

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



**GENELLEŞMİŞ PARABOLİK TİPLİ POTANSİYELLER VE ONLARLA
İLİŞKİLİ YENİ ANİZOTROPİK DALGACIK DÖNÜŞÜMLER**

Çağla SEKİN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

ARALIK 2023

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



**GENELLEŞMİŞ PARABOLİK TİPLİ POTANSİYELLER VE ONLARLA
İLİŞKİLİ YENİ ANİZOTROPİK DALGACIK DÖNÜŞÜMLER**

Çağla SEKİN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

ARALIK 2023

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞMİŞ PARABOLİK TIPLI POTANSİYELLER VE ONLARLA
İLİŞKİLİ YENİ ANİZOTROPİK DALGACIK DÖNÜŞÜMLER

Çağla SEKİN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

Bu tez 28/12/2023 tarihinde jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. İlham ALİYEV (Danışman)

Prof. Dr. Simten BAYRAKÇI DOĞAN

Prof. Dr. Mehmet GÜRDAL

Prof. Dr. Sinem SEZER

Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK

ÖZET

GENELLEŞMİŞ PARABOLİK TIPLİ POTANSİYELLER VE ONLARLA İLİŞKİLİ YENİ ANİZOTROPİK DALGACIK DÖNÜŞÜMLER

Çağla SEKİN

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. İlham ALİYEV

Aralık 2023, 72 sayfa

Harmonik Analizin önemli teknik araçlarından olan, klasik parabolik Bessel ve parabolik Riesz potansiyelleri, Δ Laplace operatörü ve I birim operatör olmak üzere, $(I - \Delta + \partial/\partial t)$ ve $(-\Delta + \partial/\partial t)$ diferansiyel operatörlerinin negatif kesirsel kuvvetleri olarak tanımlanırlar.

Bu tezde, klasik parabolik Bessel ve parabolik Riesz potansiyellerinin genelleşmeleri olan $\mathcal{H}_\beta^\alpha f = (I + (-\Delta)^{\beta/2} + \partial/\partial t)^{-\alpha/\beta} f$ ve $H_\beta^\alpha f = ((-\Delta)^{\beta/2} + \partial/\partial t)^{-\alpha/\beta} f$ operatörleri tanımlanarak, onların Lebesgue uzaylarında davranışları incelenmiş ve $\beta = 2$ özel durumunda klasik potansiyeller için iyi bilinen sonuçlar elde edilmiştir.

Laplace operatörü yerine, Laplace-Bessel diferansiyel operatörü alınarak oluşturulan singüler parabolik-tipli potansiyeller için de benzer sonuçlar bulunmuştur. Ayrıca, klasik Gauss ve Poisson çekirdeklerinin ikisini de genelleştiren bir çekirdek fonksiyonu ve bir özel "dalgacık ölçümü" yardımıyla yeni anizotropik dalgacık (wavelet) dönüşümleri tanımlanarak, bu dönüşümler için Calderon tipli ters çevirme formülleri bulunmuştur. Bunların yanı sıra, anizotropik dalgacık dönüşümleri ile, parabolik tipli $\mathcal{H}_\beta^\alpha f$ ve $H_\beta^\alpha f$ potansiyellerini ilişkilendiren bir boyutlu integral gösterimler elde edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Anizotropik dalgacık-tipli dönüşümler, Calderon-tipli ters çevirme formülleri, genelleşmiş parabolik Riesz potansiyeli, genelleşmiş parabolik Bessel potansiyeli, Hardy-Littlewood-Sobolev teoremi, singüler parabolik-tipli potansiyeller.

JÜRİ: Prof. Dr. İlham ALİYEV

Prof. Dr. Simten BAYRAKÇI DOĞAN

Prof. Dr. Mehmet GÜRDAL

Prof. Dr. Sinem SEZER

Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK



ABSTRACT

GENERALIZED PARABOLIC-TYPE POTENTIALS AND ASSOCIATED NEW ANISOTROPIC WAVELET TRANSFORMS

Çağla SEKİN

PhD Thesis in MATHEMATICS

Supervisor: Prof. Dr. İlham ALİYEYEV

December 2023, 72 pages

Classical parabolic Bessel and parabolic Riesz potentials, which are important technical tools of Harmonic Analysis, are defined as negative fractional powers of differential operators $(I - \Delta + \partial/\partial t)$ and $(-\Delta + \partial/\partial t)$, where Δ is the Laplacian and I is the unit operator. In this thesis, the operators $\mathcal{H}_\beta^\alpha f = (I + (-\Delta)^{\beta/2} + \partial/\partial t)^{-\alpha/\beta} f$ and $H_\beta^\alpha f = ((-\Delta)^{\beta/2} + \partial/\partial t)^{-\alpha/\beta} f$ are defined and their behavior are examined in Lebesgue spaces. These operators being the generalizations of the classical parabolic Bessel and parabolic Riesz potentials, turn into them in special case $\beta = 2$.

Similar results have been found for singular parabolic-type potentials created by using the Laplace-Bessel differential operator instead of the Laplace operator. Moreover, new anisotropic wavelet transforms are defined with the help of a special "wavelet measure" and a kernel function that generalizes both the classical Gauss and Poisson kernels, and then the Calderon type inversion formulas have been obtained for these transforms. In addition, one-dimensional integral representations relating parabolic type potentials $\mathcal{H}_\beta^\alpha f$ and $H_\beta^\alpha f$ with the anisotropic wavelet transforms, are established.

KEYWORDS: Anisotropic wavelet-type transforms, Calderon reproducing formula, generalized parabolic Riesz potentials, generalized parabolic Bessel potentials, Hardy-Littlewood-Sobolev theorem, singular parabolic-type potentials.

COMMITTEE: Prof.Dr. İlham ALİYEYEV

Prof. Dr. Simten BAYRAKÇI DOĞAN

Prof. Dr. Mehmet GÜRDAL

Prof. Dr. Sinem SEZER

Assoc.Prof.Dr. Hakan ŞİMŞEK

ÖNSÖZ

Harmonik Analiz, çağdaş matematiğin önemli bir dalı olup, hem matematiğin kendi içinde ve hem de Fizik ve Mühendislikte geniş uygulama alanına sahiptir. Harmonik Analizin önemli teknik araçlarından biri, çeşitli diferansiyel operatörlerin negatif kesirsel kuvvetleri olarak yorumlanan Riesz, Bessel, parabolik Riesz, parabolik Bessel vb. potansiyellerdir. Yine, Harmonik Analizin başka bir kullanışlı teknik aracı, özellikle son 40 yılda çok önemli uygulama alanları bulmuş olan çeşitli dalgacık (wavelet) tipli dönüşümlerdir.

Bu tez çalışmasının esas konusu, parabolik Riesz ve parabolik Bessel potansiyellerinin ileri genelleşmelerini tanımlayarak, onların Lebesgue uzaylarındaki davranışlarını incelemek ve yine bu potansiyel operatörlerle ilintili olan özel anizotropik dalgacık tipli dönüşümler tanımlayarak, onlar için Calderon tipli ters çevirme formülleri bulmaktır.

Bu tez çalışması üç ana bölümden oluşmaktadır. Bu bölümlerin içeriklerini kabaca özetleyecek olursak,

Kaynak Taraması bölümünde, konunun bütünlüğü ve anlaşılabilirliği için bazı önemli kavramlar ve notasyonlar verilmiş; daha sonra da genel hatlarıyla çalışmanın izleneceği yol belirtilerek bir girizgah yapılmıştır.

Materyal ve Metot bölümünde, Bulgular ve Tartışma bölümünde elde edilecek olan sonuçların ispatlarında kullanılacak, çalışma alanımızda da sıkça kullanılan, bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Son olarak, Bulgular ve Tartışma bölümü ise üç alt başlıktan oluşmaktadır. Bu alt başlıklardan ilkinde, klasik parabolik Riesz ve klasik parabolik Bessel potansiyellerinin genelleşmeleri tanımlanarak, ortaya çıkan integral operatörlerin Lebesgue uzaylarında davranışları incelenmiştir. Ayrıca, genelleşmiş parabolik Riesz potansiyelleri için Hardy-Littlewood-Sobolev tipli teoremin bir benzeri kanıtlanmıştır. İkinci alt bölümde, işaret değişen bir Borel ölçümü ve özel bir çekirdek fonksiyonu yardımıyla yeni anizotropik dalgacık tipli dönüşümler tanımlanmış ve bu dalgacık tipli dönüşümler yardımıyla, ilk alt bölümde tanımlanmış olan genelleşmiş parabolik tipli potansiyel operatörlerinin tek katlı integral gösterimleri elde edilmiştir. Daha sonra da, anizotropik dalgacık tipli dönüşümler için Calderon-tipli ters çevirme formülleri elde edilmiştir. Son alt bölümde ise, Fourier-Bessel Harmonik Analizinin önemli diferansiyel operatörü olan Laplace-Bessel operatörü yardımıyla oluşturulan genelleşmiş singüler parabolik Riesz ve genelleşmiş singüler para-

bolik Bessel potansiyelleri tanımlanarak, onların $L_{p,\nu}$ uzaylarından $L_{q,\nu}$ uzaylarına sınırlı etkisi incelenmiştir.

Tez çalışmamızın içeriği pedagojik olarak belli bir düzen ve sıralamada olup, daha sonra bu konuda çalışmak isteyen kişiler için düzenli ve anlaşılır bir kaynak oluşturacağı düşüncesindeyiz.

Tüm doktora eğitimim süresince benden ilgisini ve desteğini esirgemeyen, tüm bilgi birikimini paylaşan ve bana her koşulda tecrübeleriyle yol gösteren danışmanım Sayın Prof. Dr. İlham Aliyev'e minnetimi ve sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, her daim desteklerini hissettiğim çok kıymetli bütün hocalarıma; maddi-manevi beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan, her koşulda yanımda olduklarını bildiğim annem, ablam ve arkadaşlarıma da teşekkürlerimi bir borç bilir, şükranlarımı sunarım.

Son olarak, beni bir yerlerden gururla ve gülümseyerek izlediğine tüm kalbimle inandığım ve özlemle andığım canım babama sonsuz minnettarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	iii
ÖNSÖZ	iv
AKADEMİK BEYAN	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK TARAMASI	5
3. MATERYAL VE METOT	11
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	17
4.1. Parabolik Riesz ve Parabolik Bessel Potansiyellerinin Bir Genelleşmesi ve Lebesgue Uzaylarında Davranışları	17
4.2. Parabolik-Tipli Dalgacık Dönüşümler ve Onlar için Calderon-Tipli Ters Çevirme Formülleri	29
4.2.1. Parabolik-Tipli Dalgacık Dönüşümlerin Genelleşmiş Parabolik Po- tansiyellerle İlişkisi	45
4.3. Laplace-Bessel Diferansiyel Operatörü ile İlişkili Olan Parabolik Potansi- yellerin Genelleşmeleri ve Onların Ağırlıklı Lebesgue Uzaylarında Dav- ranışları	51
5. SONUÇLAR	66
6. KAYNAKLAR	68
ÖZGEÇMİŞ	

AKADEMİK BEYAN

Doktora Tezi olarak sunduğum “Genelleşmiş Parabolik Tipli Potansiyeller ve Onlarla İlişkili Yeni Anizotropik Dalgacık Dönüşümler” adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

28/12/2023

Çağla SEKİN

İmza



SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\mathbb{R}_+^n$	: $\mathbb{R}_+^n = \{x : x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_n > 0\}$
$\mathbb{R}^{n+1}$	: $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^1\}$
$L_p \equiv L_p(\mathbb{R}^{n+1})$	: $L_p = \left\{ f : \ f\ _p = \left(\int_{\mathbb{R}^{n+1}} f(x, t) ^p dx dt \right)^{1/p} < \infty \right\}$
$L_{p,\nu} \equiv L_p(\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^1)$	: $L_{p,\nu} = \left\{ f : \ f\ _{p,\nu} = \left(\int_{\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^1} f(x, t) ^p x_n^{2\nu} dx dt \right)^{1/p} < \infty \right\}$
$C^0(\mathbb{R}^{n+1})$	: Sürekli ve $ x \rightarrow \infty$ için 0'a yakınsayan fonksiyonlar uzayı
$S(\mathbb{R}^{n+1})$	: $\mathbb{R}^{n+1}$ 'de verilmiş test fonksiyonlarının Schwarz uzayı
$F[g] \equiv g^\wedge$	: g fonksiyonunun Fourier dönüşümü
$F^{-1}[g] \equiv g^\vee$	: g fonksiyonunun ters Fourier dönüşümü
$f * g$	: f ile g fonksiyonlarının girişi
$f \otimes g$	: f ile g fonksiyonlarının genelleşmiş girişi
Δ	: Laplace diferansiyel operatörü
Δ_ν	: Laplace-Bessel diferansiyel operatörü
Mf	: Hardy-Littlewood maksimal operatörü
$F_\nu[g]$	: g fonksiyonunun Fourier-Bessel dönüşümü
$F_\nu^{-1}[g]$	: g fonksiyonunun ters Fourier-Bessel dönüşümü
$T^{y,\tau}$	: Genelleşmiş kayma operatörü
$\Gamma(t)$	: Gamma Fonksiyonu
$H^\alpha f$	: Klasik parabolik Riesz potansiyelleri
$\mathcal{H}^\alpha f$	: Klasik parabolik Bessel potansiyelleri
$H_\beta^\alpha f$	: Genelleşmiş parabolik Riesz potansiyelleri
$\mathcal{H}_\beta^\alpha f$	: Genelleşmiş parabolik Bessel potansiyelleri
$W_\mu^{(\beta)} f$	: Parabolik-tipli dalgacık dönüşümü
$\widetilde{W}_\mu^{(\beta)} f$	: Ağırlıklı parabolik-tipli dalgacık dönüşümü
$H_{\beta,\nu}^\alpha$	: Genelleşmiş singüler parabolik Riesz potansiyelleri
$\mathcal{H}_{\beta,\nu}^\alpha$	: Genelleşmiş singüler parabolik Bessel potansiyelleri

Kısaltmalar

h.h.h. : Hemen hemen her

1. GİRİŞ

Harmonik Analizin ve Matematiksel Fiziğin en önemli diferansiyel operatörlerinden biri olan Laplace operatörü, yani,

$$\Delta = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

diferansiyel operatörü yardımıyla oluşturulan $(-\Delta + \frac{\partial}{\partial t})$ ve $(I - \Delta + \frac{\partial}{\partial t})$ operatörlerinin negatif "kesirsel kuvvetleri", matematik literatüründe parabolik Riesz ve parabolik Bessel potansiyelleri diye adlandırılmaktadırlar. Bu potansiyel operatörleri H^α ve $\mathcal{H}^\alpha$, ($\alpha > 0$) ile gösterirsek, Fourier Dönüşümü terimlerinde klasik H^α ve $\mathcal{H}^\alpha$ operatörleri şöyle tanımlanır: f fonksiyonu, $\mathbb{R}^{n+1}$ 'de verilmiş Schwarz test fonksiyonu olmak üzere,

$$F[H^\alpha f](\xi, \tau) = (|\xi|^2 + i\tau)^{-\alpha/2} F[f](\xi, \tau); \quad (1.1)$$

ve

$$F[\mathcal{H}^\alpha f](\xi, \tau) = (1 + |\xi|^2 + i\tau)^{-\alpha/2} F[f](\xi, \tau); \quad (\xi \in \mathbb{R}^n, \tau \in \mathbb{R}^1). \quad (1.2)$$

Bu operatörler, ilk olarak, Sampson (1968) ve Jones (1968) tarafından tanımlanmıştır. Söz konusu potansiyel operatörlerinin Lebesgue uzaylarındaki çeşitli özellikleri ve onlarla ilgili olan anizotropik Sobolev-tipli uzaylar, Bagby (1971); Gopala Rao (1978); Chanillo (1981); Nogin ve Rubin (1985, 1986, 1987); Samko vd. (1993); Aliev ve Rubin (2002) vb. bir çok matematikçi tarafından incelenmiştir.

Bu tez çalışmasının esas araştırma konularından birincisi yukarıda bahsi geçen klasik H^α ve $\mathcal{H}^\alpha$ parabolik potansiyellerinin genelleşmelerini tanımlayarak, Lebesgue uzaylarında incelemektir.

Daha açık ifade edersek, öncelikle, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ verilmiş parametreler ve $f \in L_p(\mathbb{R}^{n+1})$ olmak üzere,

$$H_\beta^\alpha f(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \tau_+^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \omega^{(\beta)}(\xi, \tau) f(x - \xi, t - \tau) d\xi d\tau \quad (1.3)$$

ve

$$\mathcal{H}_\beta^\alpha f(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{-\tau} \tau_+^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \omega^{(\beta)}(\xi, \tau) f(x - \xi, t - \tau) d\xi d\tau \quad (1.4)$$

integral operatörleri tanımlanmış ve bunların $L_p(\mathbb{R}^{n+1})$ uzaylarında davranışları araştırılmıştır. Burada, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^1$ ve

$$\tau_+ = \begin{cases} \tau, & \tau > 0 \text{ ise} \\ 0, & \tau \leq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olup, $\omega^{(\beta)}(\xi, \tau)$ fonksiyonu, $e^{-\tau|\xi|^\beta}$, $(\xi \in \mathbb{R}^n, \tau > 0)$ fonksiyonunun ters Fourier dönüşümü olarak,

$$\omega^{(\beta)}(\xi, \tau) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iy \cdot \xi} e^{-\tau|y|^\beta} dy, \quad \left(y \cdot \xi = \sum_{k=1}^n y_k \xi_k \right)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Görüldüğü gibi, $\beta = 1$ ve $\beta = 2$ için, sırasıyla, klasik Poisson ve Gauss çekirdekleri elde edilir. Dolayısıyla, $\omega^{(\beta)}(\xi, \tau)$, $(\xi \in \mathbb{R}^n, \tau > 0)$ çekirdek fonksiyonu, Poisson ve Gauss çekirdeklerinin ikisini de genelleştiren bir çekirdek fonksiyonudur.

Yukarıdaki (1.3) ve (1.4) formülleriyle tanımlanan H_β^α ve $\mathcal{H}_\beta^\alpha$ operatörlerinin Fourier çarpanları (multipliers) $(|\xi|^\beta + i\tau)^{-\alpha/\beta}$ ve $(1 + |\xi|^\beta + i\tau)^{-\alpha/\beta}$ olduğundan, bu operatörler, $((-\Delta)^{\beta/2} + \frac{\partial}{\partial t})$ ve $(I + (-\Delta)^{\beta/2} + \frac{\partial}{\partial t})$ operatörlerinin $(-\alpha/\beta)$ kuvvetleri olarak yorumlanabilirler. Ayrıca, (1.1) ve (1.2) formülleri dikkate alınırsa, (1.3) ve (1.4) formüllerinde $\beta = 2$ konulduğunda, klasik parabolik Riesz ve klasik parabolik Bessel potansiyelleri elde edilir.

Bu tez çalışmasının bir diğer esas araştırma konusu, yukarıdaki H_β^α ve $\mathcal{H}_\beta^\alpha$ operatörlerini daha iyi anlamak için uygun anizotropik dalgacık tipli dönüşümler tanımlamaktır. Bu dalgacık tipli dönüşümler, yukarıdaki $\omega^{(\beta)}(\xi, \tau)$ çekirdeği ve $\mu[0, \infty) = 0$ özelliğine sahip, işaret değişen sonlu bir Borel ölçümü kullanılarak oluşturulmaktadır. Bahsi geçen dalgacık dönüşümler iki tipli olup, biri (1.3)'teki gibi tanımlanan parabolik Riesz-tipli potansiyel operatörleriyle ve diğeri de (1.4)'teki gibi tanımlanan parabolik Bessel-tipli potansiyel operatörleriyle ilişkilidir. Şunu da belirtelim ki, bizim tanımladığımız ve bir $\beta > 0$ parametresine bağlı anizotropik dalgacık dönüşümler, daha önce Aliev ve Rubin (2002) makalesinde tanımlanmış olan dalgacık dönüşümlerin genelleşmesi olup, $\beta = 2$ için Aliev ve Rubin (2002) makalesinde tanımlanmış dalgacık dönüşümler elde edilmektedir. Çeşitli sürekli (integral) ve ayrık (discrete) dalgacık dönüşümler ve onların uygulamaları ile ilgili, örneğin, Frazier vd. (1991); Meyer (1992); Chui (1992); Daubechies

(1992); Holschneider (1995); Rubin (1996, 1998, 2000); Sezer ve Aliev (2005); Aliev ve Rubin (2001, 2002, 2005); Aliev vd. (2008); Aliev (2009); Weisz (2013) kaynaklarına bakılabilir.

Tezin esas sonuçlarından biri de, yukarıda bahsi geçen ve bir $\beta > 0$ parametresine bağlı anizotropik dalgacık tipli dönüşümler için Calderon tipli ters çevirme formüllerinin (Calderon's Reproducing formula) bir benzerini kanıtlamaktır.

Tez çalışmamızın bir başka sonucu da, Fourier-Bessel Harmonik Analizinde kullanılan singüler parabolik Riesz ve singüler parabolik Bessel potansiyellerini genelleştirerek, onların davranışlarını ağırlıklı $L_{p,\nu}(\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^1)$ uzaylarında incelemekle ilgilidir. Daha açık ifade edilirse, tezin son bölümünde,

$$\Delta_\nu = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k^2} + \frac{2\nu}{x_n} \frac{\partial}{\partial x_n}, (\nu > 0; x \in \mathbb{R}_+^n)$$

singüler Laplace-Bessel diferansiyel operatörü ve $\alpha > 0, \beta > 0$ olmak üzere, formal ifadeleri

$$H_{\beta,\nu}^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial t} + (-\Delta_\nu)^{\beta/2} \right)^{-\alpha/\beta} \text{ ve } \mathcal{H}_{\beta,\nu}^\alpha = \left(I + \frac{\partial}{\partial t} + (-\Delta_\nu)^{\beta/2} \right)^{-\alpha/\beta}$$

şeklinde olan operatörler aileleri tanımlanarak, onların hangi koşullar altında $(L_{p,\nu} \rightarrow L_{q,\nu})$ -sınırlı oldukları araştırılmıştır. Hatırlatalım ki, $\beta = 2$ özel durumu daha önce Aliev ve Rubin (2001) tarafından incelenmiştir.

Bu tez çalışması, Giriş ve Kaynaklar bölümleri hariç, üç ana bölümden ve onların bazı alt bölümlerinden oluşmuştur.

Kaynak Taraması bölümünde (tüm Tez çalışmalarında olduğu gibi), kaynak taraması yapılarak, bu alandaki çalışmalardan kısaca bahis edilmiştir.

Materyal ve Metot bölümünde, tezde kullanılan bazı genel kavramlar, gösterimler ve önemli teoremler verilmiştir.

Bulgular ve Tartışma bölümünün ilk alt bölümünde, klasik Gauss ve Poisson çekirdeklerinin ikisini de genelleyen bir çekirdek fonksiyonu yardımıyla, klasik Parabolik Riesz ve Parabolik Bessel potansiyel operatörlerinin genelleşmeleri tanımlanmış ve onların $L_p(\mathbb{R}^{n+1})$ uzaylarında davranışları incelenmiştir. Bu alt bölümdeki önemli sonuçlardan biri, genelleşmiş parabolik Riesz potansiyelleri için Hardy-Littlewood-Sobolev tipli teoremdir.

Bulgular ve Tartışma bölümünün ikinci alt bölümünde, $\mu[0, \infty) = 0$ özelliğine sahip, işareti değişen bir Borel ölçümü ve bir özel çekirdek fonksiyonu yardımıyla yeni anizotropik dalgacık tipli dönüşümler tanımlanmış ve bu dalgacık tipli dönüşümler yardımıyla, H_β^α ve $\mathcal{H}_\beta^\alpha$ operatörlerinin tek katlı integral gösterimleri elde edilmiştir. Daha sonra da, anizotropik dalgacık tipli dönüşümler için Calderon-tipli ters çevirme formülleri elde edilmiştir.

Bulgular ve Tartışma bölümünün son alt bölümünde ise, Fourier-Bessel Harmonik Analizinin önemli diferansiyel operatörü olan Laplace-Bessel diferansiyel operatörü yardımıyla oluşturulan genelleşmiş singüler parabolik Riesz ve genelleşmiş singüler parabolik Bessel potansiyelleri tanımlanarak, onların $L_{p,\nu}$ uzaylarından $L_{q,\nu}$ uzaylarına güçlü- (p, q) ve zayıf- (p, q) etkisi incelenmiştir.

Bu tez çalışmasında, çok değişkenli fonksiyonlar teorisinin, Lebesgue uzaylarının, ölçüm teorisinin, Fonksiyonel Analizin, Fourier Analizinin, Fourier-Bessel Analizinin çeşitli teknikleri (örneğin, çeşitli maksimal operatörler, konvolusyon (convolution) tipli operatörler, Fourier dönüşümü, Fourier-Bessel dönüşümü, Gauss-Weierstrass ve Abel-Poisson yarıgruplarının genelleşmeleri, vb.) kullanılmıştır.

Çalışma teorik nitelikte olup, elde edilen sonuçların, Fonksiyonel uzaylar, Harmonik Analiz, integral dönüşümler, dalgacık dönüşümler, potansiyel tipli operatörler alanlarında çalışan araştırmacıların ilgisini çekecek nitelikte olduğunu düşünüyoruz.

2. KAYNAK TARAMASI

Bu bölümde, tez çalışmamızla ilintili olan ve çeşitli kaynaklarda bulunan çalışmalar-
dan bahsedeceğiz. Bunun için öncelikle, aşağıda vereceğimiz formüllerde kullanmamız
gereken bazı temel kavram ve gösterimleri (notasyonları) hatırlatalım:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n &= \{x : x = (x_1, x_2, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{R}^1, \forall i = 1, 2, \dots, n\}; \\ \mathbb{R}^{n+1} &= \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^1\};\end{aligned}$$

$x \in \mathbb{R}^n$ için

$$|x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2} \text{ ve } dx = dx_1 \dots dx_n;$$

$x, y \in \mathbb{R}^n$ için x ve y 'nin iç çarpımı:

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n;$$

Lebesgue L_p -uzayı:

$$L_p(\mathbb{R}^{n+1}) = \left\{ f : \|f\|_p \stackrel{\text{tanım}}{=} \left(\int_{\mathbb{R}^{n+1}} |f(x, t)|^p dx dt \right)^{1/p} < \infty \right\}, (1 \leq p < \infty);$$

$p = \infty$ için,

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup } |f(x, t)|, (x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^1)$$

olarak tanımlanır.

Bu tez çalışmasının Bulgular ve Tartışma bölümünün "Parabolik-tipli dalgacık dö-
nüştürmeler ve onlar için Calderon-tipli ters çevirme formülleri" alt bölümünde $p = \infty$
durumunda L_∞ uzayı yerine, $C^0 \equiv C^0(\mathbb{R}^{n+1})$ uzayı kullanılacaktır:

$$C^0 \equiv C^0(\mathbb{R}^{n+1}) = \left\{ f : f, \mathbb{R}^{n+1} \text{'de sürekli olup, } \lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0 \right\}.$$

$S = S(\mathbb{R}^{n+1})$ ile, $\mathbb{R}^{n+1}$ 'de verilmiş test fonksiyonlarının Schwarz uzayını gösterece-
ğiz.

$F[g]$ ve $F^{-1}[g]$ ile, $g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun, sırasıyla, Fourier ve ters Fourier
dönüşümleri gösterilecektir:

$$F[g](y) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{-ix \cdot y} dx$$

ve

$$F^{-1}[g](y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{ix \cdot y} dx = \frac{1}{(2\pi)^n} F[g](-y).$$

Benzer şekilde, $f \in L_1(\mathbb{R}^{n+1})$ için,

$$F[f](y, \tau) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} f(x, t) e^{-i(x \cdot y + t\tau)} dx dt, (y \in \mathbb{R}^n, \tau \in \mathbb{R}^1)$$

ve

$$F^{-1}[f](y, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} F[f](-y, -\tau).$$

Klasik Harmonik Analizin en temel diferansiyel operatörlerinden biri olan Laplace operatörü,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

şeklinde olup, bir $f(x)$, ($x \in \mathbb{R}^n$) fonksiyonuna etkisi

$$(\Delta f)(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k^2}$$

olarak tanımlanır.

I birim operatör ve $\frac{\partial}{\partial t}$ ifadesi de t değişkenine göre (kısmi) türev olmak üzere,

$$(-\Delta + \partial/\partial t) \text{ ve } (I - \Delta + \partial/\partial t) \quad (2.1)$$

diferansiyel operatörlerinin *kesirsel kuvvetleri* Harmonik Analizde ve onun çeşitli uygulamalarında önemli rol oynamaktadır. Kesirsel kuvvetleri tanımlamanın çeşitli yolları vardır (bakınız: Samko vd. 1993). Bu yollardan en yaygın olanı, Fourier dönüşümü yardımıyla verilen tanımdır. Söz konusu tanımlamanın temelinde yatan gerçeklik, Fourier dönüşümü ile türev arasında olan ilişkidir. (2.1)'deki diferansiyel operatörlerin "negatif kesirsel kuvvetleri" sırasıyla, parabolik Riesz ve parabolik Bessel potansiyelleri diye adlandırılır.

$\alpha > 0$ olmak üzere, Schwarz uzayından olan bir $f \in S(\mathbb{R}^{n+1})$ fonksiyonunun α mertebeden parabolik Riesz potansiyeli $H^\alpha f$ ile ve parabolik Bessel potansiyeli de $\mathcal{H}^\alpha f$ ile gösterilirse, Fourier çarpanları (Fourier multipliers) terimlerinde $H^\alpha f$ ve $\mathcal{H}^\alpha f$ operatörleri şöyle tanımlanır:

$$F[H^\alpha f](\xi, \tau) = (|\xi|^2 + i\tau)^{-\alpha/2} F[f](\xi, \tau) \quad (2.2)$$

ve

$$F[\mathcal{H}^\alpha f](\xi, \tau) = (1 + |\xi|^2 + i\tau)^{-\alpha/2} F[f](\xi, \tau). \quad (2.3)$$

Ters Fourier dönüşümü F^{-1} kullanılırsa, (2.2) ve (2.3) formülleri şöyle de yazılabilir:

$$H^\alpha f(x, t) = F^{-1}[(|\xi|^2 + i\tau)^{-\alpha/2} F[f](\xi, \tau)](x, t)$$

ve

$$\mathcal{H}^\alpha f(x, t) = F^{-1}[(1 + |\xi|^2 + i\tau)^{-\alpha/2} F[f](\xi, \tau)](x, t).$$

$H^\alpha f$ ve $\mathcal{H}^\alpha f$ operatörleri, L_p uzaylarında tanımlanmış integral operatörler olup, "açık" ifadeleri aşağıdaki şekildedir (Sampson 1968; Bagby 1971; Gopala Rao 1977, 1978; Channillo 1981; Nogin ve Rubin 1985, 1986, 1987; Samko vd. 1993; Aliev ve Rubin 2002):

$$H^\alpha f(x, t) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_{\mathbb{R}^n \times (0, \infty)} \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} \omega(y, \tau) f(x - y, t - \tau) dy d\tau \quad (2.4)$$

ve

$$\mathcal{H}^\alpha f(x, t) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_{\mathbb{R}^n \times (0, \infty)} \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-\tau} \omega(y, \tau) f(x - y, t - \tau) dy d\tau. \quad (2.5)$$

Burada, $\omega(y, \tau)$ fonksiyonu, $e^{-\tau|\xi|^2}$ fonksiyonunun $\xi \in \mathbb{R}^n$ değişkenine göre ters Fourier dönüşümüdür, yani,

$$F[\omega(\cdot, \tau)](\xi) = e^{-\tau|\xi|^2}, (\tau > 0, \xi \in \mathbb{R}^n).$$

Buradaki $\omega(y, \tau)$ fonksiyonunun (çekirdeğinin) açık ifadesi bilinmektedir:

$$\omega(y, \tau) = (4\pi\tau)^{-n/2} e^{-\frac{|y|^2}{4\tau}}, (y \in \mathbb{R}^n, \tau > 0). \quad (2.6)$$

Burada,

$$\tau_+^{\frac{\alpha}{2}-1} = \begin{cases} \tau^{\frac{\alpha}{2}-1}, & \tau > 0 \text{ ise} \\ 0, & \tau \leq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

tanımlaması yapılırsa, (2.4) ve (2.5) formülleri girişim şeklinde yazılabilir:

$$h_\alpha(y, \tau) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \tau_+^{\frac{\alpha}{2}-1} \omega(y, \tau) \text{ ve } \tilde{h}_\alpha(y, \tau) = e^{-\tau} h_\alpha(y, \tau)$$

olmak üzere,

$$H^\alpha f(x, t) = (h_\alpha * f)(x, t)$$

ve

$$\mathcal{H}^\alpha f(x, t) = (\tilde{h}_\alpha * f)(x, t).$$

H^α ve $\mathcal{H}^\alpha$ operatörleri, ilk olarak Sampson (1968) ve Jones (1968) tarafından tanımlanarak incelenmiş, daha sonra söz konusu operatörlerin Lebesgue uzaylarındaki çeşitli

özellikleri ve onlarla ilgili olan anizotropik sobolev tipli uzaylar (veya onların genişlemesi olan parabolik potansiyellerden oluşan uzaylar) Bagby (1971); Gopala Rao (1977, 1978); Chanillo (1981); Nogin ve Rubin (1986, 1987); Aliev ve Rubin (2002) kaynaklarında incelenmiştir. Yine, Samko vd. (1993); Samko (2002) kitaplarında ve Aliev vd. (2008) makalesinde bu potansiyellerle ilgili çalışmalar vardır.

Laplace-Bessel diferansiyel operatörü diye adlandırılan

$$\Delta_\nu = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{2\nu}{x_n} \frac{\partial}{\partial x_n}, (x \in \mathbb{R}^n, x_n > 0, \nu > 0) \quad (2.7)$$

singüler diferansiyel operatörünün doğurduğu *singüler parabolik Riesz* ve *singüler parabolik Bessel potansiyelleri* de Arena (1975); Aliev (1992); Aliev ve Rubin (2001); Sezer ve Aliev (2005); Aliev vd. (2008) makalelerinde ve Sezer (2005) çalışmasında çeşitli yönleriyle incelenmiştir.

Klasik Riesz, Bessel, parabolik Riesz ve parabolik Bessel potansiyellerini incelemek ve onların terslerini bulmak için dalgacık (wavelet) tipli dönüşümler önemli teknik araçlardan biridir. Son 40 yılda dalgacık tipli dönüşümler harmonik analizde ve onun uygulamalarında yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu konuda Chui (1992); Daubechies (1992); Holschneider (1995); Meyer (1992); Rubin (1996, 1998, 2000); Weisz (2013) önemli kaynaklar olarak bilinir. Özellikle, Rubin'in (1996) kitabı, Riesz potansiyelleri ve başka kesirsel integrallerin dalgacık tipli dönüşümler yardımıyla incelenmesi konusunda önemli bir kaynaktır. Aliev ve Rubin (2002) makalesinde, özel dalgacık tipli dönüşümler yardımıyla, (2.4) ve (2.5) şeklinde tanımlanmış parabolik Riesz ve parabolik Bessel potansiyelleri için ters çevirme formülleri bulunmuştur. Yine, Aliev ve Rubin (2001) makalesinde, Laplace-Bessel diferansiyel operatörünün doğurduğu parabolik potansiyeller için ters çevirme formülleri elde edilmiş ve bunun için özel dalgacık tipli dönüşümler tanımlanarak kullanılmıştır. Ayrıca, Aliev ve Rubin (2005) makalesinde, "uygun yarıgrupların" ve bir "dalgaçık ölçümünün" doğurduğu dalgacık tipli dönüşümler tanımlanmış ve bu dönüşümler Riesz, Bessel potansiyellerinin ve Radon dönüşümünün terslerini bulmak için uygulanmıştır.

Biz, bu tez çalışmasında, $\beta > 0$ bir parametre olmak üzere,

$$\omega^{(\beta)}(\xi, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\tau|y|^\beta} e^{i\xi y} dy, (\tau > 0, \xi \in \mathbb{R}^n) \quad (2.8)$$

çekirdek fonksiyonunu kullanarak, üç parametreye bağlı,

$$A_{\beta,\theta}^\alpha f(x,t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \int_{\mathbb{R}^n \times (0,\infty)} \tau^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-\theta\tau} \omega^{(\beta)}(y,\tau) f(x-y, t-\tau) dy d\tau \quad (2.9)$$

integral operatörler ailesini tanımlıyoruz. Hatırlatalım ki, $\beta = 1$ ve $\beta = 2$ alındığında, $\omega^{(\beta)}(\xi, \tau)$ çekirdek fonksiyonu, sırasıyla, klasik Poisson ve Gauss çekirdeğine dönüşür. Yukarıdaki (2.9) formülünde, $\beta = 2$ ve $\theta = 0$ ise, (2.4)'teki parabolik Riesz potansiyeli; $\beta = 2$ ve $\theta = 1$ ise, (2.5)'teki parabolik Bessel potansiyeli elde edilir (Ayrıca, $\beta = 1$ ve $\theta = 1$ özel durumu da ilginç olup, klasik Flett potansiyellerinin *parabolik versiyonu* olarak yorumlanabilir).

Tez çalışmamızın, Bulgular ve Tartışma kısmında verdiğimiz önemli sonuçlardan biri, $A_{\beta,\theta}^\alpha$ operatörlerinin $L_p(\mathbb{R}^{n+1})$ uzaylarındaki davranışlarını incelemekle ilgilidir. Hatırlatalım ki, $\theta > 0$ ve $\theta = 0$ durumları çok farklı olup, $\theta = 0$ durumunda elde edilen sonuç, klasik parabolik Riesz potansiyelleri için iyi bilinen Hardy-Littlewood-Sobolev tipli teoremin bir genelleşmesi olarak yorumlanabilir.

Tez çalışmamızın, bir diğer önemli sonucu da, sırasıyla, "parabolik-tipli dalgacık dönüşüm" ve "ağırlıklı parabolik-tipli dalgacık dönüşüm" diye adlandırdığımız aşağıdaki iki integral operatörün L_p uzaylarında davranışını vererek, bunlar için Calderon tipli ters çevirme formülleri bulmakla ilgilidir:

$$W_\mu^{(\beta)} f(x, t, \eta) = \int_{\mathbb{R}^n \times (0,\infty)} f(x - \eta^{1/\beta} y, t - \eta\tau) \omega^{(\beta)}(y, \tau) d\mu(\tau) dy \quad (2.10)$$

ve

$$\tilde{W}_\mu^{(\beta)} f(x, t, \eta) = \int_{\mathbb{R}^n \times (0,\infty)} e^{-\eta\tau} f(x - \eta^{1/\beta} y, t - \eta\tau) \omega^{(\beta)}(y, \tau) d\mu(\tau) dy. \quad (2.11)$$

Burada, $f \in L_p(\mathbb{R}^{n+1})$ olup, $\omega^{(\beta)}(y, \tau)$ çekirdeği (2.8)'deki gibi tanımlanmıştır ve $\mathbb{R}^1$ 'de verilmiş işaretini değişebilen μ ölçümü sonlu Borel ölçümü olup, dayanağı $[0, \infty)$ aralığındadır ve $\mu([0, \infty)) = 0$ 'dır.

Not 2.1. (2.10) ve (2.11) formülleriyle tanımladığımız parabolik-tipli dalgacık dönüşümlerinin, (2.9) formülüyle tanımlanan parabolik-tipli integral operatörler için ters çevirme formülleri bulmada önemli rol oynayabileceği kanısındayız. Çünkü, $\beta = 2$ özel durumunda Aliev ve Rubin (2002) makalesinde bahsi geçen uygulama yapılmıştır ve genel durumda da yapılabileceğini düşünüyoruz. Bu düşüncemizi kuvvetlendiren nedenlerden en

başlıcası, (2.10)-(2.11) dönüşümleri için aşağıda Teorem 4.26'da bulduğumuz Calderon-tipli ters çevirme formülleridir.

Nihayet, Bulgular ve Tartışma kısmında verdiğimiz bir başka önemli sonuç da, Fourier-Bessel Harmonik Analizi ile ilgili olup, Δ_ν , (2.7)'de verilmiş Laplace-Bessel diferansiyel operatörü olmak üzere, formal şekilde

$$H_{\beta,\nu}^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial t} + (-\Delta_\nu)^{\beta/2} \right)^{-\alpha/\beta} \text{ ve } \mathcal{H}_{\beta,\nu}^\alpha = \left(I + \frac{\partial}{\partial t} + (-\Delta_\nu)^{\beta/2} \right)^{-\alpha/\beta}$$

gibi tanımlanan ve aslında,

$$L_{p,\nu} = \left\{ f : \|f\|_{p,\nu} \equiv \left(\int_{\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^1} |f(x,t)|^p x_n^{2\nu} dx dt \right)^{1/p} < \infty \right\}, (1 \leq p < \infty)$$

uzaylarında birer integral operatörler olarak yorumlanan $H_{\beta,\nu}^\alpha$ ve $\mathcal{H}_{\beta,\nu}^\alpha$ operatörlerinin $L_{p,\nu}$ uzaylarında davranışlarını incelemekle ilgilidir. Bu alt bölümde kanıtladığımız teoremlerden biri, Laplace-Bessel diferansiyel operatörünün doğurduğu singüler parabolik Riesz potansiyellerinin bir genelleşmesi için Hardy-Littlewood-Sobolev tipli teoremdir.

3. MATERYAL VE METOT

Bu tez çalışmasında, Fonksiyonel Analizin, Fourier Analizinin, çok değişkenli fonksiyonlar teorisinin, Lebesgue uzaylarının, ölçüm teorisinin çeşitli kavram ve teknikleri (örneğin, çeşitli klasik eşitsizlikler, maksimal operatörler, girişim (konvolusyon; İngilizce: convolution) tipli operatörler, Fourier dönüşümü, Gauss-Weierstrass ve Abel-Poisson yarıgruplarının genelleşmeleri, dalgacık tipli dönüşümler, vb.) kullanılacaktır.

Çalışmamızın bu kısmında, Bulgular ve Tartışma bölümünde vereceğimiz esas teoremlerimizi ve bu teoremlerden elde etmiş olduğumuz sonuçları kanıtlarken kullanacağımız ve matematik literatüründe iyi bilinen bazı önemli tanımlar, önermeler ve teoremlerden bahsedilecektir.

Tezin, Giriş ve Kaynak Taraması bölümlerinde kısaca bahsedildiği üzere, tez çalışmamızda, hem klasik Fourier Harmonik Analizindeki parabolik (Riesz ve Bessel) potansiyellerinin genelleşmelerini tanımlayarak, Lebesgue uzaylarında davranışlarını inceliyoruz ve hem de Fourier-Bessel Harmonik Analizinin (kimi kaynaklarda: "Genelleşmiş kaymanın doğurduğu Harmonik Analiz") singüler parabolik (Riesz ve Bessel) potansiyellerinin genelleşmelerini tanımlayarak, ağırlıklı Lebesgue uzaylarında davranışlarını inceliyoruz. Her iki Harmonik Analizin de kendine özgü notasyonları olduğunu dikkate alarak, notasyon kargaşası çıkmaması için klasik Fourier Harmonik Analizi ile ilgili (ve bizim bu Tezde kullanacağımız) temel kavram ve bilgileri bu bölümde vereceğiz. Fourier-Bessel Harmonik Analizindeki singüler parabolik (Riesz ve Bessel) potansiyellerinin bir genelleşmesi ile ilgili elde etmiş olduğumuz tüm sonuçları, Bulgular ve Tartışma bölümünün son alt bölümünde vereceğimiz için, gerekli tüm kavram ve bilgileri de orada (yerinde) vermeyi uygun buluyoruz.

Öncelikle, Fourier Harmonik Analizin temel kavramları olan Fourier dönüşümü ve iki fonksiyonunun girişimi (convolusyonu) kavramlarını tanıtarak, bazı temel özelliklerini hatırlatalım.

$f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü,

$$f^\wedge(x) = F[f](x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot t} f(t) dt$$

ve ters Fourier dönüşümü,

$$f^\vee(x) = F^{-1}[f](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} (Ff)(-x)$$

şeklinde tanımlanır.

Fourier dönüşümünün bazı önemli özellikleri aşağıdaki gibidir:

$f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda,

1. $f^\wedge(x)$ fonksiyonu tüm $\mathbb{R}^n$ 'de düzgün süreklidir.
2. $f^\wedge(x)$ fonksiyonu sınırlıdır ve $\|f^\wedge\|_\infty \leq \|f\|_1$.
3. $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f^\wedge(x) = 0$.
4. $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_1(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere, $\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^\wedge(x)$. Buradan,

$$\Delta = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

Laplace diferansiyel operatörü olmak üzere, $f \in S(\mathbb{R}^n)$ için,

$$(-\Delta f)^\wedge(x) = (x_1^2 + \cdots + x_n^2) f^\wedge(x)$$

yani,

$$(-\Delta f)^\wedge(x) = |x|^2 f^\wedge(x)$$

ve dolayısıyla, her $k \in \mathbb{N}$ için

$$((-\Delta)^k f)^\wedge(x) = |x|^{2k} f^\wedge(x)$$

olur.

$$5. x_j f \in L_1(\mathbb{R}^n) \text{ ise, } (\partial_j f)^\wedge(\lambda) = ((-ix_j)f)^\wedge(\lambda).$$

6. İki fonksiyonun girişiminin Fourier dönüşümü, fonksiyonların Fourier dönüşümlerinin çarpımına eşittir, yani,

$$(f * g)^\wedge = f^\wedge \cdot g^\wedge.$$

Burada, $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının girişimi,

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy$$

şeklinde tanımlanır.

Girişim için aşağıdaki Young eşitsizliği geçerlidir: $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} - 1$ ve $f \in L_p, g \in L_r$ ise, $f * g \in L_q$ olup,

$$\|f * g\|_q \leq \|f\|_p \|g\|_r$$

sağlanır. Özel halde, $p = 1$ olursa, $r = q$ olur ve $1 \leq q \leq \infty$ için

$$\|f * g\|_q \leq \|f\|_1 \|g\|_q$$

sağlanır.

Şimdi, ileride vereceğimiz ana sonuçlarımızın ispatlarında kullanacağımız ve Harmonik Analiz alanında çalışanların iyi bildiği ve sıklıkla kullandığı bazı önemli kavram ve teoremleri verelim.

Tanım 3.2 (Klasik Hardy-Littlewood maksimal operatörü (Stein 1970, syf. 4)). $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, ($1 \leq p \leq \infty$) olmak üzere,

$$(Mf)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f(y)| dy, x \in \mathbb{R}^n$$

şeklinde tanımlanan operatöre, Hardy-Littlewood maksimal operatörü denir. Burada, $B_r(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ merkezli, r yarıçaplı yuvar olup, $|B_r(x)|$ onun ölçümüdür ("hacmidir").

Teorem 3.3 (Fubini Teoremi (Folland 1984, syf. 65)). (X, M, μ) ve (Y, N, ν) , σ -sonlu ölçüm uzayları, $\mu \times \nu$ ölçümü de $M \times N$ üzerinde μ ve ν 'nün çarpımı olsun. Eğer,

$f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mu \times \nu$ ölçümüne göre mutlak integrallenebilir ise, h.h.h. $y \in Y$ için $\int_X f(x, y) d\mu(x)$ integrali ve h.h.h. $x \in X$ için $\int_Y f(x, y) d\nu(y)$ integrali sonludur ve

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca, tekrarlı integrallerden birinde f yerine $|f|$ yazıldığında integral yakınsak ise, diğeri de yakınsak olup, birbirine eşitlerdir.

Not 3.4. Fubini (kimi kaynaklarda Fubini-Tonelli) teoreminin uygulamalarda en çok tercih edilen versiyonlarından birisi aşağıdaki gibidir:

A ve B σ -sonlu ölçümler olsun. Bu taktirde,

$$\int_A \left(\int_B |f(x, y)| dy \right) dx < \infty \text{ veya } \int_B \left(\int_A |f(x, y)| dx \right) dy < \infty$$

ise

$$\int_{A \times B} |f(x, y)| dx dy < \infty$$

olur ve

$$\int_A \left(\int_B |f(x, y)| dy \right) dx = \int_B \left(\int_A |f(x, y)| dx \right) dy = \int_{A \times B} f(x, y) dx dy$$

sağlanır:

Teorem 3.5 (Chebyshev Eşitsizliği). $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $f \in L_p$ olsun. O halde, her $\alpha > 0$ için,

$$m\{x \mid |f(x)| > \alpha\} \leq \left(\frac{\|f\|_p}{\alpha} \right)^p$$

sağlanır. Burada, $m\{E\}$ ile, $E \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin Lebesgue ölçümü gösterilmektedir.

Teorem 3.6 (Marcinkiewicz İnterpolasyon Teoremi (Sadosky 1979, syf. 14)). (X, M, μ) , (Y, N, ν) ölçüm uzayları ve $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$, $t \in (0, 1)$ olmak üzere,

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} \text{ ve } \frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}$$

olsun. Ayrıca, $T : X \rightarrow Y$ yarı-lineer operatörü, zayıf- (p_0, q_0) tipli:

$$m\{x : |Tf(x)| > \alpha\} \leq \left(\frac{c_1 \|f\|_{p_0}}{\alpha} \right)^{q_0}, q_0 \neq \infty$$

ve zayıf- (p_1, q_1) tipli:

$$m\{x : |Tf(x)| > \alpha\} \leq \left(\frac{c_2 \|f\|_{p_1}}{\alpha} \right)^{q_1}, q_1 \neq \infty$$

olsun. Bu durumda, T operatörü güçlü (p, q) -tiplidir. Yani, bir $c > 0$ sabiti ve her $f \in L_p$ için,

$$\|Tf\|_q \leq c \|f\|_p$$

sağlanır.

Teorem 3.7 (Lebesgue Baskın Yakınsama Teoremi (Folland 1984, syf. 53)). $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ölçüm uzayı olsun. $\{f_n\}$ dizisi de X 'de Lebesgue ölçülebilir fonksiyonlar dizisi ve h.h.h. $x \in X$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ olsun. Ayrıca, bir $g \geq 0$ fonksiyonu ve her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$a) |f_n(x)| \leq g(x);$$

ve

$$b) \int_X g(x)dx < \infty$$

sağlansın. Bu durumda, f fonksiyonu X 'te Lebesgue integrallenebilir ve integral altında limite geçilebilir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x)dx = \int_X f(x)dx.$$

Teorem 3.8 (Young Eşitsizliği (Stein ve Weiss 1971, Folland 1984)). $f \in L_1, g \in L_p$, $(1 \leq p \leq \infty)$ olsun. Bu durumda, $f * g \in L_p$ 'dir ve

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 3.9 (Hölder Eşitsizliği (Sadosky 1979, syf. 13; Rubin 1996, syf. 1)). $f \in L_p$, $g \in L_q$, $(1 \leq p, q \leq \infty)$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

olur. Özel halde, $p = \infty$ olduğunda, $q = 1$ olacağından,

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|$$

olmak üzere,

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_\infty \|g\|_1$$

sağlanır.

Teorem 3.10 (İntegraller için Minkowski Eşitsizliği (Sadosky 1979, syf. 14)). (X, M, μ) ve (Y, N, ν) , σ -sonlu ölçüm uzayları ve $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu da $\mu \times \nu$ ölçülebilir olsun. Eğer, h.h.h. y için $f(\cdot, y) \in L_p(X, M, \mu)$, $(1 \leq p \leq \infty)$ ve $\int_Y \|f(\cdot, y)\|_p d\nu(y) < \infty$ ise, $\int_Y f(x, y)d\nu(y)$ integrali de h.h.h. x için sonludur ve

$$\left\| \int_Y f(x, y)d\nu(y) \right\|_p \leq \int_Y \|f(\cdot, y)\|_p d\nu(y)$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 3.11 (Stein ve Weiss 1971, syf. 60). $\{T_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ ailesi, $L_p(\mathbb{R}^n)$, $(1 \leq p < \infty)$ uzayından, $\mathbb{R}^n$ 'de ölçülebilir fonksiyonlar uzayına etki eden lineer operatörler ailesi olsun.

$$(T^*\varphi)(x) = \sup_{\varepsilon>0} |(T_\varepsilon\varphi)(x)|, x \in \mathbb{R}^n,$$

"maksimal operatörünü" tanımlayalım. Eğer, T^* operatörü bir $q \geq 1$ için zayıf (p, q) -tipli, yani,

$$m\{y : |(T^*\varphi)(y)| > \lambda\} \leq \left(\frac{c\|\varphi\|_p}{\lambda}\right)^q, \forall \lambda > 0$$

ise ve $L_p(\mathbb{R}^n)$ 'nin bir yoğun alt kümesi $\mathcal{D}$ 'den alınmış her g fonksiyonu için $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (T_\varepsilon g)(x)$ limiti h.h.h. $x \in \mathbb{R}^n$ için var ve sonlu ise, o halde her $\varphi \in L_p(\mathbb{R}^n)$ için hemen hemen her x noktasında $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (T_\varepsilon\varphi)(x)$ limiti var ve sonludur.

Teorem 3.12 (Stein 1970, syf. 62). $\varphi \in L_p(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu, azalan, integrallenebilir ve radyal bir majoranta sahip olsun. Yani,

$$\Psi(x) = \sup_{|y| \geq |x|} |\varphi(y)|$$

tanımlanırsa, $\Psi(x)$ radyal fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ 'de integrallenebilir bir fonksiyon olup, $|x| \rightarrow \infty$ için azalan olsun. O halde,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Psi(x) dx = A$$

denirse, her $g \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $(1 \leq p < \infty)$ için

$$\sup_{\varepsilon>0} |(g * \varphi_\varepsilon)(x)| \leq A(Mg)(x),$$

sağlanır. Burada, $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$, $(\varepsilon > 0, x \in \mathbb{R}^n)$ ve M , Hardy-Littlewood maksimal operatörüdür.

Teorem 3.13 (Rubin 1996, syf. 3). $K(x) \in L_1(\mathbb{R}^n)$ olsun. $0 < \rho < \infty$ olmak üzere,

$$K_\rho(x) = \rho^{-n}K(x/\rho)$$

tanımlayalım. Eğer $g \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $(1 < p < \infty)$ ise,

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \|g * K_\rho\|_p = 0$$

olur. Eğer, $g \in C^0(\mathbb{R}^n)$ ise,

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |(g * K_\rho)(x)| = 0$$

olur.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Parabolik Riesz ve Parabolik Bessel Potansiyellerinin Bir Genelleşmesi ve Lebesgue Uzaylarında Davranışları

Bir f fonksiyonunun, $\alpha > 0$ mertebeden parabolik Riesz ve parabolik Bessel potansiyelleri diye adlandırılarak $H^\alpha f$ ve $\mathcal{H}^\alpha f$ ile gösterilen klasik integral operatörleri, Fourier dönüşümü dilinde sırasıyla,

$$F[H^\alpha f](\xi, \tau) = (|\xi|^2 + i\tau)^{-\alpha/2} F[f](\xi, \tau)$$

ve

$$F[\mathcal{H}^\alpha f](\xi, \tau) = (1 + |\xi|^2 + i\tau)^{-\alpha/2} F[f](\xi, \tau), (\xi \in \mathbb{R}^n, \tau \in \mathbb{R}^1)$$

şeklinde tanımlanırlar. Ayrıca, bu potansiyeller, I birim operatör ve $\Delta = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ Laplace diferansiyel operatörü olmak üzere, sırasıyla $(-\Delta + \frac{\partial}{\partial t})$ ve $(I - \Delta + \frac{\partial}{\partial t})$ diferansiyel operatörlerin negatif kesirsel kuvvetleri olarak yorumlanırlar.

Bu operatörlerin, birer integral operatör olduğu iyi bilinmektedir ve açık ifadeleri:

$$H^\alpha f(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_{\mathbb{R}^n \times (0, \infty)} \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} \omega(y, \tau) f(x - y, t - \tau) dy d\tau, \quad (4.12)$$

ve

$$\mathcal{H}^\alpha f(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_{\mathbb{R}^n \times (0, \infty)} \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-\tau} \omega(y, \tau) f(x - y, t - \tau) dy d\tau. \quad (4.13)$$

şeklinde. Burada, $\omega(y, \tau) = (4\pi\tau)^{-n/2} \exp(-|y|^2/4\tau)$, ($y \in \mathbb{R}^n, \tau > 0$) çekirdek fonksiyonu, ünlü Gauss çekirdeğidir. $H^\alpha f$ ve $\mathcal{H}^\alpha f$ potansiyelleri ilk olarak Sampson (1968) ve Jones (1968) tarafından tanımlanmıştır. Bu potansiyellerin L_p -uzaylarında ve anizotropik Sobolev tipli uzaylardaki çeşitli özellikleri Bagby (1971); Gopala Rao (1977); Chanillo (1981); Nogin ve Rubin (1985, 1986, 1987); Samko (2000, 2002); Aliev ve Rubin (2002); Uyhan vd. (2006) ve bir çok başka matematikçi tarafından incelenmiştir. Ayrıca, singüler Laplace-Bessel diferansiyel operatörü ile ilintili olan singüler parabolik potansiyeller Aliev (1992), Aliev ve Rubin (2002) tarafından tanımlanmış ve incelenmiştir.

Bu bölümde, klasik $H^\alpha f$ ve $\mathcal{H}^\alpha f$ potansiyellerinin ikisininin de genelleşmesi olan,

$$A_{\beta,\theta}^\alpha f(x,t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \int_{\mathbb{R}^n \times (0,\infty)} \tau^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-\theta\tau} \omega^{(\beta)}(y,\tau) f(x-y, t-\tau) dy d\tau,$$

şeklindeki integral operatörler ailesini tanımlayacak ve bu operatörlerin, Lebesgue uzaylarındaki davranışını inceleyeceğiz. Burada, $\omega^{(\beta)}(y,\tau)$, ($y \in \mathbb{R}^n, \tau > 0, \beta > 0$) çekirdeği, $\beta = 2$ olduğunda Gauss çekirdeğini; $\beta = 1$ olduğunda Poisson çekirdeğini verdiği için, bu çekirdek fonksiyonlarının bir genelleşmesidir. Bundan başka, $A_{\beta,\theta}^\alpha$ integral operatörler ailesi, $\theta = 1, \beta = 2$ olduğunda, $\mathcal{H}^\alpha f$ parabolik Bessel ve $\theta = 0, \beta = 2$ olduğunda da $H^\alpha f$ parabolik Riesz potansiyelini verir.

Tezin bu bölümünde elde edilmiş sonuçları ifade edebilmek için bazı gerekli gösterim ve kavramları hatırlatalım.

$L_p \equiv L_p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1)$, ($1 \leq p \leq \infty$) ölçülebilir fonksiyonların uzayı ve üzerinde tanımlı norm,

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1} |f(x,t)|^p dx dt \right)^{1/p}, \quad (1 \leq p < \infty) \quad (4.14)$$

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup } |f(x,t)|, \quad (x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^1)$$

olsun.

$\mathbb{R}^n$ 'de integrallenebilir bir g fonksiyonunun Fourier ve ters Fourier dönüşümleri, sırasıyla,

$$(Fg)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi x} g(x) dx \text{ ve } (F^{-1}g)(\xi) = (2\pi)^{-n} (Fg)(-\xi),$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $\xi x = \xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n$ ve $dx = dx_1 \dots dx_n$ 'dir.

$\beta > 0$ olmak üzere, $\omega^{(\beta)}(y,t)$ çekirdek fonksiyonu, $\exp(-t|\xi|^\beta)$, ($t > 0, \xi \in \mathbb{R}^n$) fonksiyonunun ters Fourier dönüşümü olarak tanımlanır. Yani,

$$\omega^{(\beta)}(y,t) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iy\xi} e^{-t|\xi|^\beta} d\xi, \quad (y \in \mathbb{R}^n). \quad (4.15)$$

Şimdi, $\omega^{(\beta)}(y,t)$ çekirdek fonksiyonunun ileride kullanacağımız bazı özelliklerini bir önerme şeklinde ifade edelim.

Önerme 4.14 (Aliev vd. 2008; Aliev 2009). $0 < \beta < \infty, 0 < t < \infty$ ve $y \in \mathbb{R}^n$ olsun. O halde,

(a) $\omega^{(\beta)}(y, t)$ fonksiyonu y değişkenine bağlı radyal bir fonksiyondur ve aşağıdaki "anizotropik homojenlik" özelliğini sağlar:

$$\omega^{(\beta)}(\lambda^{1/\beta}y, \lambda t) = \lambda^{-n/\beta} \omega^{(\beta)}(y, t), \forall \lambda > 0;$$

(b) $\omega^{(\beta)}(y, t)$ fonksiyonu, $0 < \beta \leq 2$ durumunda pozitifdir;

(c) $\beta > 0$ bir çift tam sayı ise, $\omega^{(\beta)}(y, t)$ çekirdek fonksiyonu $y \in \mathbb{R}^n$ değişkenine göre sonsuz diferansiyellenen ve $|y| \rightarrow \infty$ için hızla azalan bir fonksiyondur. Ayrıca, $\beta > 0$ parametresi bir çift sayı değilse, $|y| \rightarrow \infty$ durumunda, $\omega^{(\beta)}(y, t) = O(|y|^{-n-\beta})$ olur. (Bu nedenle, $\omega^{(\beta)}(y, t)$ fonksiyonunun azalan ve integrallenebilir bir radyal majorantı vardır).

(d) Her $t > 0$ ve her $\beta > 0$ için $\int_{\mathbb{R}^n} \omega^{(\beta)}(y, t) dy = 1$.

Not 4.15. $\beta = 1$ ve $\beta = 2$ durumunda, $\omega^{(\beta)}(y, t)$ çekirdek fonksiyonu sırasıyla, Poisson ve Gauss çekirdeğini verir. Yani,

$$\omega^{(1)}(y, t) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}} \frac{t}{(|y|^2 + t^2)^{(n+1)/2}}$$

ve

$$\omega^{(2)}(y, t) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-|y|^2/4t}, (y \in \mathbb{R}^n, t > 0)$$

olur.

$\omega^{(\beta)}(y, t)$ çekirdek fonksiyonunun $\beta \neq 1, 2$ durumunda açık ifadesi bilinmemektedir.

Tanım 4.16 (Aliev ve Sekin 2020). $\omega^{(\beta)}$ çekirdek fonksiyonu, (4.15) eşitliğindeki gibi tanımlansın. $\alpha > 0$, $\beta > 0$ ve $\theta \geq 0$ reel parametreler olmak üzere,

$$A_{\beta, \theta}^{\alpha} f(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \tau^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-\theta\tau} \omega^{(\beta)}(\xi, \tau) f(x - \xi, t - \tau) d\xi d\tau \quad (4.16)$$

şeklinde integral operatörler ailesi tanımlayalım. $A_{\beta, \theta}^{\alpha}$ operatörler ailesine, β -parabolik potansiyel tipli operatörler diyeceğiz.

$A_{\beta, \theta}^{\alpha}$ integral operatörler ailesi, $\theta = 0$, $\beta = 2$ durumunda (4.12) eşitliğindeki gibi tanımlanmış klasik parabolik Riesz ve $\theta = 1$, $\beta = 2$ durumunda (4.13) eşitliğindeki gibi tanımlanmış klasik parabolik Bessel potansiyellerini verir.

Eğer,

$$\tau_+^{\frac{\alpha}{\beta}-1} = \begin{cases} \tau^{\frac{\alpha}{\beta}-1}, & \tau > 0 \text{ ise} \\ 0, & \tau \leq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlarsak, (4.16) formülünü,

$$A_{\beta,\theta}^\alpha f(x,t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \tau_+^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-\theta\tau} \omega^{(\beta)}(\xi,\tau) f(x-\xi, t-\tau) d\xi d\tau = (h_\alpha * f)(x,t),$$

girişim şeklinde yazabiliriz. Burada,

$$h_\alpha(\xi,\tau) \equiv h_\alpha^{(\theta,\beta)}(\xi,\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \tau_+^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-\theta\tau} \omega^{(\beta)}(\xi,\tau), (\xi,\tau) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$$

olarak tanımlıdır.

$S \equiv S(\mathbb{R}^{n+1})$ ile Schwarz test fonksiyonları uzayını ve F ile de $\mathbb{R}^{n+1}$ 'de Fourier dönüşümünü gösterirsek, $f \in S$ fonksiyonu için,

$$F[A_{\beta,\theta}^\alpha f](\xi,\tau) = F[h_\alpha * f](\xi,\tau) = F[h_\alpha](\xi,\tau) F[f](\xi,\tau)$$

elde ederiz.

Dahası, $|\xi| \neq 0$ için

$$\begin{aligned} F[h_\alpha](\xi,\tau) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-\theta t} e^{-it\tau} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \omega^{(\beta)}(x,t) e^{-ix\xi} dx \right) dt \\ &\stackrel{(4.15)}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-\theta t} e^{-it\tau} e^{-t|\xi|^\beta} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-(\theta+|\xi|^\beta+i\tau)t} dt \\ &= (\theta + |\xi|^\beta + i\tau)^{-\frac{\alpha}{\beta}}, \end{aligned}$$

olur. Aslında, bizim formal olarak uyguladığımız Fourier dönüşümü, genelleşmiş fonksiyonlar (distributions) teorisi kapsamında yorumlanmalıdır.

Buradan, $f \in S(\mathbb{R}^{n+1})$ için,

$$A_{\beta,\theta}^\alpha f(x,t) = F^{-1} \left[(\theta + |\xi|^\beta + i\tau)^{-\frac{\alpha}{\beta}} F[f](\xi,\tau) \right] (x,t)$$

elde ederiz.

Bu nedenle, $A_{\beta,\theta}^\alpha$ operatörleri, I birim operatör, $\theta \geq 0$ ve $\Delta = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ Laplacian olmak üzere, $\left(\theta I + (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} + \frac{\partial}{\partial t} \right)$ diferansiyel operatörünün $\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)$ -mertebeden negatif kesirsel kuvveti olarak yorumlanabilir.

Şimdi, $A_{\beta,\theta}^\alpha$ integral operatörlerinin L_p -uzaylarında davranışlarının incelendiği iki teorem verelim.

Teorem 4.17 (Aliev ve Sekin 2020). $\theta > 0$, $\beta > 0$ ve $\alpha > 0$ olsun. O halde,

(a) $A_{\beta,\theta}^\alpha$ operetörü $L_p \rightarrow L_p$, ($1 \leq p \leq \infty$) sınırlıdır. Dahası, her $f \in L_p$ için,

$$\|A_{\beta,\theta}^\alpha f\|_p \leq c_\beta \theta^{-\alpha/\beta} \|f\|_p.$$

Burada, $c_\beta = \int_{\mathbb{R}^n} |\omega^{(\beta)}(\xi, 1)| d\xi < \infty$ ve $0 < \beta \leq 2$ durumunda, $c_\beta = 1$ 'dir.

(b) $1 \leq p < q \leq \infty$ ve $\alpha > (\beta + n)(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$ ise $A_{\beta,\theta}^\alpha$ operatörü $L_p \rightarrow L_q$ sınırlıdır.

Özel halde, $\alpha > (\beta + n)\frac{1}{p}$ ise bir $c > 0$ için

$$\operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{R}^{n+1}} |A_{\beta,\theta}^\alpha f(x, t)| \leq c \|f\|_p,$$

sağlanır.

İspat (a) Teorem 3.10'da ifadesi verilmiş olan Minkowski eşitsizliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned} \|A_{\beta,\theta}^\alpha f\|_p &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \tau^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-\theta\tau} |\omega^{(\beta)}(\xi, \tau)| \|f\|_p d\xi d\tau \\ &= \|f\|_p \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \int_0^\infty \tau^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-\theta\tau} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\omega^{(\beta)}(\xi, \tau)| d\xi \right) d\tau \end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $\omega^{(\beta)}(\xi, \tau)$ çekirdek fonksiyonunun Önerme 4.14-(a)'daki anizotropik homojenlik özelliğini, yani $\omega^{(\beta)}(\xi, \tau) = \tau^{-n/\beta} \omega^{(\beta)}(\tau^{-1/\beta} \xi, 1)$ eşitliğini kullanırsak ve sonra da $\xi \mapsto \tau^{1/\beta} \xi$ şeklinde değişken değiştirmesi yaparsak,

$$\begin{aligned} \|A_{\beta,\theta}^\alpha f\|_p &\leq \|f\|_p \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \int_0^\infty \tau^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-\theta\tau} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \tau^{-n/\beta} |\omega^{(\beta)}(\tau^{-1/\beta} \xi, 1)| d\xi \right) d\tau \\ &= \|f\|_p \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \left(\int_0^\infty \tau^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-\theta\tau} d\tau \right) \int_{\mathbb{R}^n} |\omega^{(\beta)}(\xi, 1)| d\xi \\ &= c_\beta \theta^{-\frac{\alpha}{\beta}} \|f\|_p \end{aligned}$$

elde ederiz. Burada, $c_\beta = \int_{\mathbb{R}^n} |\omega^{(\beta)}(\xi, 1)| d\xi < \infty$.

Ayrıca, $\beta \in (0, 2]$ durumunda $\omega^{(\beta)}(\xi, t)$ pozitif olacağından, $c_\beta = 1$ olur.

(b) Young eşitsizliğinden,

$$\|A_{\beta,\theta}^\alpha f\|_q \leq \|h_\alpha\|_r \|f\|_p, \quad \left(\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} - 1 \right)$$

elde edilir. Burada,

$$\|h_\alpha\|_r = \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty t^{(\frac{\alpha}{\beta}-1)r} e^{-\theta tr} |\omega^{(\beta)}(\xi, t)|^r d\xi dt \right)^{1/r}$$

dir.

$\omega^{(\beta)}(\xi, t)$ çekirdek fonksiyonunun anizotropik homojenlik özelliğini kullanırsak,

$$\|h_\alpha\|_r = \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} c_r \left(\int_0^\infty t^{(\frac{\alpha}{\beta}-1)r} t^{\frac{n}{\beta}(1-r)} e^{-\theta tr} dt \right)^{\frac{1}{r}},$$

elde ederiz. Burada, $c_r = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\omega^{(\beta)}(\xi, 1)|^r d\xi \right)^{1/r} < \infty$.

$\|h_\alpha\|_r$ normunun sonlu olması için gerekli ve yeterli koşul $\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right)r + \frac{n}{\beta}(1-r) > -1$ olmasıdır.

$1 - \frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ eşitliği dikkate alınırsa,

$$\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right)r + \frac{n}{\beta}(1-r) > -1 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} > \left(1 + \frac{n}{\beta}\right) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \Leftrightarrow \alpha > (\beta + n) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$$

olur. $\square$

Bir sonraki teorem, parabolik Riesz potansiyellerinin bir genelleşmesi için Hardy-Littlewood-Sobolev teoreminin bir benzerini ifade etmektedir. Söz konusu teoremi ifade etmek için öncelikle, (4.16) formülü ile tanımlanan $A_{\beta,\theta}^\alpha f$ operatörler ailesinde, $\theta = 0$ konulduğunda ortaya çıkan operatörleri, $A_{\beta,0}^\alpha$ ile değil, H_β^α ile gösterelim: $H_\beta^\alpha f \stackrel{\text{tanım}}{=} A_{\beta,0}^\alpha f$. Böyle bir gösterimin motivasyon kaynağı, (4.12) formülü ile tanımlanan klasik parabolik Riesz potansiyelleridir: $\beta > 0$ parametresine bağlı H_β^α operatörleri, $\beta = 2$ için (4.12) formülündeki H^α ile çakıştığından, H_β^α operatörü H^α 'nın genelleşmesi olur.

Teorem 4.18 (Aliev ve Sekin 2020).

$$H_\beta^\alpha f(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \tau_+^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \omega^{(\beta)}(\xi, \tau) f(x - \xi, t - \tau) d\xi d\tau$$

integral operatörlerini tanımlayalım.

$f \in L_p$, $1 \leq p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{1}{p}(\beta + n)$ olsun. Bu taktirde,

(a) $H_\beta^\alpha f(x, t)$ integrali, hemen hemen her $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ için mutlak yakınsaktır.

(b) $1 < p < q < \infty$ durumunda, H_β^α operatörünün L_p 'den L_q 'ya sınırlı olması için gerekli ve yeterli koşul $\alpha = (n + \beta) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)$ olmasıdır.

(c) $1 \leq p < \infty$ durumunda, H_β^α operatörü zayıf (p, q) -tıplıdır. Yani, öyle $c > 0$ vardır ki, her $\lambda > 0$ ve her $f \in L_p$ için,

$$m\{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : |H_\beta^\alpha f(x, t)| > \lambda\} \leq \left(\frac{c \|f\|_p}{\lambda} \right)^q$$

eşitsizliği sağlanır. Burada, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n+\beta}$ 'dir.

İspat (a) $\Gamma(\alpha/\beta) |H_\beta^\alpha f(x, t)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 \tau^{\frac{\alpha}{\beta}-1} |\omega^{(\beta)}(\xi, \tau)| |f(x - \xi, t - \tau)| d\xi d\tau$
 $+ \int_{\mathbb{R}^n} \int_1^\infty \tau^{\frac{\alpha}{\beta}-1} |\omega^{(\beta)}(\xi, \tau)| |f(x - \xi, t - \tau)| d\xi d\tau$
 $= I_1(x, t) + I_2(x, t)$

diyelim. Teorem 3.10'da ifadesi verilmiş olan Minkowski eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} \|I_1\|_p &\leq \|f\|_p \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 \tau^{\frac{\alpha}{\beta}-1} |\omega^{(\beta)}(\xi, \tau)| d\xi d\tau \\ &= \|f\|_p \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 \tau^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \tau^{-n/\beta} |\omega^{(\beta)}(\tau^{-1/\beta} \xi, 1)| d\xi d\tau \\ &= \|f\|_p \int_{\mathbb{R}^n} |\omega^{(\beta)}(y, 1)| dy \int_0^1 \tau^{\frac{\alpha}{\beta}-1} d\tau \\ &= \frac{\beta}{\alpha} c_\beta \|f\|_p < \infty \end{aligned}$$

olur. Böylece, $I_1(x, t)$ integrali h.h.h. $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ için sonludur.

Şimdi de $I_2(x, t)$ 'nin h.h.h. $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ için sonlu olduğunu gösterelim. Öncelikle $p > 1$ durumuna bakalım. Teorem 3.9'da verilmiş Hölder eşitsizliğinden, $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} I_2(x, t) &\leq \|f\|_p \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_1^\infty \tau^{(\frac{\alpha}{\beta}-1)p'} |\omega^{(\beta)}(\xi, \tau)|^{p'} d\xi d\tau \right)^{1/p'} \\ &= \|f\|_p \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_1^\infty \tau^{(\frac{\alpha}{\beta}-1)p'} \tau^{-p' \frac{n}{\beta}} |\omega^{(\beta)}(\tau^{-1/\beta} \xi, 1)|^{p'} d\xi d\tau \right)^{1/p'} \\ &= \|f\|_p \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_1^\infty \tau^{(\frac{\alpha}{\beta}-1)p' - p' \frac{n}{\beta} + \frac{n}{\beta}} |\omega^{(\beta)}(\xi, 1)|^{p'} d\xi d\tau \right)^{1/p'} \\ &= \|f\|_p c'_\beta \left(\int_1^\infty \tau^{p'(\frac{\alpha}{\beta}-1-\frac{n}{\beta}) + \frac{n}{\beta}} d\tau \right)^{1/p'}, \end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $c'_\beta = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\omega^{(\beta)}(\xi, 1)|^{p'} d\xi \right)^{1/p'} < \infty$.

$\alpha < \frac{\beta+n}{p}$ koşulu sağlandığında $p' \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 - \frac{n}{\beta} \right) + \frac{n}{\beta} < -1$ olduğunu görelim:

$$\begin{aligned} p' \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 - \frac{n}{\beta} \right) + \frac{n}{\beta} < -1 &\Leftrightarrow p'(\alpha - \beta - n) + (n + \beta) < 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha < (\beta + n) \left(1 - \frac{1}{p'} \right) = \frac{\beta + n}{p}. \end{aligned}$$

Buradan, $\alpha < \frac{\beta+n}{p}$ olduğuna göre, $p' \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 - \frac{n}{\beta} \right) + \frac{n}{\beta} < -1$ sağlanır ve dolayısıyla,

$$\int_1^\infty \tau^{p'(\frac{\alpha}{\beta}-1-\frac{n}{\beta})+\frac{n}{\beta}} d\tau$$

integrali yakınsak olur. Bu nedenle, h.h.h. $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ için $I_2(x, t)$ sonludur.

Ayrıca, $p = 1$ olması durumunda, $\alpha < \beta + n$ ve $|\xi| \rightarrow \infty$ için Önerme 4.14-(c)'ye göre $|\omega^{(\beta)}(\xi, 1)| = O(|\xi|^{-n-\beta})$ olduğundan,

$$\begin{aligned} |I_2(x, t)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_1^\infty \tau^{\frac{\alpha}{\beta}-1} |\omega^{(\beta)}(\xi, \tau)| |f(x - \xi, t - \tau)| d\xi d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_1^\infty \tau^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \tau^{-n/\beta} |\omega^{(\beta)}(\xi, 1)| |f(x - \tau^{1/\beta}\xi, t - \tau)| d\xi d\tau \\ &\leq \|f\|_1 \max_{\mathbb{R}^n \times [1, \infty)} \tau^{\frac{\alpha}{\beta}-1-\frac{n}{\beta}} |\omega^{(\beta)}(\xi, 1)| \leq c \|f\|_1 \end{aligned}$$

olur. Şimdi, Teoremin (b) kısmını kanıtlayalım. Bu kısımdaki koşulun gerekliliği Stein (1970, syf. 118) kaynağındaki metoda benzer bir metodla kanıtlanır ve kanıt, $\omega^{(\beta)}(\xi, \tau)$ çekirdek fonksiyonunun anizotropik homojenlik özelliğine dayanır. Şimdi söz konusu kanıtı verelim.

$\alpha > 0$, $1 < p < q < \infty$ ve her $f \in L_p$ için

$$\|H_\beta^\alpha f\|_q \leq c \|f\|_p \quad (4.17)$$

olsun. Madem ki, (4.17) eşitsizliği her $f \in L_p$ fonksiyonu için sağlanır. O halde her $\lambda > 0$ için $\varphi(\xi, \tau) = f(\lambda\xi, \lambda^\beta\tau)$ fonksiyonu için de sağlanmak zorundadır, çünkü $f \in L_p$ olduğu için $\varphi \in L_p$ olur. Böylece, $c > 0$ yukardaki sabit olmak üzere,

$$\|H_\beta^\alpha \varphi\|_q \leq c \|\varphi\|_p$$

eşitsizliği sağlanır. Diğer taraftan,

$$\|H_{\beta}^{\alpha}\varphi\|_q = \left(\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{\infty} \tau^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \omega^{(\beta)}(\xi, \tau) f(\lambda x - \lambda \xi, \lambda^{\beta} t - \lambda^{\beta} \tau) d\xi d\tau \right|^q dx dt \right)^{1/q}.$$

Yukarıdaki integralde, $\xi \mapsto \lambda^{-1}\xi$, $\tau \mapsto \lambda^{-\beta}\tau$, $x \mapsto \lambda^{-1}x$, $t \mapsto \lambda^{-\beta}t$ şeklinde değişken değiştirmeleri yapılırsa ve çekirdek fonksiyonunun $\omega^{(\beta)}(\lambda^{-1}\xi, \lambda^{-\beta}\tau) = \lambda^n \omega^{(\beta)}(\xi, \tau)$ özelliği kullanılırsa,

$$\|H_{\beta}^{\alpha}\varphi\|_q = \lambda^{-\alpha-\frac{1}{q}(n+\beta)} \|H_{\beta}^{\alpha}f\|_q$$

elde edilir.

Öte yandan,

$$\|\varphi\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^{n+1}} |f(\lambda \xi, \lambda^{\beta} \tau)|^p d\xi d\tau \right)^{1/p} = \lambda^{-\frac{n+\beta}{p}} \|f\|_p$$

olduğundan,

$$\|H_{\beta}^{\alpha}f\|_q \lambda^{-\alpha-\frac{1}{q}(n+\beta)} \leq c \lambda^{-\frac{1}{p}(n+\beta)} \|f\|_p$$

eşitsizliği her $f \in L_p$ ve her $\lambda > 0$ için sağlanacaktır.

(4.17) eşitsizliği burada dikkate alınır,

$$-\alpha - \frac{1}{q}(n+\beta) = -\frac{1}{p}(n+\beta)$$

eşitliği sağlanmak zorundadır. Bu eşitlik sağlanmazsa, $\lambda \rightarrow 0$ ve $\lambda \rightarrow \infty$ için limite geçilerek çelişki elde edilir.

Böylece,

$$\alpha = (n+\beta) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)$$

olmalıdır. Böylelikle koşulun gerekliliği kanıtlanmış olur.

(b)'nin yeterlilik kısmı, teoremin (c) kısmından, Marcinkiewicz interpolasyon teoremi (Teorem 3.6) kullanılarak elde edilebileceğinden, öncelikle (c)'nin ispatını yapmamız yeterli olacaktır. Biz burada, Aliev ve Rubin (2002) makalesindeki Teorem 4.1'in ispatında kullanılan tekniğin bir benzerini kullanacağız.

$$k \equiv k(y, \tau) = \tau_+^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \omega^{(\beta)}(y, \tau), (y \in \mathbb{R}^n, \tau \in \mathbb{R}^1)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu $k(y, \tau)$ fonksiyonunu kullanırsak,

$$H_{\beta}^{\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} (k * f)$$

olur. Böylece, Teoremin (c) kısmını kanıtlamak için, $f \in L_p$, ($1 \leq p < \infty$) olmak üzere, $k * f$ girişim operatörünün zayıf (p, q) -tipli olduğunu göstermeliyiz.

$$k_1 = \begin{cases} k, & \tau \leq \mu \\ 0, & \tau > \mu \end{cases} \text{ ve } k_{\infty} = \begin{cases} 0, & \tau < \mu \\ k, & \tau \geq \mu \end{cases}$$

olmak üzere, $k = k_1 + k_{\infty}$ yazılabilir (Buradaki $\mu > 0$ parametresinin seçimini sonra yapacağız).

Bir $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ kümesinin Lebesgue ölçümünü $m\{E\}$ ile gösterelim. Herhangi $\lambda > 0$ için

$$\begin{aligned} m_0 &\equiv m\{|k * f| > 2\lambda\} \equiv m\{(y, \tau) \in \mathbb{R}^{n+1} : |(k * f)(y, \tau)| > 2\lambda\} \\ &\leq m\{|k_1 * f| > \lambda\} + m\{|k_{\infty} * f| > \lambda\} \\ &\equiv m_1 + m_{\infty} \end{aligned} \quad (4.18)$$

sağlandığı barizdir. Çünkü ölçülebilir A, B, C kümeleri için $A \subset B \cup C$ ise $m(A) \leq m(B) + m(C)$ olur.

Teorem 3.5'te verilmiş Chebyshev eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} m_1 &\equiv m\{|k_1 * f| > \lambda\} = m\{|k_1 * f|^p > \lambda^p\} \\ &\leq \lambda^{-p} \|k_1 * f\|_p^p \leq \lambda^{-p} \|k_1\|_1^p \|f\|_p^p \end{aligned} \quad (4.19)$$

olur.

Dahası,

$$\|k_1\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{\mu} \tau^{\frac{\alpha}{\beta}-1} |\omega^{(\beta)}(y, \tau)| dy d\tau.$$

Burada, Önerme 4.14-(a)'ya göre, $\omega^{(\beta)}(y, \tau) = \lambda^{\frac{n}{\beta}} \omega^{(\beta)}\left(\lambda^{\frac{1}{\beta}} y, \lambda \tau\right)$ kullanır ve $\lambda = \tau^{-1}$ yazarsak,

$$\|k_1\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{\mu} \tau^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \tau^{-n/\beta} \left| \omega^{(\beta)}\left(\tau^{-\frac{1}{\beta}} y, 1\right) \right| dy d\tau$$

olur. Burada da, $y \mapsto y\tau^{\frac{1}{\beta}}$ şeklinde değişken değiştirmesi yaparsak,

$$\|k_1\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\mu \tau^{\frac{\alpha}{\beta}-1} |\omega^{(\beta)}(y, 1)| dy d\tau = \frac{\beta}{\alpha} \mu^{\frac{\alpha}{\beta}} c_\beta$$

elde edilir. Burada, $c_\beta = \int_{\mathbb{R}^n} |\omega^{(\beta)}(y, 1)| dy < \infty$.

Bu nedenle, (4.19)'a göre,

$$m_1 \leq \lambda^{-p} \mu^{\frac{\alpha}{\beta}p} \left(\frac{\beta}{\alpha} c_\beta \right)^p \|f\|_p^p \equiv a^p \lambda^{-p} \mu^{\frac{\alpha}{\beta}p}, \quad (4.20)$$

dir. Burada, $a = \frac{\beta}{\alpha} c_\beta \|f\|_p$.

Bundan başka, $p > 1$ durumunda Hölder eşitsizliğine göre,

$$\|k_\infty * f\|_\infty \leq \|k_\infty\|_{p'} \|f\|_p, \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \right) \quad (4.21)$$

sağlanır. Yukarıdaki gibi, uygun değişken değiştirmesiyle,

$$\begin{aligned} \|k_\infty\|_{p'} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_\mu^\infty \left(\tau^{\frac{\alpha}{\beta}-1} |\omega^{(\beta)}(y, \tau)| \right)^{p'} dy d\tau \right)^{1/p'} \\ &= \left[\int_\mu^\infty \tau^{(\frac{\alpha}{\beta}-1-\frac{n}{\beta})p' + \frac{n}{\beta}} d\tau \right]^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\omega^{(\beta)}(y, 1)|^{p'} dy \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\quad \cdots \left(\alpha = (n + \beta) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \text{ olduğunu kullanıyoruz} \right) \cdots \\ &= \left(\frac{q\beta}{(n + \beta)p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \|\omega^{(\beta)}(\cdot, 1)\|_{p'} \mu^{-\frac{n+\beta}{q\beta}}, \quad (p' = p/(p-1)) \end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece, bunları (4.21) eşitsizliğinde dikkate alırsak,

$$\|k_\infty * f\|_\infty \leq b \mu^{-\frac{n+\beta}{p\beta}}, \quad (4.22)$$

olur. Burada, $b = \left(\frac{q\beta}{(n+\beta)p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \|\omega^{(\beta)}(\cdot, 1)\|_{p'} \|f\|_p$.

Şimdi, μ -parametresini,

$$b \mu^{-\frac{n+\beta}{p\beta}} = \lambda \text{ sağlanacak şekilde, yani } \mu = (\lambda/b)^{-q\beta/(n+\beta)} \quad (4.23)$$

olarak seçelim.

O halde, (4.22) eşitsizliğinden,

$$\|k_\infty * f\|_\infty \leq \lambda$$

elde edilir ve dolayısıyla, (4.18)'deki m_∞ sayısının tanımına göre, $m_\infty = 0$ olur.

Bu nedenle,

$$\begin{aligned} m_0 &\leq m_1 + m_\infty \stackrel{(4.18)}{\leq} m_1 \stackrel{(4.20)}{\leq} a^p \lambda^{-p} \mu^{\frac{\alpha}{\beta} p} \\ &\stackrel{(4.23)}{=} a^p \lambda^{-p} \left(\frac{\lambda}{b} \right)^{-\frac{\alpha}{\beta} p q \beta / (n+\beta)} \\ &= a^p b^{\alpha p q / (n+\beta)} \lambda^{-p - \alpha p q / (n+\beta)} \end{aligned}$$

ve dolayısıyla,

$$m_0 \leq a^p b^{\alpha p q / (n+\beta)} \lambda^{-p - \alpha p q / (n+\beta)}$$

olur. Burada, $\alpha = (n + \beta) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)$ olduğu dikkate alınır,

$$\alpha p q / (n + \beta) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) p q = q - p$$

ve dolayısıyla,

$$\lambda^{-p - \alpha p q / (n+\beta)} = \lambda^{-p - (q-p)} = \lambda^{-q}$$

olur. Buradan da,

$$m_0 \leq a^p b^{q-p} \lambda^{-q}$$

olur. a ve b sayılarının açık ifadelerine bakılırsa, bir $c_1 = c_1(n, \beta, p, q)$ ve bir $c_2 = c_2(n, \beta, p, q)$ sabiti için $a = c_1 \|f\|_p$ ve $b = c_2 \|f\|_p$ şeklindedir. O halde, bir $c = c(n, \beta, p, q)$ sabiti ve her $\lambda > 0$ için

$$m_0 \leq \left(\frac{c \|f\|_p}{\lambda} \right)^q$$

sağlanır. Sonuç olarak, $p > 1$ için H_β^α operatörünün zayıf (p, q) tipli olduğu kanıtlanmış olur.

$p = 1$ durumu için kanıt bir kaç ufak değişikliklerle benzer şekilde yapılır. Bu durumda,

$$\alpha = (n + \beta) \left(1 - \frac{1}{q} \right) \Leftrightarrow q = (n + \beta) / (n + \beta - \alpha)$$

olur.

Böylece, Teoremin (c) kısmı kanıtlanmış olur. Nihayet, yukarıda da bahis edildiği üzere, Marcinkiewicz interpolasyon teoreminin uygulanması da teoremin (b) kısmının kanıtını verir.

Kanıt tamamlanmış olur. $\square$

Not 4.19. (4.12) formülüyle verilmiş Klasik Jones-Sampson parabolik potansiyelleri için (yani, H_β^α operatörünün $\beta = 2$ durumu için), Hardy-Littlewood-Sobolev tipli teorem Gopala-Rao (1977, 1978) tarafından ifade edilerek kanıtlanmaya çalışılmıştır. Aliev ve Rubin (2001) makalesinde ifade ettikleri gibi, klasik parabolik potansiyeller için Hardy-Littlewood-Sobolev teoreminin Gopala-Rao (1977, 1978) tarafından verilen kanıtı hatalıdır ve doğru sonuç elde etmek için $k(y, \tau)$ çekirdeği $y \in \mathbb{R}^n$ değişkenine göre değil, bizim yukarıda yaptığımız gibi $\tau \in (0, \infty)$ değişkenine göre parçalanmalıdır.

Not 4.20. Yukarıda tanımladığımız,

$$H_\beta^\alpha f(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \tau_+^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \omega^{(\beta)}(\xi, \tau) f(x - \xi, t - \tau) d\xi d\tau \quad (4.24)$$

integral operatörü, bir girişim operatörü olup, $(|\xi|^\beta + i\tau)^{-\alpha/\beta}$ Fourier çarpanına sahiptir ve bu nedenle $((-\Delta)^{\beta/2} + \frac{\partial}{\partial t})$ diferansiyel operatörünün $(-\alpha/\beta)$ -mertebeden kesirsel kuvveti olarak yorumlanabilir. Yani, formal olarak $H_\beta^\alpha = ((-\Delta)^{\beta/2} + \frac{\partial}{\partial t})^{-\alpha/\beta}$ şeklinde ifade edilebilir. Yukarıda da bahsedildiği üzere, $\beta = 2$ durumu klasik parabolik Riesz potansiyellerini verir.

4.2. Parabolik-Tipli Dalgacık Dönüşümler ve Onlar için Calderon-Tipli Ters Çevirme Formülleri

$\mathbb{R}^n$ 'de tanımlanmış bir φ fonksiyonunun sürekli (integral) dalgacık dönüşümü, $x \in \mathbb{R}^n$, $\tau > 0$ ve $\int_{\mathbb{R}^n} \omega(|z|) dz = 0$ olmak üzere,

$$W_\omega \varphi(x, \tau) = \frac{1}{\tau^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x - y) \omega\left(\frac{1}{\tau} |y|\right) dy \quad (4.25)$$

şeklinde tanımlanır. Bu dönüşüme karşılık gelen uygun ters çevirme formülü, (Calderon Reproducing Formula)

$$\int_0^\infty W_\omega \varphi(x, \tau) \frac{d\tau}{\tau} = c_\omega \varphi(x), \quad (c_\omega \neq 0)$$

biçimindedir. İlk olarak Calderon (1964) tarafından bulunmuş olan bu ters çevirme formülü ve onun çeşitli ayırık (discrete) versiyonları Harmonik Analiz ve uygulamalı matematikte önemli rol oynar ve bir çok uygulaması vardır.

Bu ters çevirme formülünden daha genel bir formül olan,

$$\int_0^\infty W_\omega \varphi(x, \tau) \frac{d\tau}{\tau^{1+\alpha}} = c(\alpha, \omega) (-\Delta)^{\alpha/2} \varphi(x) \quad (4.26)$$

formülü, $\Delta = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ Laplace diferansiyel operatörü olmak üzere, $(-\Delta)$ operatörünün "kesirsel" kuvvetleri için bir integral gösterimi vermekte olup, fonksiyonlar teorisi, harmonik analiz, integral geometri gibi alanlarda bir çok uygulama alanına sahiptir. (4.26) formülünde α parametresinin yerine $(-\alpha)$ yazıldığında ünlü Riesz potansiyelleri için tek katlı integral gösterimi elde edilmektedir. Bu gösterim Riesz potansiyelleri için açık ters belirleme formülleri bulma probleminde ipucu vermektedir. Dalgacık dönüşümlerinin Riesz potansiyellerine ve Radon dönüşümüne uygulanması konusunda özellikle Rubin'in (1996, 1998, 1999, 2000) çalışmalarını vurgulamak istedik. Yine, dalgacık dönüşümlerinin çeşitli uygulamaları Frazier vd. (1991); Daubechies (1992); Chui (1992); Meyer (1992); Holschneider (1995); Kahane (1995); Choung ve Tri (2000, 2002); Aliev ve Rubin (2001, 2002, 2005); Aliev (2009); Aliev ve Sekin (2021) kaynaklarında bulunabilir.

Aliev ve Rubin (2002), (4.25) eşitliğinde tanımlanmış olan dalgacık dönüşümünün bir benzeri olan anizotropik bir dalgacık dönüşümü tanımlayarak, bu dönüşüme parabolik dalgacık dönüşümü demişler ve (4.26)'dakine benzer formüller elde etmişlerdir. Söz konusu formüllerde, $(-\Delta)$ operatörü yerine ısı geçirme operatörleri $(-\Delta + \frac{\partial}{\partial t})$, $(I - \Delta + \frac{\partial}{\partial t})$ ve singüler ısı geçirme operatörleri $(-\Delta_\nu + \frac{\partial}{\partial t})$, $(I - \Delta_\nu + \frac{\partial}{\partial t})$ kullanılmıştır. Burada,

$$\Delta_\nu = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{2\nu}{x_n} \frac{\partial}{\partial x_n}, (\nu > 0)$$

singüler Laplace-Bessel diferansiyel operatörü ve I birim operatördür.

Parabolik dalgacık dönüşümü kullanılarak, L_p -uzaylarında $(-\Delta + \frac{\partial}{\partial t})^{-\alpha/2}$, $(I - \Delta + \frac{\partial}{\partial t})^{-\alpha/2}$, $(-\Delta_\nu + \frac{\partial}{\partial t})^{-\alpha/2}$ ve $(I - \Delta_\nu + \frac{\partial}{\partial t})^{-\alpha/2}$, $(\alpha > 0)$ parabolik potansiyel operatörleri için uygun ters çevirme formülleri Aliev ve Rubin (2001, 2002) tarafından bulunmuştur.

Tez çalışmamızın bu bölümünde, $\eta > 0, \beta > 0, (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ve $f \in L_p(\mathbb{R}^{n+1})$

olmak üzere,

$$W_{\mu}^{(\beta)} f(x, t, \eta) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{\infty} f(x - \eta^{1/\beta} y, t - \eta \tau) \omega^{(\beta)}(y, \tau) d\mu(\tau) dy \quad (4.27)$$

ve

$$\widetilde{W}_{\mu}^{(\beta)} f(x, t, \eta) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{\infty} e^{-\eta \tau} f(x - \eta^{1/\beta} y, t - \eta \tau) \omega^{(\beta)}(y, \tau) d\mu(\tau) dy, \quad (4.28)$$

şeklinde anizotropik dalgacık tipli dönüşümler tanımlayacağız. Burada,

$$\omega^{(\beta)}(y, \tau) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iy\xi} e^{-\tau|\xi|^{\beta}} d\xi, \quad (y\xi = \sum_{k=1}^n y_k \xi_k)$$

çekirdek fonksiyonu ve "dalgacık ölçümü" olarak adlandırılan μ ölçümü de, $\mu\{[0, \infty)\} = 0$ eşitliğini sağlayan sonlu Borel ölçümüdür.

(4.27) ve (4.28) eşitliklerinde verilmiş dönüşümlerin $\beta = 2$ durumu Aliev ve Rubin (2002) tarafından tanımlanmıştır. (4.27) ve (4.28) dönüşümlerinin klasik parabolik Riesz ve klasik parabolik Bessel potansiyellerinin genelleşmeleri ile bağlantılı oldukları aşağıda gösterilecektir. Bahse konu olan bu genelleşmiş parabolik tipli potansiyeller, α ve β pozitif parametreler olmak üzere,

$$H_{\beta}^{\alpha} f(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{\infty} \tau^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \omega^{(\beta)}(\xi, \tau) f(x - \xi, t - \tau) d\tau d\xi \quad (4.29)$$

ve

$$\mathcal{H}_{\beta}^{\alpha} f(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \omega^{(\beta)}(\xi, \tau) f(x - \xi, t - \tau) d\tau d\xi, \quad (4.30)$$

şeklinde tanımlamış ve tezimizin Bulgular ve Tartışma kısmının ilk alt bölümünde bu potansiyellerin Lebesgue uzaylarında davranışları incelenmiştir.

Bu alt bölümün sonunda göstereceğimiz üzere, (4.27) ve (4.28) eşitliklerinde tanımlanmış dalgacık tipli dönüşümler yardımıyla, $H_{\beta}^{\alpha} f(x, t)$ ve $\mathcal{H}_{\beta}^{\alpha} f(x, t)$ genelleşmiş parabolik potansiyellerin integral gösterimleri,

$$H_{\beta}^{\alpha} f(x, t) = \frac{1}{c(\alpha, \beta, \mu)} \int_0^{\infty} W_{\mu}^{(\beta)} f(x, t, \eta) \frac{d\eta}{\eta^{1-\alpha/\beta}} \quad (4.31)$$

ve

$$\mathcal{H}_{\beta}^{\alpha} f(x, t) = \frac{1}{c(\alpha, \beta, \mu)} \int_0^{\infty} \widetilde{W}_{\mu}^{(\beta)} f(x, t, \eta) \frac{d\eta}{\eta^{1-\alpha/\beta}}, \quad (4.32)$$

şeklinde ifade edilebilirler. Burada, $\alpha > 0$ ve μ ölçümü de

$$\int_0^\infty d\mu(\tau) = 0, \quad \int_0^\infty \tau^{-\alpha/\beta} d|\mu|(\tau) < \infty, \quad \int_0^\infty \tau^{-\alpha/\beta} d\mu(\tau) \neq 0$$

koşullarını sağlamak üzere, $c(\alpha, \beta, \mu)$ katsayısı

$$c(\alpha, \beta, \mu) = \Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \int_0^\infty \tau^{-\alpha/\beta} d\mu(\tau), \quad (\alpha > 0)$$

şeklindedir.

Bu formüllere bakılarak, α parametresi yerine formal olarak $(-\alpha)$ yazıldığında, (4.31) ve (4.32) eşitliklerinden, $H_\beta^\alpha f(x, t)$ ve $\mathcal{H}_\beta^\alpha f(x, t)$ integral operatörlerinin terslerinin elde edilebileceği öngörülür. Yine, (4.31) ve (4.32) formüllerinde formal olarak $\alpha = 0$ yazılırsa, matematik literatüründe "Calderon tipli ters çevirme formülü (Calderon's reproducing formula)" olarak adlandırılan bir formül ortaya çıkar.

Tezin bu bölümü için esas amacımız, L_p -uzaylarında (4.27) ve (4.28) dönüşümleri için Calderon tipli ters çevirme formülleri elde etmektir. Elde etmiş olduğumuz sonuçları vermeden önce, kullandığımız bazı önemli tanım ve notasyonları verelim.

$L_p \equiv L_p(\mathbb{R}^{n+1})$ uzayı ve bir f fonksiyonunun $\|f\|_p$ normu (4.14) formülündeki gibi tanımlanmış olsun. Kaynak Taraması bölümünde de bahis ettiğimiz üzere, bu alt bölümde $p = \infty$ durumunda L_∞ yerine $C^0 = C^0(\mathbb{R}^{n+1})$ kullanacağız ve $\text{ess sup } |f(x, t)|$ normu $\sup |f(x, t)|$ olacaktır.

μ ölçümü, dayanağı $[0, \infty)$ aralığında olan ve $\mu\{[0, \infty)\} = 0$ eşitliğini sağlayan sonlu Borel ölçümü olsun. Başka bir ifadeyle, $\int_0^\infty d\mu(t) = 0$ olsun. Bu μ ölçümüne *dalgacık ölçümü* diyeceğiz.

$\beta > 0$ olmak üzere, $\omega^{(\beta)}(y, \tau)$, $(y \in \mathbb{R}^n, \tau > 0)$ çekirdek fonksiyonu, $\exp(-\tau |\xi|^\beta)$, $(\xi \in \mathbb{R}^n, \tau > 0)$ fonksiyonunun ters Fourier dönüşümü olarak, (4.15) formülündeki gibi tanımlansın, yani

$$\omega^{(\beta)}(y, \tau) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iy\xi} e^{-\tau |\xi|^\beta} d\xi, \quad (y \in \mathbb{R}^n),$$

olsun. Burada, $y\xi = y_1\xi_1 + \dots + y_n\xi_n$ ve $|\xi| = \left(\sum_{k=1}^n \xi_k^2\right)^{1/2}$.

Hatırlatalım ki, Bulgular ve Tartışma bölümünün ilk alt bölümünde $\omega^{(\beta)}(y, \tau)$ çekirdek fonksiyonunun bazı özellikleri bir önerme şeklinde verilmişti. Tezin bu bölümü için de lazım olacak bu özellikleri ve bunlara ek bazı başka özellikleri içeren bir önermeyi verelim.

Önerme 4.21 (Aliev 2009). **(a)** $\omega^{(\beta)}(y, \tau)$, ($y \in \mathbb{R}^n, \tau > 0$), y değişkenine bağlı bir radyal fonksiyon olup, aşağıdaki "anizotropik homojenlik" özelliğini sağlar: her $\lambda > 0, s > 0$ ve $z \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\omega^{(\beta)}(\lambda^{1/\beta} z, \lambda s) = \lambda^{-n/\beta} \omega^{(\beta)}(z, s).$$

Özel olarak, $\lambda = \tau/s$ için,

$$(\tau/s)^{n/\beta} \omega^{(\beta)}((\tau/s)^{1/\beta} z, \tau) = \omega^{(\beta)}(z, s), (\tau, s > 0, z \in \mathbb{R}^n)$$

ve $s = 1$ için,

$$\omega^{(\beta)}(\tau^{1/\beta} z, \tau) = \tau^{-n/\beta} \omega^{(\beta)}(z, 1)$$

elde edilir.

(b)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega^{(\beta)}(z, \tau) dz = \int_{\mathbb{R}^n} \omega^{(\beta)}(y, 1) dy = 1, (\forall \tau > 0, \forall \beta > 0). \quad (4.33)$$

(c) $\beta > 0$ çift tam sayı ise, $\omega^{(\beta)}(z, 1)$ hızla azalan ve sonsuz diferansiyellenen bir fonksiyondur. Ayrıca, $\beta \neq 2, 4, 6, \dots$ ise,

$$\omega^{(\beta)}(z, 1) = c_\beta |z|^{-n-\beta} (1 + o(1)), |z| \rightarrow \infty$$

sağlanır. Bu nedenle, $\omega^{(\beta)}(z, 1)$ çekirdek fonksiyonunun $\mathbb{R}^n$ uzayında integrallenebilir ve azalan bir radyal majorantı vardır.

(d) β -yarıgrubu diye adlandırılan,

$$(G_t^{(\beta)} \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x - y) \omega^{(\beta)}(y, t) dy, (t > 0) \quad (4.34)$$

integral operatörleri L_p 'den L_p 'ye sınırlıdır. Yani, her $\varphi \in L_p$ için

$$\left\| G_t^{(\beta)} \varphi \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq c(\beta) \|\varphi\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

eşitsizliği sağlanır. Burada,

$$c(\beta) = \int_{\mathbb{R}^n} |\omega^{(\beta)}(z, \tau)| dz = \int_{\mathbb{R}^n} |\omega^{(\beta)}(y, 1)| dy < \infty.$$

(e) $1 \leq p < \infty$, $\varphi \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ve φ fonksiyonunun klasik Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu (operatörü)

$$(M\varphi)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |\varphi(y)| dy$$

olmak üzere, $h.h.h. x \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\sup_t \left| \left(G_t^{(\beta)} \varphi \right) (x) \right| \leq c(M\varphi)(x)$$

sağlanır.

Not 4.22. $\omega^{(\beta)}(y, \tau)$ fonksiyonu, Gauss çekirdeğinin ($\beta = 2$ için) ve Poisson çekirdeğinin ($\beta = 1$ için) bir genelleşmesidir. Ayrıca, (4.34)'te tanımı verilmiş olan β -yarıgrubu da, sırasıyla, Gauss-Weierstrass ve Abel-Poisson yarıgruplarının bir genelleşmesidir.

Tanım 4.23 (Aliev ve Sekin 2021). $f \in L_p(\mathbb{R}^{n+1})$, ($1 \leq p \leq \infty$) olsun.

$$W_\mu^{(\beta)} f(x, t, \eta) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty f(x - \eta^{1/\beta} y, t - \eta\tau) \omega^{(\beta)}(y, \tau) d\mu(\tau) dy \quad (4.35)$$

integral dönüşümüne, parabolik-tipli dalgacık dönüşümü diyeceğiz.

Benzer şekilde,

$$\widetilde{W}_\mu^{(\beta)} f(x, t, \eta) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty e^{-\eta\tau} f(x - \eta^{1/\beta} y, t - \eta\tau) \omega^{(\beta)}(y, \tau) d\mu(\tau) dy \quad (4.36)$$

integral dönüşümüne de, ağırlıklı parabolik-tipli dalgacık dönüşümü diyeceğiz. Burada, "ağırlıklı" sözcüğünün kullanılmasının nedeni integral ifadesinde bulunan $e^{-\eta\tau}$ çarpanıdır.

Hatırlatalım ki, $p = \infty$ durumunda L_∞ uzayı yerine C^0 uzayı kullanılacaktır.

İntegraller için genelleşmiş Minkowski eşitsizliği uygulanırsa, (4.35) ve (4.36) operatörlerinin $f \in L_p(\mathbb{R}^{n+1})$, $1 \leq p \leq \infty$, ($L_\infty \equiv C^0$) uzaylarında iyi tanımlı oldukları görülür. Gerçekten, $V_\mu^{(\beta)}$ ile $W_\mu^{(\beta)}$ ve $\widetilde{W}_\mu^{(\beta)}$ operatörlerinden herhangi birini gösterirsek,

$$\begin{aligned} \|V_\mu^{(\beta)} f(\cdot, \cdot, \eta)\|_{L_p(\mathbb{R}^{n+1})} &\leq \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^{n+1})} \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty |\omega^{(\beta)}(y, \tau)| d|\mu|(\tau) dy \\ &= \|\mu\| c(\beta) \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^{n+1})} < \infty, \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada, $\|\mu\| = \int_0^\infty d|\mu|(\tau) < \infty$ ve

$$c(\beta) = \int_{\mathbb{R}^n} |\omega^{(\beta)}(y, 1)| dy < \infty.$$

Şimdi, tezimizin bu alt bölümünün esas sonuçlarını bir Teorem şeklinde ifade ederek kanıtlayalım. Söz konusu teoremi ifade etmeden önce, iki önerme verelim.

Önerme 4.24 (Rubin 1996, syf.188). μ dalgacık ölçümü, $\mu([0, \infty)) = 0$ ve $\mu(\{0\}) = 0$ koşullarını sağlayan, dayanağı $[0, \infty)$ olan bir Borel ölçümü olsun.

$$k(s) = \frac{1}{s} \int_0^s d\mu(\tau), (0 < s < \infty) \quad (4.37)$$

tanımlayalım. Eğer,

$$\int_0^\infty |\log \tau| d|\mu|(\tau) < \infty, \quad (4.38)$$

ise,

$$k(s) \in L_1(0, \infty) \text{ ve } \int_0^\infty k(s)ds = \int_0^\infty \log \frac{1}{\tau} d\mu(\tau) \quad (4.39)$$

olur.

Önerme 4.25 (Aliev ve Sekin 2021). μ ölçümü ve $k(s)$ fonksiyonu Önerme 4.24'deki gibi tanımlansın. Bir $\alpha > 1$ için,

$$l(\alpha) \equiv \int_0^\infty |\log \tau|^\alpha d|\mu|(\tau) < \infty \quad (4.40)$$

sağlanırsa, $k(s)$ fonksiyonu azalan ve integrallenebilir bir majoranta sahiptir.

Teorem 4.26 (Aliev ve Sekin 2021). $f \in L_p(\mathbb{R}^{n+1})$, $(1 < p < \infty)$ ve $V_\mu^{(\beta)}$ operatörü, sırasıyla (4.35) ve (4.36)'da tanımlanmış $W_\mu^{(\beta)}$ ve $\widetilde{W}_\mu^{(\beta)}$ operatörlerinden herhangi biri olsun. μ sonlu Borel ölçümü için,

$$\int_0^\infty d\mu(\tau) = 0 \text{ ve } \int_0^\infty |\log \tau| d|\mu|(\tau) < \infty$$

koşulları sağlansın. Ayrıca,

$$c_\mu = \int_0^\infty \log \frac{1}{\tau} d\mu(\tau) \quad (4.41)$$

sayısı sıfırdan farklı olsun. O halde,

(a) " $(L_p) - \lim$ " notasyonu, L_p -normunda limit olmak üzere,

$$(L_p) - \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \rho \rightarrow \infty}} \frac{1}{c_\mu} \int_\varepsilon^\rho V_\mu^{(\beta)} f(x, t, \eta) \frac{d\eta}{\eta} = f(x, t)$$

sağlanır.

(b) $f \in C^0 \equiv C^0(\mathbb{R}^{n+1})$ ise,

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \rho \rightarrow \infty}} \sup_{\mathbb{R}^{n+1}} \left| \frac{1}{c_\mu} \int_\varepsilon^\rho V_\mu^{(\beta)} f(x, t, \eta) \frac{d\eta}{\eta} - f(x, t) \right| = 0,$$

yani, $f \in C^0$ için $\mathbb{R}^{n+1}$ de yakınsama düzgündür.

(c) $f \in L_p(\mathbb{R}^{n+1})$, $(1 < p < \infty)$, ve bir $\alpha > 1$ için

$$\int_0^\infty |\log \tau|^\alpha d|\mu|(\tau) < \infty$$

ise,

$$(a.e) - \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \rho \rightarrow \infty}} \frac{1}{c_\mu} \int_\varepsilon^\rho V_\mu^{(\beta)} f(x, t, \eta) \frac{d\eta}{\eta} = f(x, t) \quad (4.42)$$

olur. Burada, "(a.e) - lim" notasyonu, h.h.h. $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ için noktasal yakınsama demektir.

İspat Biz burada, Aliev ve Rubin (2002) makalesinde kullanılmış bazı metodlardan yararlanacağız. Öncelikle, $V_\mu^{(\beta)} \equiv W_\mu^{(\beta)}$ ve $W_\mu^{(\beta)}$ operatörü (4.35) eşitliğindeki gibi tanımlanmış olsun. $f \in L_p(\mathbb{R}^{n+1})$ olmak üzere,

$$I_{\varepsilon, \rho}(x, t) = \int_\varepsilon^\rho V_\mu^{(\beta)} f(x, t, \eta) \frac{d\eta}{\eta}, 0 < \varepsilon < \rho < \infty \quad (4.43)$$

integralini tanımlayalım.

$$\|\mu\| < \infty, f \in L_p(\mathbb{R}^{n+1}) \text{ ve } |z| \rightarrow \infty \text{ için } |\omega^{(\beta)}(z, 1)| = c_\beta |z|^{-n-\beta} (1 + o(1))$$

olduğundan, Fubini teoremi uygulanabilir. Buna göre, Fubini teoremi gereğince,

$$\begin{aligned} I_{\varepsilon, \rho}(x, t) &= \int_\varepsilon^\rho \left[\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty f(x - \eta^{1/\beta} y, t - \eta\tau) \omega^{(\beta)}(y, \tau) d\mu(\tau) dy \right] \frac{d\eta}{\eta} \\ &= \int_0^\infty \left\{ \int_\varepsilon^\rho \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x - \eta^{1/\beta} y, t - \eta\tau) \omega^{(\beta)}(y, \tau) dy \right] \frac{d\eta}{\eta} \right\} d\mu(\tau) \end{aligned}$$

olur. $y = \eta^{-1/\beta} z$, $(dy = \eta^{-n/\beta} dz)$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$I_{\varepsilon, \rho}(x, t) = \int_0^\infty d\mu(\tau) \int_\varepsilon^\rho \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x - z, t - \eta\tau) \omega^{(\beta)}(\eta^{-1/\beta} z, \tau) \eta^{-n/\beta} dz \right]$$

elde edilir. Şimdi de $\eta = \tau^{-1} s$ değişken değiştirmesi yapılırsa $\frac{d\eta}{\eta} = \frac{ds}{s}$ olur. Bunu kullanırsak,

$$\begin{aligned} I_{\varepsilon, \rho}(x, t) &= \int_0^\infty d\mu(\tau) \int_{\varepsilon\tau}^{\rho\tau} \frac{ds}{s} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x - z, t - s) \omega^{(\beta)}\left(\left(\frac{t}{s}\right)^{1/\beta} z, \tau\right) \left(\frac{\tau}{s}\right)^{n/\beta} dz \right] \\ &= \int_0^\infty d\mu(\tau) \int_{\varepsilon\tau}^{\rho\tau} \frac{ds}{s} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x - z, t - s) \omega^{(\beta)}(z, s) dz \right] \end{aligned}$$

elde edilir (Son eşitlikte, $\omega^{(\beta)}$ çekirdeğinin Önerme 4.21-(a)'daki özelliğini kullandık).

Burada, integral sırası değiştirilir ve $\varepsilon\tau \leq s \leq \rho\tau \Leftrightarrow s/\rho \leq \tau \leq s/\varepsilon$ olduğu dikkate alınır,

$$\begin{aligned} I_{\varepsilon,\rho}(x, t) &= \int_0^\infty \frac{ds}{s} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x-z, t-s) \omega^{(\beta)}(z, s) dz \right] \int_{s/\rho}^{s/\varepsilon} d\mu(\tau) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty f(x-z, t-s) \omega^{(\beta)}(z, s) \left(\frac{1}{s} \int_{s/\rho}^{s/\varepsilon} d\mu(\tau) \right) ds dz \end{aligned}$$

olur.

Şimdi, Önerme 4.24’de olduğu gibi,

$$k(s) = \frac{1}{s} \int_0^s d\mu(\tau)$$

ve $0 < s, \lambda < \infty$ olmak üzere,

$$k_\lambda(s) = \frac{1}{\lambda} k\left(\frac{s}{\lambda}\right)$$

fonksiyonlarını tanımlayalım (bu tanıma göre, $k_1(s) = k(s)$ olur). Buna göre,

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} \int_{s/\rho}^{s/\varepsilon} d\mu(\tau) &= \frac{1}{s} \int_0^{s/\varepsilon} d\mu(\tau) - \frac{1}{s} \int_0^{s/\rho} d\mu(\tau) \\ &= k_\varepsilon(s) - k_\rho(s) \end{aligned}$$

olacağından,

$$\begin{aligned} I_{\varepsilon,\rho}(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty f(x-z, t-s) \omega^{(\beta)}(z, s) k_\varepsilon(s) ds dz \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty f(x-z, t-s) \omega^{(\beta)}(z, s) k_\rho(s) ds dz \end{aligned}$$

yazılabilir.

$\omega^{(\beta)}(z, s)$ çekirdek fonksiyonu $-\infty < s \leq 0$ aralığına $\omega^{(\beta)}(z, s) = 0$ olarak genişletildikten sonra,

$$\Omega_\lambda(z, s) = \omega^{(\beta)}(z, s) k_\lambda(s)$$

şeklinde bir fonksiyon tanımlarsak,

$$\begin{aligned} I_{\varepsilon,\rho}(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} f(x-z, t-s) \Omega_\varepsilon(z, s) ds dz - \int_{\mathbb{R}^{n+1}} f(x-z, t-s) \Omega_\rho(z, s) ds dz \\ &\equiv (f * \Omega_\varepsilon)(x, t) - (f * \Omega_\rho)(x, t) \end{aligned}$$

olur. Yani,

$$I_{\varepsilon,\rho}(x, t) = (f * \Omega_\varepsilon)(x, t) - (f * \Omega_\rho)(x, t) \quad (4.44)$$

elde edilir. Burada, $0 < \varepsilon < \rho < \infty$, $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ve $s \in (-\infty, 0]$ için $\omega^{(\beta)}(z, s) = 0$ olmak üzere,

$$\Omega_\lambda(z, s) = \omega^{(\beta)}(z, s)k_\lambda(s) \equiv \omega^{(\beta)}(z, s)\frac{1}{\lambda}k\left(\frac{s}{\lambda}\right),$$

şeklinde tanımlıdır.

Şimdiki amacımız, L_p -normunda $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow \infty \\ \rho \rightarrow \infty}} I_{\varepsilon, \rho}(x, t)$ limitini hesaplamaktır. Bunun için, yukarıda da bahis ettiğimiz gibi, Aliev ve Rubin'in (2002) makalesinde kullanılan bazı teknikleri kullanacağız. Her $s > 0$ için $\int_{\mathbb{R}^n} \omega^{(\beta)}(z, s)dz = 1$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \Omega_\varepsilon(z, s)dsdz &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \omega^{(\beta)}(z, s)\frac{1}{\varepsilon}k\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)dsdz \\ &= \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} \omega^{(\beta)}(z, s)dz \right) \frac{1}{\varepsilon}k\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)ds = \int_0^\infty \frac{1}{\varepsilon}k\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)ds \\ &= \int_0^\infty k(t)dt \end{aligned}$$

olur. Ayrıca, Önerme 4.24'e göre,

$$\int_0^\infty k(t)dt = \int_0^\infty \log \frac{1}{\tau} d\mu(\tau) \equiv c_\mu$$

olduğundan,

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \Omega_\varepsilon(z, s)dsdz = c_\mu$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned} I_{\varepsilon, \rho}(x, t) - c_\mu f(x, t) &= [(f * \Omega_\varepsilon)(x, t) - c_\mu f(x, t)] - (f * \Omega_\rho)(x, t) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \omega^{(\beta)}(z, s)k_\varepsilon(s) [f(x - z, t - s) - f(x, t)] dsdz \\ &\quad - (f * \Omega_\rho)(x, t) \end{aligned} \tag{4.45}$$

yazılabilir.

Bundan başka,

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \omega^{(\beta)}(z, s)k_\varepsilon(s) [f(x - z, t - s) - f(x, t)] dsdz$$

integralinde, $s = \varepsilon\tau$, $z = \varepsilon^{1/\beta}y$ değişken değiştirmesi yaparsak ve çekirdek fonksiyonunun anizotropik homojenlik özelliğini $\omega^{(\beta)}(\varepsilon^{1/\beta}y, \varepsilon\tau) = \varepsilon^{-n/\beta}\omega^{(\beta)}(y, \tau)$ şeklinde uygularsak, yukarıdaki integrali

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \omega^{(\beta)}(y, \tau)k(\tau) [f(x - \varepsilon^{1/\beta}y, t - \varepsilon\tau) - f(x, t)] d\tau dy$$

şeklinde yazabiliriz. Minkowski eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} & \|I_{\varepsilon,\rho}(x, t) - c_\mu f(x, t)\|_{L_p(\mathbb{R}^{n+1})} \\ & \stackrel{(4.45)}{\leq} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} |\omega^{(\beta)}(y, \tau)| |k(\tau)| \|f(x - \varepsilon^{1/\beta} y, t - \varepsilon\tau) - f(x, t)\|_{L_p(\mathbb{R}^{n+1})} d\tau dy \\ & + \|f * \Omega_\rho\|_{L_p(\mathbb{R}^{n+1})} \end{aligned} \quad (4.46)$$

elde edilir. Lebesgue baskın yakınsama teoremi gereğince, (4.46) eşitsizliğinde ilk toplananın $\varepsilon \rightarrow 0^+$ için limiti 0'dır (Burada, L_∞ yerine C^0 kullanıyoruz).

Şimdi, $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \|f * \Omega_\rho\|_{L_p(\mathbb{R}^{n+1})} = 0$ olduğunu gösterelim. Fubini teoreminden,

$$(f * \Omega_\rho)(x, t) = \int_0^\infty k_\rho(s) \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x - z, t - s) \omega^{(\beta)}(z, s) dz \right) ds$$

yazabiliriz. Buradan, Minkowski eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} \|(f * \Omega_\rho)(\cdot, t)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} & \leq \int_0^\infty |k_\rho(s)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|f(\cdot, t - s)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} |\omega^{(\beta)}(z, s)| dz \right) ds \\ & = c(\beta) \int_0^\infty |k_\rho(s)| \|f(\cdot, t - s)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} ds \end{aligned} \quad (4.47)$$

elde edilir. Burada, $c(\beta)$ katsayısı Önerme 4.21-(d)'deki gibi tanımlanmıştır.

Şimdi,

$$h(\tau) = \|f(\cdot, \tau)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \quad (4.48)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. O halde, k_ρ fonksiyonu, $-\infty < s \leq 0$ aralığına $k_\rho(s) = 0$ olarak devam ettirilmiş olmak üzere,

$$\begin{aligned} \|(f * \Omega_\rho)(\cdot, t)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} & \leq c(\beta) \int_0^\infty |k_\rho(s)| \|f(\cdot, t - s)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} ds \\ & \equiv c(\beta)(|k_\rho| * h)(t) \end{aligned} \quad (4.49)$$

yazılabilir (Burada, $|k_\rho| * h$ ile, $|k_\rho|$ ve h fonksiyonlarının girişimi gösterilmiştir).

Şimdi, (4.49) eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \|(f * \Omega_\rho)(x, t)\|_{L_p(\mathbb{R}^{n+1})} & = \left(\int_{\mathbb{R}^1} \int_{\mathbb{R}^n} |(f * \Omega_\rho)(x, t)|^p dx dt \right)^{1/p} \\ & \equiv \left(\int_{\mathbb{R}^1} \|(f * \Omega_\rho)(\cdot, t)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^p dt \right)^{1/p} \\ & \leq c(\beta) \| |k_\rho| * h \|_{L_p(\mathbb{R}^1)} \end{aligned} \quad (4.50)$$

olur.

$f \in L_p(\mathbb{R}^{n+1})$ olduğundan, $h \in L_p(\mathbb{R}^1)$ 'dir. O halde, Teorem 3.13'e göre,

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \| |k_\rho| * h \|_{L_p(\mathbb{R}^1)} = 0$$

elde edilir. Bu nedenle,

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \| f * \Omega_\rho \|_{L_p(\mathbb{R}^{n+1})} \stackrel{(4.50)}{=} 0$$

olur.

Şimdi, (4.46) eşitsizliğini dikkate alırsak,

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow \infty \\ \rho \rightarrow \infty}} \| I_{\varepsilon, \rho}(x, t) - c_\mu f(x, t) \|_{L_p(\mathbb{R}^{n+1})} = 0$$

elde ederiz. Tekrar hatırlatalım ki, $p = \infty$ durumunda L_∞ yerine C^0 kullanılır. Böylece teoremin (a) ve (b) kısımları $V_\mu^{(\beta)} \equiv W_\mu^{(\beta)}$ için kanıtlanmış olur.

Şimdi teoremin (c) kısmının kanıtını verelim. Bunun için önce,

$$\left\| \sup_{\lambda > 0} |f * \Omega_\lambda| \right\|_{L_p(\mathbb{R}^{n+1})} \leq c \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^{n+1})}, \quad (1 < p \leq \infty) \quad (4.51)$$

şeklinde bir eşitsizlik kanıtlayacağız ve daha sonra da Teorem 3.11'i kullanacağız.

$$\begin{aligned} |(f * \Omega_\lambda)(x, t)| &\leq \int_0^\infty |k_\lambda(s)| \left| \int_{\mathbb{R}^n} \omega^{(\beta)}(z, s) f(x - z, t - s) dz \right| ds \\ &\stackrel{(4.34)}{=} \int_0^\infty |k_\lambda(s)| |G_s^{(\beta)} f(\cdot, t - s)(x)| ds \\ &\leq \int_0^\infty |k_\lambda(s)| \sup_{\tau > 0} |G_\tau^{(\beta)} f(\cdot, t - s)(x)| ds \\ &\leq c_1 \int_0^\infty |k_\lambda(s)| M[f(\cdot, t - s)](x) ds, \end{aligned} \quad (4.52)$$

olur. Sonuncu eşitsizlikte Önerme 4.21-(e)'yi kullandık. Burada, M fonksiyonu, $x \in \mathbb{R}^n$ değişkenine bağlı "kısmi" Hardy-Littlewood maksimal operatörüdür, yani,

$$M[f(\cdot, t - s)](x) = \sup_{r > 0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f(y, t - s)| dy$$

şeklindedir. Burada, $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| \leq r\}$, $x \in \mathbb{R}^n$ merkezli ve r yarıçaplı yuvardır.

$\tilde{f}(x, t) = M[f(\cdot, t)](x)$ diyelim ve

$$\tilde{\tilde{f}}(x, t) = \sup_{s > 0} \frac{1}{2s} \int_{t-s}^{t+s} f(x, \tau) d\tau$$

tanımlayalım. Son fonksiyon, $t \in \mathbb{R}^1$ değişkenine bağlı bir boyutlu Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonudur. Bu notasyonları kullanırsak,

$$\begin{aligned} |(f * \Omega_\lambda)(x, t)| &\leq c_1 \int_0^\infty |k_\lambda(s)| \tilde{f}(x, t-s) ds \\ &= c_1 \int_{-\infty}^\infty |k_\lambda(s)| \tilde{f}(x, t-s) ds \end{aligned}$$

olur. Burada, $-\infty < s \leq 0$ için $k_\lambda(s) = 0$ olarak alınmıştır.

Önerme 4.25'e göre, $(0, \infty)$ aralığında $|k_\lambda(s)|$ fonksiyonu azalan integrallenebilir bir majoranta sahiptir ve dolayısıyla Teorem 3.12'ye göre,

$$\sup_{\lambda > 0} \int_{-\infty}^\infty |k_\lambda(s)| \tilde{f}(x, t-s) ds \leq c_2 \tilde{\tilde{f}}(x, t)$$

ve buradan

$$\sup_{\lambda > 0} |(f * \Omega_\lambda)(x, t)| \leq c_3 \tilde{\tilde{f}}(x, t), (x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^1) \quad (4.53)$$

olur.

(4.53) eşitsizliğini ve "kısmi" Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonları $\tilde{f}(x, t)$ ve $\tilde{\tilde{f}}(x, t)$ 'nin L_p -sınırlılığını kullanırsak,

$$\begin{aligned} \left\| \sup_{\lambda > 0} |(f * \Omega_\lambda)(\cdot, \cdot)| \right\|_{L_p(\mathbb{R}^{n+1})} &\leq c_4 \left\| \tilde{\tilde{f}}(\cdot, \cdot) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^{n+1})} = c_4 \left\| \left\| \tilde{\tilde{f}}(\cdot, \cdot) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^1)} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq c_5 \left\| \left\| \tilde{f}(\cdot, \cdot) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^1)} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = c_5 \left\| \left\| \tilde{f}(\cdot, \cdot) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^1)} \\ &\leq c_6 \left\| \left\| f(\cdot, \cdot) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^1)} = c_6 \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^{n+1})} \end{aligned}$$

elde ederiz. Bir daha hatırlatalım ki, burada, $1 < p \leq \infty$ olup, $p = \infty$ için $L_\infty = C_0$ 'dır. Böylece, (4.51) "maksimal eşitsizliği" kanıtlanmış olur.

Yukarıda gösterildiği gibi,

$$I_{\varepsilon, \rho}(x, t) = (f * \Omega_\varepsilon)(x, t) - (f * \Omega_\rho)(x, t)$$

olup, $f \in C^0$ ise, $\varepsilon \rightarrow 0$ için $(f * \Omega_\varepsilon) \rightrightarrows f$ ve $\rho \rightarrow \infty$ için $(f * \Omega_\rho) \rightrightarrows 0$ sağlanmaktadır. Burada, " $\rightrightarrows$ " notasyonu düzgün yakınsaklığı simgelemektedir.

C^0 uzayı, $L_p(\mathbb{R}^{n+1})$ uzayında yoğun olduğundan, Teorem 3.11'e göre, h.h.h. $(x, t) \in \mathbb{R}^n$ için

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \rho \rightarrow \infty}} I_{\varepsilon, \rho}(x, t) = c_\mu f(x, t)$$

olur.

Böylece, $V_\mu^{(\beta)} \equiv W_\mu^{(\beta)}$ olduğu durumda teoremin (c) kısmının da kanıtını tamamlamış oluruz. Dolayısıyla, $V_\mu^{(\beta)} \equiv W_\mu^{(\beta)}$ durumu için Teorem ispatlanmış olur.

$\widetilde{W}_\mu^{(\beta)}$ ağırlıklı parabolik-tipli dalgacık dönüşümü için Teoremin (a), (b) ve (c) kısımlarının kanıtı $W_\mu^{(\beta)}$ durumunda izlenen yola benzer şekilde, (4.44) formülüne dayanarak yapılır.

Söz konusu kanıtın esas adımlarını verelim. Öncelikle,

$$\widetilde{I}_{\varepsilon,\rho}(x, t) = \int_\varepsilon^\rho \widetilde{W}_\mu^{(\beta)} f(x; t; \eta) \frac{d\eta}{\eta} = (f * \widetilde{\Omega}_\varepsilon)(x, t) - (f * \widetilde{\Omega}_\rho)(x, t), \quad (0 < \varepsilon < \rho < \infty),$$

tanımlayalım. Burada $\widetilde{\Omega}_\lambda(x, t) = e^{-t\omega^{(\beta)}}(x, t)k_\lambda(t)$ olup,

$$k_\lambda(t) = \frac{1}{\lambda} k\left(\frac{t}{\lambda}\right), \quad (0 < \lambda < \infty) \text{ ve } k(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} \int_0^t d\mu(\tau), & t > 0 \text{ ise} \\ 0, & t \leq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanmıştır. $\Omega_\lambda(x, t) = \omega^{(\beta)}(x, t)k_\lambda(t) = \omega^{(\beta)}(x, t)\frac{1}{\lambda}k_\lambda\left(\frac{t}{\lambda}\right)$ fonksiyonu için yukarıda

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \Omega_\lambda(x, t) dx dt = c_\mu$$

eşitliğinin her $\lambda > 0$ için sağlandığını göstermiştik.

O halde, $\widetilde{\Omega}_\lambda(x, t) = e^{-t}\Omega_\lambda(x, t)$ olmak üzere, yukarıda tanımladığımız $\widetilde{I}_{\varepsilon,\rho}(x, t)$ için şunları yazabiliriz:

$$\begin{aligned} & \widetilde{I}_{\varepsilon,\rho}(x, t) - c_\mu f(x, t) \\ &= \left[(f * \widetilde{\Omega}_\varepsilon)(x, t) - c_\mu f(x, t) \right] - (f * \widetilde{\Omega}_\rho)(x, t) \\ &= \left[\int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{-\tau} \omega^{(\beta)}(y, \tau) \frac{1}{\varepsilon} k\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) f(x - y, t - \tau) dy d\tau - \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \omega^{(\beta)}(y, \tau) k(\tau) f(x, t) dy d\tau \right] \\ & \quad - (f * \widetilde{\Omega}_\rho)(x, t). \end{aligned}$$

İlk integralde, yukarıdaki (4.46) formülünü elde ederken uyguladığımız değişken değiş-tirmelerini ve $\omega^{(\beta)}$ çekirdeğinin anizotropik homojenlik özelliğini tekrar kullanırsak,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{-\tau} \omega^{(\beta)}(y, \tau) \frac{1}{\varepsilon} k\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) f(x - y, t - \tau) dy d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{-\varepsilon\tau} \omega^{(\beta)}(y, \tau) k(\tau) f(x - \varepsilon^{1/\beta} y, t - \varepsilon\tau) dy d\tau \end{aligned}$$

olur ve dolayısıyla,

$$\begin{aligned}\tilde{I}_{\varepsilon,\rho}(x,t) - c_\mu f(x,t) &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (e^{-\varepsilon\tau} - 1) \omega^{(\beta)}(y,\tau) k(\tau) f(x - \varepsilon^{1/\beta} y, t - \varepsilon\tau) dy d\tau \\ &+ \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \omega^{(\beta)}(y,\tau) k(\tau) [f(x - \varepsilon^{1/\beta} y, t - \varepsilon\tau) - f(x,t)] dy d\tau \\ &- (f * \tilde{\Omega}_\rho)(x,t)\end{aligned}$$

elde edilir. İlk iki integrale Minkowski eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned}&\left\| \tilde{I}_{\varepsilon,\rho} - c_\mu f \right\|_{L_p(\mathbb{R}^{n+1})} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^{n+1}} |\omega^{(\beta)}(y,\tau)| |k(\tau)| \|f(x - \varepsilon^{1/\beta} y, t - \varepsilon\tau) - f(x,t)\|_{L_p(\mathbb{R}^{n+1})} \\ &+ \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^{n+1})} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (1 - e^{-\varepsilon\tau}) |\omega^{(\beta)}(y,\tau)| |k(\tau)| dy d\tau + \|f * \tilde{\Omega}_\rho\|_{L_p(\mathbb{R}^{n+1})} \\ &\equiv A_1(\varepsilon) + A_2(\varepsilon) + A_3(\rho).\end{aligned}$$

Yukarıda kanıtladığımız üzere,

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \|f * \Omega_\rho\|_{L_p(\mathbb{R}^{n+1})} = 0.$$

Aslında, (4.47)-(4.49) formüllerine dikkat edilirse, orada daha güçlü bir sonuç elde edilmiştir:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \| |f| * |\Omega_\rho| \|_{L_p(\mathbb{R}^{n+1})} = 0.$$

Bunu ve $\left| \tilde{\Omega}_\rho(y,\tau) \right| \leq |\Omega_\rho(y,\tau)|$ eşitsizliğini dikkate alırsak,

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} A_3(\rho) \equiv \lim_{\rho \rightarrow \infty} \|f * \tilde{\Omega}_\rho\|_{L_p(\mathbb{R}^{n+1})} = 0$$

olur. Lebesgue Baskın Yakınsama teoreminden, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_1(\varepsilon) = 0$ ve $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_2(\varepsilon) = 0$ olduğu görülür ve buradan

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \rho \rightarrow \infty}} \left\| \tilde{I}_{\varepsilon,\rho} - c_\mu f \right\|_{L_p(\mathbb{R}^{n+1})} = 0$$

elde edilir. Burada, tekrar hatırlatalım ki, L_∞ yerine C^0 kullanıyoruz.

(4.42) eşitliğinde bahsi geçen h.h.h. (İngilizce: a.e) yakınsaklığı da,

$$\left\| \sup_{\lambda > 0} \left| f * \tilde{\Omega}_\lambda \right| \right\|_{L_p(\mathbb{R}^{n+1})} \leq c \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^{n+1})}, \quad (1 < p \leq \infty)$$

şeklindeki maksimal eşitsizliğine ve Teorem 3.11'a dayanır..

Böylelikle, Teorem 4.26'nın ispatı tamamlanmış olur. □

Örnek 4.27 (Aliev ve Sekin 2021). Şimdi, Teorem 4.26’da kullanılan ve

$$c_\mu \equiv \int_0^\infty \log \frac{1}{\tau} d\mu(\tau) \neq 0, \text{ (bkz: (4.41))}$$

özellği dahil tüm koşulları sağlayan bazı dalgacık ölçümü örnekleri verelim.

Bunun için, öncelikle aşağıdaki fonksiyonları tanımlayalım:

(a)

$$h(\tau) = \begin{cases} e^{-\tau}(1-\tau), & 0 \leq \tau < \infty, \\ 0, & -\infty < \tau < 0, \end{cases}$$

(b) $a \neq 0$ reel sayısı için,

$$h(\tau) = \begin{cases} a, & 0 \leq \tau < 1, \\ -a, & 1 \leq \tau < 2, \\ 0, & \tau \in \mathbb{R} \setminus [0, 2), \end{cases}$$

(c) $h(\tau) = g'(\tau)$ ve $g(\tau)$ fonksiyonu

$$g(\tau) = \begin{cases} e^{-\tau^2-1/\tau^2}, & 0 < \tau < \infty, \\ 0, & -\infty < \tau \leq 0, \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olsun.

(d) $a(\tau)$ ve $b(\tau)$ fonksiyonları, $[0, \infty)$ aralığında pozitif ve sürekli fonksiyonlar olsun.

Ayrıca,

$$\int_0^\infty \tau a(\tau) d\tau < \infty \text{ ve } \int_0^\infty \tau b(\tau) d\tau < \infty$$

sağlansın. $a = \int_0^\infty a(\tau) d\tau$, $b = \int_0^\infty b(\tau) d\tau$ olmak üzere,

$$h(\tau) = \begin{cases} ab(\tau) - ba(\tau), & 0 < \tau < \infty, \\ 0, & -\infty < \tau \leq 0, \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

(e)

$$h(\tau) = \begin{cases} 1 - \tau, & 0 \leq \tau \leq 2. \\ 0, & \tau \in \mathbb{R} \setminus [0, 2]. \end{cases}$$

Şimdi, h fonksiyonu yukarıda tanımlanmış olan fonksiyonlardan herhangi biri olsun ve $d\mu(\tau) = h(\tau)d\tau$ olarak tanımlayalım. Bu durumda,

$$\int_0^\infty d\mu(\tau) = 0, \int_0^\infty |\log \tau|^\alpha d|\mu|(\tau) < \infty, (\alpha > 1)$$

ve

$$c_\mu \equiv \int_0^\infty \log \frac{1}{\tau} d\mu(\tau) \neq 0$$

özelliklerinin sağlandığını göstermek zor değildir. Örneğin,

$$d\mu(\tau) = h(\tau)d\tau,$$

durumunda,

$$h(\tau) = \begin{cases} 1 - \tau, & 0 \leq \tau \leq 2, \\ 0, & \tau \in \mathbb{R} \setminus [0, 2], \end{cases}$$

fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyon için,

$$c_\mu \equiv \int_0^\infty \log \frac{1}{\tau} h(\tau) d\tau = - \int_0^2 (1 - \tau) \log \tau d\tau = 1$$

olur ve bu nedenle (4.42) formülünden, $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ için,

$$\int_0^\infty V_\mu^{(\beta)} f(x, t, \eta) \frac{d\eta}{\eta} = f(x, t)$$

elde edilir. Bu eşitliğin sol tarafı,

$$(a.e) - \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \rho \rightarrow \infty}} \int_\varepsilon^\rho V_\mu^{(\beta)} f(x, t, \eta) \frac{d\eta}{\eta}$$

olarak yorumlanmalıdır ve $V_\mu^{(\beta)} f$ operatörü,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^2 f(x - \eta^{1/\beta} y, t - \eta\tau) \omega^{(\beta)}(y, \tau) (1 - \tau) d\tau dy$$

veya

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^2 e^{-\eta\tau} f(x - \eta^{1/\beta} y, t - \eta\tau) \omega^{(\beta)}(y, \tau) (1 - \tau) d\tau dy$$

integral operatörlerinden herhangi biri olarak alınabilir.

Hatırlatalım ki, $\beta = 1$ ve $\beta = 2$ olduğu durumda $\omega^{(\beta)}(y, \tau)$ çekirdek fonksiyonu, sırasıyla, Poisson ve Gauss çekirdeklerine dönüşür.

4.2.1. Parabolik-Tipli Dalgacık Dönüşümlerin Genelleşmiş Parabolik Potansiyellerle İlişkisi

Biz, Bulgular ve Tartışma bölümünün ilk alt bölümünde, iki $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ parametrelerine bağlı, genelleşmiş parabolik Riesz ve genelleşmiş parabolik Bessel potansiyellerini tanımlayarak, onların L_p uzaylarındaki davranışlarını inceledik. (Tekrar hatırlatalım

ki, $\beta = 2$ durumunda klasik parabolik Riesz ve parabolik Bessel potansiyelleri elde edilir). Bu alt bölümde ise, bir $\beta > 0$ parametresine ve bir μ dalgacık ölçümüne bağlı iki integral dönüşüm tanımladık. Parabolik-tipli dalgacık dönüşümler diye adlandırdığımız bu dönüşümler için Teorem 4.26'da Calderon tipli ters belirleme formülleri ifade ederek kanıtladık. Doğal olarak, şöyle bir soru ortaya çıkar: *Parabolik-tipli dalgacık dönüşümler" diye adlandırdığımız $W_\mu^{(\beta)} f$ ve $\widetilde{W}_\mu^{(\beta)} f$ dönüşümlerinin, $H_\beta^\alpha f$ ve $\mathcal{H}_\beta^\alpha f$ (genelleşmiş parabolik Riesz ve parabolik Bessel) potansiyelleri ile bir ilişkisi var mıdır?* Aşağıdaki teorem, bunlar arasında derin bir ilişki olduğunu ve dolayısıyla, "Parabolik-tipli Dalgacık Dönüşümler" isminin de isabetli olduğunu gösteriyor.

Teorem 4.28. $H_\beta^\alpha f$ ve $\mathcal{H}_\beta^\alpha f$ genelleşmiş parabolik potansiyelleri (4.29) ve (4.30) formülleri ile tanımlansın. Ayrıca, $W_\mu^{(\beta)} f$ ve $\widetilde{W}_\mu^{(\beta)} f$ operatörleri de (4.35) ve (4.36) formülleriyle tanımlanmış parabolik-tipli dalgacık dönüşümler olsunlar. Bu taktirde, $\alpha > 0$ ve

$$\int_0^\infty \tau^{-\alpha/\beta} d|\mu|(\tau) < \infty; \quad \int_0^\infty \tau^{-\alpha/\beta} d\mu(\tau) \neq 0 \quad (4.54)$$

olmak üzere,

(a) $f \in L_p$, ($1 \leq p < \infty$) ve $0 < \alpha < \frac{1}{p}(n + \beta)$ ise, h.h.h. $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ için,

$$H_\beta^\alpha f(x, t) = \frac{1}{c_\mu(\alpha, \beta)} \int_0^\infty \eta^{\frac{\alpha}{\beta}} W_\mu^{(\beta)} f(x, t, \eta) \frac{d\eta}{\eta} \quad (4.55)$$

olur.

(b) $f \in L_p$, ($1 \leq p < \infty$) ve $0 < \alpha < \infty$ ise, h.h.h. $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ için,

$$\mathcal{H}_\beta^\alpha f(x, t) = \frac{1}{c_\mu(\alpha, \beta)} \int_0^\infty \eta^{\frac{\alpha}{\beta}} \widetilde{W}_\mu^{(\beta)} f(x, t, \eta) \frac{d\eta}{\eta} \quad (4.56)$$

olur.

Burada, $c_\mu(\alpha, \beta)$ katsayısı

$$c_\mu(\alpha, \beta) = \Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \int_0^\infty \tau^{-\alpha/\beta} d\mu(\tau)$$

olarak tanımlanır.

İspat (a) Doğrudan hesaplama yaparak,

$$\int_0^\infty \eta^{\alpha/\beta} W_\mu^{(\beta)} f(x, t, \eta) \frac{d\eta}{\eta} = c_\mu(\alpha, \beta) H_\beta^\alpha f(x, t)$$

olduğunu göstereceğiz. Yazılımın kolaylığı açısından,

$$A = \int_0^\infty \eta^{\alpha/\beta} W_\mu^{(\beta)} f(x, t, \eta) \frac{d\eta}{\eta}$$

kısaltmasını kullanalım.

Şimdi, $W_\mu^{(\beta)} f$ dönüşümünün (4.36)'daki açık ifadesini kullanırsak ve $f \in L_p$, ($1 \leq p < \infty$); $0 < \alpha < \frac{1}{p}(n + \beta)$ koşulları ile, μ ölçümü üzerine konulmuş (4.54) koşullarını dikkate alarak Fubini teoremini uygularsak,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\infty \eta^{\alpha/\beta} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty f(x - \eta^{1/\beta} y, t - \eta\tau) \omega^{(\beta)}(y, \tau) d\eta d\mu(\tau) \right) \frac{d\eta}{\eta} \\ &= \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \eta^{\frac{\alpha}{\beta}-1} f(x - \eta^{1/\beta} y, t - \eta\tau) \omega^{(\beta)}(y, \tau) d\eta dy \right) d\mu(\tau) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir (Fubini teoremini uygulayabilmek için gereken koşulların sağlandığını aşağıda göstereceğiz). Sonuncu ifadede, içerideki integralde öncelikle $\eta \mapsto \frac{1}{\tau}\eta$ şeklinde değişken değiştirmesi yapalım:

$$A = \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \eta^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \tau^{-\alpha/\beta} f(x - (\eta/\tau)^{1/\beta} y, t - \eta) \omega^{(\beta)}(y, \tau) d\eta dy \right) d\mu(\tau).$$

Şimdi de, $y \mapsto (\tau/\eta)^{1/\beta} y$ şeklinde değişken değiştirelim:

$$A = \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \eta^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \tau^{-\alpha/\beta} (\tau/\eta)^{n/\beta} f(x - y, t - \eta) \omega^{(\beta)}((\tau/\eta)^{1/\beta} y, \tau) d\eta dy \right) d\mu(\tau).$$

Burada, $(\tau/\eta)^{n/\beta} \omega^{(\beta)}((\tau/\eta)^{1/\beta} y, \tau) = \omega^{(\beta)}(y, \eta)$ formülünü kullanırsak,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \eta^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \omega^{(\beta)}(y, \eta) f(x - y, t - \eta) d\eta dy \right) \tau^{-\alpha/\beta} d\mu(\tau) \\ &= \left(\int_0^\infty \tau^{-\alpha/\beta} d\mu(\tau) \right) \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \eta^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \omega^{(\beta)}(y, \eta) f(x - y, t - \eta) d\eta dy \\ &= \left(\int_0^\infty \tau^{-\alpha/\beta} d\mu(\tau) \right) \Gamma(\alpha/\beta) H_\beta^\alpha f(x, t) \equiv c_\mu(\alpha, \beta) H_\beta^\alpha f(x, t) \end{aligned}$$

olur ki, buradan da (4.55) formülü elde edilir.

Şimdi, Fubini teoreminin uygulanabilirliğini gösterelim. Bunun için, A 'nın ifadesindeki tekrarlı integralin h.h.h. $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ için mutlak yakınsadığını, yani

$$\tilde{A} = \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \eta^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \left| f\left(x - \eta^{1/\beta} y, t - \eta\tau\right) \right| \left| \omega^{(\beta)}(y, \tau) \right| d\eta dy \right) d|\mu|(\tau)$$

integralinin h.h.h. $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ için yakınsadığını gösterelim.

Yukarıda A için yaptığımız değişken değiştirmelerin aynısını $\tilde{A}$ için yaparsak,

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \eta^{\frac{\alpha}{\beta}-1} |\omega^{(\beta)}(y, \eta)| |f(x-y, t-\eta)| d\eta dy \right) \tau^{-\alpha/\beta} d|\mu|(\tau) \\ &= \left(\int_0^\infty \tau^{-\alpha/\beta} d|\mu|(\tau) \right) \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \eta^{\frac{\alpha}{\beta}-1} |\omega^{(\beta)}(y, \eta)| |f(x-y, t-\eta)| d\eta dy\end{aligned}$$

ifadesinin h.h.h. $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ için sonlu değere sahip olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır. Teoremin koşulu gereği, $\tilde{A}$ 'nın ifadesindeki $\int_0^\infty \tau^{-\alpha/\beta} d|\mu|(\tau)$ çarpanı zaten sonludur. $\tilde{A}$ 'nın ifadesindeki ikinci çarpanın da h.h.h. $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ için sonlu olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}& \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \eta^{\frac{\alpha}{\beta}-1} |\omega^{(\beta)}(y, \eta)| |f(x-y, t-\eta)| d\eta dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 \eta^{\frac{\alpha}{\beta}-1} |\omega^{(\beta)}(y, \eta)| |f(x-y, t-\eta)| d\eta dy \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} \int_1^\infty \eta^{\frac{\alpha}{\beta}-1} |\omega^{(\beta)}(y, \eta)| |f(x-y, t-\eta)| d\eta dy \equiv i_1(x, t) + i_2(x, t)\end{aligned}$$

yazarak, $i_1(x, t)$ ve $i_2(x, t)$ 'nin her ikisinin de h.h.h. $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ için sonlu olduğunu gösterelim.

Minkowski eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}\|i_1\|_p &\leq \|f\|_p \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 \eta^{\frac{\alpha}{\beta}-1} |\omega^{(\beta)}(y, \eta)| d\eta dy \\ &= \|f\|_p \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 \eta^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \eta^{-\frac{n}{\beta}} |\omega^{(\beta)}(\eta^{-1/\beta} y, 1)| d\eta dy.\end{aligned}$$

Burada, $y \mapsto \eta^{1/\beta} y$ şeklinde değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\begin{aligned}\|i_1\|_p &\leq \|f\|_p \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 \eta^{\frac{\alpha}{\beta}-1} |\omega^{(\beta)}(y, 1)| d\eta dy \\ &= \|f\|_p \int_0^1 \eta^{\frac{\alpha}{\beta}-1} d\eta \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |\omega^{(\beta)}(y, 1)| dy \\ &= \frac{\beta}{\alpha} c_\beta \|f\|_p < \infty\end{aligned}$$

olur. Burada, $c_\beta = \int_{\mathbb{R}^n} |\omega^{(\beta)}(y, 1)| dy < \infty$.

Böylece, $\|i_1\|_p \leq \frac{\beta}{\alpha} c_\beta \|f\|_p < \infty$ olduğundan, $i_1(x, t)$ fonksiyonu, h.h.h. $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ için sonlu değer alır. Şimdi de, $i_2(x, t)$ 'nin her $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ için sonlu olduğunu gösterelim.

Öncelikle, $p > 1$ olsun. Bu durumda, Hölder eşitsizliğine göre, $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} i_2(x, t) &\leq \|f\|_p \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_1^\infty \eta^{\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right)q} |\omega^{(\beta)}(y, \eta)|^q d\eta dy \right)^{1/q} \\ &= \|f\|_p \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_1^\infty \eta^{\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right)q} \eta^{-\frac{n}{\beta}q} |\omega^{(\beta)}(\eta^{-1/\beta}y, 1)|^q d\eta dy \right)^{1/q} \end{aligned}$$

$y \mapsto \eta^{1/\beta}y$ değişken değiştirmesi yaparsak,

$$\begin{aligned} i_2(x, t) &\leq \|f\|_p \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_1^\infty \eta^{\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right)q} \eta^{-\frac{n}{\beta}q + \frac{n}{\beta}} |\omega^{(\beta)}(y, 1)|^q d\eta dy \right)^{1/q} \\ &= \|f\|_p \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\omega^{(\beta)}(y, 1)|^q dy \right)^{1/q} \left(\int_1^\infty \eta^{\left(\frac{\alpha}{\beta}-1-\frac{n}{\beta}\right)q + \frac{n}{\beta}} d\eta \right)^{1/q} \end{aligned}$$

olur.

$$c_{\beta,q} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\omega^{(\beta)}(y, 1)|^q dy \right)^{1/q}$$

dersek, $\omega^{(\beta)}(y, 1)$ fonksiyonunun Önerme 4.21-(a)'da verilen anizotropik davranışından dolayı $c_{\beta,q} < \infty$ olduğu görülür. Diğer yandan, $\alpha < \frac{1}{p}(n + \beta)$ koşulundan

$$\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 - \frac{n}{\beta} \right) q + \frac{n}{\beta} < -1$$

olur ve dolayısıyla,

$$\int_1^\infty \eta^{\left(\frac{\alpha}{\beta}-1-\frac{n}{\beta}\right)q + \frac{n}{\beta}} d\eta < \infty$$

sağlanır. Böylece, her $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ için $i_2(x, t) < \infty$ olur.

Sonuç olarak, $\tilde{A} \equiv \tilde{A}(x, t)$ ifadesi h.h.h. $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ için sonlu olur ve dolayısıyla, Fubini teoremi uygulanabilir.

Şimdi de, $p = 1$ olsun. Bu durumda, $f \in L_1$ ve $0 < \alpha < n + \beta$ için (4.55) formülü kanıtlanmalıdır. Bunun için, $p > 1$ durumundakine benzer olarak, $i_1(x, t)$ ve $i_2(x, t)$ 'nin h.h.h. (x, t) için sonlu olduğu gösterilmelidir.

Yukarıda $\|i_1\|_p \leq \frac{\beta}{\alpha} c_\beta \|f\|_p$ olduğunu göstermiştik. Bu eşitsizlik $p = 1$ için de doğrudur. Dolayısıyla, h.h.h. (x, t) için $i_1(x, t)$ sonludur.

Diğer yandan,

$$\sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}} i_2(x, t) \leq \|f\|_1 \sup_{\substack{1 < \eta < \infty \\ y \in \mathbb{R}^n}} \eta^{\frac{\alpha}{\beta}-1} |\omega^{(\beta)}(y, \eta)|.$$

Burada,

$$|\omega^{(\beta)}(y, \eta)| = \eta^{-\frac{n}{\beta}} \left| \omega^{(\beta)} \left(\eta^{-\frac{1}{\beta}} y, 1 \right) \right|$$

eşitliğini kullanacağız.

$\omega^{(\beta)}(z, 1)$ fonksiyonu tüm $\mathbb{R}^n$ 'de sürekli ve sınırlıdır. Dolayısıyla, $\exists c > 0, \forall z \in \mathbb{R}^n$ için,

$$|\omega^{(\beta)}(z, 1)| \leq c$$

sağlanır.

O halde, $\alpha < n + \beta$ koşulu kullanılırsa,

$$\sup_{\substack{1 < \eta < \infty \\ y \in \mathbb{R}^n}} \eta^{\frac{\alpha}{\beta}-1} |\omega^{(\beta)}(y, \eta)| \leq c \cdot \sup_{1 \leq \eta < \infty} \eta^{\frac{\alpha}{\beta}-1-\frac{n}{\beta}} < \infty$$

olur.

(b) (b)'nin ispatı da (a)'nın ispatına benzer yapılıp ve $\widetilde{W}_\mu^{(\beta)} f$ operatörünün ifadesindeki $e^{-\eta\tau}$ çarpanının varlığı, (4.56) eşitliğinin sağlanması için $\alpha > 0$ parametresi üzerine, $0 < \alpha < \frac{1}{p}(n + \beta)$ gibi bir ek koşul konulmamasına olanak sağlar.

$$\int_0^\infty \eta^{\alpha/\beta} \widetilde{W}_\mu^{(\beta)} f(x, t, \eta) \frac{d\eta}{\eta} = c_\mu(\alpha, \beta) \mathcal{H}_\beta^\alpha f(x, t)$$

eşitliğinin h.h.h. $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ için sağlandığı gösterilmelidir. Bunun için, (a)'daki yol izlenerek, Fubini teoremi uygulanır ve uygun değişken değiştirmeleri yapılır. Fubini teoreminin uygulanabilirliğini göstermek için, (a)'daki gibi hareket ederek, nihayetinde

$$\widetilde{B} = \left(\int_0^\infty \tau^{-\alpha/\beta} d|\mu|(\tau) \right) \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty e^{-\eta} \eta^{\frac{\alpha}{\beta}-1} |\omega^{(\beta)}(y, \eta)| |f(x - y, t - \eta)| d\eta dy$$

ifadesinin h.h.h. $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ için sonlu olduğu gösterilmelidir. Yine, (a)'daki gibi,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty e^{-\eta} \eta^{\frac{\alpha}{\beta}-1} |\omega^{(\beta)}(y, \eta)| |f(x - y, t - \eta)| d\eta dy = j_1(x, t) + j_2(x, t)$$

yazalım. Burada, j_1 ve j_2 fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlanmışlardır:

$$j_1(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 e^{-\eta} \eta^{\frac{\alpha}{\beta}-1} |\omega^{(\beta)}(y, \eta)| |f(x - y, t - \eta)| d\eta dy$$

ve

$$j_2(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_1^\infty e^{-\eta} \eta^{\frac{\alpha}{\beta}-1} |\omega^{(\beta)}(y, \eta)| |f(x - y, t - \eta)| d\eta dy.$$

$e^{-\eta} < 1$ olduğu kullanılırsa, (a)'daki gibi Minkowski eşitsizliği uygulanarak,

$$\|j_1\|_p \leq \frac{\beta}{\alpha} c_\beta \|f\|_p < \infty$$

elde edilir. j_2 fonksiyonu için de, (a)'daki gibi, $p > 1$ durumunda $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ olmak üzere, Hölder eşitsizliği uygulanırsa, basit hesaplamalarla

$$j_2(x, t) \leq \|f\|_p c_{\beta, q} \left(\int_1^\infty e^{-\eta q} \eta^{\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 - \frac{n}{\beta}\right)q + \frac{n}{\beta}} d\eta \right)^{1/q} < \infty$$

olduğu görülür. Dolayısıyla, Fubini teoremi uygulanabilir.

Benzer şekilde, $p = 1$ durumunda, $\|j_1\|_1 \leq \frac{\beta}{\alpha} c_\beta \|f\|_1 < \infty$ ve

$$\begin{aligned} j_2(x, t) &\leq \|f\|_1 \sup_{\substack{1 < \eta < \infty \\ y \in \mathbb{R}^n}} e^{-\eta} \eta^{\frac{\alpha}{\beta} - 1} |\omega^{(\beta)}(y, \eta)| \\ &\leq \|f\|_1 \cdot c \cdot \sup_{1 \leq \eta < \infty} e^{-\eta} \eta^{\frac{\alpha}{\beta} - 1 - \frac{n}{\beta}} < \infty. \end{aligned}$$

Dolayısıyla, h.h.h. (x, t) için $j_1(x, t)$ ve $j_2(x, t)$ sonlu olduğundan, Fubini teoremi uygulanabilir. $\square$

4.3. Laplace-Bessel Diferansiyel Operatörü ile İlişkili Olan Parabolik Potansiyellerin Genelleşmeleri ve Onların Ağırlıklı Lebesgue Uzaylarında Davranışları

Fourier-Bessel Harmonik Analizinin önemli teknik vasıtalarından olan Singüler parabolik Riesz ve singüler parabolik Bessel potansiyelleri, Fourier-Bessel dönüşümü yardımıyla sırasıyla,

$$(H_\nu^\alpha f)^\wedge(x, t) = (|x|^2 + it)^{-\alpha/2} f^\wedge(x, t) \quad (4.57)$$

ve

$$(\mathcal{H}_\nu^\alpha f)^\wedge(x, t) = (1 + |x|^2 + it)^{-\alpha/2} f^\wedge(x, t), \quad (4.58)$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $x \in \mathbb{R}_+^n = \{\xi \mid \xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n); \xi_n > 0\}$, $|x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$ ve $t \in (-\infty, \infty)$ 'dir. Hatırlatalım ki, Fourier-Bessel dönüşümü, bazı kaynaklarda F_ν veya F_B ile gösterilir. Yazılımın kolaylığı için biz, bir φ fonksiyonunun Fourier-Bessel dönüşümünü, $\varphi^\wedge$ notasyonu ile göstereceğiz. Fourier dönüşümü için de aynı notasyon kullanılır. Bu alt bölümde biz, Fourier-Bessel dönüşümü kullanacağımızdan, " $^\wedge$ " notasyonu Fourier-Bessel dönüşümünü gösterecektir.

$(H_\nu^\alpha f)$ ve $(\mathcal{H}_\nu^\alpha f)$ potansiyelleri, $\Delta_\nu = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{2\nu}{x_n} \frac{\partial}{\partial x_n}$ Laplace-Bessel singüler diferansiyel operatör ve I birim operatör olmak üzere, $(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_\nu)$ ve $(I + \frac{\partial}{\partial t} - \Delta_\nu)$ diferansiyel operatörlerinin negatif kesirsel kuvvetleri olarak yorumlanırlar.

(4.57) ve (4.58)'de tanımlanmış olan $H_\nu^\alpha f$ ve $\mathcal{H}_\nu^\alpha f$ singüler parabolik potansiyellerinin integral gösterimleri ise sırasıyla,

$$(H_\nu^\alpha f)(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}_+^n} \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} \omega_\nu(y, \tau) T^{y, \tau} f(x, t) y_n^{2\nu} dy d\tau \quad (4.59)$$

ve

$$(\mathcal{H}_\nu^\alpha f)(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}_+^n} \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-\tau} \omega_\nu(y, \tau) T^{y, \tau} f(x, t) y_n^{2\nu} dy d\tau, \quad (4.60)$$

şeklindedir (bkznz: Aliev 1992; Aliev ve Rubin 2001). Burada,

$$\omega_\nu(y, \tau) = \sqrt{c(n, \nu)} (2\tau)^{-\frac{n+2\nu}{2}} \exp(-|y|^2/4\tau), y \in \mathbb{R}_+^n, \tau > 0 \quad (4.61)$$

olup, Fourier-Bessel harmonik analizindeki Gauss çekirdeğidir. $T^{y, \tau}$ operatörü ise Laplace-Bessel diferansiyel operatörüyle ilişkili bir genelleşmiş kayma ve

$$c(n, \nu) = \left[(2\pi)^{n-1} 2^{2\nu-1} \Gamma^2\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \right]^{-1}. \quad (4.62)$$

Tez çalışmamızın bu bölümünde, diferansiyel operatörlerin kesirsel kuvvetleri dilinde formal ifadeleri

$$H_{\beta, \nu}^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial t} + (-\Delta_\nu)^{\beta/2} \right)^{-\alpha/\beta} \quad (4.63)$$

ve

$$\mathcal{H}_{\beta, \nu}^\alpha = \left(I + \frac{\partial}{\partial t} + (-\Delta_\nu)^{\beta/2} \right)^{-\alpha/\beta}, (\alpha, \beta > 0), \quad (4.64)$$

şeklinde olan ve açık integral gösterimleri ise

$$(H_{\beta, \nu}^\alpha f)(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}_+^n} \tau^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \omega_\nu^{(\beta)}(y, \tau) T^{y, \tau} f(x, t) y_n^{2\nu} dy d\tau \quad (4.65)$$

ve

$$(\mathcal{H}_{\beta, \nu}^\alpha f)(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}_+^n} \tau^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-\tau} \omega_\nu^{(\beta)}(y, \tau) T^{y, \tau} f(x, t) y_n^{2\nu} dy d\tau \quad (4.66)$$

şeklinde olan integral operatörleri ailelerini tanımlayacağız.

Burada, $\omega_\nu^{(\beta)}(y, \tau)$ çekirdek fonksiyonu $\exp(-\tau |y|^\beta)$ fonksiyonunun, $y \in \mathbb{R}_+^n$ -değişkenine bağlı ters Fourier-Bessel dönüşümüdür, yani

$$(\omega_\nu^{(\beta)}(., \tau))^\wedge(y) = e^{-\tau |y|^\beta}, (y \in \mathbb{R}_+^n, \tau > 0, \beta > 0). \quad (4.67)$$

$\beta = 2$ durumunda, (4.65) ve (4.66) integral operatörleri sırasıyla, (4.59) formülüyle tanımlanan singüler parabolik Riesz ve (4.60) formülüyle tanımlanan singüler parabolik Bessel potansiyelleri ile çakışır. Dolayısıyla, (4.65) ve (4.66) operatörleri (4.59) ve (4.60) operatörlerinin genelleşmesidir.

Biz bu alt bölümde,

$$L_{p,\nu} = \left\{ f : \|f\|_{p,\nu} \equiv \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, t)|^p x_n^{2\nu} dx dt \right)^{1/p} < \infty \right\}, (1 \leq p \leq \infty) \quad (4.68)$$

şeklinde tanımlanan ağırlıklı L_p -uzaylarında (4.65) ve (4.66) operatörlerinin bazı özelliklerini inceleyeceğiz.

Not 4.29. *Bulgular ve Tartışma bölümünün ilk alt bölümünde de söylediğimiz üzere, klasik parabolik potansiyeller, $(-\Delta + \frac{\partial}{\partial t})$ ve $(I - \Delta + \frac{\partial}{\partial t})$ klasik ısı geçirme operatörleri yardımıyla, ilk olarak, Sampson (1968) ve Jones (1968) tarafından tanımlanmıştır.*

Bu potansiyellerin çeşitli özellikleri ve anizotropik Sobolev-tipli uzaylarda davranışları, Gopala Rao (1977, 1978); Chanillo (1981); Bagby (1971); Sampson (1968); Nogin ve Rubin (1985, 1986, 1987) gibi bir çok matematikçi tarafından çalışılmıştır. Ayrıca, $(-\Delta_\nu + \frac{\partial}{\partial t})$ ve $(I - \Delta_\nu + \frac{\partial}{\partial t})$ singüler ısı operatörleri yardımıyla ifade edilen $H_\nu^\alpha f$ ve $\mathcal{H}_\nu^\alpha f$ singüler parabolik potansiyelleri Aliev (1992) tarafından tanımlanmış ve $L_{p,\nu}$ uzaylarında davranışları incelenmiştir. Singüler parabolik potansiyellerin uygun dalgacık dönüşümleri ile incelenmesi ise Aliev ve Rubin (2001) tarafından yapılmıştır.

Şimdi, bu alt bölümdeki esas sonuçlarımızı ifade edebilmek için önce bazı temel kavram ve gösterimleri verelim. Yazılımın kolaylığı için, bundan sonra $x_n^{2\nu} dx$ yerine $dm(x)$ gösterimini kullanacağız.

$g(x, t), ((x, t) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^1)$ fonksiyonunun Fourier-Bessel ve ters Fourier-Bessel dönüşümleri sırasıyla,

$$g^\wedge(y, \tau) = \int_{\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^1} g(x, t) e^{-i(x' \cdot y' + t\tau)} j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n y_n) dm(x) dt \quad (4.69)$$

ve

$$g^\vee(y, \tau) = c(n, \nu) g^\wedge(-y_1, \dots, -y_{n-1}, y_n, -\tau), \quad (4.70)$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $x' \cdot y' = x_1 y_1 + \dots + x_{n-1} y_{n-1}$; $dm(x) = x_n^{2\nu} dx \equiv x_n^{2\nu} dx_1 \dots dx_n$; $\nu > 0$ sabit bir parametere; $j_\lambda(0) = 1$, $j'_\lambda(0) = 0$ olmak üzere, $j_\lambda(z) = 2^\lambda \Gamma(\lambda + 1) z^{-\lambda} J_\lambda(z)$ normalleştirici Bessel fonksiyonu ve $c(n, \nu) = [(2\pi)^{n-1} 2^{2\nu-1} \Gamma^2(\nu + \frac{1}{2})]^{-1}$ normalleştirici katsayıdır. Aslında, burada ilk $(n-1)$ değişkene yani, $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ değişkenine ve t değişkenine klasik Fourier dönüşümü ve $x_n > 0$ değişkenine Bessel dönüşümü denilen dönüşüm uygulanmıştır.

$g : \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonuna uygulanmış genelleşmiş kayma operatörü,

$$T^{y,\tau} g(x, t) = \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{\Gamma(\nu) \Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\pi g(x' - y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos \theta + y_n^2}; t - \tau) \sin^{2\nu-1} \theta d\theta \quad (4.71)$$

şeklinde tanımlanır.

Aslında, x' değişkenine ve t değişkenine klasik Euclid kayması ve x_n -değişkenine Bessel kayması veya genelleşmiş kayma denilen operatör uygulanmıştır.

İki fonksiyonun genelleşmiş girişimi veya, Fourier-Bessel girişimi,

$$(h_1 \otimes h_2)(x, t) = \int_{\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^1} h_1(y, \tau) T^{y,\tau} h_2(x, t) dm(y) d\tau \quad (4.72)$$

şeklinde tanımlanır.

Klasik girişim işlemine Fourier dönüşümünün etkisine benzer olarak, genelleşmiş girişim işlemine Fourier-Bessel dönüşümünün etkisi

$$(h_1 \otimes h_2)^\wedge = h_1^\wedge \cdot h_2^\wedge$$

şeklindedir.

Ayrıca, klasik Young eşitsizliğinin benzeri olan

$$\|h_1 \otimes h_2\|_{q,\nu} \leq \|h_1\|_{s,\nu} \|h_2\|_{p,\nu}, \quad \left(1 \leq p, q, s \leq \infty, \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{s} - 1\right) \quad (4.73)$$

eşitsizliği sağlanır.

Fourier-Bessel dönüşümüyle ilişkilendirilen Gauss çekirdeği

$$\omega_\nu(y, \tau) = \sqrt{c(n, \nu)} (2\tau)^{-\frac{n+2\nu}{2}} \exp(-|y|^2 / 4\tau), \quad (y \in \mathbb{R}_+^n, \tau > 0) \quad (4.74)$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $c(n, \nu)$ (4.62)'deki gibi tanımlıdır (bkz. $n = 1$ için Stempak (1986) ve herhangi $n > 1$ için Aliev (1992); Aliev ve Rubin (2001)). Ayrıca, $\omega_\nu(y, \tau)$ çekirdek fonksiyonu $x \in \mathbb{R}_+^n$ -değişkenine bağlı $e^{-s|x|^2}$ fonksiyonunun ters Fourier-Bessel dönüşümüdür, yani her $\tau > 0$ için

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \omega_\nu(y, \tau) e^{-ix'y'} j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n y_n) dm(y) = e^{-\tau|x|^2} \quad (4.75)$$

eşitliği sağlanır.

$\omega_\nu(y, \tau)$ çekirdek fonksiyonunun bir genelleşmesi olan ve $\exp(-t|x|^\beta)$, $\beta > 0$ fonksiyonunun ters Fourier-Bessel dönüşümü olan çekirdek fonksiyonu,

$$\omega_\nu^{(\beta)}(y, \tau) = (\exp(-\tau|\cdot|^\beta))^\vee(y) \equiv c(n, \nu) \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-\tau|x|^\beta} e^{ix'y'} j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n y_n) dm(x) \quad (4.76)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Aşağıdaki Önermede $\omega_\nu^{(\beta)}(y, \tau)$ çekirdek fonksiyonunun bazı özelliklerini vereceğiz.

Önerme 4.30 (Aliev ve Sağlık 2016). $\beta > 0$, $\tau > 0$ ve $y \in \mathbb{R}_+^n$ olsun. O halde,

(a) $\omega_\nu^{(\beta)}(y, \tau)$ fonksiyonu $y \in \mathbb{R}_+^n$ değişkenine bağlı radyal bir fonksiyondur ve aşağıdaki anizotropik homojenlik özelliğini sağlar:

$$\omega_\nu^{(\beta)}(\lambda^{1/\beta} y, \lambda \tau) = \lambda^{-(n+2\nu)/\beta} \omega_\nu^{(\beta)}(y, \tau), \lambda > 0. \quad (4.77)$$

Özel halde, $\lambda = 1/\tau$ için

$$\tau^{-(n+2\nu)/\beta} \omega_\nu^{(\beta)}(\tau^{-1/\beta} y, 1) = \omega_\nu^{(\beta)}(y, \tau) \quad (4.78)$$

elde edilir.

(b) $0 < \beta \leq 2$ için $\omega_\nu^{(\beta)}(y, \tau)$ çekirdek fonksiyonu pozitifdir.

(c) $\beta = 2k$, ($k \in \mathbb{N}$) ise $\omega_\nu^{(\beta)}(y, \tau)$ çekirdek fonksiyonu $y \in \mathbb{R}_+^n$ değişkenine göre sonsuz diferansiyellenen olup, $|y| \rightarrow \infty$ için hızla sıfıra gider.

(d) Herhangi $\tau > 0$ için, $0 < \beta \leq 2$ veya $\beta = 2k$, ($k \in \mathbb{N}$) durumunda,

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \omega_\nu^{(\beta)}(y, \tau) dm(y) = 1 \quad (4.79)$$

sağlanır.

Not 4.31. (Gadjiev ve Aliev 1988; Aliev ve Bayrakci 1998) $\omega_\nu^{(\beta)}(y, \tau)$ çekirdek fonksiyonunun $\beta = 1$ ve $\beta = 2$ durumlarında açık ifadeleri bilinmektedir:

$$\omega_\nu^{(1)}(y, \tau) = \frac{2\Gamma((n+2\nu+1)/2)}{\pi^{n/2}\Gamma(\nu+1/2)} \frac{\tau}{(|y|^2 + \tau^2)^{(n+2\nu+1)/2}}; \quad (4.80)$$

$$\begin{aligned} \omega_\nu^{(2)}(y, \tau) &= \sqrt{c(n, \nu)} (2\tau)^{-(n+2\nu)/2} \exp(-|y|^2/4\tau) \\ &= \frac{2\pi^{\nu+1/2}}{\Gamma(\nu+1/2)} (4\pi\tau)^{-(n+2\nu)/2} e^{-|y|^2/4\tau}. \end{aligned} \quad (4.81)$$

(Yukarıdaki $\omega_\nu^{(1)}(y, \tau)$ ve $\omega_\nu^{(2)}(y, \tau)$ fonksiyonlarına, Δ_ν Laplace-Bessel diferansiyel operatörü ile ilişkilendirilen modifiye edilmiş Poisson ve Gauss çekirdekleri de denir).

Not 4.32. Bundan sonra, $-\infty < \tau \leq 0$ için, $\omega_\nu^{(\beta)}(y, \tau) = 0$ olarak tanımlayacağız, yani

$$\omega_\nu^{(\beta)}(y, \tau) = \begin{cases} (\exp(-\tau|\cdot|^\beta))^\vee(y), & \tau > 0 \text{ ise} \\ 0, & \tau \leq 0 \text{ ise} \end{cases},$$

$$\tau_+^{\frac{\alpha}{\beta}-1} = \begin{cases} \tau^{\frac{\alpha}{\beta}-1}, & \tau > 0 \text{ ise} \\ 0, & \tau \leq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

tanımlamasını yaparsak, (4.65) ve (4.66) formülleri genelleşmiş girişim yardımıyla sırasıyla,

$$(H_{\beta, \nu}^\alpha f)(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \int_{\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^1} \tau_+^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \omega_\nu^{(\beta)}(y, \tau) T^{y, \tau} f(x, t) dm(y) d\tau = (p_\alpha \circledast f)(x, t) \quad (4.82)$$

ve

$$(\mathcal{H}_{\beta, \nu}^\alpha f)(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \int_{\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^1} \tau_+^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-\tau} \omega_\nu^{(\beta)}(y, \tau) T^{y, \tau} f(x, t) dm(y) d\tau = (q_\alpha \circledast f)(x, t) \quad (4.83)$$

şeklinde yazılır. Burada, $dm(y) = y_n^{2\nu} dy = y_n^{2\nu} dy_1 \cdots dy_n$ olup, eşitliklerin sağ tarafındaki p_α ve q_α fonksiyonları aşağıdaki gibidir:

$$p_\alpha(y, \tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \tau_+^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \omega_\nu^{(\beta)}(y, \tau) \quad (4.84)$$

ve

$$q_\alpha(y, \tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \tau_+^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-\tau} \omega_\nu^{(\beta)}(y, \tau). \quad (4.85)$$

$f, \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^1$ 'de verilmiş ve x_n değişkenine göre çift fonksiyon olan bir Schwarz test fonksiyonu ise, (4.82) ve (4.83)'teki genelleşmiş girişime Fourier-Bessel dönüşümü uygulanarak,

$$(H_{\beta,\nu}^\alpha f)^\wedge = p_\alpha^\wedge \cdot f^\wedge \text{ ve } (\mathcal{H}_{\beta,\nu}^\alpha f)^\wedge = q_\alpha^\wedge \cdot f^\wedge$$

elde edilir.

Dahası,

$$\begin{aligned} p_\alpha^\wedge(x, t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \int_{-\infty}^{\infty} \tau_+^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-it\tau} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} \omega_\nu^{(\beta)}(y, \tau) e^{-ix' \cdot y'} j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n y_n) dm(y) \right) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \int_0^{\infty} \tau^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-it\tau} e^{-\tau|x|^\beta} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \int_0^{\infty} \tau^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-\tau(|x|^\beta + it)} d\tau \\ &= (|x|^\beta + it)^{-\alpha/\beta}. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Benzer şekilde,

$$q_\alpha^\wedge(x, t) = (1 + |x|^\beta + it)^{-\alpha/\beta} \quad (4.87)$$

olur. Şunu da vurgulamak gerekir ki, formal şekilde elde ettiğimiz (4.86) ve (4.87) formülleri, genelleşmiş fonksiyonlar (distributions) teorisi çerçevesinde yorumlanabilir. Ayrıca, (4.86) ve (4.87) eşitliklerine dayanarak, $H_{\beta,\nu}^\alpha f$ ve $\mathcal{H}_{\beta,\nu}^\alpha f$ integral operatörleri sırasıyla $((-\Delta_\nu)^{\beta/2} + \partial/\partial t)$ ve $(I + (-\Delta_\nu)^{\beta/2} + \partial/\partial t)$ diferansiyel operatörlerinin $(-\alpha/\beta)$ mertebeden kuvveti olarak yorumlanabilirler.

Not 4.33. Bundan sonra, β parametresini $0 < \beta \leq 2$ veya $\beta = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ varsayacağız.

Bu alt bölümün esas sonuçlarını iki teorem şeklinde aşağıda verelim.

Teorem 4.34 (Sekin 2021). $\mathcal{H}_{\beta,\nu}^\alpha$, $(\alpha, \beta, \nu > 0)$ operatörler ailesi (4.66)'daki gibi tanımlanmış olsun. O halde,

(a) Bu operatörler $L_{p,\nu} \rightarrow L_{p,\nu}$ sınırlıdır, yani bir $c_\beta > 0$ katsayısı ve her $f \in L_{p,\nu}$ için

$$\|\mathcal{H}_{\beta,\nu}^\alpha f\|_{p,\nu} \leq c_\beta \|f\|_{p,\nu}, \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

eşitsizliği sağlanır.

(b) $1 \leq p \leq q \leq \infty$ ve $\alpha > (\beta + n + 2\nu)(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$ ise, bir $c_\beta(p, q) > 0$ katsayısı ve her $f \in L_{p,\nu}$ için

$$\|\mathcal{H}_{\beta,\nu}^\alpha f\|_{q,\nu} \leq c_\beta(p, q) \|f\|_{p,\nu}$$

sağlanır.

$$(c) \alpha > (\beta + n + 2\nu) \frac{1}{p} \text{ ise,}$$

$$\operatorname{ess\,sup}_{(x,t) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^1} |(\mathcal{H}_{\beta,\nu}^\alpha f)(x,t)| \leq c_\beta(p) \|f\|_{p,\nu}$$

eşitsizliği sağlanır.

Şimdi vereceğimiz teorem, Laplace-Bessel diferansiyel operatörüyle ilişkilendirilen parabolik Riesz potansiyelleri için Hardy-Littlewood-Sobolev teoreminin bir genelleşmesidir.

Teorem 4.35 (Sekin 2021). $f \in L_{p,\nu}$, $1 < p < \infty$ ve $0 < \alpha < (\beta + n + 2\nu) \frac{1}{p}$ olsun. O halde,

(a) $(H_{\beta,\nu}^\alpha f)(x,t)$ integralleri hemen hemen her $(x,t) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^1$ için yakınsaktır.

(b) $1 \leq p < q < \infty$ ve $\alpha = (\beta + n + 2\nu) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)$ ise, $H_{\beta,\nu}^\alpha$ operatörleri zayıf (p,q) -tiplidir, yani $c > 0$ bir sabit olmak üzere, her $\lambda > 0$ ve her $f \in L_{p,\nu}$ için

$$m \left\{ (x,t) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^1 : |(H_{\beta,\nu}^\alpha f)(x,t)| > \lambda \right\} \leq \left(\frac{c \|f\|_{p,\nu}}{\lambda} \right)^q$$

eşitsizliği sağlanır. Burada, $E \subset \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^1$ ölçülebilir kümesinin ölçümü

$$m\{E\} = \int_E x_n^{2\nu} dx dt$$

şeklinde tanımlıdır.

(c) $1 < p < q < \infty$ için $H_{\beta,\nu}^\alpha$ operatörünün $L_{p,\nu}$ 'den $L_{q,\nu}$ 'ye sınırlı etki etmesi için gerekli ve yeterli koşul

$$\alpha = (\beta + n + 2\nu) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)$$

olmasıdır.

Not 4.36. Teorem 4.35'te $\beta = 2$ durumunun kanıtı, Aliev ve Rubin (2001) makalesinde yapılmıştır. Klasik (non-singular) parabolik-tipli potansiyeller için, Teorem 4.34 ve Teorem 4.35'in bir benzeri daha önce Aliev ve Sekin (2021) tarafından ifade edilerek ispatlanmış ve bu Tezin "Parabolik Riesz ve arabolik Bessel potansiyellerinin bir genelleşmesi ve Lebesgue uzaylarında davranışları" alt bölümünde Teorem 4.17 ve Teorem 4.18 olarak sunulmuştur.

Şimdi, Teorem 4.35'in ispatını verelim.

İspat (Teorem 4.34'ün ispatı) **(a)** (4.83) formülüne Minkowski eşitsizliği ve

$$\|T^{y,\tau} f\|_{p,\nu} \leq \|f\|_{p,\nu}, (\forall (y, \tau) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^1) \quad (4.88)$$

eşitsizliğini uygularsak,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{H}_{\beta,\nu}^\alpha f\|_{p,\nu} &\leq \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \int_{\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^1} \tau_+^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-\tau} |\omega_\nu^{(\beta)}(y, \tau)| dm(y) d\tau \right) \|f\|_{p,\nu} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \|f\|_{p,\nu} \int_0^\infty \tau_+^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-\tau} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |\omega_\nu^{(\beta)}(y, \tau)| dm(y) \right) d\tau \end{aligned}$$

elde ederiz.

$\omega_\nu^{(\beta)}(y, \tau)$ çekirdek fonksiyonunun (4.78)'de verilen anizotropik homojenlik özelliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^n} |\omega_\nu^{(\beta)}(y, \tau)| dm(y) &= \int_{\mathbb{R}_+^n} \tau^{-(n+2\nu)/\beta} |\omega_\nu^{(\beta)}(\tau^{-1/\beta} y, 1)| y_n^{2\nu} dy \\ &\dots (y = \tau^{1/\beta} z) \dots \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^n} |\omega_\nu^{(\beta)}(z, 1)| z_n^{2\nu} dz \equiv c_\beta < \infty \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak,

$$\|\mathcal{H}_{\beta,\nu}^\alpha f\|_{p,\nu} \leq c_\beta \|f\|_{p,\nu}$$

olur.

(Özel halde, $0 < \beta \leq 2$ ise, Önerme 4.30-(b)'ye göre $\omega_\nu^{(\beta)}(y, \tau)$ pozitif olur ve (4.79)'dan $c_\beta = 1$ elde edilir)

(b) (4.73)'te vermiş olduğumuz genelleşmiş Young eşitsizliğini kullanırsak, (4.83)'ten

$$\|\mathcal{H}_{\beta,\nu}^\alpha f\|_{q,\nu} \leq \|q\|_{s,\nu} \|f\|_{p,\nu}, \left(\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{s} - 1 \right)$$

elde ederiz. Burada, (4.85)'deki notasyona uygun olarak,

$$\begin{aligned} \|q_\alpha\|_{s,\nu} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} \int_0^\infty \left| \tau_+^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-\tau} \omega_\nu^{(\beta)}(y, \tau) \right|^s dm(y) d\tau \right)^{\frac{1}{s}} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \left(\int_0^\infty \tau^{s(\frac{\alpha}{\beta}-1)} e^{-\tau s} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |\omega_\nu^{(\beta)}(y, \tau)|^s y_n^{2\nu} dy \right) d\tau \right)^{1/s}. \end{aligned}$$

Şimdi, $\omega_\nu^{(\beta)}(y, \tau)$ çekirdek fonksiyonunun anizotropik homojenlik özelliğini ve kanıtın (a) kısmında kullanmış olduğumuz $y = \tau^{1/\beta} z$ değişken değiştirmesini uygulayarak,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^n} |\omega_\nu^{(\beta)}(y, \tau)|^s y_n^{2\nu} dy &= \int_{\mathbb{R}_+^n} \tau^{-s(n+2\nu)/\beta} |\omega_\nu^{(\beta)}(\tau^{-1/\beta} y, 1)|^s y_n^{2\nu} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^n} \tau^{-s(n+2\nu)/\beta} \tau^{\frac{n+2\nu}{\beta}} |\omega_\nu^{(\beta)}(z, 1)|^s z_n^{2\nu} dz \end{aligned}$$

elde ederiz.

Buradan,

$$\|q_\alpha\|_{s,\nu} = \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \left(\int_0^\infty \tau^{s(\frac{\alpha}{\beta}-1) - \frac{(n+2\nu)(s-1)}{\beta}} e^{-s\tau} d\tau \right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |\omega_\nu^{(\beta)}(z, 1)|^s z_n^{2\nu} dz \right)^{\frac{1}{s}}$$

olur. Son integralin sonlu (yakınsak) olması için gerekli ve yeterli koşul,

$$\begin{aligned} s \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 \right) - \frac{1}{\beta} (n+2\nu)(s-1) &> -1 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{\beta} (n+2\nu) \left(1 - \frac{1}{s} \right) > 1 - \frac{1}{s} \\ &\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} > \left(1 - \frac{1}{s} \right) \left(1 + \frac{n+2\nu}{\beta} \right) \\ &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \left(1 + \frac{n+2\nu}{\beta} \right) \\ &\Leftrightarrow \alpha > (\beta + n + 2\nu) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \end{aligned}$$

olmasıdır.

Böylece, teoremin (b) kısmı da kanıtlanmış olur. Teoremin (c) kısmının kanıtı ise (b)'nin kanıtında kullandığımız Young eşitsizliğinde $q = \infty$ koyarak elde edilir. $\square$

Şimdi de, $H_{\beta,\nu}^\alpha f$ operatörü için Hardy-Littlewood-Sobolev Teoreminin bir benzeri olan Teorem 4.35'ü kanıtlayalım.

İspat (Teorem 4.35'in ispatı) **(a)** $H_{\beta,\nu}^\alpha f$ operatörünü,

$$i_1(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \int_{\mathbb{R}_+^n} \int_0^1 \tau^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \omega_\nu^{(\beta)}(y, \tau) T^{y,\tau} f(x, t) dm(y) d\tau$$

ve

$$i_2(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \int_{\mathbb{R}_+^n} \int_1^\infty \tau^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \omega_\nu^{(\beta)}(y, \tau) T^{y,\tau} f(x, t) dm(y) d\tau$$

olmak üzere,

$$(H_{\beta,\nu}^\alpha f)(x, t) = i_1(x, t) + i_2(x, t)$$

şeklinde yazalım.

Minkowski eşitsizliğini ve $\omega_\nu^{(\beta)}$ çekirdek fonksiyonunun anizotropik homojenlik özelliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned}
\|i_1\|_{p,\nu} &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \int_{\mathbb{R}_+^n} \int_0^1 \tau^{\frac{\alpha}{\beta}-1} |\omega_\nu^{(\beta)}(y, \tau)| \|(T^{y,\tau} f)(\cdot, \cdot)\|_{p,\nu} dm(y) d\tau \\
&\stackrel{(4.88)}{\leq} \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \|f\|_{p,\nu} \int_{\mathbb{R}_+^n} \int_0^1 \tau^{\frac{\alpha}{\beta}-1} |\omega_\nu^{(\beta)}(y, \tau)| dm(y) d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \|f\|_{p,\nu} \int_{\mathbb{R}_+^n} |\omega_\nu^{(\beta)}(z, 1)| z_n^{2\nu} dz \cdot \int_0^1 \tau^{\frac{\alpha}{\beta}-1} d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta} + 1)} c_{\beta,\nu} \|f\|_{p,\nu} < \infty,
\end{aligned}$$

elde ederiz. Burada, $c_{\beta,\nu} = \int_{\mathbb{R}_+^n} |\omega_\nu^{(\beta)}(z, 1)| z_n^{2\nu} dz < \infty$.

Bu nedenle, $i_1(x, t)$ hemen hemen her $(x, t) \in \mathbb{R}_+^n \times (0, \infty)$ için sonludur.

Hölder eşitsizliğini uygularsak, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
|i_2(x, t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \|f\|_{p,\nu} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} \int_1^\infty \tau^{(\frac{\alpha}{\beta}-1)q} |\omega_\nu^{(\beta)}(y, \tau)|^q dm(y) d\tau \right)^{1/q} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \|f\|_{p,\nu} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} \int_1^\infty \tau^{(\frac{\alpha}{\beta}-1)q} \tau^{-q\frac{n+2\nu}{\beta}} |\omega_\nu^{(\beta)}(\tau^{-1/\beta}, 1)|^q dm(y) d\tau \right)^{1/q} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \|f\|_{p,\nu} \tilde{c}_{p,\nu} \left(\int_1^\infty \tau^{q(\frac{\alpha}{\beta}-1-\frac{n+2\nu}{\beta})+\frac{n+2\nu}{\beta}} d\tau \right)^{1/q} \quad (4.89)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Burada, $\tilde{c}_{p,\nu} = \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |\omega_\nu^{(\beta)}(y, 1)|^q y_n^{2\nu} dy \right)^{1/q} < \infty$.

(4.89)'daki son integralin yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul,

$$q \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 - \frac{n+2\nu}{\beta} \right) + \frac{n+2\nu}{\beta} < -1$$

olmasıdır ki bu da Teoremin koşulundaki $\alpha < (\beta + n + 2\nu)^{\frac{1}{p}}$ eşitsizliğinin sağlanmasına denktir.

Sonuç olarak, $(H_{\beta,\nu}^\alpha f)(x, t)$ integralleri hemen hemen her $(x, t) \in \mathbb{R}_+^n \times (0, \infty)$ için mutlak yakınsaktır.

(b) Şimdi, $1 < p < q < \infty$, $f \in L_{p,\nu}$ ve $\alpha = (\beta + n + 2\nu) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)$ olsun. Bu şartlar altında $H_{\beta,\nu}^\alpha f$ operatörünün $L_{p,\nu}$ 'den $L_{q,\nu}$ 'ye zayıf (p, q) -tipli olduğunu göstermeliyiz. "Parabolik Riesz ve Parabolik Bessel potansiyellerinin bir genelleşmesi ve Lebesgue

uzaylarında davranışları" alt bölümünde kanıtladığımız Teorem 4.18'de kullanılan tekniklere benzer teknikler kullanarak kanıtı yapacağız. (4.65)'te tanımlanmış $H_{\beta,\nu}^\alpha f$ operatörleri için, K_ν , K_ν^1 ve K_ν^∞ fonksiyonlarını, aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$K_\nu \equiv K_\nu(y, \tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \tau_+^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \omega_\nu^{(\beta)}(y, \tau), (y \in \mathbb{R}_+^n, \tau \in \mathbb{R}^1);$$

$$K_\nu^1 = \begin{cases} K_\nu, & \tau \leq \mu \\ 0, & \tau > \mu \end{cases} \text{ ve } K_\nu^\infty = \begin{cases} 0, & \tau < \mu \\ K_\nu, & \tau \geq \mu \end{cases},$$

yani, $K_\nu = K_\nu^1 + K_\nu^\infty$ yazılabilir (μ -parametresini sonra seçeceğiz).

Bundan sonra, $m\{E\}$ notasyonu ile $E \subset \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^1 \equiv \{(y, \tau) : y \in \mathbb{R}_+^n, \tau \in \mathbb{R}^1\}$ kümesinin ölçümünü göstereceğiz:

$$m\{E\} = \int_E y_n^{2\nu} dy d\tau.$$

Şimdi, $\lambda > 0$ herhangi sayı olsun. O halde,

$$\begin{aligned} m_0(\lambda) &\equiv m\{|K_\nu \otimes f| > 2\lambda\} \equiv m\{(y, \tau) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^1 : |(K_\nu \otimes f)(y, \tau)| > 2\lambda\} \\ &\leq m\{|K_\nu^1 \otimes f| > \lambda\} + m\{|K_\nu^\infty \otimes f| > \lambda\} \equiv m_1(\lambda) + m_\infty(\lambda) \end{aligned} \quad (4.90)$$

olur. Chebyshev eşitsizliği ve (4.73)'teki Young eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} m_1(\lambda) &\equiv m\{|K_\nu^1 \otimes f| > \lambda\} = m\{|K_\nu^1 \otimes f|^p > \lambda^p\} \\ &\leq \lambda^{-p} \|K_\nu^1 \otimes f\|_{p,\nu}^p \leq \lambda^{-p} \|K_\nu^1\|_{1,\nu}^p \|f\|_{p,\nu}^p \end{aligned} \quad (4.91)$$

sağlanır.

$\|K_\nu^1\|_{1,\nu}$ normunu hesaplayalım. $\omega_\nu^{(\beta)}$ çekirdek fonksiyonunun (4.78)'de verilen anizotropik homojenlik özelliği kullanılırsa ve $y = \tau^{\frac{1}{\beta}} z$, ($z \in \mathbb{R}_+^n$) değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\begin{aligned} \|K_\nu^1\|_{1,\nu} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \int_{\mathbb{R}_+^n} \int_0^\mu \tau^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \tau^{-(n+2\nu)/\beta} |\omega_\nu^{(\beta)}(\tau^{-1/\beta}, 1)| y_n^{2\nu} dy d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |\omega_\nu^{(\beta)}(z, 1)| z_n^{2\nu} dz \right) \int_0^\mu \tau^{\frac{\alpha}{\beta}-1} d\tau = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta} + 1\right)} \mu^{\frac{\alpha}{\beta}} c_\beta, \end{aligned}$$

olur. Burada,

$$c_\beta = \int_{\mathbb{R}_+^n} |\omega_\nu^{(\beta)}(z, 1)| z_n^{2\nu} dz < \infty. \quad (4.92)$$

(4.91) ve (4.92)'den,

$$m_1(\lambda) \leq A\lambda^{-p}\mu^{\frac{\alpha}{\beta}p} \quad (4.93)$$

elde ederiz. Burada,

$$A = \left(\frac{c_\beta}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta} + 1\right)} \|f\|_{p,\nu} \right)^p.$$

Şimdi de (4.90)'daki $m_\infty(\lambda)$ ile ilgilenelim. Hölder eşitsizliğini uygularsak, $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$ için

$$\|K_\nu^\infty \otimes f\|_\infty \equiv \text{ess sup } |K_\nu^\infty \otimes f|(y, \tau) \leq \|K_\nu^\infty\|_{p',\nu} \|f\|_{p,\nu} \quad (4.94)$$

olur.

Burada, $\omega_\nu^{(\beta)}$ çekirdek fonksiyonunun anizotropik homojenlik özelliği kullanılırsa ve (4.91)'deki gibi $y = \tau^{\frac{1}{\beta}}z$, ($z \in \mathbb{R}_+^n$) değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\begin{aligned} \|K_\nu^\infty\|_{p',\nu} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} \int_\mu^\infty \left(\tau^{\frac{\alpha}{\beta}-1} |\omega_\nu^{(\beta)}(y, \tau)| \right)^{p'} y_n^{2\nu} dy d\tau \right)^{1/p'} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \left(\int_\mu^\infty \tau^{\left(\frac{\alpha}{\beta}-1-\frac{n+2\nu}{\beta}\right)p' + \frac{n+2\nu}{\beta}} d\tau \right)^{1/p'} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |\omega_\nu^{(\beta)}(z, 1)|^{p'} z_n^{2\nu} dz \right)^{1/p'} \end{aligned}$$

olur. Teoremin koşuluna göre, $\alpha = (\beta + n + 2\nu) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)$ ve $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 - \frac{n+2\nu}{\beta} \right) p' + \frac{n+2\nu}{\beta} + 1 &= \frac{1}{\beta} [(\alpha - \beta - n - 2\nu)p' + \beta + n + 2\nu] \\ &= \frac{1}{\beta} [\alpha p' - (\beta + n + 2\nu)(p' - 1)] \\ &= \frac{p' - 1}{\beta} [\alpha\beta - (\beta + n + 2\nu)] \\ &= -\frac{p' - 1}{\beta} \frac{p}{q} (\beta + n + 2\nu) \\ &= -\frac{p'}{\beta q} (\beta + n + 2\nu) \end{aligned}$$

olur. O halde,

$$\left(\int_\mu^\infty \tau^{\left(\frac{\alpha}{\beta}-1-\frac{n+2\nu}{\beta}\right)p' + \frac{n+2\nu}{\beta}} d\tau \right)^{1/p'} = \left(\frac{\beta q}{(\beta + n + 2\nu)p'} \right)^{1/p'} \mu^{-\frac{\beta+n+2\nu}{\beta q}},$$

ve böylece,

$$\|K_\nu^\infty\|_{p',\nu} \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \left(\frac{\beta q}{(\beta + n + 2\nu)p'} \right)^{1/p'} \|\omega_\nu^{(\beta)}(\cdot, 1)\|_{p',\nu} \mu^{-\frac{\beta+n+2\nu}{\beta q}}$$

eşitsizliği sağlanır. (4.94) eşitsizliği dikkate alınırsa,

$$\|K_\nu^\infty \otimes f\|_\infty \leq B\mu^{-\frac{\beta+n+2\nu}{\beta q}}, \quad (4.95)$$

yazılabilir. Burada,

$$B = \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \left(\frac{\beta q}{(\beta + n + 2\nu)p'} \right)^{1/p'} \|\omega_\nu^{(\beta)}(\cdot, 1)\|_{p', \nu} \|f\|_{p, \nu}$$

olarak tanımlanmıştır. Şimdi, μ -patametrelerini seçelim:

$$B\mu^{-\frac{\beta+n+2\nu}{\beta q}} = \lambda, \text{ yani } \mu = \left(\frac{\lambda}{B} \right)^{-\frac{\beta q}{\beta+n+2\nu}} \quad (4.96)$$

olsun. O halde, (4.95)'ten,

$$\|K_\nu^\infty \otimes f\|_\infty \leq \lambda$$

elde ederiz ve dolayısıyla, $m_\infty(\lambda) = m\{|K_\nu^\infty \otimes f| > \lambda\} = 0$ olur.

Tüm bunları dikkate alırsak, (4.90)'dan,

$$\begin{aligned} m_0(\lambda) &\leq m_1(\lambda) \stackrel{(4.93)}{\leq} A\lambda^{-p} \mu^{\frac{\alpha}{\beta} p} \stackrel{(4.96)}{=} A\lambda^{-p} \left(\frac{\lambda}{B} \right)^{-\frac{\beta q}{\beta+n+2\nu} \frac{\alpha}{\beta} p} \\ &= AB^{\frac{\alpha pq}{\beta+n+2\nu}} \lambda^{-p - \frac{\alpha pq}{\beta+n+2\nu}} \end{aligned} \quad (4.97)$$

olur. $\alpha = (\beta + n + 2\nu) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)$ kullanılırsa,

$$-p - \frac{\alpha pq}{\beta + n + 2\nu} = -p - pq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) = -q$$

olur. A ve B 'nin yukarıda verdiğimiz ifadeleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} AB^{\frac{\alpha pq}{\beta+n+2\nu}} &= \left(\frac{c_\beta}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta} + 1\right)} \|f\|_{p, \nu} \right)^p \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \frac{\beta q}{(\beta + n + 2\nu)p'} \|\omega_\nu^{(\beta)}(\cdot, 1)\|_{p', \nu} \|f\|_{p, \nu} \right)^{q-p} \\ &= c \|f\|_{p, \nu}^q, \end{aligned}$$

elde edilir ki, buradaki c sabiti, f fonksiyonuna bağlı değildir.

Sonuç olarak,

$$m_0(\lambda) \equiv m\{|K_\nu \otimes f| > 2\lambda\} \leq c \left(\frac{\|f\|_{p, \nu}}{\lambda} \right)^q,$$

olur ve bu nedenle, $H_{\beta, \nu}^\alpha f$ operatörü zayıf (p, q) -tiplidir. $p = 1$ durumunda, Hölder eşitsizliğinde $p' = \infty$ yazılarak benzer yol izlenir. Böylece, teoremin (b) kısmı kanıtlanmış olur.

(c) Marcinkiewicz interpolasyon teoreminden, $1 < p < q < \infty$ ve $\alpha = (\beta + n + 2\nu) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)$ için $H_{\beta,\nu}^\alpha f$ operatörünün güçlü (p, q) -tipli olduğu elde edilir. Dolayısıyla, Teoremin (c)'deki önermesinin "yeterlilik kısmı" kanıtlanmış olur. Teoremden verilen (c) önermesinin "gereklilik kısmı"nın ispatı, $\omega_\nu^{(\beta)}(y, \tau)$ çekirdek fonksiyonunun anizotropik homojenlik özelliği kullanılarak yapılır. Söz konusu ispatı verelim.

$\alpha > 0$, $1 < p < q < \infty$ olsun. Ayrıca, bir $c > 0$ sabiti ve her $f \in L_{p,\nu}$ için

$$\|H_{\beta,\nu}^\alpha f\|_{q,\nu} \leq c \|f\|_{p,\nu} \quad (4.98)$$

eşitsizliği sağlansın. O halde, aynı eşitsizlik, yani

$$\|H_{\beta,\nu}^\alpha g\|_{q,\nu} \leq c \|g\|_{p,\nu} \quad (4.99)$$

eşitsizliği her $\lambda > 0$ için $g(y, \tau) = f(\lambda y, \lambda^\beta \tau)$ fonksiyonu için de sağlanmalıdır.

Dahası,

$$\|H_{\beta,\nu}^\alpha g\|_{q,\nu} = \left(\int_{\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^1} \left| \int_{\mathbb{R}_+^n} \int_0^\infty \tau^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \omega_\nu^{(\beta)}(y, \tau) T^{\lambda y, \lambda^\beta \tau} f(\lambda x, \lambda^\beta t) y_n^{2\nu} dy d\tau \right|^q x_n^{2\nu} dx dt \right)^{1/q}$$

integralinde, $y \mapsto \lambda^{-1}y$, $\tau \mapsto \lambda^{-\beta}\tau$, $x \mapsto \lambda^{-1}x$, $t \mapsto \lambda^{-\beta}t$ değişken değiştirmeleri yapılırsa ve $\omega_\nu^{(\beta)}(\lambda^{-1}y, \lambda^{-\beta}\tau) = \lambda^{n+2\nu} \omega_\nu^{(\beta)}(y, \tau)$ anizotropik homojenlik özelliği kullanılırsa,

$$\|H_{\beta,\nu}^\alpha g\|_{q,\nu} = \lambda^{-\alpha - \frac{\beta+n+2\nu}{q}} \|H_{\beta,\nu}^\alpha f\|_{q,\nu} \quad (4.100)$$

elde ederiz.

Diğer taraftan,

$$\|g\|_{p,\nu} = \left(\int_{\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^1} |f(\lambda y, \lambda^\beta \tau)|^p y_n^{2\nu} dy d\tau \right)^{1/p} = \lambda^{-\frac{\beta+n+2\nu}{p}} \|f\|_{p,\nu} \quad (4.101)$$

$\lambda > 0$ keyfi seçildiğinden, (4.98), (4.99), (4.100) ve (4.101)'den

$$-\alpha - \frac{\beta + n + 2\nu}{q} = -\frac{\beta + n + 2\nu}{p},$$

yani,

$$\alpha = (\beta + n + 2\nu) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)$$

olması çıkar. Sonuç olarak, (c) önermesinin "gereklilik kısmı" da kanıtlanmış olur. $\square$

Böylelikle teoremin ispatı tamamlanmış olur.

5. SONUÇLAR

Klasik Harmonik Analizin temel diferansiyel operatörlerinden biri olan $\Delta = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ Laplace operatörü yardımıyla oluşturulan $(-\Delta + \frac{\partial}{\partial t})$ ve $(I - \Delta + \frac{\partial}{\partial t})$ diferansiyel operatörlerinin negatif "kesirsel" kuvvetleri, matematik literatüründe parabolik Riesz ve parabolik Bessel potansiyelleri olarak adlandırılmaktadırlar. Bu potansiyel operatörleri H^α ve $\mathcal{H}^\alpha$, ($\alpha > 0$) ile gösterirsek, onların formal ifadeleri şu şekildedir: $f \in S(\mathbb{R}^{n+1})$ olmak üzere,

$$H^\alpha f = \left(-\Delta + \frac{\partial}{\partial t}\right)^{-\alpha/2} f \text{ ve } \mathcal{H}^\alpha f = \left(I - \Delta + \frac{\partial}{\partial t}\right)^{-\alpha/2} f.$$

Bu tez çalışmasında, yukarıdaki parabolik Riesz ve parabolik Bessel potansiyellerinin ve bu potansiyellerin singüler versiyonlarının önemli genelleşmeleri tanımlanarak, onların Lebesgue uzaylarında davranışları incelenmiş ve bu potansiyel operatörlerle ilintili olan özel anizotropik dalgacık tipli dönüşümler tanımlanarak onlar için ters çevirme formülleri bulunmuştur. Tezde elde edilmiş sonuçları özetlersek,

1. Formal tanımları yukarıdaki iki formülle verilen klasik $H^\alpha f$ ve $\mathcal{H}^\alpha f$ parabolik potansiyellerinin, $\beta > 0$ herhangi parametre olmak üzere,

$$H_\beta^\alpha f = \left((-\Delta)^{\beta/2} + \frac{\partial}{\partial t}\right)^{-\alpha/\beta} f \text{ ve } \mathcal{H}_\beta^\alpha f = \left(I + (-\Delta)^{\beta/2} + \frac{\partial}{\partial t}\right)^{-\alpha/\beta} f$$

şeklinde genelleşmeleri tanımlanmış, onların integral operatörler şeklinde açık ifadeleri verilerek, bu operatörlerin $L_p(\mathbb{R}^{n+1})$ uzaylarında sınırlılık özellikleri incelenmiştir. Özellikle, H_β^α operatörü için ifade edilen ve ispatlanan Hardy-Littlewood-Sobolev tipli teorem, bu alanda önem arz etmektedir. Buradaki $\beta > 0$ parametresinin özel seçimleriyle, özel parabolik tipli potansiyeller elde edilebilir. Örneğin, $\beta = 2$ durumunda klasik parabolik Riesz ve klasik parabolik Bessel potansiyelleri $H^\alpha f$ ve $\mathcal{H}^\alpha f$ ve onlarla ilgili bilinen klasik sonuçlar elde edilir.

2. Tez çalışmasının diğer esas sonucu, H_β^α ve $\mathcal{H}_\beta^\alpha$ parabolik tipli potansiyellerle ilintili olan özel anizotropik dalgacık tipli dönüşümler tanımlayarak, onlar için ters çevirme formülleri bulmakla ilgilidir. Biraz daha açık ifade edilirse, μ ölçümü, dayanağı $[0, \infty)$ aralığında olup, $\mu\{[0, \infty)\} = 0$ özelliğine sahip sonlu Borel ölçümü ve $\omega^{(\beta)}(\xi, \tau)$, ($\xi \in \mathbb{R}^n, \tau > 0$) çekirdek fonksiyonu da, $\exp(-\tau |\xi|^\beta)$ fonksiyonunun ters Fourier dönüşümü

olmak üzere,

$$W_{\mu}^{(\beta)} f(x, t, \eta) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{\infty} f(x - \eta^{1/\beta} y, t - \eta \tau) \omega^{(\beta)}(y, \tau) d\mu(\tau) dy$$

ve

$$\widetilde{W}_{\mu}^{(\beta)} f(x, t, \eta) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{\infty} e^{-\eta \tau} f(x - \eta^{1/\beta} y, t - \eta \tau) \omega^{(\beta)}(y, \tau) d\mu(\tau) dy,$$

şeklinde anizotropik dalgacık tipli dönüşümler tanımlanmış ve bunlar için $L_p(\mathbb{R}^{n+1})$ uzaylarında Calderon-tipli ters çevirme formülleri elde edilmiştir. Hatırlatalım ki, bu dönüşümler ve onlar için elde edilen ters çevirme formülleri, $\beta = 2$ durumunda Aliev ve Rubin (2002) tarafından incelenmiştir.

3. Tez çalışmasının bir önemli sonucu, H_{β}^{α} ve $\mathcal{H}_{\beta}^{\alpha}$ parabolik tipli potansiyelleri ile, $W_{\mu}^{(\beta)}$ ve $\widetilde{W}_{\mu}^{(\beta)}$ anizotropik dalgacık tipli dönüşümleri ilişkilendiren, daha doğrusu, H_{β}^{α} 'yı $W_{\mu}^{(\beta)}$ ile ve $\mathcal{H}_{\beta}^{\alpha}$ 'yı da $\widetilde{W}_{\mu}^{(\beta)}$ ile ifade eden bir boyutlu integral gösterimlerin elde edilmesi ile ilgilidir.

4. Tez çalışmasının bir diğer esas sonucu da, Fourier-Bessel Harmonik Analizi ile ilgili olup, $\Delta_{\nu} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{2\nu}{x_n}$, ($\nu > 0$; $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$) Laplace-Bessel diferansiyel operatörü olmak üzere, formal ifadeleri,

$$H_{\beta, \nu}^{\alpha} f = \left((-\Delta_{\nu})^{\beta/2} + \frac{\partial}{\partial t} \right)^{-\alpha/\beta} f \text{ ve } \mathcal{H}_{\beta, \nu}^{\alpha} f = \left(I + (-\Delta_{\nu})^{\beta/2} + \frac{\partial}{\partial t} \right)^{-\alpha/\beta} f$$

şeklinde olan ve genelleşmiş singüler parabolik-tipli potansiyeller diye adlandırdığımız integral operatörlerin $L_{p, \nu}(\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^1)$ uzayından $L_{q, \nu}(\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^1)$ uzayına zayıf ve güçlü etki etmesi için koşullar bulmakla ilgilidir. Hatırlatalım ki, özel halde $\beta = 2$ yazılırsa, Aliev ve Rubin (2001) makalesindeki sonuçlar elde edilir.

Tez çalışmasında elde edilen teorik sonuçların, Fourier ve Fourier-Bessel Harmonik Analizi, Fonksiyonel uzaylar, integral dönüşümler, potansiyel tipli operatörler, dalgacık (wavelet) tipli dönüşümler ve benzeri alanlarda çalışan araştırmacıların ilgisini çekecek nitelikte, faydalı bir kaynak olacağı düşüncesindeyiz. Ayrıca, $\beta = 2$ durumunda Aliev ve Rubin (2001, 2002) makalelerinde olduğu gibi, $W_{\mu}^{(\beta)}$ ve $\widetilde{W}_{\mu}^{(\beta)}$ dalgacık dönüşümlerini kullanarak, $H_{\beta}^{\alpha} f$ ve $\mathcal{H}_{\beta}^{\alpha} f$ parabolik tipli potansiyeller için ters çevirme formüllerinin bulunabileceği kanısındayız ve gelecekteki çalışmalarımızda bunu gerçekleştirmeyi düşünüyoruz.

6. KAYNAKLAR

- Aliev, I.A. 1992. The properties and inversions of B-parabolic potentials, in: Special problems of Mathematics and Mechanics, "Bilik", Baku, 56-75 (in Russian).
- Aliev, I.A. 2009. Bi-parametric potentials, relevant function spaces and wavelet-like transforms. *Integral Equ. Oper. Theory*, 65, 151-167.
- Aliev, I.A. and Bayrakci, S. 1998. On inversion of B-elliptic potentials by the method of Balakrishman-Rubin, *Fract. l Calc. Appl. Anal.*, 1(4): 365-384.
- Aliev, I.A. and Rubin, B. 2001. Parabolic potentials and wavelet transforms with the generalized translation, *Stud. Math.*, (145): 1-16.
- Aliev, I.A. and Rubin, B. 2002. Parabolic wavelet transforms and Lebesgue spaces of parabolic potentials, *Rocky Mt. J. Math.*, 32(2): 391-408.
- Aliev, I.A. and Rubin, B. 2005. Wavelet-like transforms for admissible semi-groups; Inversion formulas for potentials and Radon transforms. *J. Fourier Anal. Appl.*, 11(3), 333-352.
- Aliev, I.A., Rubin, B., Sezer, S., Uyhan, S.B. 2008. Composite wavelet transforms: Applications and perspectives, *Contemp. Math.*, AMS, (464): 1-25.
- Aliev, I.A. and Sağlık, E. 2016. Generalized Riesz potentials spaces and their characterization via wavelet-type transforms, *Filomat*, 30(10): 2809-2823.
- Aliev, I.A. and Sekin, C. 2020. A generalization of parabolic Riesz and parabolic Bessel potentials, *Rocky Mt. J. Math.*, 50(3): 815-824.
- Aliev, I.A. and Sekin, C. 2021. Parabolic-Like Wavelet Transforms and Relevant Reproducing Formulas *J. of Fourier Analysis and Applications*, 27(3): 1-19.
- Aliev, I.A., Sezer, S., Eryiğit, M. 2006. An integral transform associated to the Poisson integral and inversion of Flett potentials. *J. Math. Anal. Appl.*, 321, 691-704.
- Arena, O. 1975. On a singular parabolic equation related to auxially symmetric heat potentials, *Ann. Mat. Pura. Appl.*, 105: 347-393.

- Bagby, R. 1971. Lebesgue spaces of parabolic potentials, *Illinois Journal of Mathematics*, 15(4): 610-634.
- Calderon, A.P. 1964. Intermediate spaces and interpolation, the complex method. *Stud. Math.*, 24, 113-190.
- Chanillo, S. 1981. Hypersingular integrals and parabolic potentials, *Transactions of the American Mathematical Society*, (267): 531-547.
- Choung, N.M. and Tri, T.N. 2000. The integral wavelet transform in $L_p(\mathbb{R}^n)$; $1 \leq p \leq \infty$. *Frac. Cal. Appl. Anal.*, Vol. 3, Num. 2, 133-140.
- Choung, N.M. and Tri, T.N. 2002. The integral wavelet transform in weighted Sobolev spaces. *Abstr. Appl. Anal.*, Vol. 7, Num. 3, 135-142.
- Chui, Ch.K. 1992. An introduction to wavelets. Academic Press, New York.
- Daubechies, I. 1992. Ten lectures on wavelets. SIAM Publ., Philadelphia.
- Flett, T.M. 1971. Temperatures, Bessel potentials and Lipschitz spaces, *Proc. London Math. Soc.* 22(3), 385-451.
- Folland, G.B. 1984. Real Analysis, Modern techniques and their applications. John Wiley and Sons, New York, 350.
- Frazier, M., Jawerth, B., Weiss, G. 1991. Littlewood-Paley theory and the study of function spaces. American Math. Soc., Providence, R. I.
- Gadjiev, A.D. and Aliev, I.A. 1998. Riesz and Bessel potentials generated by a generalized translation and their inverses, In: Proc. IV All-Union Winter Conference, Theory of functions and approximation, Saratov Russia; 47-53.
- Gopala, V.R. 1977. A characterization of parabolic function spaces, *American Journal of Mathematics*, (99): 985-993.
- Gopala, V.R. 1978. Parabolic function spaces with mixed norm, *Transactions of the American Mathematical Society*, (246): 451-461.

- Holschneider, M. 1995. Wavelets: An analysis tool. Calderon Press, Oxford.
- Jones, B.F. 1968. Lipschitz spaces and heat equation, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, (18): 379-410.
- Kahane, J.P. and Lemarié-Rieusset, P.G. 1995 Fourier series and wavelets. Gordon and Breach Publishers.
- Kipriyanov, I.A. 1997. Singular Elliptic Boundary Value Problems, Nauka, Fizmatlit, Moskow, Russian.
- Meyer, Y. 1992. Wavelets and operators. Cambridge University Press.
- Nogin, V.A. and Rubin, B.S. 1985. Inversion and description of parabolic potentials with L_p -densities, *Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, (284): 535-538.
- Nogin, V.A. and Rubin, B.S. 1986. Inversion of parabolic potentials with L_p -densities, *Matematicheskie Zametki*, (38): 831-840.
- Nogin, V.A. and Rubin, B.S. 1987. The spaces $L_{p,r}^\alpha(\mathbb{R}^{n+1})$ of parabolic potentials, *Analysis Mathematica*, (13): 321-338, in Russian.
- Rubin, B. 1996. Fractional integrals and potentials. Addison Wesley Longman, Essex, U. K.
- Rubin, B. 1998. The Calderon reproducing formula. windowed X-ray transforms and Radon transforms in L^p -spaces, *J. Fourier Anal. Appl.*, 4, 175-197.
- Rubin, B. 1998. Fractional calculus and wavelet transforms in integral geometry. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 1, 193-219.
- Rubin, B. 1999. Fractional integrals and wavelet transforms associated with Blaschke-Levy representations on the sphere. *Israel J. Math.* 114, 1-27.
- Rubin, B. 2000. Calderon-type reproducing formula. Encyclopedia of Mathematics, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, Supplement II, 104-105; reprinted in *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 3, 103-106.

- Sadosky, C. 1979. Interpolation of operators and singular integrals. Marcel Dekker, Inc. New York, 375.
- Samko, S.G, Kilbas, A.A, Marichev, O.I. 1993. Fractional integrals and derivatives: Theory and applications, Cordon and Breach, Science Publications London-New York.
- Samko, S.G. 2000. Fractional powers of operators via hypersingular integrals, Progress in Nonlinear differential equations and their applications, *Birhhauser Verlag Basel/Switzerland*, (42): 259-273.
- Samko, S.G. 2002. Hypersingular Integrals and their applicaitons, Taylor&Francis, London and New York.
- Sampson, C.H. 1968. A characterization of parabolic Lebesgue spaces, Ph. D. dissertation, Rice University.
- Sekin, C. 2021. A generalization of parabolic potentials associated to Laplace–Bessel differential operator and its behavior in the weighted Lebesgue spaces *Turkish J. Math.*, 45(1): 566-578.
- Sezer, S. 2005. Genelleşmiş kayma operatörünün doğurduğu parabolik potansiyeller uzayı, Doktora Tezi, Akdeniz Üniversitesi, Antalya.
- Sezer, S. and Aliev, I.A. 2005. On space of parabolic potentials associated with the singular heat operator, *Turkish J. Math.*, (29): 299-319.
- Stein, E.M. 1970. Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton University Press, Princeton, NJ.
- Stein, E.M. and Weiss, G. 1971. Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces. Princeton University Press, Princeton, NJ.
- Stempak, K. 1986. La theorie de Littlewood-Paley pour la transformation de Fourier-Bessel, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences Paris*, series I, (303): 15-18.

Uyhan, S., Gadjiev, A.D, Aliev, I.A. 2006. On approximation properties of the parabolic potentials, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 74(3): 449-460.

Weisz, F. 2013. Inversion Formulas for the continuous wavelet transforms. *Acta Math. Hungar*, 138(3), 237-258.



ÖZGEÇMİŞ

Çağla SEKİN

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Doktora:	Akdeniz Üniversitesi
2018-2023	Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik ABD, Antalya
Yüksek Lisans:	Akdeniz Üniversitesi
2015-2018	Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik ABD, Antalya
Lisans:	Akdeniz Üniversitesi
2011-2015	Fen Fakültesi Matematik Bölümü

MESLEKİ VE İDARİ GÖREVLER

Araştırma Görevlisi:	Akdeniz Üniversitesi
2017-Devam Ediyor	Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya

ESERLER

1. Aliev, I.A. and Sekin, C. 2020. A generalization of parabolic Riesz and parabolic Bessel potentials. *Rocky Mountain J. of Mathematics*, 50(3): 815-824.
2. Aliev, I.A. and Sekin, C. 2021. Parabolic-Like Wavelet Transforms and Relevant Reproducing Formulas. *J. of Fourier Analysis and Applications*, 27(3): 1-19.
3. Sekin, C. 2021. A generalization of parabolic potentials associated to Laplace–Bessel differential operator and its behavior in the weighted Lebesgue spaces. *Turkish J. of Mathematics*, 45(1): 566-578.
4. Sekin, C., Aliev, I.A., Guloglu, M. 2021. On the approximation properties of bi-parametric potential-type integral operators. *Hacettepe J. of Mathematics and Statistics*, 50(6): 1681-1691.

5. Sekin, C., Tamar, M.E., Aliev I.A. 2023. New proofs of Fejer's and discrete Hermite-Hadamard inequalities with applications. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 72(4): 1110-1125.
6. Aliev, I.A. and Sekin, C. 2022. $\sqrt[p]{a}$ sayısına yakınsayan yinelemeli diziler. *Matematik Dünyası*, 114: 90-91.
7. Sekin, C. and Aliev, I.A. 2019. A generalization of parabolic potentials associated to Laplace-Bessel differential operator. International Conference on Mathematics and Mathematics Education-(ICMME 2019), Konya, Turkey, 89-91.
8. Sekin, C. and Aliev, I.A. 2019. A Generalization of parabolic Riesz and parabolic Bessel potentials. 6-th Ifs and Contemporary Mathematics Conference-(IFSCOM 2019), Mersin, Turkey, 1-2.
9. Sekin, C. and Aliev, I.A. 2019. On approximation properties of bi-parametric potential-type integral operators. 4-th International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences-(CMES 2019), Antalya, Türkiye, 169.
10. Sekin, C. and Aliev, I.A. 2022. Wavelet-type transforms associated to the generalized parabolic potentials and relevant reproducing formulas. 7-th International Zeugma Conference on Scientific Research-(ZEUGMA 2022), Gaziantep, Turkey,