



MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



GENELLEŞTİRİLMİŞ AÇIK KÜMELER ARACILIĞIYLA TANIMLANAN BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ SÜREKLİLİK TİPLERİ

FATİH ÇIVAK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Bölümü

DANIŞMAN
Prof. Dr. Uğur ŞENGÜL

İSTANBUL, 2020



MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



GENELLEŞTİRİLMİŞ AÇIK KÜMELER ARACILIĞIYLA TANIMLANAN BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ SÜREKLİLİK TİPLERİ

FATİH ÇIVAK

(520916015)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Bölümü

DANIŞMAN
Prof. Dr. Uğur ŞENGÜL

İSTANBUL, 2020

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

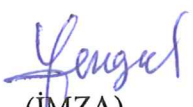
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Öğrencisi Fatih ÇIVAK'ın
“Genelleştirilmiş Açık kümeler Aracılığıyla Tanımlanan Bazı
Genelleştirilmiş Süreklilik Tipleri” başlıklı tez çalışması, 10.02.2020 tarihinde
savunulmuş ve jüri üyeleri tarafından başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri

Prof.Dr. Uğur ŞENGÜL
Marmara Üniversitesi

(Danışman)


(İMZA)

Prof. Dr. Ünsal TEKİR
Marmara Üniversitesi

(Üye)


(İMZA)

Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT
Yıldız Teknik Üniversitesi

(Üye)

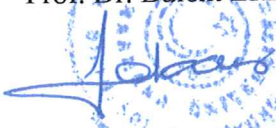

(İMZA)

ONAY

Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 12.02.2020 tarih ve
2020/06-07 sayılı kararı ile Fatih ÇIVAK'ın Teorik Matematik Anabilim Dalında Yüksek
Lisans derecesi alması onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof. Dr. Bülent EKİCİ




ÖNSÖZ

Bu çalışma, Marmara Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Öğretim Üyesi Prof. Dr. Uğur ŞENGÜL yönetiminde yapılmış ve Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne Yüksek Lisans tezi olarak sunulmuştur.

Bu konuyu bana veren ve çalışma boyunca değerli katkılarıyla yardımını esirgemeyen hocam Prof. Dr. Uğur ŞENGÜL'e teşekkür ederim.

Şubat 2020

Fatih ÇIVAK



İÇİNDEKİLER

ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
SEMBOLLER/SYMBOLS	v
KISALTMALAR/ABBREVIATIONS	v
1.GİRİŞ	1
1.1. GTS ve BIGTS İle İlgili Tanımlar ve İlgili Kavramlar	2
2. KARŞIT- (θ_μ, λ) -SÜREKLİLİK	6
2.1. Karşıit- (θ_μ, λ) -Süreklilik ve Hemen Hemen Karşıit- (θ_μ, λ) -Süreklilik Tanımları ve Bazı Süreklilik Tipleri ile İlişkileri	6
2.2 Karşıit- (θ_μ, λ) -Süreklilik Karakterizasyonu	8
2.3. Karşıit- (θ_μ, λ) -Kapalı Grafik	11
3. HEMEN HEMEN KARŞIT- (θ_μ, λ) -SÜREKLİLİK	14
3.1. Hemen Hemen Karşıit- (θ_μ, λ) -Süreklilik Karakterizasyonu	14
3.2. Hemen Hemen Karşıit- (θ_μ, λ) -Süreklilik Tipinin Diğer Bazı Süreklilik Tipleriyle İlişkisi	18
4. HEMEN HEMEN KARŞIT- $(\theta_{\mu_1, \mu_2}, \delta_{v_1, v_2})$ SÜREKLİLİK	23
4.1.Hemen Hemen Karşıit- $(\theta_{\mu_1, \mu_2}, \delta_{v_1, v_2})$ Süreklilik Tanım ve Karakterizasyonu	23
5. SONUÇLAR	27
KAYNAKLAR	
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ AÇIK KÜMELER ARACILIĞIYLA TANIMLANAN BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ SÜREKLİLİK TİPLERİ

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde gerekli ön bilgi, kısaltmalar ve bazı tanımlar verildi. Çalışacağımız uzay olan genelleştirilmiş topolojik uzay tanımı ve ihtiyaç duyacağımız temel bilgiler verildi.

İkinci bölümde *karşıt- (θ_μ, λ) -sürekliliği* ve *hemen hemen karşıt- (θ_μ, λ) -sürekliliği* tanımladık. Bu bölümde *karşıt- (θ_μ, λ) -sürekliliğin* karakterizasyonunu yaptık. Ayrıca *karşıt- (θ_μ, λ) -süreklilik* ve *hemen hemen karşıt- (θ_μ, λ) -sürekliliğin* birbiriyle ve bazı süreklilik tipleriyle ilişkisini inceledik.

Üçüncü bölümde *hemen hemen karşıt- (θ_μ, λ) -sürekliliğin* karakterizasyonunu yaparak bazı özellikler elde ettik.

Dördüncü bölümde *hemen hemen karşıt- $(\theta_{\mu_1, \mu_2}, \delta_{\nu_1, \nu_2})$ -sürekliliği* tanımlayıp karakterizasyonunu yaptık. Bazı süreklilik tipleri ile ilişkilerini inceledik ve bazı sonuçlar elde ettik.

Beşinci bölümde elde ettiğimiz sonuçları genel olarak belirttik.

ABSTRACT

SOME GENERALIZED CONTINUITY TYPES DEFINED BY GENERALIZED OPEN SETS

This study consists of five chapters.

In first chapter, it was given the background knowledge and necessary concepts. We summarized some basic information concerning generalized topology which we will study on it.

In the second chapter, we defined *contra- (θ_μ, λ) -continuity* and *almost contra- (θ_μ, λ) -continuity*. In this chapter we gave the characterization of *contra- (θ_μ, λ) -continuity*. We also examined the relationship between *contra- (θ_μ, λ) -continuity* and *almost contra- (θ_μ, λ) -continuity* and between some types of continuity.

In the third chapter, we gave characterization of *almost contra- (θ_μ, λ) -continuity* and we got some results.

In the fourth chapter, we defined *almost contra- $(\theta_{\mu_1, \mu_2}, \delta_{\nu_1, \nu_2})$ -continuity* and we gave the characterization. We also examined the relationship between some types of continuity and we got some results.

In the fifth chapter, we stated the results.

SEMBOLLER/SYMBOLS

Bu çalışmamızda kullanacağımız semboller olacaktır. Bunlardan bazıları aşağıda verilmiştir.

$\in$	elemanıdır
$\notin$	elemanı değildir
$=$	eşittir
$\neq$	eşit değildir
$\Rightarrow$	gerek şart
$\Leftrightarrow$	gerek ve yeter şart
$\Leftarrow$	yeter şart
$\subseteq$	alt küme
$\not\subseteq$	alt küme değildir

KISALTMALAR/ABBREVIATIONS

Bu çalışmamızda kullanacağımız kısaltmalar olacaktır. Bunlardan bazıları aşağıda verilmiştir.

<i>GTS</i>	Genelleştirilmiş Topolojik Uzay
<i>$(X, \mu), (X, \lambda), (X, \kappa)$</i>	X kümesinde tanımlanmış sırasıyla μ, λ ve κ genelleştirilmiş topolojileriyle verilen genelleştirilmiş topolojik uzaylar.
<i>$X \setminus A$</i>	$A \subseteq X$ olmak üzere A kümesinin bütünleyeni.
<i>$exp(X)$</i>	X kümesinin kuvvet kümesi.

1. GİRİŞ

Topolojide genelleştirilmiş açık kümeler sürekliliğin farklı tiplerinin genelleştirilmesinde önemli rol oynarlar. Birçok yazar genelleştirilmiş açık kümelerin çeşitli formlarını kullanarak sürekliliğin farklı tiplerini tanıtmış ve bunları incelemiştir.

Topolojik uzayların genelleştirmelerini, modifikasyonlarını ve bunlara ait özellikleri kullanarak topolojik uzaylar (ya da genelleştirilmiş topolojik uzaylar) arasındaki fonksiyonları ve ilgili ayırma aksiyomlarını inceleyen birçok bilimsel yayın vardır.

Genelleştirilmiş açık küme tiplerinin çoğu bir genelleştirilmiş topoloji oluşturur, β -açık kümeler, yarı açık kümeler örnek olarak verilebilir.

Genelleştirilmiş topoloji teorisi üzerine çalışmalar Császár tarafından yapıldı. O yayınlarında genelleştirilmiş topolojinin temel özelliklerini, temel operatörleri, genelleştirilmiş komşuluk sistemlerini, genelleştirilmiş topolojilerin bazı yapıları vb. alanlarında tanımlamaları çalışmıştır. İyi bilinir ki Császár anlamında genelleştirilmiş topoloji, bir küme üzerinde tanımlı topoloji kavramının bir genellemesidir. 1996'da Dontchev karşıt-sürekli fonksiyonları tanımlamıştır. Jafari ve Noiri karşıt ön-açık sürekli fonksiyonları tanımlamış ve bu alanda çalışmalar yapmışlardır. Caldas, β -açık kümelerin θ -modifikasyonunu kullanarak karşıt β_θ -sürekli fonksiyonlar üzerine çalışmıştır.

Z. Li ve W. Zhu karşıt süreklilik kavramını genelleştirilmiş topolojik uzaylara genelleştirmiştir.

Karşıt β_θ -sürekli fonksiyonlar göz önüne alındığında genelleştirilmiş açık kümenin θ -modifikasyonunu kullanan süreklilik tiplerinin genelleştirilmiş topolojik uzaylara bir genelleştirmesinin mümkün olup olmadığı sorulabilir. Bu çalışmanın amacı bir μ genelleştirilmiş topolojik uzayının θ_μ -modifikasyonunu kullanarak karşıt ve hemen hemen karşıt sürekliliğin bazı tipleri için bir genelleme elde etmektir.

1.1.GTS ve BIGTS İle İlgili Tanımlar ve İlgili Kavramlar

Bu çalışmamızda kullanacağımız bazı ifadelerin tanımları aşağıda verilmiştir.

Tanım 1.1.1. [1] $X \neq \emptyset$ olmak üzere eğer bir alt küme $\mu \subseteq \exp X$ için

$\emptyset \in \mu$, ve μ 'nün keyfi elemanlarının birleşimi yine μ 'ye ait ise μ 'ye bir genelleştirilmiş topoloji denir.

Tanım 1.1.2. [1] X boştan farklı bir küme ve X kümesi ile X kümesi üzerinde bir μ genelleştirilmiş topolojisi, birlikte genelleştirilmiş topolojik uzay olarak isimlendirilir ve (X, μ) olarak yazılır. Bir GTS (X, μ) eğer $X \in \mu$ ise kuvvetli GTS olarak isimlendirilir.

Tanım 1.1.3. [1] (X, μ) bir GTS ve $S \subseteq X$ olsun. Eğer $S \subseteq i_\mu(c_\mu(S))$ ise S kümesi μ -ön açık olarak isimlendirilir.

Tanım 1.1.4. [1] (X, μ) bir GTS ve $S \subseteq X$ olsun. Eğer $S \subseteq c_\mu(i_\mu(S))$ ise S kümesi μ -yarı açık olarak isimlendirilir.

Tanım 1.1.5. [2] (X, μ) bir GTS ve $S \subseteq X$ olsun. Eğer $S \subseteq c_\mu(i_\mu(c_\mu(S)))$ ise S kümesi μ - β -açık olarak isimlendirilir.

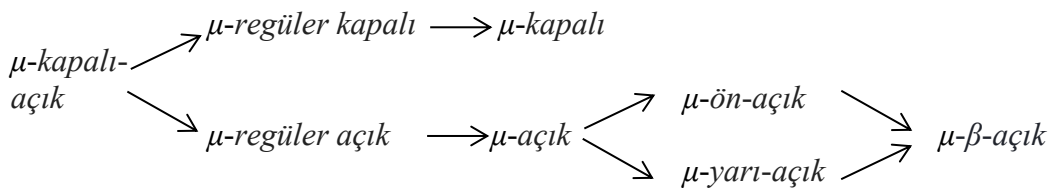
Yukarıda tanımlanan kümelerin aralarındaki bazı ilişkiler aşağıdaki diyagramda verilmiştir.

Tanım 1.1.6. [4] Bir (X, μ) genelleştirilmiş topolojinin alt kümesi S eğer;

$S = i_\mu(c_\mu(S))$ eşitliğini sağlıyorsa μ -regüler-açık (kısaca μ -açık),

$S = c_\mu(i_\mu(S))$ eşitliğini sağlıyorsa μ -regüler-kapalı (kısaca μ -kapalı) olarak isimlendirilir.

Diyagram 1



(X, μ) bir GTS olmak üzere bazı küme ailelerinin kısaltmaları aşağıda verilmiştir.

$\mu-O(X)$	X uzayında tüm μ -açık kümelerin ailesi.
$\mu-C(X)$	X uzayında tüm μ -kapalı kümelerin ailesi.
$\mu-RO(X)$	X uzayında tüm μ -regüler açık kümelerin ailesi.
$\mu-RC(X)$	X uzayında tüm μ -regüler kapalı kümelerin ailesi.
$\mu-\beta O(X)$	X uzayında tüm μ - β -açık kümelerin ailesi.
$\mu-SO(X)$	X uzayında tüm μ -yarı açık kümelerin ailesi.
$\mu-SC(X)$	X uzayında tüm μ -yarı kapalı kümelerin ailesi.
$\mu-PO(X)$	X uzayında tüm μ -ön açık kümelerin ailesi.
$\mu-PC(X)$	X uzayında tüm μ -ön kapalı kümelerin ailesi.
$\theta_\mu O(X)$	X uzayında tüm θ_μ -açık kümelerin ailesi.
$\theta_\mu C(X)$	X uzayında tüm θ_μ -kapalı kümelerin ailesi.

(X, μ) bir GTS olmak üzere bazı küme ailelerinin kısaltmaları aşağıda verilmiştir.

$\mu(x)$	X uzayında x elemanını içeren tüm μ -açık kümelerin ailesi.
$\mu-O(X, x)$	X uzayında x elemanını içeren tüm μ -açık kümelerin ailesi.
$\mu-C(X, x)$	X uzayında x elemanını içeren tüm μ -kapalı kümelerin ailesi.
$\mu-RO(X, x)$	X uzayında x elemanını içeren tüm μ -regüler açık kümelerin ailesi.
$\mu-RC(X, x)$	X uzayında x elemanını içeren tüm μ -regüler kapalı kümelerin ailesi.
$\mu-SO(X, x)$	X uzayında x elemanını içeren tüm μ -yarı açık kümelerin ailesi.
$\mu-SC(X, x)$	X uzayında x elemanını içeren tüm μ -yarı kapalı kümelerin ailesi.
$\mu-PO(X, x)$	X uzayında x elemanını içeren tüm μ -ön açık kümelerin ailesi.
$\mu-PO(X, x)$	X uzayında x elemanını içeren tüm μ -ön kapalı kümelerin ailesi.
$\mu-\beta O(X, x)$	X uzayında x elemanını içeren tüm μ - β -açık kümelerin ailesi.
$\mu-\beta O(X, x)$	X uzayında x elemanını içeren tüm μ - β -kapalı kümelerin ailesi.
$\theta_\mu O(X, x)$	X uzayında x elemanını içeren tüm θ_μ -açık kümelerin ailesi.
$\theta_\mu C(X, x)$	X uzayında x elemanını içeren tüm θ_μ -kapalı kümelerin ailesi.

(X, μ) bir genelleştirilmiş topolojik uzay olsun. Yukarıda kısaltmalarını verdiğimiz bazı küme ailelerini aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$\begin{aligned} \mu-RO(X, x) &= \{U: x \in U \in \mu-RO(X, \mu)\} \text{ ve } \mu-RC(X, x) = \{U: x \in U \in \mu-RC(X, \mu)\}. \\ \mu-PO(X, x) &= \{U: x \in U \in \mu-PO(X, \mu)\} \text{ ve } \mu-PC(X, x) = \{U: x \in U \in \mu-PC(X, \mu)\}. \\ \mu-SO(X, x) &= \{U: x \in U \in \mu-SO(X, \mu)\} \text{ ve } \mu-SC(X, x) = \{U: x \in U \in \mu-SC(X, \mu)\}. \\ \beta O(X, x) &= \{U: x \in U \in \mu-\beta O(X, \mu)\} \text{ ve } \mu-\beta C(X, x) = \{U: x \in U \in \mu-\beta C(X, \mu)\}. \end{aligned}$$

Tanım 1.1.7. [6] (X, μ) bir GTS ve $A \subseteq X$ olsun. $x \in U \in \mu$ için $c_\mu(U) \cap A \neq \emptyset$ gerçekleyen $x \in X$ noktalarının kümesi $\gamma_{\theta_\mu}(A)$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.8. [6] (X, μ) bir GTS ve $A \subseteq X$ olsun. A kümesi θ_μ -açık olması için gerek ve yeter koşul her $x \in A$ için $c_\mu(U) \subseteq A$ olacak şekilde $U \in \mu(x)$ olmasıdır. A kümesinin bütünleyeni θ_μ -açık ise bu kümeye θ_μ -kapalı denir.

İlgili notasyonlar aşağıdaki gibidir;

$$c_{\theta_\mu}(A) = \bigcap \{F \subseteq X : A \subseteq F, F \subseteq X \text{ ve } F \text{ kümesi } \theta_\mu\text{-kapalı}\}. [12]$$

$$i_{\theta_\mu}(S) = \bigcup \{V \subseteq X : V \subseteq S, V \subseteq X \text{ ve } V \text{ kümesi } \theta_\mu\text{-açık}\}. [12]$$

Şunu belirtelim ki $c_\mu(X \setminus S) = X \setminus i_\mu(S)$ eşitliği geçerlidir. Biliyoruz ki $i_\mu(S)$ ve $c_\mu(S)$ idempotent ve monotoniktir şöyle ki $\gamma : \exp X \rightarrow \exp X$ olmak üzere eğer $S \subseteq X$ kümesi $\gamma(\gamma(S)) = \gamma(S)$ eşitliğini sağlıyorsa idempotent aynı şekilde eğer $S \subset T \subset X$ olmak üzere $\gamma(S) \subset \gamma(T)$ oluyorsa monotonik olarak isimlendirilir. Tüm monotonik fonksiyonların ailesi Γ ile gösterilir [1] .

Tanım 1.1.9. [4] μ_1 ve μ_2 $X (\neq \emptyset)$ kümesinde birer GT olsun. Ayrıca bir $S \subseteq X$ alalım. Bu S eğer;

$S = i_{\mu_1}(c_{\mu_2}(S))$ eşitliğini sağlıyorsa (μ_1, μ_2) -regüler açık (kısaca r_{μ_1, μ_2} -açık)

$S = c_{\mu_1}(i_{\mu_2}(S))$ eşitliğini sağlıyorsa (μ_1, μ_2) -regüler kapalı (kısaca r_{μ_1, μ_2} -kapalı) olarak isimlendirilir.

Tanım 1.1.10. [4] μ_1, μ_2, ν_1 ve ν_2 $X (\neq \emptyset)$ kümesinde birer GT olsun.

Császár $\theta_{\mu_1, \mu_2}, \delta_{\nu_1, \nu_2} \subseteq 2^X$ ifadelerini aşağıdaki gibi tanımlar;

(1) $S \in \theta_{\mu_1, \mu_2}$ ancak ve ancak her $x \in S$ için, $x \in W \subseteq c_{\mu_2}(W) \subseteq S$ olacak şekilde bir $W \in \mu_1$ vardır.

(2) $S \in \delta_{\nu_1, \nu_2}$ ancak ve ancak $S \subseteq X$ ve $x \in S$ olmak üzere $x \in i_{\nu_1} \subseteq S$ olacak şekilde bir ν_2 -kapalı F kümesi vardır.

Tanım 1.1.11. [4] ν_1 ve ν_2 $X (\neq \emptyset)$ kümesinde birer GT olsun. Bir $S \in \delta_{\nu_1, \nu_2}$ elemanına δ_{ν_1, ν_2} -açık küme denir. Eğer S kümesinin bütünleyeni δ_{ν_1, ν_2} -açık küme ise S kümesi δ_{ν_1, ν_2} -kapalı küme olarak isimlendirilir.

Tanım 1.1.12. [4] μ_1, μ_2 $X (\neq \emptyset)$ kümesinde birer GT olsun. Bir $S \in \theta_{\mu_1, \mu_2}$ elemanına θ_{μ_1, μ_2} -açık küme denir. Eğer S kümesinin bütünleyeni θ_{μ_1, μ_2} -açık küme ise S kümesi

θ_{μ_1, μ_2} -kapalı küme olarak isimlendirilir.

Tanım 1.1.13. [13] X kümesinin bir alt kümesi olan S kümesini içeren tüm θ_{μ_1, μ_2} -kapalı kümelerin kesişimi $c_{\theta_{\mu_1, \mu_2}}(S)$ olarak yazılır bu S 'yi içeren en küçük θ_{μ_1, μ_2} -kapalı kümedir. İlgili notasyon aşağıdaki gibidir:

$$c_{\theta_{\mu_1, \mu_2}}(S) = \cap \{ F \subseteq X : S \subseteq F, F \text{ kümesi } X \text{ uzayında } \theta_{\mu_1, \mu_2}\text{-kapalı} \}$$

Tanım 1.1.14. [13] X kümesinin bir alt kümesi olan S kümesinin içerdği tüm θ_{μ_1, μ_2} -açık kümelerin birleşimi $i_{\theta_{\mu_1, \mu_2}}(S)$ olarak yazılır ve bu S 'nin içerdği en büyük θ_{μ_1, μ_2} -açık kümedir. İlgili notasyon aşağıdaki gibidir:

$$i_{\theta_{\mu_1, \mu_2}}(S) = \cup \{ V \subseteq X : V \subseteq S, V \text{ kümesi } X \text{ uzayında } \theta_{\mu_1, \mu_2}\text{-açık} \}$$

Tanım 1.1.15. [14] X kümesinin bir alt kümesi olan S kümesinin içerdği tüm δ_{v_1, v_2} -açık kümelerin birleşimi $i_{\delta_{v_1, v_2}}(S)$ olarak yazılır ve bu S kümesinin içerdği en büyük δ_{v_1, v_2} -açık kümedir. İlgili notasyon aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} i_{\delta_{v_1, v_2}}(S) &= \cup \{ V \subseteq X : V \subseteq S, V \text{ kümesi } X \text{ uzayında } \delta_{v_1, v_2}\text{-açık} \} \\ &= \cup \{ V \subseteq X : V \subseteq S, V \text{ kümesi } X \text{ uzayında } r_{v_1, v_2}\text{-açık} \} \end{aligned}$$

Tanım 1.1.16. [8] μ_1 ve μ_2 $X (\neq \emptyset)$ kümesinde birer GT olsun. Bu durumda (X, μ_1, μ_2) çift genelleştirilmiş topolojik uzay (BIGTS's) olarak isimlendirilir.

Tanım 1.1.17. [5] (X, μ) bir GTS ve A bu uzayın bir alt kümesi olsun.

$\cap \{ U \in \mu\text{-}O(X) : A \subseteq U \}$ kümesi A kümesinin μ -çekirdeği olarak isimlendirilir ve $ker_{\mu}(A)$ olarak yazılır.

Lemma 1.1.18. [5] (X, μ) bir GTS ve X kümesinin A ve B alt kümeleri için aşağıdaki özellikler geçerlidir:

- (1) $x \in ker_{\mu}(A)$ ancak ve ancak her $F \in \mu C(X, x)$ için $A \cap F \neq \emptyset$.
- (2) Eğer $A \in \mu$ ise $A \subseteq ker_{\mu}(A)$ ve $A = ker_{\mu}(A)$.
- (3) Eğer $A \subseteq B$, ise $ker_{\mu}(A) \subseteq ker_{\mu}(B)$.

2. KARŞIT- (θ_μ, λ) SÜREKLİLİK

2.1. Karşıit- (θ_μ, λ) -Süreklilik ve Hemen Hemen Karşıit- (θ_μ, λ) -Süreklilik

Tanımları ve Bazı Süreklilik Tipleri ile İlişkileri

Tanım 2.1.1. (X, μ) ve (Y, λ) birer GTS olsun ve $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu tanımlansın. Eğer her $V \in \lambda-O(Y)$ için $f^{-1}(V)$ X uzayında θ_μ -kapalı ise f fonksiyonu *karşıit- (θ_μ, λ) süreklidir*.

Tanım 2.1.2. (X, μ) ve (Y, λ) birer GTS olsun ve $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu tanımlansın. Eğer her $V \in \lambda-RO(Y)$ için $f^{-1}(V)$ X uzayında θ_μ -kapalı ise f fonksiyonu *hemen hemen karşıit- (θ_μ, λ) süreklidir*.

Örnek 2.1.3: $X=\{1,2,3\}$ kümesinde tanımlı $\mu=\{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}, \{1,2\}, X\}$ genelleştirilmiş topolojisini göz önüne alalım. Buradan

$\theta_\mu = \{\emptyset, \{3\}, \{1,2\}, X\}$, $\theta_\mu C(X) = \{\emptyset, \{3\}, \{1,2\}, X\}$ ve $\mu-RO(X) = \{\emptyset, \{3,4\}, X\}$ olarak tanımlanır.

Bu durumda $f: (X, \mu) \rightarrow (X, \mu)$

$$f(1)=2, f(2)=1, f(3)=3 \text{ ile tanımlı } f \text{ fonksiyonunu}$$

hemen hemen karşıit- (θ_μ, μ) süreklidir fakat $f^{-1}(\{1\}) = \{2\} \notin \theta_\mu C(X)$ *karşıit- (θ_μ, μ) sürekli* değildir.

Tanım 2.1.4. [14] (X, μ) ve (Y, λ) birer GTS olsun ve $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu tanımlansın. Eğer her $V \in \lambda-O(Y)$ için $f^{-1}(V)$ X uzayında μ -kapalı ise f fonksiyonu *karşıit- (μ, λ) süreklidir*.

Tanım 2.1.5. [14] (X, μ) ve (Y, λ) birer GTS olsun ve $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu tanımlansın. Eğer her $V \in \lambda-RO(Y)$ için $f^{-1}(V)$ X uzayında μ -kapalı ise f fonksiyonu *hemen hemen karşıit- (μ, λ) süreklidir*.

Örnek 2.1.6. $X=\{1,2,3,4\}$ kümesinde tanımlı $\mu = \{\emptyset, \{3\}, \{3,4\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, X\}$ genelleştirilmiş topolojisini göz önüne alalım. Buradan

$$\mu C(X) = \{\emptyset, \{1,2,4\}, \{1,2\}, \{3,4\}, \{4\}, X\}$$

$\theta_\mu = \{\emptyset, \{3,4\}, \{1,2\}, X\}$ ve $\theta_\mu C(X) = \{\emptyset, \{1,2\}, \{3,4\}, X\}$ olarak tanımlanır.

$$\mu\text{-}RO(X) = \{\emptyset, \{3,4\}, X\}$$

Bu durumda $f: (X, \mu) \rightarrow (X, \mu)$

$f(1)=3, f(2)=3, f(3)=2, f(4)=4$ ile tanımlı f fonksiyonunu

hemen hemen karşıt- (μ, μ) süreklidir fakat $f^{-1}(\{3,4\}) = \{1,2,4\} \notin \theta_\mu C(X)$ hemen hemen karşıt- (θ_μ, μ) sürekli değildir.

Örnek 2.1.7. $X=\{1,2,3,4\}$ ve $Y=\{1,2,3,4\}$ kümeleri verilsin.

Eşit olan bu kümelerde $\mu = \{\emptyset, \{3\}, \{3,4\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, X\}$ ve $\lambda = \{\emptyset, \{3,4\}\}$ genelleştirilmiş topolojilerini göz önüne alalım. Buradan Örnek 2.1.6.'daki $\mu C(X)$, θ_μ ve $\theta_\mu C(X)$ aynı şekilde tanımlanır.

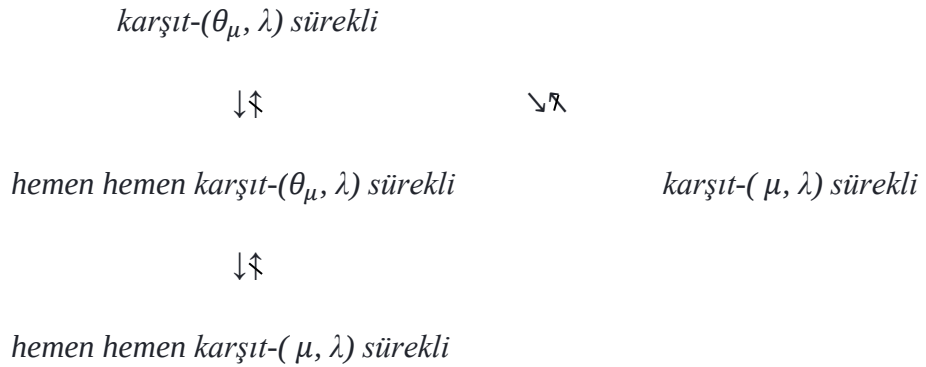
Bu durumda $f: (X, \mu) \rightarrow (X, \lambda)$

$f(1)=3, f(2)=3, f(3)=2, f(4)=4$ ile tanımlı f fonksiyonunu

karşıt- (μ, λ) süreklidir fakat $f^{-1}(\{3,4\}) = \{1,2,4\} \notin \theta_\mu C(X)$ karşıt- (θ_μ, μ) sürekli değildir.

(X, μ) ve (Y, λ) birer GTS olsun ve $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu tanımlansın. Yukarıdaki örneklerden yararlanılarak aşağıdaki diyagram 2'yi elde edebiliriz.

Diyagram 2



2.2. Karşıt- (θ_μ, λ) -Süreklilik Karakterizasyonu

Teorem 2.2.1. (X, μ) ve (Y, λ) birer GTS olsun ve $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda aşağıdakiler eşdeğerdir:

- (1) f fonksiyonu $\text{karşıt-}(\theta_\mu, \lambda)$ -süreklidir;
- (2) Y kümesinin her λ -kapalı alt kümesinin ters görüntüsü X kümesinde θ_μ -açıktır;
- (3) Her $x \in X$ ve $V \in \lambda\text{-}C(Y, f(x))$ için $f(U) \subseteq V$ olacak şekilde $U \in \theta_\mu O(X, x)$ vardır;
- (4) Her $A \subseteq X$ için $f(\gamma_{\theta_\mu}(A)) \subseteq \ker_\lambda(f(A))$ olur;
- (5) Y kümesinin her B alt kümesi için $\gamma_{\theta_\mu}(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(\ker_\lambda(B))$ olur.

İspat:

(1) $\Rightarrow$ (2) F kümesi Y kümesinin λ -kapalı bir alt kümesi olsun. Bu durumda $(Y \setminus F)$ kümesi λ -açıktır ve bundan dolayı $f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F)$ θ_μ -kapalıdır.

O halde $f^{-1}(F)$ θ_μ -açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (3) $x \in X$ ve $V \in \lambda\text{-}C(Y, f(x))$ olsun. Bu durumda $x \in f^{-1}(V)$ ve (2)'den $f^{-1}(V)$ θ_μ -açıktır. $U = f^{-1}(V)$ alalım ve buradan $f(U) \subseteq V$ elde edilir.

(3) $\Rightarrow$ (4) A kümesi X kümesinin bir alt kümesi olsun. Farz edelim ki $y \notin \ker_\lambda(f(A))$. Bundan dolayı Lemma 1.1.18.(1) 'den $f(A) \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $V \in \lambda\text{-}C(Y, y)$ vardır. Her $x \in f^{-1}(V)$ için (3)'den $f(W) \subseteq V$ olacak şekilde $W \in \theta_\mu O(X, x)$ vardır. Buradan

$$f(A \cap W) \subseteq f(A) \cap f(W) \subseteq f(A) \cap V = \emptyset$$

ve $A \cap W = \emptyset$ elde edilir. W , x 'i içeren θ_μ -açık küme olduğundan, Tanım 1.1.8'den her $x \in W$ için, $c_\mu(U) \subseteq W$ olacak şekilde $U \in \mu(x)$ vardır.

Buradan $c_\mu(U) \cap A \subseteq A \cap W = \emptyset$ elde edilir. Bundan dolayı her $x \in f^{-1}(V)$ için

$x \notin \gamma_{\theta_\mu}(A)$ olur.

O halde $f^{-1}(V) \cap \gamma_{\theta_\mu}(A) = \emptyset$ ve $V \cap f(\gamma_{\theta_\mu}(A)) = \emptyset$ olur. Buradan da $y \notin f(\gamma_{\theta_\mu}(A))$ elde edilir. Sonuç olarak $f(\gamma_{\theta_\mu}(A)) \subseteq \ker_\lambda(f(A))$ elde edilir.

(4) $\Leftrightarrow$ (5) B kümesi Y kümesinin bir altkümesi olsun. (4)'ten

$$f(\gamma_{\theta_\mu}(f^{-1}(B))) \subseteq \ker_\lambda(f(f^{-1}(B)))$$

$$\subseteq \ker_\lambda(B)$$

ve $\gamma_{\theta_\mu}(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(\ker_\lambda(B))$ elde edilir.

Tersine, farz edelim ki (5) sağlansın. A kümesi X kümesinin bir alt kümesi olsun ve

$B = f(A)$ alalım. Buradan

$$A \subseteq f^{-1}(B) \Rightarrow \gamma_{\theta_\mu}(A) \subseteq \gamma_{\theta_\mu}(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(\ker_\lambda(B))$$

$$\Rightarrow \gamma_{\theta_\mu}(A) \subseteq \gamma_{\theta_\mu}(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(\ker_\lambda(f(A)))$$

$$\Rightarrow f(\gamma_{\theta_\mu}(A)) \subseteq f(f^{-1}(\ker_\lambda(f(A)))) \subseteq \ker_\lambda(f(A))$$

$$\Rightarrow f(\gamma_{\theta_\mu}(A)) \subseteq \ker_\lambda(f(A)).$$

(5) $\Rightarrow$ (1) V kümesi Y kümesinin λ -açık bir alt kümesi olsun. (5) ve Lemma 1.1.18.(2)'den

$$\gamma_{\theta_\mu}(f^{-1}(V)) \subseteq f^{-1}(\ker_\lambda(V)) = f^{-1}(V) \text{ elde edilir.}$$

$f^{-1}(V) \subseteq \gamma_{\theta_\mu}(f^{-1}(V))$ her zaman sağlanır. Buradan $\gamma_{\theta_\mu}(f^{-1}(V)) = f^{-1}(V)$ elde edilir. O halde $f^{-1}(V)$, X uzayında θ_μ -kapalıdır. Sonuçta f karşıt- (θ_μ, λ) -sürekli dir.

Tanım 2.2.2. [2] (X, μ) ve (Y, λ) birer GTS olsun. Ayrıca $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $V \in \lambda\text{-}O(Y)$ için $f^{-1}(V)$ X uzayında μ -açık ise f fonksiyonu (μ, λ) -sürekli olarak isimlendirilir.

Teorem 2.2.3. $(X, \mu), (Y, \lambda)$ ve (Z, ν) birer GTS olsun. $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ ve $g: (Y, \lambda) \rightarrow (Z, \nu)$ fonksiyonları verilsin. Eğer f fonksiyonu karşıt (θ_μ, λ) -sürekli ve g fonksiyonu (λ, ν) -sürekli ise $g \circ f: (X, \mu) \rightarrow (Z, \nu)$ bileşke fonksiyonu karşıt- (θ_μ, ν) sürekli dir.

İspat: Y kümesinde bir ν -açık bir V kümesi alalım. Bu durumda g fonksiyonu (λ, ν) -sürekli olduğundan $g^{-1}(V)$ Y kümesinde λ -açıktır. O halde f fonksiyonu karşıt (θ_μ, λ) -sürekli olduğundan $f^{-1}(g^{-1}(V)) = (g \circ f)^{-1}(V)$ X uzayında θ_μ -kapalıdır. Bu durumda $g \circ f$ karşıt- (θ_μ, ν) sürekli dir.

Tanım 2.2.4. (X, μ) ve (Y, λ) birer GTS olsun. Eğer (X, μ) uzayında her θ_μ -açık U kümesi için $f(U)$, (Y, λ) uzayında θ_λ -açık ise $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu $(\theta_\mu, \theta_\lambda)$ -açık fonksiyon olarak isimlendirilir.

Teorem 2.2.5. (X, μ) , (Y, λ) ve (Z, ν) birer GTS olsun. $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ ve $g: (Y, \lambda) \rightarrow (Z, \nu)$ fonksiyonları verilsin. Eğer f fonksiyonu $\text{örten}-(\theta_\mu, \theta_\lambda)$ -açık fonksiyon ve $g \circ f: (X, \mu) \rightarrow (Z, \nu)$ bileşke fonksiyonu $\text{karşıt}-(\theta_\mu, \nu)$ sürekli ise g fonksiyonu $\text{karşıt}-(\theta_\lambda, \nu)$ sürekli dir.

İspat: V kümesi (Z, ν) uzayının bir ν -kapalı alt kümesi olsun. $g \circ f: (X, \mu) \rightarrow (Z, \nu)$ $\text{karşıt}-(\theta_\mu, \nu)$ -sürekli fonksiyon olduğundan $(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$ (X, μ) uzayında θ_μ -açıktır. Ayrıca f fonksiyonu $\text{örten}-(\theta_\mu, \theta_\lambda)$ -açık fonksiyon olduğundan $f(f^{-1}(g^{-1}(V))) = g^{-1}(V)$ Y uzayında θ_λ -açıktır. Teorem 2.2.1.(2)'den g fonksiyonu $\text{karşıt}-(\theta_\lambda, \nu)$ -sürekli dir.

Notasyon 2.2.6. [9] (X, μ) ve (Y, κ) genelleştirilmiş topoloji ve $\mathcal{U} = \{U \times V : U \in \mu, V \in \kappa\}$ olsun. $\mathcal{U}$ kümesinin $X \times Y$ üzerinde bir $\nu = \mu \times \kappa$ genelleştirilmiş topolojisini ürettiği bilinir ve bu topoloji $X \times Y$ üzerinde genelleştirilmiş çarpım topolojisi olarak isimlendirilir. $\nu = \{ \mathcal{U} \text{ kümesinin üyelerinin tüm olası birleşimleri} \}$

Lemma 2.2.7. [3] (X, μ) ve (Y, λ) birer genelleştirilmiş topoloji olsun. Eğer A kümesi μ -kapalı ve B kümesi λ -kapalı ise $A \times B$ çarpımı $X \times Y$ uzayında ν -kapalıdır.

Lemma 2.2.8. [3] $\{(X_i, \mu_i) : i \in I\}$ kümesi kuvvetli GTS'lerin bir ailesi olsun. Bu durumda her $i \in I$ için $p_i: \prod X_i \rightarrow X_i$ projeksiyon fonksiyonu sürekli dir.

Teorem 2.2.9. $\{(Y_i, \lambda_i) : i \in I\}$ kümesi kuvvetli GTS'nin bir ailesi olsun.

(X, μ) bir GT olmak üzere eğer $f: (X, \mu) \rightarrow (\prod Y_i, \nu)$ $\text{karşıt}-(\theta_\mu, \nu)$ -sürekli fonksiyon ise

$p_i: \prod Y_i \rightarrow Y_i$ projeksiyon olmak üzere her $i \in I$ için $p_i \circ f: X \rightarrow Y_i$ $\text{karşıt}-(\theta_\mu, \lambda_i)$ -sürekli dir.

İspat: Sabit bir $i \in I$ alalım. Y_i 'de keyfi bir λ_i -açık U_i kümesi alalım. Her (Y_i, λ_i) kuvvetli GTS olduğundan ve kaynak [3] Önerme 2.7'den $p_i: \prod Y_i \rightarrow Y_i, (\nu, \lambda_i)$ -sürekli dir. Bu da $p_i^{-1}(U_i)$ 'nin $(\prod Y_i, \nu)$ 'de ν -açık olduğunu gösterir. f fonksiyonu $\text{karşıt}-(\theta_\mu, \nu)$ -sürekli olduğundan $f^{-1}(p_i^{-1}(U_i)) = (p_i \circ f)^{-1}(U_i)$ θ_μ -kapalıdır.

Bundan dolayı $p_i \circ f$ $\text{karşıt}-(\theta_\mu, \lambda_i)$ -sürekli dir.

2.3. Karşıt- (θ_μ, λ) -Kapalı Grafik

Tanım 2.3.1. Bir $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu için, $\{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$ alt kümesi f fonksiyonunun grafiği olarak isimlendirilir ve $G(f)$ olarak yazılır.

Tanım 2.3.2. (X, μ) ve (Y, λ) birer GTS olsun. Bir $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonunun grafiği $G(f)$, eğer her $(x, y) \in (X \times Y) \setminus G(f)$ için $(U \times V) \cap G(f) = \emptyset$ olacak şekilde X uzayında x 'i içeren bir θ_μ -açık küme U ve Y uzayında y 'yi içeren bir λ -kapalı küme V varsa, *karşıt- (θ_μ, λ) -kapalı grafik* olarak isimlendirilir.

Teorem 2.3.3. (X, μ) ve (Y, λ) birer genelleştirilmiş topoloji olsun. $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ bir fonksiyon ve her $x \in X$ için $g(x) = (x, f(x))$ şeklinde tanımlanan $g: (X, \mu) \rightarrow (X \times Y, \nu)$ fonksiyonu f fonksiyonunun grafik fonksiyonu olsun. Eğer g *karşıt- (θ_μ, ν) -süreklili* ise f fonksiyonu *karşıt- (θ_μ, λ) -süreklili*dir.

İspat: V kümesi (Y, λ) uzayında λ -kapalı olsun. Lemma 2.2.7'den, $X \times V$ çarpım uzayı $X \times Y$ uzayında bir ν -kapalı kümedir. Buradan $f^{-1}(V) = g^{-1}(X \times V)$ θ_μ -açıktır. Bu durumda, f fonksiyonu *karşıt- (θ_μ, λ) -süreklili*dir.

Teorem 2.3.4. (X, μ) ve (Y, λ) birer GTS olsun. Bir $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonunun $G(f)$ grafiği için aşağıdakiler eşdeğerdir:

(1) $G(f)$ grafiği (θ_μ, λ) -kapalı grafikdir;

(2) Her $(x, y) \in (X \times Y) \setminus G(f)$ için $f(U) \cap V = \emptyset$ olacak şekilde X uzayında x 'i içeren bir θ_μ -açık küme U ve Y uzayında y 'yi içeren bir λ -kapalı küme V vardır.

İspat:

(1) $\Rightarrow$ (2) $(x, y) \in (X \times Y) \setminus G(f)$ olsun. (1)'den, $(U \times V) \cap G(f) = \emptyset$ olacak şekilde X uzayında x 'i içeren bir θ_μ -açık küme U ve Y uzayında y 'yi içeren bir λ -kapalı küme V vardır. Ayrıca $(x, y) \notin G(f)$, $x \in U$ ve $y \in V$ olduğundan $f(x) \neq y$ ve bundan dolayı

$f(U) \cap V = \emptyset$ elde ederiz.

(2) $\Rightarrow$ (1) $(x, y) \in (X \times Y) \setminus G(f)$ olsun (2)'den, $f(U) \cap V = \emptyset$ olacak şekilde X uzayında x 'i içeren bir θ_μ -açık küme U ve Y uzayında y 'yi içeren bir λ -kapalı küme V vardır. Buradan $(x, y) \in (U \times V) \subset (X \times Y) \setminus G(f)$ elde edilir.

Tanım 2.3.5 Bir GTS (X, μ) , eğer X uzayında ayrık her x, y nokta çifti için $x \in U, y \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde θ_μ -açık U ve V kümeleri varsa (X, μ) uzayı θ_μ - T_2 olarak isimlendirilir.

Tanım 2.3.6. [14] Bir GTS (X, μ) , eğer X uzayında ayrık her x, y nokta çifti için $x \in U, y \in V$ ve $c_\mu(U) \cap c_\mu(V) = \emptyset$ olacak şekilde μ -açık U ve V kümeleri varsa μ -Urysohn olarak isimlendirilir.

Teorem 2.3.7. Eğer $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu *karşıt* (θ_μ, λ) -*süreklı* fonksiyon ve (Y, λ) uzayı λ -Urysohn ise $X \times Y$ uzayında $G(f)$, *karşıt* (θ_μ, λ) -*kapalı* grafik ve $G(f)$, ν -*kapalıdır*.

İspat: $(x, y) \in (X \times Y) \setminus G(f)$ olsun. Bu durumda $f(x) \neq y$ olur. (Y, λ) uzayı λ -Urysohn olduğundan, $f(x) \in B, y \in C$ ve $c_\lambda(B) \cap c_\lambda(C) = \emptyset$ olacak şekilde λ -açık B ve C kümeleri vardır. Ayrıca f fonksiyonu *karşıt* (θ_μ, λ) -*süreklı* olduğundan, $f(A) \subset c_\lambda(B)$ olacak şekilde x 'i içeren X uzayının bir θ_μ -açık A kümesi vardır.

Bundan dolayı, $f(A) \cap c_\lambda(C) = \emptyset$ ve $X \times Y$ uzayında $G(f)$ *karşıt* (θ_μ, λ) -*kapalı* grafikdir.

$f(x) \in B$ ve $c_\lambda(B) \cap c_\lambda(C) = \emptyset$ olması $f(x) \notin c_\lambda(C)$ olduğunu verir, buradan

$x \in X \setminus f^{-1}(c_\lambda(C))$ ve $(x, y) \in (X \setminus f^{-1}(c_\lambda(C))) \times C \in \nu = \mu \times \lambda$ elde edilir.

Biz $(X \setminus f^{-1}(c_\lambda(C))) \times C \cap G(f) = \emptyset$ olduğunu göstermek istiyoruz.

Farz edelim ki bu doğru olmasın. Bu durumda $(x_1, y_1) \in (X \setminus f^{-1}(c_\lambda(C))) \times C \cap G(f)$ seçebiliriz.

Burada $(x_1, y_1) \in G(f)$ olması $y_1 = f(x_1)$ olduğunu ifade eder.

$(x_1, y_1) \in (X \setminus f^{-1}(c_\lambda(C))) \times C$ olması $f(x_1) \notin c_\lambda(C)$ ve $y_1 \in C$ olduğunu ifade eder.

Bu da $f(x_1) \in C \subseteq c_\lambda(C)$ çelişkisini gösterir.

O halde $(x, y) \in (X \setminus f^{-1}(c_\lambda(C))) \times C \subseteq (X \times Y) \setminus G(f)$ elde edilir.

Buradan $(X \times Y) \setminus G(f) \in \nu = \mu \times \lambda$ elde ederiz ki bu durumda $X \times Y$ uzayında $G(f)$, ν -*kapalıdır*.

Teorem 2.3.8. $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu *karşıt* (θ_μ, λ) -*süreklı* *injektif* olsun. Eğer (Y, λ) uzayı λ -Urysohn ise, (X, μ) uzayı θ_μ - T_2 olur.

İspat: İlk olarak $a \neq b$ olmak üzere $a, b \in X$ olsun. Burada $y_1 = f(a)$, $y_2 = f(b)$ aldığımızda $y_1 \neq y_2$ olur. (Y, λ) uzayı λ -Urysohn olduğundan $c_\lambda(W_1) \cap c_\lambda(W_2) = \emptyset$ olacak şekilde y_1 'i içeren λ -açık W_1 ve y_2 'yi içeren λ -açık W_2 kümeleri vardır. Bu durumda f fonksiyonu $\text{karşıt-}(\theta_\mu, \lambda)$ -sürekli olduğundan $f^{-1}(c_\lambda(W_1)), f^{-1}(c_\lambda(W_2)) \in \theta_\mu$ elde ederiz. Burada $U_1 = f^{-1}(c_\lambda(W_1))$, $U_2 = f^{-1}(c_\lambda(W_2))$ aldığımızda $a \in U_1$, $b \in U_2$ ve $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ elde ederiz. Şu halde X uzayı θ_μ - T_2 olur.



3. HEMEN HEMEN KARŞIT- (θ_μ, λ) -SÜREKLİLİK

3.1. Hemen Hemen Karşıit- (θ_μ, λ) -Süreklilik Karakterizasyonu

Teorem 3.1.1. (X, μ) ve (Y, λ) birer GTS olsun ve $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda aşağıdakiler eşdeğerdir:

- (1) f fonksiyonu *hemen hemen karşıit- (θ_μ, λ) -süreklidir*;
- (2) Y kümesinin her λ -regüler kapalı alt kümesinin ters görüntüsü X kümesinde θ_μ -açıktır;
- (3) Her $x \in X$ ve $V \in \lambda\text{-RC}(Y, f(x))$ için $f(U) \subseteq V$ olacak şekilde $U \in \theta_\mu O(X, x)$ vardır;

İspat:

(1) $\Rightarrow$ (2) F kümesi Y kümesinin λ -regüler kapalı bir alt kümesi olsun. Bu durumda $(Y \setminus F)$ λ -regüler açık olacağından ve (1)'den $f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F)$ θ_μ -kapalı olur. O halde $f^{-1}(F)$ θ_μ -açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (3) İlk olarak $x \in X$ ve Y kümesinde $f(x)$ 'i içeren bir λ -regüler kapalı V kümesi alalım. Bu durumda $x \in f^{-1}(V)$ ve (2)'den $f^{-1}(V)$ θ_μ -açıktır. $U = f^{-1}(V)$ alırsak $f(U) \subseteq V$ elde ederiz.

(3) $\Rightarrow$ (1) V kümesi (Y, λ) 'da λ -regüler açık olsun. Bu durumda $(Y \setminus V)$ λ -regüler kapalıdır. O halde $x \in f^{-1}(Y \setminus V)$ için $Y \setminus V, f(x)$ 'i içeren λ -kapalı kümedir. (3)'ten $U \in \theta_\mu O(X, x)$, $f(U) \subseteq (Y \setminus V)$ ve $U \subseteq f^{-1}(Y \setminus V)$ olacak şekilde vardır. θ_μ GT olduğundan $f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$ θ_μ -açıktır. Bu durumda $f^{-1}(V)$ θ_μ -kapalıdır.

Teorem 3.1.2. (X, μ) ve (Y, λ) birer GTS olsun ve $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda aşağıdakiler eşdeğerdir:

- (1) f fonksiyonu *hemen hemen karşıit- (θ_μ, λ) -süreklidir*;
- (2) Her $V \in \lambda$ için $f^{-1}(c_\lambda(V))$, θ_μ -açıktır;
- (3) Her $W \in \lambda\text{-C}(Y)$ için $f^{-1}(i_\lambda(W))$, θ_μ -kapalıdır;
- (4) Her $V \in \lambda\text{-O}(Y)$ için $f^{-1}(i_\lambda(c_\lambda(V)))$, θ_μ -kapalıdır;
- (5) Her $V \in \lambda\text{-C}(Y)$ için $f^{-1}(c_\lambda(i_\lambda(V)))$, θ_μ -açıktır.

İspat:

(1) $\Rightarrow$ (2) $V \in \lambda$ olsun. $c_\lambda(V)$, λr -kapalı olduğundan ([4], Lemma 3.2) $f^{-1}(c_\lambda(V))$, θ_μ -açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (3) $W \in \lambda$ -C(Y) olduğundan $i_\lambda(W)$, λr -açık ([4], Lemma 3.1) ve $(Y \setminus i_\lambda(V)) = c_\lambda(Y \setminus W)$, λr -kapalıdır.

Buradan

$$f^{-1}(c_\lambda(Y \setminus W)) = f^{-1}(Y \setminus i_\lambda(W)) = X \setminus f^{-1}(i_\lambda(W)), \theta_\mu\text{-açıktır}$$

ve bu durumda $f^{-1}(i_\lambda(W))$, θ_μ -kapalıdır.

(3) $\Rightarrow$ (1) V kümesi Y kümesinin bir λr -açık alt kümesi olsun. $c_\lambda(V)$, λ -kapalı ve (3)'ten $f^{-1}(i_\lambda(c_\lambda(V)))$ θ_μ -kapalıdır. Bu durumda $f^{-1}(V) = f^{-1}(i_\lambda(c_\lambda(V)))$, θ_μ -kapalı olduğundan, f fonksiyonu hemen hemen karşıt- (θ_μ, λ) -süreklidir.

(1) $\Rightarrow$ (4) $V \in \lambda$ olsun. $i_\lambda(c_\lambda(V))$, λr -açık olduğundan $f^{-1}(i_\lambda(c_\lambda(V)))$, θ_μ -kapalıdır.

(4) $\Rightarrow$ (1) Y kümesinin λr -açık her V alt kümesi için $V = i_\lambda(c_\lambda(V))$ ve V kümesi λ -açık olduğundan $f^{-1}(i_\lambda(c_\lambda(V)))$, X uzayında θ_μ -kapalıdır.

(1) $\Rightarrow$ (5) F kümesi Y kümesinin λ -kapalı alt kümesi olsun. Bu durumda $c_\lambda(i_\lambda(F))$, Y kümesinin λr -açık alt kümesi olur.

Bu durumda $f^{-1}(c_\lambda(i_\lambda(F)))$, X uzayında θ_μ -açıktır.

(5) $\Rightarrow$ (1) V kümesi Y kümesinin λr -kapalı alt kümesi olsun. Bu durumda

$V = c_\lambda(i_\lambda(V))$, λ -kapalıdır ve $f^{-1}(V) = f^{-1}(c_\lambda(i_\lambda(V)))$ olur.

Bu durumda $f^{-1}(c_\lambda(i_\lambda(V)))$, X uzayında θ_μ -açıktır. Teorem 3.1.1.(2)'den f fonksiyonu hemen hemen karşıt- (θ_μ, λ) -süreklidir.

Teorem 3.1.3. (X, μ) ve (Y, λ) birer GTS olsun ve $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda aşağıdakiler eşdeğerdir:

(1) f fonksiyonu hemen hemen karşıt- (θ_μ, λ) -süreklidir;

(2) Her $x \in X$ ve Y kümesinin $f(x)$ 'i içeren her λ -yarı açık V alt kümesi için

$f(U) \subseteq c_\lambda(V)$ olacak şekilde $U \in \theta_\mu O(X, x)$ vardır;

(3) Y kümesinin her λ -yarıaçık V alt kümesi için $f^{-1}(V) \subseteq i_{\theta_\mu}(f^{-1}(c_\lambda(V)))$.

İspat:

(1) $\Rightarrow$ (2) Öncelikle $x \in X$ ve Y kümesinin $f(x)$ 'i içeren λ -yarıaçık alt kümesi V alalım.

Bu durumda

$$V \subseteq c_\lambda(i_\lambda(V)) \subseteq c_\lambda(V)$$

ve

$$V \subseteq c_\lambda(i_\lambda(V)) \Rightarrow c_\lambda(V) \subseteq c_\lambda(c_\lambda(i_\lambda(V))) = c_\lambda(i_\lambda(V)) \subseteq c_\lambda(V) \text{ elde edilir.}$$

O halde şunu biliyoruz ki $c_\lambda(V)$ λ -regüler kapalıdır. Teorem 3.1.1.(2)'den $f^{-1}(c_\lambda(V)) \in \theta_\mu O(X, x)$. Burada $U = f^{-1}(c_\lambda(V))$ alalım. O halde $f(U) \subseteq c_\lambda(V)$ olur.

(2) $\Rightarrow$ (3) Y kümesinin λ -yarı açık bir V alt kümesi ve $x \in f^{-1}(V)$ alalım. Burada $f(x) \in V$ olur. Bu durumda (2)'den $f(U) \subseteq c_\lambda(V)$ olacak şekilde bir $U \in \theta_\mu O(X, x)$ vardır. O halde $x \in U \subseteq i_{\theta_\mu}(f^{-1}(c_\lambda(V)))$ olur. Buradan da $f^{-1}(V) \subseteq i_{\theta_\mu}(f^{-1}(c_\lambda(V)))$ elde edilir.

(3) $\Rightarrow$ (1) Öncelikle Y kümesinin λ -regüler kapalı bir V alt kümesini alalım ve (3) sağlansın. V kümesi λ -regüler kapalı olduğundan aynı zamanda λ -yarı açık kümedir. Bu durumu

$$V = c_\lambda(i_\lambda(V)) \Rightarrow V \subseteq c_\lambda(i_\lambda(V)) \text{ ve } (V = c_\lambda(V)) \text{ olarak ifade edebiliriz.}$$

O halde (3)'ten $f^{-1}(V) \subseteq i_{\theta_\mu}(f^{-1}(c_\lambda(V))) = i_{\theta_\mu}(f^{-1}(V))$ elde edilir ve

$$f^{-1}(V) = i_{\theta_\mu}(f^{-1}(V)) \in \theta_\mu O(X) \text{ olur.}$$

Bu da f fonksiyonunun hemen hemen karşıt- (θ_μ, λ) -sürekliliğini gösterir.

Teorem 3.1.4. (X, μ) ve (Y, λ) birer GTS olsun ve $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda aşağıdakiler eşdeğerdir:

- (1) f fonksiyonu hemen hemen karşıt- (θ_μ, λ) -süreklidir;
- (2) Y kümesinin her μ - β -açık alt kümesi V için $f^{-1}(c_\lambda(V))$ θ_μ -açıktır;
- (3) Y kümesinin her λ -yarı açık V alt kümesi için $f^{-1}(c_\lambda(V))$ θ_μ -açıktır;
- (4) Y kümesinin her λ -ön açık V alt kümesi için $f^{-1}(i_\lambda(c_\lambda(V)))$ θ_μ -kapalıdır.

İspat:

(1) $\Rightarrow$ (2) Y kümesinin bir λ - β -açık V alt kümesini alalım. Bu durumda $c_\lambda(V)$ λ -regüler kapalıdır çünkü:

$$\begin{aligned} V &\subseteq c_\lambda(i_\lambda(c_\lambda(V))) \\ \Rightarrow V &\subseteq c_\lambda(i_\lambda(c_\lambda(V))) \subseteq c_\lambda(V) \wedge c_\lambda(V) \subseteq c_\lambda(c_\lambda(i_\lambda(c_\lambda(V)))) = c_\lambda(i_\lambda(c_\lambda(V))) \\ \Rightarrow c_\lambda(V) &= c_\lambda(i_\lambda(c_\lambda(V))). \end{aligned}$$

O halde (1)'den $f^{-1}(c_\lambda(V))$ θ_μ -açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (3) Her λ -yarı açık küme λ - β -açık kümedir şöyle ki;

$$V \subseteq i_\lambda(c_\lambda(V)) \subseteq c_\lambda(i_\lambda(c_\lambda(V))) \text{ geçerlidir.}$$

Bu durumda (2)'den $f^{-1}(c_\lambda(V))$ θ_μ -açıktır.

(3) $\Rightarrow$ (4) Y kümesinde bir λ -ön açık V kümesi alalım. Bu durumda $i_\lambda(c_\lambda(V))$ λ -regüler açıktır şöyle ki;

$$\begin{aligned} V &\subseteq i_\lambda(c_\lambda(V)) \subseteq i_\lambda(c_\lambda(i_\lambda(c_\lambda(V)))) \subseteq i_\lambda(c_\lambda(V)) \\ \Rightarrow i_\lambda(c_\lambda(V)) &= i_\lambda(c_\lambda(i_\lambda(c_\lambda(V)))) \end{aligned}$$

Şu halde $Y \setminus i_\lambda(c_\lambda(V))$ λ -regüler kapalı (Jayanthi [8] Thm.3.14) ve aynı zamanda λ -yarı açıktır. Bu durumda (3)'ten

$$\begin{aligned} f^{-1}(c_\lambda(Y \setminus i_\lambda(c_\lambda(V)))) &= f^{-1}(Y \setminus i_\lambda(c_\lambda(V))) \\ &= X \setminus f^{-1}(i_\lambda(c_\lambda(V))) \end{aligned}$$

θ_μ -açıktır. O halde $f^{-1}(i_\lambda(c_\lambda(V)))$ θ_μ -kapalıdır.

(4) $\Rightarrow$ (1) Y kümesinde bir λ -regüler açık V kümesi alalım. Bu durumda

$V = i_\lambda(c_\lambda(V))$ olduğundan V kümesi aynı zamanda λ -ön açıktır ve (4)'ten

$f^{-1}(i_\lambda(c_\lambda(V))) = f^{-1}(V)$ θ_μ -kapalıdır. Bu da f fonksiyonunun hemen hemen karşıt- (θ_μ, λ) -sürekli olduğunu gösterir.

3.2. Hemen Hemen Karşıt- (θ_μ, λ) -Süreklilik Tipinin Diğer Bazı Süreklilik Tipleriyle İlişkisi

Tanım 3.2.1. [10] (X, μ) bir GTS olsun. Eğer X kümesinin her μ -açık alt kümesi V ve her $x \in V$ için $x \in F \subseteq V$ olacak şekilde X kümesinde x 'i içeren bir μ -regüler kapalı F kümesi varsa (X, μ) uzayı μ - P_Σ olarak isimlendirilir.

Tanım 3.2.2. (X, μ) ve (Y, λ) birer GTS olsun. Ayrıca $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu tanımlansın. Eğer Y kümesinde λ -açık V kümesi için $f^{-1}(V)$ θ_μ -açık ise f fonksiyonu *strongly- (θ_μ, λ) -süreklili* olarak isimlendirilir.

Teorem 3.2.3. (X, μ) ve (Y, λ) birer GTS olsun. Ayrıca $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu verilsin. Eğer f hemen hemen karşıt- (θ_μ, λ) sürekli fonksiyonu her $V \in \lambda$ - $O(Y)$ için $i_{\theta_\mu}(f^{-1}(c_\lambda(V))) \subseteq f^{-1}(V)$ özelliğini sağlıyorsa f fonksiyonu aynı zamanda *strongly- (θ_μ, λ) süreklili*dir.

İspat: Öncelikle $V \in \lambda$ - $O(Y)$ olsun. Bu durumda $V \subseteq c_\lambda(V) \subseteq c_\lambda(i_\lambda(V))$ kapsamından V kümesinin λ -yarı açık küme olduğu görülür. Teorem 3.1.4.(3)'ten $f^{-1}(c_\lambda(V)) \in \theta_\mu O(X)$ elde edilir. Bu da

$$f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(c_\lambda(V)) = i_{\theta_\mu}(f^{-1}(c_\lambda(V))) \subseteq f^{-1}(V) \Rightarrow f^{-1}(V) \in \theta_\mu O(X) \text{ olduğunu verir.}$$

Sonuçta f fonksiyonu *strongly- (θ_μ, λ) süreklili*dir.

Teorem 3.2.4. (X, μ) ve (Y, λ) birer genelleştirilmiş topoloji olsun.

Ayrıca $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda eğer f fonksiyonu *hemen hemen karşıt- (θ_μ, λ) sürekli* ve Y kümesi λ - P_Σ ise f fonksiyonu *strongly- (θ_μ, λ) -süreklili*dir.

İspat: V kümesi Y kümesinde bir λ -açık küme olsun. Y kümesi λ - P_Σ olduğundan $V = \mathcal{U}\{F \mid F \in \Omega\}$ olacak şekilde λ -regüler kapalı kümelerin bir alt ailesi Ω vardır. Ayrıca f fonksiyonu *hemen hemen karşıt- (θ_μ, λ) sürekli* olduğundan her $F \in \Omega$ için $f^{-1}(F)$ θ_μ -açıktır. Bu durumda $f^{-1}(V)$ X uzayında θ_μ -açıktır. Buradan f fonksiyonunun *strongly- (θ_μ, λ) -süreklili* olduğu anlaşılır.

Tanım 3.2.5. [10] (X, μ) genelleştirilmiş topolojik uzay olsun. X kümesinin keyfi μ -regüler açık U kümesi ve keyfi $x \in U$ için x 'i içeren μ -regüler kapalı V alt kümesi $x \in V$

$\subseteq U$ olacak şekilde varsa *zayıf- μ - P_Σ* (*weakly- μ - P_Σ*) olarak isimlendirilir.

Tanım 3.2.6. (X, μ) ve (Y, λ) birer genelleştirilmiş topoloji olsun. Bir $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu $x \in A$ noktasında $f(x)$ 'i içeren her bir λ -açık V kümesine karşın x noktasını içeren θ_μ -açık U kümesi $f(U) \subseteq i_\lambda(c_\lambda(V))$ gerçekenmek üzere karşı geliyorsa *hemen hemen- (θ_μ, λ) -süreklili* fonksiyon olarak isimlendirilir.

Teorem 3.2.7. Bir $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu *hemen hemen karşı- (θ_μ, λ) -süreklili* ve (Y, λ) *zayıf- λ - P_Σ* ise f fonksiyonu *hemen hemen- (θ_μ, λ) -süreklili*.

İspat: V kümesi Y uzayında λ -regüler açık olsun. Burada (Y, λ) *zayıf- λ - P_Σ* olduğundan λ -regüler kapalı kümelerin bir $\mathcal{A}$ ailesi $V = \bigcup \{ M : M \in \mathcal{A} \}$ olacak şekilde vardır. Ayrıca f fonksiyonu *hemen hemen- (θ_μ, λ) -süreklili* olduğundan her $M \in \mathcal{A}$ için $f^{-1}(M) \in \theta_\mu O(X)$ ve dolayısıyla $f^{-1}(V) \in \theta_\mu O(X)$ olur. O halde f fonksiyonu *hemen hemen- (θ_μ, λ) -süreklili*.

Tanım 3.2.8. [7] Bir GTS (X, μ) eğer $x \notin F$ olmak üzere X kümesinin her μ -kapalı F kümesi için $x \in U$ ve $F \subseteq V$ olacak şekilde ayrık μ -açık U ve V kümeleri varsa μ -regüler olarak isimlendirilir.

Teorem 3.2.9. [6] (X, μ) genelleştirilmiş topolojik uzayı μ -regüler olsun. Bu durumda X kümesinin bir A alt kümesi θ_μ -açıktır ancak ve ancak A kümesi μ -açıktır.

Teorem 3.2.10. (X, μ) ve (Y, λ) birer GTS olsun. Eğer (X, μ) uzayı μ -regüler ve $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu *karşı (μ, λ) -süreklili* ise f fonksiyonu aynı zamanda *hemen hemen karşı- (θ_μ, λ) -süreklili*.

İspat: V kümesi Y kümesinin bir λ -regüler açık alt kümesi olsun. Bu durumda f fonksiyonu *karşı (μ, λ) -süreklili* olduğundan $f^{-1}(V)$ X uzayında μ -kapalıdır ve (X, μ) uzayı μ -regüler olduğundan $f^{-1}(V)$ aynı zamanda θ_μ -kapalıdır. Bu durumda f fonksiyonu *hemen hemen karşı- (θ_μ, λ) -süreklili*.

Teorem 3.2.11. (X, μ) , (Y, λ) birer GTS olsun ve $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu verilsin. Ayrıca $g: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu her $V \in \lambda-O(Y)$ için $g(X \setminus f^{-1}(V)) = V$ olarak tanımlansın. Bu durumda eğer f *strongly- (θ_μ, λ) -süreklili* fonksiyon ise g fonksiyonu *hemen hemen karşı (θ_μ, λ) -süreklili*.

İspat: V kümesi Y kümesinin bir λ -regüler açık alt kümesi olsun. Bu durumda V

kümesi aynı zamanda Y kümesinde λ -açık bir kümedir. Buradan f fonksiyonu *strongly-* (θ_μ, λ) *sürekli* fonksiyon olduğundan $f^{-1}(V)$ 'nin X uzayında θ_μ -açık olduğu ve

$g^{-1}(V) = X \setminus f^{-1}(V)$ 'nin X uzayında θ_μ -kapalı olduğu elde edilir. Bu durumda g hemen hemen karşıt (θ_μ, λ) -süreklidir.

Tanım 3.2.12. (X, μ) , (Y, λ) birer GTS ve $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu verilsin. Eğer Y kümesinin her λ -regüler kapalı V alt kümesi için $f^{-1}(V)$ X uzayında μ -regüler kapalı oluyorsa f fonksiyonu (μ, λ) -R-map olarak isimlendirilir.

Teorem 3.2.13. (X, μ) , (Y, λ) ve (Z, ν) birer genelleştirilmiş topolojik uzay olsun. Ayrıca $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ ve $g: (Y, \lambda) \rightarrow (Z, \nu)$ fonksiyonları verilsin. Eğer f fonksiyonu hemen hemen karşıt- (θ_μ, λ) sürekli ve g fonksiyonu bir (λ, ν) -R-map ise $g \circ f: (X, \mu) \rightarrow (Z, \nu)$ bileşke fonksiyonu hemen hemen karşıt (θ_μ, ν) -süreklidir.

İspat: Z kümesinde bir ν -regüler kapalı V kümesi alalım. Bu durumda $(Z \setminus V)$ ν -regüler açıktır. Ayrıca g fonksiyonu bir (λ, ν) -R-map olduğundan $g^{-1}(V)$ Y kümesinde λ -regüler kapalıdır. O halde $(Y \setminus g^{-1}(V))$ Y kümesinde λ -regüler açık kümedir. Ayrıca f fonksiyonu hemen hemen karşıt (θ_μ, λ) -sürekli olduğundan;

$$(g \circ f)^{-1}(Z \setminus V) = f^{-1}(g^{-1}(Z \setminus V)) = f^{-1}(Y \setminus g^{-1}(V)) \text{ } X \text{ uzayında } \theta_\mu\text{-kapalıdır.}$$

Bu durumda $g \circ f$ bileşke fonksiyonu hemen hemen karşıt (θ_μ, ν) -süreklidir.

Tanım 3.2.14. (X, μ) ve (Y, λ) birer genelleştirilmiş topolojik uzay olsun. Ayrıca bir $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu tanımlansın. Eğer Y kümesinde her θ_λ -açık V kümesi için $f^{-1}(V)$ X uzayında θ_μ -açık ise f fonksiyonu weakly- $(\theta_\mu, \theta_\lambda)$ -irresolute olarak isimlendirilir.

Teorem 3.2.15: (X, μ) bir kuvvetli GTS ve (Y, λ) keyfi bir GTS olsun. Ayrıca ν , $X \times Y$ üzerinde μ ve λ tarafından belirlenen genelleştirilmiş çarpım topolojisi ve $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonundan hareketle $g(x) = (x, f(x))$ ile tanımlı $g: X \rightarrow X \times Y$ fonksiyonu f fonksiyonunun grafik fonksiyonu olsun. Eğer g fonksiyonu hemen hemen karşıt- (θ_μ, ν) -sürekli ise f fonksiyonu hemen hemen karşıt- (θ_μ, λ) -süreklidir.

İspat: Y kümesinde λ -regüler kapalı keyfi A kümesi alalım. Bu durumda $X \times A$, $(X \times Y, \nu)$ uzayında ν -regüler kapalıdır. Ayrıca g fonksiyonu hemen hemen karşıt- (θ_μ, ν) -sürekli

olduğundan $g^{-1}(X \times A) = f^{-1}(A)$ X uzayında θ_μ -açık olur. O halde f fonksiyonu *hemen hemen karşıt- (θ_μ, λ) -süreklidir*.

Teorem 3.2.16. (X, μ) , (Y, λ) ve (Z, ν) birer GTS olsun. Ayrıca $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ ve $g: (Y, \lambda) \rightarrow (Z, \nu)$ fonksiyonları tanımlansın. Eğer f fonksiyonu *weakly- $(\theta_\mu, \theta_\lambda)$ -irresolute* ve g fonksiyonu *hemen hemen karşıt- (θ_λ, ν) sürekli* ise $g \circ f: (X, \mu) \rightarrow (Z, \nu)$ bileşke fonksiyonu *hemen hemen karşıt- (θ_μ, ν) süreklidir*.

İspat: Z kümesinde bir ν -regüler açık V kümesi alalım. Bu durumda $(Z \setminus V)$ ν -regüler kapalıdır. Ayrıca g fonksiyonu *hemen hemen karşıt- (θ_λ, ν) sürekli* olduğundan $g^{-1}(V)$ Y kümesinde θ_λ -kapalıdır. Bu durumda $(Y \setminus g^{-1}(V))$ Y kümesinde θ_λ -açıktır. Diğer yandan f fonksiyonu *weakly- $(\theta_\mu, \theta_\lambda)$ -irresolute* olduğundan;

$$(g \circ f)^{-1}(Z \setminus V) = f^{-1}(g^{-1}(Z \setminus V)) = f^{-1}(Y \setminus g^{-1}(V)) \text{ } X \text{ kümesinde } \theta_\mu\text{-açıktır.}$$

O halde Teorem 3.1.1.(2)'den $g \circ f$ bileşke fonksiyonu *hemen hemen karşıt- (θ_μ, ν) süreklidir*.

Tanım 3.2.17. (X, μ) ve (Y, λ) birer genelleştirilmiş topolojik uzay olsun. Ayrıca $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $V \in \theta_\lambda C(Y)$ için $f(U) = V$ olacak şekilde bir $U \in \theta_\mu C(X)$ varsa f fonksiyonu *ön- $(\theta_\mu, \theta_\lambda)$ -kapalı sürjektif* fonksiyon olarak isimlendirilir.

Teorem 3.2.18. (X, μ) , (Y, λ) ve (Z, ν) birer genelleştirilmiş topolojik uzay olsun. Ayrıca $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ ve $g: (Y, \lambda) \rightarrow (Z, \nu)$ fonksiyonları verilsin. Eğer f fonksiyonu *ön- $(\theta_\mu, \theta_\lambda)$ -kapalı sürjektif* fonksiyon ve $g \circ f: (X, \mu) \rightarrow (Z, \nu)$ bileşke fonksiyonu *hemen hemen karşıt- (θ_μ, ν) sürekli* ise g fonksiyonu *hemen hemen karşıt- (θ_λ, ν) süreklidir*.

İspat: Z kümesinde bir ν -regüler açık V kümesi alalım. Burada $g \circ f$ bileşke fonksiyonu *hemen hemen karşıt- (θ_μ, ν) sürekli* olduğundan $(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$ X kümesinde θ_μ -kapalıdır. Ayrıca f fonksiyonu *ön- $(\theta_\mu, \theta_\lambda)$ -kapalı sürjektif* fonksiyon olduğundan $f(f^{-1}(g^{-1}(V))) = g^{-1}(V)$ Y kümesinde θ_λ -kapalıdır. O halde g fonksiyonu *hemen hemen karşıt- (θ_λ, ν) süreklidir*.

Tanım 3.2.19. (X, μ) ve (Y, λ) birer genelleştirilmiş topolojik uzay olsun. Ayrıca $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $x \in X$ ve Y 'nin $f(x)$ 'i içeren her λ -açık V alt

kümesi için $f(U) \subseteq c_\lambda(V)$ olacak şekilde x 'i içeren X kümesinin bir θ_μ -açık U alt kümesi varsa f fonksiyonu *weakly* (θ_μ, λ) -sürekli olarak isimlendirilir.

Teorem 3.2.20. (X, μ) ve (Y, λ) birer genelleştirilmiş topolojik uzay olsun. Ayrıca $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu *hemen hemen karşıt* (θ_μ, λ) sürekli ise f fonksiyonu aynı zamanda *weakly* (θ_μ, λ) sürekli *dir*.

İspat: Öncelikle $x \in X$ ve Y kümesinde $f(x)$ 'i içeren bir λ -açık V kümesi alalım.

Ayrıca $c_\lambda(V) = c_\lambda(i_\lambda(V)) = c_\lambda(i_\lambda(c_\lambda(i_\lambda(V)))) = c_\lambda(i_\lambda(c_\lambda(V)))$ olduğundan $c_\lambda(V)$ $f(x)$ 'i içeren λ -regüler kapalı kümedir.

Teorem 3.1.1.(3)'ten $f(U) \subseteq c_\lambda(V)$ olacak şekilde x 'i içeren bir θ_μ -açık U kümesi vardır. O halde f fonksiyonu *weakly* (θ_μ, λ) sürekli *dir*.

4. HEMEN HEMEN KARŞIT- $(\theta_{\mu_1, \mu_2}, \delta_{v_1, v_2})$ SÜREKLİLİK

4.1. Hemen Hemen Karşıit- $(\theta_{\mu_1, \mu_2}, \delta_{v_1, v_2})$ Süreklilik Tanım ve Karakterizasyonu

Tanım 4.1.1 (X, μ_1, μ_2) ve (Y, v_1, v_2) birer BIGTS olsun. Eğer Y kümesinin her δ_{v_1, v_2} -açık V alt kümesi için $f^{-1}(V)$, X uzayında θ_{μ_1, μ_2} -kapalı oluyorsa $f: (X, \mu_1, \mu_2) \rightarrow (Y, v_1, v_2)$ fonksiyonu *hemen hemen karşıit- $(\theta_{\mu_1, \mu_2}, \delta_{v_1, v_2})$ -süreklili* olarak isimlendirilir.

Teorem 4.1.2. (X, μ_1, μ_2) ve (Y, v_1, v_2) birer BIGTS olsun. Ayrıca $f: (X, \mu_1, \mu_2) \rightarrow (Y, v_1, v_2)$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda aşağıdakiler eşdeğerdir;

- (1) f fonksiyonu *hemen hemen karşıit- $(\theta_{\mu_1, \mu_2}, \delta_{v_1, v_2})$ -süreklili*dir;
- (2) Y kümesinin her δ_{v_1, v_2} -kapalı kümesinin ters görüntüsü X uzayında θ_{μ_1, μ_2} -açıktır;
- (3) Her $x \in X$ ve her $V \in \delta_{v_1, v_2}-C(Y, f(x))$ için $f(U) \subseteq V$ olacak şekilde bir $U \in \theta_{\mu_1, \mu_2}-O(X, x)$ vardır;
- (4) Her $x \in X$ ve her $V \in \delta_{v_1, v_2}-C(Y, f(x))$ için $f(c_{\mu_2}(U)) \subseteq V$ olacak şekilde x 'i içeren bir μ_1 -açık U kümesi vardır;
- (5) Her $x \in X$ ve her $V \in \delta_{v_1, v_2}-C(Y, f(x))$ için $f(c_{\mu_2}(i_{\mu_1}(C))) \subseteq V$ olacak şekilde x 'i içeren bir μ_2 -kapalı C kümesi vardır.

İspat:

(1) $\Leftrightarrow$ (2) F kümesi Y kümesinin bir δ_{v_1, v_2} -kapalı alt kümesi olsun. Bu durumda $(Y \setminus F)$, δ_{v_1, v_2} -açıktır. Ayrıca f fonksiyonu *hemen hemen karşıit- $(\theta_{\mu_1, \mu_2}, \delta_{v_1, v_2})$ -süreklili* olduğundan $f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F)$ θ_{μ_1, μ_2} -kapalıdır. Bu durumda $f^{-1}(F)$ θ_{μ_1, μ_2} -açıktır.

Tersine M kümesi Y kümesinin bir δ_{v_1, v_2} -açık alt kümesi olsun. Bu durumda $(Y \setminus M)$ δ_{v_1, v_2} -kapalıdır. Ayrıca (2)'den $f^{-1}(Y \setminus M) = X \setminus f^{-1}(M)$ θ_{μ_1, μ_2} -açık olur. O halde $f^{-1}(M)$ θ_{μ_1, μ_2} -kapalıdır. Buradan f fonksiyonu *hemen hemen karşıit- $(\theta_{\mu_1, \mu_2}, \delta_{v_1, v_2})$ -süreklili* olduğu görülür.

(2) $\Rightarrow$ (3) Öncelikle $x \in X$ ve V kümesi Y kümesinin $f(x)$ 'i içeren bir δ_{v_1, v_2} -kapalı alt kümesi olsun. Burada $x \in f^{-1}(V)$ olur. Ayrıca (2)'den $f^{-1}(V)$ θ_{μ_1, μ_2} -açıktır. Bu durumda $U = f^{-1}(V)$ alırsak U kümesi $f(U) \subseteq V$ koşulunu sağlayan X kümesinin x 'i içeren θ_{μ_1, μ_2} -

açık alt kümesidir.

(3) $\Rightarrow$ (4) Öncelikle $x \in X$ ve V kümesi Y kümesinin $f(x)$ 'i içeren bir δ_{v_1, v_2} -*kapalı* alt kümesi olsun. Buradan $x \in f^{-1}(V)$ göz önüne alalım. Ayrıca (3)'ten $f(W) \subseteq V$ olacak şekilde x 'i içeren bir θ_{μ_1, μ_2} -*açık* W kümesi vardır.

W kümesinin θ_{μ_1, μ_2} -*açıklığı* $x \in M \subseteq c_{\mu_2}(M) \subseteq W$ olacak şekilde x 'i içeren bir μ_1 -*açık* M kümesinin var olması demektir. Buradan $f(M) \subseteq f(c_{\mu_2}(M)) \subseteq f(W) \subseteq V$ elde ederiz. Bu durumda $f(c_{\mu_2}(M)) \subseteq V$ koşulunu sağlayan, x 'i içeren bir μ_1 -*açık* M kümesi vardır.

(4) $\Rightarrow$ (5) İlk olarak $x \in X$ ve V kümesi Y kümesinin $f(x)$ 'i içeren bir δ_{v_1, v_2} -*kapalı* alt kümesi olsun. Buradan $x \in f^{-1}(V)$ göz önüne alalım. Ayrıca (4)'ten $x \in U$ ve $f(c_{\mu_2}(U)) \subseteq V$ koşullarını sağlayan bir μ_1 -*açık* U kümesi vardır.

O halde

$$\begin{aligned} x &\in U \subseteq c_{\mu_2}(U) \\ x &\in i_{\mu_1}(U) = U \subseteq i_{\mu_1}(c_{\mu_2}(U)) \\ x &\in c_{\mu_2}(i_{\mu_1}(U)) = c_{\mu_2}(U) \subseteq c_{\mu_2}(i_{\mu_1}(c_{\mu_2}(U))) \quad (I) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} i_{\mu_1}(c_{\mu_2}(U)) &\subseteq c_{\mu_2}(U) \\ c_{\mu_2}(i_{\mu_1}(c_{\mu_2}(U))) &\subseteq c_{\mu_2}(c_{\mu_2}(U)) = c_{\mu_2}(U) \quad (II) \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

(I) ve (II)'den $c_{\mu_2}(i_{\mu_1}(c_{\mu_2}(U))) = c_{\mu_2}(U)$ olur.

$C = c_{\mu_2}(U)$ alalım.

Bu durumda $f(c_{\mu_2}(i_{\mu_1}(C))) = f(c_{\mu_2}(U)) \subseteq V$ olur. Sonuçta $f(c_{\mu_2}(i_{\mu_1}(C))) \subseteq V$ olacak şekilde x 'i içeren μ_2 -*kapalı* C kümesi elde etmiş oluruz.

(5) $\Rightarrow$ (2) V kümesi Y kümesinin $f(x)$ 'i içeren bir δ_{v_1, v_2} -*kapalı* alt kümesi olsun. Burada $x \in f^{-1}(V)$ olur. Ayrıca (5)'ten $f(c_{\mu_2}(i_{\mu_1}(B))) \subseteq V$ olacak şekilde x 'i içeren bir μ_2 -*kapalı* B kümesi vardır. Buradan $i_{\mu_1}(B) \subseteq c_{\mu_2}(i_{\mu_1}(B)) \subseteq f^{-1}(V)$ elde ederiz. Bundan dolayı

$f^{-1}(V)$ θ_{μ_1, μ_2} -*açıktır*.

Tanım 4.1.3. (X, μ_1, μ_2) ve (Y, ν_1, ν_2) birer BIGTS olsun. Ayrıca $f: (X, \mu_1, \mu_2) \rightarrow (Y, \nu_1, \nu_2)$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda f fonksiyonu eğer;

- (1) Her $G \in \theta_{\nu_1, \nu_2}$ için $f^{-1}(G) \in \theta_{\mu_1, \mu_2}$ ise $(\theta_{\mu_1, \mu_2}, \theta_{\nu_1, \nu_2})$ -sürekli [4] ve
- (2) Her $G \in \delta_{\nu_1, \nu_2}$ için $f^{-1}(G) \in \delta_{\mu_1, \mu_2}$ ise $(\delta_{\mu_1, \mu_2}, \delta_{\nu_1, \nu_2})$ -sürekli [4] olarak isimlendirilir.

Teorem 4.1.4. (X, μ_1, μ_2) , (Y, ν_1, ν_2) ve $(Z, \lambda_1, \lambda_2)$ birer BIGTS olsun. Ayrıca

$f: (X, \mu_1, \mu_2) \rightarrow (Y, \nu_1, \nu_2)$ ve $g: (Y, \nu_1, \nu_2) \rightarrow (Z, \lambda_1, \lambda_2)$ fonksiyonları verilsin. Burada eğer f fonksiyonu $(\theta_{\mu_1, \mu_2}, \theta_{\nu_1, \nu_2})$ -sürekli ve g fonksiyonu *hemen hemen karşıt* $(\theta_{\nu_1, \nu_2}, \delta_{\lambda_1, \lambda_2})$ -sürekli ise $g \circ f: (X, \mu_1, \mu_2) \rightarrow (Z, \lambda_1, \lambda_2)$ bileşke fonksiyonu *hemen hemen karşıt* $(\theta_{\mu_1, \mu_2}, \delta_{\lambda_1, \lambda_2})$ -süreklidir.

İspat: V kümesi Z 'nin herhangi bir $\delta_{\lambda_1, \lambda_2}$ -açık alt kümesi olsun. Bu durumda $(Z \setminus V)$ $\delta_{\lambda_1, \lambda_2}$ -kapalıdır. Ayrıca g fonksiyonu *hemen hemen karşıt* $(\theta_{\nu_1, \nu_2}, \delta_{\lambda_1, \lambda_2})$ -sürekli olduğundan $g^{-1}(V)$ Y uzayında θ_{ν_1, ν_2} -kapalıdır. Bu durumda $(Y \setminus g^{-1}(V))$ θ_{ν_1, ν_2} -açıktır. Aynı zamanda f fonksiyonu $(\theta_{\mu_1, \mu_2}, \theta_{\nu_1, \nu_2})$ -sürekli olduğundan $(g \circ f)^{-1}(Z \setminus V) = f^{-1}(g^{-1}(Z \setminus V)) = f^{-1}(Y \setminus g^{-1}(V))$ X uzayında θ_{μ_1, μ_2} -açıktır. Teorem 4.1.2.(2)'den $g \circ f$ bileşke fonksiyonu *hemen hemen karşıt* $(\theta_{\mu_1, \mu_2}, \delta_{\lambda_1, \lambda_2})$ -süreklidir.

Tanım 4.1.5. (X, μ_1, μ_2) ve (Y, ν_1, ν_2) birer BIGTS olsun. Ayrıca $f: (X, \mu_1, \mu_2) \rightarrow (Y, \nu_1, \nu_2)$ fonksiyonu verilsin. Eğer Y kümesinin $f(x)$ 'i içeren her δ_{ν_1, ν_2} -kapalı V alt kümesi için $f(U) = V$ olacak şekilde X kümesinin x 'i içeren bir θ_{μ_1, μ_2} -kapalı U alt kümesi varsa f fonksiyonu *ön* $(\theta_{\mu_1, \mu_2}, \delta_{\nu_1, \nu_2})$ -sürjektif olarak isimlendirilir.

Teorem 4.1.6. (X, μ_1, μ_2) , (Y, ν_1, ν_2) ve $(Z, \lambda_1, \lambda_2)$ birer BIGTS olsun.

Ayrıca $f: (X, \mu_1, \mu_2) \rightarrow (Y, \nu_1, \nu_2)$ ve $g: (Y, \nu_1, \nu_2) \rightarrow (Z, \lambda_1, \lambda_2)$ fonksiyonları verilsin. Eğer f fonksiyonu *ön* $(\theta_{\mu_1, \mu_2}, \delta_{\nu_1, \nu_2})$ -sürjektif ve $g \circ f: (X, \mu_1, \mu_2) \rightarrow (Z, \lambda_1, \lambda_2)$ bileşke fonksiyonu *hemen hemen karşıt* $(\theta_{\mu_1, \mu_2}, \delta_{\lambda_1, \lambda_2})$ -sürekli ise g fonksiyonu *hemen hemen karşıt* $(\theta_{\nu_1, \nu_2}, \delta_{\lambda_1, \lambda_2})$ -süreklidir.

İspat: V kümesi Z kümesinin bir $\delta_{\lambda_1, \lambda_2}$ -açık alt kümesi olsun. Bu durumda $g \circ f$ bileşke fonksiyonu *hemen hemen karşıt* $(\theta_{\mu_1, \mu_2}, \delta_{\lambda_1, \lambda_2})$ -sürekli olduğundan

$(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$ X uzayında θ_{μ_1, μ_2} -kapalıdır ve f fonksiyonu $\text{ön}-(\theta_{\mu_1, \mu_2}, \delta_{v_1, v_2})$ -sürjektif olduğundan $f(f^{-1}(g^{-1}(V))) = g^{-1}(V)$ Y uzayında θ_{v_1, v_2} -kapalıdır. O halde g fonksiyonu *hemen hemen karşıt*-($\theta_{v_1, v_2}, \delta_{\lambda_1, \lambda_2}$)-süreklidir.

Tanım 4.1.7. [11] (X, μ_1, μ_2) ve (Y, v_1, v_2) birer BIGTS olsun. Ayrıca $f: (X, \mu_1, \mu_2) \rightarrow (Y, v_1, v_2)$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda eğer her $x \in X$ ve Y kümesinin $f(x)$ 'i içeren her v_1 -açık V alt kümesi için $f(i_{\mu_1}(c_{\mu_2}(U))) \subseteq c_{v_2}(V)$ olacak şekilde X kümesinin x 'i içeren bir μ_1 -açık U alt kümesi varsa f fonksiyonu weakly-($\delta_{\mu_1, \mu_2}, v_1, v_2$)-süreklilik olarak isimlendirilir.

Lemma 4.1.8. [4] μ_1 ve μ_2 X ($\neq \emptyset$) kümesinde birer GT ve $S \subseteq X$ olsun. Bu durumda θ_{μ_1, μ_2} ve δ_{μ_1, μ_2} X kümesinde birer GTS olur ve $\theta_{\mu_1, \mu_2} \subseteq \delta_{\mu_1, \mu_2} \subseteq \mu_1$ kapsamaları geçerlidir.

Teorem 4.1.9. (X, μ_1, μ_2) ve (Y, v_1, v_2) birer BIGTS olsun. Bu durumda eğer bir $f: (X, \mu_1, \mu_2) \rightarrow (Y, v_1, v_2)$ fonksiyonu *hemen hemen karşıt*-($\theta_{\mu_1, \mu_2}, \delta_{v_1, v_2}$)-süreklilik ise f fonksiyonu aynı zamanda weakly-($\delta_{\mu_1, \mu_2}, v_1, v_2$)-süreklidir.

İspat: Öncelikle $x \in X$ ve Y kümesinin $f(x)$ 'i içeren herhangi bir δ_{v_1, v_2} -açık V alt kümesini alalım. Lemma 4.1.8'den $V \in \delta_{v_1, v_2} \subseteq v_1$ olur. Bu durumda f fonksiyonu *hemen hemen karşıt*-($\theta_{\mu_1, \mu_2}, \delta_{v_1, v_2}$)-süreklilik olduğundan Teorem 4.1.2.(4)'den $f(c_{\mu_2}(U)) \subseteq V$ olacak şekilde X kümesinin x 'i içeren bir μ_1 -açık U alt kümesi vardır. Buradan

$$x \in U \subseteq c_{\mu_2}(U)$$

$$x \in U = i_{\mu_1}(U) \subseteq i_{\mu_1}(c_{\mu_2}(U)) \subseteq c_{\mu_2}(U) \text{ elde ederiz.}$$

Bu durumda

$$f(i_{\mu_1}(c_{\mu_2}(U))) \subseteq f(c_{\mu_2}(U)) \subseteq V \subseteq c_{v_2}(V) \text{ kapsamaları geçerlidir.}$$

Dolayısıyla $f(i_{\mu_1}(c_{\mu_2}(U))) \subseteq c_{v_2}(V)$ olacak şekilde X kümesinin x 'i içeren bir μ_1 -açık U alt kümesi olduğunu gösterdik. Sonuçta f fonksiyonu weakly-($\delta_{\mu_1, \mu_2}, v_1, v_2$)-süreklidir.

5. SONUÇLAR

Bu çalışma sonucunda; genelleştirilmiş topoloji olan μ 'nün θ_μ -modifikasyonundan yararlanarak *karşıt*-(θ_μ, λ)-süreklilik, *hemen hemen karşıt*-(θ_μ, λ)-süreklilik ve *hemen hemen karşıt*-($\theta_{\mu_1, \mu_2}, \delta_{v_1, v_2}$)-sürekliliği tanımladık. Bu süreklilik tiplerinin karakterizasyonunu yaptık. Diğer bazı süreklilik tipleri ile ilişkilerini inceledik ve bu bağlamda bazı sonuçlar elde ettik.



KAYNAKLAR

- [1] Á. Császár, Generalized open sets in generalized topologies, Acta Math. Hungar., 106, (2005), 53 – 66.
- [2] Á. Császár, Generalized topology, generalized continuity, Acta Math. Hungar., 96, (2002), 351 – 357.
- [3] Á. Császár, Product of generalized topologies, Acta Math Hung (2009) 123: 127–132. doi:10.1007/s10474-008-8074-x
- [4] Á. Császár, δ - and θ - modifications of generalized topologies, Acta Math. Hungar., 120, (2008), 275 – 279.
- [5] A. Al-Omari, & T. Noiri, A unified theory of contra- (μ, λ) -continuous functions in generalized topological spaces Acta Math Hung (2012) 135: 31.doi:10.1007/s10474-011-0143-x
- [6] Bishwambhar Roy and T. Noiri, Unifications on strongly θ -continuous functions, Analele Univ. de Vest, Timişorara Seria Matematică-Informatică, LI,2, (2013), 115 – 123.
- [7] B. Roy, On a type of generalized open sets, Applied Gen. Topol.,12(2), (2011),163–173
- [8] D. Jayanthi, Almost Contra continuity on generalized topological spaces, Paripex-Indian Journal of Research (2013) Volume: 2, Issue:12, 15-21.
- [9] M.S.Sarsak, On μ -compact sets in μ -spaces, Questions Answers Gen. Topology, 31 (2013), 49–57.
44 – 46.
- [10] Rajan : C. Rajan, On almost contra (b, μ) -continuous functions, International Journal of Advance Research, Ideas and Innovations in Technology, (2017) Volume 3, Issue 4, 42-49
- [11] U. Şengül, More on δ - and θ - modifications, Preprint
- [12] W. K. Min, A note on $\theta(g, g')$ -continuity on generalized topological spaces, Acta Math. Hungar., 125 (4) (2009) 387 - 393
- [13] W.K. Min, Mixed weak continuity on generalized topological spaces. Acta Math. Hungar. 132 (2011), no. 4, 339 - 347.
- [14] Z. LI and W. ZHU, Contra continuity on generalized topological spaces, Acta Math. Hungar., 138 (1-2) (2013), 34-43, DOI: 10.1007/s10474-012-0215-6

ÖZGEÇMİŞ

3 Haziran 1990, Çaycuma/Zonguldak doğumluyum. İlkokulu Zonguldak'ta ortaokulu İstanbul, lise hazırlığı Ankara'da ve lisenin diğer kademelerini İ.M.K.B. Zonguldak Anadolu Öğretmen Lisesi'nde okudum. 2008 yılında Dokuz Eylül Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliğini kazandım ve 2013 yılında mezun oldum. 2013 yılında devlet kadrosuna öğretmen olarak atandım. 4 yıl Avcılar/İstanbul'da görev yaptıktan sonra 2017 yılında Kadıköy İntaş Kız Anadolu İmam Hatip Lisesine tayin oldum. Aynı kurumda görevimi sürdürmekteyim.

Yabancı dilim İngilizcedir.

Fatih ÇIVAK

