, t) = (f \otimes w_\nu(\cdot, t))(x) = \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} f(y) T^y(w_\nu(x, t))(y')^{2\nu} dy$$

şeklinde tanımlanır.

Genelleşmiş Gauss-Weierstrass integral operatörünün yarıgrup olarak anılmasının sebebi yarıgrup özelliğini sağlamasıdır:

$$(G_{\nu,t+s} f)(x) = G_{\nu,t} [(G_{\nu,s} f)(\cdot)](x). \quad (3.22)$$

Gerçekten de, (3.22) eşitliğinin her iki yanına Fourier-Bessel dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned} F_\nu((G_{\nu,t+s} f)(\cdot))(x) &= F_\nu(f \otimes w_\nu(\cdot, t+s))(x) = F_\nu(f)(x) F_\nu(w_\nu(\cdot, t+s))(x) \\ &= F_\nu(f)(x) F_\nu(w_\nu(\cdot, t) \otimes w_\nu(\cdot, s))(x) \\ &= F_\nu(f)(x) F_\nu(w_\nu(\cdot, t))(x) F_\nu(w_\nu(\cdot, s))(x) \\ &= e^{-(t+s)|x|^2} F_\nu(f)(x) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} F_\nu(G_{\nu,t} (G_{\nu,s} f)(\cdot))(x) &= F_\nu(f \otimes (w_\nu(\cdot, t)w_\nu(\cdot, s)))(x) \\ &= F_\nu(f)(x) F_\nu(w_\nu(\cdot, t))(x) F_\nu(w_\nu(\cdot, s))(x) \\ &= e^{-(t+s)|x|^2} F_\nu(f)(x) \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

Tez çalışmamızın ilerleyen kısımları için $w_\nu(x, t)$ Gauss-Weierstrass çekirdeğini

$$w_\nu(x, t) = \begin{cases} \sqrt{c(n, \nu, k)}(2t)^{-\frac{2|\nu|+n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & ; \quad t > 0 \\ 0 & ; \quad t \leq 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

şeklinde kabul edeceğiz. Ayrıca bundan sonraki bölümlerde

$$t_+^{\frac{\alpha}{2}-1} = \begin{cases} t^{\frac{\alpha}{2}-1} & ; \quad t > 0 \\ 0 & ; \quad t \leq 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

gösterimi de kullanılacaktır.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde tez çalışmamızın esas amacı olan genelleşmiş kaymanın doğurduğu parabolik Riesz ve parabolik Bessel tipli potansiyelleri tanımlayıp, parabolik Riesz tipli potansiyellerin ağırlıklı Lebesgue uzaylarında sınırlılığı, parabolik Riesz ve parabolik Bessel tipli potansiyellerin yaklaşım özelliklerini ve uygun dalgacık dönüşümleri için Calderon yeniden üretme formülünü ifade edip kanıtlayacağız.

4.1. Genelleşmiş Kaymanın Doğurduğu Parabolik Riesz ve Parabolik Bessel Tipli Potansiyeller

Laplace-Bessel Diferansiyel operatörü

$$\Delta_\nu = \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{2\nu_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=k+1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad (\nu_1, \dots, \nu_k > 0)$$

ile ilişkilendirilen genelleşmiş kayma tarafından doğurulan ve

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_\nu \right) \text{ ve } \left(\frac{\partial}{\partial t} + I - \Delta_\nu \right)$$

diferansiyel operatörlerinin negatif kesirsel kuvvetleri olarak yorumlanan parabolik Riesz ve parabolik Bessel tipli potansiyellerin Fourier-Bessel dönüşümü dilinde sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır. Yani, $(x, t) \in \mathbb{R}_{k,+}^n \times \mathbb{R}$ ve $\alpha > 0$ için

$$F_\nu(P_\nu^\alpha f)(x, t) = (|x|^2 + it)^{-\frac{\alpha}{2}} (F_\nu f)(x, t), \quad (4.25)$$

$$F_\nu(\mathcal{P}_\nu^\alpha f)(x, t) = (1 + |x|^2 + it)^{-\frac{\alpha}{2}} (F_\nu f)(x, t). \quad (4.26)$$

Buradan parabolik Riesz ve parabolik Bessel tipli potansiyellerin girişim tipli integral operatörler olduğunu görürüz.

$$p_\alpha(y, \tau) = \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \tau_+^{\frac{\alpha}{2}-1} w_\nu(y, \tau) \quad \text{ve} \quad q_\alpha(y, \tau) = \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \tau_+^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-\tau} w_\nu(y, \tau)$$

olmak üzere parabolik Riesz ve parabolik Bessel tipli potansiyellerin integral ifadeleri ise sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} P_\nu^\alpha f(x, t) &= (p_\alpha \otimes f)(x, t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \int_0^\infty \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} w_\nu(y, \tau) T^{y, \tau} f(x, t) d\tau (y')^{2\nu} dy; \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_\nu^\alpha f(x, t) &= (q_\alpha \circledast f)(x, t) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \int_0^\infty \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-\tau} w_\nu(y, \tau) T^{y, \tau} f(x, t) d\tau (y')^{2\nu} dy. \quad (4.28)
\end{aligned}$$

$f, \mathbb{R}_{k,+}^n \times \mathbb{R}$ 'da tanımlı Schwartz test fonksiyonları uzayından olmak üzere

$$F_\nu(P_\nu^\alpha f) \equiv F_\nu(p_\alpha \circledast f) = F_\nu(p_\alpha) F_\nu(f) \quad (4.29)$$

ve

$$F_\nu(\mathcal{P}_\nu^\alpha f) \equiv F_\nu(q_\alpha \circledast f) = F_\nu(q_\alpha) F_\nu(f) \quad (4.30)$$

dir. Dahası önceki kesimde yer alan (3.23) ve (3.24) dikkate alındığında

$$\begin{aligned}
(F_\nu p_\alpha)(x, t) &= \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \int_{\mathbb{R}} p_\alpha(y, \tau) \left(\prod_{i=1}^k j_{\nu_i - \frac{1}{2}}(x_i y_i) \right) e^{-i(\langle x'', y'' \rangle + t\tau)} d\tau (y')^{2\nu} dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \int_{\mathbb{R}} \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} w_\nu(y, \tau) \left(\prod_{i=1}^k j_{\nu_i - \frac{1}{2}}(x_i y_i) \right) e^{-i(\langle x'', y'' \rangle + t\tau)} d\tau (y')^{2\nu} dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_0^\infty \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-it\tau} \left(\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} w_\nu(y, \tau) \left(\prod_{i=1}^k j_{\nu_i - \frac{1}{2}}(x_i y_i) \right) e^{-i\langle x'', y'' \rangle} (y')^{2\nu} dy \right) d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_0^\infty \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-it\tau} F_\nu(w_\nu(\cdot, \tau))(x) d\tau = \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_0^\infty \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-it\tau} e^{-\tau|x|^2} d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_0^\infty \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-\tau(|x|^2 + it)} d\tau \quad (4.31)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu son eşitliğe Gamma fonksiyonunu

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty s^{z-1} e^{-s} ds, \quad (\operatorname{Re}(z) > 0) \quad (4.32)$$

uygulayalım. O halde (4.31) eşitliğinde bir değişken değişimi yapalım: $s = \tau(|x|^2 + it)$

için $ds = (|x|^2 + it) d\tau$ olduğundan

$$\begin{aligned}
(F_\nu p_\alpha)(x, t) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_0^\infty (|x|^2 + it)^{1-\frac{\alpha}{2}} s^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-s} (|x|^2 + it)^{-1} ds \\
&= (|x|^2 + it)^{-\frac{\alpha}{2}} \quad (4.33)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$(F_\nu q_\alpha)(x, t) = (1 + |x|^2 + it)^{-\frac{\alpha}{2}} \quad (4.34)$$

dir. Bu ise Parabolik Riesz ve Parabolik Bessel tipli potansiyellerinin sırasıyla

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_\nu\right) \text{ ve } \left(\frac{\partial}{\partial t} + I - \Delta_\nu\right)$$

diferansiyel operatörlerinin negatif kesirsel kuvveti $(-\frac{\alpha}{2})$ olarak yorumlanması demektir.

4.2. Parabolik Riesz Tipli Potansiyellerin Ağırlıklı Lebesgue uzaylarında Sınırlılığı

Bu bölümde, (1.1) ile tanımlanan Δ_ν Laplace-Bessel diferansiyel operatörü ile ilişkilendirilen genelleşmiş kayma doğurduğu parabolik Riesz tipli potansiyellerin ağırlıklı Lebesgue uzaylarında sınırlılığı yani, Hardy-Littlewood-Sobolev tipli teoremi kanıtlayacağız.

Teorem 4.21. $f \in \mathcal{L}_{p,\nu}$, $1 < p < \infty$ ve $0 < \alpha < \frac{n+2+2|\nu|}{p}$ olsun. Bu durumda

(1) $P_\nu^\alpha f(x, t)$ parabolik Riesz tipli potansiyeli $h.h.(x, t) \in \mathbb{R}_{k,+}^n \times \mathbb{R}$ için mutlak yakınsaktır.

(2) $1 < p < q < \infty$ olmak üzere

$$\|P_\nu^\alpha f\|_{\mathcal{L}_{q,\nu}} \leq c \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}} \Leftrightarrow \alpha = (n + 2 + 2|\nu|)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \quad (4.35)$$

dir. Yani, P_ν^α -Parabolik Riesz potansiyelinin $1 < p < q < \infty$ olmak üzere $\mathcal{L}_{p,\nu}$ uzayından $\mathcal{L}_{q,\nu}$ uzayına sınırlı etki göstermesi için gerek ve yeterli koşul $\alpha = (n+2+2|\nu|)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ olmasıdır.

(3) $p = 1$ ve $\alpha = (n + 2 + 2|\nu|)\left(1 - \frac{1}{q}\right)$ olmak üzere P_ν^α -Parabolik Riesz potansiyeli zayıf $(1, q)$ -tiplidir. Yani,

$$m\{(x, t) \in \mathbb{R}_{k,+}^n \times \mathbb{R} : |(P_\nu^\alpha f)(x, t)| > \lambda\} \leq \left(\frac{c \|f\|_{\mathcal{L}_{1,\nu}}}{\lambda}\right)^q \quad (4.36)$$

dir. Burada $m\{E\} = \int_E (x')^{2\nu} dx dt$ ile tanımlıdır.

İspat (1) Parabolik Riesz tipli potansiyeli

$$\begin{aligned}
P_\nu^\alpha f(x, t) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \int_0^\infty \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} w_\nu(y, \tau) T^{y,\tau} f(x, t) d\tau (y')^{2\nu} dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \int_0^1 \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} w_\nu(y, \tau) T^{y,\tau} f(x, t) d\tau (y')^{2\nu} dy \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \int_1^\infty \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} w_\nu(y, \tau) T^{y,\tau} f(x, t) d\tau (y')^{2\nu} dy \\
&\equiv A_1(x, t) + A_2(x, t)
\end{aligned}$$

şeklinde yazalım, A_1 ve A_2 tahminlerini ayrı ayrı hesaplayalım. Öncelikle (2.2) eşitsizliği ve genelleşmiş Gauss-Weierstrass çekirdeği için (3.21) eşitliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\|A_1\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}} &\leq \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \int_0^1 \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} |w_\nu(y, \tau)| \|T^{y,\tau} f(x, t)\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}} d\tau (y')^{2\nu} dy \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}} \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \int_0^1 \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} |w_\nu(y, \tau)| d\tau (y')^{2\nu} dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}} \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \int_0^1 \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} \tau^{-\frac{2|\nu|+n}{2}} |w_\nu(y\tau^{-\frac{1}{2}}, 1)| d\tau (y')^{2\nu} dy
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $z = y\tau^{-\frac{1}{2}}$ için $dz = \tau^{-\frac{n}{2}} dy$ ve $(y')^{2\nu} = (\tau^{\frac{1}{2}} z')^{2\nu} = \tau^{|\nu|} (z')^{2\nu}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\|A_1\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}} &\leq \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}} \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \int_0^1 \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} \tau^{-\frac{2|\nu|+n}{2}} |w_\nu(y\tau^{-\frac{1}{2}}, 1)| d\tau (y')^{2\nu} dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}} \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \int_0^1 \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} \tau^{-\frac{2|\nu|+n}{2}} |w_\nu(z, 1)| d\tau \tau^{|\nu|} (z')^{2\nu} \tau^{\frac{n}{2}} dz \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}} \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \int_0^1 \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} |w_\nu(z, 1)| d\tau (z')^{2\nu} dz \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}} \left(\int_0^1 \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} d\tau \right) \left(\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} |w_\nu(z, 1)| (z')^{2\nu} dz \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}} \frac{1}{2} \left(\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} |w_\nu(z, 1)| (z')^{2\nu} dz \right) \\
&= c_1 \frac{\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}}}{\Gamma(1 + \frac{\alpha}{2})}
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $c_1 = \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} |w_\nu(z, 1)| (z')^{2\nu} dz$ dir. Böylece, $h.h.(x, t) \in \mathbb{R}_{k,+}^n \times \mathbb{R}$ için $A_1(x, t)$ sonludur.

Şimdi $A_2(x, t)$ için Hölder Eşitsizliği göz önüne alınırsa, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
|A_2(x, t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \int_1^\infty \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} |w_\nu(y, \tau)| |T^{y,\tau} f(x, t)| d\tau (y')^{2\nu} dy \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \left(\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \int_1^\infty \tau^{(\frac{\alpha}{2}-1)q} |w_\nu(y, \tau)|^q d\tau (y')^{2\nu} dy \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \int_1^\infty |T^{y,\tau} f(x, t)|^p d\tau (y')^{2\nu} dy \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \|T^{y,\tau} f\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}} \left(\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \int_1^\infty \tau^{(\frac{\alpha}{2}-1)q} |w_\nu(y, \tau)|^q d\tau (y')^{2\nu} dy \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

olur. Burada (2.2) eşitsizliği ve genelleşmiş Gauss-Weierstrass çekirdeği için (3.21) ifadesi kullanılır ve $z = y\tau^{-\frac{1}{2}}$, $(dz = \tau^{-\frac{n}{2}} dy, (y')^{2\nu} = (\tau^{\frac{1}{2}} z')^{2\nu} = \tau^{|\nu|} (z')^{2\nu})$ dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
|A_2(x, t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \|T^{y,\tau} f\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}} \left(\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \int_1^\infty \tau^{(\frac{\alpha}{2}-1)q} |w_\nu(y, \tau)|^q d\tau (y')^{2\nu} dy \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}} \left(\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \int_1^\infty \tau^{(\frac{\alpha}{2}-1)q} |w_\nu(y, \tau)|^q d\tau (y')^{2\nu} dy \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}} \left(\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \int_1^\infty \tau^{(\frac{\alpha}{2}-1)q} \tau^{-\left(\frac{2|\nu|+n}{2}\right)q} |w_\nu(\tau^{-\frac{1}{2}} y, 1)|^q d\tau (y')^{2\nu} dy \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}} \left(\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \int_1^\infty \tau^{(\frac{\alpha}{2}-1)q} \tau^{-\left(\frac{2|\nu|+n}{2}\right)q} \tau^{|\nu|} \tau^{\frac{n}{2}} |w_\nu(z, 1)|^q d\tau (z')^{2\nu} dz \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}} \left(\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} |w_\nu(z, 1)|^q (z')^{2\nu} dz \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_1^\infty \tau^{q(\frac{\alpha}{2}-1-\frac{2|\nu|+n}{2})+\frac{2|\nu|+n}{2}} d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{c_2}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}} \left(\int_1^\infty \tau^{q(\frac{\alpha}{2}-1-\frac{2|\nu|+n}{2})+\frac{2|\nu|+n}{2}} d\tau \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $c_2 = \left(\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} |w_\nu(z, 1)|^q (z')^{2\nu} dz \right)^{\frac{1}{q}}$ dir. Bu son eşitliğin sonlu bir sayı olması için gerek ve yeterli koşul

$$q \left(\frac{\alpha}{2} - 1 - \frac{2|\nu|+n}{2} \right) + \frac{2|\nu|+n}{2} < -1$$

olmasıdır. Bu ise,

$$q \left(\frac{\alpha}{2} - 1 - \frac{2|\nu|+n}{2} \right) + \frac{2|\nu|+n}{2} < -1 \text{ ve } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

ifadelerinin ortak çözümü ile birlikte,

$$\alpha < \frac{2+2|\nu|+n}{p}$$

koşuluna denktir. Sonuç olarak, $P_\nu^\alpha f(x, t)$ parabolik Riesz potansiyeli $h.h. (x, t) \in \mathbb{R}_{k,+}^n \times \mathbb{R}$ için mutlak yakınsaktır.

Teorem(5.28)'in (2) ve (3) koşullarını direkt kanıtlamak yerine P_ν^α – parabolik Riesz tipli potansiyelinin $1 \leq p < q < \infty$ ve $\alpha = (2+2|\nu|+n) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)$ için zayıf (p, q) -tipli olduğunu göstereceğiz.

Daha sonra da Marcinkiewicz interpolasyon teoremini uygulayacağız. Yani,

$$p_\alpha(y, \tau) = \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \tau_+^{\frac{\alpha}{2}-1} w_\nu(y, \tau)$$

olduğundan

$$m\{x : |(p_\alpha \otimes f)(x)| > \lambda\} \leq \left(\frac{c \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}}}{\lambda} \right)^q$$

olduğunu gösterelim. Bunun için öncelikle

$$p_\alpha^1(y, \tau) = \begin{cases} p_\alpha(y, \tau) & ; \tau \leq \mu \\ 0 & ; \tau > \mu \end{cases} \text{ ve } p_\alpha^2(y, \tau) = \begin{cases} 0 & ; \tau < \mu \\ p_\alpha(y, \tau) & ; \tau \geq \mu \end{cases}$$

tanımlayalım. Buradan

$$p_\alpha(y, \tau) = p_\alpha^1(y, \tau) + p_\alpha^2(y, \tau)$$

dir ve buradaki μ -parametresi daha sonra belirlenecektir. $f \in \mathcal{L}_{p,\nu}$ ve $\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}} = 1$ olsun.

Böylece

$$\begin{aligned} & m \left\{ (y, \tau) \in \mathbb{R}_{k,+}^n \times \mathbb{R} : |(p_\alpha \otimes f)(y, \tau)| > \lambda \right\} \\ & \leq m \left\{ (y, \tau) \in \mathbb{R}_{k,+}^n \times \mathbb{R} : |(p_\alpha^1 \otimes f)(y, \tau)| > \frac{\lambda}{2} \right\} \\ & + m \left\{ (y, \tau) \in \mathbb{R}_{k,+}^n \times \mathbb{R} : |(p_\alpha^2 \otimes f)(y, \tau)| > \frac{\lambda}{2} \right\} \end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan Chebyshev ve Young eşitsizlikleri göz önüne alındığında

$$\begin{aligned} m \left\{ (y, \tau) \in \mathbb{R}_{k,+}^n \times \mathbb{R} : |(p_\alpha^1 \otimes f)(y, \tau)| > \frac{\lambda}{2} \right\} & \leq \left(\frac{2}{\lambda} \right)^p \|p_\alpha^1 \otimes f\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}}^p \\ & \leq \left(\frac{2}{\lambda} \right)^p \|p_\alpha^1\|_{\mathcal{L}_{1,\nu}}^p \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}}^p \\ & = \left(\frac{2}{\lambda} \right)^p \|p_\alpha^1\|_{\mathcal{L}_{1,\nu}}^p \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi bu son eşitsizlikteki $\|p_\alpha^1\|_{\mathcal{L}_{1,\nu}}$ normunu hesaplayalım. $w_\nu(y, \tau)$ genelleşmiş Gauss-Weierstrass çekirdeğinin (3.21) özelliği göz önüne alınır ve

$$z = y\tau^{-\frac{1}{2}}, \quad dz = \tau^{-\frac{n}{2}} dy, \quad (y')^{2\nu} = \left(\tau^{\frac{1}{2}} z' \right)^{2\nu} = \tau^{|\nu|} (z')^{2\nu}$$

dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned} \|p_\alpha^1\|_{\mathcal{L}_{1,\nu}} &= \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \int_{\mathbb{R}} |p_\alpha^1(y, \tau)| d\tau (y')^{2\nu} dy = \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \int_0^\mu |p_\alpha(y, \tau)| d\tau (y')^{2\nu} dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \int_0^\mu \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} |w_\nu(y, \tau)| d\tau (y')^{2\nu} dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \int_0^\mu \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} \tau^{-\frac{2|\nu|+n}{2}} \left| w_\nu(y\tau^{-\frac{1}{2}}, 1) \right| d\tau (y')^{2\nu} dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} |w_\nu(z, 1)| \int_0^\mu \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} d\tau (z')^{2\nu} dz = \frac{c_3}{\Gamma(1 + \frac{\alpha}{2})} \mu^{\frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $c_3 = \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} |w_\nu(z, 1)| (z')^{2\nu} dz$ dir.

Böylece (4.37)'a geri dönersek

$$m \left\{ (y, \tau) \in \mathbb{R}_{k,+}^n \times \mathbb{R} : |(p_\alpha^1 \otimes f)(y, \tau)| > \frac{\lambda}{2} \right\} \leq c_4 \left(\frac{\mu^{\frac{\alpha}{2}}}{\lambda} \right)^p \quad (4.37)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $c_4 = \left(\frac{2c_3}{\Gamma(1+\frac{\alpha}{2})}\right)^p$ dir.

Diğer yandan Young eşitsizliğinden (veya Hölder eşitsizliğinden)

$$\|p_\alpha^2 \otimes f\|_{\mathcal{L}_{\infty,\nu}} \leq \|p_\alpha^2\|_{\mathcal{L}_{q,\nu}} \|f\|_{\mathcal{L}_{P,\nu}} \quad ; \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

eşitsizliğini elde etmek mümkündür. Böylece burada $w_\nu(y, \tau)$ genelleşmiş Gauss Weierstrass çekirdeğinin (3.21) özelliği göz önüne alınır ve değişken değişimi yapılırsa

$$\begin{aligned} \|p_\alpha^2\|_{\mathcal{L}_{q,\nu}} &= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \left(\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \int_{\mu}^{\infty} \tau^{(\frac{\alpha}{2}-1)q} |w_\nu(y, \tau)|^q d\tau (y')^{2\nu} dy \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \left(\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} |w_\nu(z, 1)|^q (z')^{2\nu} dz \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mu}^{\infty} \tau^{q(\frac{\alpha}{2}-1-\frac{2|\nu|+n}{2})+\frac{2|\nu|+n}{2}} d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= c_5 \left(\int_{\mu}^{\infty} \tau^{q(\frac{\alpha}{2}-1-\frac{2|\nu|+n}{2})+\frac{2|\nu|+n}{2}} d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Burada $c_5 = \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \left(\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n |w_\nu(z, 1)|^q (z')^{2\nu} dz \right)^{\frac{1}{q}}$ dir.

Şimdi bu integrali hesaplayalım. Öncelikle, $0 < \alpha < \frac{n+2+2|\nu|}{p}$ olduğundan

$$\begin{aligned} q \left(\frac{\alpha}{2} - 1 - \frac{n+2|\nu|}{2} \right) + \frac{n+2|\nu|}{2} &= \frac{1}{2} (\alpha q - 2q - (n+2|\nu|)q + 2|\nu| + n) \\ &= \frac{1}{2} (\alpha q - 2q - (n+2|\nu|)(q-1)) \\ &= \frac{1}{2} (\alpha q - 2 - (n+2+2|\nu|)(q-1)) \\ &< -1 \end{aligned}$$

dir. Ayrıca, $\alpha = (n+2+2|\nu|) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olduğundan

$$q \left(\frac{\alpha}{2} - 1 - \frac{n+2|\nu|}{2} \right) + \frac{n+2|\nu|}{2} + 1 = \frac{1}{2} (\alpha q - (n+2+2|\nu|)(q-1))$$

eşitliğinde

$$\alpha q = (n+2+2|\nu|) \left(\frac{q}{p} - \frac{q}{q} \right) \quad \text{ve} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \iff \frac{q}{p} = q-1$$

dikkate alındığında

$$\begin{aligned} & q \left(\frac{\alpha}{2} - 1 - \frac{n+2|\nu|}{2} \right) + \frac{n+2|\nu|}{2} + 1 \\ &= \frac{1}{2} ((n+2+2|\nu|)(q-2) - (n+2+2|\nu|)(q-1)) \\ &= -\frac{n+2+2|\nu|}{2} \end{aligned}$$

olur. Buradan $\|p_\alpha^2\|_{\mathcal{L}_{q,\nu}} = c_5 \left(\frac{2}{n+2+2|\nu|} \mu^{-\frac{n+2+2|\nu|}{2}} \right)^{\frac{1}{q}} = c_6 \mu^{-\frac{n+2+2|\nu|}{2q}}$ ve

$$c_6 = \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \left(\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} |w_\nu(z, 1)|^q (z')^{2\nu} dz \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{2}{n+2+2|\nu|} \right)^{\frac{1}{q}}$$

dir. O halde

$$\|p_\alpha^2 \otimes f\|_{\mathcal{L}_{\infty,\nu}} \leq c_6 \mu^{-\frac{n+2+2|\nu|}{2q}}$$

elde edilir. Şimdi μ -parametresini belirleyelim. $c_6 \mu^{-\frac{n+2+2|\nu|}{2q}} = \frac{\lambda}{2}$ olması halinde $\mu = c_7 \lambda^{-\frac{2q}{n+2+2|\nu|}}$ elde edilir. Burada $c_7 = (2c_6)^{\frac{2q}{n+2+2|\nu|}}$ dir. Böylece

$$\|p_\alpha^2 \otimes f\|_{\mathcal{L}_{\infty,\nu}} \leq \frac{\lambda}{2}$$

ve

$$m \left\{ (y, \tau) \in \mathbb{R}_{k,+}^n \times \mathbb{R} : |(p_\alpha^2 \otimes f)(y, \tau)| > \frac{\lambda}{2} \right\} = 0 \quad (4.38)$$

elde edilir. Bu durumda (4.37) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} & m \{ (y, \tau) \in \mathbb{R}_{k,+}^n \times \mathbb{R} : |(p_\alpha \otimes f)(y, \tau)| > \lambda \} \\ & \leq c_4 \left(\frac{\mu^{\frac{\alpha}{2}}}{\lambda} \right)^p = c_4 \lambda^{-p} \left(c_7 \lambda^{-\frac{2q}{n+2+2|\nu|}} \right)^{\frac{\alpha p}{2}} = c_8 \lambda^{-(p + \frac{\alpha p q}{n+2+2|\nu|})} \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$p + \frac{\alpha p q}{n+2+2|\nu|} = \frac{p(n+2+2|\nu|)(1+q-2)}{n+2+2|\nu|} = p(q-1) = q$$

olduğundan

$$m \{ (y, \tau) \in \mathbb{R}_{k,+}^n \times \mathbb{R} : |(p_\alpha \otimes f)(y, \tau)| > \lambda \} \leq c_8 \lambda^{-(p + \frac{\alpha p q}{n+2+2|\nu|})} = c_8 \lambda^{-q}$$

elde edilir.

Dolayısıyla $1 \leq p < q < \infty$ ve $0 < \alpha < \frac{n+2+2|\nu|}{p}$ olmak üzere

$$\alpha = (n + 2 + 2|\nu|) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)$$

koşulu altında $\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}} = 1$ olduğundan P_ν^α – parabolik Riesz tipli potansiyeli zayıf (p, q) -tiplidir. Yani,

$$m \left\{ (y, \tau) \in \mathbb{R}_{k,+}^n \times \mathbb{R} : |(P_\nu^\alpha f)(y, \tau)| > \lambda \right\} \leq \left(\frac{c_9 \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}}}{\lambda} \right)^q$$

dir. Böylece Teorem(5.28)'in (3).kısmı kanıtlanmış oldu.

Diğer yandan (2).kısmın ispatı için Marcinkiewicz interpolasyon teoremini uygulayalım. Öncelikle P_ν^α – parabolik Riesz tipli potansiyelinin lineer bir operatör olduğunu ve yukarıdaki çalışmamızdan P_ν^α –parabolik Riesz tipli potansiyeli zayıf $(1, q_0)$ -tipli ve zayıf (p_1, q_1) -tipli olduğunu biliyoruz. Böylece $p > 1$ için Marcinkiewicz interpolasyon teoremine göre P_ν^α – parabolik Riesz tipli potansiyeli (p, q) -tiplidir. Yani;

$$\|P_\nu^\alpha f\|_{\mathcal{L}_{q,\nu}} \leq c \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}}$$

olacak şekilde $c > 0$ sayısı vardır. Ayrıca

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} &= \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} = 1 - \theta + \frac{\theta}{p_1} \\ \frac{1}{q} &= \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} \quad ; \theta \in (0, 1) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \alpha &= (n + 2 + 2|\nu|) \left(1 - \frac{1}{q_0} \right) \\ \alpha &= (n + 2 + 2|\nu|) \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} \right) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n + 2 + 2|\nu|} \Leftrightarrow \alpha = (n + 2 + 2|\nu|) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)$$

elde edilir.

Teorem(5.28)'in tamamlanması için, (2). kısımda $P_\nu^\alpha f$ – parabolik Riesz tipli potansiyelinin $1 < p < q < \infty$ için $\mathcal{L}_{p,\nu}$ uzayından $\mathcal{L}_{q,\nu}$ uzayına sınırlı olması için gerekli koşulun

$$\alpha = (n + 2 + 2|\nu|) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)$$

olduğunu göstermeliyiz. Bunun için herhangi $f \in \mathcal{L}_{p,\nu}$ verildiğinde $1 < p < q < \infty$ ve $0 < \alpha < \frac{n+2+2|\nu|}{p}$ için

$$\|P_\nu^\alpha f\|_{\mathcal{L}_{q,\nu}} \leq c \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}} \quad ; \quad c > 0$$

eşitsizliği sağlansın. Aynı eşitsizlik $\epsilon > 0$ olmak üzere $g(x, t) = f(\epsilon^{-\frac{1}{2}}x, \epsilon^{-1}t)$ fonksiyonu için de sağlanır. Şöyle ki

$$\begin{aligned} \|P_\nu^\alpha g\|_{\mathcal{L}_{q,\nu}} &= \left(\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n \times \mathbb{R}} |(P_\nu^\alpha g)(x, t)|^q dt (x')^{2\nu} dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n \times \mathbb{R}} \left| \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \int_0^\infty \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} w_\nu(y, \tau) T^{y,\tau} g(x, t) d\tau (y')^{2\nu} dy \right|^q dt (x')^{2\nu} dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n \times \mathbb{R}} \left| \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \int_0^\infty \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} w_\nu(y, \tau) T^{y,\tau} f(\epsilon^{-\frac{1}{2}}x, \epsilon^{-1}t) d\tau (y')^{2\nu} dy \right|^q dt (x')^{2\nu} dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n \times \mathbb{R}} \left| \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \int_0^\infty \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} w_\nu(y, \tau) T^{\epsilon^{-\frac{1}{2}}x, \epsilon^{-1}t} f(y, \tau) d\tau (y')^{2\nu} dy \right|^q dt (x')^{2\nu} dx \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

dir. Burada $z = \epsilon^{-\frac{1}{2}}x$ için $dx = \epsilon^{\frac{n}{2}}dz$, $(x')^{2\nu} = \epsilon^{|\nu|}(z')^{2\nu}$ ve $s = \epsilon^{-1}t$ için $dt = \epsilon ds$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned} &\|P_\nu^\alpha g\|_{\mathcal{L}_{q,\nu}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n \times \mathbb{R}} \left| \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \int_0^\infty \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} w_\nu(y, \tau) T^{\epsilon^{-\frac{1}{2}}x, \epsilon^{-1}t} f(y, \tau) d\tau (y')^{2\nu} dy \right|^q dt (x')^{2\nu} dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n \times \mathbb{R}} \left| \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \int_0^\infty \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} w_\nu(y, \tau) T^{z,s} f(y, \tau) d\tau (y')^{2\nu} dy \right|^q \epsilon^{\frac{n+2+2|\nu|}{2}} ds (z')^{2\nu} dz \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n \times \mathbb{R}} \left| \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \int_0^\infty \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} w_\nu(y, \tau) T^{y,\tau} f(z, s) d\tau (y')^{2\nu} dy \right|^q \epsilon^{\frac{n+2+2|\nu|}{2}} ds (z')^{2\nu} dz \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \epsilon^{\frac{n+2+2|\nu|}{2q}} \left(\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n \times \mathbb{R}} |(P_\nu^\alpha f)(z, s)|^q ds (z')^{2\nu} dz \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \epsilon^{\frac{n+2+2|\nu|}{2q}} \|P_\nu^\alpha f\|_{\mathcal{L}_{q,\nu}} \end{aligned} \tag{4.39}$$

elde edilir. Öte yandan

$$\begin{aligned}\|g\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}} &= \left(\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n \times \mathbb{R}} |g(x,t)|^p dt (x')^{2\nu} dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n \times \mathbb{R}} \left| f(\epsilon^{-\frac{1}{2}}x, \epsilon^{-1}t) \right|^p dt (x')^{2\nu} dx \right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

dir. Yine burada $z = \epsilon^{-\frac{1}{2}}x$ için $dx = \epsilon^{\frac{n}{2}}dz$ $(x')^{2\nu} = \epsilon^{|\nu|}(z')^{2\nu}$ ve $s = \epsilon^{-1}t$ için $dt = \epsilon ds$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned}\|g\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}} &= \left(\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n \times \mathbb{R}} \left| f(\epsilon^{-\frac{1}{2}}x, \epsilon^{-1}t) \right|^p dt (x')^{2\nu} dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n \times \mathbb{R}} |f(z,s)|^p \epsilon^{\frac{n+2+2|\nu|}{2}} ds (z')^{2\nu} dz \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \epsilon^{\frac{n+2+2|\nu|}{2p}} \left(\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n \times \mathbb{R}} |f(z,s)|^p ds (z')^{2\nu} dz \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \epsilon^{\frac{n+2+2|\nu|}{2p}} \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}}\end{aligned}\tag{4.40}$$

elde edilir. Böylece

$$\|P_\nu^\alpha g\|_{\mathcal{L}_{q,\nu}} \leq c \|g\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}} \quad \text{ve} \quad \|P_\nu^\alpha f\|_{\mathcal{L}_{q,\nu}} \leq c \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}} \quad ; \quad c > 0$$

olduğundan 4.39 ve 4.40 eşitsizlikleri göz önüne alındığında

$$\epsilon^{\frac{n+2+2|\nu|}{2q}} \|P_\nu^\alpha f\|_{\mathcal{L}_{q,\nu}} = \|P_\nu^\alpha g\|_{\mathcal{L}_{q,\nu}} \leq c \|g\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}} = c \epsilon^{\frac{n+2+2|\nu|}{2p}} \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}}$$

eşitsizliğinden

$$\|P_\nu^\alpha f\|_{\mathcal{L}_{q,\nu}} \leq c \epsilon^{\frac{n+2+2|\nu|}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)} \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}}$$

elde edileceğinden

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{n+2+2|\nu|}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \iff \alpha = n+2+2|\nu| \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)$$

bulunur. □

4.3. Parabolik Riesz ve Parabolik Bessel Tipli Potansiyellerin Yaklaşım Özellikleri

Aşağıdaki teorem, parabolik Riesz ve parabolik Bessel tipli potansiyellerinin ağırlıklı Lebesgue uzaylarında norma göre, noktasal ve düzgün yakınsaması üzerindedir.

Teorem 4.22. $f \in \mathcal{L}_{p,\nu}$, $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda

(a)

$$\lim_{(z,s) \rightarrow (x,t)} f(z,s) = \ell ; -\infty \leq \ell \leq \infty, (x,t) \in \mathbb{R}_{k,+}^n \times \mathbb{R}$$

limiti varsa o zaman

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (P_\nu^\alpha f)(x,t) = \ell \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (\mathcal{P}_\nu^\alpha f)(x,t) = \ell$$

eşitlikleri sağlanır. Dahası f fonksiyonu herhangi bir $(x,t) \in \mathbb{R}_{k,+}^n \times \mathbb{R}$ noktasında sürekli ise bu durumda

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (P_\nu^\alpha f)(x,t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (\mathcal{P}_\nu^\alpha f)(x,t) = f(x,t)$$

dir.

(b) $f \in \mathcal{L}_{p,\nu} \cap C_0$ ise yakınsama düzgündür. Yani,

$$P_\nu^\alpha f \rightrightarrows f, \quad \mathcal{P}_\nu^\alpha f \rightrightarrows f, \quad \alpha > 0$$

dir.

İspat Teoremi $P_\nu^\alpha f$ –parabolik Riesz potansiyeli için ispatlayacağız. Benzer şekilde $\mathcal{P}_\nu^\alpha f$ –parabolik Bessel potansiyeli için de ispat yazmak mümkündür.

(a) **I.durum**

$$\lim_{(z,s) \rightarrow (x,t)} f(z,s) = \ell ; -\infty < \ell < \infty$$

olsun. O halde

$$P_\nu^\alpha f(x,t) = \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} w_\nu(y,\tau) T^{y,\tau} f(x,t) (y')^{2\nu} dy d\tau \quad (4.41)$$

göz önüne alalım. Ayrıca

$$\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} w_\nu(x,t) (x')^{2\nu} dx = 1$$

ve

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} w_\nu(x,t) e^{-\tau} d\tau (x')^{2\nu} dx = 1 \quad (4.42)$$

ifadeleri göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}
P_\nu^\alpha f(x, t) - \ell &= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} w_\nu(y, \tau) T^{y,\tau} f(x, t) (y')^{2\nu} dy d\tau \\
&\quad - \frac{\ell}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-\tau} w_\nu(y, \tau) \ell e^{-\tau} (y')^{2\nu} dy d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} w_\nu(y, \tau) (T^{y,\tau} f(x, t) - \ell e^{-\tau}) (y')^{2\nu} dy d\tau
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bunun yanında herhangi $\epsilon > 0$ verildiğinde öyle $\delta > 0$ vardır öyle ki $\forall |y| < \sqrt{\delta}$ ve $0 < \tau < \delta$ için

$$|T^{y,\tau} f(x, t) - \ell| < \epsilon, \quad (1 - e^{-\tau}) < \epsilon \quad (4.43)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
|P_\nu^\alpha f(x, t) - \ell| &\leq \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_0^\delta \int_{|y| < \sqrt{\delta}} \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} w_\nu(y, \tau) |T^{y,\tau} f(x, t) - \ell e^{-\tau}| (y')^{2\nu} dy d\tau \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_0^\delta \int_{|y| \geq \sqrt{\delta}} \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} w_\nu(y, \tau) |T^{y,\tau} f(x, t) - \ell e^{-\tau}| (y')^{2\nu} dy d\tau \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_\delta^\infty \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} w_\nu(y, \tau) |T^{y,\tau} f(x, t) - \ell e^{-\tau}| (y')^{2\nu} dy d\tau \\
&= E_1(\alpha) + E_2(\alpha) + E_3(\alpha) \quad (4.44)
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $E_1(\alpha)$, $E_2(\alpha)$ ve $E_3(\alpha)$ değerlerini hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
E_1(\alpha) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_0^\delta \int_{|y| < \sqrt{\delta}} \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} w_\nu(y, \tau) |T^{y,\tau} f(x, t) - \ell e^{-\tau}| (y')^{2\nu} dy d\tau \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_0^\delta \int_{|y| < \sqrt{\delta}} \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} w_\nu(y, \tau) |T^{y,\tau} f(x, t) - \ell| (y')^{2\nu} dy d\tau \\
&\quad + \frac{|\ell|}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_0^\delta \int_{|y| < \sqrt{\delta}} \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} w_\nu(y, \tau) (1 - e^{-\tau}) (y')^{2\nu} dy d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1+|\ell|}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \epsilon \int_0^\delta \int_{|y|<\sqrt{\delta}} \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} w_\nu(y, \tau) (y')^{2\nu} dy d\tau \\
&= \frac{1+|\ell|}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \epsilon \int_0^\delta \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} d\tau \int_{|y|<\sqrt{\delta}} w_\nu(y, \tau) (y')^{2\nu} dy \\
&= \frac{(1+|\ell|) \delta^{\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma(1+\frac{\alpha}{2})} \epsilon
\end{aligned} \tag{4.45}$$

olur. $E_2(\alpha)$ ise

$$\begin{aligned}
E_2(\alpha) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_0^\delta \int_{|y|\geq\sqrt{\delta}} \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} w_\nu(y, \tau) |T^{y,\tau} f(x, t) - \ell e^{-\tau}| (y')^{2\nu} dy d\tau \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_0^\delta \int_{|y|\geq\sqrt{\delta}} \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} w_\nu(y, \tau) |T^{y,\tau} f(x, t)| (y')^{2\nu} dy d\tau \\
&\quad + \frac{|\ell|}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_0^\delta \int_{|y|\geq\sqrt{\delta}} \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-\tau} w_\nu(y, \tau) (y')^{2\nu} dy d\tau \\
&\equiv E'_2(\alpha) + E''_2(\alpha)
\end{aligned} \tag{4.46}$$

biçiminde elde edilir. (3.23) ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için Hölder eşitsizliği göz önüne alınırsa $\alpha > 0$ için

$$\begin{aligned}
E'_2(\alpha) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_0^\delta \int_{|y|\geq\sqrt{\delta}} \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} w_\nu(y, \tau) |T^{y,\tau} f(x, t)| (y')^{2\nu} dy d\tau \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \left(\int_0^\delta \int_{|y|\geq\sqrt{\delta}} |T^{y,\tau} f(x, t)|^p (y')^{2\nu} dy d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \left(\int_0^\delta \int_{|y|\geq\sqrt{\delta}} \tau^{(\frac{\alpha}{2}-1)q} (w_\nu(y, \tau))^q (y')^{2\nu} dy d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= c_1 \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \|T^{y,\tau} f\|_{\mathcal{L}_{P,\nu}} \left(\int_0^\delta \int_{|y|\geq\sqrt{\delta}} \tau^{(\frac{\alpha}{2}-1-\frac{n+2|\nu|}{2})q} e^{-\frac{|y|^2 q}{4\tau}} (y')^{2\nu} dy d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq c_1 \frac{\|f\|_{\mathcal{L}_{P,\nu}}}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \left(\int_0^\delta \tau^{(\frac{\alpha}{2}-1-\frac{n+2|\nu|}{2})q} \int_{|y|\geq\sqrt{\delta}} e^{-\frac{|y|^2 q}{4\tau}} (y')^{2\nu} dy d\tau \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

olur. Burada $\frac{|y|^2 q}{4\tau} = |z|^2$ dönüşümünü uygulanır ve $e^{-|z|^2} = e^{-\frac{|z|^2}{2}} e^{-\frac{|z|^2}{2}} \leq e^{-\frac{|z|^2}{2}} e^{-\frac{q\delta}{8\tau}}$ eşitsizliğini göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} E'_2(\alpha) &\leq c_1 \frac{\|f\|_{\mathcal{L}_{P,\nu}}}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \left(\int_0^\delta \tau^{\left(\frac{\alpha}{2}-1-\frac{n+2|\nu|}{2}\right)q} \int_{|y|\geq\sqrt{\delta}} e^{-\frac{|y|^2 q}{4\tau}} (y')^{2\nu} dy d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= c_2 \frac{\|f\|_{\mathcal{L}_{P,\nu}}}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \left(\int_0^\delta \tau^{q\left(\frac{\alpha}{2}-1-\frac{n+2|\nu|}{2}\right)+\frac{n+2|\nu|}{2}} \int_{|z|\geq\frac{1}{2}\sqrt{\frac{q\delta}{\tau}}} e^{-|z|^2} (z')^{2\nu} dz d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq c_2 \frac{\|f\|_{\mathcal{L}_{P,\nu}}}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \left(\int_0^\delta \tau^{q\left(\frac{\alpha}{2}-1-\frac{n+2|\nu|}{2}\right)+\frac{n+2|\nu|}{2}} e^{-\frac{q\delta}{8\tau}} d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} e^{-|z|^2} (z')^{2\nu} dz \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da

$$\alpha \rightarrow 0^+ \text{ için } \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \sim \frac{1}{2} \alpha$$

tahmini kullanılarak

$$E'_2(\alpha) \leq c_3(\delta) \alpha \|f\|_{\mathcal{L}_{P,\nu}} \quad (4.47)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$E''_2(\alpha) \leq c_4(\delta) |\ell| \alpha \quad (4.48)$$

eşitsizliğini de yazmak mümkündür. Böylece 4.45 den

$$E_2(\alpha) \leq \left(c_3(\delta) \|f\|_{\mathcal{L}_{P,\nu}} + c_4(\delta) |\ell| \right) \alpha = c_5(\delta) \alpha \quad (4.49)$$

bulunur. Şimdi $E_3(\alpha)$ 'yı hesaplayalım. Böylece

$$\begin{aligned} E_3(\alpha) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_0^\infty \int_{\delta \mathbb{R}_{k,+}^n} \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} w_\nu(y, \tau) |T^{y,\tau} f(x, t) - \ell e^{-\tau}| (y')^{2\nu} dy d\tau \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_0^\infty \int_{\delta \mathbb{R}_{k,+}^n} \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} w_\nu(y, \tau) |T^{y,\tau} f(x, t)| (y')^{2\nu} dy d\tau \\ &\quad + \frac{|\ell|}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_0^\infty \int_{\delta \mathbb{R}_{k,+}^n} \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-\tau} w_\nu(y, \tau) (y')^{2\nu} dy d\tau \\ &\equiv E'_3(\alpha) + E''_3(\alpha) \end{aligned} \quad (4.50)$$

elde edilir. Burada

$$E'_3(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_{\delta}^{\infty} \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} w_{\nu}(y, \tau) |T^{y,\tau} f(x, t)| (y')^{2\nu} dy d\tau$$

olup $\alpha < \frac{n+2+2|\nu|}{p}$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & E'_3(\alpha) \\ & \leq \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \left(\int_{\delta}^{\infty} \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} |T^{y,\tau} f(x, t)|^p (y')^{2\nu} dy d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\delta}^{\infty} \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \tau^{(\frac{\alpha}{2}-1)q} (w_{\nu}(y, \tau))^q (y')^{2\nu} dy d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \\ & = \frac{\|T^{y,\tau} f\|_{\mathcal{L}_{P,\nu}}}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \left(\int_{\delta}^{\infty} \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \tau^{(\frac{\alpha}{2}-1)q} \left(\sqrt{C(n, \nu, k)} (2\tau)^{-\frac{2|\nu|+n}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{4\tau}} \right)^q (y')^{2\nu} dy d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq c_6 \frac{\|f\|_{\mathcal{L}_{P,\nu}}}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \left(\int_{\delta}^{\infty} \tau^{q(\frac{\alpha}{2}-1-\frac{n+2|\nu|}{2})} \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} e^{-\frac{|y|^2 q}{4\tau}} (y')^{2\nu} dy d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizliğe $\frac{|y|^2 q}{4\tau} = |z|^2$ dönüşümünü uygulanırsa

$$\begin{aligned} E'_3(\alpha) & \leq c_6 \frac{\|f\|_{\mathcal{L}_{P,\nu}}}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \left(\int_{\delta}^{\infty} \tau^{q(\frac{\alpha}{2}-1-\frac{n+2|\nu|}{2})} \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} e^{-\frac{|y|^2 q}{4\tau}} (y')^{2\nu} dy d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \\ & = c_7 \frac{\|f\|_{\mathcal{L}_{P,\nu}}}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \left(\int_{\delta}^{\infty} \tau^{q(\frac{\alpha}{2}-1-\frac{n+2|\nu|}{2})+\frac{n+2|\nu|}{2}} d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} e^{-|z|^2} (z')^{2\nu} dz \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada da

$$\alpha \rightarrow 0^+ \text{ için } \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \sim \frac{1}{2} \alpha$$

tahmini kullanılarak

$$E'_3(\alpha) \leq c_8(\delta) \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}} \alpha \quad (4.51)$$

bulunur. Diğer yandan $\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} w_{\nu}(y, \tau) (y')^{2\nu} dy = 1$ olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned} E''_3(\alpha) & = \frac{|\ell|}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_{\delta}^{\infty} \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-\tau} w_{\nu}(y, \tau) (y')^{2\nu} dy d\tau \\ & = \frac{|\ell|}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_{\delta}^{\infty} \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-\tau} \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} w_{\nu}(y, \tau) (y')^{2\nu} dy d\tau \leq c_9 \frac{|\ell|}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \end{aligned}$$

olur. Yine

$$\alpha \rightarrow 0^+ \text{ için } \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \sim \frac{1}{2}\alpha$$

tahmini kullanılarak

$$E_3''(\alpha) \leq c_9(\delta) |\ell| \alpha \quad (4.52)$$

elde edilir. Böylece

$$E_3(\alpha) \leq \left(c_8(\delta) \|f\|_{\mathcal{L}_{P,\nu}} + c_9(\delta) |\ell| \right) \alpha = c_{10}(\delta) \alpha \quad (4.53)$$

bulunur. Sonuç olarak (4.44)'a geri dönersek

$$|P_\nu^\alpha f(x, t) - \ell| \leq \frac{(1 + |\ell|) \delta^{\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma(1 + \frac{\alpha}{2})} \epsilon + c_5(\delta) \alpha + c_{10}(\delta) \alpha$$

ve $\alpha \rightarrow 0^+$ için

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \sup |P_\nu^\alpha f(x, t) - \ell| \leq (1 + |\ell|) \epsilon$$

olur ve keyfi $\epsilon > 0$ için $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} |P_\nu^\alpha f(x, t) - \ell| = 0$ elde edilir.

II.durum

$$\lim_{(z,s) \rightarrow (x,t)} f(z, s) = \infty$$

olsun. $\lim_{(z,s) \rightarrow (x,t)} f(z, s) = -\infty$ olması durumu da benzer şekilde yapılır. Bu durumda verilen $M > 0$ için öyle $\delta > 0$ vardır öyle ki $\forall |y| < \sqrt{\delta}$ ve $0 < \tau < \delta$ için

$$|T^{y,\tau} f(x, t)| > M$$

dir. O halde

$$\begin{aligned} |P_\nu^\alpha f(x, t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_0^\delta \int_{|y| < \sqrt{\delta}} \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} w_\nu(y, \tau) |T^{y,\tau} f(x, t)| (y')^{2\nu} dy d\tau \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_0^\delta \int_{|y| \geq \sqrt{\delta}} \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} w_\nu(y, \tau) |T^{y,\tau} f(x, t)| (y')^{2\nu} dy d\tau \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_\delta^\infty \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} w_\nu(y, \tau) |T^{y,\tau} f(x, t)| (y')^{2\nu} dy d\tau \\ &\equiv F_1(\alpha) + F_2(\alpha) + F_3(\alpha) \end{aligned} \quad (4.54)$$

diyelim. Şimdi $F_1(\alpha), F_2(\alpha)$ ve $F_3(\alpha)$ değerlerini hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
 F_1(\alpha) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_0^\delta \int_{|y| < \sqrt{\delta}} \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} w_\nu(y, \tau) |T^{y, \tau} f(x, t)| (y')^{2\nu} dy d\tau \\
 &\geq \frac{M}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_0^\delta \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} \int_{|y| < \sqrt{\delta}} w_\nu(y, \tau) (y')^{2\nu} dy d\tau \\
 &= c_1 \frac{M}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_0^\delta \tau^{\frac{\alpha}{2}-1-\frac{n+2|\nu|}{2}} \int_{|y| < \sqrt{\delta}} e^{-\frac{|y|^2}{4\tau}} (y')^{2\nu} dy d\tau
 \end{aligned}$$

dir. Burada $\frac{|y|^2}{4\tau} = |z|^2$ dönüşümü uygulanırsa $(y')^{2\nu} dy = 2^{n+2|\nu|} \tau^{\frac{n+2|\nu|}{2}} (z')^{2\nu} dz$ ve $|y| < \sqrt{\delta} \leftrightarrow |z| < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\delta}{\tau}}$ olup

$$\begin{aligned}
 F_1(\alpha) &\geq c_1 \frac{M}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_0^\delta \tau^{\frac{\alpha}{2}-1-\frac{n+2|\nu|}{2}} \int_{|y| < \sqrt{\delta}} e^{-\frac{|y|^2}{4\tau}} (y')^{2\nu} dy d\tau \\
 &= c_2 \frac{M}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_0^\delta \tau^{\frac{\alpha}{2}-1-\frac{n+2|\nu|}{2}} \tau^{\frac{n+2|\nu|}{2}} \int_{|z| < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\delta}{\tau}}} e^{-|z|^2} (z')^{2\nu} dz d\tau \\
 &= c_3 \frac{M \delta^{\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma(1 + \frac{\alpha}{2})} \int_{|z| < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\delta}{\tau}}} e^{-|z|^2} (z')^{2\nu} dz \\
 &= c_4 \frac{M \delta^{\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma(1 + \frac{\alpha}{2})}
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

elde edilir. $F_2(\alpha)$ ve $F_3(\alpha)$ ifadeleri I.durum'daki $E'_2(\alpha)$ ve $E'_3(\alpha)$ ifadelerinden yararlanılarak

$$F_2(\alpha) \leq c_3(\delta) \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}} \alpha \text{ ve } F_3(\alpha) \leq c_8(\delta) \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}} \alpha \tag{4.56}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Böylece (4.54) 'dan

$$(P_\nu^\alpha f)(x, t) \geq c_4 \frac{M \delta^{\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma(1 + \frac{\alpha}{2})} - c_3(\delta) \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}} \alpha - c_8(\delta) \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}} \alpha$$

olacağından $\alpha \rightarrow 0^+$ için $(P_\nu^\alpha f)(x, t) \geq c_4 M$ elde edilir. Bu ise

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (P_\nu^\alpha f)(x, t) = \infty$$

olması demektir.

(b) $f \in \mathcal{L}_{p,\nu} \cap C_0$ olsun. Bu durumda, herhangi $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde öyle $\delta > 0$ vardır öyle ki $\forall |y| < \sqrt{\delta}$ ve $0 < \tau < \delta$ için

$$\sup_{(x,t) \in \mathbb{R}_{k,+}^n \times \mathbb{R}} |T^{y,\tau} f(x,t) - f(x,t)| < \epsilon, \quad (1 - \epsilon^{-\tau}) < \epsilon \quad (4.57)$$

dir.

Buradan I.durum'daki (4.44), (4.45), (4.49) ve (4.53) ifadelerinden de yararlanılarak,

$$\begin{aligned} \|(P_\nu^\alpha f)(x,t) - f(x,t)\|_{\mathcal{L}_{\infty,\nu}} &\leq \frac{(1 + \|f\|_{\mathcal{L}_{\infty,\nu}}) \delta^{\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma(1 + \frac{\alpha}{2})} \epsilon \\ &+ (c_3(\delta) \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}} + c_4(\delta) \|f\|_{\mathcal{L}_{\infty,\nu}}) \alpha \\ &+ (c_8(\delta) \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}} + c_9(\delta) \|f\|_{\mathcal{L}_{\infty,\nu}}) \alpha \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\alpha \rightarrow 0^+$ için $\epsilon > 0$ keyfi olduğundan

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \|P_\nu^\alpha f - f\|_{\mathcal{L}_{\infty,\nu}} = 0$$

bulunur.

$\mathcal{P}_\nu^\alpha f$ -Parabolik Bessel potansiyeli için de ispat benzer şekilde yapılır. Tek farkı aşağıdaki eşitliğin dikkate alınmasıdır:

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_\nu^\alpha f)(x,t) - \ell &= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-\tau} w_\nu(y,\tau) (T^{y,\tau} f(x,t) - \ell e^{-\tau}) (y')^{2\nu} dy d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_0^\delta \int_{|y| < \sqrt{\delta}} \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-\tau} w_\nu(y,\tau) (T^{y,\tau} f(x,t) - \ell e^{-\tau}) (y')^{2\nu} dy d\tau \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_0^\delta \int_{|y| \geq \sqrt{\delta}} \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-\tau} w_\nu(y,\tau) (T^{y,\tau} f(x,t) - \ell e^{-\tau}) (y')^{2\nu} dy d\tau \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_\delta^\infty \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-\tau} w_\nu(y,\tau) (T^{y,\tau} f(x,t) - \ell e^{-\tau}) (y')^{2\nu} dy d\tau. \end{aligned}$$

□

4.4. Parabolik ve Ağırlıklı Parabolik Tipli Bileşik Dalgacık Dönüşümleri için Calderon Yeniden Üretim Formülü

Calderon yeniden üretim formülü (Calderon Reproducing Formula) 1964 yılında Calderon'un ilk çalışmalarında

$$f = \frac{1}{C_{\mu,\nu}} \int_0^\infty (f * u_t * v_t) \frac{dt}{t} \quad (4.58)$$

eşitliği ile verilmektedir.

Dalgacık ve sinyal analizinin, fiziğin, matematiksel analizin ve uygulamalarının özellikle Fourier ve Fourier-Bessel harmonik analizinde birçok problemin ifade edilmesinde önemli rol oynamaktadır. Burada u ve v radyal "yeterince iyi" fonksiyonlar, örneğin, Schwartz test fonksiyonları uzayından fonksiyonlar olmak üzere;

$$u_t(x) = \frac{1}{t} u\left(\frac{x}{t}\right) \text{ ve } v_t(x) = \frac{1}{t} v\left(\frac{x}{t}\right), \quad (0 < t < \infty)$$

için

$$\int_0^\infty f^\wedge(\alpha t) g^\wedge(\alpha t) \frac{dt}{t} = 1, \quad \alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$$

koşulu altında (4.58) eşitliği $L_2(\mathbb{R}^n)$ -normunda ve $h.h.x$ için noktasal yakınsaktır.

Bundan başka, sürekli dalgacık(wavelet) dönüşüm ise

$$Wf(x, t) = \frac{1}{t^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) w\left(\frac{x-y}{t}\right) dy, \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0)$$

şeklinde tanımlanır. Burada w , integrallenebilir, radyal ve $\int_{\mathbb{R}^n} w(x) dx = 0$ koşulunu sağlayan bir dalgacık fonksiyonudur. Sürekli dalgacık dönüşümler, Calderon yeniden üretim formülü (4.58)'in bir genelleşmesi olan

$$\int_0^\infty Wf(x, t) \frac{dt}{t} = C_{\alpha,w} f(x)$$

eşitliği ile analiz ve uygulamalarında özellikle, integral denklemler teorisindeki problemlerin çözümünde önemli bir teknik araç olarak kullanılmaktadır.

2005 yılında Rubin ve Aliyev, "Bileşik Dalgacık Dönüşüm (Composite Wavelet Transform)" adı verilen bir sürekli dalgacık dönüşüm tanımlamışlardır. Bu dönüşümler, sürekli dalgacık dönüşümlerin iki değişkene bağlı bir sınıfıdır. Bu değişkenler yarıgrup

fonksiyonu ve dalgacık fonksiyonudur, her ikisinin seçimi de çalışılan probleme bağlı olarak seçilebilir.

Klasik Fourier analizinde Laplace diferansiyel operatörünün doğurduğu klasik kayma ile ilişkili Riesz, Bessel, Parabolik gibi potansiyeller için yeni ters belirleme formülleri Rubin ve Aliyev tarafından, bileşik dalgacık dönüşüm kullanılarak belirlenmiştir.

Bizim ise bu bölümde amacımız, Laplace-Bessel diferansiyel operatörünün doğurduğu genelleşmiş kayma operatörü ile ilişkili Gauss-Weierstrass yarıgrupunu ve uygun dalgacık fonksiyonunu kullanarak parabolik tipli bileşik dalgacık dönüşüm tanımlayarak, Calderon tipli yeniden üretme formülünü kanıtlamaktır. Bu formüllerin parabolik Riesz ve parabolik Bessel potansiyellerinin ters belirleme formülleri için gerekli olduğunu bilmekteyiz. Bundan sonraki çalışmamız bu ters belirleme formülleri üzerine olacaktır.

$(Pf)(x, t)$ radyal çekirdekli, girişim tipli yarıgrup ve μ -uygun dalgacık fonksiyonu olmak üzere bileşik dalgacık dönüşümü

$$Vf(x, t) = \int_0^{\infty} (Pf)(x, t\tau) d\mu(\tau)$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada $\mu, [0, \infty)$ aralığında sonlu Borel ölçüm ve $\mu([0, \infty)) = 0$ dir. $\mu(\{0\}) = 0$ kabul ediyoruz. Yani,

$$\int_{[0, \infty)} d\mu(\tau) = \int_0^{\infty} d\mu(\tau) = 0$$

dir. Bu şekildeki μ -ölçümlerine, özel olarak $[0, \infty)$ aralığında tanımlı dalgacık ölçümü adı verilir. μ -ölçümünün tam varyasyonu ise

$$\|\mu\| = \int_0^{\infty} d|\mu|(\tau) < \infty$$

şeklinde tanımlanır. Örneğin $E \subset [0, \infty)$ olmak üzere $\mu(E) = \int_E h(t) dt$ ile tanımlanırsa, μ -ölçümünün $[0, \infty)$ aralığındaki tam varyasyonu

$$\|\mu\| = \int_0^{\infty} |h(t)| dt$$

eşitliği ile ifade edilir. $0 \leq t < \infty$ olmak üzere

$$h(t) = \begin{cases} 1 & ; \quad 0 \leq t < 1 \\ -1 & ; \quad 1 \leq t < 2 \\ 0 & ; \quad 2 \leq t < \infty \end{cases}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. μ -ölçümde $d\mu(t) = h(t)dt$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$\int_0^\infty d\mu(t) = \int_0^\infty h(t)dt = \int_0^1 dt - \int_1^2 dt = 0$$

ve μ -ölçümünün $[0, \infty)$ aralığındaki tam varyasyonu

$$\|\mu\| = \int_0^\infty |h(t)| dt = 2$$

dir.

μ dalgacık ölçümü ve Laplace-Bessel diferansiyel operatörünün doğurduğu Genelleşmiş Gauss-Weierstrass çekirdeği $w_\nu(y, \tau)$, $(y \in \mathbb{R}_{k,+}^n, \tau > 0)$ olmak üzere

$$dm(y, \tau) = w_\nu(y, \tau) d\nu(y) d\mu(\tau), \quad d\nu(y) = (y')^{2\nu} dy$$

ölçümünü tanımlayalım. Burada Gauss-Weierstrass çekirdeği için $\tau \leq 0$ olmak üzere $w_\nu(y, \tau) = 0$ kabul ediyoruz. Açık ki, $m(y, \tau)$ ölçümü sonludur ve

$$m(\mathbb{R}_{k,+}^n \times \mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}^1} \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} w_\nu(y, \tau) d\nu(y) d\mu(\tau) = \int_{\mathbb{R}^1} d\mu(\tau) = 0$$

eşitliği sağlanır.

Artık genelleşmiş kaymanın doğurduğu parabolik tipli bileşik dalgacık dönüşümünü tanımlamak için herşey hazırdır.

Tanım 4.23. $f \in L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{k,+}^n)$, $(1 \leq p \leq \infty)$, $(L_{\infty,\nu} \equiv C_0)$, $w_\nu(x, t)$ Genelleşmiş Gauss-Weierstrass çekirdeği ve $(G_\nu f)(x, t)$ yarıgrup olmak üzere parabolik tipli bileşik dalgacık dönüşümü

$$W_{\nu,\mu}f(x, t, \eta) = \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n \times [0, \infty)} T^{\sqrt{\eta}y, \eta\tau} f(x, t) dm(y, \tau) \quad (4.59)$$

ve ağırlıklı parabolik tipli bileşik dalgacık dönüşümü

$$\widetilde{W}_{\nu,\mu}f(x, t, \eta) = \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n \times [0, \infty)} T^{\sqrt{\eta}y, \eta\tau} f(x, t) e^{-\eta\tau} dm(y, \tau) \quad (4.60)$$

ile tanımlanır.

Minkowski integral eşitliği kullanılarak $L_{p,\nu}, (1 \leq p \leq \infty), (L_{\infty,\nu} \equiv C_0)$ uzayında (5.68) ve (5.69) operatörlerinin iyi tanımlı olduğu gösterilebilir. Örneğin (5.68) deki operatör için $f \in L_{p,\nu}, (1 \leq p \leq \infty)$ için

$$\begin{aligned} \|W_{\nu,\mu}f(\cdot, \cdot, \eta)\|_{L_{p,\nu}} &\leq \|f\|_{L_{p,\nu}} \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \int_0^\infty |w_\nu(y, \tau)| d|\mu|(\tau) d\nu(y) \\ &= \|f\|_{L_{p,\nu}} \|\mu\| \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} |w_\nu(y, 1)| d\nu(y) < \infty \end{aligned}$$

dir. Calderon yeniden üretme formülünü kanıtlamak için aşağıdaki önteoremlere ihtiyacımız vardır.

Önteorem 4.24. (Stein-Weiss 1971)

$\{T_\epsilon\}, (\epsilon > 0)$ Lineer operatörler ailesi $L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{k,+}^n), (1 \leq p \leq \infty)$ uzayından $\mathbb{R}_{k,+}^n$ uzayındaki ölçülebilir fonksiyonlar uzayına tanımlı olsun. Ayrıca, $x \in \mathbb{R}_{k,+}^n$ olmak üzere herhangi $\varphi \in L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{k,+}^n)$ için

$$(T^*\varphi)(x) = \sup_{\epsilon > 0} |(T_\epsilon\varphi)(x)|$$

olsun. Eğer $T^*, q \geq 1$ için zayıf (p, q) -tipli yani,

$$m\{y : |(T^*\varphi)(y)| > \lambda\} \leq \left(\frac{c \|\varphi\|_{L_{p,\nu}}}{\lambda} \right)^q, (\forall \lambda > 0)$$

ve

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (T_\epsilon\varphi)(x)$$

limiti h.h.x $\in D$ için var ve sonlu olacak şekilde bir $D \subset L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{k,+}^n)$ yoğun altkümesi varsa, o zaman $\forall \varphi \in L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{k,+}^n)$ için $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (T_\epsilon\varphi)(x)$ limiti h.h.x $\in \mathbb{R}_{k,+}^n$ için var ve sonludur.

Önteorem 4.25. (Rubin 1986)

$k(x) \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ve $k_\rho(x) = \frac{1}{\rho} k\left(\frac{x}{\rho}\right)$ olsun. Bu durumda $g \in L_p(\mathbb{R}^n), (1 < p < \infty)$ için

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \|g * k_\rho\|_{L_1(\mathbb{R}^1)} = 0$$

dir. Ayrıca $g \in C_0$ ise

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |g * k_\rho| = 0$$

dir.

Önteorem 4.26. (Aliev, Bayrakci 1998)

$\varphi \in L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{k,+}^n)$ ve $\Psi(x) = \sup_{|x| \leq |y|} |\varphi(y)|$ olmak üzere

$$\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \Psi(x) d\nu(x) = c < \infty$$

olsun. Bu durumda $f \in L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{k,+}^n)$, $(1 \leq p < \infty)$ ve $x \in \mathbb{R}_{k,+}^n$ için

$$\sup_{\epsilon > 0} |(f \otimes \varphi_\epsilon)(x)| \leq c.(M_\nu f)(x)$$

dir. Burada $\varphi_\epsilon(x) = \epsilon^{-\frac{2|\nu|+n}{2}} \varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$, $(\epsilon > 0)$ ve M_ν ise Hardy-Littlewood Maksimal fonksiyonudur.

Aşağıdaki teorem parabolik tipli ve ağırlıklı parabolik tipli bileşik dalgacık dönüşümü için Calderon yeniden üretme formülüdür.

Teorem 4.27. $f \in \mathcal{L}_{p,\nu}$, $(1 < p \leq \infty)$ ve $V_{\nu,\mu}$ ise sırasıyla (5.68) ve (5.69) eşitlikleri ile tanımlanan parabolik tipli ve ağırlıklı parabolik tipli bileşik dalgacık dönüşümlerinden biri olsun. Ayrıca μ , sonlu Borel ölçümü $[0, \infty)$ aralığında tanımlansın ve

$$\int_0^\infty d\mu(t) = 0, \quad \int_0^\infty |\log \tau| d|\mu|(\tau) < \infty$$

koşulları sağlansın. Bu durumda

$$C_\mu = \int_0^\infty \log\left(\frac{1}{\tau}\right) d\mu(\tau) \neq 0$$

olmak üzere

$$\int_0^\infty V_{\nu,\mu} f(x, t, \eta) \frac{d\eta}{\eta} \equiv \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \rho \rightarrow \infty}} \int_\epsilon^\rho V_{\nu,\mu} f(x, t, \eta) \frac{d\eta}{\eta} = C_\mu f(x, t) \quad (4.61)$$

dir. Burada limit $\mathcal{L}_{p,\nu}$ -normu $(1 < p < \infty)$ anlamındadır.

İspat Önce $V_{\nu,\mu} = W_{\nu,\mu}$ olsun. Fubini teoremi ve Genelleşmiş Gauss-Weierstrass çekir-

değinin özelliklerinden biri olan $w_\nu(y, \tau) = \eta^{\frac{n+2|\nu|}{2}} w_\nu(\sqrt{\eta}y, \eta\tau)$ eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} A_{\epsilon, \rho} f(x, t) &= \int_{\epsilon}^{\rho} W_{\nu, \mu} f(x, t, \eta) \frac{d\eta}{\eta} \\ &= \int_{\epsilon}^{\rho} \left[\int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} T^{\sqrt{\eta}y, \eta\tau} f(x, t) w_\nu(y, \tau) d\nu(y) d\mu(\tau) \right] \frac{d\eta}{\eta} \\ &= \int_0^{\infty} \left[\int_{\epsilon}^{\rho} \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} T^{\sqrt{\eta}y, \eta\tau} f(x, t) \eta^{\frac{n+2|\nu|}{2}} w_\nu(\sqrt{\eta}y, \eta\tau) d\nu(y) \frac{d\eta}{\eta} \right] d\mu(\tau) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte $z = \sqrt{\eta}y$ ve $s = \eta\tau$ dönüşümünü uygulanırsa $d\nu(z) = \eta^{\frac{n+2|\nu|}{2}} d\nu(y)$ ve $ds = \tau d\eta$ olur. Buradan

$$A_{\epsilon, \rho} f(x, t) = \int_0^{\infty} \int_{\epsilon\tau}^{\rho\tau} \left(\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} T^{z,s} f(x, t) w_\nu(z, s) d\nu(z) \right) \frac{ds}{s} d\mu(\tau)$$

olur. $\|\mu\| = \int_0^{\infty} d|\mu|(\tau) < \infty$, $f \in \mathcal{L}_{p,\nu}$ ve her $z \in \mathbb{R}^n$, $s > 0$ için $w_\nu(z, s) \in L_{1,\nu}$ olduğundan son eşitliğin sağ tarafına Fubini teoremi uygulanabilir. Böylece

$$\begin{aligned} A_{\epsilon, \rho} f(x, t) &= \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \int_{\epsilon\tau}^{\rho\tau} \int_0^{\infty} T^{z,s} f(x, t) w_\nu(z, s) d\mu(\tau) \frac{ds}{s} d\nu(z) \\ &= \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} T^{z,s} f(x, t) w_\nu(z, s) \left(\frac{1}{s} \int_{\epsilon\tau}^{\rho\tau} \int_0^{\infty} d\mu(\tau) ds \right) d\nu(z) \\ &= \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} T^{z,s} f(x, t) w_\nu(z, s) \left(\frac{1}{s} \int_0^{\infty} \int_{\frac{s}{\rho}}^{\frac{s}{\epsilon}} d\mu(\tau) ds \right) d\nu(z) \\ &= \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \int_0^{\infty} T^{z,s} f(x, t) w_\nu(z, s) \left(\frac{1}{s} \int_{\frac{s}{\rho}}^{\frac{s}{\epsilon}} d\mu(\tau) \right) ds d\nu(z) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$k(t) = \frac{1}{t} \int_0^t d\mu(\tau) = \frac{1}{t} \mu([0, t)), \quad k_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon} k\left(\frac{t}{\epsilon}\right), \quad (t > 0, \epsilon < \infty)$$

olmak üzere

$$K_\epsilon \equiv K_\epsilon(x, t) = w_\nu(x, t) k_\epsilon(t) \equiv w_\nu(x, t) \frac{1}{\epsilon} k\left(\frac{t}{\epsilon}\right)$$

tanımlayalım. Böylece

$$A_{\epsilon,\rho}f(x,t) = (f \otimes K_\epsilon)(x,t) - (f \otimes K_\rho)(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}_{k,+}^n \times (0,\infty) \quad (4.62)$$

olur. (5.31)'den $k \in L_1(0,\infty)$ ve $\int_0^\infty k(t)dt = \int_0^\infty \log\left(\frac{1}{\tau}\right) d\mu(\tau) = C_\mu \neq 0$, [Rubin] dir.

Şimdi (4.62) eşitliğini kullanarak (5.70) ile verilen

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \rho \rightarrow \infty}} A_{\epsilon,\rho}f(x,t) = C_\mu \cdot f(x,t)$$

limitinin $\mathcal{L}_{p,\nu}$ -normunda yakınsaklığını gösterelim. Minkowski integral eşitliğine göre (4.62)'den

$$\|A_{\epsilon,\rho}f - C_\mu f\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}} \leq \|f \otimes K_\epsilon - C_\mu f\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}} + \|f \otimes K_\rho\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}} \quad (4.63)$$

eşitliği elde edilir. Buradan Lebesgue baskın yakınsama teoremine göre

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|f \otimes K_\epsilon - C_\mu f\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}} = 0, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad (\mathcal{L}_{\infty,\nu} \equiv C_0) \quad (4.64)$$

dir. Şimdi

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|f \otimes K_\rho\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}} = 0$$

olduğunu gösterelim Bunun için önce Minkowski integral eşitliği ve Genelleşmiş Gauss-Weierstrass çekirdeğinin (3.21) özelliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \|(f \otimes K_\rho)(\cdot, t)\|_{L_{p,\nu}} &= \left\| \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \int_0^\infty T^{z,s} f(\cdot, t) w_\nu(z, s) K_\rho(s) ds d\nu(z) \right\|_{L_{p,\nu}} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \left(\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \int_0^\infty |T^{z,s} f(x, t)| |w_\nu(z, s)| |K_\rho(s)| ds d\nu(z) \right)^p d\nu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} |T^{z,s} f(x, t)|^p d\nu(x) \right)^{\frac{1}{p}} |w_\nu(z, s)| |K_\rho(s)| ds d\nu(z) \\ &= \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \int_0^\infty \|T^{z,s} f(\cdot, t)\|_{L_{p,\nu}} s^{-\frac{2|\nu|+n}{2}} \left| w_\nu(zs^{-\frac{1}{2}}, 1) \right| |K_\rho(s)| ds d\nu(z) \end{aligned}$$

olur. Burada $y = zs^{-\frac{1}{2}}$, $d\nu(y) = s^{-\frac{2|\nu|+n}{2}} d\nu(z)$ dönüşümünü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\|(f \circledast K_\rho)(\cdot, t)\|_{L_{p,\nu}} &\leq \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \int_0^\infty \|T^{\cdot,s} f(\cdot, t)\|_{L_{p,\nu}} s^{-\frac{2|\nu|+n}{2}} \left| w_\nu(zs^{-\frac{1}{2}}, 1) \right| |K_\rho(s)| ds d\nu(z) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \int_0^\infty \|f(\cdot, t-s)\|_{L_{p,\nu}} |w_\nu(y, 1)| |K_\rho(s)| ds d\nu(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} |w_\nu(y, 1)| d\nu(y) \int_0^\infty \|f(\cdot, t-s)\|_{L_{p,\nu}} |K_\rho(s)| ds \\
&= c(\nu) \int_0^\infty \|f(\cdot, t-s)\|_{L_{p,\nu}} |K_\rho(s)| ds
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu aşamada

$$h(\tau) = \|f(\cdot, t-s)\|_{L_{p,\nu}}$$

fonksiyonunu tanımlanırsa

$$\|(f \circledast K_\rho)(\cdot, t)\|_{L_{p,\nu}} \leq c(\nu) (|K_\rho| * h)(t), \quad (-\infty < s \leq 0) \text{ için } K_\rho(s) = 0$$

eşitsizliğini yazmak mümkündür. Böylece

$$\begin{aligned}
\|f \circledast K_\rho\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}} &= \left(\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \int_{\mathbb{R}} |(f \circledast K_\rho)(x, t)|^p dt d\nu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} \|(f \circledast K_\rho)(\cdot, t)\|_{L_{p,\nu}}^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}} (c(\nu))^p [(|K_\rho| * h)(t)]^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = c(\nu) \| |K_\rho| * h \|_{L_p(\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

bulunur. $f \in \mathcal{L}_{p,\nu}$ olduğundan $h \in L_p(\mathbb{R})$ dir. Önteorem 4.25'ye göre

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \| |K_\rho| * h \|_{L_p(\mathbb{R})} = 0$$

dir. Buradan

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \|f \circledast K_\rho\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}} = 0 \quad (4.65)$$

elde edilir. Dolayısıyla (4.64) ve (4.65) eşitlikleri (4.63) eşitliğinde göz önüne alınırsa

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \rho \rightarrow \infty}} \|A_{\epsilon, \rho} f - C_{\mu} f\|_{\mathcal{L}_{p, \nu}} = 0, (\mathcal{L}_{\infty, \nu} \equiv C_0)$$

bulunur.

Benzer şekilde, $V_{\nu, \mu} = \widetilde{W}_{\nu, \mu}$ için de teoremin ispatı benzer şekilde yapılabilir. $\square$

5. SONUÇLAR

Laplace-Bessel Diferansiyel operatörü

$$\Delta_\nu = \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{2\nu_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=k+1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad (\nu_1, \dots, \nu_k > 0)$$

ile ilişkilendirilen genelleşmiş kayma tarafından doğurulan ve

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_\nu \right) \text{ ve } \left(\frac{\partial}{\partial t} + I - \Delta_\nu \right)$$

diferansiyel operatörlerinin negatif kesirsel kuvvetleri olarak yorumlanan parabolik Riesz ve parabolik Bessel tipli potansiyellerin Fourier-Bessel dönüşümü dilinde sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır. Yani, $(x, t) \in \mathbb{R}_{k,+}^n \times \mathbb{R}$ ve $\alpha > 0$ için

$$F_\nu(P_\nu^\alpha f)(x, t) = (|x|^2 + it)^{-\frac{\alpha}{2}} (F_\nu f)(x, t),$$

$$F_\nu(\mathcal{P}_\nu^\alpha f)(x, t) = (1 + |x|^2 + it)^{-\frac{\alpha}{2}} (F_\nu f)(x, t).$$

Buradan

$$p_\alpha(y, \tau) = \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \tau_+^{\frac{\alpha}{2}-1} w_\nu(y, \tau) \quad \text{ve} \quad q_\alpha(y, \tau) = \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \tau_+^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-\tau} w_\nu(y, \tau)$$

olmak üzere parabolik Riesz ve parabolik Bessel tipli potansiyellerin integral ifadeleri ise

$$\begin{aligned} P_\nu^\alpha f(x, t) &= (p_\alpha \otimes f)(x, t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \int_0^\infty \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} w_\nu(y, \tau) T^{y,\tau} f(x, t) d\tau (y')^{2\nu} dy; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\nu^\alpha f(x, t) &= (q_\alpha \otimes f)(x, t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \int_0^\infty \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-\tau} w_\nu(y, \tau) T^{y,\tau} f(x, t) d\tau (y')^{2\nu} dy. \end{aligned}$$

biçimindedir.

Teorem 5.28. (Hardy-Littlewood-Sobolev tipli teorem)

$f \in \mathcal{L}_{p,\nu}$, $1 < p < \infty$ ve $0 < \alpha < \frac{n+2+2|\nu|}{p}$ olsun. Bu durumda

(1) $P_\nu^\alpha f(x, t)$ parabolik Riesz tipli potansiyeli h.h. $(x, t) \in \mathbb{R}_{k,+}^n \times \mathbb{R}$ için mutlak yakınsaktır.

(2) $1 < p < q < \infty$ olmak üzere

$$\|P_\nu^\alpha f\|_{\mathcal{L}_{q,\nu}} \leq c \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\nu}} \Leftrightarrow \alpha = (n+2+2|\nu|)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \quad (5.66)$$

dir. Yani, P_ν^α -Parabolik Riesz potansiyelinin $1 < p < q < \infty$ olmak üzere $\mathcal{L}_{p,\nu}$ uzayından $\mathcal{L}_{q,\nu}$ uzayına sınırlı etki göstermesi için gerek ve yeterli koşul $\alpha = (n+2+2|\nu|)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ olmasıdır.

(3) $p = 1$ ve $\alpha = (n+2+2|\nu|)\left(1 - \frac{1}{q}\right)$ olmak üzere P_ν^α -Parabolik Riesz potansiyeli zayıf $(1, q)$ -tiplidir. Yani,

$$m\{(x, t) \in \mathbb{R}_{k,+}^n \times \mathbb{R} : |(P_\nu^\alpha f)(x, t)| > \lambda\} \leq \left(\frac{c \|f\|_{\mathcal{L}_{1,\nu}}}{\lambda}\right)^q \quad (5.67)$$

dir. Burada $m\{E\} = \int_E (x')^{2\nu} dx dt$ ile tanımlıdır.

Teorem 5.29. $f \in \mathcal{L}_{p,\nu}$, $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda

(a)

$$\lim_{(z,s) \rightarrow (x,t)} f(z, s) = \ell ; \quad -\infty \leq \ell \leq \infty, \quad (x, t) \in \mathbb{R}_{k,+}^n \times \mathbb{R}$$

limiti varsa o zaman

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (P_\nu^\alpha f)(x, t) = \ell \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (\mathcal{P}_\nu^\alpha f)(x, t) = \ell$$

eşitlikleri sağlanır. Dahası f fonksiyonu herhangi bir $(x, t) \in \mathbb{R}_{k,+}^n \times \mathbb{R}$ noktasında sürekli ise bu durumda

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (P_\nu^\alpha f)(x, t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (\mathcal{P}_\nu^\alpha f)(x, t) = f(x, t)$$

dir.

(b) $f \in \mathcal{L}_{p,\nu} \cap C_0$ ise yakınsama düzgündür. Yani,

$$P_\nu^\alpha f \rightrightarrows f, \quad \mathcal{P}_\nu^\alpha f \rightrightarrows f, \quad \alpha > 0$$

dir.

Tanım 5.30. $f \in L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{k,+}^n)$, $(1 \leq p \leq \infty)$, $(L_{\infty,\nu} \equiv C_0)$, $w_\nu(x, t)$ Genelleşmiş Gauss-Weierstrass çekirdeği ve $(G_\nu f)(x, t)$ yarıgrup olmak üzere parabolik tipli bileşik dalgacık dönüşümü

$$W_{\nu,\mu} f(x, t, \eta) = \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n \times [0, \infty)} T^{\sqrt{\eta}y, \eta\tau} f(x, t) dm(y, \tau) \quad (5.68)$$

ve ağırlıklı parabolik tipli bileşik dalgacık dönüşümü

$$\widetilde{W}_{\nu,\mu}f(x, t, \eta) = \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n \times [0, \infty)} T^{\sqrt{\eta}y, \eta\tau} f(x, t) e^{-\eta\tau} dm(y, \tau) \quad (5.69)$$

ile tanımlanır.

Teorem 5.31. $f \in \mathcal{L}_{p,\nu}$, $(1 < p \leq \infty)$ ve $V_{\nu,\mu}$ ise sırasıyla (5.68) ve (5.69) eşitlikleri ile tanımlanan parabolik tipli ve ağırlıklı parabolik tipli bileşik dalgacık dönüşümlerinden biri olsun. Ayrıca μ , sonlu Borel ölçümü $[0, \infty)$ aralığında tanımlansın ve

$$\int_0^\infty d\mu(t) = 0, \quad \int_0^\infty |\log \tau| d|\mu|(\tau) < \infty$$

koşulları sağlansın. Bu durumda

$$C_\mu = \int_0^\infty \log\left(\frac{1}{\tau}\right) d\mu(\tau) \neq 0$$

olmak üzere

$$\int_0^\infty V_{\nu,\mu}f(x, t, \eta) \frac{d\eta}{\eta} \equiv \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \rho \rightarrow \infty}} \int_\epsilon^\rho V_{\nu,\mu}f(x, t, \eta) \frac{d\eta}{\eta} = C_\mu f(x, t) \quad (5.70)$$

dir. Burada limit $\mathcal{L}_{p,\nu}$ -normu $(1 < p < \infty)$ anlamındadır.

6. KAYNAKLAR

- Aliev, I.A. and Bayrakci, S.1998. *On inversion of B-elliptic potential associated with the Laplace-Bessel differential operator*, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, (4):365-384.
- Aliev, I.A. and Bayrakci, S. 2002. *On inversion of Bessel potentials associated with the Laplace-Bessel differential operator*, *Acta Math.Hungar*, 95(1-2):125-145.
- Aliev, I.A. and Rubin, B. 2001. *Parabolic potentials and wavelet transforms with the generalized translation*, *Stud. Math.* , 145(1):1–16.
- Aliev, I.A., Rubin, B., Sezer, S. and Uyhan, S.B. 2008. *Composite Wavelet transforms: Applications and Perspectives; Radon Transforms, Geometry and Wavelets; Contemporary Mathematic*, AMS, Providence, RI, 464, 1-25.
- Bayrakci, S. and Sezer, S. 2011. *On approximation properties of bi-parametric parabolic type potentials*, *Publ. Math. Debrecen*, 78 (1) :127-139.
- Bagby, R. 1971. *Lebesgue spaces of parabolic potentials*, *Illinois J. Math.*,15: 610-634.
- Chanillo, S. 1981. *Hypersingular integrals and parabolic potentials*, *Trans. Amer. Math. Soc.* , 267 : 531-547.
- Delsarte, J. 1938. *Sur une extension de la formule de Taylor*. *J. Math. Pure Appl*, 17: 213-231.
- Folland, G.B. 1984. *Real Analysis Modern Techniques and Their Applications*. John Wiley and Sons, New York, pp.350.
- Gadjiev, A. D. and Aliev, I. A. 1988. *Riesz and Bessel potentials generated by a generalized translation and their inverses*. In *Proc. IV All-Union Winter Conf., Theory of functions and approximation*, Saratov (Russia) 47 – 53 pp.
- Gopala Rao, V.R. 1977. *RA characterization of parabolic function spaces*, *Amer. J. Math.* , 99: 985-993.
- Guliev, V.S. 2000. *Some Properties of the anisotropic Riesz-Bessel potential*. *Anal. Math.*, 26: 99-118

- Guliev, V.S. and Hasanov J. J. 2006. *Sobolev-Morrey type inequality for Riesz potentials, associated with the Laplace-Bessel differential operator. Fract. Calc. Appl. Anal.*, 9(1):17-32.
- Grafakos, L. 2009. *Modern Fourier Analysis*, Second Edition, Springer, New York, pp.153.
- Jones, B.F. 1968. *Lipschitz spaces and heat equation, J. Math. Mech.* , 18: 379-410.
- Keles, S. and Bayrakci, S. 2014. *On Approximation Properties of Generalized Parabolic Potentials, Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan.* , 40(1): 14-27.
- Klyuchantsev, M.I. 1970. *On singular integrals generated by the generalized shift operator, Sibirsk.Mat.Zh.*, (11):810-821.
- Kipriyanov, I. A. 1967. *Fourier–Bessel transforms and imbedding theorems for weight classes. Trudy Matematicheskogo Instituta imeni VA Steklova*, 89 : 130 – 213.
- Levitan, B.M. 1951. *Bessel function expansions in series and Fourier integrals, Uspekhi Mat.Nauk.*, (6):102-143.
- Lofstrom, J. and Peetre, J. 1969. *Approximation Theorems connected with generalized translation, Math.Ann.*, (181):255-268.
- Lyakhov, L.N. 1983. *On classes of spherical functions and singular psedo differential operators, Dokl.Akad.Nauk*, (272):781-784.
- Nogin, V.A. and Rubin, B.S. 1986. *Inversion of parabolic potentials with L_p -densities, Mat. Zametki*, 39: 831-840 (in Russian). (272):781-784.
- Sampson, C.H. 1968. *A characterization of parabolic Lebesgue spaces, Dissertation, Rice Univ.*
- Samko, S.G., Kilbas A.A. and Marichev, O.I. 1993. *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, Gordon and Breach, New York.

- Stein, E.M. and Weiss, G. 1971. Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, pp.297.
- Stein, E.M. 1993. Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, pp.695.
- Stein, E.M. 2005. Real Analysis: Measure Theory, Integration, Hilbert spaces, Princeton Lectures in Analysis III, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, pp.402.
- Stempak, K. 1986. *La théorie de Littlewood-Paley pour la transformation de Fourier-Bessel*. CR Acad. Sci. Paris Sér. I Math, 303(1):15-18.
- Trimeche, K. 1997. *Inversion of the Lions transmutation operators using generalized wavelets*. Appl. Comput. Harmon. Anal., (4):97-112.
- Uyhan, S.B., Gadjiev, A.D. and Aliev, I.A. 2006. *On approximation properties of the parabolic potentials*, Bull. Austral. Math. Soc. 74: 449-460.

ÖZGEÇMİŞ

Duyguhan SARI

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans 2022 - 2025	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Antalya
Lisans 2017 - 2021	Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya