



**T.C.
AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GENELLEŞTİRİLEN KENMOTSU MANİFOLDLARIN
PSEUDO SLANT ALTMANİFOLDLARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ERKAN BAYHAN

HAZİRAN

ERKAN BAYHAN	MATEMATİK ANABİLİM DALI	HAZİRAN 2025
--------------	-------------------------	--------------

**GENELLEŞTİRİLEN KENMOTSU MANİFOLDLARIN
PSEUDO SLANT ALTMANİFOLDLARI**

Erkan BAYHAN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**Danışman
Doç. Dr. Ramazan SARI**

**AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

HAZİRAN 2025

Yüksek Lisans Tezi Kabul ve Onay Sayfası

Erkan BAYHAN tarafından hazırlanan “Genelleştirilen Kenmotsu Manifoldların Pseudo Slant Altmanifoldları” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Ramazan SARI

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Başkan: Prof. Dr. Süleyman DİRİK

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye: Doç. Dr. İnan ÜNAL

Maliye Programı, Munzur Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Tez Savunma Tarihi: 20/06/2025

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
 - Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
 - Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
 - Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
 - Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,
- bildirir, aksi durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Erkan Bayhan

20/06/2025

GENELLEŞTİRİLEN KENMOTSU MANİFOLDLARIN
PSEUDO SLANT ALTMANİFOLDLARI
(Yüksek Lisans Tezi)

Erkan BAYHAN

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Haziran 2025

ÖZET

Bu tezde, genelleştirilen Kenmotsu manifoldlarda tanımlı pseudo slant altmanifoldlar incelenmiştir. İlgili alt manifoldların distribüsyonların integrallenebilirliği ve indirgenen tensörlerin paralellığı altındaki karakterizasyonları elde edilmiştir. Teorik sonuçlar örneklerle desteklenmiş, elde edilen bulgularla pseudo slant geometriye katkı sağlanmıştır.

Sayfa Adedi	: 47
Anahtar Kelimeler	: Genelleştirilen kenmotsu manifold, Slant altmanifold, Pseudo slant altmanifold.
Danışman	: Doç. Dr. Ramazan SARI

PSEUDO SLANT SUBMANIFOLDS OF GENERALIZED KENMOTSU MANIFOLDS

(M.Sc.Thesis)

Erkan BAYHAN

AMASYA

UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June 2025

ABSTRACT

In this thesis, pseudo slant submanifolds defined on generalized Kenmotsu manifolds are studied. The characterizations of these submanifolds under integrability of distributions and parallelism of reducing tensors are obtained. The theoretical results are supported by examples, and a contribution to pseudo slant geometry is made.

PageNumber : 47

KeyWords : Generalized Kenmotsu manifold, Slant manifold,
Pseudo slant submanifold.

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Ramazan SARI

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana veren, çalışmalarım boyunca destekleyen; yönlendiren ve yazımı sırasında bana zaman ayırarak yardımını esirgemeyen tez danışmanım Doç. Dr. Ramazan SARI'ya teşekkürü bir borç bilirim. Aynı zamanda tez dönemi boyunca benden desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen Prof. Dr. Süleyman DİRİK hocama teşekkür ederim. Ayrıca yıllarca beraber çalıştığım dostum Öğr. Gör. Hamdullah KUŞÇA'ya teşekkür ederim. Aileme, çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
1. GİRİŞ VE LİTERATÜR ÖZETİ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
3. GENELLEŞTİRİLEN KENMOTSU MANİFOLDU.....	10
4. GENELLEŞTİRİLEN KENMOTSU MANİFOLDLARIN SLANT ALTMANİFOLDLARI.....	17
5. GENELLEŞTİRİLEN KENMOTSU MANİFOLDLARIN PSEUDO-SLANT ALTMANİFOLDLARI.....	30
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	45
KAYNAKLAR	46
ÖZGEÇMİŞ	47

1. GİRİŞ VE LİTERATÜR ÖZETİ

Bilim ve teknolojiadaki gelişmelere paralel olarak, matematik ve özelde geometri, evrenin yapısal analizinde ve insan zihninin işleyişinin kavranmasında vazgeçilmez araçlardan biri olmuştur. Modern dönemde matematiğin, fiziğin, mühendisliğin ve bilgisayar bilimlerinin birçok alanında, başlangıçta geometriyle doğrudan ilişkili görünmeyen konular bile, geometrik düşünce ve yöntemlerle çözümlenmeye başlanmıştır.

Geometri zaman içerisinde farklı alt dallara ayrılarak daha özgül araştırma alanlarına evrilmiştir. Bu dallardan biri olan diferansiyel geometri, kalkülüsün geometrik yapılara uygulanmasıyla ortaya çıkmış ve günümüzde modern matematiğin en aktif çalışma alanlarından biri hâline gelmiştir. Diferansiyel geometrinin temelleri, Carl Friedrich Gauss'un yüzey eğrilikleri üzerine yaptığı öncü çalışmalara dayanır. Gauss'un yüzeylerin içsel yapısını inceleyen bu çalışmaları, manifold kavramının doğmasına öncülük etmiştir. "İçsel" terimi burada, bir yüzeyin eğriliğinin yalnızca kendi geometrik yapısıyla belirlendiğini ve uzaydaki konumdan bağımsız olduğunu ifade eder.

Manifoldlar, yerel olarak Öklidyen uzaya benzeyen topolojik yapılardır. Her manifold, $\mathbb{R}^n$ uzayının açık alt kümelerine homeomorf olan koordinat komşulukları ile tanımlanır. Bu yapı, manifoldlar üzerinde yerel koordinat sistemlerinin tanımlanmasına imkân tanır. Manifold üzerinde tanımlanan temel kavramlardan biri tanjant vektörüdür. Geometrik olarak bu kavram, manifold üzerindeki diferensiyellenebilir eğriler aracılığıyla tanımlanır. Aynı noktadan geçen ve aynı türeve sahip olan iki eğri, aynı tanjant vektörüyle temsil edilir. Buna bağlı olarak vektör alanı, her noktaya bir tanjant vektörü atayan diferensiyellenebilir bir dönüşüm şeklinde tanımlanır.

İki manifold arasında diferensiyellenebilir bir dönüşüm bulunduğunda, bu dönüşüm aynı zamanda tanjant uzayları arasında lineer bir dönüşüm olan türev dönüşümünü (veya f dönüşümünün diferensiyelini, f^*) tanımlar. Bu yapı, diferansiyel geometrinin temel araçlarından biridir. Ayrıca diferansiyel geometri, Riemann manifoldları üzerindeki metrik yapıların incelenmesiyle eğrilik, burulma ve diğer geometrik özelliklerin analizini de içerir. Son yıllarda diferansiyel geometri alanında, manifoldlar üzerindeki altmanifoldların özellikleri özel bir ilgi konusu olmuştur. Özellikle slantaltmanifoldlar, invaryant ve anti-

invariant altmanifoldların doğal bir genellemesi olarak önemli bir çalışma alanı oluşturmuştur. B. Y. Chen tarafından hemen hemen Hermityen manifoldlar üzerinde tanımlanan slant altmanifoldlar C^2 ve kompleks manifoldlar içinde örneklerle desteklenmiştir. (Chen, 1990). Kontak manifoldlar üzerine slant altmanifold kavramını ilk çalışan Lotta olmuştur. (Lotta, 1996). Lotta'nın çalışmaları, özellikle 3-boyutlu K-kontakt manifoldlar bağlamında anti-invariant olmayan slantalt manifoldların geometrisini kapsamaktadır. (Lotta, 1998).

Bu alandaki ilerlemeler, L. Cabrerizo ve arkadaşlarının Sasakian manifoldlarda gerçekleştirdiği çalışmalarla devam etmiş, pek çok yeni sonuç literatüre kazandırılmıştır (Cabrerizo, Carriazo, Fernandez ve Fernandez, 2000). M. Atçeken ise Riemann çarpımı, para-kontakt metrik manifoldlar ve Kenmotsu manifoldlar üzerinde (özellikle warped çarpım yapılarında) semi-slant altmanifoldların geometrisi üzerine özgün katkılarda bulunmuştur (Atçeken, 2011). Ayrıca, Khan ve arkadaşları, proper slant ve pseudo slant altmanifoldlar üzerine dikkat çekici çalışmalar yapmışlardır (Khan, 2007). Atçeken de $(LCS)^n$ -manifoldlar üzerindeki kontak pseudo-slant altmanifoldlar konusunu da inceleyerek alana katkı sunmuştur (Atçeken, 2012)

Bu çalışmada, pseudo slant altmanifoldların özellikleri genelleştirilen Kenmotsu manifoldların üzerinde ele alınacak ve özellikle distribüsyonların integrallenebilirliği ile indirgenen tensörlerin paralelliği gibi karakterizasyonlar detaylı olarak analiz edilecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmanın ilerleyen kısımlarında kullanılacak temel tanım ve kavramlara yer verilmiştir. Sunulan bu ön bilgiler, teorem ve ispatların anlaşılmasını kolaylaştırmakta ve kuramsal çerçevenin sağlam bir zemine oturmasını sağlamaktadır.

2.1. Tanım: M Diferensiyellenebilir bir manifold olsun.

$$g : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

Fonksiyonu pozitif tanımlı biliner vesimetrik ise g ' ye Riemann metriği M ' ye de Riman manifoldu denir.

2.2.Tanım: M diferensiyellenebilir bir manifold ve bir

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$$

dönüşümü verilsin. $\forall X, Y, W \in \Gamma(TM)$ ve $\forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için,

- i) $\nabla_{X+Y}W = \nabla_XW + \nabla_YW$
- ii) $\nabla_X(Y + W) = \nabla_XY + \nabla_XW$
- iii) $\nabla_{fX+gY}W = f\nabla_XW + g\nabla_YW$
- iv) $(\nabla_Xf)Y = f\nabla_XY + X[f]W$

ise ∇ 'ya lineer konneksiyon denir.

2.3.Tanım: V bir vektör uzayı olmak üzere

$$\begin{aligned} [,] : V \times V &\rightarrow V \\ (X, Y) &\rightarrow [X, Y] \end{aligned}$$

için

- i) Anti-Simetrik $\forall X, Y \in V$ için $[X, Y] = -[Y, X]$

ii) 2-Lineer

iii) $\forall X, Y, W \in \mathcal{V}$ için $[X, [Y, W]] + [W, [X, Y]] + [Y, [W, X]] = 0$

Şartını sağlıyorsa $[\cdot, \cdot]$ dönüşümüne Lieoperatörü denir.

2.1. Teorem: M diferensiyellenebilir bir manifold, M üzerindeki vektör alanlarının uzayında $\Gamma(TM)$ olsun.

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot]: \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\rightarrow \Gamma(TM) \\ (X, Y) &\rightarrow [X, Y] \end{aligned}$$

dönüşümü $\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için,

$$[X, Y](f) = XY(f) - YX(f) \quad (2.1)$$

Şeklinde tanımlanırsa bu operatöre $\Gamma(TM)$ üzerinde bir Lie operatörü adı verilir.

2.2. Teorem: (M, g) bir Riemen manifoldu olsun, $\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$

$\forall X, Y, W \in \Gamma(TM)$ için

i) $L_X(f) = X(f)$

ii) $L_X Y = [X, Y]$

iii) $L_X g(Y, W) = Xg(Y, W) - g([X, Y], W) - g([X, W], Y)$

durumları sağlanır.

2.4. Tanım: M Diferansiyellenebilir bir manifold, ∇ bir lineer konneksiyon olsun.

$\forall X, Y, W \in \Gamma(TM)$ için

i) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$

ii) $Xg(Y, W) = g(\nabla_X Y, W) + g(Y, \nabla_X W)$

Özellikleri varsa ∇ 'ya Riemann konneksiyonu denir.

2.5. Tanım: (M, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde Riemann konneksiyonu olsun. $\forall X, Y, W \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\rightarrow \Gamma(TM) \\ (X, Y, W) &\rightarrow R(X, Y, W) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$R(X, Y, W) = \nabla_X \nabla_Y W - \nabla_Y \nabla_X W - \nabla_{[X, Y]} W \quad (2.2)$$

Tensörüne Riemann eğrilik tensöralanı, $\forall W \in \Gamma(TM)$ için

$$K(X, Y, W, Z) = g(R(X, Y)Z, W) \quad (2.3)$$

şeklinde tanımlanırsa K tensörüne de M nin Riemann Christofel eğrilik tensörü denir.

2.6. Tanım: (M, g) n-boyutlu bir Riemann manifold, R Riemann eğrilik tensörü, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ortonormal bazı olsun.

$$\begin{aligned} Q : \Gamma(TM) &\rightarrow \Gamma(TM) \\ X \rightarrow QX &= - \sum_{i=1}^n R(e_i, X)e_i \end{aligned} \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlı Q operatörüne M 'nin Ricci operatörü, $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$S(X, Y) = - \sum_{i=1}^n g(R(e_i, X)Y, e_i) \quad (2.5)$$

ye Ricci eğrilik tensörü adı verilir.

2.7.Tanım: n-boyutlu bir Riemann manifoldu M ve $\Gamma(TM)$ nin ortonormal vektör alanlarının kümesi $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olmak üzere M 'nin skalar eğriliği.

$$r = \sum_{i=1}^n S(e_i, e_i) \quad (2.6)$$

Şeklindedir.

2.8.Tanım: M ve $\bar{M}$ Rimann manifoldlar ve $f: M \rightarrow \bar{M}$ diferansiyelenebilir bir dönüşüm olmak üzere $\forall p \in M$ için f nin türev dönüşümünü f_* ile gösterirsek

$$rank f_* = boy M$$

oluyorsa f dönüşümüne immersiyon denir.

2.9.Tanım: $\bar{M}$ Riemann manifold, M de altmanifold olsun. $\forall q \in M$ olmak üzere

$$T_q M^\perp = \{N_q \in \bar{T}_q M: g(X_q, N_q) = 0, \forall X_q \in T_q M\} \quad (2.7)$$

kümesi tanımlansın $q \in M$ noktasında $\forall X_q \in T_q M$ için $g(X_q, N_q) = 0$ koşulunu sağlayan N_q vektörüne M ' nin normal vektörü denir.

2.10.Tanım: $\bar{M}$ bir Rimann manifold ve $\bar{M}'$ nin bir altmanifoldu M olsun $\forall q \in M$ için

$$T_q: \bar{T}_q M \rightarrow T_q M$$

ve

$$N_q: \bar{T}_q M \rightarrow T_q M^\perp$$

C^∞ -lineer dönüşümlerine sırayla q -noktasında teğet ve normal dönüşümler denir. O halde $\forall V_q \in \bar{T}_q M$ teğet vektörü

$$\bar{V}_q: T_q(\bar{V}_q) + N_q(\bar{V}_q)$$

olacak şekilde tektürlü ifade edilir. Buradan

$$T: \bar{T}_q M \rightarrow T_q M, \quad N: \bar{T}_q M \rightarrow T_q M^\perp$$

Lineer ortogonal iz düşümleri ve $X \in T\bar{M}$ için

$$X = T(X) + N(X) \quad (2.8)$$

olarak tek türlü yazılır. O halde

$$T\bar{M} = TM \oplus TM^\perp \quad (2.9)$$

dir. Burada $T(X)$ ve $N(X)$ 'e sırasıyla X 'in teğet ve normal bileşenlerdir.

2.11. Tanım: $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir Riemann manifoldu ve M de $\tilde{M}$ 'nin altmanifoldu olsun. $\tilde{M}$ ve M üzerindeki Riemann konneksiyonlar sırasıyla $\tilde{\nabla}$ ile ∇ olmak üzere her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için,

$$\begin{aligned} h: \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\rightarrow \Gamma(TM^\perp) \\ (X, Y) &\rightarrow h(X, Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y \end{aligned} \quad (2.10)$$

biçimin de tanımlı simetrik h bilineer formuna M nin ikinci temel formu adı verilir. Şayet $h = 0$ oluyorsa M 'ye total geodezik altmanifold denir.

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \quad (2.11)$$

şeklinde verilen formüle de Gauss formülü adı verilir. Burada $\tilde{\nabla}_X Y$ 'in teğet ve normal bileşenleri sırasıyla $\nabla_X Y$ ve $h(X, Y)$ 'dir. (Chen, 1973).

2.12. Tanım: n –boyutlu Riemann manifoldu $\tilde{M}$ 'nin bir altmanifoldu M olsun. h , M manifoldunun ikinci temel formu olacak şekilde M üzerindeki bir p noktası için $T_M(p)$ 'nin $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ lokal ortonormal bazını ele alalım.

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(e_i, e_i) \quad (2.12)$$

şeklinde tanımlı vektöre ortalama eğrilik vektörü denir.

2.3 Tanım: n –boyutlu Riemann manifoldu $\tilde{M}$ ’ nın bir altmanifoldu M ve h manifoldunun ikinci temel formu, H da ortalama eğrilik vektörü olsun. Her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için,

$$h(X, Y) = g(X, Y)H \quad (2.13)$$

oluyorsa M ’ye $\tilde{M}$ ’nin total umbilik altmanifoldu denir. Şayet

$$g(h(X, Y), H) = \lambda g(X, Y), \quad \lambda \in C(M, \mathbb{R}) \quad (2.14)$$

eşitliği sağlanıyorsa M ’ye $\tilde{M}$ ’nin pseudo-umbilik altmanifoldu denir.

2.14 Tanım: n –boyutlu Riemann manifoldu $\tilde{M}$ ’nın bir altmanifoldu M ve $\nabla^\perp$ ’ de M ’nin normal demetindeki konneksiyon olsun. Her $X \in \Gamma(TM)$ ile $V \in \Gamma(TM^\perp)$ için,

$$\begin{aligned} A: \Gamma(TM^\perp) \times \Gamma(TM) &\rightarrow \Gamma(TM) \\ (V, X) &\rightarrow A(V, X) = A_V X = \nabla_X^\perp V - \tilde{\nabla}_X V \end{aligned} \quad (2.15)$$

ile tanımlanan bilineer dönüşüme M ’nin şekil operatörü adı verilir.

$$\tilde{\nabla}_{X_1} V = -A_V X + \nabla_X^\perp V \quad (2.16)$$

formülüne de Weingarten formülü adı verilir. (Chen, 1973;Chen1990).

Her $Y \in \Gamma(TM)$ ile $V \in \chi^\perp(M)$ için $g(Y, V) = 0$ eşitliğinin $X \in \Gamma(TM)$ ’ye göre kovaryant türev alınırsa,

$$Xg(Y, V) = g(\tilde{\nabla}_X Y, V) + g(Y, \tilde{\nabla}_X V) = 0 \quad (2.17)$$

elde edilir. Burada Gauss ile Weingarten formülleri uygulanırsa

$$g(\nabla_X Y, V) + g(h(X, Y), V) - g(X, A_V X) + g(Y, \nabla_X^\perp V) = 0$$

dır. Buradan gerekli sadeleştirmelerle

$$g(A_V Y, X) = g(h(X, Y), V) \quad (2.18)$$

eşitliği elde edilir. M 'nin A_V şekil operatörü ile ikinci temel formu σ arasındaki bağlantıyı bu son eşitlik verir (Chen, 1973).

3. GENELLEŞTİRİLEN KENMOTSU MANİFOLDLAR

Bu bölümde, genelleştirilen Kenmotsu manifoldu tanımlandı ve bir örnekle açıklandı.

3.1. Tanım: M Diferansiyellenebilir manifold olsun M üzerinde

$$f^3 + f = 0$$

ve

$$\text{rank} f = 2n$$

olacak şekilde $(1,1)$ -tipindeki f tensör alanına f -yapı denir.

3.2. Tanım: M $2n + s$ boyutlu bir diferansiyellenebilir manifold olsun. η^i 'ler M üzerinde 1 form, φf yapı, ξ_i 'ler vektör alanları olmak üzere

$$\varphi^2 = -1 + \sum_{i=1}^s \eta^i \otimes \xi_i, \eta^i(\xi_i) = \delta_{ij} \quad (3.1)$$

ise $(M, \varphi, \xi_i, \eta^i)$ 'ye çatılandırılan manifold denir.

3.3. Tanım: $(M, \varphi, \eta^i, \xi_i)$ çatılandırılan manifold olsun. $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \sum_{i=1}^s \eta^i(X) \eta^i(Y) \quad (3.2)$$

eşitliğini sağlayan g Riemann metriği varsa M 'ye g ile çatılandırılan metrik manifold denir.

3.4. Tanım: $(M, \varphi, \xi_i, \eta^i, g)$ çatılandırılan manifold olmak üzere $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için,

$$\Phi(X, Y) = g(X, \varphi Y) \quad (3.3)$$

ise Φ' ye manifoldun temel 2-formu denir.

3.5. Tanım: $(M, \varphi, \xi_i, \eta^i, g)$ çatılandırılan manifold olmak üzere

$$\eta^i \wedge \dots \wedge \eta^s \wedge \Phi \neq 0$$

Şartı sağlanıyorsa M' ye s- kontak manifold denir.

3.6. Tanım: $(M, \varphi, \xi_i, \eta^i, g)$ s- kontak manifold olsun. Eğer η^i 1 formları kapalı ve

$$d\Phi = 2 \sum_{i=1}^s \eta^i \wedge \Phi \quad (3.4)$$

ise $(M, \varphi, \xi_i, \eta^i, g)$ ' ye genelleştirilen Kenmotsu manifold denir.

3.1. Örnek: $M = \{(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_s) \in \mathbb{R}^{2n+s} : \sum_{\alpha=1}^s z_\alpha \neq 0\}$ çatılandırılan manifold olsun. M üzerinde

$$X_i = e^{-\sum_{\alpha=1}^s z_\alpha \frac{\partial}{\partial x_i}}, \quad Y_i = e^{-\sum_{\alpha=1}^s z_\alpha \frac{\partial}{\partial y_i}}, \quad \xi_\alpha = \frac{\partial}{\partial z_\alpha}$$

vektör alanlarının göz önüne alalım g Riman metriği

$$g = e^{2 \sum_{\alpha=1}^s z_\alpha} \sum_{\alpha=1}^s (dx_i \otimes dx_i + dy_i \otimes dy_i) + \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha \otimes \eta^\alpha$$

ise $(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n, \xi_1, \dots, \xi_s)$ M için ortonormal bir baz olur.

$1 \leq \alpha \leq s$ için $\eta^\alpha(X) = g(X, \xi_\alpha)$ dir. $1 \leq i \leq n$ ve $1 \leq \alpha \leq s$ olmak üzere $(1,1)$ - tipinde φ tensör alanı

$$\varphi(X_i) = Y_i, \quad \varphi(Y_i) = -X_i, \quad \varphi(\xi_\alpha) = 0$$

şeklinde tanımlanırsa,

$$\begin{aligned}\eta^\alpha(\xi_\beta) &= \delta_{\alpha\beta}, \varphi^2 X = -X + \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(X) \xi_\alpha \\ g(\varphi X, \varphi Y) &= g(X, Y) - \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(X) \eta^\alpha(Y)\end{aligned}\quad (3.5)$$

olduğu görülür. Buradan $(M, \varphi, \xi_i, \eta^i, g)$ s- kontakt metrik manifold olur. Böylece Φ temel 2- form

$$\Phi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}\right) = -ne^2 \sum_{\alpha=1}^s z_\alpha \quad (3.6)$$

veya

$$\Phi = -ne^2 \sum_{\alpha=1}^s z_\alpha \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i \quad (3.7)$$

olur. Her iki tarafın diferansiyeli alınırsa

$$d\Phi = -2ne^2 \sum_{\alpha=1}^s z_\alpha \sum_{i=1}^n dz_\alpha \wedge dx_i \wedge dy_i \quad (3.8)$$

veya

$$d\Phi = 2 \sum_{\alpha=1}^s dz_\alpha \wedge \left(-ne^2 \sum_{\alpha=1}^s z_\alpha \right) \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i \quad (3.9)$$

$$= -ne^2 \sum_{\alpha=1}^s dz_\alpha \wedge \Phi \quad (3.10)$$

bulunur. Buradan $(M, \varphi, \xi_i, \eta^i, g)$ bir genelleştirilen Kenmotsu manifoldtur.

3.1. Teorem: $(M, \varphi, \xi_i, \eta^i, g)$ bir s- kontak manifold olsun. M manifoldunun bir genelleştirilen Kenmotsu manifold olması için gerek ve yeter şart $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X \varphi)Y = \sum_{i=1}^s \{g(\varphi X, Y)\xi_i - \eta^i(Y)\varphi X\} \quad (3.11)$$

olmasıdır.

3.1. Sonuç. $(M, \varphi, \xi_i, \eta^i, g)$ bir genelleştirilen Kenmotsu manifold olsun. O halde $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\nabla_X \xi_i = -\varphi^2 X \quad (3.12)$$

dir. $(\bar{M}, \varphi, \xi_i, \eta^i, \bar{g})$ bir genelleştirilen Kenmotsu manifold ve bir alt manifoldu M olsun altmanifoldta indirgenen tensörleri aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz. $\forall X \in \Gamma(TM)$ için

$$T: \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$$

$$X \rightarrow TX$$

$$g(X, TX) \neq 0$$

ve

$$N: \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(T^\perp M)$$

$$X \rightarrow NX$$

$$g(X, NX) = 0$$

Projeksiyon dönüşümleri göz önüne alınırsa,

$$\varphi X = TX + NX \quad (3.13)$$

olup TX , $\varphi X'$ in teğet parçası NX , $\varphi X'$ in normal parçasıdır. Benzer şekilde $\forall X \in \Gamma(T^\perp M)$ için

$$t: \Gamma(T^\perp M) \rightarrow \Gamma(TM)$$

$$V \rightarrow tV$$

$$g(V, tV) = 0$$

ve

$$n: \Gamma(T^\perp M) \rightarrow \Gamma(T^\perp M)$$

$$V \rightarrow nV$$

$$g(V, nV) \neq 0$$

Projeksiyon dönüşümleri göz önüne alınırsa

$$\varphi V = tV + nV \quad (3.14)$$

Şeklinde tek türlü yazılabilir. $\forall X \in \Gamma(T^\perp M)$ için

$$\varphi^2 X = \varphi(TX + NX) \quad (3.15)$$

$$= \varphi(TX) + \varphi(NX)$$

$$= T^2X + NTX + tNX + nNX$$

dir.

$$-X + \sum_{i=1}^s \eta^i(X) \xi_i = T^2X + NTX + tNX + nNX \quad (3.16)$$

olup gerekli eşleştirmeler yapılırsa

$$-X + \sum_{i=1}^s \eta^i(X) \xi_i = T^2 X + tNX \quad (3.17)$$

ve

$$NTX + nNX = 0 \quad (3.18)$$

bulunur. $\forall V \in \Gamma(T^\perp M)$ için (3,14) denklemi kullanılırsa

$$\varphi(\varphi(V)) = \varphi^2 V = -V + \sum_{i=1}^s \eta^i(V) \xi_i$$

yazılır. Bu durumda $\sum_{i=1}^s \eta^i(v) \xi_i = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} -V &= \varphi(\varphi V) = \varphi(tV + nV) \\ &= \varphi tV + \varphi nV \\ &= TtV + NtV + tnV + n^2 V \end{aligned} \quad (3.19)$$

elde edilir. Böylece (3.19) denkleminin teğet bileşenlerinden

$$TtV + tnV = 0$$

dır. Böylece

$$Tt + tn = 0$$

yazılır. (3.19)'nun normal bileşenlerinden

$$NtV + n^2 V = -V$$

dir. O halde

$$Nt + n^2 = -I$$

yazılır.

3.2. Teorem: $(\bar{M}, \varphi, \xi_i, \eta^1, g)$ bir genelleştirilen Kenmotsu manifold olsun. M bir altmanifold olmak üzere $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $\forall V, U \in \Gamma(T^\perp M)$ için

$$g(TX, Y) = -g(X, TY) \quad (3.20)$$

$$g(nV, U) = -g(V, nU) \quad (3.21)$$

ve

$$g(NX, Y) = -g(X, tV) \quad (3.22)$$

dır. Diğer taraftan $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $V \in \Gamma(T^\perp M)$ için

$$(\nabla_X T)Y = \nabla_X TY - T\nabla_X Y \text{ ve } (\nabla_X N)Y = \nabla_X^\perp NY - N\nabla_X Y \quad (3.23)$$

ve

$$(\nabla_X t)V = \nabla_X tV - t\nabla_X^\perp V \text{ ve } (\nabla_X n)V = \nabla_X^\perp nV - n\nabla_X^\perp V \quad (3.24)$$

şeklinde tanımlanırlar (Pandey ve Gupta, 2008).

4. GENELLEŞTİRİLEN KENMOTSU MANİFOLDLARIN SLANT ALTMANİFOLDLARI

$M, \bar{M}$ Genelleştirilen Kenmotsu manifoldunun bir altmanifoldu ξ_i ' ler M 'ye teğet olsun.

Buradan $Sp\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s\}$ alt uzayının $\Gamma(TM)$ içindeki ortogonal distribüsyonu D ile gösterilirse

$$\Gamma(TM) = D \oplus sp(\xi_1, \dots, \xi_s)$$

şeklindedir.

4.1. Tanım $M, \bar{M}$ genelleştirilen Kenmotsu manifoldunun bir altmanifoldu olsun. $\forall$ bir $x \in M$ için φX_x ve $T_x M$ arasındaki açı sabit ise $\theta(X_x)$ M ye $\bar{M}$ ' nin slant alt manifoldu denir.

4.1.Teorem: $(\bar{M}, \varphi, \xi_i, \eta^i, g)$ genelleştirilen Kenmotsu manifold, M' 'de bir alt manifoldu olsun. M altmanifoldunun slant olması için gerekli ve yeter şart

$$T^2 = \lambda(-1 + \sum_{i=1}^s \eta^i \otimes \xi_i) \quad (4.1)$$

olmasıdır. M' nin slant açısı θ olmak üzere $\lambda = \cos^2 \theta$ dır.

İspat. Kabul edelim ki

$$T^2 = \lambda(-1 + \sum_{i=1}^s \eta^i \otimes \xi_i)$$

olacak şekilde λ bir sabit var olsun. Bu taktirde her bir $X \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\bar{g}(\varphi X, TX)}{\|\varphi X\| \|TX\|} \\ &= \frac{\bar{g}(TX + NX, TX)}{\|\varphi X\| \|TX\|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{g(TX, TX) + \bar{g}(NX, TX)}{\|\varphi X\| \|TX\|} \\
&= \frac{g(TX, TX)}{\|\varphi X\| \|TX\|}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
\cos \theta &= \frac{g(TX, TX)}{\|\varphi X\| \|TX\|} \\
&= \frac{-g(T^2X, X)}{\|\varphi X\| \|TX\|}
\end{aligned}$$

yazılır.

$$\begin{aligned}
\cos \theta &= \frac{-g\lambda(-X + \sum_{i=1}^s \eta^i(X) \xi_i, X)}{\|\varphi X\| \|TX\|} \\
&= \frac{\lambda\{g(X, X) - \sum_{i=1}^s \eta^i(X) \xi_i(X)\}}{\|\varphi X\| \|TX\|} \\
&= \frac{\lambda g(\varphi X, \varphi X)}{\|\varphi X\| \|TX\|} \\
&= \frac{\lambda \|\varphi X\|^2}{\|\varphi X\| \|TX\|} \\
&= \lambda \frac{\|TX\|}{\|\varphi X\|}
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\cos \theta &= \frac{g(TX, TX)}{\|\varphi X\| \|TX\|} \\
&= \frac{\lambda \|TX\|^2}{\|\varphi X\| \|TX\|} \\
&= \frac{\|TX\|}{\|\varphi X\|}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda

$$\lambda = \cos^2 \theta(X)$$

dolayısıyla $\theta(X)$ açısı sabittir ve M slant altmanifoldtur.

$\Leftarrow$: θ slant açısı sabit altmanifold M olsun. Bu durumda

$$\cos \theta = \frac{g(TX, TX)}{\|\varphi X\| \|TX\|}$$

dir. Gerekli kapsamlar yapılırsa

$$\cos \theta = \frac{(TX)}{\|\varphi X\|}$$

elde edilir. Buradan

$$\cos^2 \theta = \frac{g(TX, TX)}{\bar{g}\|\varphi X\| \|TX\|}$$

$$g(TX, TX) = \cos^2 \theta \bar{g}(\varphi X, \varphi X)$$

veya

$$\begin{aligned} g(T^2 X, X) &= \cos^2 \theta \bar{g}(\varphi^2 X, X) \\ &= \cos^2 \theta \bar{g}\left(-X + \sum_{i=1}^s \eta^i(X) \xi_i, X\right) \\ &= g\left(\cos^2 \theta \left(-X + \sum_{i=1}^s \eta^i(X) \xi_i\right), X\right) \end{aligned}$$

bulunur. İndirgenmiş metrik tensörünün-degenere olduğundan

$$T^2 X = \cos^2 \theta \left(-X + \sum_{i=1}^s \eta^i(X) \xi_i\right) \quad (4.2)$$

elde edilir. $\lambda = \cos^2 \theta$ seçilirse istenen elde edilir.

4.1. Sonuç: $\bar{M}$ metrik kontak s-manifoldunun bir slant alt manifoldu M olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için,

$$\begin{aligned} g(TX, TY) &= \cos^2 \theta (g(X, Y) - \sum_{i=1}^s \eta^i(X) \eta^i(Y)) \\ \bar{g}(NX, NY) &= \sin^2 \theta (g(X, Y) - \sum_{i=1}^s \eta^i(X) \eta^i(Y)) \end{aligned}$$

dir.

İspat. $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} g(TX, TY) &= -g(T^2 X, Y) \\ &= -g(\cos^2 \theta (-X + \sum_{i=1}^s \eta^i(X) \xi_i) Y) \\ &= \cos^2 \theta g(X, Y) - \cos^2 \theta \sum_{i=1}^s \eta^i(X) g(\xi_i, Y) \\ &= \cos^2 \theta (g(X, Y) - \sum_{i=1}^s \eta^i(X) \eta^i(Y)) \end{aligned}$$

bulunur.

$$\bar{g}(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \sum_{i=1}^s \eta^i(X) \eta^i(Y)$$

olup. Buradan

$$\begin{aligned} \bar{g}(TX, +NT, TY + NY) &= g(X, Y) - \sum_{i=1}^s \eta^i(X) \eta^i(Y) \\ g(TX, TY) + \bar{g}(TX, NY) + \bar{g}(NX, TY) + \bar{g}(NX, NY) &= g(X, Y) - \sum_{i=1}^s \eta^i(X) \eta^i(Y) \\ g(TX, TY) + \bar{g}(NX, TY) &= g(X, Y) - \sum_{i=1}^s \eta^i(X) \eta^i(Y) \end{aligned}$$

bulunur.

$$\cos^2 \theta (g(X, Y) - \sum_{i=1}^s \eta^i(X) \eta^i(Y) + \bar{g}(NX, NY)) = g(X, Y) - \sum_{i=1}^s \eta^i(X) \eta^i(Y)$$

$$\bar{g}(NX, NY) = (1 - \cos^2 \theta)(g(TX, TY) - \sum_{i=1}^s \eta^i(X) \eta^i(Y))$$

veya

$$\bar{g}(NX, NY) = (\sin^2 \theta)(g(X, Y) - \sum_{i=1}^s \eta^i(X) \eta^i(Y))$$

elde edilir.

4.2. Teorem: $(\bar{M}, \varphi, \xi_i, \eta^i, g)$ genelleştirilen Kenmotsu manifold, M' de bir alt manifoldu olsun. Bu halde $\nabla T^2 = 0$ ise M anti invaryant alt manifoldtur.

İspat. $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$T^2 X = \cos^2 \theta (-X + \sum_{i=1}^s \eta^i(X) \xi_i)$$

olduğu biliniyor. Buradan

$$T^2 \nabla_X Y = \cos^2 \theta (-\nabla_X Y + \sum_{i=1}^s \eta^i(\nabla_X Y) \xi_i)$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \nabla_X T^2 Y &= \nabla_X \cos^2 \theta (-Y + \sum_{i=1}^s \eta^i(Y) \xi_i) \\ &= -\cos^2 \theta \nabla_X Y + \cos^2 \theta \sum_{i=1}^s \{X[\eta^i(Y)] \xi_i + \eta^i(Y) \nabla_X \xi_i\} \\ &= -\cos^2 \theta \nabla_X Y + \cos^2 \theta \sum_{i=1}^s \{g(\nabla_X Y, \xi_i) \xi_i \\ &\quad + g(Y, \nabla_X \xi_i) \xi_i + \eta^i(Y) \nabla_X \xi_i\} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$(\nabla_X T^2) Y = \nabla_X T^2 Y - T^2 \nabla_X Y$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
(\nabla_X T^2)Y &= \cos^2 \theta \nabla_X Y - \cos^2 \theta \sum_{i=1}^s \eta^i (\nabla_X Y) \xi_i \\
&\quad - \cos^2 \theta \nabla_X Y + \cos^2 \theta \sum_{i=1}^s \eta^i (\nabla_X Y) \xi_i \\
&+ \cos^2 \theta \sum_{i=1}^s g(Y, \nabla_X \xi_i) \xi_i - \cos^2 \theta \sum_{i=1}^s \eta^i (Y) \nabla_X \xi_i \\
&= \cos^2 \theta \sum_{i=1}^s g(Y, \nabla_X \xi_i) \xi_i - \eta^i (Y) \nabla_X \xi_i
\end{aligned}$$

bulunur. Şimdi

$$\nabla T^2 = 0$$

olsun. O halde

$$= \cos^2 \theta \sum_{i=1}^s \{-g(Y, \varphi^2 X) \xi_i + \eta^i(Y) \varphi^2 X\} = 0$$

olmalıdır. Buradan $\cos \theta = 0$ veya $-g(Y, \varphi^2 X) \xi_i + \eta^i(Y) \varphi^2 X = 0$ olmalıdır.

$$\sum_{i=1}^s -g(Y, \varphi^2 X) \xi_i + \sum_{i=1}^s \eta^i(Y) \varphi^2 X = 0$$

olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^s -g(Y, \varphi^2 X) g(\xi_i, \xi_i) + \sum_{i=1}^s \eta^i(Y) g(\varphi^2 X, \xi_i) &= 0 \\
g(\varphi Y, \varphi X) &= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\varphi X = 0$ veya $\varphi Y = 0$ olmalıdır ki $X \neq 0 \neq Y$ olmasıyla çelişir. O halde

$$\cos \theta = 0$$

veya

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

olup, istenen elde edilir.

4.2.Sonuç: $(\bar{M}, \varphi, \xi_i, \eta^i, g)$ geneleştirilen Kenmotsu manifoldunun bir slant altmanifoldu $(M, \tilde{\varphi}, \eta^i, \xi_i, g)$ olsun. M' nin geneleştirilen Kenmotsu manifold olması için gerek ve yeter şart

$$(\nabla_X T)Y = \sum_{i=1}^s \{g(TX, Y)\xi_i - \eta^i(Y)TX\} \quad (4.3)$$

olmasıdır.

İspat. $(M, \tilde{\varphi}, \eta^i, \xi_i, g)$ geneleştirilen Kenmotsu manifold olsun. O halde $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X \tilde{\varphi})Y = \sum_{i=1}^s \{g(\tilde{\varphi}X, Y)\xi_i - \eta^i(Y)\tilde{\varphi}X\}$$

dir. $\tilde{\varphi} = \sec\theta T$ olduğundan

$$\nabla_X \sec\theta TY - \sec\theta T \nabla_X Y = \sum_{i=1}^s \{g(\sec\theta TX, Y)\xi_i - \eta^i(Y)\sec\theta TX\}$$

olup

$$(\nabla_X T)Y = \sum_{i=1}^s \{g(TX, Y)\xi_i - \eta^i(Y)TX\}$$

elde edilir. Tersine $T = \cos\theta \tilde{\varphi}$ olup ispat tamamlanır. Genelleştirilen Kenmotsu manifold $(\bar{M}, \tilde{\varphi}, \eta^i, \xi_i, g)$ 'nin bir slant altmanifoldu M olsun.

$$T\bar{M} = TM \oplus TM^\perp$$

dir. Burada

$$TM = D \oplus Sp\{\xi_1, \dots, \xi_s\}$$

şeklindedir. D distribüsyonun $TM^\perp$ içerisinde bir parçası bulunmaktadır.

$$TM^\perp = \varphi D \oplus \mu$$

şeklinde olup μ ortogonal tümleyendir.

4.3.Teorem: $\bar{M}$ Genelleştirilen Kenmotsu manifold, M' de altmanifold olsun. Eğer M total umbilik slant ise total geodeziktir.

İspat. Kabul edelim ki M totalumbilik olsun. O halde

$$h(X, Y) = g(X, Y) \tag{4.4}$$

ve

$$h(TX, X) = g(TX, X)H \tag{4.5}$$

buradan $g(TX, X) = 0$ olduğundan

$$h(TX, X) = 0$$

dır. Ayrıca $\forall X \in \Gamma(D)$ için

$$g(X, \xi_i) = 0$$

olduğundan

$$g(\nabla_{TX} X, \xi_i) = -g(X, \nabla_{TX} \xi_i)$$

$$= g(X, -TX + \sum_{i=1}^s \eta^i(TX) \xi_i)$$

elde edilir ki sonuç olarak

$$g(\nabla_{TX}X, \xi_i) = 0$$

bulunur. $\forall X \in \Gamma(TM)$ için son eşitliğinden,

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_{TX}\varphi)X &= \sum_{i=1}^s \{\bar{g}(\varphi TX, X)\xi_i - \eta^i(X)\varphi TX\} \\ &= \sum_{i=1}^s \{-\bar{g}(TX, \varphi X)\xi_i - \eta^i(X)\varphi TX\} \\ &= \sum_{i=1}^s \{-g(TX, TX)\xi_i - \eta^i(X)T^2X - \eta^i(X)NTX\} \end{aligned}$$

dir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_{TX}\varphi)X &= \bar{\nabla}_{TX}\varphi X - \varphi\bar{\nabla}_{TX}X \\ &= \bar{\nabla}_{TX}TX + \bar{\nabla}_{TX}NX - \varphi\bar{\nabla}_{TX}X \\ &= \nabla_{TX}TX + h(TX, TX) - A_{NX}TX + \nabla_{TX}^\perp NX \\ &\quad - \varphi(\nabla_{TX}X + h(TX, X)) \\ (\bar{\nabla}_{TX}\varphi)X &= \nabla_{TX}TX + g(TX, TX)H - A_{NX}TX \\ &\quad + \nabla_{TX}^\perp NX - T\nabla_{TX}X - N\nabla_{TX}X \end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlik ile karşılaştırılırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s \{-g(TX, TX)\xi_i - \eta^i(X)T^2X - \eta^i(X)NTX\} &= \nabla_{TX}TX + g(TX, TX)H \\ &\quad - A_{NX}TX + \nabla_{TX}^\perp NX \\ &\quad - \varphi\nabla_{TX}X \end{aligned}$$

elde edilir. Normal parça belirlenirse

$$-\sum_{i=1}^s \eta^i(X)NTX = g(TX, TX)H + \nabla_{TX}^\perp NX - N\nabla_{TX}X$$

yazılıbilir. Son denklem NX ile çarpılırsa

$$g(TX, TX)\bar{g}(H, NX) + \sum_{i=1}^s \eta^i(X)\bar{g}(NTX, NX) = -\bar{g}(\nabla_{TX}^\perp NX, NX) + \bar{g}(N\nabla_{TX}X, NX)$$

bulunur.

$$\begin{aligned} g(TX, TX)\bar{g}(H, NX) + \sum_{i=1}^s \eta^i(X)\sin^2\theta(g(TX, X) - \sum_{j=1}^s \eta^j(TX)\eta^j(X)) \\ = -\bar{g}(\nabla_{TX}^\perp NX, NX) + \sin^2\theta(g(\nabla_{TX}X, X) - \sum_{j=1}^s \eta^j(\nabla_{TX}X)\eta^j(X)) \end{aligned}$$

düzenlenirse,

$$g(TX, TX)\bar{g}(H, NX) = -\bar{g}(\nabla_{TX}^\perp NX, NX) + \sin^2\theta g(\nabla_{TX}X, X)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\bar{g}(NX, NX) = \sin^2\theta(g(X, X) - \sum_{j=1}^s \eta^j(X)\eta^j(X))$$

yazılabilir. Son eşitliğin TX yönünde türev alınırsa

$$\bar{g}(\bar{\nabla}_{TX}NX, NX) = \sin^2\theta\bar{g}(\bar{\nabla}_{TX}X, X)$$

bulunur. O halde

$$\bar{g}(-A_{NX}TX + \nabla_{TX}^\perp NX, NX) = \sin^2\theta\bar{g}(\nabla_{TX}X + h(TX, X), X)$$

veya

$$\bar{g}(\nabla_{TX}^\perp NX, NX) = \sin^2\theta g(\nabla_{TX}X, X)$$

bulunur. O halde

$$g(TX, TX)\bar{g}(H, NX) = 0$$

elde edilir. Buradan $g(TX, TX) = 0$ veya $\bar{g}(H, NX) = 0$ dır.

$$g(TX, TX) = 0$$

olsun. Bu durumda

$$\cos^2 \theta (g(X, X) - \sum_{j=1}^s \eta^j(X) \eta^j(X)) = 0$$

dır. M proper slant olduğundan

$$\theta \neq \frac{\pi}{2}$$

ve $\forall X \in \Gamma(D)$ için $g(X, X) = 0$ olacağından $X = 0$ bulunur. Ancak $X = 0 \notin \Gamma(D)$ olduğundan

$$\bar{g}(H, NX) = 0$$

olur. O halde

$$H \in \Gamma(\mu)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_X \varphi)Y &= \bar{\nabla}_X \varphi Y - \varphi \bar{\nabla}_X Y \\ &= \bar{\nabla}_X TY + \bar{\nabla}_X NY - \varphi(\nabla_X Y + h(X, Y)) \\ &= \nabla_X TY + h(X, TY) - A_{NY}X + \nabla_X^\perp NY - T\nabla_X Y - N\nabla_X Y - \varphi h(X, Y) \end{aligned}$$

olur. M total umbilik olduğundan

$$(\bar{\nabla}_X \varphi)Y = (\nabla_X T)Y + g(X, TY)H - A_{NY}X + \nabla_X^\perp NY - N\nabla_X Y - g(X, Y)\varphi H$$

yazılır. Bu denklem φH ile çarpılır ise

$$0 = \bar{g}(\nabla_X^\perp NY, \varphi H) - g(X, Y)\bar{g}(\varphi H, \varphi H)$$

veya

$$\bar{g}(\nabla_X^\perp NY, \varphi H) = g(X, Y) \bar{g}(H, H) \quad (4.6)$$

$$\bar{g}(\bar{\nabla}_X NY + A_{NY}X, \varphi H) = g(X, Y) \bar{g}(H, H)$$

$$\bar{g}(\bar{\nabla}_X NY, \varphi H) = g(X, Y) \bar{g}(H, H)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$(\bar{\nabla}_X \varphi)H = \bar{\nabla}_X \varphi H - \varphi \bar{\nabla}_X H$$

yazılır. Buradan

$$\sum_{i=1}^s \{ \bar{g}(\varphi X, H) \xi_i - \eta^i(H) \varphi X \} = -A_{\varphi H}X + \nabla_X^\perp \varphi H - \varphi(-A_HX + \nabla_X^\perp H)$$

$$0 = -A_{\varphi H}X + \nabla_X^\perp \varphi H + TA_HX + NA_HX - t\nabla_X^\perp H - n\nabla_X^\perp H$$

Bulunur. Bu denklem NY ile çarpılırsa

$$\bar{g}(\nabla_X^\perp \varphi H, NY) = -\bar{g}(NA_HX, NY)$$

bulunur. Son eşitlikte

$$\bar{g}(\nabla_X^\perp \varphi H, NY) = -\sin^2 \theta g(A_HX, Y)$$

$$\bar{g}(\bar{\nabla}_X \varphi H + A_{\varphi H}X, NY) = -\sin^2 \theta g(A_HX, Y)$$

Buradan

$$\bar{g}(\bar{\nabla}_X \varphi H, NY) = -\sin^2 \theta g(A_HX, Y)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\bar{g}(\varphi H, NY) = 0$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\bar{g}(\bar{\nabla}_X \varphi H, NY) &= -\bar{g}(\varphi H, \bar{\nabla}_X NY) \\ \bar{g}(\bar{\nabla}_X NY, \varphi H) &= \sin^2 \theta g(A_H X, Y) \\ g(X, Y) \bar{g}(H, H) &= \sin^2 \theta g(A_H X, Y)\end{aligned}$$

elde edilir.

$$g(X, Y) \bar{g}(H, H) = \sin^2 \theta \bar{g}(h(X, Y), H)$$

M total umbilik olduğundan

$$g(X, Y) \bar{g}(H, H) = \sin^2 \theta g(X, Y) \bar{g}(H, H)$$

Buradan $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\cos^2 \theta g(X, Y) g(H, H) = 0$$

bulunur. M slant olduğundan $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ ve X ve Y vektör alanları dik değil iseler bu eşitlik yine geçerli olduğundan

$$\bar{g}(H, H) = 0$$

elde edilir ki buradan $H = 0$ olup istenilen elde edilir.

5. GENELLEŞTİRİLEN KENMOTSU MANİFOLDLARIN PSEUDO-SLANT ALTMANİFOLDLARI

Bu bölümde, genelleştirilmiş Kenmotsu manifoldlar üzerinde tanımlı pseudo-slant altmanifold kavramı tanıtılmış; ayrıca, tanıma bağlı olarak ortaya çıkan distribüsyonların integrallenebilirlik koşulları incelemiş ve bazı karakterizasyonlar sunulmuştur.

5.1.Tanım $(\bar{M}, \varphi, \xi_i, \eta^i, g)$ genelleştirilen Kenmotsu manifold M' de bir altmanifold olsun.

i) $TM = D^\perp \oplus D_\theta \text{ } sp\{\xi_1, \dots, \xi_s\} \in \Gamma(D_\theta)$

ii) $D^\perp$ distribüsyonu, anti-invaryant didtribüsyon yani,

$$\varphi D^\perp \subset (T^\perp M)$$

iii) M – üzerinde D_θ slant distribüsyon ise M' ye pseudo slant alt manifold denir.

Bu tanımda eğer, $\theta = 0$ ise pseudo slant altmanifold semi-invaryant altmanifold denir. Benzer şekilde, $boy(D^\perp) = d_1$ ve $boy(D_\theta) = d_2$ ise

i) $d_2 = 0$ ise M , bir anti- invaryant altmanifolddur.

ii) $d_1 = 0$ ve $\theta = 0$ ise M , bir invaryant altmanifolddur.

iii) $d_1 \cdot d_2 \neq 0$ ve $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ ise M proper pseudo – slant altmanifolddur.

$(\bar{M}, \varphi, \xi_i, \eta^i, g)$ genelleştirilen Kenmotsu manifoldu pseudo-slant altmanifoldu M olsun.

$$P_1: \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(D^\perp), P_2: \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(D_\theta)$$

ortogonal projeksiyonları gösterebilir. Her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$X = p_1 X + p_2 X + \sum_{i=1}^s \eta^i(X) \xi_i$$

Olur. Burada $P_1 X \in \Gamma(D^\perp)$ ve $P_2 X \in \Gamma(D_\theta)$ şeklindedir. Bu denklemden hareketle

$$\varphi X = \varphi p_1 X + \varphi X p_2 X \quad (5.1)$$

elde edilir. O halde teğet ve normal parçalanışlardan

$$TX + NX = TP_1 X + NP_1 X + TP_2 X + NP_2 X \quad (5.2)$$

olduğu görülür. $P_1 X \in \Gamma(D^\perp)$ olduğundan $TP_1 X = 0$ dir.

$$TX + NX = TP_2 X + NP_1 X + NP_2 X$$

bulunur. Buradan

$$TX = TP_2 X$$

ve

$$NX = NP_1 X + NP_2 X$$

olduğu görülür. Burada

$$\varphi P_1 X = NP_1 X, TP_1 X = 0$$

ve

$$\varphi P_2 X = TP_2 X, NP_2 X, TP_2 X \in \Gamma(D_\theta)$$

dir. Eğer $\mu, \varphi(TM)$ 'nin $T^\perp M$ 'deki ortogonal tümleyeni ise $X \in \Gamma(D_\theta)$ ve $Z \in \Gamma(D^\perp)$ için

$$\varphi X = TX + NX$$

ve

$$\varphi Z = TZ + NZ = NZ \in N(D^\perp), TZ = 0$$

dır.

$$g(\varphi X, \varphi Z) = g(X, Z) - \sum_{i=1}^S \eta^i(Z) \eta^i(X)$$

olur. Buradan

$$g(TX + NX, NZ) = g(X, Z) - \sum_{i=1}^S \eta^i(X) g(Z, \xi_i)$$

$$g(TX, NZ) + g(NX, NZ) = g(X, Z)$$

$$g(NX, NZ) = 0$$

olduğu görülür. Burada $NX \in N(D_\theta)$ ve $NZ \in N(D^\perp)$ olduğundan, $N(D^\perp)$ ve $N(D_\theta)$ ortogonaldır. O halde

$$T^\perp M = N(D^\perp) \oplus N(D_\theta) \oplus \mu$$

şeklinde ifade edebiliriz.

5.1. Teorem: $(\bar{M}, \varphi, \xi_i, \eta^i, g)$ genelleştirilen Kenmotsu manifold ve M' de pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Bu taktirde $X, Y \in \Gamma(D^\perp \oplus D_\theta)$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^S \eta^i([X, Y]) = 0$$

dır.

İspat. Her $X, Y \in D^\perp \oplus D_\theta$ için

$$\sum_{i=1}^S g([X, Y], \xi_i) = \sum_{i=1}^S g(\tilde{\nabla}^{XY} - \tilde{\nabla}^{YX}, \xi_i)$$

olur. O halde

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^s g([X, Y], \xi_i) &= \sum_{i=1}^s g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, \xi_i) \\
&\quad \sum_{i=1}^s -g(\nabla_X \xi_i, Y) + \sum_{i=1}^s g(\nabla_X \xi_i, X) \\
&\quad \sum_{i=1}^s \{-g(-X + \eta^i(X)\xi_i, Y) + g(-Y + \eta^i(Y)\xi_i, X)\} \\
&= g(X, Y) \sum_{i=1}^s -\eta^i(X)\eta^i(Y) - g(Y, X) + \sum_{i=1}^s \eta^i(X)\eta^i(Y)
\end{aligned}$$

olur. Böylece gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\sum_{i=1}^s g([X, Y], \xi_i) = \sum_{i=1}^s \eta^i([X, Y]) = 0$$

olduğu görülür.

5.2. Teorem: $(\bar{M}, \varphi, \xi_i, \eta^i, g)$ genelleştirilen Kenmotsu manifoldunun pseudo-slant altmanifoldu M olsun. O halde her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X T)Y = \sum_{i=1}^s g(TX, Y)\xi_i - \sum_{i=1}^s \eta^i(Y)TX$$

olması için gerek ve yeter şart

$$(\nabla_X T^2)Y = \lambda \sum_{i=1}^s \{g(X, Y)\xi_i - 2\eta(X)\eta^i(Y)\xi_i + \eta^i(Y)X\}$$

dir.

İspat. Her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X T)Y = \nabla_X TY - T\nabla_X Y$$

Yazılır. Burada T ve T^2

$$\begin{aligned}
 (\nabla_X T^2)Y &= \nabla_X T^2 Y - T^2 \nabla_X Y \\
 &= \nabla_X T(TY) - T(T \nabla_X Y) \\
 &= (\nabla_X T)TY + T \nabla_X TY - T(\nabla_X TY - (\nabla_X T)Y) \\
 &= (\nabla_X T)TY + T \nabla_X TY - T \nabla_X TY + (T \nabla_X T)Y
 \end{aligned}$$

Böylece

$$(\nabla_X T^2)Y = (\nabla_X T)TY + T(\nabla_X T)Y$$

yazılır. O halde denklemin kabulünden Y yerine TY yazılırsa

$$(\nabla_X T^2)Y = \sum_{i=1}^s g(TX, TY) \xi_i - \sum_{i=1}^s \eta^i(TY)TX + \sum_{i=1}^s T(g(TX, TY) \xi_i - \sum_{i=1}^s \eta^i(Y)TX)$$

böylece gerekli düzenlemelerle

$$(\nabla_X T^2)Y = \sum_{i=1}^s -g(TX, TY)\xi_i - \sum_{i=1}^s \eta^i(Y)T^2X$$

olur.

$$\begin{aligned}
 (\nabla_X T^2)Y &= \sum_{i=1}^s \{ \cos^2 \theta g(X - \eta^i(X)\xi_i, Y)\xi_i + \cos^2 \theta \eta^i(Y)(X - \eta^i(X)\xi_i) \\
 &= \cos^2 \theta \sum_{i=1}^s \{ g(X, Y)\xi_i - \eta^i(Y)\eta^i(Y)\xi_i \} \\
 &\quad + \cos^2 \theta \sum_{i=1}^s \{ \eta^i(Y)X - \eta^i(Y)\eta^i(X)\xi_i \} \\
 &= \cos^2 \theta \sum_{i=1}^s \{ g(X, Y)\xi_i - 2 \eta^i(X)\eta(Y)\xi_i + \eta^i(Y)X \}
 \end{aligned}$$

Böylece $\lambda = \cos^2 \theta$

$$(\nabla_X T^2)Y = \lambda \sum_{i=1}^s \{g(X, Y)\xi_i - 2\eta^i(X)\eta(Y)\xi_i + \eta^i(Y)X\}$$

Olduğu görülür. Tersine

$$(\nabla_X T^2)Y = \lambda \sum_{i=1}^s \{g(X, Y)\xi_i - 2\eta^i(X)\eta(Y)\xi_i + \eta^i(Y)X\}$$

olsun.

$$\begin{aligned} (\nabla_X T^2)Y &= \lambda \sum_{i=1}^s \{g(X, Y)\xi_i - \eta^i(X)\eta(Y)\xi_i + \eta^i(Y)X - \eta^i(X)\eta^i(Y)\xi_i\} \\ &= \lambda \sum_{i=1}^s (g(Y - \eta^i(Y)\xi_i, X)\xi_i) + \lambda \sum_{i=1}^s \eta^i(Y)(X - \eta^i(X)\xi_i) \end{aligned}$$

buradan $\lambda = \cos^2\theta$ olduğundan

$$\begin{aligned} (\nabla_X T^2)Y &= \cos^2\theta \sum_{i=1}^s (g(Y - \eta^i(Y)\xi_i, X)\xi_i) + \cos^2\theta \sum_{i=1}^s \eta^i(Y)(X - \eta^i(X)\xi_i) \\ &= \sum_{i=1}^s \{-g(T^2Y, X)\xi_i - \eta^i(Y)T^2X\} \end{aligned}$$

Böylece T^2 yerine T alınırsa

$$(\nabla_X T)Y = \sum_{i=1}^s \{-g(TY, X)\xi_i - \eta^i(Y)TX\}$$

yazılır. Buradan

$$(\nabla_X T)Y = \sum_{i=1}^s g(Y, TX)\xi_i - \sum_{i=1}^s \eta^i(Y)TX$$

elde edilir.

5.3. Teorem: $(\bar{M}, \varphi, \xi_i, \eta^i, g)$ genelleştirilen Kenmotsu manifold, M' de pseudo-slant alt manifoldu olsun. Bu taktirde M anti - invaryant olması için gerek ve yeter şart $\nabla T^2 = 0$ olmasıdır.

İspat. Kabuledelimki $\nabla T^2 = 0$ olsun.

$$T^2 Y = -\cos^2 \theta \sum_{i=1}^s (Y - \eta^i(Y) \xi_i)$$

dır. Buradan

$$\nabla_X T^2 Y = -\cos^2 \theta \sum_{i=1}^s (\nabla_X Y - X \eta^i(Y) \xi_i - \sum_{i=1}^s \eta^i(Y) \nabla_X \xi_i)$$

yazılabilir. Ayrıca

$$\sum_{i=1}^s X \eta^i(Y) = \sum_{i=1}^s X g(Y, \xi_i) = \sum_{i=1}^s g(\nabla_X Y, \xi_i) + \sum_{i=1}^s g(\nabla_X \xi_i, Y)$$

dir. O halde

$$\begin{aligned} \nabla_X T^2 Y &= -\cos^2 \theta (\nabla_X Y) + \cos^2 \theta \sum_{i=1}^s \eta^i(\nabla_X Y) \xi_i \\ &+ \cos^2 \theta \sum_{i=1}^s g(\nabla_X \xi_i, Y) \xi_i + \cos^2 \theta \sum_{i=1}^s \eta^i(Y) \nabla_X \xi_i \end{aligned}$$

bulunur. O halde

$$\begin{aligned} \nabla_X T^2 Y &= -\cos^2 \theta (\nabla_X Y) + \cos^2 \theta \sum_{i=1}^s \eta^i(\nabla_X Y) \xi_i \\ &+ \cos^2 \theta \sum_{i=1}^s g(X, Y) \xi_i - \sum_{i=1}^s \eta^i(X) \eta^i(Y) \xi_i \\ &+ \cos^2 \theta \sum_{i=1}^s (\eta(Y) X) \xi_i - \sum_{i=1}^s \eta^i(X) \eta^i(Y) \xi_i \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\nabla_X T^2 Y = -\cos^2 \theta (\nabla_X Y) + \cos^2 \theta \sum_{i=1}^s \eta^i(\nabla_X Y) \xi_i$$

yazılır.

$$\begin{aligned} \nabla_X T^2 Y - T^2 \nabla_X Y &= -\cos^2 \theta \sum_{i=1}^s \{ \nabla_X Y - \eta^i(\nabla_X Y) \xi_i - g(\nabla_X \xi, Y) \xi_i \\ &\quad - \sum_{i=0}^s \eta^i(Y) \nabla_X \xi_i - \nabla_X Y \} + \sum_{i=0}^s \eta^i(\nabla_X Y) \xi_i \} \end{aligned}$$

olur.

$$(\nabla_X T^2) Y = \cos^2 \theta (g(X, Y) \xi_i - 2 \sum_{i=0}^s \eta^i(X) \eta(Y) \xi_i + \sum_{i=0}^s \eta^i(Y) X)$$

yazılabilir. Buradan da hipotez kullanılırsa

$$\cos^2 \theta \left\{ \sum_{i=0}^s g(X, Y) \xi_i - 2 \sum_{i=0}^s \eta^i(X) \eta(Y) \xi_i + \sum_{i=0}^s \eta^i(Y) X \right\} = 0$$

olur. $\cos^2 \theta \neq 0$ kabul edelim. Buradan

$$\sum_{i=0}^s g(X, Y) \xi_i - 2 \sum_{i=0}^s \eta^i(X) \eta^i(Y) \xi_i + \sum_{i=0}^s \eta^i(Y) X = 0$$

dir. Son olarak denkleminin her iki tarafı ξ_i ile çarpılırsa

$$g(X, Y) - \sum_{i=0}^s \eta^i(X) \eta^i(Y) = g(\varphi X, \varphi Y) = 0$$

olduğundan $g(\varphi X, \varphi Y) = 0 \Leftrightarrow \varphi X = 0, \varphi = 0$ olur ki bu kabulumüz de çelişir dolayısıyla M anti invaryanttır. Tersı acıktır.

5.4.Teorem: $(\bar{M}, \varphi, \xi_i, \eta^i, g)$ genelleştirilen Kenmotsu manifoldunun pseudo – slant altmanifoldu Molsun. $D^\perp$ ’ in integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart

$$A_{NX}Y = A_{NY}X \quad (5.3)$$

olmasıdır.

İspat. Her $X, Y \in \Gamma(D^\perp)$ için

$$(\tilde{\nabla}_X)\varphi Y = \tilde{\nabla}_X\varphi Y - \varphi\tilde{\nabla}_X Y$$

dir. Buradan

$$\sum_{i=1}^s g(NX, Y)\xi_i - \sum_{i=1}^s \eta^i(Y)NX = \tilde{\nabla}_X NY - \varphi(\nabla_X Y + h(X, Y))$$

olur. Diğer taraftan

$$A_{NY}X - \nabla_X^\perp N Y + T\nabla_X Y + N\nabla_X Y + nh(X, Y) + nh(X, Y) = 0$$

olduğundan

$$A_{NY}X + T\nabla_X Y + th(X, Y) = 0$$

olur. X ve Y yer değiştirirse

$$A_{NX}Y + T\nabla_Y X + th(X, Y) = 0 \quad (5.4)$$

olacağından iki denklem taraf tarafa çıkartılırsa

$$A_{NY}X - A_{NX}Y + T\nabla_X Y - T\nabla_Y X = 0$$

olur. Burada gerekli düzenlemelerle

$$T[Y, X] = A_{NY}X - A_{NX}Y \quad (5.5)$$

elde edilir. Sonuç olarak $[Y, X] \in D^\perp$ olması için gerek ve yeter şart

$$A_{NY}X = A_{NX}Y$$

olmasıdır.

5.5.Teorem: $(\bar{M}, \varphi, \xi_i, \eta^i, g)$ genelleştirilen Kenmotsu manifoldunun pseudo – slant altmanifoldu M olsun. $D^\perp$ ’ in integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart

$$(\nabla_Z T)W = (\nabla_W T)Z \quad (5.6)$$

olmasıdır.

İspat. $Z, W \in \Gamma(D^\perp)$ için

$$(\tilde{\nabla}_Z \varphi)W = \sum_{i=1}^s g(\varphi Z, Y)\xi_i - \sum_{i=1}^s \eta^i(Y)\varphi Z$$

dir. Burada

$$\tilde{\nabla}_Z \varphi W - \varphi \tilde{\nabla}_Z W = \sum_{i=1}^s g(NZ, Y)\xi_i - \sum_{i=1}^s \eta^i(Y)NZ$$

yazılabilir. Buradan

$$\tilde{\nabla}_Z NW - \varphi(\nabla_Z W + h(W, Z)) = 0 \quad (5.7)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$-A_{NW}Z + \nabla_Z^\perp NW - T\nabla_Z W - N\nabla_Z W - th(W, Z) - nh(X, Y) = 0 \quad (5.8)$$

yazılabilir. Sondakinin teğet parçası dikkate alınır

$$A_{NW} Z + T \nabla_Z W + th(W, Z) = 0 \quad (5.9)$$

bulunur. O halde

$$A_{NW} Z + T \nabla_Z W + T \nabla_W Z - T \nabla_W Z + th(W, Z) = 0 \quad (5.10)$$

yazılabilir. Son olarak

$$T[W, Z] = A_{NW} Z + T \nabla_W Z + th(W, Z)$$

olduğu görülür. Eğer $D^\perp$ integrallenebilir ise $[Z, W] \in \Gamma(D^\perp)$ yazılabilir. $[Z, W] \in \Gamma(D^\perp)$ olduğundan

$$A_{NW} Z + T \nabla_W Z + th(W, Z) = 0 \quad (5.11)$$

dır. Benzer olarak

$$A_{NZ} W + T \nabla_Z W + th(W, Z) = 0 \quad (5.12)$$

bulunur. Son iki denklemden

$$A_{NW} Z - A_{NZ} W + T \nabla_W Z - T \nabla_Z W = 0 \quad (5.13)$$

elde edilir ki buradan

$$(\nabla_Z T) W = (\nabla_W T) Z$$

yazılabilir. Tersine

$$(\nabla_Z T) W = (\nabla_W T) Z$$

olsun. Böylece

$$\nabla_Z TW - T\nabla_Z W = \nabla_W TZ - T\nabla_W Z$$

yazılır. Burada her $Z, W \in \Gamma(D^\perp)$ için $TW = 0$ olduğundan

$$T\nabla_W Z - T\nabla_Z W = T[W, Z] = 0$$

dır. Dolayısıyla $D^\perp$ integrallenebilirdir.

5.6. Teorem: $(\bar{M}, \varphi, \xi_i, \eta^i, g)$ genelleştirilen Kenmotsu manifoldunun pseudo – slant altmanifoldu M olsun. D_θ 'in integrallenebilir olmasıdır.

$$P_1 \left\{ \nabla_X TY - T\nabla_Y X - A_{NY} X - th(X, Y) + \sum_{i=1}^s \eta^i(Y) TX \right\} = 0$$

şartını sağlamasıdır.

İspat.

$$P_1 : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(D^\perp), P_2 : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(D_\theta)$$

olmak üzere P_1 ve P_2 izdüşüm fonksiyonlarını alalım

$$(\tilde{\nabla}_X \varphi) Y = \tilde{\nabla}_X \varphi Y - \varphi \tilde{\nabla}_X Y$$

için

$$\sum_{i=1}^s g(\varphi X, Y) \xi_i - \sum_{i=1}^s \eta^i(Y) \varphi X = \tilde{\nabla}_X TY + \tilde{\nabla}_X NY - \varphi(\nabla_X Y + h(X, Y))$$

yazılabilir. O halde gerekli işlemler yapılırsa

$$0 = \nabla_X TY + h(X, TY) - A_{NY} X + \nabla_X^\perp NY - T\nabla_X Y - N\nabla_X Y$$

$$-th(X, Y) - nh(X, Y) - \sum_{i=1}^s g(TX, Y)\xi_i + \sum_{i=1}^s \eta^i(Y)TX + \sum_{i=1}^s \eta^i(Y)NX$$

şekline dönüşür. Buradan

$$0 = (\nabla_X T)Y - th(X, Y) - A_{NY} X + \sum_{i=1}^s \eta^i(Y)TX - \sum_{i=1}^s g(TX, Y)\xi_i$$

$$(\nabla_X N)Y + h(X, TY) - nh(X, Y) + \sum_{i=1}^s \eta^i(Y)NX$$

bulunur. Buradan

$$\nabla_X TY - T\nabla_X Y - A_{NY} X - th(X, Y) - \sum_{i=1}^s g(Y, TX)\xi_i + \sum_{i=1}^s \eta^i(Y)TX = 0$$

yazılır. Bu ifade tekrar düzenlenirse

$$0 = \nabla_X TY - T\nabla_X Y + T\nabla_Y X - T\nabla_Y X - A_{NY} X$$

$$- th(X, Y) - \sum_{i=1}^s g(Y, TX)\xi_i + \sum_{i=1}^s \eta^i(Y)TX$$

olduğu görülür. Böylece

$$T[X, Y] = \nabla_X TY - T\nabla_Y X - A_{NY} X - th(X, Y) - \sum_{i=1}^s g(Y, TX)\xi_i + \sum_{i=1}^s \eta^i(Y)TX$$

yazılabilir. O halde denkleminde P_1 projeksiyonu uygulanırsa

$$P_1 T[X, Y] = P_1 \{ \nabla_X TY - T\nabla_Y X - A_{NY} X - th(X, Y) + \sum_{i=1}^s \eta^i(Y)TX$$

olur. Dolayısıyla $[X, Y] \in \Gamma(D_\theta)$ olması için $P_1 T[X, Y] = 0$ yani

$$P_1\{\nabla_X TY - T\nabla_Y X - A_{NY} X - th(X, Y) + \sum_{i=1}^s \eta^i(Y)TX\} = 0$$

olmasıdır.

5.2.Tanım: $(\bar{M}, \varphi, \xi_i, \eta^i, g)$ genelleştirilen Kenmotsu manifoldunun pseudo-slant altmanifoldu M olsun

- i) Her $X, Y, \in \Gamma(D_\theta)$ için, $h(X, Y) = 0$ ise M ye D_θ -geodezik altmanifold,
- ii) Her $Z, W \in \Gamma(D^\perp)$ için, $h(Z, W) = 0$ ise M ye $D^\perp$ -geodezik altmanifold,
- iii) Her $X \in \Gamma(D_\theta)$ ve $Z \in \Gamma(D^\perp)$ için, $h(Z, W) = 0$ M' ye mixed-geodezik altmanifold denir [18].

5.7. Teorem: $(\tilde{M}\varphi, \xi_i, \eta^i, g)$ genelleştirilmiş Kenmotsu manifoldunun pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Eğer N, D_θ da paralel ise M , geodeziktir veya h, D_θ üzerinde $-\cos^2\theta$ karakteristik değeri ile n^2 ' nin bir karakteristik vektörünü içerir.

İspat. N, D_θ da paralel olmak üzere $\forall X, Y \in \Gamma(D_\theta)$ için

$$(\nabla_X N)Y = 0$$

olur. Dolayısıyla

$$nh(X, Y) - h(X, TY) - \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(Y) NX = 0$$

buradan y yerine

$$Y - \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(Y) \xi_\alpha$$

alınırsa

$$\begin{aligned}
0 &= nh(X, Y - \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(Y) \xi_\alpha) - h(X, TY) - \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(Y - \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(Y) \xi_\alpha) NX \\
&= nh(X, Y - \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(Y) \xi_\alpha) - h(X, TY) - \sum_{\alpha=1}^s g^\alpha(Y - \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(Y) \xi_\alpha, \xi_\alpha) NX \\
&= nh(X, Y - \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(Y) \xi_\alpha) - h(X, TY) - \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(Y) NX + \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(Y) NX \\
&= nh(X, Y - \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(Y) \xi_\alpha) - h(X, TY)
\end{aligned}$$

Böyle

$$nh\left(X, Y - \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(Y) \xi_\alpha\right) = h(X, TY) \quad (5.14)$$

Bu denkleme tensörünü uygulayalım

$$n^2 h(X, Y - \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(Y) \xi_\alpha) = nh(X, TY) \quad (5.15)$$

Buradan 5.14 de Y yerine TY alınırsa

$$nh(X, TY) = h(X, T^2 Y) \quad (5.16)$$

5.15 ve 5.16'dan

$$\begin{aligned}
n^2 h(X, Y - \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(Y) \xi_\alpha) &= nh(X, TY) = h(X, T^2 Y) \\
&\quad - \cos^2 \varphi h(X, Y - \sum_{\alpha=1}^s \eta^\alpha(Y) \xi_\alpha)
\end{aligned}$$

olduğu görülür buradan , $h = 0$ dır. Buradan da istenilen elde edilir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında genelleştirilen Kenmatsu manifoldlarının pseudo slantaltmanifoldlarının geometrik özellikleri çalışıldı. Öncelikle temel kavramlar genelleştirilen Kenmatsu manifoldu tanımı verilip örneklerle açıklandı. Ardından genelleştirilen Kenmatsu manifoldun pseudo slant altmanifold tanımından ortaya çıkan distribüsyonların integrallenebilirlik total geodezik, total umbiliklik özellikleri incelendi. Literatüre ilk defa Türkçe kaynak olarak kazandırılan bu tez çalışmasından hareketle genelleştirilen kenmatsu manifoldlarının diğer alt manifoldları da incelenebilir.

KAYNAKLAR

- Atçeken, M. (2011). Contact CR-Sub manifolds of Kenmotsu Manifolds, *Serdica Mathematics Journal*, 37(1), 67-78.
- Atçeken, M. and Dirik, S. (2012). On Contact CR-Submanifold of Kenmotsu Manifolds, *Acta Universitatis Sapientiae Mathematics*, 4(2), 182-198.
- Atçeken, M. and Dirik, S. (2014). On The Geometry of Kontak pseudo-Slant Submanifold of a Kenmotsu Manifold, *Gulf Mathematical of Journal*, 2(2), (51-66).
- Cabrerizo, J., L. Carriazo, A. Fernandez, L. M. and Fernandez, M. (2000). Structure on a Slant Submanifolds of a Contact Manifold, *Indian Journal Pure and Applied Mathematics*, 31(7), 857-864.
- Chen, B. Y. (1990). Slant Immersions, *Bulletin Australian Mathematical Society*, 41, 857-864.
- Dirik, S. and Atçeken, M. (2014). Kontak pseudo-Slant Submanifolds of a Nearly Cosymplectic Manifold, *Turkish Journal of Mathematics ve Computer Science*. ID 20140035, 14
- Gupta, R., Haider, S. M. K. and Shahid, M. H. (2004). Slant Submanifolds of a Kenmotsu Manifold, *Radovi Matematicki*, 12, 205-204.
- Kenmotsu, K. (1972). A Class of Almost Contact Riemannian Manifolds, *Tohoku Mathematical Journal Second Series*, 24, 93-103.
- Khan V. A. and Khan M. A. (2007). Kontak pseudo-Slant Submanifolds of a Sasakian Manifold, *Indian Journal Pure and Applied Mathematics*, (38)31-42.
- Lotta, A. (1996). Slant Submanifolds in Contact Geometry, *Bulletin of the Mathematical Society of Roumanie*, 39, 183-198.
- Lotta, A. (1998). Three-Dimensional Slant Submanifolds of K-Contact Manifolds, *Balkan Journal Geometry and Its Applications*, 3 (1), 37-51.
- Uddin, S., Ozel, C., Khan, M. A. and Singh, K. (2012). Some Classification Result on Totally Umbilical Proper Slant ve Hemi Slant Submanifolds of a Nearly Kenmotsu Manifold, *International Journal of Physica Sciences*, 7(40), 5538-5544.
- Uddin, S. C. Ozel and Khan V. A. (2012). A Classification of a Totally Umbilical Slant Submanifold of Cosymplectic Manifolds, *Hindawi Pupliching Corporation Abstract Applied Analysis*, ID 716967, 8.
- Yano, K. and Kon, M. (1976). Anti-Invariant Submanifolds, *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, No. 21. Marcel Dekker, Inc., New York- Basel.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : Erkan BAYHAN

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

1-) Bayhan, E. (2025, Mayıs). *Genelleştirilen Kenmotsu Manifoldların Pseudo-slant Altmanifoldları Üzerine*, 3rd International Symposium on Graduate Researches in Science, Dicle Üniversitesi, Diyarbakır,